



Universidade Federal do ABC

ANTERO SOARES DE LIMA NETO

Um Teorema de Decomposição da Curvatura Escalar

Santo André, 2020



Universidade Federal do ABC

Universidade Federal do ABC

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Antero Soares de Lima Neto

Um Teorema de Decomposição da Curvatura Escalar

Orientador: Prof. Dr. Stefano Nardulli

Coorientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática para obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO ANTERO SOARES DE LIMA NETO,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. STEFANO NARDULLI.

Santo André, 2020

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Lima Neto, Antero Soares de
Um teorema de decomposição da curvatura escalar / Antero Soares de
Lima Neto. — 2020.

86 fls. : il.

Orientador: Stefano Nardulli
Coorientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós
Graduação em Matemática, Santo André, 2020.

1. curvatura escalar. 2. variedade Riemanniana. 3. minimizante de
área. I. Nardulli, Stefano. II. Silva, Márcio Fabiano da. III. Programa de
Pós-Graduação em Matemática, 2020. IV. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) orientador(a).

Santo André/SP

5 de maio de 2020

Assinatura do(a) autor(a):

Antero Soares de Lima Neto

Assinatura do(a) orientador(a):

Márcio Feliciano da Silva



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, ANTERO SOARES DE LIMA NETO realizada em 18 de Fevereiro de 2020:

Prof.(a) ALEXANDRE LYBEROPOULOS
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) FABIANO GUSTAVO BRAGA BRITO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) GLAUCIO TERRA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) STEFANO NARDULLI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) MARCIO FABIANO DA SILVA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

AGRADECIMENTOS

De início agradeço a Providência por ter me propiciado concluir mais esse passo da minha jornada, e deixo ao leitor a tarefa de definir o que entende por Providência, faça como bem lhe aprouver.

Em seguida tenho a satisfação de agradecer a minha mãe, a Val, sei que ela não concorda com boa parte das minhas escolhas, não obstante, às respeita e me apoiou e permanece apoiando ao seu modo.

É bem sabido que na vida de estudos os problemas e as frustrações fazem parte da rotina de todos, em maior ou menor grau, e todos bem sabemos que a qualidade das relações humanas que estabelecemos com os que nos ajudam, orientam, guiam (e as vezes sem percebem conosco) é fundamental para o desenvolvimento ótimo deste modo de vida.

Além disso, quando reflito nas causas das minhas escolhas, acabo envolvido em mais inquietações, que só são amainadas quando vou a um texto de Blaise Pascal que diz “Sucede com o amor o mesmo que com relação ao bom senso: assim como cada qual supõe possuir tanto bom senso quanto aos demais, o mesmo acredita em relação ao seu poder de amar. Todavia, tanto maior seja a racionalização sobre o amor, a menos e menores coisas se ama. Mas é preciso ser bastante perspicaz para aceitar esta verdade”.

Assim sendo, preciso ser muito grato por ter sido orientado por matemáticos como Stefano Nardulli e Márcio Fabiano, cada qual ao seu modo, me ensinaram, antes de tudo, a como ser um humano melhor, como discutir e encontrar os reais pontos obscuros do que se está buscando compreender, sempre com muita paciência para com as minhas muitas falhas. E sim, a orientação de vocês foi fundamental para a conclusão desta tarefa.

Agradeço especialmente à colenda banca, que com suas ponderações, sugestões e instigante discussão ajudou esta dissertação se tornar mais compreensível, meu muito obrigado professores Alexandre LyMBERopoulos e Fabiano Gustavo.

Não poderia eu deixar de agradecer aos meus amigos, que me fazem rir nos nossos almoços, jantares, cafés, caminhadas sem destino necessariamente definido. Amigos há um circuito neuronal especial para vocês em minha mente, muito obrigado

Juliana, Ana Paula, Nordon, Lucas, Italo, Paulo e todos os outros que não mencionarei, uma vez que certamente esquecerei alguém. Sou muito grato por poder compartilhar momentos com vocês.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) em decorrência da Portaria n° 206 de 4 de setembro de 2018.

Mais terrível que a derrota das armas é
o colapso do *espírito* humano.
Beato Michäel Kozal.

RESUMO

Esta dissertação objetiva exibir a demonstração de um resultado análogo do Teorema de Cheeger-Gromoll obtido por Otis Chodosh, Michael Eichmar e Vlad Moraru. Este resultado afirma que toda variedade Riemanniana de dimensão 3, com curvatura escalar não negativa, contendo um cilindro minimizante de área é plana.

Palavras-chave: curvatura escalar, variedade Riemanniana, minimizante de área.

ABSTRACT

This dissertation is focused on showing an analogous of Cheeger-Gromoll's theorem obtained by Otis Chodosh, Michael Eichmar, and Vlad Moraru. This result shows that a 3-Riemannian manifold with nonnegative scalar curvature is flat if it contains an area-minimizing cylinder.

Keywords: scalar curvature, Riemannian manifold, area-minimizing.

CONTEÚDO

1	INTRODUÇÃO	1
2	PRELIMINARES	5
2.1	Métrica Riemanniana	10
2.2	Conexões	13
2.3	A Segunda Forma Fundamental	17
2.4	Operadores Diferenciais	20
2.5	Curvaturas	30
2.6	Varição Primeira e Segunda da Área	34
2.7	Elementos de Geometria Conforme	39
2.8	Generalidades de Topologia Algébrica	43
2.9	Superfícies Minimizantes de Área	44
3	RESULTADOS AUXILIARES	49
3.1	Construção de uma métrica específica	57
4	TEOREMA DA CURVATURA ESCALAR	61
5	CONSEQUÊNCIAS	67
	Referência Bibliográfica	69

1

INTRODUÇÃO

Problemas isoperimétricos remontam a Antiguidade dos conhecimentos matemáticos do Ocidente, surgem com os gregos de modo mais sistematizado na *Coleção* de Pappus de Alexandria¹, que é um conjunto de trabalhos reunidos em livros distintos com temas relacionados entre si, no Livro 5 da coleção que é, segundo Katz, "o mais polido da *Coleção*"[1, p. 23] no qual as figuras isoperimétricas são abordadas. O clássico problema isoperimétrico pode ser formulado como sendo, *de todas as figuras com perímetro dado L qual encerra a maior área A ?*

Aspectos relativos a esse tipo de questão permaneceram sendo estudados e analisados pela pesquisa e ensino tradicional da geometria euclidiana e o seu consequente desenvolvimento.

Porém, com o advento do Cálculo, surgem então as primeiras abordagens de questões geométricas usando-se ferramentas não tradicionais (até então, basicamente eram régua e compasso), questões como comprimento de curvas específicas, cálculo de áreas e descrição analítica de entidades geométricas tornaram-se extremamente comuns, este é o advento da dita geometria analítica como conhecemos, ao menos em parte.

Citamos como exemplos de matemáticos que ajudaram a desenvolver o cálculo e que trataram de figuras isoperimétricas, os irmãos Johann e Jakob Bernoulli, em cujas investigações centravam-se numa análise detalhada de casos específicos [2].

Outro caso é o de Jakob Steiner que resolveu vários problemas isoperimétricos e em 1836 "provou" um resultado que podemos compatibilizar com a desigualdade isoperimétrica no plano ($L^2 - 4\pi A \geq 0$, onde L é comprimento da curva simples fechada do plano e A área da região interior encerrada pela curva), usamos aqui as aspas para nos referir a prova dada por Steiner porque nela havia uma omissão que foi destacada por Dirichlet e rigorosamente demonstrada por Weierstrass [3].

Acrescentamos o fato de que, Steiner foi contemporâneo do momento da consolidação da geometria sintética, resultado dos estudos de matemáticos como Jean-Victor

¹ Matemático grego do fim do período helenístico viveu entre 290-350 aproximadamente.

Poncelet e Karl Georg Christian von Staudt [3]. Muitos outros detalhes acerca das contribuições de eminentes matemáticos como Euler e Lagrange que abordaram os problemas isoperimétricos como casos de interesse em seus estudos acerca do cálculo das variações podem ser encontradas na obra de Fraser [2].

Percebe-se que, como todos os problemas abrangentes de matemática, foram necessárias muitas abordagens e vários séculos, até que se chegasse numa formulação precisa da solução do problema, provada por Tibor Radó em 1930 e Jesse Douglas, em 1931, de maneiras independentes. Evidentemente, não podemos deixar de comentar que os métodos pensados por Steiner foram de muita valia para os que voltaram a tratar o problema, por exemplo, Carathéodory em 1909 deu uma prova rigorosa de uma das técnicas que Steiner usou em sua abordagem²[4].

Com o desenvolvimento e melhor formalização do Cálculo das Variações, naturalmente os geômetras inquiriram como os problemas isoperimétricos se comportavam em ambientes mais genéricos, primeiramente nas superfícies do \mathbb{R}^3 e depois em ambientes mais gerais como as variedades Riemannianas e as *varifolds*. A importância do ponto de vista estritamente teórico versa quanto a compreender as eventuais regiões ou "lugares" nesses ambientes em que temos bem caracterizado um comportamento de minimização de um funcional de interesse, que originalmente, colocando na linguagem atual, era a minimização do funcional comprimento sujeito a condições de bordo. Aqui já podemos nos conectar com outro clássico problema da geometria e cuja análise e abordagem confundem-se com o próprio desenvolvimento do cálculo variacional, qual seja, o *Problema de Plateau*.

No contexto da Geometria Riemanniana desenvolvida no século 20 e 21, diversos resultados possuem importância, devido um interesse dos físicos por sua aplicação para uma melhor compreensão do espaço-tempo, por exemplo, Carlotto et al. em [5] estudaram superfícies mínimas estáveis de dimensão 3 em espaços com curvatura escalar não-negativa, onde mostram a rigidez para tais superfícies no caso em que a variedade ambiente é assintoticamente plana e tem horizonte limitado, uma vista nas referências desse artigo nos mostram vários dos enfoques e resultados obtidos com conexão com as aplicações físicas.

Um clássico resultado da Geometria Riemanniana no século 20, foi a prova da decomposição da curvatura de Ricci não negativa de Cheeger-Gromoll [6], o qual afirma que se M é uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não negativa,

² Steiner em sua abordagem usa noções de convexidade e construções com polígonos.

então M é isométrica a $\overline{M} \times \mathbb{R}^k$ onde \overline{M} não contém retas e \mathbb{R}^k está munido da métrica plana usual. Tal resultado é uma generalização de um outro resultado de Toponogov, o qual exigia mais hipóteses.

Desta forma, Chodosh et al. em [7] provaram um análogo do clássico teorema de Cheeger-Gromoll mas agora com a curvatura escalar não negativa, qual seja, considerando M uma variedade Riemanniana de dimensão 3 com curvatura escalar não negativa contendo um cilindro minimizante de área, então M é plana.

Esta dissertação encontra-se organizada da seguinte maneira: (1) uma introdução na qual discutimos brevemente o problema e alguns correlatos, (2) um capítulo de preliminares no qual discutimos generalidades da Geometria Riemanniana, apresentamos a primeira e segunda variação da área, exibimos o operador estabilidade e explicitamos as noções de superfícies minimizantes de área, (3) um capítulo no qual fazemos uma série de lemas auxiliares que serão usados na prova do resultado principal e exibimos uma construção de uma família de métricas satisfazendo determinadas propriedades, (4) um capítulo no qual demonstramos o resultado principal de [7] com detalhes e (5) um capítulo em que encerramos discutindo brevemente aspectos de interesse do problema e que ainda permanecem sem prova.

2

PRELIMINARES

Faremos neste capítulo uma breve revisão de conceitos de Geometria Riemanniana para o estudo das variedades Riemannianas, esta revisão está baseada nos textos [8], [9], [10] e [11]. Objetiva-se também estabelecer notações e destacar resultados que serão usados ao longo do texto.

Definição 2.1 (Variedade Topológica). *Uma variedade topológica (ou contínua) M , de dimensão n , é um espaço topológico tal que:*

1. M é Hausdorff.
2. M é localmente Euclidiana de dimensão n , isto é, cada ponto $p \in M$ admite uma vizinhança aberta U , homeomorfa a um aberto do \mathbb{R}^n .
3. M tem base enumerável.

Definição 2.2. *Seja $\phi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo definido num aberto U de M . O par (U, ϕ) é chamado **sistema de coordenadas locais** de M . Se $\phi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ então $x_1(p), \dots, x_n(p)$ são as **coordenadas locais** de p e U é uma **vizinhança coordenada**.*

Definição 2.3 (Estrutura diferenciável). *Seja M um espaço topológico localmente Euclidiano de dimensão n . Uma **estrutura diferenciável** \mathcal{F} de classe \mathcal{C}^k ($1 \leq k \leq \infty$) em M é uma coleção de sistemas de coordenadas $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in A\}$ tal que*

- (a) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.
- (b) $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é uma aplicação de classe \mathcal{C}^k entre abertos do \mathbb{R}^n .
- (c) \mathcal{F} é maximal com respeito a (b), isto é, se (U, ϕ) é um sistema de coordenadas de M tal que $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}$ e $\phi_\alpha \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^k, \forall \alpha \in A$, então (U, ϕ) é um elemento de \mathcal{F} .

Definição 2.4 (Variedade diferenciável). *Uma **variedade diferenciável** de dimensão n e classe $\mathcal{C}^k, 1 \leq k \leq \infty$, é um par (M, \mathcal{F}) onde:*

1. M é uma variedade topológica.
2. \mathcal{F} é uma estrutura diferenciável de classe C^k em M .

O exemplo mais trivial de variedade diferenciável é o espaço euclidiano \mathbb{R}^n , com a estrutura diferenciável dada pela identidade (difeomorfismos).

Convém explorar um pouco mais as consequências da Definição 2.4. De agora em diante, quando escrevermos uma variedade M^n , o índice superior n indicará a dimensão de M . A seguir, estenderemos a noção de diferenciabilidade às aplicações entre variedades.

Definição 2.5. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $f : M_1 \rightarrow M_2$ é diferenciável em $p \in M_1$ se, dada uma parametrização $\psi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $f(p)$, existe uma parametrização $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ tal que $f(\phi(U)) \subset \psi(V)$ e a aplicação*

$$\psi^{-1} \circ f \circ \phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $\phi^{-1}(p)$.

Definição 2.6. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma curva (diferenciável) em M . Dado $p \in M$, suponha que $\alpha(0) = p$, seja \mathcal{D} conjunto das funções de M diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente a M em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM .

O conjunto T_pM , com as operações usuais de funções, possui estrutura de espaço vetorial e tem a mesma dimensão de M . Além disso, a escolha de uma parametrização $\phi : U \rightarrow M$ em p determina uma base de T_pM dada por

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_0 \right\} \quad (1)$$

T_pM . Decorre daí que a estrutura linear em T_pM assim definida não depende da parametrização ϕ . O espaço vetorial T_pM é chamado espaço tangente de M em p .

Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $f : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável

$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = f \circ \alpha$. A aplicação $df_p : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$ dada por $df_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α . Além disso, df_p é chamada diferencial de f em p .

Nas mesmas condições acima, dizemos que uma aplicação $f : M_1 \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo se ela é diferenciável, bijetora e sua inversa f^{-1} é diferenciável. A aplicação f é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $f(p)$ tais que $f : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

Definição 2.7. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma **imersão** se $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset N$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por N , diz-se que f é um **mergulho**. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N .*

Observe que se $f : M^m \rightarrow N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$. A diferença $n - m$ é chamada a codimensão da imersão f .

Na maior parte das questões puramente locais de Geometria é indiferente tratar com imersões ou mergulhos. Isto provém da seguinte proposição (cuja demonstração encontra-se em [9, p. 14]), que mostra ser toda imersão localmente (em certo sentido) um mergulho.

Proposição 2.8. *Seja $f : M_1^n \rightarrow M_2^m$, $n \leq m$, uma imersão da variedade M_1 na variedade M_2 . Para todo ponto $p \in M_1$, existe uma vizinhança $V \subset M_1$ de p tal que a restrição $f|_V : V \rightarrow M_2$ é um mergulho.*

Um exemplo não trivial e bastante importante de variedade diferenciável é o que chamamos de *fibrado tangente*, que consiste em, dada $M^n = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ uma variedade diferenciável, considere $TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}$, munindo o conjunto TM da estrutura diferenciável $\{\tilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\phi}_\alpha\}$, onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica, isto é, $(p, v) \mapsto p$ e $\tilde{\phi}(p, v) = (\phi(p), d\phi_p(v))$ (de dimensão $2n$).

Definição 2.9. *Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é **orientável** se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ tal que para todo par α, β , com $\phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.*

Caso contrário, dizemos que M é não orientável. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo (Definição 2.9) é chamada orientação de M e então M é orientada. Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem (Definição 2.9) determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz (Definição 2.9).

Definição 2.10. Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência associando cada ponto $p \in M$ a um vetor $X(p) \in T_pM$. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2)$$

onde $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ é a base associada a ϕ (no sentido de (1)), com $i = 1, \dots, n$. É fácil notar que X é diferenciável se, e só se, as funções a_i são diferenciáveis para qualquer parametrização.

É conveniente, em determinadas situações, utilizar a ideia sugerida por (2) e considerar um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$, do conjunto \mathcal{D} das funções diferenciáveis em M no conjunto \mathcal{F} das funções diferenciáveis em M , definida por

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \quad (3)$$

onde f no segundo membro indica, por abuso de notação, a expressão de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ na parametrização ϕ . Como é imediato verificar, a função Xf obtida em (3) não depende da escolha da parametrização ϕ . Neste contexto, também é imediato verificar que X é diferenciável se, e somente se, $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, isto é, $Xf \in \mathcal{D}$ para todo $f \in \mathcal{D}$.

Observe que se $\gamma : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo, $v \in T_pM$ e f é uma função diferenciável em uma vizinhança de $\gamma(p)$, teremos

$$(d\gamma(v)f)\gamma(p) = v(f \circ \gamma)(p).$$

De fato, seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então

$$(d\gamma(v)f)\gamma(p) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma \circ \alpha) \right|_{t=0} = v(f \circ \gamma)(p).$$

A interpretação de X como um operador em \mathcal{D} permite-nos considerar os iterados de X . Por exemplo, se X e Y são campos diferenciáveis em M e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. Em geral, tais

operações não conduzem a campos vetoriais, por envolverem derivadas de ordem superior à primeira. Entretanto, é possível mostrar que existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}$,

$$Zf = (XY - YX)f. \quad (4)$$

O campo vetorial Z em (4) é chamado o **colchete** $[X, Y] = XY - YX$ e é claramente diferenciável. A operação colchete possui as seguintes propriedades:

Proposição 2.11. *Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M e α, β são números reais, e f, g funções diferenciáveis, então*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anticomutatividade*)
2. $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$ (*linearidade*)
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*)
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Demonstração. [9, p. 29]. □

Seja M uma variedade diferenciável. Uma família de abertos $V_\alpha \subset M$ com $\cup_\alpha V_\alpha = M$ é **localmente finita** se todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U tal que $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices. O **suporte** de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, denotado por $\text{supp } f$, é o fecho do conjunto dos pontos de M onde f é diferente de zero.

Dizemos que uma família f_α de funções diferenciáveis $f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **partição diferenciável da unidade** se:

1. Para todo $\alpha \in \Lambda$, temos $f_\alpha \geq 0$ e o suporte de f_α está contido em uma vizinhança coordenada $V_\alpha = \phi_\alpha(U_\alpha)$ de uma estrutura diferenciável $\{(U_\beta, \phi_\beta)\}$ de M .
2. A família $\{V_\alpha\}$ é localmente finita.
3. $\sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(p) = 1$, para todo $p \in M$.

Dizemos que a partição $\{f_\alpha\}$ da unidade está **subordinada à cobertura** $\{V_\alpha\}$. A existência de partição da unidade é um resultado clássico da teoria, cuja prova pode ser encontrada em [9]:

Proposição 2.12. *Seja M uma variedade diferenciável e $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de M . Então existe uma partição da unidade $\{f_\alpha\}$, subordinada à cobertura $\{V_\alpha\}$ com $\text{supp } f_i$ compacto, $\forall \alpha \in A$.*

2.1 MÉTRICA RIEMANNIANA

Partimos de uma variedade diferenciável na qual introduzimos em cada ponto uma maneira de medir comprimentos de vetores tangentes que variam diferenciavelmente com o ponto, isto é, associamos uma forma bilinear simétrica positiva definida em cada ponto que varia de modo diferenciável.

Definição 2.13. *Uma **métrica Riemanniana** (ou **estrutura Riemanniana**) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $\phi(x_1, \dots, x_n) = q \in \phi(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\phi(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n) \quad (5)$$

é uma função diferenciável em U .

Esta definição, é claro, não depende da escolha do sistema de coordenadas.

Deixaremos de indicar o índice p em $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ sempre que não houver possibilidade de confusão. As funções g_{ij} são chamadas **expressão da métrica Riemanniana** no **sistema de coordenadas** $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Uma variedade com uma dada métrica Riemanniana chama-se **variedade Riemanniana** e denotamos por (M, g) ou ainda $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Segue da Proposição 2.12 que toda variedade Riemanniana admite uma métrica Riemanniana.

Definição 2.14. *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado uma **isometria** se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \quad (6)$$

para todo $p \in M, u, v \in T_p M$.

Definição 2.15. *Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma **isometria local** em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo (6).*

É usual dizer que a variedade Riemanniana M é **localmente isométrica** à variedade Riemanniana N se para todo p em M existe uma vizinhança U de p em M e uma isometria local $f : U \rightarrow f(U) \subset N$.

O próximo exemplo mostra como induzir uma métrica Riemanniana para uma imersão.

Exemplo 2.16. *(Variedades imersas) Seja $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ uma imersão. Se N tem uma estrutura Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$, f induz uma estrutura Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ em M por $\langle u, v \rangle'_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$ para $u, v \in T_pM$. A métrica de M dada por $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ é chamada então a **métrica induzida** de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ por f e, neste caso f é uma **imersão isométrica**.*

Concluimos, mostrando como a métrica Riemanniana permite definir uma noção de volume em uma variedade Riemanniana orientada M^n .

Para isso, sejam $p \in M$ e uma parametrização $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, com $p \in \phi(U)$, na orientação de M (dizemos que tal parametrização é positiva). Considere uma base ortonormal positiva $\{e_1, \dots, e_n\}$ em T_pM e escreva

$$X_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

na base $\{e_i\}$ por $X_i(p) = \sum_{ij} a_{ij}e_j$. Então

$$g_{ik}(p) = \langle X_i, X_k \rangle(p) = \sum_{jl} a_{ij}a_{kl} \langle e_j, e_l \rangle = \sum_j a_{ij}a_{kj}.$$

Como o volume $\text{vol}(X_1(p), \dots, X_n(p))$ do paralelepípedo formado pelos vetores $X_1(p), \dots, X_n(p)$ em T_pM é igual a $\text{vol}(e_1, \dots, e_n) = 1$ multiplicado pelo determinante da matriz (a_{ij}) , temos que

$$\text{vol}(X_1(p), \dots, X_n(p)) = \det(a_{ij}) = \sqrt{\det(g_{ij})(p)}.$$

Observe que, se $\psi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é outra parametrização positiva em torno de p , com $Y_i(p) = \frac{\partial}{\partial y_i}(p)$ e $h_{ij}(p) = \langle Y_i, Y_j \rangle(p)$, teremos

$$\begin{aligned}
\sqrt{\det(g_{ij})(p)} &= \text{vol}(X_1(p), \dots, X_n(p)) \\
&= J \text{vol}(Y_1(p), \dots, Y_n(p)) \\
&= J \sqrt{\det(h_{ij})(p)},
\end{aligned}$$

onde $J = \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) = \det(d\psi^{-1} \circ d\phi)(p) > 0$.

Agora, consideramos $R \subset M$ um aberto conexo com fecho compacto, o qual chamamos de **relativamente compacto**. Assumindo que R está contido em uma vizinhança coordenada $\phi(U)$, onde $\phi : U \rightarrow M$ é uma parametrização positiva (não inverte a orientação assumida), tal que, a fronteira de $\phi^{-1}(R) \subset U$ tem medida nula em \mathbb{R}^n , define-se o **volume** de R , indicado por $\text{vol}(R)$ como sendo

$$\text{vol}(R) = \int_{\phi^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \cdots dx_n. \quad (7)$$

A expressão em (7) está bem definida, para mostrar isso, consideremos que o conjunto R está contido em outra vizinhança coordenada $\psi(V)$ de uma parametrização positiva $\psi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, donde segue que,

$$\int_{\phi^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \cdots dx_n = \int_{\psi^{-1}(R)} \sqrt{\det(h_{ij})} dy_1 \cdots dy_n = \text{vol}(R),$$

onde usamos a fórmula de mudança de variáveis e a orientabilidade de M .

Note que o integrando em (7) é uma forma diferencial positiva de grau n , chamada usualmente de **forma volume** de M . Para definir o volume da região compacta R , que não está contida em alguma vizinhança coordenada basta considerarmos uma partição da unidade $\{\xi_i\}$ subordinada a uma cobertura (finita) de R por vizinhanças coordenadas $\phi(U_i)$ e tomar

$$\text{vol}(R) = \sum_i \int_{\phi^{-1}(R)} \xi_i v.$$

Pode-se verificar que a expressão anterior não depende da escolha da partição da unidade.

Assim sendo, a existência de uma forma diferencial positiva de grau n (elemento de volume) nos permite definir a noção de volume em uma variedade diferenciável.

As métricas Riemannianas nos fornecem um dos modos de se obter um elemento de volume.

2.2 CONEXÕES

A próxima noção fundamental a se procurar generalizar no caso das variedades Riemannianas, versa sobre a derivação, isto é, como estudar "derivação" em variedades Riemannianas. Grosso modo, o que se faz no contexto das variedades diferenciáveis é estudar a diferenciabilidade das aplicações entre abertos de espaços Euclidianos. Uma pergunta natural que surge no contexto das variedades Riemannianas, é quanto à influência da métrica, uma vez que, variedades Riemannianas são uma classe restrita das variedades diferenciáveis, o que torna razoável supor que a métrica terá papel importante.

De fato, Levi-Civita em seus estudos de Geometria sob orientação de Ricci, mostrou que existe uma "derivação" mais adequada ao contexto Riemanniano, a qual modernamente recebe o seu nome.

Definição 2.17. *Seja $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos tangentes a M . Uma **conexão afim** é uma operação*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

tal que:

1. $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$.
2. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, onde $X(f)$ é a derivada de f na direção X .
3. $\nabla_{X_1+X_2}(Y) = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$.
4. $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$, para qualquer $f \in \mathcal{D}$.

Observação 2.18. *O conceito de conexão afim é local, no seguinte sentido, dados $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ com $X_1 = X_2$ em um aberto $U \subset M$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ então $\nabla_Y X_1 = \nabla_Y X_2$ em U . De fato, tome $W = X_1 - X_2$, então $W \equiv 0$ em U , avaliemos $\nabla_Y W$ em U . Seja f tal que $f = 1$ em uma*

vizinhança de p e $f = 0$ caso contrário, defina $\tilde{W} = fW$, temos que $\tilde{W} \equiv 0$ em M , assim $0 = \nabla_Y \tilde{W}$ pois conexão é transformação linear. Mas

$$0 = \nabla_Y \tilde{W} = \nabla_Y(fW) = f\nabla_Y W + Y(f)W$$

temos $Y(f)W = 0$ pois $W \equiv 0$. Avaliando em p , $1 \cdot \nabla_Y W(p) = 0$ donde $\nabla_Y W = 0$. Consequentemente, $\nabla_Y W = \nabla_Y(X_1 - X_2) = \nabla_Y X_1 - \nabla_Y X_2 = 0 \Rightarrow \nabla_Y X_1 = \nabla_Y X_2$.

Comentamos que, na Definição 2.17, o símbolo $\nabla_X Y$ pode ser lido como sendo "derivando o campo Y na direção do campo X ". Contudo, historicamente, antes surgiu a noção de derivação covariante.

Proposição 2.19. Dada uma conexão afim ∇ em M , existe uma única operação $V \mapsto \frac{DV}{dt}$, a qual chamamos **derivada covariante** tal que:

$$1. \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$$

$$2. \frac{D}{dt}(fV) = f \frac{DV}{dt} + \frac{df}{dt}V.$$

$$3. \text{ Se existe campo } Y \in \mathfrak{X}(M) \text{ tal que } V(t) = Y(c(t)), \text{ então } \frac{DV}{dt} = \nabla_{c'(t)}Y.$$

Definição 2.20. Um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ ao longo de uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ é chamado **paralelo** se $\frac{DX}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Definição 2.21. A conexão afim ∇ é **Riemanniana** (ou **compatível com g**) se:

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.22. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita **simétrica** quando para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ valer $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Teorema 2.23. Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:

1. ∇ é simétrica.
2. ∇ é compatível com a métrica Riemanniana

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ quaisquer. Se uma tal ∇ existir, queremos calcular $\langle \nabla_X Y, Z \rangle$. Consideremos

$$X(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (8)$$

$$Y(\langle Z, X \rangle) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle \quad (9)$$

$$Z(\langle X, Y \rangle) = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \quad (10)$$

Assim, somando (8) e (9) e subtraindo (10),

$$\begin{aligned} X(\langle Y, Z \rangle) + Y(\langle X, Z \rangle) - Z(\langle X, Y \rangle) &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y \rangle + \\ &\quad + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X \rangle + \langle \nabla_Y X - \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_X Y, Z \rangle \\ &= 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Y, X], Z \rangle \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} [X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [Y, X], Z \rangle] \quad (11)$$

Com a expressão para ∇ obtida em (11), é possível garantir a existência e a unicidade de uma conexão Riemanniana. Além disso, as condições 1 e 2 seguem da construção feita para a determinação de ∇ . Mostra-se também que ∇ assim definida é uma conexão afim. \square

A equação (11) é denominada *fórmula de Koszul*.

Observação 2.24. A conexão dada pelo teorema 2.23 é denominada *conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) de M* .

Passaremos agora a abordar a noção de *derivada de Lie* de um campo X sobre uma variedade M , a qual denotaremos por $\mathcal{L}_X Y$ que é também um campo vetorial sobre M .

Dado $p \in M$, podemos descrever como definir $\mathcal{L}_X Y$ em p . Para cada x numa vizinhança de p , consideremos $\Phi_t(x) : [0, \epsilon) \rightarrow M$ que é solução da equação diferencial ordinária

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(x) = X(\Phi_t(x))$$

com a condição inicial $\Phi_0(x) = x$. Pelo Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias, existe $\epsilon > 0$, independente de x em alguma vizinhança de p , tal que existe uma única solução para $t \in [0, \epsilon)$. Em cada caso, podemos definir

$$(\mathcal{L}_X Y)(p) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\Phi_t^* Y)(p),$$

onde $(\Phi_t^* Y)(p) = (\Phi_t^{-1})_{\Phi_t(p)} Y_{\Phi_t(p)}$.

Lembrando também que $(Xf)(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_t^* f)_p$ onde $\Phi_t^* f = f \circ \Phi_t$ e usando que $(\Phi_t^* Yf) = (\Phi_t^* Y)_p (\Phi_t^* f)$, afirmamos que $(\mathcal{L}_X Y)(p) = [X, Y]_p$, cuja prova pode ser encontrada em [12].

De fato,

$$\begin{aligned} (X(Yf))_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t^* Yf)_p - (Yf)_p}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t^* Y)_p (\Phi_t^* f) - (Yf)_p}{t} \end{aligned}$$

Agora, adicionando e subtraindo $(\Phi_t^* Y)_p f$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} (X(Yf))_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t^* Y)_p (\Phi_t^* f) - (\Phi_t^* Y)_p f + (\Phi_t^* Y)_p f - Y_p f}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (\Phi_t^* Y)_p \frac{(\Phi_t^* f) - f}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t^* Y)_p - Y_p}{t} f \\ &= Y_p Xf + (\mathcal{L}_X Y)_p f \end{aligned}$$

Portanto, $XY = YX + \mathcal{L}_X Y$.

Agora vamos sinteticamente discutir as **equações de estrutura de Cartan**. Consideremos um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$, existem localmente definidas as **conexões das 1-formas** ω_j^i tais que

$$\nabla e_j = \sum_{i=1}^n \omega_j^i e_i.$$

Se $\theta^1, \dots, \theta^n$ é o correferencial dual ortonormal a $\{e_1, \dots, e_n\}$ então os ω_j^i podem ser calculados usando a equação

$$d\theta^i = - \sum_{j=1}^n \omega_j^i \wedge \theta^j,$$

que é escrita, com abuso de linguagem, como $d\theta = -\omega \wedge \theta$.

2.3 A SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

Nesta seção consideramos a seguinte situação: seja $f : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade \overline{M} de dimensão $n + m$. O nosso primeiro objetivo é generalizar a noção clássica de segunda forma fundamental estudada no das superfícies contidas no \mathbb{R}^3 para o caso $f : M \rightarrow \overline{M}$.

Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão, então para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de \overline{M} , ou seja, existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\phi : \overline{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ em um aberto V do \mathbb{R}^{n+m} , tais que ϕ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Como abuso de linguagem e simplificação de notação, identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_q M, q \in U$, com $df_p(v) \in T_{f(q)} \overline{M}$. Assim, usando essas identificações estenderemos um campo local em U de vetores tangentes à M a um campo local em \overline{U} de vetores tangentes à \overline{M} .

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p \overline{M}$ o decompõe na soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$.

Se $v \in T_p \overline{M}, p \in M$, podemos escrever

$$v = v^\top + v^N, \quad v^\top \in T_p M, \quad v^N \in (T_p M)^\perp.$$

Denominamos v^\top a **componente tangencial** de v e v^N a **componente normal** de v . Tal decomposição é diferenciável no sentido que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \rightarrow (p, v^\top) \quad \text{e} \quad (p, v) \rightarrow (p, v^N)$$

são diferenciáveis.

A conexão Riemanniana de \bar{M} será indicada por $\bar{\nabla}$. Dados X e Y , campos locais de vetores em M , e \bar{X} e \bar{Y} extensões locais a \bar{M} , definimos

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top$$

É possível verificar que esta é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M .

Para definir a segunda forma fundamental da imersão $f : M \rightarrow \bar{M}$, convém introduzir previamente a seguinte definição. Se X e Y são campos locais em M , então

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y \quad (12)$$

é um campo local em \bar{M} normal à M . Uma conta simples mostra que o campo $B(X, Y)$ não depende das extensões \bar{X} e \bar{Y} . Portanto $B(X, Y)$ está bem definida. Além disso, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$ dada por $B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$ é bilinear e simétrica, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$. Como B é bilinear, exprimindo B em um sistema de coordenadas, concluímos que o valor de $B(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Agora, podemos definir a segunda forma fundamental, sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M \quad (13)$$

é uma forma bilinear simétrica.

Definição 2.25. A forma quadrática II_η definida em $T_p M$ por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a **segunda forma fundamental** de f em p segundo o vetor normal η .

Note que fica associada à aplicação bilinear H_η uma aplicação linear autoadjunta $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ dada por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

Agora consideremos o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, ou seja, $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$. Então a imagem $f(M) \subset \overline{M}$ é uma **hipersuperfície**¹.

Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, com $\|\eta\| = 1$, como $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ é simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ com autovalores reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, isto é, $S(e_i) = \lambda_i e_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, via Teorema Espectral. Se M e \overline{M} são orientáveis e estão orientadas, e $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base com a mesma orientação de \overline{M} , o vetor η fica univocamente determinado se $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ for uma base na orientação de \overline{M} . Neste caso, denominamos os e_i por **direções principais** e os $\lambda_i = \kappa_i$ de **curvaturas principais** de f . As funções simétricas de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são invariantes da imersão. Assim, para todo $p \in M$, podemos definir a **curvatura de Gauss-Kronecker** K por

$$K = \det(S_\eta) = \kappa_1(p) \dots \kappa_n(p), \tag{14}$$

e a **curvatura média** H é definida por

$$H = \frac{1}{n} \text{traço}(S_\eta) = \frac{1}{n} (\kappa_1(p) + \dots + \kappa_n(p)). \tag{15}$$

Também definimos o vetor curvatura média \vec{H} como sendo $\vec{H} = H \vec{v}$, onde H é a curvatura média e \vec{v} é o vetor normal unitário à hipersuperfície (em relação à orientação fixada). Há ainda a noção de **fracamente média convexa** significa apenas que o vetor curvatura média é nulo ou aponta para dentro em cada ponto.

Agora, vamos considerar o caso quando $M = \mathbb{R}^{n+1}$. Com efeito, podemos dar uma interpretação geométrica para S_η . Inicialmente, seja v uma extensão local de η , unitário e normal à M . Considere S^n esfera unitária de \mathbb{R}^{n+1} , isto é, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, e defina a **aplicação normal de Gauss**, $N : M^n \rightarrow S^n$, trasladando a origem do campo v para a origem do \mathbb{R}^{n+1} e fazendo $N(p)$ ser o ponto final do trasladado de $v(p)$. Como $T_p M$ e $T_{N(p)} S^n$ são paralelos, podemos identificá-los, e vemos que $dN_p : T_p M \rightarrow T_p M$ é dada por

$$dN_p(x) = \left. \frac{d}{dt} (v \circ c(t)) \right|_{t=0} = \overline{\nabla}_x v = (\overline{\nabla}_x v)^\top = -S_\eta(x),$$

onde $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma curva com $c(0) = p, c'(0) = x$, e usamos o fato que $\langle v, v \rangle = 1$ para garantir que $\overline{\nabla}_x v = (\overline{\nabla}_x v)^\top$. Logo, segue que $-S_\eta$ é a derivada da aplicação normal de Gauss.

¹ Note que uma hipersuperfície pode ter autointersecções.

Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é **geodésica** em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_p M)^\perp$ a segunda forma fundamental b_η é identicamente nula em p . A imersão f é **totalmente geodésica** se ela é geodésica em todo ponto $p \in M$.

Uma condição mais fraca do que a de totalmente geodésica é a condição de mínima.

Definição 2.26. Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é **mínima** se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_p M)^\perp$ tem-se que o traço de $S_\eta = 0$.

A razão da palavra mínima neste contexto é que tais imersões minimizam o volume da métrica induzida. Mais precisamente, se $M \subset \overline{M}$ é uma subvariedade mínima e $D \subset M$ um domínio suficientemente pequeno de M com bordo ∂D regular, então o volume de D na métrica induzida é menor ou igual ao volume de qualquer outra subvariedade de \overline{M} com o mesmo bordo.

2.4 OPERADORES DIFERENCIAIS

Agora, passaremos a definir os operadores diferenciais em uma variedade Riemanniana.

Definição 2.27. Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Um **referencial local geodésico** em p é uma coleção de n campos vetoriais $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$, onde U é uma vizinhança de p , ortonormais em cada $q \in U$ tais que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$.

Como é sempre possível construir um referencial geodésico ao redor de um ponto de uma variedade Riemanniana, fixemos um sistema de coordenadas locais $X : U \rightarrow M$ numa vizinhança de $p \in M$, com $\{E_i\}$ sendo um referencial geodésico em p .

Podemos também considerar um outro referencial no ponto p , digamos X_i , no qual $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, desta maneira, como pontualmente X_i e E_i são bases do espaço tangente no ponto p , sabemos, da álgebra linear, que existe uma mudança de base entre eles, o que procuraremos fazer a seguir é estudar essa mudança juntamente com as propriedades diferenciais que possam facilitar os cálculos.

Como $\{X_i\}$ e $\{E_j\}$ são bases do espaço tangente T_pM , podemos então exprimir os elementos de $\{E_i\}$ em termos de X_j e os elementos $\{X_i\}$ em função dos termos E_j , ou seja,

$$E_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \quad \text{e} \quad X_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} E_j. \quad (16)$$

Pondo $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, afirmamos que

$$A = B^{-1} \quad \text{e} \quad G^{-1} = A^t A, \quad (17)$$

onde $G = (g_{ij})$ com

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle X_i, X_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n b_{ik} E_k, \sum_{l=1}^n b_{jl} E_l \right\rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^n b_{ik} b_{jl} \langle E_k, E_l \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{jk}, \end{aligned}$$

que é a entrada (i, j) da matriz BB^t , isto é, $G = BB^t$.

De fato, note que a afirmação (17) é equivalente a mostrar que

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \text{e} \quad (g^{-1})^{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}. \quad (18)$$

Contudo, de (16), segue que, para quaisquer i e j ,

$$E_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k = \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{j=1}^n b_{kj} E_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) E_j.$$

Como as combinações lineares de um dado vetor numa base são únicas, temos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = 1$ e para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ com $i \neq j$,

$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = 0$, o que mostra a primeira igualdade de (17).

A segunda relação de (17) é assim provada:

$$G^{-1} = (BB^t)^{-1} = (B^t)^{-1}B^{-1} = (B^{-1})^tB^{-1} = A^tA.$$

Definição 2.28. Dada uma função $f \in \mathcal{D}$, definimos o **gradiente** de f como sendo o único campo vetorial $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ que satisfaz

$$\langle \nabla f, X \rangle = Xf, \quad (19)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Mostraremos a seguir que, num referencial geodésico $\{E_i\}$ em torno de $p \in M$, o gradiente de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dado pela expressão

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n (E_i(f)) E_i.$$

De fato, como $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$, então $\nabla f = \sum_{i=1}^n b_i E_i$. Aplicando a métrica com E_j , vem que

$$\langle \nabla f, E_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n b_i E_i, E_j \right\rangle = b_j.$$

Por outro lado, pela Definição de gradiente (2.28),

$$\langle \nabla f, E_j \rangle = E_j(f),$$

ou seja, $b_j = E_j(f)$. Como consequência imediata disto, temos que

$$|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^n (E_i(f))^2 \quad (20)$$

Definição 2.29. Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. A **divergência** de X é traço do operador $Y \mapsto \nabla_Y X$.

Consideremos um campo $X = \sum_{i=1}^n a_i E_i$, afirmamos que $\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n E_i(a_i)$. De fato, como $\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(Y \mapsto \nabla_Y X)$, temos então

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X(p) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{E_i} \left(\sum_{j=1}^n a_j E_j \right), E_i \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n \nabla_{E_i} a_j E_j, E_i \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n (a_j \nabla_{E_i} E_j + E_i (a_j) E_j), E_i \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n E_i (a_j) E_j, E_i \right\rangle \\
 &= \sum_{i,j=1}^n E_i (a_j) \langle E_j, E_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n E_i (a_i).
 \end{aligned}$$

Agora vamos obter as expressões dos operadores diferenciais em um sistema de coordenadas locais, não necessariamente geodésico, para esse intento simplesmente usaremos as expressões obtidas no referencial E_i em termos das coordenadas locais, conforme (16). Afirmamos que,

$$\nabla f = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g^{kj} X_j(f) \right) X_k. \tag{21}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \nabla f &= \sum_{i=1}^n (E_i(f)) E_i \\
 &= \sum_{i,j,k=1}^n a_{ij} a_{ik} X_j(f) X_k \\
 &= \sum_{j,k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} \right) X_j(f) X_k \\
 &= \sum_{j,k=1}^n g^{kj} X_j(f) X_k
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g^{kj} X_j(f) \right) X_k.$$

De modo similar encontraremos a expressão para a divergência do campo X em coordenadas, para tal, antes precisaremos dos conhecidos símbolos de Christoffel, que são as aplicações Γ_{ij}^k determinadas mediante a igualdade

$$\nabla_{X_j} X_i = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k. \quad (22)$$

Num sistema de coordenadas $\{X_i\}$, a conexão ∇ ser simétrica significa que

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad (23)$$

que equivale a $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Assim, sendo $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$ temos que usando as coordenadas do referencial geodésico $\{E_i\}$, ficamos com

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n x_i X_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} E_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_i b_{ij} \right) E_j \\ &= \sum_{j=1}^n a_j E_j, \end{aligned}$$

onde $a_j = \sum_{i=1}^n x_i b_{ij}$ são as coordenadas de X na nova base $(b_{ij})(X_i)$.

Assim, agora podemos exibir a expressão da divergência de X , como segue,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{j=1}^n E_j (a_j) = \sum_{j=1}^n E_j \left(\sum_{i=1}^n x_i b_{ij} \right) = \sum_{i,j=1}^n E_j (x_i b_{ij}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n E_j (x_i) b_{ij} + \sum_{i,j=1}^n E_j (b_{ij}) x_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} E_j (x_i) \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n E_j (b_{ij}) \right) x_i \\
&= \sum_{i=1}^n X_i (x_i) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n E_j (b_{ij}) \right) x_i.
\end{aligned}$$

Agora, mostremos que,

$$\sum_{j=1}^n E_j (b_{ij}) = \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j. \quad (24)$$

De fato, em p temos,

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_j} X_i &= \nabla_{\left(\sum_{k=1}^n b_{jk} E_k\right)} \left(\sum_{l=1}^n b_{il} E_l \right) \\
&= \sum_{k=1}^n b_{jk} \sum_{l=1}^n \nabla_{E_k} (b_{il} E_l) \\
&= \sum_{k=1}^n b_{jk} \sum_{l=1}^n (b_{il} \nabla_{E_k} E_l + E_k (b_{il}) E_l) \\
&= \sum_{k,l=1}^n b_{jk} E_k (b_{il}) E_l \\
&= \sum_{k,l=1}^n b_{jk} E_k (b_{il}) \left(\sum_{m=1}^n a_{lm} X_m \right) \\
&= \sum_{m=1}^n \left(\sum_{k,l=1}^n a_{lm} b_{jk} E_k (b_{il}) \right) X_m.
\end{aligned}$$

Comparando a expressão acima com a expressão (22) dos símbolos de Christoffel, obtemos que

$$\Gamma_{ij}^m = \sum_{k,l=1}^n a_{lm} b_{jk} E_k (b_{il}).$$

Logo,

$$\Gamma_{ij}^j = \sum_{k,l=1}^n a_{lj} b_{jk} E_k (b_{il}),$$

e, conseqüentemente,

$$\sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k,l=1}^n a_{lj} b_{jk} E_k (b_{il}) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{lj} b_{jk} \right) E_k (b_{il}) \\
&= \sum_{k,l=1}^n \delta_{lk} E_k (b_{il}) \\
&= \sum_{j=1}^n E_j (b_{ij}),
\end{aligned}$$

como queríamos.

Obtemos assim a expressão da divergência do campo X em coordenadas como sendo

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n X_i (x_i) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^j x_i. \quad (25)$$

A seguir, demonstramos dois fatos que serão úteis para chegar à expressão do Laplaciano em coordenadas locais. Primeiramente, afirmamos que

$$X_k(g) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g X_k (g_{ij}),$$

onde $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ é função determinante da métrica, definida por $g(p) = \det(G(p))$ que é sempre uma função positiva. De fato, pela regra da cadeia temos que

$$X_k(g) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} X_k (g_{ij}). \quad (26)$$

Agora recordemos que

$$G^{-1} = \left[\frac{(-1)^{i+j}}{g} (G_{ij}) \right]_{n \times n}$$

onde G_{ij} é a matriz dos cofatores de G , ou seja, G_{ij} é o determinante da matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida eliminando-se a linha i e a coluna j da matriz G . Por outro lado, sabemos da fórmula de Laplace para calcular o determinante que

$$g = \det G = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} g_{ij} G_{ij},$$

para qualquer $j \in \{1, \dots, n\}$. Consequentemente,

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = (-1)^{i+j} G_{ij},$$

para quaisquer i e j . Assim,

$$G^{-1} = \left[\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \right]_{n \times n}$$

ou seja,

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}.$$

Daí, a expressão (26) pode ser reescrita como sendo

$$X_k(g) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g X_k(g_{ij}).$$

Desta última igualdade, segue que

$$\sum_{i,j=1}^n g^{ij} X_k(g_{ij}) = \frac{1}{g} X_k(g) = X_k(\log(g)). \quad (27)$$

Agora, recordemos que a expressão dos símbolos de Christoffel em termos da métrica é dada por

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n g^{hm} \{ X_i(g_{jh}) + X_j(g_{hi}) - X_h(g_{ij}) \}. \quad (28)$$

Usando (28), mostraremos que

$$\sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j = \frac{1}{2} X_i(\log(g)).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n g^{hj} \{ X_j(g_{ih}) + X_i(g_{hj}) - X_h(g_{ji}) \} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_j(g_{ih}) \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_i(g_{hj}) \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_h(g_{ji}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_j (g_{ih}) \right) - \left(\sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_h (g_{ij}) \right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_i (g_{hj}) \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j,h=1}^n g^{hi} X_h (g_{ij}) \right) - \left(\sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_h (g_{ij}) \right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_i (g_{hj}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{h,j=1}^n g^{hj} X_i (g_{hj}) \\
&= \frac{1}{2} X_i(\log(g)).
\end{aligned}$$

Voltemos à expressão da divergência do campo X e usando as expressões que obtemos anteriormente com relação a símbolos de Christoffel, segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n X_i (x_i) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j \right) x_i \\
&= \sum_{i=1}^n X_i (x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i(\log(g)) x_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left[X_i (x_i) + \frac{1}{2} X_i(\log(g)) x_i \right]. \tag{29}
\end{aligned}$$

Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{g}} X_i (\sqrt{g} x_i) &= \frac{1}{\sqrt{g}} [X_i(\sqrt{g}) x_i + X_i (x_i) \sqrt{g}] \\
&= X_i (x_i) + \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{1}{2} X_i(g) g^{-\frac{1}{2}} \right) x_i \\
&= X_i (x_i) + \frac{1}{2} \left(\frac{X_i(g)}{g} \right) x_i \\
&= X_i (x_i) + \frac{1}{2} X_i(\log(g)) x_i,
\end{aligned}$$

usando este fato juntamente com (29), podemos escrever a divergência como sendo

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}} X_i (\sqrt{g} x_i).$$

Definição 2.30. *Sejam M uma variedade Riemanniana e f uma função diferenciável. A Hessiana de f é o tensor simétrico*

$$\begin{aligned} \text{Hess } f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathcal{D} \\ (X, Y) &\mapsto \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle \end{aligned}$$

Definição 2.31. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O Laplaciano de f em M é a função*

$$\begin{aligned} \Delta f : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \text{div}(\nabla f). \end{aligned}$$

Note que $\Delta f \in \mathcal{D}$, além disso, dado $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ é um referencial ortonormal, então

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \text{tr}(X \mapsto \nabla_X \nabla f) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\xi_i} \nabla f, \xi_i \rangle = \text{tr}(\text{Hess } f).$$

Dessa forma, considerando em $p \in M$, o referencial geodésico $\{E_1, \dots, E_n\}$, a expressão do Laplaciano de f se torna

$$\Delta f(p) = \text{div}(\nabla f)(p) = \text{div} \left(\sum_{i=1}^n f_i E_i \right) (p) = \sum_{i=1}^n f_{ii}(p).$$

Por (21), obtemos uma expressão para Δf num sistema de coordenadas locais $\{X_i\}$, dada por

$$\begin{aligned} \Delta f &= \text{div} \left(\sum_{i=1}^n f_i X_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}} X_i (\sqrt{g} f_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}} X_i \left[\sqrt{g} \left(\sum_{j=1}^n g^{ij} X_j(f) \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n X_i \left(\sqrt{g} g^{ij} X_j(f) \right), \end{aligned}$$

que é a expressão do **operador de Laplace-Beltrami** em um sistema de coordenadas locais $\{X_i\}$ em $p \in M$.

Lema 2.32. *Sejam $f, g \in \mathcal{D}(M)$. Então*

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle. \quad (30)$$

Demonstração. Fixado $p \in M$, considere o referencial geodésico $\{E_1, \dots, E_n\}$ em uma vizinhança de p . Desse modo,

$$\begin{aligned} \Delta(fg)(p) &= \sum_{k=1}^n E_k E_k (fg)(p) \\ &= \sum_{k=1}^n E_k (g E_k f + f E_k g)(p) \\ &= \sum_{k=1}^n g E_k E_k f(p) + \sum_{k=1}^n E_k g E_k f(p) + \sum_{k=1}^n E_k g E_k f(p) + \sum_{k=1}^n f E_k E_k g(p) \\ &= f\Delta g(p) + g\Delta f(p) + 2 \sum_{k=1}^n E_k g E_k f(p) \\ &= f\Delta g(p) + g\Delta f(p) + 2 \sum_{k=1}^n g_k E_k f_k E_k(p) \\ &= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle(p). \end{aligned}$$

□

Em particular, $\Delta f^2 = 2f\Delta f + 2|\nabla f|^2$ onde $|\nabla f|^2$ é o quadrado da norma do campo ∇f .

2.5 CURVATURAS

Definição 2.33 (Curvatura). *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e ∇ conexão Riemanniana de M .

Tomando um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) definidas num aberto de M , sendo $X_i = \partial/\partial x_i$ os campos coordenados, temos que $[X_i, X_j] = 0$, donde segue que

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k.$$

Usando (28), obtemos

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k = \sum_l \nabla_{X_j} \Gamma_{ik}^l X_l - \sum_l \nabla_{X_i} \Gamma_{jk}^l X_l \\ &= \sum_l \left[X_j(\Gamma_{ik}^l) X_l + \Gamma_{ik}^l \nabla_{X_j} X_l \right] - \sum_l \left[X_i(\Gamma_{jk}^l) X_l + \Gamma_{jk}^l \nabla_{X_i} X_l \right] \\ &= \sum_l \left[X_j(\Gamma_{ik}^l) X_l + \Gamma_{ik}^l \sum_s \Gamma_{jl}^s X_s - X_i(\Gamma_{jk}^l) X_l + \Gamma_{jk}^l \sum_s \Gamma_{il}^s X_s \right] \\ &= \sum_s \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^s) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^s) - \sum_l (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s) \right] X_s. \end{aligned}$$

Proposição 2.34. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana satisfaz as propriedades a seguir:*

1. R é C^∞ -bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1).$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2).$$

quaisquer que sejam $f, g, \in \mathcal{D}$ e $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

2. Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é C^∞ -linear, isto é,

$$R(X, Y)(fZ + W) = fR(X, Y)Z + R(X, Y)W$$

quaisquer que sejam $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer $f \in \mathcal{D}$.

3. Primeira Identidade de Bianchi : $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$.

4. Simetrias: quaisquer que sejam $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$(a) \langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(Y, Z)X, T \rangle + \langle R(Z, X)Y, T \rangle = 0.$$

$$(b) \langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(Y, X)Z, T \rangle.$$

$$(c) \langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(X, Y)T, Z \rangle.$$

$$(d) \langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(Z, T)X, Y \rangle.$$

Demonstração. Veja [9] ou [11]. □

Definição 2.35 (Curvatura Seccional). *Dado um ponto $p \in M$ e σ um subespaço de dimensão 2 de T_pM , o número real*

$$K(\sigma) = K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}$$

onde $\{x, y\}$ é base de σ e $|x \wedge y|^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2$ é a área do paralelogramo determinado por x e y , é chamado de **curvatura seccional** de σ em p .

Mostra-se que $K(\sigma)$ independe da escolha de $x, y \in \sigma$.

Definição 2.36 (Tensor de Ricci). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ o tensor de Ricci é definido por*

$$\text{ric}^M(X, Y)(p) = \text{tr}\{z \mapsto (R(X, z)Y)(p)\}.$$

Em um sistema ortonormal local em p , $\{X_1, \dots, X_n\}$

$$\text{ric}^M(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R(X, X_i)Y, X_i \rangle.$$

Definição 2.37. *Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $x \in T_pM$ unitário. A curvatura de Ricci de M na direção de x em p é dada por*

$$\text{Ric}_p^M(x) = \text{ric}^M(x, x)(p).$$

Se $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = x\}$ for base ortonormal de T_pM , então a curvatura de Ricci é escrita como

$$\text{Ric}_p^M(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle.$$

Definição 2.38 (Curvatura Escalar). *Sejam M variedade Riemanniana, $p \in M$ e $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n\}$ base ortonormal de T_pM . A curvatura escalar de M em p é definida por*

$$R = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Ric}_p^M(z_j).$$

Teorema 2.39. *Sejam $f : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica entre variedades Riemannianas, $p \in M$ e $x, y \in T_p M$ vetores ortonormais. Então*

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2, \quad (31)$$

onde \bar{K} denota a curvatura seccional em \bar{M} .

Demonstração. Sejam X, Y extensões locais ortogonais de x e y , respectivamente, que são tangentes a M , denotemos por \bar{X}, \bar{Y} as extensões locais de x, y a \bar{M} . Então,

$$\begin{aligned} K(x, y) - \bar{K}(x, y) &= \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X - (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X} - \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}), Y \rangle(p) + \\ &+ \langle \nabla_{[X, Y]} X - \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, Y \rangle(p) \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que $\langle \nabla_{[X, Y]} X - \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, Y \rangle = -\langle (\bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X})^N, Y \rangle(p) = 0$.

Além disso, tomando E_1, \dots, E_m , com $m = \dim \bar{M} - \dim M$ ortonormais entre si e normais a M , teremos que

$$B(X, Y) = \sum_i H_i(X, Y) E_i,$$

com $H_i = H_{E_i}$ dada em (13), $i = 1, \dots, m$. Avaliando em p ,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X} &= \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \left(\sum_i H_i(X, X) E_i + \nabla_X X \right) \\ &= \sum_i H_i(X, X) \bar{\nabla}_{\bar{Y}} E_i + \bar{Y} H_i(X, X) E_i + \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \nabla_X X \end{aligned}$$

Tomando a métrica,

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X}, Y \rangle = - \sum_i H_i(X, X) H_i(Y, Y) + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle.$$

Analogamente,

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, Y \rangle = - \sum_i H_i(X, Y) H_i(X, Y) + \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle.$$

Desta forma,

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X} - \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, Y \rangle(p)$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle(p) - \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle(p) - \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{X}, Y \rangle(p) + \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X}, Y \rangle(p) \\
&= \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle(p) - \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle(p) + \sum_i H_i(X, X) H_i(Y, Y) + \\
&\quad - \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle(p) - \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle(p) - \sum_i H_i(X, Y) H_i(X, Y) \\
&= \sum_i H_i(X, X) H_i(Y, Y) - H_i(X, Y) H_i(X, Y) \\
&= \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.
\end{aligned}$$

□

2.6 VARIAÇÃO PRIMEIRA E SEGUNDA DA ÁREA

Sejam M variedade Riemanianna e $\Sigma^k \subset M^n$ uma subvariedade imersa com bordo vazio.

Seja $F : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma variação de Σ com suporte compacto. Chamamos $F_t|_{\Sigma}$ de campo variacional e tome $\{x_i\}$ sistema de coordenadas de Σ . Sejam $g_{ij}(t) = g(F_{x_i}, F_{x_j}) = g\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j}\right)$ e $\nu(t) = \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))}$.

Assim, o funcional área é dado por

$$A(t) = A(F(\Sigma, t)) = \int_{\Sigma} \nu(t) \sqrt{\det(g_{ij}(0))}. \quad (32)$$

Derivando (32) em $t = 0$, temos

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A(t) = \int_{\Sigma} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \nu(t) \sqrt{\det(g_{ij}(0))} \quad (33)$$

Para avaliarmos $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \nu(t)$ em algum ponto x , podemos escolher um sistema de coordenadas de modo que $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Assim, no ponto x ,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \nu(t) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sqrt{\det(g^{ij}(0))} \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g_{ij}(t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle F_{x_i}, F_{x_i} \rangle_{|t=0} \\
 &= \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_i} \rangle_{|t=0} \tag{34} \\
 &= \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_i} \rangle_{|t=0} \\
 &= \operatorname{div}_{\Sigma} F_t \\
 &= \operatorname{div}_{\Sigma} (F_t^{\perp} + F_t^{\top}) \\
 &= \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{F_{x_i}} \langle F_t, N_l \rangle N_l, F_{x_i} \rangle + \operatorname{div}_{\Sigma} F_t^{\top} \\
 &= \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{i=1}^k \left\{ F_{x_i} \langle F_t, N_l \rangle N_l + \langle F_t, N_l \rangle \langle \nabla_{F_{x_i}} N_l, F_{x_i} \rangle \right\} + \operatorname{div}_{\Sigma} F_t^{\top} \tag{35} \\
 &= \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{i=1}^k \langle F_t, N_l \rangle \langle \nabla_{F_{x_i}} N_l, F_{x_i} \rangle + \operatorname{div}_{\Sigma} F_t^{\top} \\
 &= \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{i=1}^k \langle F_t, \langle \nabla_{F_{x_i}} N_l, F_{x_i} \rangle N_l \rangle + \operatorname{div}_{\Sigma} F_t^{\top} \\
 &= - \sum_{l=1}^{n-k} \langle F_t, \langle H, N_l \rangle N_l \rangle + \operatorname{div}_{\Sigma} F_t^{\top} \\
 &= - \langle F_t, H \rangle + \operatorname{div}_{\Sigma} F_t^{\top},
 \end{aligned}$$

onde $\{N_1, \dots, N_l\}$ é uma base ortonormal para o fibrado normal de Σ em x , em (34) usamos que $\nabla_{F_t} F_{x_i} - \nabla_{F_{x_i}} F_t = [F_t, F_{x_i}] = 0$ pois são campos coordenados em x em ($t = 0$) e em (35) usamos que $\sum_i \langle N_l, F_{x_i} \rangle = 0$, derivando com relação a F_{x_i} e lembrando que $F_{x_i} \langle N_l, F_{x_i} \rangle = \langle \nabla_{F_{x_i}} N_l, F_{x_i} \rangle + \langle N_l, \nabla_{F_{x_i}} F_{x_i} \rangle$ obtemos $\sum_i \langle \nabla_{F_{x_i}} N_l, F_{x_i} \rangle + \sum_i \langle N_l, \nabla_{F_{x_i}} F_{x_i} \rangle = 0$, conseqüentemente $\sum_i \langle \nabla_{F_{x_i}} N_l, F_{x_i} \rangle = - \langle N_l, H \rangle$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A(t) &= - \int_{\Sigma} \langle F_t, H \rangle + \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} F_t^{\top} \\
 &= - \int_{\Sigma} \langle F_t, H \rangle + \int_{\partial \Sigma} F_t \\
 &= - \int_{\Sigma} \langle F_t, H \rangle \\
 &= \int_{\Sigma} \sum_i \langle \nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_i} \rangle = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} F_t.
 \end{aligned}$$

Procedamos agora com a determinação da segunda variação da área para o caso em que Σ^k é estacionária (isto é, ponto crítico do funcional área). Ou seja, queremos determinar

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} A(t) = \int_{\Sigma} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \nu(t) \sqrt{\det(g_{ij}(0))}. \quad (36)$$

Derivando $\nu(t)$ em relação a t , obtemos

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} A(t) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} A(F(\Sigma, t)) = \int_{\Sigma} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \nu(t) \sqrt{\det(g_{ij}(0))}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{d\nu(t)}{dt} &= \frac{\sqrt{\det(g^{ij}(0))}}{2\sqrt{\det(g_{ij}(0))}} \frac{d}{dt}(\det g_{ij}(t)) \\ &= \frac{\sqrt{\det(g^{ij}(0)) \det(g_{ij}(t)) \operatorname{tr}((g_{ij}(t))^{-1} g'_{ij}(t))}}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} \\ &= \frac{\sqrt{\det(g^{ij}(0))} \sqrt{\det(g_{ij}(t))}}{2} \operatorname{tr}(g'_{ij}(t)(g_{ij}(t))^{-1}) \\ &= \frac{\nu(t)}{2} \operatorname{tr}(g'_{ij}(t)g^{lm}(t)), \end{aligned}$$

onde $g'_{ij}(t) = \frac{d}{dt}g_{ij}(t)$ e $\operatorname{tr}(g'_{ij}(t)g^{lm}(t)) = \sum_{i,j} g'_{ij}(t)g^{ij}(t)$.

Para calcularmos $\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0}$ em algum ponto $x \in \Sigma$, podemos escolher o sistema de coordenadas x_i para ser ortonormal em x .

Como

$$2 \frac{d}{dt} \nu(t) = \nu(t) \operatorname{tr}(g'_{ij}(t)g^{lm}(t))$$

então,

$$2 \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \nu(t) = \nu(0) \operatorname{tr}(g''_{ij}(0)g^{lm}(0) + g'_{ij}(0)(g^{lm})'(0)) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(g'_{ij}(0)g^{lm}(0)) \nu(0) \operatorname{tr}(g'_{ij}(0)g^{lm}(0))$$

Ou seja,

$$2 \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \nu(t) = \operatorname{tr}(g''_{ij}(0)) - \operatorname{tr}(g'_{ij}(0)g'_{lm}(0)) + \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(g'_{ij}(0)))^2$$

Temos que, no ponto x ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \nu(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(g'_{ij}(0)g^{lm}(0))\nu(0) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(g'_{ij}(0)) \\ &= -\langle F_t, H \rangle + \operatorname{div}_\Sigma F_t^\top \quad (\text{em } t = 0). \end{aligned}$$

Como Σ é estacionária então $0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \nu(t) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(g'_{ij}(0))$, de modo que $\operatorname{tr}(g'(0)) = 0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \nu(t) &= \operatorname{tr}(g''(0)) - \operatorname{tr}(g'(0)g'(0)) \\ &= \operatorname{tr}(g''(0)) - |g'(0)|^2, \end{aligned}$$

pois $g'(0)$ é uma matriz simétrica.

Lema 2.40. *Nas condições em que fizemos a primeira e segunda variação da área e no ponto x , tomando um sistema de coordenadas ortonormais), temos*

1. $|g'(0)|^2 = 4|\langle B(\cdot, \cdot), F_t \rangle|^2$.
2. $\operatorname{tr}(g''(0)) = 2|\langle B(\cdot, \cdot), F_t \rangle|^2 + 2|\nabla_\Sigma^2 F_t|^2 + 2 \operatorname{tr}\langle R(\cdot, F_t)F_t, \cdot \rangle + 2 \operatorname{div}_\Sigma(F_{tt})$.

Demonstração. Temos que,

$$g'_{ij}(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle F_{x_i}, F_{x_j} \rangle = \langle F_{x_i t}, F_{x_j} \rangle + \langle F_{x_i}, F_{x_j t} \rangle.$$

Como $\langle F_{x_j}, F_t \rangle = 0$ então $F_{x_i} \langle F_{x_j}, F_t \rangle = 0$. Logo, $\langle \nabla_{F_{x_i}} F_{x_j}, F_t \rangle = -\langle F_{x_j}, F_{x_i t} \rangle$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} g''_{ij}(0) &= -\langle \nabla_{F_{x_i}} F_{x_j}, F_t \rangle - \langle \nabla_{F_{x_j}} F_{x_i}, F_t \rangle \\ &= -\langle (\nabla_{F_{x_i}} F_{x_j})^N, F_t \rangle - \langle (\nabla_{F_{x_j}} F_{x_i})^N, F_t \rangle \\ &= -\langle B(F_{x_i}, F_{x_j}), F_t \rangle - \langle B(F_{x_j}, F_{x_i}), F_t \rangle. \end{aligned}$$

Como B é simétrica, temos que $g'_{ij}(0) = -2\langle B(F_{x_i}, F_{x_j}), F_t \rangle$. Portanto,

$$|g'(0)|^2 = 4|\langle B(\cdot, \cdot), F_t \rangle|^2,$$

pois $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ donde temos que o conjunto de vetores F_{x_i} formam uma base ortonormal para $T_x \Sigma$.

Agora,

$$\operatorname{tr} g''(0) = 2 \sum_{i=1}^k \langle F_{x_i t t}, F_{x_i} \rangle + 2 \sum_{i=1}^k \langle F_{x_i t}, F_{x_i t} \rangle.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \langle F_{x_i t t}, F_{x_i} \rangle &= \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{F_t} \nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_i} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{F_t} \nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_i} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k \langle R(F_{x_i}, F_t) F_t, F_{x_i} \rangle + \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{F_{x_i}} \nabla_{F_t} F_t, F_{x_i} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k \langle R(F_{x_i}, F_t) F_t, F_{x_i} \rangle + \operatorname{div}_{\Sigma}(F_{tt}). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\operatorname{tr} g''(0) = 2 \sum_{i=1}^k \langle F_{x_i t}^{\top}, F_{x_i t}^{\top} \rangle + 2 \sum_{i=1}^k \langle F_{x_i t}^N, F_{x_i t}^N \rangle + 4 \sum_{i=1}^k \langle F_{x_i t}^{\top}, F_{x_i t}^N \rangle + 2 \sum_{i=1}^k \langle R(F_{x_i}, F_t) F_t, F_{x_i} \rangle + 2 \operatorname{div}_{\Sigma}(F_{tt}).$$

□

Por outro lado, valem as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} (a) \langle F_{x_i t}^N, F_{x_i t}^N \rangle &= \langle (\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N, (\nabla_{F_{x_i}} F_t)^N \rangle \\ &= \langle \langle B(F_{x_i}, F_{x_i}), F_t \rangle F_t, \langle B(F_{x_i}, F_{x_i}), F_t \rangle F_t \rangle \\ &= |B(F_{x_i}, F_{x_i}), F_t|^2 \langle F_t, F_t \rangle \\ &= |B(F_{x_i}, F_{x_i}), F_t|^2. \end{aligned}$$

$$(b) \langle F_{x_i t}^{\top}, F_{x_i t}^{\top} \rangle = \langle (\nabla_{F_{x_i}} F_t)^{\top}, (\nabla_{F_{x_i}} F_t)^{\top} \rangle = \langle \nabla_{\Sigma}^N F_t, \nabla_{\Sigma}^N F_t \rangle = |\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2.$$

Deste modo,

$$\operatorname{tr} g''(0) = 2 |\langle B(\cdot, \cdot), F_t \rangle|^2 + 2 |\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2 + 2 \operatorname{tr} \langle R(\cdot, F_t) F_t, \cdot \rangle + 2 \operatorname{div}_{\Sigma}(F_{tt}).$$

No ponto x , obtemos

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} v(t) = -|\langle B(\cdot, \cdot), F_t \rangle|^2 + |\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2 - \text{tr} \langle R(E_i, F_t) E_i, F_t \rangle + \text{div}_{\Sigma}(F_{tt}).$$

Assim,

$$A''(0) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} A(F(\Sigma, t)) = - \int_{\Sigma} |\langle B(\cdot, \cdot), F_t \rangle|^2 + \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}^N F_t|^2 - \int_{\Sigma} \text{tr} \langle R(\cdot, F_t), F_t \rangle + \int_{\partial \Sigma} F_{tt}.$$

Sendo X um campo normal qualquer, defina \tilde{B} o **operador de Simons** por

$$\tilde{B}(X) = \sum_{i,j=1}^k g(B(E_i, E_j), X) B(E_i, E_j),$$

Δ_{Σ}^N o **Laplaciano sobre o fibrado normal** de Σ , isto é,

$$\Delta_{\Sigma}^N X = \sum_{i=1}^k (\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} X)^N - \sum_{i=1}^k (\nabla_{(\nabla_{E_i} E_i)^{\top}} X)^N \tag{37}$$

e \mathcal{L} o **operador de Jacobi (de estabilidade)** por

$$\mathcal{L}X = \Delta_{\Sigma}^N X + \text{tr}[R(\cdot, X)\cdot] + \tilde{B}(X). \tag{38}$$

Definição 2.41 (Estabilidade). *Uma subvariedade imersa $\Sigma \subset M$ é dita **estável** se para todas as variações F com bordo fixo, tem-se que a segunda variação da área é não negativa.*

2.7 ELEMENTOS DE GEOMETRIA CONFORME

Nesta seção estabeleceremos as relações entre os invariantes geométricos para duas métricas que são conformes.

Definição 2.42. *Seja M^n uma variedade Riemanniana com métricas g e \tilde{g} . Dizemos que \tilde{g} é **conforme** a g , se existe $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ função positiva tal que $\tilde{g} = e^{2u} g$.*

Consideremos $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ com $u \in C^{\infty}(M)$, também escreveremos a relação de conformidade como $\tilde{g} = \lambda^2 g$, onde λ é uma função positiva, desta forma, $\lambda = u^{\frac{2}{n-2}}$.

Ademais, a escolha do expoente em u é feita por conveniência teórica para a escrita das equações de Calabi-Yau, assunto que escapa ao propósitos desta dissertação.

Agora, como estamos no caso de uma hipersuperfície $\Sigma^{n-1} \subset M^n$, temos que o elemento de área na hipersuperfície é dado pelo produto simétrico dos elementos de uma base de $T_p\Sigma$, de modo que,

$$\mu_{\tilde{g}} = \lambda^{n-1} \mu_g = u^{\frac{1}{2} \frac{4(n-1)}{(n-2)}} \mu_g = u^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} \mu_g.$$

Por outro lado, como as métricas são conformes, sabemos que os ângulos são preservados, conseqüentemente, tomando $\hat{v}_{\tilde{g}}$ e \hat{v}_g vetores normais unitários com respeito à \tilde{g} e g , respectivamente, temos que $\hat{v}_{\tilde{g}} = \zeta \hat{v}_g$, desta forma

$$1 = \langle \hat{v}_{\tilde{g}}, \hat{v}_{\tilde{g}} \rangle_{\tilde{g}} = \langle \zeta \hat{v}_g, \zeta \hat{v}_g \rangle_{\tilde{g}} = \zeta^2 \langle \hat{v}_g, \hat{v}_g \rangle_{\tilde{g}} = \zeta^2 u^{\frac{4}{n-2}} \langle v_g, v_g \rangle = \zeta^2 u^{\frac{4}{n-2}}$$

Conseqüentemente, $\zeta = u^{-\frac{2}{n-2}}$. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\hat{v}_{\tilde{g}}}(\mu_{\tilde{g}}) &= H_{\tilde{g}} \mu_{\tilde{g}} = H_{\tilde{g}} u^{\frac{2(n-1)}{n-2}} \mu_g = \mathcal{L}_{u^{-\frac{2}{n-2}} \hat{v}_g} (u^{\frac{2(n-1)}{n-2}} \mu_g) \\ &= \frac{2(n-1)}{n-2} u^{\frac{2(n-1)}{n-2}-1} \nabla_{\left(u^{-\frac{2}{n-2}} \hat{v}_g\right)} (u) \mu_g + u^{\frac{2(n-1)}{n-2}} \mathcal{L}_{u^{-\frac{2}{n-2}} \hat{v}_g} (\mu_g) \\ &= \left[\frac{2(n-1)}{n-2} u^{\frac{2(n-1)}{n-2}-1} \nabla_{\hat{v}_g} u + u^{\frac{2(n-1)}{n-2}} u^{-\frac{2}{n-2}} H_g \right] \mu_g \end{aligned}$$

Portanto,

$$H_{\tilde{g}} = u^{-\frac{2}{n-2}} \left[H_g + \frac{2(n-1)}{n-2} u^{-1} \nabla_{\hat{v}_g} \right]. \quad (39)$$

Vamos mostrar que

$$\tilde{R}_{ijk}^l = \partial_i(\tilde{\Gamma}_{ik}^l) - \partial_j(\tilde{\Gamma}_{ik}^l) + \tilde{\Gamma}_{im}^l \tilde{\Gamma}_{jk}^m - \tilde{\Gamma}_{jm}^l \tilde{\Gamma}_{ik}^m.$$

Para os cálculos, é útil introduzir o produto de Kulkarni-Nomizu, o qual toma dois $(0, 2)$ -tensores A e B e resulta em um $(0, 4)$ -tensor $A \oslash B$, definido como

$$A \oslash B(X, Y, Z, W) = A(X, Z)B(Y, W) - A(Y, Z)B(X, W) - A(X, W)B(Y, Z) + A(Y, W)B(X, Z).$$

Tomemos um sistema de coordenadas normais para a métrica g num ponto $x \in M$, temos que $\Gamma_{ij}^k(x) = 0$ e $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$. Calculando

$$\begin{aligned} \partial_i(\tilde{\Gamma}_{jk}^l) - \partial_j(\tilde{\Gamma}_{ik}^l) &= \partial_i[g^{lp}(-\partial_j u)g_{pk} - (\partial_k u)g_{pj} + (\partial_p u)g_{jk} + \Gamma_{jk}^l] + \\ &\quad - \partial_j[g^{lp}(-\partial_i u)g_{kp} - (\partial_k u)g_{ip} + (\partial_p u)g_{ik} + \Gamma_{ik}^l] \\ &= g^{lp} \left(-(\partial_i \partial_j u)g_{pk} - (\partial_i \partial_k u)g_{pj} + (\partial_i \partial_p u)g_{jk} + \partial_i(\Gamma_{jk}^l) \right) + \\ &\quad - g^{lp} \left(-(\partial_j \partial_i u)g_{kp} - (\partial_j \partial_k u)g_{ip} + (\partial_j \partial_p u)g_{ik} - \partial_j(\Gamma_{ik}^l) \right) \\ &= g^{lp} \left(-(\partial_i \partial_k u)g_{pj} + (\partial_i \partial_p u)g_{jk} + (\partial_j \partial_k u)g_{ip} - (\partial_j \partial_p u)g_{ik} \right) + R_{ijk}^l \end{aligned}$$

Por definição,

$$\begin{aligned} (\nabla^2 u \otimes g)(\partial_i, \partial_j, \partial_p, \partial_k) &= (\nabla^2 u \otimes g)_{ijpk} \\ &= (\nabla^2 u)_{ip}g_{jk} - (\nabla^2 u)_{jp}g_{ik} - (\nabla^2 u)_{ik}g_{jp} + (\nabla^2 u)_{jk}g_{ip}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$(\nabla^2 u \otimes g)_{ijpk} = (\partial_i \partial_p u)g_{jk} - (\partial_j \partial_p u)g_{ik} - (\partial_i \partial_k u)g_{pj} + (\partial_j \partial_k u)g_{ip}$$

Deste modo,

$$\partial_i(\tilde{\Gamma}_{jk}^l) - \partial_j(\tilde{\Gamma}_{ik}^l) = g^{lp}(\nabla^2 u \otimes g)_{ijpk} + R_{ijk}^l$$

Além disso, em $x \in M$, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{im}^l \tilde{\Gamma}_{jk}^m - \tilde{\Gamma}_{jm}^l \tilde{\Gamma}_{ik}^m &= g^{lp}(-(\partial_i u)g_{mp} - (\partial_m u)g_{ip} + (\partial_p u)g_{im}) + g^{mr}(-(\partial_j u)g_{kr} - (\partial_k u)g_{jr} \\ &\quad + (\partial_r u)g_{jk}) - g^{lp}(-(\partial_j u)g_{mp} - (\partial_m u)g_{jp} + (\partial_p u)g_{jm}) + g^{mr}(-(\partial_i u)g_{kr} + \\ &\quad - (\partial_k u)g_{ir} + (\partial_r u)g_{ik}) \\ &= g^{lp}g^{mr} \left((\partial_i u)g_{mp}(\partial_j u)g_{kr} + (\partial_m u)g_{ip}(\partial_k u)g_{jr} + (\partial_p u)g_{im}(\partial_r u)g_{jk} + \right. \\ &\quad (\partial_i u)g_{mp}(\partial_k u)g_{jr} - (\partial_i u)g_{mp}(\partial_r u)g_{jk} + (\partial_m u)g_{ip}(\partial_j u)g_{kr} - (\partial_m u)g_{ip}(\partial_r u)g_{jk} + \\ &\quad - (\partial_p u)g_{im}(\partial_j u)g_{kr} - (\partial_p u)g_{im}(\partial_k u)g_{jr} - (\partial_j u)g_{mp}(\partial_i u)g_{kr} - (\partial_m u)g_{jp}(\partial_k u)g_{ir} \\ &\quad - (\partial_p u)g_{jm}(\partial_r u)g_{ik} - (\partial_m u)g_{jp}(\partial_k u)g_{ir} - (\partial_p u)g_{jm}(\partial_r u)g_{ik} - (\partial_j u)g_{mp}(\partial_k u)g_{ir} + \\ &\quad - (\partial_j u)g_{mp}(\partial_r u)g_{ik} - (\partial_m u)g_{jp}(\partial_i u)g_{kr} + (\partial_m u)g_{jp}(\partial_r u)g_{ik} + (\partial_p u)g_{jm}(\partial_i u)g_{kr} + \\ &\quad \left. - (\partial_p u)g_{jm}(\partial_k u)g_{ir} \right) \\ &= g^{lp} \left((\partial_i u)(\partial_j u)g_{kp} + (\partial_j u)(\partial_k u)g_{ip} + (\partial_p u)(\partial_i u)g_{jk} + (\partial_i u)(\partial_k u)g_{jp} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\partial_i u)(\partial_p u)g_{jk} + (\partial_k u)(\partial_j u)g_{ip} + -g^{mr}(\partial_m u)(\partial_r u)g_{ip}g_{jk} - (\partial_p u)(\partial_j u)g_{ik} \\
& - (\partial_p u)(\partial_k u)g_{ij} - (\partial_i u)(\partial_j u)g_{kp} - (\partial_i u)(\partial_k u)g_{jp} - (\partial_p u)(\partial_j u)g_{ik} + \\
& - (\partial_j u)(\partial_k u)g_{ip} + (\partial_j u)(\partial_p u)g_{ik} - (\partial_i u)(\partial_k u)g_{jp} + g^{mr}(\partial_m u)(\partial_r u)g_{jp}g_{ik} \\
& + (\partial_i u)(\partial_p u)g_{jk} + (\partial_p u)(\partial_k u)g_{ij} \\
& = g^{lp} \left((\partial_k u)(\partial_j u)g_{ip} - (\partial_i u)(\partial_k u)g_{jp} + (\partial_p u)(\partial_i u)g_{jk} - (\partial_p u)(\partial_j u)g_{ik} + \right. \\
& \left. - |\nabla u|^2 g_{ip}g_{jk} + |\nabla u|^2 g_{jp}g_{ik} \right)
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
[(du \otimes du) \oslash g]_{ijpk} &= (du \otimes du)_{ip}g_{jk} - (du \otimes du)_{jp}g_{ik} - (du \otimes du)_{ik}g_{jp} + (du \otimes du)_{jk}g_{ip} \\
&= (\partial_i u)(\partial_p u)g_{jk} - (\partial_j u)(\partial_p u)g_{ik} - (\partial_i u)(\partial_k u)g_{jp} + (\partial_j u)(\partial_k u)g_{ip}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(|\nabla u|^2 g \oslash g)_{ijpk} &= (|\nabla u|^2 g)_{ip}g_{jk} - (|\nabla u|^2 g)_{jp}g_{ik} - (|\nabla u|^2 g)_{ik}g_{jp} + (|\nabla u|^2 g)_{jk}g_{ip} \\
&= |\nabla u|^2 g_{ip}g_{jk} + |\nabla u|^2 g_{jp}g_{ik} + |\nabla u|^2 g_{ik}g_{jp} + |\nabla u|^2 g_{jk}g_{ip} \\
&= 2|\nabla u|^2 g_{ip}g_{jk} - 2|\nabla u|^2 g_{jp}g_{ik}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\Gamma}_{im}^l \tilde{\Gamma}_{jk}^m - \tilde{\Gamma}_{jm}^l \tilde{\Gamma}_{ik}^m = g^{lp} \left[\left(du \otimes du - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 g \right) \oslash g \right]_{ijpk}$$

Desse modo,

$$\tilde{R}_{ijk}^l = g^{lp} \left[\left(\nabla^2 u + du \otimes du - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 g \right) \oslash g \right]_{ijpk} + R_{ijk}^l$$

Usando a métrica \tilde{g}_{lp} , obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{ijpk} &= \tilde{R}_{ijk}^l \tilde{g}_{lp} = \tilde{R}_{ijk}^l e^{-2u} \tilde{g}_{lp} \\
&= e^{-2u} \left[\left(\nabla^2 u + du \otimes du - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 g \right) \oslash g \right]_{ijpk} + e^{-2u} R_{ijk}^l g_{lp}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\widetilde{Rm} = e^{-2u} \left[Rm + \left(\nabla^2 u + du \otimes du - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 g \right) \oslash g \right]. \quad (40)$$

2.8 GENERALIDADES DE TOPOLOGIA ALGÉBRICA

Um dos conceitos caros à geometria é o de conexidade, devido a intuibilidade natural nas abstrações de noções concretas (imagine um plano com uma reta qualquer r , é aparentemente intuitivo passar a considerar "os lados do plano" com relação a reta r). Contudo, um olhar mais detido nessa noção faz-nos perceber diferenças entre determinados espaços e insta-nos a ter que precisar noções de conexidade por caminhos, componentes conexas e conexidade local.

Para o nosso interesse aqui, a noção de homotopia (do grego "mesmo lugar") auxilia a classificar quais espaços são o mesmo, em sentido topológico. Nesta seção, $\mathcal{C}(X, Y)$ denota o espaço das aplicações contínuas de X em Y , onde X e Y são espaços topológicos.

Definição 2.43. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$. Dizemos que f e g são **homotópicas** e denotamos por $f \simeq g$, se existe uma aplicação contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que*

$$H(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in X$$

$$H(x, 1) = g(x), \quad \forall x \in X.$$

Chamamos H de **homotopia** entre f e g e denotamos por $H : f \simeq g$.

A relação \simeq dada na Definição 2.43 é uma relação de equivalência, desta maneira, \simeq induz uma partição de $\mathcal{C}(X, Y)$, além disso, homotopias são bem comportadas quanto a composições, isto é, dados X, Y, Z espaços topológicos e $f_1, g_1 \in \mathcal{C}(X, Y), f_2, g_2 \in \mathcal{C}(Y, Z)$ tais que $f_1 \simeq g_1$ e $f_2 \simeq g_2$, então $f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$.

Dizemos que um espaço topológico X é **contrátil** se a aplicação identidade $i_X(x) = x$ é homotópica a uma aplicação constante $c(x) = x_0$. Pode-se mostrar que um espaço é contrátil se, e somente se, para cada espaço topológico Y , todo par de aplicações $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ é homotópico.

Definição 2.44. *Dados X, Y espaços topológicos. Dizemos que X, Y são **homotopicamente equivalentes** se existem $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ e $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ tais que $g \circ f \simeq i_X$ e $f \circ g \simeq i_Y$.*

Aqui convém destacar que espaços homeomorfos são homotopicamente equivalentes, contudo a recíproca, em geral é falsa, por exemplo a faixa Möbius e um cilindro são homotopicamente equivalentes, mas não homeomorfos.

Mostra-se também que um espaço contrátil é necessariamente homotopicamente equivalente a um espaço unitário, e também, que contratibilidade implica conexidade por caminhos.

Agora passamos a definir uma das noções centrais da topologia algébrica.

Definição 2.45. *Seja X um espaço topológico e $x_0 \in X$.*

(a) *Dizemos que $f : [0, 1] \rightarrow X$ é um **laço com base em** x_0 se $f(0) = f(1) = x_0$. Denotamos por $\Omega(X, x_0)$ o conjunto de todos os laços em X com base em x_0 .*

(b) *Dizemos que $f, g \in \Omega(X, x_0)$ são homotópicos se $f \simeq g$, neste caso, escrevemos $f \simeq_{x_0} g$. Considerando o quociente $\frac{\Omega(X, x_0)}{\simeq_{x_0}} = \pi_1(X, x_0)$ munido com a operação*

$$[f] * [g] = [f * g]$$

onde

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ g(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é um grupo, o qual chamamos de **grupo fundamental** de X com base em x_0 e denotamos $(\pi_1(X, x_0), *)$.

Definição 2.46. *Dado um espaço topológico X , dizemos que \tilde{X} é um **espaço de recobrimento** de X junto com uma aplicação $p : \tilde{X} \rightarrow X$ para os quais existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de X tal que para cada α , $p^{-1}(U_\alpha)$ é união disjunta de abertos de \tilde{X} , cada qual é homeomorficamente aplicado sobre U_α .*

Em [13] e [14] são dados vários exemplos de espaços de recobrimento e uma perspectiva mais escandida da Topologia Algébrica.

2.9 SUPERFÍCIES MINIMIZANTES DE ÁREA

Agora vamos abordar as noções de superfícies minimizantes de área, tanto a versão usual quanto a versão proposta por Chodosh et al. em [7], que é usada na demonstração do principal artigo em que se baseia esta dissertação.

Definição 2.47. *Sejam (M, g) variedade Riemanniana orientável, possivelmente com bordo e $S \subset M$ uma hipersuperfície orientada propriamente mergulhada.*

1. $S \subset M$ é **absolutamente minimizante de área** em (M, g) se para cada $U \subset M$ aberto com fecho compacto,

$$A(U \cap S) \leq A(U \cap \tilde{S})$$

sempre que $\tilde{S} \subset M$ é uma hipersuperfície orientada propriamente mergulhada com $\partial\tilde{S} = \partial S$ e $\tilde{S} \setminus U = S \setminus U$.

2. $S \subset M$ é **homologicamente minimizante de área** em (M, g) se para cada $U \subset M$ aberto com fecho compacto,

$$A(U \cap S) \leq A(U \cap \tilde{S})$$

sempre que $\tilde{S} \subset M$ é uma hipersuperfície orientada propriamente mergulhada tal que

$$\tilde{S} = S + \partial\Omega_1 + \cdots + \partial\Omega_N$$

com compatibilidade da orientação, no sentido do Teorema de Stokes para $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ sendo subvariedades compactas de dimensão maximal e $\Omega_i \subset U$.

Chodosh et al. em [7] introduzem e discutem uma noção não padrão que usaram na demonstração do resultado central do artigo, além disso, esta noção não havia sido considerada anteriormente na literatura, segundo os mesmos.

Definição 2.48. *Sejam (M, g) variedade Riemanniana orientável, possivelmente com bordo e $S \subset M$ uma hipersuperfície orientada propriamente mergulhada. Dizemos que $S \subset M$ é **homologicamente minimizante de área*** em (M, g) se para cada $U \subset M$ aberto com fecho compacto,*

$$A(U \cap S) \leq A(U \cap \tilde{S})$$

sempre que $\tilde{S} \subset M$ é uma hipersuperfície orientada propriamente mergulhada tal que

$$\partial\tilde{S} = S + \partial\Omega_1 + \cdots + \partial\Omega_N$$

com compatibilidade da orientação, no sentido do Teorema de Stokes onde $\Omega_1, \dots, \Omega_N \subset M$ são subvariedades compactas propriamente mergulhadas com dimensão maximal e $\partial\Omega_i \subset U$.

Os autores argumentam que, "o ponto é que nós não exigimos que $\Omega_i \subset U$ ou mesmo que Ω_i seja limitado aqui"[7].

Essa propriedade não padrão de minimização de área é adaptada a um aspecto delicado na prova do Teorema 4.1. Como acabamos de discutir, não podemos esperar

limites de área local para sequência de superfícies que minimizam a área. Por essa razão, queremos corrigir a classe de homologia para as superfícies com as quais trabalhamos, ou pelo menos manter sob controle.

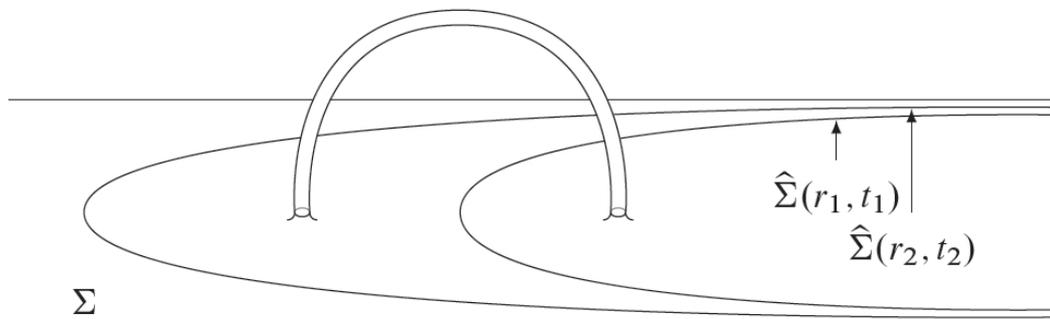


Figura 1: Esta figura mostra um cenário hipotético no qual temos uma situação que não se enquadra em nenhuma das definições que demos de superfícies minimizantes de área. Queremos comparar as áreas de $\hat{\Sigma}(r_1, t_1)$ e $\hat{\Sigma}(r_2, t_2)$ em um conjunto limitado, usando suas respectivas propriedades de minimização. No entanto, devido à presença de uma alça, as superfícies não são homologicamente nem homologicamente* relacionadas. Fonte: [7].

Se usarmos uma família de superfícies homologicamente minimizantes de área, não está claro como descartar a minimização de planos ou esferas na prova do Teorema 4.1 pelos argumentos de recortar e colar. A Figura 1 mostra um cenário em que os planos com os quais nos preocupamos não são homologicamente relacionados. Para lidar com esse cenário, passamos para uma cobertura usando o Lema 3.1 no início da prova. A situação após a cobertura é mostrada na Figura 2. Agora, as superfícies cujas áreas desejamos comparar vinculam uma região não compacta. Eles são homologicamente* relacionados, mas não homologicamente relacionados.

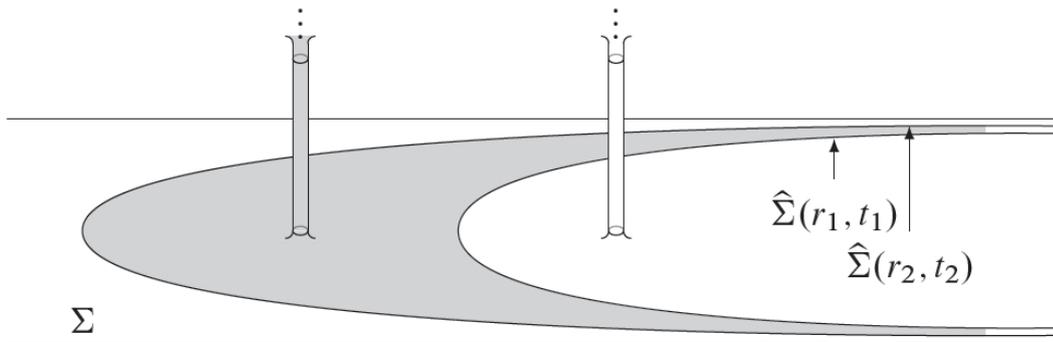


Figura 2: Uma representação da situação na Figura 1 depois de passar para a cobertura apropriada (usando o Lema 3.1). Agora, pedaços compactos de $\widehat{\Sigma}(r_1, t_1)$ e $\widehat{\Sigma}(r_2, t_2)$ são homologicamente*, mas não homologicamente comparáveis. Isso ocorre porque eles diferem por um conjunto aberto (cinza sombreado) que é necessariamente ilimitado. Fonte: [7].

3

RESULTADOS AUXILIARES

Os resultados enunciados e demonstrados neste capítulo constam dos artigos [5], [15] e [16] e do livro [13], os quais foram adaptados e postos em notação consistente para esta dissertação.

Lema 3.1 (Teorema 3,[15]). *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana. Seja $\phi : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão mínima estável, orientável, completa, com dois lados de uma superfície fechada S tal que $R \circ \phi \geq 0$, onde R é a curvatura escalar de (M, g) . Então, Σ é topologicamente ou uma esfera ou um toro. Quando Σ é um toro, a imersão é totalmente geodésica e $R \circ \phi = 0$, além disso, a métrica induzida ϕ^*g em Σ é plana.*

Demonstração. Dizemos que Σ é estável se a segunda variação da área é não negativa para qualquer compacto contido em Σ . Sejam e_1, e_2 e e_3 uma base ortonormal positivamente definida localmente em Σ com e_1 e e_2 tangentes e o vetor e_3 o vetor normal globalmente definido.

A segunda forma fundamental de Σ é o tensor simétrico de ordem 2 sobre Σ definido por $h_{ij} = \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_3, e_j \rangle$ para $i, j \in \{1, 2\}$, onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de M . Temos então, $h_{11} = \langle \bar{\nabla}_{e_1} e_3, e_1 \rangle, h_{12} = \langle \bar{\nabla}_{e_1} e_3, e_2 \rangle, h_{21} = \langle \bar{\nabla}_{e_2} e_3, e_1 \rangle$ e $h_{22} = \langle \bar{\nabla}_{e_2} e_3, e_2 \rangle$. Como Σ é mínima, temos então a condição que $H = 0$, donde

$$h_{11} + h_{22} = 0. \quad (41)$$

Juntando com o fato que Σ é estável, temos portanto a desigualdade

$$\int_S \left[|\nabla f|^2 - \left(\text{Ric}(e_3) + \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}^2 \right) f^2 \right] d\sigma \geq 0 \quad (42)$$

onde f é uma função com suporte compacto sobre Σ e $\text{Ric}(e_3)$ é a curvatura de Ricci de M na direção e_3 . Rearranjando e usando a equação da curvatura de Gauss (31), obtemos

$$K = K_{12} + h_{11}h_{22} - h_{12}^2 \quad (43)$$

onde K é a curvatura Gaussiana de Σ e K_{ij} é a curvatura seccional de M para a secção determinada por e_i e e_j . Da minimalidade e simetria dos h_{ij} temos

$$K = K_{12} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}^2. \quad (44)$$

Por (42), podemos então escrever

$$\int_{\Sigma} \left[|\nabla f|^2 - \left(R - K + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}^2 \right) f^2 \right] d\sigma \geq 0 \quad (45)$$

onde R é a curvatura escalar de M dada por

$$R = K_{12} + K_{23} + K_{13} = K_{12} + \text{Ric}(e_3). \quad (46)$$

Tomando em (45) $f = 1$, ficamos com

$$0 \leq \int_{\Sigma} \left(R + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}^2 \right) \leq \int_{\Sigma} K d\sigma. \quad (47)$$

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet, temos que Σ é a esfera ou o toro. No caso do toro, temos

$$\int_{\Sigma} K + \int_{\partial\Sigma} k_g = 2\pi\chi(\Sigma).$$

Como $\partial\Sigma = \emptyset$ e $\chi(\Sigma) = 0$ então $\int_{\Sigma} K = 0$. Assim, usando (47) e a hipótese de curvatura escalar não negativa, temos que $\sum_{i,j=1}^2 h_{ij}^2 = 0$, isto é, Σ é totalmente geodésica e $R \equiv 0$ em Σ . Assim, a equação (45) torna-se

$$\int_{\Sigma} (|\nabla f|^2 + Kf^2) d\sigma \geq 0, \quad (48)$$

para toda $f \in C^\infty(\Sigma)$.

O operador estabilidade reduz-se a $\mathcal{L} = \Delta - K$ e o primeiro autovalor λ_1 de \mathcal{L} é

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_{\Sigma} (|\nabla f|^2 + Kf^2) d\sigma : \int_{\Sigma} f^2 = 1 \right\}. \quad (49)$$

Pela equação (48), temos que $\lambda_1 \geq 0$ e $\int_{\Sigma} K d\sigma = 0$. Colocando f como uma constante oportuna em (48) e (49) obtemos $\lambda_1 = 0$. Assim, concluímos que $\lambda_1 = 0$ e $f = 1$ satisfazem $\mathcal{L}f = \Delta f - Kf = 0$ que implica $K = 0$. \square

Lema 3.2 (Teorema 3, (ii)[16]). *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana. Seja $\phi : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão mínima, estável, não compacta, completa, com dois lados tal que $R \circ \phi \geq 0$, onde R é a curvatura escalar de (M, g) . Então Σ com a métrica induzida ϕ^*g é conforme à um plano ou a um cilindro.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que o recobrimento universal de Σ é conformemente equivalente a \mathbb{C} . Suponha o contrário, então Σ é coberta por um disco.

Da estabilidade de Σ e do teorema 1 de [16] temos garantida a existência de uma função φ definida em Σ tal que

$$\Delta\varphi - K\varphi + \left(R + \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{ij}^2 \right) \varphi = 0. \tag{50}$$

Levantando g para o disco, obtemos uma solução positiva para (50) sobre o disco dotado com uma métrica completa, mas $\left(R + \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{ij}^2 \right) \geq 0$, junto com o fato que λ_1 é dado por (49) estamos nas condições do corolário 3 de [16], o que nos conduz a uma contradição.

Portanto, mostramos que Σ é conformemente coberta por \mathbb{C} e assim, Σ é conformemente equivalente a \mathbb{C} ou Σ é conforme a um cilindro A . Se for conforme ao cilindro, precisamos também mostrar que Σ é plana e totalmente geodésica.

Seja $z = x + iy$ uma coordenada complexa para S , de modo que $|dz|^2$ é a métrica plana sobre S e é dada por $ds^2 = \mu(z)|dz|^2$. Fixemos $z_0 \in S$ e tomemos r a distância de z_0 à origem, com relação à métrica plana ds^2 (módulo de z_0 com essa métrica). Para $R > 0$, escolha $\zeta(r)$ tal que $\zeta(r) = 1$ para $r \leq R/2$, $\zeta(R) = 0$ para $r \geq R$, $\zeta(r) \geq 0$ e $|\zeta'| \leq 3/R$ para todo r .

Desta maneira, em (45) em lugar de f colocando ζ e usando a invariância conforme para a integral de Dirichlet¹, segue

$$\frac{9}{R^2} \int_{B_R(z_0)} dx dy - \int_{\Sigma} \left(R - K + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}^2 \right) f^2 d\sigma \geq 0$$

¹ A integral de Dirichlet de uma aplicação $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como sendo $D[u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV$. Na teoria das variáveis complexas essa integral é importante devido ao Princípio de Dirichlet, o qual afirma a existência de uma função u com boas propriedades e que minimiza $D[u]$.

onde $B_R(z_0)$ é a bola de centro z_0 e raio R com relação à métrica plana. Como $\int_{B_R(z_0)} dx dy \leq 2\pi R^2$, isto é, tem crescimento limitado pela constante R e assumimos que $\int_S |K| d\sigma < \infty$, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada² para $R \rightarrow \infty$, donde

$$\int_{\Sigma} \left(R + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}^2 \right) \leq \int_{\Sigma} K d\sigma.$$

Como Σ é topologicamente o cilindro, então usando a Desigualdade Cohn-Vossen [18, p. 85-86] implica que $\int_{\Sigma} K d\sigma \leq 0$.

Portanto, concluímos que Σ é totalmente geodésica e $R \equiv 0$ em Σ . Desta forma, o operador estabilidade reduz-se a $\Delta - K$. Do teorema 1 de [16], existe uma função positiva g sobre S satisfazendo $\Delta\varphi - K\varphi = 0$. Tome $w = \log \varphi$, temos

$$\Delta w = \frac{\varphi\Delta\varphi - |\nabla\varphi|^2}{\varphi^2} = \frac{\varphi K\varphi - |\nabla\varphi|^2}{\varphi^2} = K - \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^2} = K - |\nabla w|^2. \quad (51)$$

Escolhendo-se ζ como anteriormente, obtemos pela Primeira Identidade de Green para Variedades³ que

$$\int_M \zeta^2 \Delta w d\sigma = -2 \int_M \zeta \langle \nabla \zeta, \nabla w \rangle d\sigma.$$

Consequentemente, multiplicando-se (51) por ζ^2 , vale que

$$\int_S |\nabla w|^2 \zeta^2 d\sigma = \int_S \zeta^2 K d\sigma + 2 \int_S \zeta \langle \nabla \zeta, \nabla w \rangle d\sigma.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade das médias⁴, temos

$$2\zeta |\langle \nabla \zeta, \nabla w \rangle| \leq 2\zeta |\nabla \zeta| |\nabla w| \leq \frac{\frac{1}{2}\zeta^2 |\nabla w|^2 + 8|\nabla \zeta|^2}{2} = \frac{1}{4}\zeta^2 |\nabla w|^2 + 4|\nabla \zeta|^2.$$

² Teorema da Convergência Dominada [17, p. 54] Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções L^1 tais que: (i) $f_n \rightarrow f$ quase certamente e (ii) existe $g \in L^1$ não negativa tal que $|f_n| \leq g$ quase certamente, para todo n . Então $f \in L^1$ e $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.

³ Primeira Identidade Green para Variedades: seja M uma variedade diferenciável e $u, v : M \rightarrow \mathbb{R}$, então vale

$$\int_M u \nabla v dV + \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle dV = \int_{\partial M} u N v d\tilde{V}.$$

⁴ Dados $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, vale $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$.

Como

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla w|^2 \zeta^2 d\sigma &= \left| \int_M |\nabla w|^2 \zeta^2 d\sigma \right| = \left| \int_M \zeta^2 K d\sigma + 2 \int_M \zeta \langle \nabla \zeta, \nabla w \rangle d\sigma \right| \\ &\leq \int_M \zeta^2 K d\sigma + \int_M 2|\zeta| |\langle \nabla \zeta, \nabla w \rangle| d\sigma \\ &\leq \int_M \zeta^2 K d\sigma + \frac{1}{4} \int_M \zeta^2 |\nabla w|^2 d\sigma + 4 \int_M |\nabla \zeta|^2 d\sigma \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{3}{4} \int_S |\nabla w|^2 \zeta^2 d\sigma \leq \int_S \zeta^2 K d\sigma + 4 \int_S |\nabla \zeta|^2 d\sigma. \tag{52}$$

Tomando limite $R \rightarrow \infty$, como antes,

$$\frac{3}{4} \int_S |\nabla w|^2 d\sigma \leq \int_S K d\sigma.$$

Portanto w é constante, donde φ também o é e temos $K \equiv 0$.

Como M tem curvatura de Ricci não negativa, podemos escrever o operador estabilidade como $\Delta + \text{Ric}(e_3) + \sum_{i,j} h_{ij}^2$, e notar que na prova que M é totalmente geodésica agora segue como no parágrafo anterior, contudo sem exigir que Σ tenha curvatura total finita. Da prova anterior, temos também

$$\text{Ric}(e_3) = K_{13} + K_{23} = 0 \text{ em } \Sigma.$$

Como,

$$\text{Ric}(e_1) = K_{12} + K_{13} \geq 0 \text{ e } \text{Ric}(e_2) = K_{12} + K_{23} \geq 0,$$

temos

$$\text{Ric}(e_1) + \text{Ric}(e_2) = 2K_{12} = 2K \geq 0.$$

Portanto, a curvatura Gaussiana de Σ é não negativa, e como Σ é um cilindro, temos que $K \equiv 0$. □

Lema 3.3 (Proposição C1[5]). *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana. Seja $\phi : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão mínima, estável, orientável, completa, não compacta e de dois lados tal que $R \circ \phi \geq 0$, onde R é a curvatura escalar de (M, g) . Se Σ é um cilindro então a imersão é totalmente geodésica, a métrica induzida ϕ^*g é plana e $R \circ \phi = 0$.*

Demonstração. Pela proposição 1⁵ de [15], temos garantida a existência de uma função positiva u sobre Σ tal que

$$-\Delta u + Ku = \frac{1}{2}(|h|^2 + R \circ \phi)u$$

onde K é a curvatura Gaussiana, Δ o operador não positivo definido de Laplace-Beltrami da métrica induzida ϕ^*g sobre Σ e $|h|^2$ é a soma dos quadrados das curvaturas principais da imersão (devido a segunda forma).

Pelo Teorema 1⁶ de [15] temos que a métrica conformemente relacionada $u^2\phi^*g$ é completa. Assim, a curvatura Gaussiana para tal métrica é

$$\frac{1}{u^2} \left(\frac{|\nabla u|^2}{u^2} + K - \frac{\Delta u}{u} \right) = \frac{1}{u^2} \left(\frac{|\nabla u|^2}{u^2} + \frac{|h|^2 + R \circ \phi}{2} \right)$$

onde todas as operações geométricas foram tomadas com respeito a métrica induzida original. Além disso, é não negativa, desta forma, segue do teorema de decomposição de Cheeger-Gromoll [6] que $u^2\phi^*g$ é plana.

□

Lema 3.4 (Teorema 2[19]). *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana, completa e conexa com fronteira fracamente meconvexa possivelmente vazia. Assuma que (M, g) tem curvatura escalar não negativa. Se (M, g) contém um toro de dois lados que tem área mínima em sua classe de isotopia então (M, g) é plana.*

Demonstração. Pelo Princípio do Máximo, ou Σ é uma componente do bordo de M ou Σ está no interior de M .

Caso Σ seja uma componente do bordo, tome $M_0 = M$. No caso em que Σ está no interior de M , temos dois casos a considerar, isto é, quando Σ desconecta ou não M . Caso Σ desconecta M , tome $M_0 = \overline{U_0}$, onde U_0 é uma das componentes de $M \setminus \Sigma$. Caso Σ não desconecta M , seja M_0 a variedade com bordo obtida pela separação de M ao

5 Proposição 1 [15]. Se M tem índice finito então, existe um compacto $C \subset M$ tal que $M \setminus C$ é estável e existe uma função positiva u sobre M tal que $Lu = 0$ em $M \setminus C$, onde $\mathcal{L} = \Delta - K + R + \frac{1}{2}|A|^2$, temos K sendo a curvatura Gaussiana de M , $|A|^2$ é o quadrado do comprimento da segunda forma fundamental de Σ , R a curvatura escalar de M e Δ o Laplaciano com respeito a métrica sobre Σ .

6 Teorema 1 [15]. Sejam N uma variedade Riemanniana de dimensão 3 e M uma superfície mínima em N . Se M tem índice finito então a métrica $u^2 ds^2$ é uma métrica completa em M com curvatura Gaussiana não negativa fora de C . Em particular, segue que M é conformemente difeomorfa à uma superfície de Riemann com um número finito de pontos removidos.

longo de Σ (isto é, o que sobra de M). Em cada um desses casos, Σ é uma componente do bordo de M_0 .

Para mostrarmos o resultado, é suficiente mostrar que M_0 é plana. Consideremos a aplicação normal de Gauss $\Phi : [0, \infty) \times \Sigma \rightarrow M_0$ ao longo de Σ dada por $\Phi(t, x) = \exp_x(tN)$, onde N é o vetor normal unitário apontando para dentro ao longo de Σ (note que, Φ não precisa ser definida sobre todo $[0, \infty) \times \Sigma$).

Pelo teorema 1 de [19], M_0 é plana em uma vizinhança de Σ . Então, por argumentos padrão que requerem apenas curvatura de Ricci não negativa como Σ é localmente, a área mínima, existe $a > 0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\Phi : [a, 0) \times \Sigma \rightarrow \Phi([0, a) \times \Sigma)$ é uma isometria (estamos considerando que $[0, a) \times \Sigma$ está munido da métrica produto e, conseqüentemente, é plano, bem como Σ). Seja l o maior número (possivelmente infinito) tal que $\Phi : [0, l) \times \Sigma \rightarrow \Phi([0, l) \times \Sigma)$ é uma isometria. Vamos tratar o caso em que l é finito e o caso contrário.

Caso $l = \infty$, considere uma seqüência de geodésicas normais a Σ , temos que o limite dessa seqüência de geodésicas normais é também uma geodésica normal a Σ , desta maneira, $\Phi([0, l) \times \Sigma)$ é simultaneamente aberta e fechada em M_0 (que é componente conexa), assim $\Phi([0, l) \times \Sigma) = M_0$ e portanto, M_0 é plana.

Caso l finito, lembrando que M_0 é completa, cada geodésica normal a Σ , digamos $\gamma_x : t \mapsto \Phi(x, t), 0 \leq t < l$ estende-se para $t = l$.

Agora, suponhamos que $\Phi : [0, l] \times \Sigma \rightarrow \Phi([0, l] \times \Sigma)$ é uma isometria, então $\Sigma_l = \Phi(\{l\} \times \Sigma)$ é um toro mergulhado totalmente geodésico em M_0 tal que, localmente tem a menor área. Pela maximalidade de l , Σ_l está na mesma componente de Σ' de ∂M_0 , daí usando o Princípio do Máximo para hipersuperfícies, Σ e Σ' são a mesma, $\Sigma = \Sigma'$.

Agora podemos argumentar que $\Phi([0, l] \times \Sigma)$ é simultaneamente aberta e fechada em M_0 . Conseqüentemente, $M_0 = \Phi([0, l] \times \Sigma)$, e portanto, é plana.

Suponhamos que $\Phi : [0, l] \times \Sigma \rightarrow \Phi([0, l] \times \Sigma)$ não é uma isometria. A única forma disto acontecer é se duas geodésicas normais a Σ , digamos $\gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}$ forem tais que $\gamma_{x_1}(l) = \gamma_{x_2}(l)$. Como não existem pontos focais em Σ ao longo de γ_{x_1} e γ_{x_2} no intervalo $[0, l]$. Assim, existem vizinhanças $U_1, U_2 \subset \Sigma$ de x_1, x_2 , respectivamente, tais que $\Phi : [0, l] \times U_1 \rightarrow \Phi([0, l] \times U_1)$ e $\Phi : [0, l] \times U_2 \rightarrow \Phi([0, l] \times U_2)$ são isometrias.

Conseqüentemente, $\Phi(\{l\} \times U_1), \Phi(\{l\} \times U_2)$ são duas hipersuperfícies mergulhadas totalmente geodésicas em M_0 que (devido a escolha de l) tem distância constante l de Σ .

Portanto, segue que, $\Phi(\{l\} \times U_1)$ e $\Phi(\{l\} \times U_2)$ coincidem perto do ponto final comum $\gamma_{x_1}(l) = \gamma_{x_2}(l)$. Por um argumento de continuação direto, concluímos que cada segmento geodésico $\gamma_x, x \in \Sigma$, de comprimento $2l$, encontra-se com Σ ortogonalmente em ambos os pontos finais.

Agora podemos argumentar que $\Phi([0, l] \times \Sigma)$ é simultaneamente aberta e fechada em M_0 . Consequentemente, $M_0 = \Phi([0, l] \times \Sigma)$, e portanto, é plana. \square

Lema 3.5 (Proposições 1.33 e 1.36 de [13]). *Sejam (M, g) uma 3-variedade Riemanniana completa e orientável e $S \subset M$ uma superfície propriamente mergulhada, orientável, absolutamente minimizante de área sem bordo. Existe uma cobertura $p : \tilde{M} \rightarrow M$ com $p_*(\pi_1(\tilde{M})) = i_*(\pi_1(S))$, onde $i : S \rightarrow M$ é aplicação inclusão. A aplicação inclusão é um levantamento para um mergulho próprio $\tilde{i} : S \rightarrow \tilde{M}$ e $\tilde{i}_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(\tilde{M})$ é sobrejetora. Além disso, $\tilde{S} = \tilde{i}(S) \subset \tilde{M}$ é absolutamente minimizante de área em (\tilde{M}, \tilde{g}) , onde $\tilde{g} = p^*g$.*

Demonstração. Mostraremos a existência da cobertura e do levantamento \tilde{i} . Fixemos $s_0 \in S$. Seja $s \in S$, considere o caminho γ em S de s_0 para s . O caminho $i\gamma$ em M começando em $x_0 (= i(s_0))$ tem um único levantamento $\tilde{i}\gamma$ em $\tilde{x}_0 (= p(x_0))$. Defina $\tilde{p}(s) = \tilde{p}\gamma(1)$.

Mostremos que \tilde{i} está bem definida: tomemos um outro caminho β de s_0 para s , então $p\beta \circ \overline{p\gamma}$ é um laço h_0 em s_0 com $[h_0] \in i_*(\pi_1(\tilde{M})) \subset p_*(\pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0))$, ou seja, existe uma homotopia h_t de h_0 para o laço h_1 que o levanta para um laço \tilde{h}_1 em \tilde{M} baseado em \tilde{x}_0 . Aplicando a propriedade de cobertura homotópica para h_t temos o levantamento \tilde{h}_t . Como \tilde{h}_1 é um laço em \tilde{x}_0 , consequentemente é \tilde{h}_0 . Da unicidade dos levantamentos de caminho, por um lado temos que \tilde{h}_0 é $\tilde{i}\beta$, por outro lado, $\tilde{i}\gamma$ é atravessado em sentido contrário, com um ponto médio comum $\tilde{i}\gamma(1) = \tilde{i}\beta(1)$. Portanto, \tilde{i} está bem definida.

Mostremos agora que \tilde{i} é contínua. Seja $U \subset M$ aberto que é vizinhança de $i(s)$ tendo um levantamento $\tilde{U} \subset \tilde{M}$ contendo $\tilde{i}(s)$ tal que $p : \tilde{U} \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Tome uma vizinhança aberta conexa por caminhos V de s com $i(V) \subset U$. Temos que, para caminhos de s_0 para $s' \in V$, podemos fixar um caminho γ de s para s seguidos por caminhos ξ em V de s para s' . Então, os caminhos $i\gamma \circ i\xi$ em M tem levantamentos $(\tilde{i}\gamma)(\tilde{\xi})$ onde $i\xi = p^{-1}i\xi$ e $p^{-1} : U \rightarrow \tilde{U}$ inversa de $p : \tilde{U} \rightarrow U$. Portanto, $\tilde{i}(V) \subset \tilde{U}$ e $\tilde{i}_V = p^{-1}i$, consequentemente, \tilde{i} é contínua em s . O diagrama a seguir ilustra a relação entre as aplicações consideradas.

$$\begin{array}{ccc}
 (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \\
 & \searrow \tilde{f} & \uparrow p \\
 & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0)
 \end{array}$$

Mostremos que \tilde{S} é minimizante de área: note que p é injetora ao longo de \tilde{S} e que cada superfície (propriamente mergulhada) competindo com \tilde{S} se projeta em uma imersão própria para superfície S . Usando argumentos com pequenas alterações na área, isto é, quando consideramos a definição da propriedade de absolutamente minimizante de área temos que as variedades estão mergulhadas, desta forma ao considerarmos a projeção de concorrente, ele pode se cruzar, mas se \tilde{S} for um concorrente com mesma área que a região correspondente de \tilde{S} , exceto pelos possíveis pontos não mergulhados. Assim, procedemos substituindo S por um concorrente mergulhado, aumentando apenas ligeiramente a área, e assim obtemos uma superfície competidora por baixo propriamente mergulhada. \square

3.1 CONSTRUÇÃO DE UMA MÉTRICA ESPECÍFICA

Nesta seção vamos construir uma família de métricas com propriedades de interesse que consta do Apêndice J de [5]. Para tal, precisaremos de algumas outras noções específicas de análise funcional e de geometria. Desse modo, optamos, para comodidade do leitor, colocar nesta parte do texto tais detalhes.

Definição 3.6. A norma C^k de $f : A \subset M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por

$$\|f\|_{C^k, A} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_A |D^\alpha f| \quad (53)$$

onde $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ com a notação multi-índice.

É possível mostrar que, de fato, $\|f\|_{C^k, A}$ é uma norma, desta forma podemos considerar a variedade agora com uma estrutura de espaço de Banach donde temos uma série considerável de resultados da Análise Funcional.

A próxima noção que definiremos é a de espaços homogeneamente regulares.

Definição 3.7. Uma variedade Riemanniana (M, g) de dimensão n é **homogeneamente regular** se existe um $\epsilon > 0$ tal que, a imagem da aplicação exponencial de cada bola de raio ϵ em $T_p M$, $p \in M$ é uniformemente próxima de uma bola de raio ϵ em \mathbb{R}^n na norma C^2 , isto é, existe $\delta > 0$ tal que $\|g_{ij}(p, x) - \delta_{ij}\|_{C^2, B_{\mathbb{R}^n}(0, \epsilon)} \leq \delta$ para todo $p \in M$, onde $g_{ij}(p, x)$ são as coordenadas do tensor métrico numa carta exponencial normal.

Em particular, M tem raio de injetividade positivo. Observe ainda que, se M é compacta, então M é homogeneamente regular.

Mais detalhes sobre essas variedades homogeneamente regulares podem ser encontrados, por exemplo, em [20].

Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função não positiva com suporte compacto em $[0, 3]$ tal que $f(s) = -\exp\left(\frac{18}{s-3}\right)$ quando $s \in (1, 3)$. Esta definição é feita pra que $f'(s) > 0$, pois $f'(s) = \frac{18}{(s-3)^2} \exp\left(\frac{18}{s-3}\right)$ e satisfaça também $sf''(s) + 3f'(s) < 0$ para $s \in (1, 3)$.

Agora, consideremos (M, g) variedade Riemanniana homogeneamente regular.

Escolha $0 < r_0 < \frac{\text{inj}(M, g)}{4}$ de modo que

$$\Delta_g \text{dist}(\cdot, p)^2 \leq 8$$

em $\{x \in M : \text{dist}_g(x, p) \leq 3r_0\}$ para todo $p \in M$, onde Δ_g é o operador de Laplace-Beltrami não positivo com respeito à g .

Fixe $p \in M$ e $0 < r \leq r_0$. Consideremos a função $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto r^4 f\left(\frac{\text{dist}_g(x, p)}{r}\right).$$

Ou seja, $v(x) = -r^4 \exp\left(\frac{18r}{\text{dist}_g(x, p) - 3r}\right)$, donde temos que v é diferenciável pois f o é, não positiva e com suporte em $\{x \in M : \text{dist}_g(x, p) \leq 3r\}$. Além disso,

$$\Delta_g v < 0$$

em $\{x \in M : r < \text{dist}_g(x, p) < 3r\}$. De fato, temos

$$\begin{aligned} \Delta_g v &= \text{div}(\nabla v) = \text{div}\left(\nabla f\left(\frac{\text{dist}_g(x, p)}{r}\right)\right) \\ &= \text{div}\left(f'\left(\frac{\text{dist}_g(x, p)}{r}\right) \frac{1}{r} \nabla \text{dist}_g(x, p)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{r} \left\{ \left\langle \nabla f' \left(\frac{\text{dist}_g(x, p)}{r} \right), \nabla \text{dist}_g(x, p) \right\rangle + f' \left(\frac{\text{dist}_g(x, p)}{r} \right) \Delta_g \text{dist}_g(x, p) \right\} \\
 &= \frac{1}{r} \left\{ \left\langle f'' \left(\frac{\text{dist}_g(x, p)}{r} \right) \frac{1}{r} \nabla \text{dist}_g(x, p), \nabla \text{dist}_g(x, p) \right\rangle + f' \left(\frac{\text{dist}_g(x, p)}{r} \right) \Delta_g \text{dist}_g(x, p) \right\} \\
 &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{r} f'' \left(\frac{\text{dist}_g(x, p)}{r} \right) + f' \left(\frac{\text{dist}_g(x, p)}{r} \right) \Delta_g \text{dist}_g(x, p) \right\}.
 \end{aligned}$$

Fazendo $s = \frac{\text{dist}_g(x, p)}{r}$ então, como $1 \leq s \leq 3$, segue que $r \leq \text{dist}_g(x, p) \leq 3r$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
 \Delta_g v &= \frac{1}{r^2} (f''(s) + r f'(s) \Delta_g \text{dist}_g(x, p)) \\
 &= \frac{1}{r^2} \left(f''(s) + \frac{\text{dist}_g(x, p)}{s} \Delta_g \text{dist}_g(x, p) \right) \\
 &\leq \frac{1}{sr^2} (s f''(s) + f'(s) (\text{dist}_g(x, p) \Delta_g \text{dist}_g(x, p))).
 \end{aligned}$$

Precisamos estimar $\text{dist}_g(x, p) \Delta_g \text{dist}_g(x, p)$, para tal, usamos que

$$\text{div}(\nabla \text{dist}_g(x, p)^2) = \text{div}(2 \text{dist}_g(x, p) \nabla \text{dist}_g(x, p)) = 2(1 + \text{dist}_g(x, p) \Delta_g \text{dist}_g(x, p)) \leq 8$$

que ocorre se, e somente se, $\text{dist}_g(x, p) \Delta_g \text{dist}_g(x, p) \leq 3$. Assim,

$$\Delta_g v \leq \frac{1}{sr^2} (s f''(s) + 3 f'(s)) < 0$$

para $s \in (1, 3)$.

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, uma família de métricas conformes $\{g(t)\}_{t \in (0, \epsilon)}$ é dada por

$$g(t) = (1 + tv)^4 g.$$

De fato, quando $u \in C^\infty(M)$ é positiva e $\tilde{g} = u^4 g$ é a métrica conforme, temos aplicando (39) e (40)

$$u^5 R_{\tilde{g}} = u R_g - 8 \Delta_g u$$

e

$$u^3 H_{\tilde{g}} = u H_g + 4(du)(\nu_g)$$

ao longo de Σ e onde ν_g é o vetor normal unitário com relação à g .

4

TEOREMA DA CURVATURA ESCALAR

Teorema 4.1. *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana completa, conexa, orientável e com curvatura escalar não negativa. Suponha que (M, g) contenha uma superfície propriamente mergulhada $S \subset M$ que é homeomorfa ao cilindro e absolutamente minimizante de área. Então (M, g) é plana. De fato, uma cobertura de (M, g) é isométrica ao espaço $S^1 \times \mathbb{R}^2$ com um ajuste de escala, se necessário.*

Seja $S \subset M$ um cilindro propriamente mergulhado que é absolutamente minimizante de área em (M, g) .

Pelo Lema 3.1, podemos supor que a aplicação inclusão $i : S \rightarrow M$ induz uma aplicação sobrejetora $i_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$. Segue do Lema 3.3 que $S \subset M$ é intrinsecamente plano. Por um ajuste de escala em (M, g) , se necessário, podemos supor que $S \subset M$ é isométrico ao cilindro padrão $S^1 \times \mathbb{R}$.

Se $S \subset M$ está separando M , então $M \setminus S$ tem duas componentes. Cortamos M ao longo de S e fazemos uma escolha de componente para obter uma 3-variedade Riemanniana completa, conexa cujo bordo é conexo. Se $S \subset M$ não está separando M , então $M \setminus S$ é conexa. Cortamos M ao longo de S para obter uma 3-variedade Riemanniana completa, conexa cujo bordo tem exatamente duas componentes, das quais escolhemos uma.

Agora, denotamos a nova 3-variedade Riemanniana por $(\widehat{M}, \widehat{g})$ (a qual foi escolhida no parágrafo anterior) e a componente escolhida como seu bordo por Σ . Note que $\Sigma \subset \widehat{M}$ é isométrico a S e absolutamente minimizante de área em $(\widehat{M}, \widehat{g})$.

Denotamos a curva fechada em Σ que corresponde a $S^1 \times \{0\}$ por γ e denotamos por Σ_h a parte de Σ que corresponde a $S^1 \times [-h, h]$.

Fixemos uma geodésica $c : [0, \epsilon) \rightarrow \widehat{M}$ parametrizada pelo comprimento de arco, com $c(0) \in \gamma$ e $c'(0) \in T_{c(0)}\Sigma$. Usando a construção descrita na seção 3.1, encontramos uma família de métricas Riemannianas suaves $\{\widehat{g}(r, t)\}_{r, t \in (0, \epsilon)}$ em \widehat{M} com as seguintes propriedades:

- (i) $\widehat{g}(r, t) \rightarrow \widehat{g}$ em C^3 quando $t, r \searrow 0$.

- (ii) $\widehat{g}(r, t) \rightarrow \widehat{g}$ diferenciavelmente quando $t \searrow 0$ para $r \in (0, \epsilon)$ fixado.
- (iii) $\widehat{g}(r, t) = \widehat{g}$ em $\{x \in \widehat{M} : \text{dist}_{\widehat{g}}(x, c(2r)) \geq 3r\}$.
- (iv) $\widehat{g}(r, t) < \widehat{g}$ como formas quadráticas em $\{x \in \widehat{M} : \text{dist}_{\widehat{g}}(x, c(2r)) < 3r\}$.
- (v) $\widehat{g}(r, t)$ tem curvatura escalar positiva em $\{x \in \widehat{M} : r < \text{dist}_{\widehat{g}}(x, c(2r)) < 3r\}$.
- (vi) \widehat{M} é fracamente média convexa com respeito à $\widehat{g}(r, t)$.

A Figura 3 explicita visualmente a métrica \widehat{g} que foi construída.

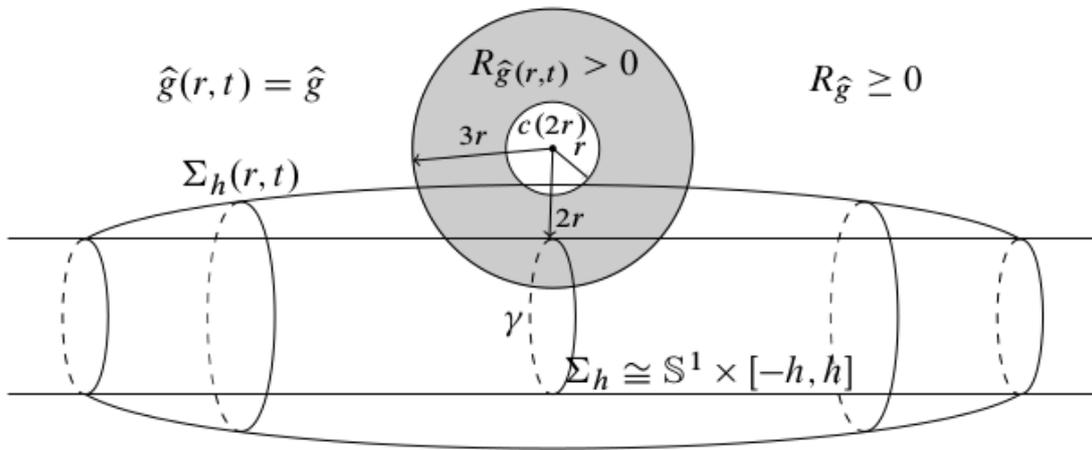


Figura 3: A curvatura escalar de $\widehat{g}(r, t)$ é positiva na região pintada de cinza. Fonte: [7].

Fixemos $h > 1$ e seja B_h um aberto cujo fecho é compacto e com bordo suave em \widehat{M} e tal que $\{x \in \widehat{M} : \text{dist}_{\widehat{g}}(x, \Sigma_h) < 2h\} \subset B_h$. Modificamos a métrica $\widehat{g}(r, t)$ próximo ao bordo de B_h para $\widehat{g}(r, t, h)$ de maneira que B_h é fracamente média convexa com respeito à $\widehat{g}(r, t, h)$ e

$$(1 - \delta)\widehat{g}(r, t) \leq \widehat{g}(r, t, h) \leq (1 + \delta)\widehat{g}(r, t)$$

onde $\delta \in (0, 1)$ é escolhido para satisfazer (54) a seguir. Entre todas as superfícies compactas orientadas em B_h com bordo $\partial\Sigma_h$ que é um aberto limitado em \widehat{M} , existe uma cuja área com respeito a $\widehat{g}(r, t, h)$ é a menor.

Escolhamos uma superfície minimizante de área de que denotamos por $\Sigma_h(r, t)$. Afirmamos que $\Sigma_h(r, t)$ intersecta $\{x \in \widehat{M} : \text{dist}_{\widehat{g}}(x, c(2r)) < 3r\}$. Caso contrário teríamos que $\widehat{g} = \widehat{g}(r, t)$ ao longo de $\Sigma_h(r, t)$ e podemos calcular, como em [5, p. 992] que

$$0 < A_{\widehat{g}}(\Sigma_h) - A_{\widehat{g}(r,t)}(\Sigma_h) \leq A_{\widehat{g}}(\Sigma_h(r, t)) - A_{\widehat{g}(r,t)}(\Sigma_h)$$

$$\begin{aligned}
&= A_{\widehat{g}(r,t)}(\Sigma_h(r,t)) - A_{\widehat{g}(r,t)}(\Sigma_h) \\
&\leq \frac{1}{1-\delta} A_{\widehat{g}(r,t,h)}(\Sigma_h(r,t)) - A_{\widehat{g}(r,t)}(\Sigma_h) \\
&\leq \frac{1}{1-\delta} A_{\widehat{g}(r,t,h)}(\Sigma_h) - A_{\widehat{g}(r,t)}(\Sigma_h) \\
&\leq \frac{1+\delta}{1-\delta} A_{\widehat{g}(r,t)}(\Sigma_h) - A_{\widehat{g}(r,t)}(\Sigma_h) \\
&= \frac{2\delta}{1-\delta} A_{\widehat{g}(r,t)}(\Sigma_h).
\end{aligned}$$

Esta é uma contradição se tomarmos $\delta = \delta(r, t, h) > 0$ com

$$\frac{2\delta}{1-\delta} < \frac{A_{\widehat{g}}(\Sigma_h) - A_{\widehat{g}(r,t)}(\Sigma_h)}{A_{\widehat{g}}}. \quad (54)$$

Uma comparação com pequenas esferas geodésicas nos ajuda a estimar limites para a área das superfícies $\Sigma_h(r, t)$ que são independentes de todos os parâmetros. Usando resultados padrão de Teoria Geométrica da Medida, isto é, conforme a métrica varia, a sequência de superfícies propriamente mergulhadas homologicamente minimizantes de área^{*}, converge para essa superfície. Assim podemos passar essas superfícies para um limite subsequencial quando $h \rightarrow \infty$ para obter uma superfície propriamente mergulhada $\Sigma(r, t)$. Note que $\Sigma(r, t)$ é uma fronteira em \widehat{M} . Por construção, temos que a fronteira é homologicamente minimizante de área^{*} com respeito à $\widehat{g}(r, t)$.

Quando $r, t \rightarrow 0$ são suficientemente pequenos, a superfície $\Sigma(r, t)$ contém uma curva fechada $\gamma(r, t)$ que intersecta $\{x \in \widehat{M} : \text{dist}_{\widehat{g}}(x, c(2r)) \leq 3r\}$ e que é o fecho para γ . De fato, existe uma bola pequena com centro em $c(0) \in \gamma$ onde uma parte de $\Sigma(r, t)$ aparece como o gráfico abaixo de $T_{c(0)}\Sigma$.

O Princípio Geométrico de Harnack nos permite continuar este pedaço de $\Sigma(r, t)$ em uma fita à medida que atravessamos γ . A fita deve se fechar à medida que percorremos em volta de γ , caso contrário haveria duas folhas próximas, o que contradiz a propriedade de ser minimizante de área de $\Sigma(r, t)$. A componente $\widehat{\Sigma}(r, t)$ de $\Sigma(r, t)$ é um bordo em \widehat{M} que é homologicamente minimizante de área^{*} com relação a $\widehat{g}(r, t)$.

Afirmamos que $\widehat{\Sigma}(r, t)$ não é nem um plano nem esfera, se $r, t > 0$ suficientemente pequenos. Suponhamos o caso contrário.

Neste caso, $\gamma(r, t)$ limita um disco mergulhado em \widehat{M} . Consequentemente, o mesmo para γ .

Em particular, a aplicação inclusão induz a aplicação trivial $\pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(\widehat{M})$. Pelo Lema 4.2 abaixo, cada superfície fechada e conexa em \widehat{M} . Isso contradiz sua propriedade de ser homologicamente minimizante de área*. Suponha que $\widehat{\Sigma}(r, t)$ seja um plano (veja Figura 4). Seja $\Delta(r, t) \subset \widehat{\Sigma}(r, t)$ o disco limitado por $\gamma(r, t)$. Como $\widehat{\Sigma}(r, t)$ converge para Σ quando $r, t \searrow 0$, temos esse $A_{\widehat{g}}(\Delta(r, t)) \rightarrow \infty$ quando $r, t \searrow 0$. Escolha $0 < r_2 \ll r_1$ e $0 < t_2 \ll t_1$, de modo que $\widehat{\Sigma}(r_1, t_1)$ e $\widehat{\Sigma}(r_2, t_2)$ sejam planos. Observe que $\Delta(r_2, t_2)$, $\Delta(r_1, t_1)$ e um pequeno "tronco" conectando $\gamma(r_1, t_1)$ a $\gamma(r_2, t_2)$ ligam um conjunto aberto. Isso contradiz a propriedade de ser homologicamente minimizante de área* de $\widehat{\Sigma}(r_1, t_1)$.

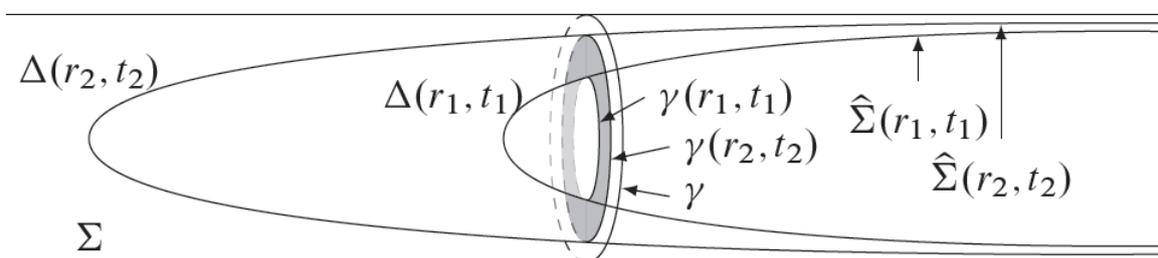


Figura 4: Essa possibilidade de que $\widehat{\Sigma}(r, t)$ seja um plano para $r, t > 0$ suficientemente pequenos pode ser descartada comparando as áreas dos discos $\Delta(r, t)$ ou pela incompressibilidade de Σ . Fonte: [7].

De (v, pág.61), Lema 3.1, Lema3.2 e Lema3.3 que, para $r, t > 0$ suficientemente pequenos, $\widehat{\Sigma}(r, t)$ ou intersecta $\{x \in \widehat{M} : \text{dist}_{\widehat{g}}(x, c(2r)) \leq r\}$, ou $\widehat{\Sigma}(r, t)$ intersecta $\{x \in \widehat{M} : \text{dist}_{\widehat{g}}(x, c(2r)) = 3r\}$ mas não $\{x \in \widehat{M} : \text{dist}_{\widehat{g}}(x, c(2r)) < 3r\}$. Fixe $r > 0$ pequenos e passemos para o limite geométrico subsequencial com $t \searrow 0$. Obtemos uma fronteira propriamente mergulhada $\Sigma(r) \subset \widehat{M}$ que tem uma componente conexa $\widehat{\Sigma}(r)$ que intersecta $\{x \in \widehat{M} : \text{dist}_{\widehat{g}}(x, c(2r)) \leq 3r\}$ e que é disjunta de Σ . Como antes, vemos que $\widehat{\Sigma}(r)$ é uma fronteira propriamente mergulhada em \widehat{M} que é homologicamente minimizante de área* com respeito à \widehat{g} . Claramente, $\widehat{\Sigma}(r)$ é disjunta de Σ e contém uma curva propriamente mergulhada $\gamma(r)$ limite para γ . O argumento do parágrafo anterior mostra que quando $r > 0$ é suficientemente pequeno, a superfície $\widehat{\Sigma}(r)$ é difeomorfa a um toro ou um cilindro.

Se $\widehat{\Sigma}(r)$ for um toro, então $(\widehat{M}, \widehat{g})$ será isométrico ao cilindro padrão $S^1 \times \mathbb{R} \times [0, \infty)$ ou $S^1 \times \mathbb{R} \times [0, a]$, para algum $a > 0$, pelo Lema 3.4.

Assim, podemos supor que $\widehat{\Sigma}(r)$ é cilíndrico para todo $r > 0$ pequeno. Pelo Lema3.3, $\widehat{\Sigma} \subset \widehat{M}$ é intrinsecamente plano, totalmente geodésico e o tensor de Ricci

do ambiente avaliado na direção normal é nulo ao longo de $\widehat{\Sigma}(r)$. Observe que $\widehat{\Sigma}(r)$ converge para Σ quando $r \searrow 0$.

Agora vamos mostrar que o tensor de Riemann do ambiente é nulo ao longo de Σ . Usando a primeira e segunda variação da área, obtemos uma função positiva $u \in C^\infty(\Sigma)$ tal que

$$(\nabla_{\widehat{\Sigma}}^2 u)(X, Y) + Rm(\nu, X, Y, \nu)u = 0 \tag{55}$$

para quaisquer campos X, Y tangentes a Σ . Aqui, ν é o vetor normal unitário à Σ . Considerando o traço desta equação e usando que $\text{Ric}(\nu, \nu) = 0$ (isto segue da equação de Gauss), obtemos que $u = 0$. Segue que, u é uma constante positiva. Voltando à equação original (55), vemos que $Rm(\nu, X, Y, \nu) = 0$ sempre que X e Y são tangenciais a Σ . A equação de Codazzi implica que $Rm(X, Y, Z, \nu) = 0$, desde que X, Y, Z sejam tangentes, e a equação de Gauss fornece que $Rm(X, Y, Z, W) = 0$ sempre que X, Y, Z, W são tangentes. Segue-se que o tensor da curvatura ambiente se anula ao longo de Σ .

Podemos repetir o argumento acima, começando com qualquer uma das superfícies $\widehat{\Sigma}(r)$ para $r > 0$ suficientemente pequeno, usando que elas são homologicamente minimizantes de área* em $(\widehat{M}, \widehat{g})$. Um argumento de continuidade indica que $(\widehat{M}, \widehat{g})$ é o cilindro $S^1 \times \mathbb{R} \times [0, \infty)$ ou o cilindro $S^1 \times \mathbb{R} \times [0, a]$ para algum $a > 0$.

Lema 4.2. *As suposições e notações usadas aqui são como na prova do Teorema 1.1 acima. Se a inclusão $\Sigma \subset \widehat{M}$ induz a aplicação trivial $\pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(\widehat{M})$, então todas as superfícies fechadas e conexas em \widehat{M} são separadas.*

Demonstração. Segue da hipótese e a construção de \widehat{M} de $M \setminus S$ que M é simplesmente conexa. (Aqui estamos usando que a aplicação $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ induzida pela inclusão $S \subset M$ é sobrejetora.) A teoria de interseção padrão dá que toda superfície conexa e fechada $N \subset M$ separa M . De fato, se assumirmos que $N \subset M$ não está separando, então existe uma curva mergulhada em M que intersecta N transversalmente e exatamente uma vez. Tal curva não pode ser homotopicamente trivial, uma vez que não pode ser colapsada em um único ponto.

Suponha agora que $\widehat{N} \subset \widehat{M}$ é uma superfície conexa e fechada disjunta do bordo de \widehat{M} . Tal superfície corresponde a uma superfície conexa e fechada $N \subset M$, que é disjunta de S . Usando que N separa M e a construção de \widehat{M} de M , concluímos que \widehat{N} separa \widehat{M} . □

Além das hipóteses consideradas sobre a topologia de M , admitiremos que M contenha uma **superfície incompressível** e propriamente mergulhada S , ou seja, $i : S \rightarrow$

M é um mergulho próprio para o qual é injetiva a aplicação induzida $i_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ entre seus grupos fundamentais.

Teorema 4.3. *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana conexa, orientável e completa com curvatura escalar não negativa. Suponha que (M, g) contenha uma superfície incompressível e propriamente mergulhada $S \subset M$, que é homeomorfa ao cilindro e homologicamente minimizante de área. Então (M, g) é plana. Mais ainda, uma cobertura de (M, g) é isométrica à $S^1 \times \mathbb{R}^2$, sob eventual ajuste de escala.*

Demonstração. Nós seguimos a prova do Teorema 4.1, exceto pelas seguintes mudanças:

- (a) Não precisamos do argumento com a cobertura.
- (b) Trabalhamos com superfícies $\Sigma_h(r, t)$ com $\partial\Sigma_h(r, t) = \partial\Sigma_h$ que têm menor área em relação à $\widehat{g}(r, t, h)$ e que, juntamente com Σ_h limita um conjunto aberto em B_h .
- (c) Para argumentar que $\widehat{\Sigma}(r, t)$ não é nem um plano nem uma esfera, usamos Σ que é incompressível.

□

5 | CONSEQUÊNCIAS

No artigo base desta dissertação [7], os autores afirmam que as técnicas desenvolvidas para provar o teorema (4.1) podem ser usadas para provar resultados constantes em várias de suas referências em [7], que segundo os autores, são perspectivas futuras que eles explorarão.

Além disso, no teorema (4.3) os autores usam o fato da necessidade da condição de incompressibilidade, condição esta que eles não sabem se pode ser enfraquecida, ou ignorada e o resultado continuar válido.

Outra hipótese que pode ser um caminho de investigação viável é quanto a limitação da dimensão da variedade ambiente ter que ser $n = 3$, porque o resultado não se generaliza para uma dimensão maior que 3 carece de mais investigações.

BIBLIOGRAFIA

- 1 KATZ, V. **A History of Mathematics: An Introduction**. Boston: Addison-Wesley, 2009. (Featured Titles for History of Mathematics Series). ISBN 9780321387004.
- 2 FRASER, C. G. Isoperimetric problems in the variational calculus of Euler and Lagrange. **Historia mathematica**, Elsevier, v. 19, n. 1, p. 4–23, 1992.
- 3 STRUIK, D. J. **A Concise History of Mathematics**. New York: Dover Publications, 1987.
- 4 BLÅSJÖ, V. The isoperimetric problem. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 112, n. 6, p. 526–566, 2005.
- 5 CARLOTTO, A.; CHODOSH, O.; EICHMAIR, M. Effective versions of the positive mass theorem. **Inventiones mathematicae**, v. 206, n. 3, p. 975–1016, Dec 2016. ISSN 1432-1297. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00222-016-0667-3>.
- 6 CHEEGER, J.; GROMOLL, D. On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature. **Annals of Mathematics**, Annals of Mathematics, v. 96, n. 3, p. 413–443, 1972. ISSN 0003486X. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1970819>.
- 7 CHODOSH, O.; EICHMAIR, M.; MORARU, V. A splitting theorem for scalar curvature. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, Wiley Online Library, v. 72, n. 6, p. 1231–1242, 6 2019. ISSN 0010-3640. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/cpa.21803>.
- 8 COLDING, T. H.; MINICOZZI, W. P. **A course in minimal surfaces**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Soc., 2011. v. 121.
- 9 CARMO, M. P. do. **Geometria Riemanniana**. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2005.
- 10 CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- 11 PETERSEN, P. **Riemannian Geometry**. New York: Springer, 2006. v. 171.
- 12 CASTILLO, G. **Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach**. Boston: Birkhäuser Boston, 2011. ISBN 9780817682712. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=V2YWDPGpiZgC>.
- 13 HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

- 14 LIMA, E. L. **Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- 15 FISCHER-COLBRIE, D. On complete minimal surfaces with finite morse index in three manifolds. **Inventiones mathematicae**, Springer, v. 82, n. 1, p. 121–132, 1985.
- 16 FISCHER-COLBRIE, D.; SCHOEN, R. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 33, n. 2, p. 199–211, 1980. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.3160330206>.
- 17 FOLLAND, G. B. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, 2nd Edition**. 2. ed. New York City: John Wiley & Sons, 1999.
- 18 OSSERMAN, R. **A survey of minimal surfaces**. Mineola, New York: Dover Publications, 2002.
- 19 CAI, M.; GALLOWAY, G. Rigidity of area minimizing tori in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 8, n. 3, p. 565–573, 2000.
- 20 MEEKS, W. H.; PÉREZ, J.; ROS, A. The local picture theorem on the scale of topology. **J. Differential Geom.**, Lehigh University, v. 109, n. 3, p. 509–565, 07 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.4310/jdg/1531188195>.