

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
CAPES/UFABC

Dissertação de Mestrado

Um método alternativo para o cálculo da
dimensão de fronteiras fractais entre bacias de
atração

Vitor Martins de Oliveira

Santo André - SP
2016

Vitor Martins de Oliveira

Um método alternativo para o cálculo da dimensão de fronteiras fractais entre bacias de atração

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em
Matemática da Universidade Federal do ABC como requisito
parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Linha de pesquisa: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Rafael Ribeiro Dias Vilela de Oliveira

Santo André - SP
2016

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Martins de Oliveira, Vitor

Um método alternativo para o cálculo da dimensão de fronteiras fractais entre bacias de atração / Vitor Martins de Oliveira. — 2016.

84 fls. : il.

Orientador: Rafael Ribeiro Dias Vilela de Oliveira

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2016.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Dimensão Fractal. 3. Caos. I. Ribeiro Dias Vilela de Oliveira, Rafael. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2016. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, ____ de _____ de 20____.

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Folha de aprovação

Agradecimentos

À minha família, pelo apoio e incentivo durante todos esses anos de UFABC.
À minha namorada, que está sempre ao meu lado, compartilhando minhas alegrias e tristezas.

Aos meus companheiros de mestrado, os quais trilharam esse caminho comigo.
Ao meu amigo Tomaz, pela incomensurável ajuda em programação.

Ao meu orientador Prof. Rafael Vilela, por toda ajuda e paciência durante a execução desse trabalho.

À Universidade Federal do ABC, pela estrutura e ensino de qualidade.
Aos professores do curso de Pós-graduação em Matemática, por toda a dedicação nas aulas e bons conselhos.

Aos membros das bancas de qualificação e defesa, os quais aceitaram o nosso convite e ajudaram na melhoria do trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de estudos.

A todos os que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta pesquisa.

Kirk "Spock, these cadets of yours, how good are they? How will they respond under real pressure?" Spock "As with all living things, each according to his gifts".

STAR TREK II: THE WRATH OF KAHN

Resumo

No espaço de fases de sistemas dinâmicos, podem existir diferentes regiões as quais correspondem a diferentes comportamentos futuros do sistema: as bacias de atração. Separando essas regiões, há um conjunto de pontos, o qual chamamos de fronteira, que pode possuir uma geometria regular ou fractal, essa última caracterizada por uma dimensão D não inteira. A principal consequência de um sistema dinâmico possuir uma fronteira fractal em seu espaço de fases está na dificuldade em se determinar o comportamento futuro do sistema. De fato, dado que a precisão com a qual conseguimos medir um ponto é finita, existe uma área no espaço de fases em que não sabemos ao certo a qual bacia de atração o ponto pertence. Em especial, caso a fronteira seja fractal, essa área é proporcional a ϵ^{N-D} , onde ϵ é o erro de medição e N é a dimensão do sistema. Dessa forma, percebemos a importância de conseguirmos calcular a dimensão D da fronteira fractal. Nesse trabalho, primeiro apresentamos os principais conceitos de sistemas dinâmicos e geometria fractal, relacionando essas estruturas geométricas ao comportamento dinâmico caótico. Em seguida, definimos as fronteiras e estendemos a elas o conceito de geometria fractal. Por último, apresentamos os métodos vigentes para o cálculo numérico da dimensão de fronteiras fractais, a saber, o método da incerteza e o método da avaliação da função de saída e, baseados no primeiro método, desenvolvemos um método alternativo: o método da incerteza condicional. Observamos que o método desenvolvido nesse trabalho é válido como um novo método para o cálculo da dimensão de fronteiras fractais, podendo ser utilizado tanto em sistemas de tempo contínuo quanto discreto.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos; Dimensão Fractal; Caos

Abstract

In the phase space of dynamical systems there may exist different regions which correspond to different final states: the basins of attraction. Between different basins of attraction, there is a set of points which we call basin boundary. Basin boundaries can be either smooth or fractal, the latter being characterized by a non-integer dimension D . The main consequence of fractal basin boundaries in the phase space of a dynamical system is the difficulty of determining the system's final state. Indeed, knowing that we can only measure a point with a finite precision, there is a phase space region where we cannot know in which of the basins of attraction the point really is by looking at the system's final state alone. In particular, for a fractal basin boundary, the area of the phase space where we cannot predict the final state with certainty is proportional to ϵ^{N-D} , with ϵ being the measurement error and N the system's dimension. Therefore, it is important to know the dimension D of the fractal basin boundary. In this work, we first present the main concepts of dynamical systems and fractal geometry, linking these geometric structures to chaotic behavior in the system. Later, we define basin boundaries, both regular and fractal. At last, we present the two methods currently available to calculate the dimension of fractal basin boundaries in dynamical systems, namely the uncertainty method and the output function evaluation method. We propose a new method that is based on the former one called the conditional uncertainty method and we show that this method can calculate fractal dimensions of basin boundaries to a good accuracy either on continuous or discrete-time dynamics.

Keywords: Dynamical Systems; Fractal Dimension; Chaos

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 19 |
| 2 | Elementos de dinâmica e geometria fractal | 23 |
| 2.1 | Sistemas dinâmicos | 23 |
| 2.2 | Dimensão da contagem de caixas e estruturas fractais | 26 |
| 2.3 | Sensibilidade a condições iniciais e caos | 28 |
| 2.4 | Sistemas abertos unidimensionais: o mapa da tenda | 31 |
| 2.5 | Sistemas abertos bidimensionais: o mapa da ferradura | 33 |
| 2.6 | Estabilidade linear | 37 |
| 2.7 | Variedades estável e instável | 41 |
| 3 | Fronteiras fractais entre bacias de atração | 43 |
| 3.1 | Caos transiente | 43 |
| 3.2 | Fronteiras fractais | 44 |
| 3.3 | Sensibilidade do estado final | 48 |
| 3.4 | Estrutura das fronteiras fractais | 53 |
| 3.5 | Espalhamento caótico | 54 |
| 4 | Cálculo da dimensão de fronteiras fractais | 61 |
| 4.1 | Método da função incerteza | 61 |
| 4.2 | Método da avaliação da função de saída | 63 |
| 4.3 | Método da incerteza condicional | 66 |
| 4.4 | Resultados numéricos | 68 |
| 5 | Conclusões e perspectivas | 77 |
| A | Tópicos extras em dinâmica e geometria | 79 |
| A.1 | Expoentes de Lyapunov | 79 |
| A.2 | Espectro de dimensões generalizadas | 80 |
| A.3 | Conjectura de Kaplan-Yorke | 82 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | A Curva de Koch | 20 |
| 2.1 | Seção de Poincaré | 24 |
| 2.2 | Dimensão da contagem de caixas | 26 |
| 2.3 | Conjunto de Cantor do terço médio | 27 |
| 2.4 | Órbita no atrator do mapa de Hénon | 28 |
| 2.5 | Sensibilidade a condições iniciais | 29 |
| 2.6 | Sensibilidade a condições iniciais no atrator de Lorenz | 30 |
| 2.7 | Mapa da tenda simétrico | 31 |
| 2.8 | Mapa da tenda assimétrico | 32 |
| 2.9 | Iteradas do mapa da tenda assimétrico | 33 |
| 2.10 | Ação do mapa da ferradura | 34 |
| 2.11 | Iteradas e pré-imagem do mapa da ferradura | 35 |
| 2.12 | Dinâmica simbólica no mapa de ferradura | 36 |
| 2.13 | Estabilidade de pontos de equilíbrio | 40 |
| 2.14 | Variedades estável e instável | 41 |
| 3.1 | Fronteira regular entre bacias de atração | 44 |
| 3.2 | Mapa da tenda dupla simétrico | 45 |
| 3.3 | Bacias de atração do mapa da tenda dupla | 46 |
| 3.4 | Mapa da tenda dupla assimétrico | 46 |
| 3.5 | Intervalos da primeira iterada do mapa da tenda dupla assimétrico | 47 |
| 3.6 | Bacias de atração do mapa de Hénon | 47 |
| 3.7 | Fronteira suave entre duas bacias de atração | 48 |
| 3.8 | Função incerteza para o caso de uma fronteira regular | 49 |
| 3.9 | Cálculo do limitante superior de $V(B_\epsilon(\Sigma))$ | 50 |
| 3.10 | Espalhamento clássico | 54 |
| 3.11 | Potenciais de espalhamento | 55 |
| 3.12 | Função ângulo de espalhamento para o potencial de 4 picos | 56 |
| 3.13 | Tempo de escape para o espalhamento caótico | 57 |
| 3.14 | Sensibilidade a condição iniciais no espalhamento caótico | 58 |

| | | |
|------|---|----|
| 3.15 | Função ângulo de espalhamento para o potencial de 3 picos | 59 |
| 4.1 | O método da função incerteza | 62 |
| 4.2 | O método da avaliação da função de saída | 65 |
| 4.3 | O método da incerteza condicional | 67 |
| 4.4 | Método da incerteza condicional aplicado ao mapa da tenda dupla simétrico | 69 |
| 4.5 | Os três métodos aplicados ao problema de espalhamento com 4 picos . . . | 70 |
| 4.6 | Os três métodos aplicados ao problema de espalhamento com 3 picos . . . | 71 |
| 4.7 | Comparação entre os métodos da incerteza e da incerteza condicional apli- cados ao mapa da tenda dupla simétrico com inclinação 5 | 73 |
| 4.8 | Comparação entre os métodos da incerteza e da incerteza condicional apli- cados ao mapa da tenda dupla simétrico com inclinação 20 | 73 |
| 4.9 | Comparação entre os métodos da incerteza e da incerteza condicional apli- cados ao mapa da tenda dupla assimétrico | 74 |

1

Introdução

Até meados do século XIX, acreditava-se que havia apenas dois tipos de movimento que poderiam ser executados por um sistema físico assintoticamente no tempo: o movimento estável, geralmente devido à perda de energia por atrito; e a oscilação periódica ou quasiperiódica, como o movimento dos planetas.

Henri Poincaré, no final do século XIX, se deparou com um terceiro tipo de movimento ao estudar como se dá a dinâmica de 3 corpos que orbitam uns aos outros gravitacionalmente sob determinadas condições específicas. Ele mostrou que a existência de pontos chamados homoclínicos resultava em um movimento, posteriormente chamado de caótico, que fazia com que não fosse possível se obter uma solução analítica para o problema [1]. Um dos grandes avanços dado por Poincaré foi estudar a dinâmica do sistema baseando-se no conjunto de condições iniciais em vez de trajetórias de soluções específicas.

Mais tarde, com a evolução dos computadores, mostrou-se que caos pode ocorrer inclusive em sistemas físicos simples, como um fluido em um gradiente de temperatura [2] ou uma torneira pingando [3, 4].

A dinâmica caótica geralmente descreve no espaço de fases uma estrutura geométrica denominada fractal. Essa estrutura possui dimensão não inteira e complexidade numa escala fina, no sentido de que não se ganha informação examinando um fractal com uma precisão maior. O termo “fractal” foi cunhado por Benoit Mandelbrot e está relacionado ao verbo latim *frangere* que significa “quebrar” e ao adjetivo derivado desse verbo, *fractus* [5].

Fractais são comuns na natureza e descrevem as estruturas que não são passíveis de serem descritas por elipses, retângulos e outros componentes da geometria clássica como, por exemplo, o formato de nuvens, montanhas e linhas costeiras. A curva de Koch, Figura 1.1, é um exemplo de uma estrutura fractal. Para construí-la, tomamos uma linha reta, dividimos essa linha em três partes e anexamos um triângulo à parte central. Em seguida, dividimos cada uma das novas linhas em três partes e anexamos triângulos às suas partes centrais. Repetindo o processo descrito *ad infinitum*, obtemos como resultado a curva de Koch. Se fizermos esse processo começando com três linhas fechadas no formato de um

triângulo, iremos obter uma estrutura semelhante à estrutura cristalina de um floco de neve.

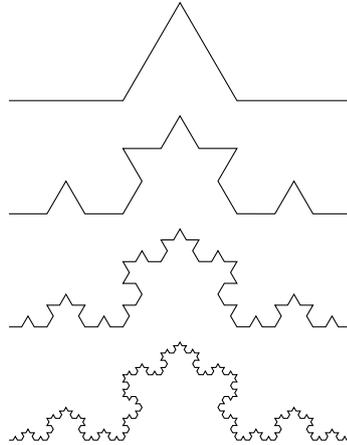


Figura 1.1: A Curva de Koch.

O estado final de um sistema dinâmico pode depender da condição inicial tomada. Caso exista mais de um estado final possível do sistema, existe uma fronteira entre os conjuntos de condições iniciais que levam a cada um desses possíveis estados finais. Caso essa fronteira seja fractal, determinarmos com certeza o estado final do sistema, para uma condição inicial genérica, torna-se uma tarefa mais complexa do que no caso em que a fronteira é regular.

Podemos ilustrar o efeito da fractalidade de fronteiras com um exemplo num contexto cotidiano: suponha que você esteja viajando de carro do país A ao país B por uma estrada sem sinalização. Chegando próximo à fronteira entre os países, você utiliza um GPS para saber em qual dos dois países você se encontra. O GPS, porém, possui um erro ϵ . Se a fronteira entre os dois países possuir geometria não fractal, a extensão total da estrada em que você não saberá ao certo em que país está será igual a 2ϵ e, portanto, proporcional a ϵ . Consequentemente, se você utilizar um outro GPS com precisão duas vezes melhor, i.e., $\epsilon' = \epsilon/2$, a “extensão incerta” da estrada será metade da anterior. Em outras palavras, melhorando a precisão do seu GPS por um fator 2, o seu grau de certeza sobre o país em que está terá sido multiplicado também por 2. Nesse exemplo, os países A e B representam os possíveis estados finais do sistema.

Considere agora que a fronteira entre os países A e B seja fractal, por exemplo, a curva de Koch apresentada na Figura 1.1. Nesse caso, conforme mostraremos nesse trabalho, a sua certeza sobre em qual país você está irá depender da dimensão D da fronteira fractal [6]. Mais especificamente, o seu nível de incerteza será proporcional a ϵ^{2-D} . A consequência disso é a seguinte: caso a dimensão D da fronteira seja 1,9, por exemplo, sua incerteza será proporcional a $\epsilon^{0,1}$. Isso significa que, se você deseja dobrar o seu grau de certeza sobre em qual país você se encontra, a precisão do GPS deve ser melhorada em $2^{10} = 1024$ vezes!

Como podemos ver, existe uma dificuldade maior em se determinar o estado final de um sistema dinâmico para uma certa condição inicial perto de uma fronteira caso essa seja fractal, tornando o conhecimento da dimensão D da fronteira algo importante. Partindo dessa motivação, iremos apresentar no nosso trabalho os métodos existentes para o cálculo da dimensão de fronteiras fractais entre bacias de atração, assim como um novo método aqui proposto.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos alguns conceitos básicos sobre geometria fractal e dinâmica caótica, definimos a dimensão de um conjunto e apresentamos alguns mapas cujos conjuntos invariantes são fractais. Além disso, discutimos sobre a estabilidade de um sistema dinâmico e definimos as bacias de atração de um atrator.

No capítulo seguinte, nos aprofundamos no tema do nosso trabalho, as fronteiras fractais entre bacias de atração, discutindo sobre o impacto dessas estruturas em sistemas dinâmicos. No final do capítulo 3, apresentamos o espalhamento caótico, um problema conservativo no qual iremos testar nossos modelos posteriormente, e discutimos sua dinâmica.

Apresentamos, no capítulo 4, os três métodos para o cálculo da dimensão de fronteiras fractais entre bacias de atração: a função incerteza, há muito utilizada e bem estudada na literatura; o método da avaliação da função de saída, mais recente e visando a um aperfeiçoamento para o cálculo em baixas dimensões; e o nosso método, que corresponde a uma modificação do primeiro método. Ainda no capítulo 4, estudamos os três métodos aplicando-os a problemas específicos e fazemos uma comparação entre o método da incerteza e o método da incerteza condicional.

Por último, no capítulo 5, discutimos os principais resultados deste trabalho, bem como algumas perspectivas.

2

Elementos de dinâmica e geometria fractal

Neste capítulo, estudamos dois tópicos diferentes: primeiro, definimos sistemas dinâmicos de tempo discreto e de tempo contínuo e relacionamos esses dois casos. Veremos, no capítulo 4, que um dos métodos analisados neste trabalho pode ser aplicado apenas para sistemas de tempo contínuo.

Definimos, na seção 2.2, a dimensão de contagem de caixas, a qual utilizamos para determinar a fractalidade de um conjunto. Em seguida, na seção 2.3, discutimos sensibilidade a condições iniciais e definimos caos.

Nas seções 2.4 e 2.5, conectamos dinâmica e geometria e apresentamos exemplos de sistemas unidimensionais e bidimensionais que apresentam uma estrutura geométrica fractal e uma dinâmica caótica. Por último, nas seções 2.6 e 2.7, analisamos a estabilidade de pontos fixos e periódicos em sistemas dinâmicos. Com isso, definimos as variedades estável e instável de um sistema, que são a base para entendermos as fronteiras entre bacias de atração, apresentadas no capítulo 3.

2.1 Sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico é um sistema composto por grandezas que variam no tempo. Para o caso em que o tempo é uma grandeza contínua, representamos o sistema por uma equação diferencial ordinária (EDO),

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)], \quad (2.1)$$

onde \mathbf{x} é um vetor N -dimensional e \mathbf{F} é chamado de *campo*.

Dada a condição inicial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, podemos resolver a equação (2.1) e obter $\mathbf{x}(t)$ para qualquer $t > 0$. A solução é então representada como um caminho no espaço N -dimensional formado pelas coordenadas de $\mathbf{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^N(t))$ e é chamada

de *órbita*. Chamamos o espaço formado pelas coordenadas do vetor \mathbf{x} de *espaço de fases*.

Definimos o fluxo ϕ de uma EDO como a função que representa o conjunto de todas as soluções do sistema. Dessa forma, $\phi_t(\mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0)$ é o valor no tempo t da solução que se inicia em \mathbf{x}_0 [7].

No caso em que o tempo é uma grandeza discreta, a evolução do sistema é dada por um mapa N -dimensional,

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n), \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N)$. Dado um estado inicial \mathbf{x}_0 , podemos obter $\mathbf{x}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{M}(\mathbf{x}_1)$ e assim sucessivamente. Dessa forma, obtemos uma órbita discreta $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots\}$, a qual podemos representar no espaço de fases.

Existem dois métodos principais que nos permitem transformar um sistema de tempo contínuo em um sistema de tempo discreto. O primeiro chama-se *seção de Poincaré* e reduz o fluxo de um campo N -dimensional a um mapa $(N - 1)$ -dimensional. O método consiste em se fixar uma superfície no espaço de fases do sistema e se tomar como $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots\}$ o conjunto dos pontos em que uma órbita da EDO cruza essa superfície. O mapa é então definido como uma função que leva \mathbf{x}_0 em \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_1 em \mathbf{x}_2 , e assim por diante. Uma ilustração do método é apresentada na Figura 2.1.

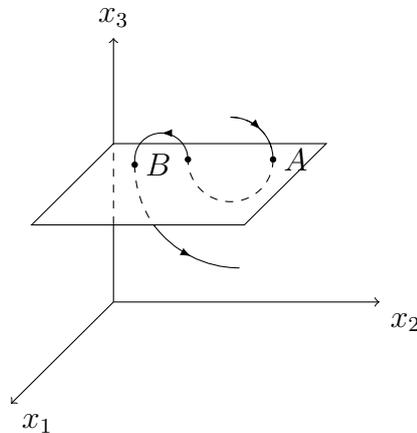


Figura 2.1: Seção de Poincaré de uma órbita tridimensional. Aqui, o mapa é definido pelos pontos que cruzam a superfície de cima para baixo. Dessa forma, $\mathbf{M}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$.

O segundo método consiste-se em amostrar a órbita em intervalos de tempo pré-determinados $t_n = t_0 + nT$, com $n = 0, 1, \dots$. O intervalo de amostragem T é arbitrário e pode representar uma escala de tempo natural da órbita do sistema. O mapa construído dessa forma, onde $\mathbf{x}_n \equiv \mathbf{x}(t_n)$, é chamado *mapa estroboscópico* e, ao contrário do mapa produzido via superfície de Poincaré, preserva a dimensionalidade do sistema de tempo contínuo. Ambos os métodos geram mapas inversíveis.

As características dinâmicas qualitativas do sistema de tempo contínuo se refletem no mapa definido pelos métodos apresentados como, por exemplo, caos (seção 2.3) e

estabilidade linear (seção 2.6).

Além da continuidade da coordenada temporal, podemos separar os sistemas dinâmicos em dois casos: conservativos e dissipativos. Olhemos primeiro para o caso contínuo: seja $A(0)$ uma superfície $(N - 1)$ -dimensional no espaço de fases N -dimensional de um sistema dinâmico e $V(0)$ o volume ocupado por essa superfície. Se evoluirmos cada ponto de $A(0)$ no tempo, utilizando-os como condições iniciais do sistema (eq. 2.1), obtemos uma nova superfície $A(t)$ que envolve um volume $V(t)$ num dado tempo $t > 0$.

Podemos relacionar a taxa de variação temporal de $V(t)$ com a variação na quantidade de linhas do campo que atravessam esse volume. Dessa forma, utilizando o teorema da divergência, obtemos

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{A(t)} (\mathbf{F} \cdot \hat{n}) ds = \int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbf{F} d^N x. \quad (2.3)$$

Em sistemas *conservativos* (ou *Hamiltonianos*), onde não há perda de energia, podemos sempre escolher variáveis tais que o volume do espaço de fases é preservado frente a uma evolução temporal. Sendo assim,

$$\frac{dV(t)}{dt} = 0, \quad (2.4)$$

correspondentemente,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (2.5)$$

No caso em que o tempo é uma variável discreta, a variação temporal de um volume no espaço de fases é dada pelo determinante do Jacobiano do sistema. Dessa forma, para sistemas conservativos, temos

$$J(\mathbf{x}) \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right| = 1. \quad (2.6)$$

Em sistemas *dissipativos*, por outro lado, não há conservação de volumes no espaço de fases independentemente das variáveis escolhidas. Esse comportamento em sistemas dissipativos leva à existência de *atratores*: subconjuntos limitados dos quais regiões de condições iniciais no espaço de fases com volumes não-nulos, denominadas *bacias de atração*, se aproximam assintoticamente no tempo.

Temos, então, para sistemas dissipativos,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} < 0 \text{ ou } J(\mathbf{x}) < 1, \quad (2.7)$$

dependendo do caráter contínuo ou discreto da variável temporal.

2.2 Dimensão da contagem de caixas e estruturas fractais

Nesta seção, definiremos a dimensão de um conjunto e apresentamos o algoritmo utilizado para medir essa dimensão. Primeiro, consideremos uma figura geométrica em um espaço N -dimensional. Podemos dividir esse espaço em cubos, ou caixas, N -dimensionais de lado ϵ e calcular a quantidade de cubos $\tilde{N}(\epsilon)$ necessários para cobrir essa figura completamente. A Figura 2.2 apresenta alguns exemplos do cálculo de $\tilde{N}(\epsilon)$.

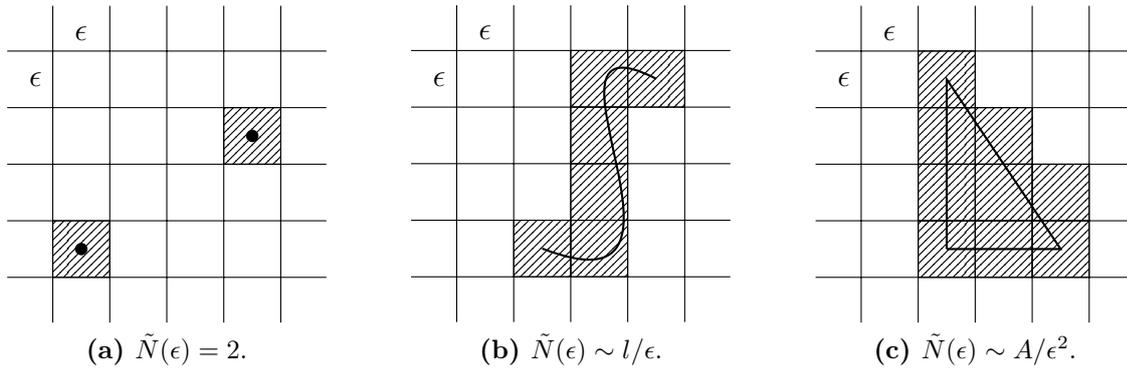


Figura 2.2: Cálculo de $\tilde{N}(\epsilon)$ para diferentes figuras geométricas.

Definimos, então, a *dimensão da contagem de caixas* do seguinte modo [7, 8]:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \tilde{N}(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}. \quad (2.8)$$

Vamos agora utilizar os exemplos da Figura 2.2 para mostrar que a definição (2.8) é adequada para o cálculo de dimensões usuais. Como primeiro exemplo, consideremos os dois pontos no espaço bidimensional apresentados na Figura 2.2a. Como $\tilde{N}(\epsilon)$ é constante nesse caso, esse valor não depende de ϵ . Dessa forma, ao tomarmos o limite em (2.8), obtemos $D = 0$. No segundo exemplo, Figura 2.2b, consideramos uma linha unidimensional de comprimento l em um espaço bidimensional. O número de quadrados de lado ϵ necessário para cobrir essa linha é aproximadamente $\tilde{N}(\epsilon) \sim l/\epsilon$ para valores pequenos de ϵ . Substituindo $\tilde{N}(\epsilon)$ na equação (2.8), obtemos $D = 1$. Finalmente, o terceiro exemplo, Figura 2.2c, trata-se da região interna a uma curva fechada de área A . Por um argumento similar ao do segundo caso, obtemos $D = 2$. Os três resultados estão de acordo com o que esperávamos intuitivamente.

A vantagem de utilizarmos a equação (2.8) é a que podemos atribuir, de uma forma simples, um valor de dimensão não-inteiro a um certo tipo de conjunto, o qual denominamos *fractal* [8].

Para demonstrar o cálculo analítico da dimensão de um conjunto fractal, vamos considerar o *conjunto de Cantor do terço médio*. Para construir esse conjunto, tomamos primeiramente o intervalo fechado $[0, 1]$. Em seguida, subtraímos desse intervalo o terço

médio aberto, i.e., o subconjunto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, obtendo assim o conjunto formado pela união dos intervalos $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$. Agora, retiramos o terço médio dos intervalos restantes, obtendo então o conjunto formado pela união dos intervalos $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ e $[\frac{8}{9}, 1]$, como mostrado na Figura 2.3. Repetindo esse processo *ad infinitum*, obtemos como resultado o conjunto de Cantor do terço médio.

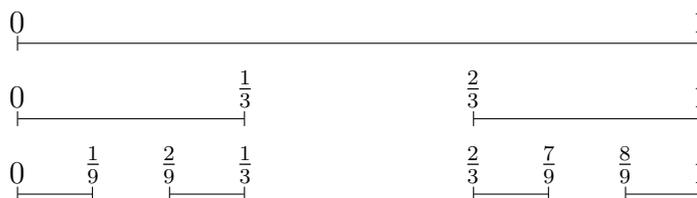


Figura 2.3: Construção do conjunto de Cantor do terço médio.

Podemos observar que no estágio n da construção do conjunto de Cantor do terço médio há 2^n intervalos fechados de tamanho $(\frac{1}{3})^n$. Dessa forma, é natural tomarmos $\epsilon_n = (\frac{1}{3})^n$ para o cálculo da dimensão, o que implica que necessitamos de $\tilde{N}(\epsilon_n) = 2^n$ cubos unidimensionais de tamanho ϵ_n para cobrirmos o conjunto. Utilizando a equação (2.8), obtemos

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,63\dots, \tag{2.9}$$

um valor de dimensão não inteiro. Dessa forma, o conjunto de Cantor do terço médio apresenta uma geometria fractal.

Os atratores presentes em sistemas dinâmicos dissipativos, definidos na seção 2.1, podem ser regulares ou fractais. Chamamos o segundo caso de *atratores estranhos*. Um exemplo clássico da presença de um atrator estranho em um sistema dinâmico é o *mapa de Hénon* [9], dado por

$$\begin{cases} x_{n+1} = A - (x_n)^2 + By_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}, \tag{2.10}$$

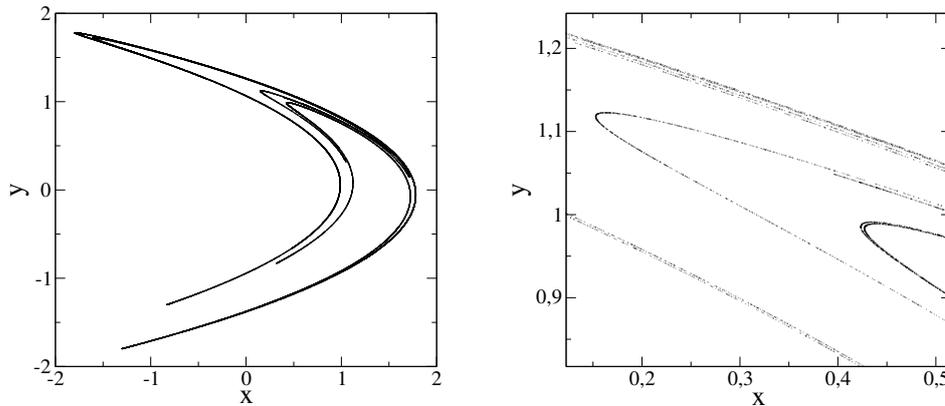
onde A e B são parâmetros do sistema.

A Figura 2.4 mostra uma órbita no espaço de fases do mapa de Hénon com parâmetros $A = 1,4$ e $B = 0,3$.

A Figura 2.4a sugere que o atrator para o qual a órbita é atraída é fractal. De fato, utilizando a equação 2.8, podemos calcular que a dimensão desse atrator é dada por [10]:

$$D \approx 1,26.$$

A Figura 2.4b mostra uma região ampliada do atrator estranho de (2.10) onde podemos perceber uma estrutura complexa de linhas. Se continuarmos ampliando essa estrutura, obteremos a mesma complexidade independente do grau de ampliação. Esse fato é uma



(a) Região que cobre toda a órbita. (b) Ampliação em uma região da órbita.

Figura 2.4: Órbita no atrator do mapa de Hénon (2.10) com parâmetros $A = 1,4$ e $B = 0,3$.

característica dos fractais a qual chamamos de *auto-similaridade*: não obtemos informações adicionais observando o conjunto numa escala menor. Usaremos essa propriedade para calcular a dimensão de fractais na seção 2.4.

Para valores de ϵ pequenos, o limite (2.8) reflete uma lei de escala entre o número de cubos $\tilde{N}(\epsilon)$ necessários para cobrir um conjunto e o tamanho ϵ desses cubos, onde o expoente é dado pela dimensão D da contagem de caixas,

$$\tilde{N}(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}. \quad (2.11)$$

Veremos, no capítulo 3, que leis de escala são importantes para entendermos a influência de uma dimensão fractal em um sistema dinâmico. No capítulo 4, veremos também que leis de escala são a base de alguns dos métodos numéricos para o cálculo de dimensões estudados nesse trabalho. Na próxima seção, voltaremos ao estudo dos sistemas dinâmicos e apresentaremos propriedades que estão geralmente ligadas a estruturas fractais.

2.3 Sensibilidade a condições iniciais e caos

Consideremos um sistema de tempo contínuo dado pela equação (2.1), duas condições iniciais arbitrariamente próximas, $\mathbf{x}_1(0)$ e $\mathbf{x}_2(0)$, e suas respectivas órbitas no espaço de fases: $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$. Podemos escrever $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_1(0) + \Delta(0)$, onde $\Delta(0)$ é a distância entre as condições iniciais. A separação entre as órbitas após um tempo t é dada por $\Delta(t) = \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)$, como mostrado na Figura 2.5.

Dizemos que um ponto $\mathbf{x}_1(0)$ possui *dependência sensível a condições iniciais* se existe $d > 0$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\mathbf{x}_2(0)$ numa vizinhança de $\mathbf{x}_1(0)$ de raio ϵ tal que $\Delta(t) > d$ para algum tempo t . Em particular, se a diferença entre as órbitas cresce

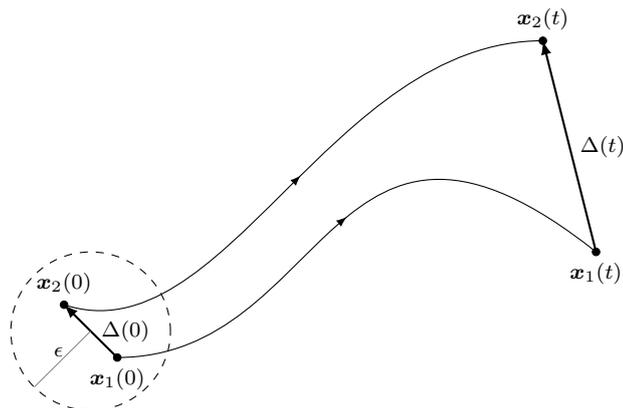


Figura 2.5: $x_1(0)$ e $x_2(0)$ são condições iniciais e estão a uma distância $\Delta(0) \leq \epsilon$ uma da outra, enquanto que suas respectivas órbitas, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, estão a uma distância $\Delta(t)$ uma da outra.

exponencialmente, i.e., $|\Delta(t)|/|\Delta(0)| \sim \exp(ht)$ para algum t , onde $h > 0$, dizemos que o sistema apresenta *sensibilidade exponencial a condições iniciais*. Denominamos *caótica* uma órbita que é limitada, não assintoticamente periódica e que possui sensibilidade exponencial a condições iniciais [7, 8]. Finalmente, dizemos que um sistema é caótico se apresentar órbitas caóticas.

Se uma órbita caótica se aproxima assintoticamente de um atrator, dizemos que esse atrator é caótico. Como exemplo, tomemos as *equações de Lorenz* [2], dadas por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3 + r x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - b x_3 \end{cases} \quad (2.12)$$

A Figura 2.6 apresenta duas trajetórias geradas por (2.12) com parâmetros $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ e $r = 28$; a curva vermelha é a órbita com condição inicial $x_1 = 15$, $x_2 = 0,7$ e $x_3 = 35$, enquanto que a curva azul é a órbita com condição inicial $x_1 = 15,00001$, $x_2 = 0,7$ e $x_3 = 35$. Podemos observar que, até um certo tempo $t' > 0$, as órbitas geradas pelas condições iniciais próximas se sobrepõem (Figura 2.6a); porém, para $t > t'$, cada condição inicial descreve uma órbita diferente no espaço de fases, as quais se afastam uma da outra (Figura 2.6b). Dessa forma, o sistema dado por (2.12) apresenta sensibilidade a condições iniciais. Além disso, ambas as órbitas são limitadas e não assintoticamente periódicas e, portanto, o atrator é caótico.

À semelhança do que ocorre com o mapa de Hénon, podemos observar na Figura 2.6 que as órbitas selecionadas tendem a um atrator que possui o aspecto de um fractal, o que é comprovado pelo cálculo de sua dimensão [8]. Dessa forma, as equações de Lorenz são um exemplo de um fenômeno que ocorre em sistemas dinâmicos: caos está geralmente relacionado a estruturas fractais no espaço de fases. Devemos diferenciar, porém, que caos descreve a dinâmica de um atrator, enquanto que fractalidade descreve a sua geometria.

No apêndice A, introduzimos alguns conceitos novos de dinâmica caótica e geome-

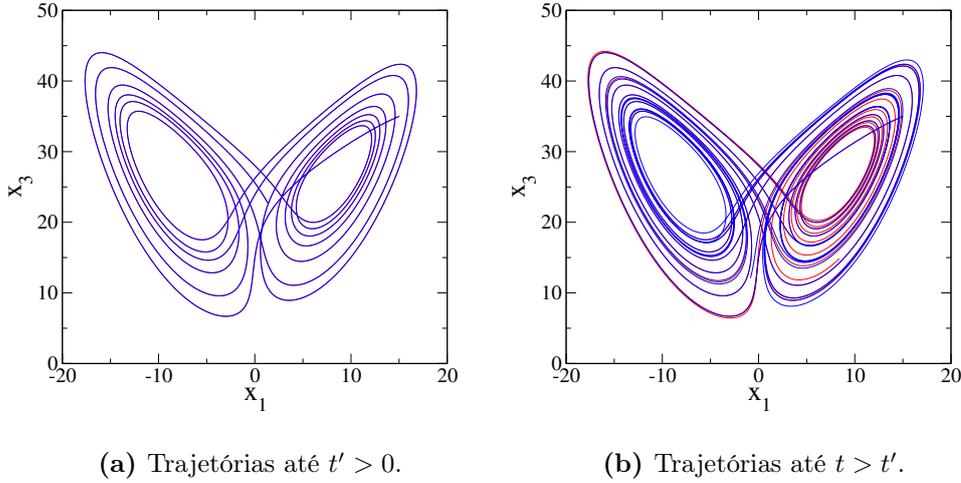


Figura 2.6: Sensibilidade a condições iniciais no atrator de Lorenz com parâmetros $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ e $r = 28$ e condições iniciais $x_1 = 15$, $x_2 = 0,7$ e $x_3 = 35$ (curva vermelha) e $x_1 = 15,00001$, $x_2 = 0,7$ e $x_3 = 35$ (curva azul).

tria fractal e, ao final, apresentamos uma conjectura que conecta esses assuntos mais diretamente.

No caso de sistemas de tempo discreto, equação (2.2), definimos dependência sensível a condições iniciais e caos de modo análogo ao caso contínuo. Seja \mathbf{M} um mapa e \mathbf{x}_0 uma condição inicial. Dizemos que \mathbf{x}_0 possui sensibilidade a condições iniciais se existe $d > 0$ tal que toda vizinhança de \mathbf{x}_0 contém um ponto \mathbf{x} tal que $|\mathbf{M}^k(\mathbf{x}) - \mathbf{M}^k(\mathbf{x}_0)| > d$ para algum $k > 0$. Uma órbita $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$ é dita caótica se não for assintoticamente periódica e apresentar dependência exponencial a condições iniciais [7]. O mapa de Hénon (2.10) é um exemplo de sistema de tempo discreto que apresenta caos.

Existe uma dimensionalidade mínima para que um sistema possa apresentar comportamento caótico. Em um sistema de N equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem e autônomas¹, pode haver caos se $N \geq 3$. Já em um sistema de tempo discreto, caos pode ocorrer se $N \geq 2$, para mapas inversíveis, e $N \geq 1$, para mapas não-inversíveis [8]. A restrição para o caso contínuo decorre do *Teorema de Poincaré-Bendixson* que descreve todos os comportamentos possíveis do conjunto atrator para um sistema bidimensional [11].

¹Uma equação diferencial é autônoma quando não existe dependência explícita com o tempo. Sempre podemos transformar uma EDO N -dimensional não-autônoma em uma EDO $(N + 1)$ -dimensional autônoma utilizando uma transformação de variáveis.

2.4 Sistemas abertos unidimensionais: o mapa da tenda

Nessa seção, apresentamos duas versões de um mapa unidimensional cuja dinâmica descreve uma geometria fractal no intervalo unitário: o *mapa da tenda simétrico* e *assimétrico*.

Definimos a versão simétrica do mapa da tenda da seguinte forma:

$$T_{sim}(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x \leq 1/2 \\ a(1-x) & \text{se } 1/2 \leq x \end{cases}, \quad (2.13)$$

onde $a > 0$.

Das equações (2.13), temos que todos os pontos fora do intervalo unitário $[0, 1]$ são mapeados para fora desse intervalo e se aproximam assintoticamente no tempo de $-\infty$. Dessa forma, dizemos que existe um “atrator” em $-\infty$ e que esses pontos pertencem à bacia de atração desse atrator. Para os pontos no intervalo $[0, 1]$, a dinâmica depende da inclinação a . Aqui, vamos analisar o caso em que $a = 3$ (vide Figura 2.7).

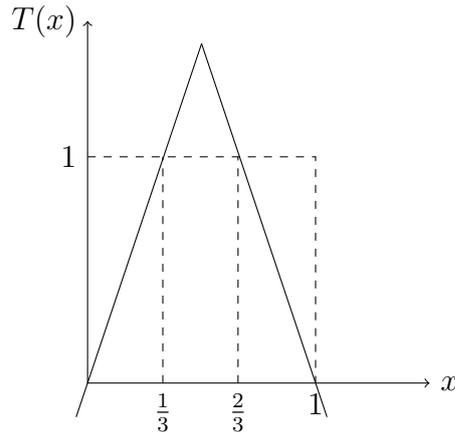


Figura 2.7: Mapa da tenda simétrico com inclinação $a = 3$.

Podemos observar pela Figura 2.7 que o intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ será mapeado para fora do intervalo $[0, 1]$ após uma iterada. Sendo assim, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ pertence à bacia de $-\infty$. Consequentemente, os intervalos que são mapeados para $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ na primeira iterada, a saber, $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, também pertencem à bacia de $-\infty$. Dessa forma, os pontos que pertencem à essa bacia são aqueles que, em alguma iterada, são mapeados para dentro do intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e, após mais uma iterada, saem do intervalo unitário.

Por construção, observamos que os conjuntos que formam a bacia do atrator em $-\infty$ são os terços médios dos intervalos que continuam em $[0, 1]$ após cada iterada. Dessa forma, o complementar desses conjuntos forma um conjunto de Cantor. Como os pontos que pertencem a esse conjunto de Cantor não tendem assintoticamente a um atrator e, portanto, não saem do intervalo unitário em nenhuma iterada do mapa, dizemos que eles formam o *conjunto invariante* do sistema. Concluímos que o conjunto invariante do mapa

(2.13) é fractal e possui dimensão dada por (2.9).

Aqui, temos um exemplo de um sistema dinâmico que apresenta uma estrutura fractal que não está associada a um atrator, uma vez que todos os pontos, exceto os que pertencem ao próprio conjunto invariante, são eventualmente mapeados para fora do intervalo unitário.

Se fixarmos um valor $d = 1/3$, podemos mostrar que quaisquer dois pontos arbitrariamente próximos irão eventualmente ficar “ d -distantes”, isto é, a uma distância maior ou igual a d um do outro. Dessa forma, o mapa da tenda apresenta sensibilidade a condições iniciais e, dado que as órbitas do mapa que se iniciam no conjunto invariante são limitadas e não eventualmente periódicas, ele também é caótico [7].

Vamos agora analisar o conjunto invariante da versão assimétrica do mapa da tenda, dada por

$$T_{\text{assim}}(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x \leq \alpha \\ b(1-x) & \text{se } \alpha \leq x \end{cases}, \quad (2.14)$$

onde $a, b > 0$, $\alpha = b/(a+b)$ e $a \neq b$. A Figura 2.8 retrata o caso em que as inclinações das retas são dadas por $a = 5$ e $b = 2$.

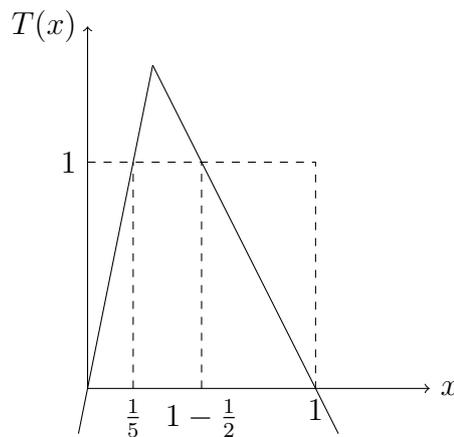


Figura 2.8: Mapa da tenda assimétrico com inclinações $a = 5$ e $b = 2$.

Como no caso simétrico, os pontos que estão fora do intervalo $[0, 1]$ tendem assintoticamente a $-\infty$. Podemos observar pela Figura 2.8 que o intervalo mapeado para fora de $[0, 1]$ após uma iteração é o intervalo $(\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{b})$, cujos extremos correspondem aos pontos em que as retas inclinadas cruzam $T(x) = 1$.

Dessa forma, aplicando o mapa (2.14) ao intervalo unitário, esse é dividido em duas partes. Aplicando o mapa mais uma vez, o intervalo unitário é dividido em quatro partes como mostrado na Figura 2.9 onde, para simplificar a notação, definimos $\lambda_a \equiv \frac{1}{a}$ e $\lambda_b \equiv \frac{1}{b}$.

Vamos, agora, calcular a dimensão D do conjunto invariante do mapa da tenda assimétrico. Para isso, precisamos calcular o número de caixas $\tilde{N}(\epsilon)$ necessário para cobrir esse conjunto. Sabemos, porém, que o conjunto invariante do mapa não possui pontos em

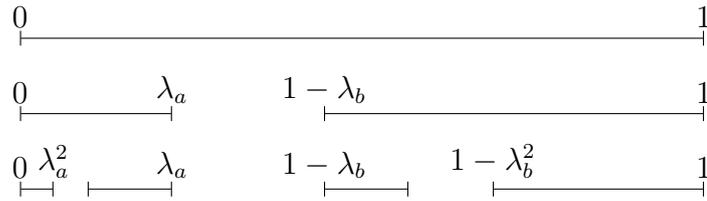


Figura 2.9: Iteradas do mapa da tenda assimétrico.

$(\lambda_a, 1 - \lambda_b)$ pois esse intervalo pertence à bacia de $-\infty$. Dessa forma, podemos tomar

$$\tilde{N}(\epsilon) = \tilde{N}_a(\epsilon) + \tilde{N}_b(\epsilon), \quad (2.15)$$

onde $\tilde{N}_a(\epsilon)$ e $\tilde{N}_b(\epsilon)$ são os números de caixas necessários para cobrir os intervalos $[0, \lambda_a]$ e $[1 - \lambda_b, 1]$, respectivamente.

Da Figura 2.9 observamos, por construção, que o conjunto invariante do mapa da tenda assimétrico possui a propriedade de auto-semelhança. De fato, quando ampliamos o intervalo $[0, \lambda_a]$ por um fator λ_a^{-1} , obtemos um intervalo semelhante ao intervalo inicial $[0, 1]$; e o mesmo ocorre com o intervalo $[1 - \lambda_b, 1]$ ampliado por λ_b^{-1} . Sendo assim, o número de caixas de tamanho ϵ necessário para cobrir o intervalo $[0, \lambda_a]$ é igual ao número de caixas de tamanho ϵ/λ_a necessário para cobrir todo o intervalo unitário e o mesmo vale para o intervalo $[1 - \lambda_b, 1]$. Temos, então

$$\tilde{N}_a(\epsilon) = \tilde{N}(\epsilon/\lambda_a), \quad \tilde{N}_b(\epsilon) = \tilde{N}(\epsilon/\lambda_b). \quad (2.16)$$

Utilizando a lei de escala (2.11) e a equação (2.16) em (2.15), obtemos a equação transcendental para a dimensão da contagem de caixas do conjunto invariante do mapa da tenda assimétrico:

$$\lambda_a^D + \lambda_b^D = 1. \quad (2.17)$$

Para o caso em que $a = b$ (simétrico), temos $\lambda_a = \lambda_b$ e $D = -\frac{\ln 2}{\ln \lambda_a}$. Em especial, quando $a = b = 3$ (Figura 2.7), obtemos novamente $D = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

2.5 Sistemas abertos bidimensionais: o mapa da ferradura

Apresentamos, nesta seção, um mapa bidimensional cuja dinâmica descreve uma geometria fractal no quadrado unitário: o *mapa da ferradura* [12].

Podemos construir o mapa da ferradura h da seguinte forma: comprimimos o quadrado unitário na direção horizontal por um fator menor que $1/2$ e o expandimos na direção vertical por um fator maior que 2 obtendo, assim, um retângulo vertical. Em seguida,

alinhamos os menores lados do retângulo, dobrando-o e levando a sua metade superior para baixo. O resultado final é uma figura similar a uma ferradura. Por último, tomamos a intersecção dessa ferradura com o quadrado unitário para obtermos o conjunto dos pontos que permanecem no quadrado unitário após a aplicação do mapa. Se aplicarmos o mapa novamente, ele irá agir em cima dessa intersecção. A Figura 2.10 mostra a sobreposição da aplicação do mapa no quadrado unitário com o próprio quadrado unitário.

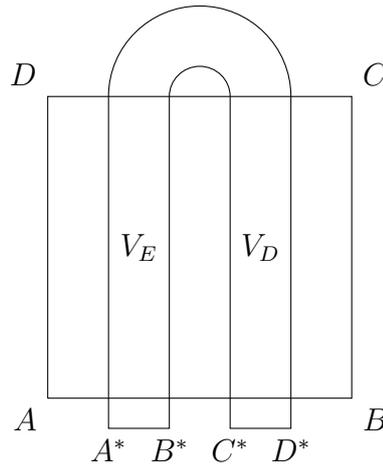


Figura 2.10: Ação do mapa da ferradura h . As imagens dos vértices do quadrado são dadas por $h(A) = A^*$, $h(B) = B^*$, $h(C) = C^*$ e $h(D) = D^*$. V_E e V_D são as intersecções entre o mapa aplicado ao quadrado unitário e o próprio quadrado unitário.

Queremos, agora, analisar o conjunto invariante do mapa da ferradura. Por definição, os pontos que pertencem a esse conjunto permanecem dentro do quadrado unitário, tanto para qualquer tempo no futuro, quanto no passado. Dessa forma, além de precisarmos saber o que ocorre com o quadrado unitário após infinitas iterações, precisamos saber qual é a pré-imagem do mapa a cada iteração.

Vamos primeiro estudar o que acontece com o quadrado unitário após duas iterações do mapa da ferradura: após a primeira iteração, os pontos ainda presentes no quadrado estão divididos em duas faixas verticais, V_E e V_D , de acordo com a Figura 2.10, as quais são representadas, respectivamente, pelas faixas cinza e preta na Figura 2.11a; após a segunda iteração, os pontos que continuam no quadrado formam agora quatro faixas verticais, como podemos observar na Figura 2.11c. Essas quatro faixas verticais são formadas retirando-se o terço médio das faixas V_E e V_D .

Agora, vamos analisar a pré-imagem do mapa. A Figura 2.11b apresenta a pré-imagem da primeira iteração, dada pela Figura 2.11a, i.e., ela mostra quais são os pontos que permanecem no quadrado unitário após uma aplicação do mapa da ferradura. Esses pontos formam duas faixas horizontais no quadrado unitário. Se tomarmos a pré-imagem da segunda iteração do mapa, como mostrado na Figura 2.11c, obtemos quatro faixas horizontais, as quais são formadas retirando-se os terços médios das faixas $h^{-1}(V_E)$ e $h^{-1}(V_D)$, onde h^{-1} denota a pré-imagem do mapa da ferradura.

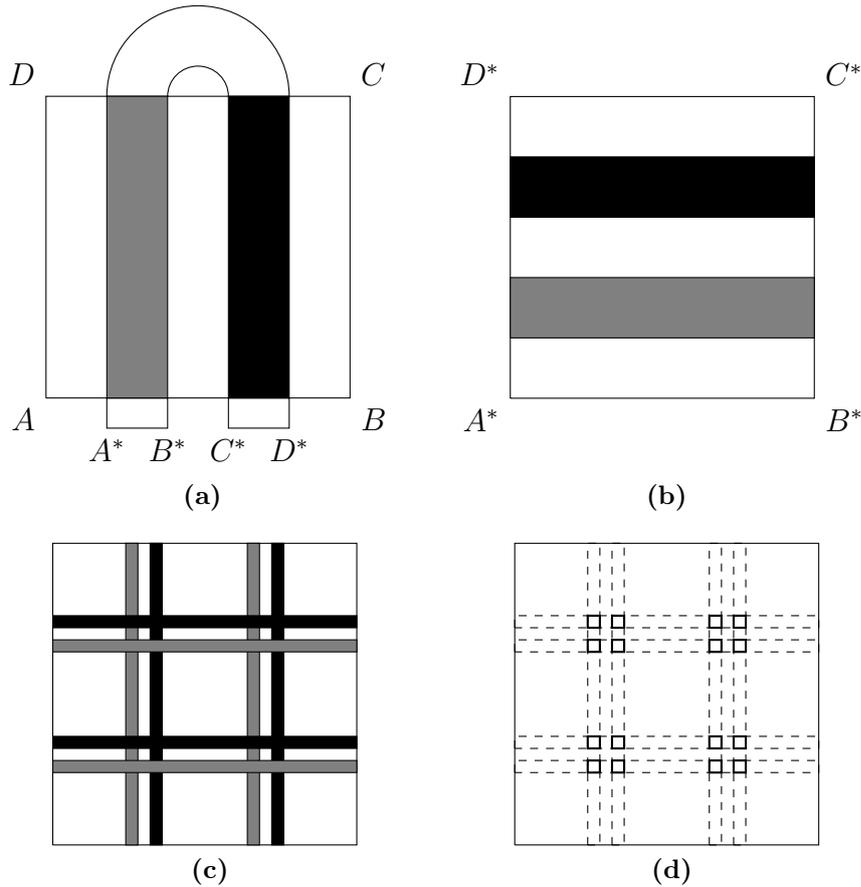


Figura 2.11: Iteradas e pré-imagem do mapa da ferradura. **(a)** Uma iterada futura. **(b)** Pré-imagem da primeira iterada futura. **(c)** Duas iteradas futuras e sua pré-imagem. **(d)** Intersecção da segunda iterada e sua pré-imagem.

Observamos na Figura 2.11d que, após n aplicações do mapa, as iteradas intersectam o quadrado unitário em 2^n faixas verticais e a pré-imagem, em 2^n faixas horizontais. Como discutimos anteriormente, os pontos pertencentes ao conjunto invariante permanecem no quadrado unitário para toda iterada, sendo assim, ele é formado pela intersecção desses dois conjuntos de faixas. Por construção, as faixas verticais formam um conjunto de Cantor nas regiões V_E e V_D e as faixas horizontais formam um conjunto de Cantor nas regiões $\mathbf{h}^{-1}(V_E)$ e $\mathbf{h}^{-1}(V_D)$ quando $n \rightarrow \infty$. Dessa forma, o conjunto invariante do mapa da ferradura é a intersecção de dois conjuntos de Cantor de faixas, um horizontal e um vertical. Sendo assim, essa estrutura possui geometria fractal em duas dimensões.

Vamos analisar agora a dinâmica do mapa. Tomando um ponto \mathbf{x} no conjunto invariante, podemos associá-lo a uma sequência bi-infinita de símbolos que representa em quais regiões do quadrado unitário o ponto estará em tempos futuros e esteve em tempos passados. Para isso, definimos:

$$S_i = \begin{cases} E & \text{se } \mathbf{h}^i(\mathbf{x}) \text{ pertence a } V_E \\ D & \text{se } \mathbf{h}^i(\mathbf{x}) \text{ pertence a } V_D \end{cases}, \quad (2.18)$$

onde S_i é o símbolo de uma sequência bi-infinita dada por $\dots S_{-2}S_{-1}S_0.S_1S_2\dots$. A Figura 2.12 mostra a sequência de símbolos dos pontos que permanecem no quadrado unitário após uma (Figura 2.12a) e duas (Figura 2.12b) iteradas.

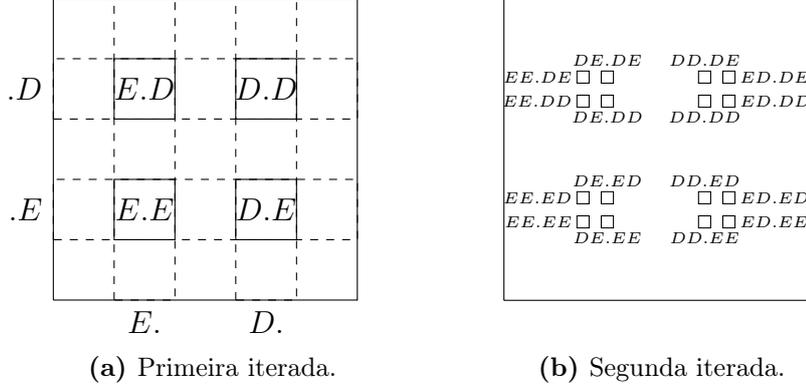


Figura 2.12: Sequência de símbolos do conjunto invariante do mapa da ferradura.

A sequência de símbolos, denominada *dinâmica simbólica* do mapa, mostra qualitativamente de onde os pontos vieram ($\dots S_{-2}S_{-1}$) e para onde eles irão ($S_1S_2\dots$); em especial, S_0 mostra qual lado do quadrado unitário o ponto está no presente. Nesse sentido, podemos definir o mapa de deslocamento \mathbf{d} , o qual age sobre a sequência de símbolos da seguinte forma:

$$\mathbf{d}(\dots S_{-2}S_{-1}S_0.S_1S_2\dots) = \dots S_{-1}S_0S_1.S_2S_3\dots, \quad (2.19)$$

isso significa que \mathbf{d} desloca o mapa em uma iterada, i.e., ele fornece a dinâmica simbólica de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$.

A dinâmica simbólica é uma ferramenta útil para a análise de sistemas dinâmicos pois podemos definir uma função contínua injetiva ϕ que leva um ponto \mathbf{x} em sua dinâmica simbólica e escrever

$$\mathbf{h}|_{\Sigma} = \phi^{-1} \cdot \mathbf{d} \cdot \phi, \quad (2.20)$$

onde $|_{\Sigma}$ indica a restrição do mapa \mathbf{h} ao subconjunto invariante Σ .

Dessa forma, ao invés de iterarmos n vezes o mapa \mathbf{h} para uma dada condição inicial $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$, podemos levar esse ponto para o espaço da dinâmica simbólica, aplicar \mathbf{d}^n e voltar para \mathbf{x}_n . Em especial, podemos mostrar que um ponto fixo em \mathbf{d}^n , i.e., $\mathbf{d}^n(S_i) = S_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, é mapeado num ponto fixo em \mathbf{h}^n , para qualquer $n \in \mathbb{Z}$.

Utilizando a dinâmica simbólica podemos mostrar que, assim como no mapa da tenda, o mapa da ferradura possui sensibilidade a condições iniciais. Como o conjunto invariante é limitado, pois está restrito ao quadrado unitário, temos que ele também apresenta caos. Temos, então, que o conjunto invariante do mapa da ferradura é um conjunto caótico que descreve uma geometria fractal no espaço de fases. Além disso, esse conjunto não é um

atrator pois todos os pontos do quadrado unitário, a menos de um conjunto de medida nula, são eventualmente mapeados para fora do quadrado unitário.

Nas próximas duas seções, nos aprofundamos na análise da dinâmica de um sistema.

2.6 Estabilidade linear

Consideremos um sistema descrito por uma EDO N -dimensional como na equação (2.1). Podem existir pontos no espaço de fases desse sistema onde o campo se anula, i.e.,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.21)$$

Chamamos um ponto \mathbf{x}_e que satisfaz a condição (2.21) de *ponto de equilíbrio*. Além dos pontos de equilíbrio, podem existir também órbitas nesse sistema que satisfazem a condição $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T)$ para um T finito. Denominamos essas soluções de *órbitas periódicas* de período T .

Para obtermos um aspecto global da dinâmica do sistema, é interessante analisarmos para quais regiões do espaço de fases as órbitas são atraídas e de quais regiões elas são repelidas. Essa análise pode ser feita em torno dos pontos de equilíbrio e das órbitas periódicas do sistema se utilizarmos a teoria de *estabilidade linear* [8].

Vamos primeiro analisar o que ocorre com as órbitas que estão próximas a um ponto de equilíbrio. Para isso, tomemos um ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e . Para estudar o comportamento das órbitas próximas a esse ponto, tomemos

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e + \boldsymbol{\eta}(t), \quad (2.22)$$

onde $\boldsymbol{\eta}(t)$ é uma pequena perturbação.

Agora, podemos expandir o campo em torno do ponto de equilíbrio e utilizar as equações (2.1) e (2.21) para obtermos

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}(t)}{dt} = \mathbf{DF}(\mathbf{x}_e) \cdot \boldsymbol{\eta}(t) + \mathcal{O}(\boldsymbol{\eta}^2(t)), \quad (2.23)$$

onde $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_e)$ é a matriz jacobiana do sistema avaliada no ponto de equilíbrio.

Desprezando os termos de ordem superior, o problema de estabilidade linearizado é então dado pela sua forma geral

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}, \quad (2.24)$$

onde \mathbf{y} é um vetor N -dimensional real e \mathbf{A} é uma matriz real de tamanho $N \times N$ que não depende do tempo. A solução geral da equação (2.24) é dada por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 e^{\mathbf{A}t}. \quad (2.25)$$

Para analisarmos as soluções (2.25), transformemos \mathbf{A} em sua forma canônica: seja \mathbf{T} a matriz real de tamanho $N \times N$ cujas colunas são formadas pelos autovetores da matriz \mathbf{A} , a forma diagonal da matriz \mathbf{A} é então dada por

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}. \quad (2.26)$$

Dessa forma, a equação (2.24) pode ser reescrita como

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{z}, \quad (2.27)$$

onde $\mathbf{y}(t) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{z}(t)$ e cuja solução é dada por

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_0 e^{\mathbf{A}_d t}. \quad (2.28)$$

Os autovalores da matriz \mathbf{A} são soluções do polinômio característico

$$P(\lambda) = \det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = 0, \quad (2.29)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem N . Vamos assumir que todos os N autovalores são distintos e, como os coeficientes do polinômio $P(\lambda)$ são reais, os autovalores são também reais ou pares de complexos conjugados.

Dessa maneira, a forma geral de um autovalor de \mathbf{A} é dada por

$$\lambda_k = \sigma_k + i\omega_k, \quad (2.30)$$

onde $k = 1, 2, \dots, N$. Para os autovalores reais, temos $\lambda_k = \sigma_k$ e, para os autovalores complexos, temos $\lambda_k = \lambda_{k+1}^* = \sigma_k + i\omega_k$, onde $*$ representa o complexo conjugado.

Dessa forma, podemos agora separar \mathbf{A}_d nas contribuições dos j autovalores reais e $(N - j)$ complexos:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

onde \mathbf{R} é a matriz diagonal $j \times j$ dada pelos autovalores reais de \mathbf{A} e \mathbf{C} é a matriz diagonal de blocos 2×2 dada pelos termos dos autovalores complexos.

Nos subespaços cujos autovalores são reais, as soluções (2.28) são dadas por

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_0^k e^{\sigma_k t}, \quad (2.32)$$

e nos subespaços cujos autovalores são complexos, temos

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_0^k \exp \begin{pmatrix} \sigma_k t & \omega_k t \\ -\omega_k t & \sigma_k t \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

o que implica nas seguintes soluções:

$$\varphi_k(t) = \mathbf{z}_0^k e^{\sigma_k t} (\cos \omega_k t, -\sin \omega_k t) \text{ e } \varphi_{k+1}(t) = \mathbf{z}_0^{k+1} e^{\sigma_k t} (\sin \omega_k t, \cos \omega_k t). \quad (2.34)$$

Se considerarmos $\sigma_k \neq 0$, podem ocorrer quatro situações: para $\sigma_k < 0$, as soluções são chamadas de *estáveis* e se aproximam do ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e e, para $\sigma_k > 0$, são chamadas de *instáveis* e se afastam de \mathbf{x}_e ; além disso, se em alguma dessas situações nós tivermos $\omega_k \neq 0$, então as soluções espiralam no plano formado pelos autovetores complexos conjugados (vide Figura 2.13c). No caso em que $\sigma_k = 0$, a solução irá descrever um círculo ao redor do ponto de equilíbrio, o qual é chamado de *centro*.

Podemos definir o *subespaço estável* como

$$E^s = \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{N_s} \rangle, \quad (2.35)$$

onde $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{N_s}$ são os vetores que geram subespaços invariantes estáveis, i.e., todas as condições iniciais nesses subespaços continuam neles para todo tempo e órbitas próximas a esses subespaços se aproximam deles.

Similarmente, definimos

$$E^u = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{N_u} \rangle \text{ e } E^c = \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{N_c} \rangle, \quad (2.36)$$

os *subespaços instável* e *central*, respectivamente.

Em termos de estabilidade, as três situações que apresentamos são as únicas possíveis para o nosso sistema. Dessa forma, temos

$$N_s + N_u + N_c = N. \quad (2.37)$$

Na Figura 2.13, representamos alguns casos possíveis de estabilidade em torno de pontos de equilíbrio no caso bidimensional com $\sigma_k \neq 0$. Na Figura 2.13a, o subespaço estável é formado pelo espaço gerado pelos eixos coordenados; dessa forma, $N_s = 2$. Na Figura 2.13b, o subespaço estável é dado pelo eixo- y , enquanto que o subespaço instável é gerado pelo eixo- x , sendo assim $N_s = N_u = 1$. No caso da Figura 2.13c, temos novamente $N_s = 2$, sendo os autovalores complexos conjugados [11].

Tomemos agora uma órbita periódica de período T no sistema descrito por (2.1). Ao estudar a estabilidade linear ao redor desse ponto, caímos novamente nas equações (2.22) e (2.23), porém a matriz jacobiana do sistema agora varia com o tempo. Dessa forma, o problema linearizado de estabilidade é da forma:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{y}, \quad (2.38)$$

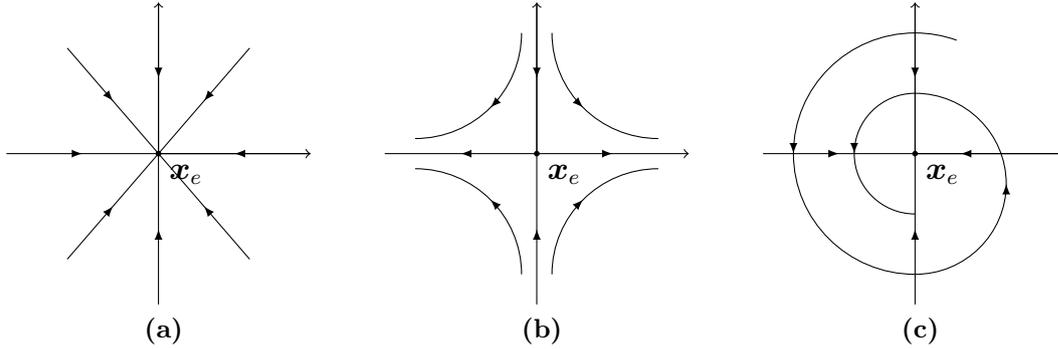


Figura 2.13: Estabilidade de pontos de equilíbrio no caso bidimensional. (a) Os dois autovalores são reais, negativos e possuem o mesmo módulo. (b) Os dois autovalores são reais, porém possuem sinais opostos. (c) Os dois autovalores são complexos conjugados com parte real negativa.

onde $\mathbf{A}(t)$ é uma matriz $N \times N$ periódica de período T . Apesar da solução deste problema ser bem mais complicada que a do anterior, podemos fazer uma análise similar à que foi feita com o ponto de equilíbrio e definir analogamente os subespaços estável, instável e central [8].

Alternativamente, podemos analisar esse problema utilizando uma superfície de Poincaré: a intersecção da órbita periódica com uma superfície $(N - 1)$ -dimensional descreve um ponto de equilíbrio nesse mapa. Vamos então estudar a estabilidade linear de soluções em torno do pontos de equilíbrio e órbitas periódicas em mapas.

Um ponto fixo em um mapa N -dimensional é equivalente a um ponto de equilíbrio numa EDO de N dimensões. Definimos como ponto fixo do mapa \mathbf{M} um ponto \mathbf{p} tal que

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}. \quad (2.39)$$

A estabilidade de um ponto fixo é dada, assim como no caso contínuo, pela análise do valor absoluto dos autovalores da matriz jacobiana do mapa \mathbf{M} , definida por

$$\mathbf{DM}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial M_1}{\partial x_N}(\mathbf{p}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial M_N}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial M_N}{\partial x_N}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Um autovalor cujo valor absoluto é menor do que 1 indica que o ponto fixo é estável na direção do seu respectivo autovetor. De modo contrário, um autovalor cujo valor absoluto é maior do que 1 indica que o ponto fixo é instável nessa direção.

Caso o ponto fixo atraia as órbitas em todas as direções, dizemos que é um *sorvedouro*; se ele repele todas as órbitas ao seu redor, o chamamos de *fonte*. Caso existam direções em que as órbitas são repelidas e direções em que elas são atraídas, dizemos que \mathbf{p} é uma *sela*. Essas nomenclaturas são válidas para o caso de tempo contínuo também.

Por último, dada uma órbita periódica $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k\}$ em \mathbb{R}^N , a estabilidade dessa

órbita é dada pelo valor absoluto dos autovalores de $DM^k(\mathbf{p}_r)$, onde $1 \leq r \leq k$. Pela regra da cadeia, temos

$$DM^k(\mathbf{p}_r) = DM(\mathbf{p}_k) \cdot DM(\mathbf{p}_{k-1}) \cdots DM(\mathbf{p}_1). \quad (2.41)$$

Dessa forma, a estabilidade de uma órbita periódica é dada pelo produto do jacobiano do mapa avaliado em cada um dos pontos da órbita.

2.7 Variedades estável e instável

Seja \mathbf{x}_p um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico cujos subespaços estável (E^s) e instável (E^u) são não vazios. Chamamos o conjunto dos pontos que se aproximam assintoticamente de \mathbf{x}_p quando $t \rightarrow \infty$ de *variedade estável*² do sistema (W^s); e o conjunto dos pontos que se aproximam assintoticamente de \mathbf{x}_p quando $t \rightarrow -\infty$, de *variedade instável* do sistema (W^u). A definição de variedades estável e instável é análoga para órbitas periódicas e mapas [8].

A primeira característica importante das variedades estável e instável é a de que suas dimensionalidades são iguais às dos respectivos subespaços: $\dim(W^s) = E^s$ e $\dim(W^u) = E^u$. Em mapas lineares, as variedades estável e instável possuem a mesma direção que os autovetores da matriz jacobiana que compõem os subespaços estável e instável, respectivamente. Num caso geral, as variedades são curvas tangentes aos respectivos subespaços. Representamos essa situação na Figura 2.14.

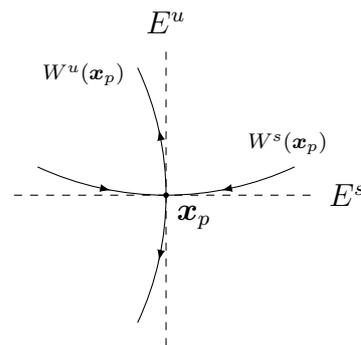


Figura 2.14: Variedades estável e instável de um ponto fixo \mathbf{x}_p em um mapa não-linear bidimensional.

Existem outras características importantes, como a de que variedades do mesmo tipo não podem se intersectar. Consideremos, por exemplo, as variedades estáveis de dois pontos fixos distintos \mathbf{x}_p^1 e \mathbf{x}_p^2 , denotadas por $W^s(\mathbf{x}_p^1)$ e $W^s(\mathbf{x}_p^2)$, respectivamente. Se

²Uma variedade N -dimensional é um conjunto que possui a propriedade de ser localmente euclideana, i.e, para todo ponto \mathbf{x} em uma variedade M de dimensão N , existe uma vizinhança U de \mathbf{x} e uma função contínua, bijetiva e cuja inversa também é contínua, que leva U em \mathbb{R}^N [13].

assumirmos que $W^s(\mathbf{x}_p^1)$ e $W^s(\mathbf{x}_p^2)$ se intersectam em \mathbf{x}^* , então \mathbf{x}^* deve tender assintoticamente a \mathbf{x}_p^1 e também a \mathbf{x}_p^2 quando $t \rightarrow \infty$, o que é um absurdo pois $\mathbf{x}_p^1 \neq \mathbf{x}_p^2$.

Uma variedade também não pode se auto-intersectar. Tomemos, como exemplo, um sistema de tempo discreto bidimensional: para a região da variedade próxima ao ponto fixo, essa propriedade é evidente pois ela é localmente similar ao subespaço $E^{s,u}$. Mapeando esses pontos no tempo, eles não podem se intersectar pois assumimos que o mapa é inversível e, portanto, injetivo. Sendo assim, essa propriedade é válida em todo $W^{s,u}(\mathbf{x}_p)$.

Contudo, variedades de tipos diferentes podem se intersectar. Quando ocorre uma intersecção entre as variedades estável e instável de um mesmo ponto fixo, chamamos de *intersecção homoclínica*; e o ponto na intersecção de *ponto homoclínico*. Quando a intersecção envolve a variedade estável de um ponto fixo e a variedade instável de outro ponto fixo, chamamos de *intersecção heteroclínica*; e o ponto na intersecção de *ponto heteroclínico* [7].

Podemos notar que, caso haja uma intersecção entre variedades estável e instável, haverá um infinito número de intersecções. Isso decorre das variedades serem conjuntos invariantes do sistema; dessa forma, o ponto que está nas duas variedades em um dado instante deve permanecer nas duas variedades para todo o tempo, futuro e passado. Esse resultado sugere uma complexa dinâmica do sistema quando existem pontos homo ou heteroclínicos. De fato, podemos mostrar que tanto intersecções homoclínicas quanto intersecções heteroclínicas implicam em uma dinâmica similar à do mapa da ferradura e, conseqüentemente, caos [12].

Denominamos um ponto fixo *hiperbólico* quando o subespaço central E^c relacionado a esse ponto é vazio, i.e., todos os autovalores da matriz jacobiana aplicada nesse ponto fixo possuem módulo diferente da unidade, para mapas, ou parte real não-nula, para EDOs. Dessa forma, de acordo com a equação (2.37), a dimensão do espaço é dada por $N_u + N_s$ e o espaço pode ser descrito como a soma direta entre os subespaços estável e instável.

Hiperbolicidade é interessante pois permite que muitos resultados rigorosamente matemáticos sejam obtidos. Em particular, a dinâmica de um conjunto invariante hiperbólico é preservada frente a pequenas perturbações no sistema [8]. O conjunto invariante do mapa da ferradura, por exemplo, é hiperbólico.

Veremos, no capítulo 3, que a variedade estável do conjunto invariante de um sistema dinâmico está relacionada a fronteiras no espaço de fases que separam bacias de atração de diferentes atratores e que a estrutura dessa variedade afeta a dinâmica do sistema. Os problemas que estudaremos nesse capítulo estão comumente relacionados a conjuntos invariantes hiperbólicos.

3

Fronteiras fractais entre bacias de atração

Os conjuntos invariantes do mapa da tenda e do mapa da ferradura vistos nas seções 2.4 e 2.5, respectivamente, são exemplos de uma classe chamada *conjuntos caóticos não atratores*. As três mais importantes consequências advindas desse tipo de conjunto são: caos transiente, sobre o qual discutiremos brevemente na seção 3.1; fronteira fractal entre bacias de atração, que será o tema das seções 3.2, 3.3 e 3.4; e espalhamento caótico, que estudaremos na seção 3.5.

3.1 Caos transiente

Em sistemas dinâmicos, *transientes* são evoluções temporais que precedem o comportamento assintótico do sistema. Em termos de observação, modelagem, predição e controle, transientes podem ser mais relevantes do que os estados finais do sistema [14].

Quando temos um conjunto invariante não atrator de medida nula cuja dinâmica é caótica, as condições iniciais que não pertencem a esse conjunto tendem assintoticamente a um atrator ou vão para o infinito; porém, antes disso, elas visitam temporariamente uma vizinhança do conjunto invariante, descrevendo uma dinâmica aproximadamente caótica. Chamamos esse fenômeno de *caos transiente*.

O tempo que uma órbita nesse sistema vivencia o caos transiente depende da sua condição inicial: algumas condições iniciais passam um tempo maior numa vizinhança do conjunto invariante do que outras. Tipicamente, o número de órbitas que continuam no caos transiente após um tempo t suficientemente grande é dado por [8, 14]

$$N(t) \sim e^{-\kappa t}, \quad (3.1)$$

onde κ é a chamada *taxa de escape*.

A taxa de escape κ não depende da região do espaço de fases analisada, desde que

esta contenha o conjunto invariante, e nem da distribuição inicial de condições iniciais. Dessa forma, κ é uma característica inerente ao conjunto invariante. Além disso, um valor pequeno de κ representa uma fraca repulsão de órbitas típicas pelo conjunto não atrator.

Podemos definir o *tempo de vida média* $\langle \tau \rangle$ como

$$\langle \tau \rangle \approx \frac{1}{\kappa}. \quad (3.2)$$

Se observarmos uma órbita qualquer em um sistema que possui um conjunto caótico não atrator por um tempo inferior a $\langle \tau \rangle$, não podemos distinguir entre o caos transiente e a dinâmica caótica realizada por uma órbita que se inicia nesse conjunto. Dessa forma, uma vez que não temos acesso ao próprio conjunto invariante por este possuir medida nula, podemos obter informações sobre a dinâmica caótica do sistema observando as órbitas que experimentam o caos transiente.

3.2 Fronteiras fractais

Sistemas dinâmicos podem possuir mais de um atrator e, conseqüentemente, pode existir mais de uma bacia de atração no espaço de fases desses sistemas. Como definimos na seção 2.1, a bacia de atração de um atrator é o conjunto de condições iniciais das órbitas que tendem assintoticamente ao atrator. Por definição, portanto, não pode existir um ponto que pertence a duas ou mais bacias de atração ao mesmo tempo. Dessa forma, definimos uma *fronteira* como o conjunto de pontos que separa duas ou mais bacias de atração.

Consideremos, por exemplo, um sistema mecânico com atrito sob um potencial onde existem dois mínimos (Figura 3.1a). Devido ao atrito, a maior parte das órbitas tende assintoticamente às posições $x = \pm x_0$, dependendo de suas condições iniciais. Dessa forma, os pontos $(x, \frac{dx}{dt}) = (\pm x_0, 0)$ são os atratores do sistema. Existe, também, um ponto de equilíbrio instável no sistema, a saber, $(x, \frac{dx}{dt}) = (0, 0)$. A Figura 3.1b apresenta o espaço de fases do sistema: os pontos na região branca pertencem à bacia de $x = -x_0$, enquanto que os pontos na região hachurada pertencem à bacia de $x = x_0$.

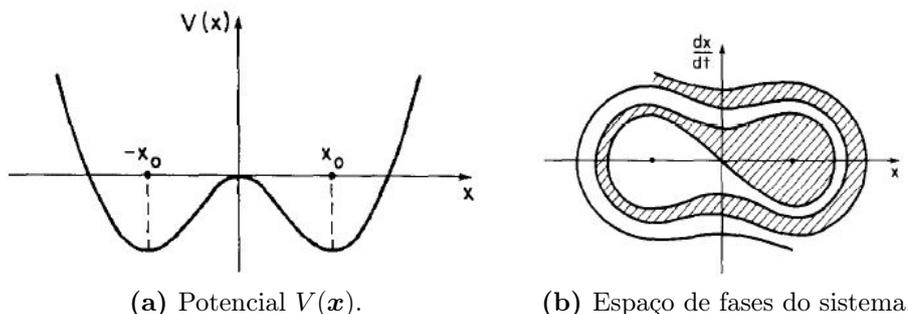


Figura 3.1: Fronteira regular entre bacias de atração. Figuras reproduzidas da referência [6].

Podemos observar na Figura 3.1b que a fronteira entre as bacias de atração do sistema é uma curva suave. Chamamos esse tipo de fronteira de *fronteira regular*. Nesse exemplo, todas as órbitas que se iniciam na fronteira tendem assintoticamente ao ponto de equilíbrio instável. De forma mais geral, a fronteira é a variedade estável de um conjunto invariante instável.

Existe um outro tipo de fronteira entre bacias de atração. Como exemplo, vamos considerar o *mapa da tenda dupla simétrico*, definido por

$$T_{sim}^d(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x \leq \alpha \\ -ax + b & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta \\ ax + c & \text{se } \beta \leq x \end{cases}, \quad (3.3)$$

onde $b = \frac{1+a}{2}$, $c = 1 - a$, $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4a}$, $\beta = \frac{3}{4} - \frac{1}{4a}$.

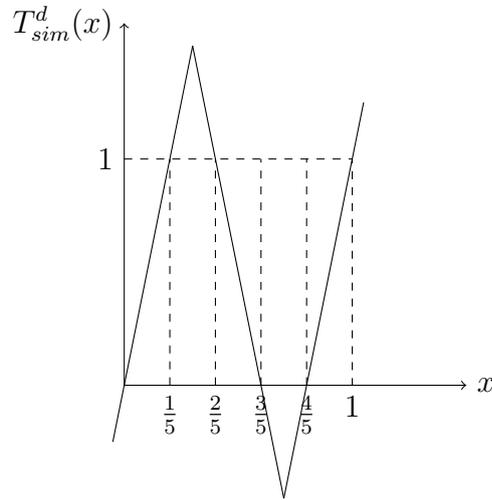


Figura 3.2: Mapa da tenda dupla simétrico com inclinação $a = 5$.

A Figura 3.2 apresenta o mapa da tenda dupla simétrico com inclinação $a = 5$. Podemos observar que as órbitas cujas condições iniciais estão em $x > 1$ e $x < 0$ tendem assintoticamente a $+\infty$ e $-\infty$, respectivamente. Além disso, observamos que o intervalo $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ faz parte da bacia de $+\infty$ e o intervalo $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, da bacia de $-\infty$. Como esses são os únicos intervalos que saem do domínio em uma iterada, os intervalos que pertencem às bacias dos atratores e saem do intervalo em duas iteradas devem, necessariamente, pertencer à $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ ou $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ após uma iterada. Esses intervalos são $(\frac{1}{25}, \frac{2}{25})$, $(\frac{13}{25}, \frac{14}{25})$ e $(\frac{21}{25}, \frac{22}{25})$, que pertencem a bacia de $+\infty$; e $(\frac{3}{25}, \frac{4}{25})$, $(\frac{11}{25}, \frac{12}{25})$ e $(\frac{23}{25}, \frac{24}{25})$, que pertencem à bacia de $-\infty$. A Figura 3.3 mostra o que ocorre com o intervalo unitário durante as iteradas do mapa.

Se continuarmos dividindo o intervalo unitário entre as bacias dos atratores em $+\infty$ e $-\infty$, como fizemos na Figura 3.3, veremos que elas sempre se alternam. Além disso, no limite de “infinitas iteradas” do mapa, obtemos o conjunto invariante. Dessa forma, todos os pontos do conjunto invariante dividem as duas bacias de atração, i.e., o conjunto

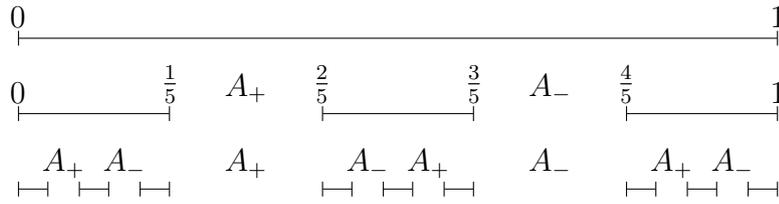


Figura 3.3: Construção das bacias de atração do mapa da tenda dupla. A_+ representa os pontos que pertencem à bacia de $+\infty$ e A_- representa os pontos que pertencem à bacia de $-\infty$.

invariante é a fronteira entre as bacais de atração do sistema.

Dada a forma como foi construído, o conjunto invariante do mapa é um conjunto de Cantor e, portanto, a fronteira também o é. Sendo assim, para calcular sua dimensão, podemos seguir o mesmo procedimento da seção 2.2: após n iteradas o sistema será composto por 3^n intervalos, cada um com comprimento $(\frac{1}{5})^n$; utilizando a definição da dimensão de contagem de caixas, equação (2.8), temos que a dimensão da fronteira é dada por

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 5} \approx 0,68, \tag{3.4}$$

o que implica que a fronteira desse sistema é fractal.

Assim como fizemos para o mapa da tenda, podemos analisar o caso geral e definir o *mapa da tenda dupla assimétrico*, que é dado por

$$T_{assim}^d(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x \leq \alpha \\ bx + d & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta \\ cx + e & \text{se } \beta \leq x \end{cases}, \tag{3.5}$$

onde $a, c > 0$, $b < 0$, $\alpha = \frac{a}{a+b}$ e $\beta = \frac{b}{b+c}$. Apresentamos o mapa graficamente na Figura 3.4.

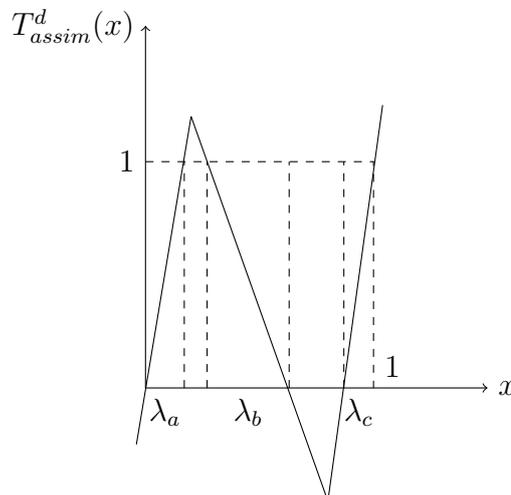


Figura 3.4: Mapa da tenda dupla assimétrico.

A ação do mapa no intervalo unitário divide-o em três subintervalos de tamanhos λ_a , λ_b e λ_c , assim como é apresentado na Figura 3.5.

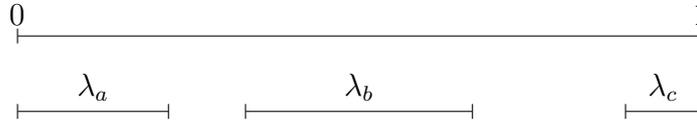


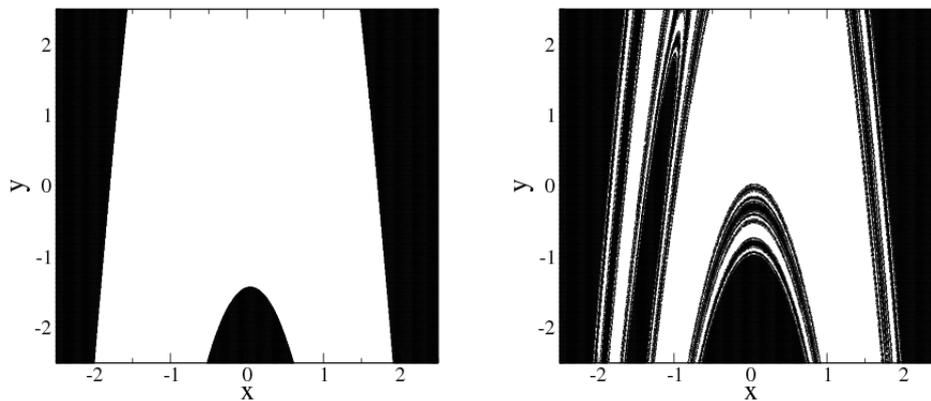
Figura 3.5: Intervalos obtidos após uma iteração do mapa da tenda dupla assimétrico.

Novamente, como fizemos para o mapa da tenda assimétrico, podemos utilizar a condição de auto-similaridade do mapa e obter a equação transcendental para a dimensão do conjunto invariante do mapa da tenda dupla assimétrico:

$$\lambda_a^D + \lambda_b^D + \lambda_c^D = 1. \quad (3.6)$$

Em particular, no caso em que as inclinações são idênticas e dadas por $a = b = c = 5$, obtemos a dimensão (3.4).

Como um exemplo bidimensional, tomemos agora o mapa de Hénon (2.10), definido na seção 2.2. A Figura 3.6 mostra o espaço de fases desse sistema com $A = 1,28$ (Figura 3.6a) e $A = 1,50$ (Figura 3.6b), ambos os casos com $B = -0,3$. Para esses valores de parâmetros, a dinâmica do mapa é composta por dois atratores: um atrator de período 2, cuja bacia está em branco; e outro localizado em $-\infty$, cuja bacia está em preto. Para gerar essa figura, tomamos uma grade de 700×700 pontos no conjunto $[-2, 5, 2, 5] \times [-2, 5, 2, 5]$. Em seguida, iteramos o mapa 100 vezes utilizando cada ponto da grade como condição inicial e anotamos de qual dos atratores o sistema se aproximou.



(a) Fronteira regular com $A = 1,28$.

(b) Fronteira fractal com $A = 1,50$.

Figura 3.6: Fronteiras entre as bacias de atração do mapa de Hénon com parâmetro $B = -0,3$.

Podemos observar na Figura 3.6 que a estrutura da fronteira entre as bacias de atração

depende dos valores dos parâmetros. Na Figura 3.6a, a fronteira é regular, enquanto que na Figura 3.6b, a fronteira é fractal. Em especial, há um valor crítico de A em que a fronteira do sistema se torna fractal [9]. Veremos, na próxima seção, como a existência de fronteiras fractais no espaço de fases torna a dinâmica do sistema mais complexa.

3.3 Sensibilidade do estado final

Consideremos um sistema bidimensional onde existem dois atratores, A_1 e A_2 , de forma que a fronteira que divide as bacias desses atratores é suave (não fractal), como mostramos na Figura 3.7. Consideremos, também, que a precisão com a qual sabemos a localização de um ponto no espaço de fases desse sistema é finita. Sendo assim, quando tomamos um ponto \mathbf{x}_0 nesse espaço de fases podemos, na verdade, estar tomando qualquer ponto que satisfaça a condição $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é o erro de medição do sistema.

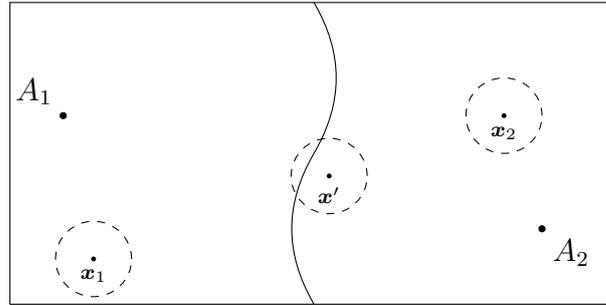


Figura 3.7: Fronteira suave entre duas bacias de atração.

Observamos na Figura 3.7 que os pontos \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 pertencem às bacias de A_1 e A_2 , respectivamente. Denominamos esses pontos ϵ -certos pois, dentro dessa precisão, não há dúvida quanto a que bacia eles pertencem. Dessa forma, pontos ϵ -certos estão a uma distância maior que ϵ da fronteira.

Em contrapartida, o ponto \mathbf{x}' , o qual pertence à bacia de A_2 , está a uma distância menor do que ϵ da fronteira. Dessa forma, ao tomarmos esse ponto, podemos estar tomando um ponto que pertence à bacia do outro atrator. Consequentemente, não podemos determinar com certeza o estado final do sistema. Denominamos esse tipo de ponto ϵ -incerto.

Observamos, portanto, que existe um conjunto de pontos para o qual não podemos determinar com certeza o *estado final* do sistema, i.e., a qual dos atratores as órbitas tomadas tendem assintoticamente. Para quantificarmos a influência desse conjunto na dinâmica do sistema, definimos a *função incerteza* $f(\epsilon)$ como a fração de condições iniciais ϵ -incertas do espaço de fases.

A Figura 3.8 apresenta a função incerteza desse sistema. Nesse caso, como a fronteira é regular, $f(\epsilon)$ é dada pela área formada pelos pontos que estão a uma distância ϵ da fronteira dividida pela área total.

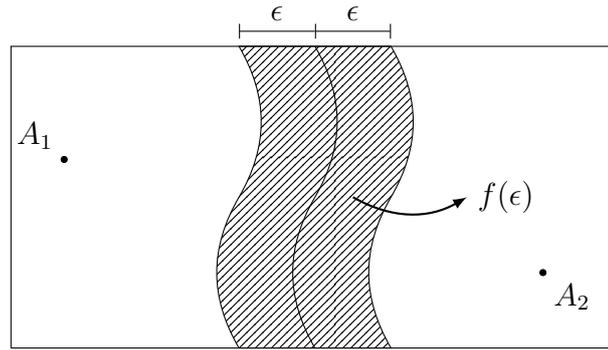


Figura 3.8: Função incerteza para o caso de uma fronteira regular.

Ainda na Figura 3.8, observamos que a função incerteza, nesse caso, depende linearmente da precisão ϵ . Dessa forma, obtemos a seguinte lei de escala:

$$f(\epsilon) \sim \epsilon. \quad (3.7)$$

Como discutimos anteriormente, pontos ϵ -incertos presentes em um sistema trazem complicações em sua dinâmica pois eles impedem que tenhamos certeza sobre o estado final do sistema dada a precisão finita com a qual podemos medir um ponto. Dessa forma, quanto menor for $f(\epsilon)$, mais certeza temos sobre a qual dos atratores a órbita tomada tende assintoticamente.

A equação (3.7) estabelece, então, uma relação entre o erro, ou a precisão, com o qual medimos um ponto no espaço de fases e a nossa incerteza sobre o estado final do sistema. Para o caso em que a fronteira é regular, essa relação é linear. Dessa forma, se quisermos que a fração de pontos ϵ -incertos do sistema $f(\epsilon)$ diminua pela metade, basta dobrarmos a nossa precisão, i.e., diminuirmos o erro ϵ pela metade.

Vamos, agora, mostrar que a lei de escala para a função incerteza no caso em que a fronteira entre as bacias de atração é fractal é dada por

$$f(\epsilon) \sim \epsilon^{N-D},$$

onde $\epsilon \ll 1$ e N e D são as dimensões do espaço e da fronteira, respectivamente.

A demonstração segue da seguinte forma: sejam Σ o conjunto de pontos que pertencem à fronteira, $B_\epsilon(\Sigma)$ o conjunto dos pontos que estão a uma distância igual ou menor a ϵ de Σ e $V[B_\epsilon(\Sigma)]$ o volume N -dimensional ocupado por $B_\epsilon(\Sigma)$. Por definição, $f(\epsilon)$ é a fração de pontos ϵ -incertos do sistema e $V[B_\epsilon(\Sigma)]$ é o volume que esses pontos ocupam no espaço de fases. Dessa forma, $f(\epsilon)$ é proporcional a $V[B_\epsilon(\Sigma)]$. Sendo assim, com o intuito de obtermos uma lei de escala para $f(\epsilon)$, vamos primeiro obter uma lei de escala para $V[B_\epsilon(\Sigma)]$.

A ideia da demonstração é encontrarmos limitantes superior e inferior para $V[B_\epsilon(\Sigma)]$ e utilizarmos o teorema do confronto para obtermos o comportamento dessa grandeza no

limite em que $\epsilon \rightarrow 0$.

A fim de encontrarmos um limitante superior para $V[B_\epsilon(\Sigma)]$, tomemos uma grade fixa de cubos N -dimensionais de lado ϵ que cobre o espaço de fases do sistema. Nossa pergunta é: quantos cubos dessa grade são necessários, no máximo, para cobrir $V[B_\epsilon(\Sigma)]$? A Figura 3.9 ilustra a grade fixa cobrindo o conjunto de pontos ϵ -incertos em relação a um único ponto da fronteira para os casos onde $N = 1$ e $N = 2$.

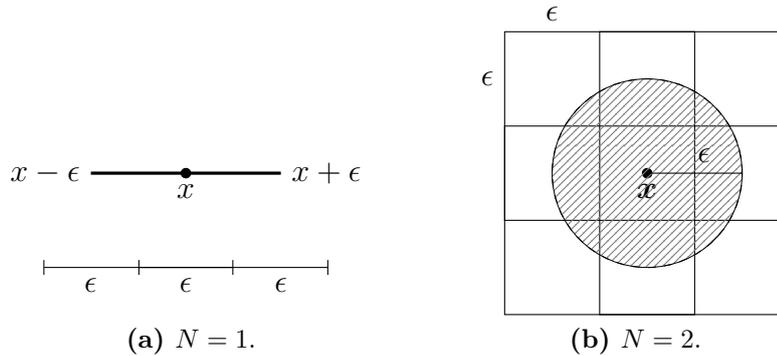


Figura 3.9: Cálculo do limitante superior de $V[B_\epsilon(\Sigma)]$.

No caso unidimensional, Figura 3.9a, dividimos a reta real em intervalos de tamanho ϵ . Se focarmos nossa atenção em apenas um ponto x da fronteira, os pontos ϵ -incertos são os pontos que pertencem ao intervalo $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ e o tamanho desse conjunto é dado por 2ϵ . No caso em que a grade divide a reta de tal forma que o ponto x se encontra no meio de um dos cubos unidimensionais, precisamos de mais dois intervalos da grade para cobrir o conjunto de pontos ϵ -incertos formados por x .

Dessa forma, para cada ponto da fronteira, precisamos de no máximo 3 cubos unidimensionais de tamanho ϵ para cobrir o conjunto de pontos ϵ -incertos. Chamando de $\tilde{N}(\epsilon)$ o número de caixas de tamanho ϵ necessário para cobrir Σ , temos então

$$V[B_\epsilon(\Sigma)] \leq 3\epsilon\tilde{N}(\epsilon),$$

para o caso unidimensional.

No caso bidimensional, Figura 3.9b, dividimos agora o plano real em quadrados de lado ϵ . Olhando novamente para apenas um ponto \mathbf{x} da fronteira, os pontos ϵ -incertos formam um disco de raio ϵ centrado em \mathbf{x} . No caso em que \mathbf{x} está no centro de um cubo bidimensional, precisamos de mais 8 cubos dessa grade para cobrir o conjunto de pontos ϵ -incertos.

Dessa forma, para cada ponto da fronteira, precisamos de no máximo 9 cubos bidimensionais de área ϵ^2 para cobrir o conjunto de pontos ϵ -incertos. Sendo assim,

$$V[B_\epsilon(\Sigma)] \leq 3^2\epsilon^2\tilde{N}(\epsilon),$$

para o caso bidimensional.

Finalmente, generalizando para o caso N -dimensional, obtemos

$$V[B_\epsilon(\Sigma)] \leq 3^N \epsilon^N \tilde{N}(\epsilon). \quad (3.8)$$

Queremos agora obter um limitante inferior para $V[B_\epsilon(\Sigma)]$. Para isso, podemos perguntar: qual deve ser o lado do cubo N -dimensional para que cada cubo cubra exatamente um ponto da fronteira e seus pontos ϵ -incertos? Pois, se assim o for, precisamos do menor número possível de cubos da grade para cobrir $V[B_\epsilon(\Sigma)]$.

O diâmetro de um conjunto é definido como a maior distância entre quaisquer dois pontos pertencentes a esse conjunto. No caso de um cubo N -dimensional de aresta ϵ , o diâmetro é dado por $\epsilon\sqrt{N}$. Dessa forma, se tomarmos uma grade com cubos de lado ϵ/\sqrt{N} , a maior distância entre dois pontos nesse cubo será ϵ . Sendo assim, cada cubo cobre no máximo um ponto da fronteira junto com seus pontos ϵ -incertos. Portanto, como cada cubo possui volume $(\epsilon/\sqrt{N})^N$, temos

$$V[B_\epsilon(\Sigma)] \geq \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{N}}\right)^N \tilde{N}\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{N}}\right), \quad (3.9)$$

onde $\tilde{N}(\epsilon/\sqrt{N})$ é o número de cubos de lado ϵ/\sqrt{N} necessários para cobrir Σ .

Combinando as equações (3.8) e (3.9) e lembrando que $0 < \epsilon < 1$, obtemos

$$\frac{\ln[(\epsilon/\sqrt{N})^N \tilde{N}(\epsilon/\sqrt{N})]}{\ln\epsilon} \geq \frac{\ln\{V[B_\epsilon(\Sigma)]\}}{\ln\epsilon} \geq \frac{\ln[3^N \epsilon^N \tilde{N}(\epsilon)]}{\ln\epsilon},$$

que é equivalente a

$$N - N \frac{\ln(\sqrt{N})}{\ln\epsilon} + \frac{\ln[\tilde{N}(\epsilon/\sqrt{N})]}{\ln(\epsilon/\sqrt{N}) + \ln(\sqrt{N})} \geq \frac{\ln\{V[B_\epsilon(\Sigma)]\}}{\ln\epsilon} \geq N \frac{\ln(3)}{\ln\epsilon} + N + \frac{\ln[\tilde{N}(\epsilon)]}{\ln\epsilon}.$$

Tomando o limite com $\epsilon \rightarrow 0$ e usando a definição da dimensão da contagem de caixas, eq. (2.8), temos pelo *teorema do confronto*:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln\{V[B_\epsilon(\Sigma)]\}}{\ln\epsilon} = N - D.$$

Como discutimos anteriormente, $V[B_\epsilon(\Sigma)] \propto f(\epsilon)$. Sendo assim,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln[f(\epsilon)]}{\ln\epsilon} = N - D. \quad (3.10)$$

Para $\epsilon \ll 1$, temos finalmente

$$f(\epsilon) \sim \epsilon^{N-D}, \quad (3.11)$$

como queríamos demonstrar.

A equação (3.11) nos diz que a relação entre a incerteza no estado final do sistema,

caracterizada pela função incerteza $f(\epsilon)$, e a incerteza na condição inicial do sistema, caracterizada pelo erro de medição ϵ , não é linear. Dessa forma, se aumentarmos a precisão com a qual medimos um ponto no espaço de fases do sistema, isso não significa que o nosso conhecimento sobre o estado final do sistema irá aumentar na mesma proporção. Denominamos essa propriedade *sensibilidade do estado final*.

Tomemos, por exemplo, o mapa da tenda dupla simétrico (3.3) com inclinação 5. Calculamos na seção 3.2 que a dimensão da fronteira desse mapa é dada por $D \approx 0,68$. Dessa forma, da equação (3.11), temos

$$f(\epsilon) \sim \epsilon^{1-0,68} = \epsilon^{0,32}.$$

Suponhamos agora que queremos novamente diminuir pela metade o número de pontos os quais não sabemos ao certo a qual bacia pertencem, i.e., $f(\epsilon') = f(\epsilon)/2$. Nesse caso, em quanto devemos melhorar nossa precisão na medição dos pontos no espaço de fases? Basta dobrarmos a nossa precisão, i.e., $\epsilon' = \epsilon/2$?

Sabemos que $f(\epsilon') \sim \epsilon'^{0,32}$. Sendo assim,

$$\frac{f(\epsilon)}{f(\epsilon')} = 2 = \frac{\epsilon^{0,32}}{\epsilon'^{0,32}} \Rightarrow 2\epsilon'^{0,32} = \epsilon^{0,32} \Rightarrow \ln \epsilon' = \ln \frac{\epsilon}{2^{\frac{1}{0,32}}} \approx \ln \frac{\epsilon}{2^{3,13}}$$

Portanto,

$$\epsilon' \approx \frac{\epsilon}{9}.$$

O que significa que, se quisermos diminuir pela metade $f(\epsilon)$, precisamos melhorar nossa precisão em 9 vezes. Se tomássemos um sistema onde $N - D = 0,1$, nessas mesmas condições, teríamos que melhorar nossa precisão em 1024 vezes. Sendo assim, no caso em que a fronteira do sistema é fractal, i.e., a dimensão da fronteira D não é inteira, o ganho de informação sobre o estado final do sistema é pequeno se comparado ao aumento da precisão com a qual conseguimos medir uma condição inicial.

Dessa forma, a dimensão D da fronteira é de vital importância para sabermos a dinâmica dos pontos ao redor da fronteira. Em geral, $N - 1 \leq D < N$, onde $D = N - 1$ para fronteiras regulares e $D > N - 1$ para fronteiras fractais. Dizemos que fronteiras com dimensão próximas à dimensão do espaço possuem alta fractalidade e fronteiras com dimensão próximas a $N - 1$, baixa fractalidade.

A lei de escala (3.11) é uma generalização para qualquer tipo de fronteira pois, se tomarmos D inteiro, obtemos novamente a equação (3.7). Na próxima seção, iremos discutir brevemente sobre a estrutura das fronteiras fractais, a qual é uma consequência da dinâmica do sistema, e sobre como essas fronteiras são formadas.

3.4 Estrutura das fronteiras fractais

A estrutura de uma fronteira fractal depende de como a fronteira é formada a partir da dinâmica. O mapa da tenda dupla, visto na seção 3.2, possui uma fronteira entre as bacias de atração de $+\infty$ e de $-\infty$ formada por um conjunto de Cantor. Essa estrutura decorre de como o mapa age no intervalo unitário a cada iterada (Figura 3.3): a ação do mapa ocorre similarmente ao procedimento que usamos para construir o conjunto de Cantor do terço médio (Figura 2.3).

No caso bidimensional, existem mapas que apresentam a mesma dinâmica do mapa da ferradura (seção 2.5), i.e., iterando-se o mapa, a fronteira é construída de modo similar a como construímos o conjunto invariante do mapa da ferradura (Figura 2.11). Dessa forma, a fronteira é a variedade estável de um conjunto invariante caótico não atrator, que é formado pela intersecção de conjuntos de Cantor de curvas suaves em duas direções.

Um segundo tipo de fronteira entre bacias de atração ocorre quando a fronteira é contínua mas não é diferenciável em nenhum ponto [6]; e um terceiro caso, que é comum, ocorre quando a fronteira possui diferentes dimensões em diferentes regiões do espaço de fases. Nesse terceiro caso, podem existir então regiões em que a fronteira é fractal (possuindo dimensão não inteira) e regiões onde ela é regular. Além disso, isso ocorre em uma escala fina, i.e., se tomarmos qualquer região fractal e ampliarmos, iremos obter subregiões com diferentes dimensões, regulares e fractais [15].

Podemos também criar um análogo a fronteiras entre bacias de atração em sistemas Hamiltonianos, onde não existem atratores. Para isso, basta tomarmos um sistema conservativo que seja fechado (limitado). Em seguida, fazemos uma abertura no sistema e analisamos as órbitas que tendem a ela no tempo. Podemos, então, considerar que a abertura do sistema age como um atrator e definir a bacia desse atrator como as condições iniciais cujas órbitas saem do sistema pela abertura. Para mais de uma abertura, algumas órbitas escapam por uma e outras órbitas escapam por outra; e os pontos que nunca escapam por nenhuma delas formam a fronteira do sistema, podendo ou não ser fractal. Denominamos essas aberturas de *regiões de escape*. O método de criar saídas em sistemas Hamiltonianos fechados conecta o caos de sistemas fechados com a estrutura fractal de sistemas abertos [16].

Além dos casos aqui apresentados, temos a situação em que o sistema apresenta mais do que duas bacias de atração. Quando isso ocorre, os pontos que formam a fronteira de um dos atratores pode, ao mesmo tempo, fazer parte da fronteira de todos os outros atratores. Chamamos essa característica de *propriedade de Wada* [17]. Dessa forma, se tomarmos um ponto $\mathbf{y} \in \Sigma$ e um valor $\epsilon > 0$, onde Σ é a fronteira, podemos encontrar pontos \mathbf{x} de todas as bacias na região $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \epsilon$. Apesar dessa propriedade parecer contra-intuitiva, a estrutura fractal da fronteira permite que isso ocorra.

3.5 Espalhamento caótico

Até o momento, analisamos apenas estruturas fractais presentes em sistemas dinâmicos dissipativos. Nessa seção, estudamos um sistema Hamiltoniano que apresenta uma estrutura fractal.

Consideremos uma partícula que se desloca sem atrito e sob o efeito de um potencial que é não-nulo apenas em uma região finita do espaço, denominada *região de espalhamento*. No instante inicial, a partícula se encontra longe da região de espalhamento porém move-se em sua direção. Após interagir com a região de espalhamento, a partícula é desviada da direção inicial por um ângulo θ .

A Figura 3.10 ilustra um espalhamento bidimensional onde a região de espalhamento é dada por um disco em torno da origem do espaço de fases. Antes do espalhamento, a partícula se move em direção à região de espalhamento com uma velocidade paralela ao eixo x e distante b desse eixo; após o espalhamento, a partícula é desviada por um ângulo θ em relação ao eixo horizontal. Denominamos b e θ o *parâmetro de impacto* e o *ângulo de espalhamento*, respectivamente.

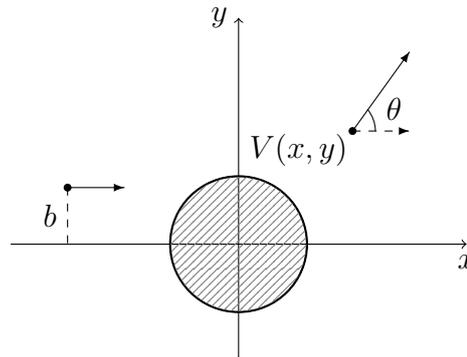


Figura 3.10: Espalhamento clássico com um potencial $V(x, y)$ circular.

O *problema de espalhamento* consiste em analisar qual é a relação entre o parâmetro de impacto b e o ângulo de espalhamento θ . Com esse intuito, vamos analisar a dinâmica do sistema. As equações de movimento da partícula são dadas por

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad (3.12)$$

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla V(\mathbf{x}), \quad (3.13)$$

onde $\mathbf{x} = (x, y)$ é a posição da partícula e $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, a velocidade. Apesar de ser um problema 4-dimensional, podemos reduzi-lo a um problema tridimensional levando em consideração que

$$E = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + V(\mathbf{x}), \quad (3.14)$$

e o fato de que o sistema é conservativo e, portanto, possui energia constante.

Tomando θ como o ângulo entre \mathbf{v}_x e \mathbf{v}_y e utilizando a relação (3.14) para escrever $|\mathbf{v}|$ em função das variáveis x e y , podemos reescrever as equações (3.12) e (3.13) como

$$\frac{dx}{dt} = |\mathbf{v}| \cos(\theta), \quad (3.15)$$

$$\frac{dy}{dt} = |\mathbf{v}| \sin(\theta), \quad (3.16)$$

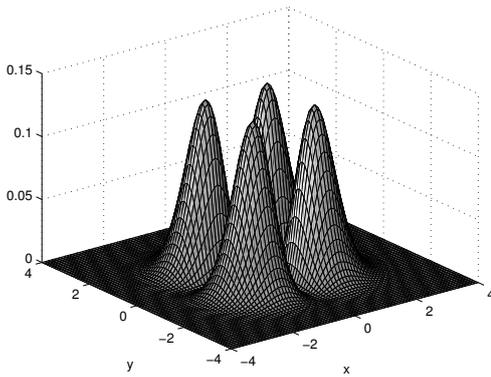
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{m|\mathbf{v}|} \left(\sin(\theta) \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x} - \cos(\theta) \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial y} \right). \quad (3.17)$$

Dessa forma, podemos descrever nosso sistema utilizando as coordenadas (x, y, θ) , em vez de (x, y, v_x, v_y) .

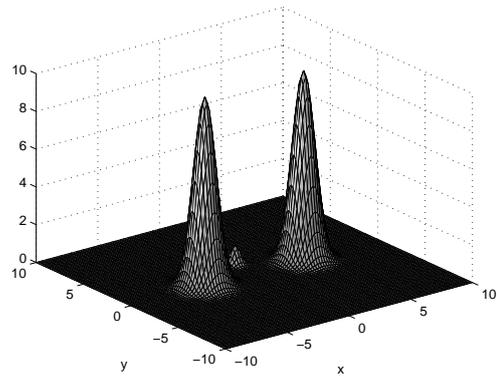
Queremos agora analisar a dependência de θ com o parâmetro b . Para isso, precisamos tomar um potencial $V(x, y)$. Neste trabalho, utilizamos dois potenciais diferentes. O primeiro é dado por [18]

$$V(x, y) = x^2 y^2 e^{-(x^2 + y^2)}, \quad (3.18)$$

e está representado na Figura 3.11a. Como podemos observar, a região de espalhamento desse potencial é formada por quatro picos de altura $E_{max} \approx 0,135$, localizados em $x, y = \pm 1, 0$.



(a) Potencial com 4 picos simétrico.



(b) Potencial com 3 picos assimétrico.

Figura 3.11: Potenciais $V(x, y)$ utilizados no espalhamento.

O espalhamento se dá no plano xy porém, a altura z da partícula é dada pela sua energia E , a qual é conservada durante todo o movimento pois o sistema é Hamiltoniano. Existem dois comportamentos diferentes para esse sistema: quando a energia da partícula é maior que a altura dos picos do potencial, $E > E_{max}$, o ângulo de espalhamento é uma função contínua do parâmetro de impacto (vide Figura 3.12a); porém, quando a

energia da partícula é menor que a altura dos picos do potencial, $E < E_{max}$, o ângulo de espalhamento é uma função descontínua do parâmetro de impacto (vide Figura 3.12b).

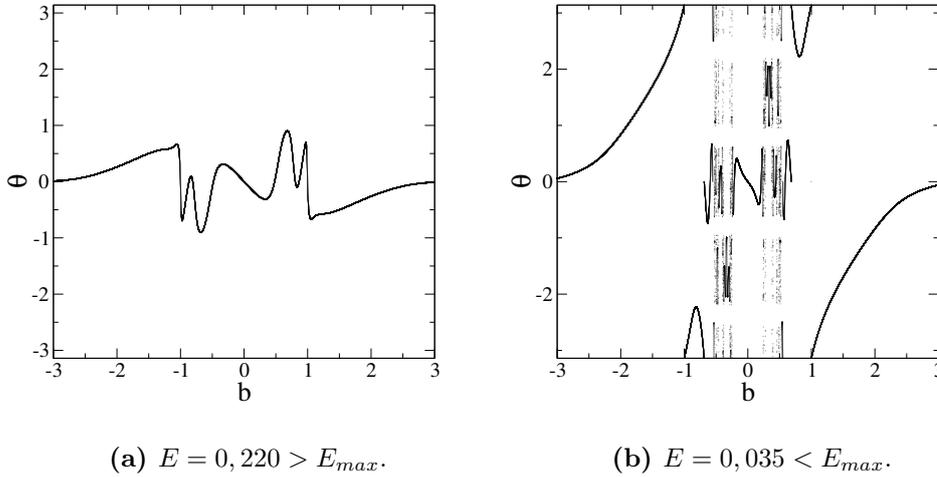


Figura 3.12: Ângulo de espalhamento θ em função do parâmetro de impacto b para os casos (a) regular e (b) caótico, utilizando o potencial (3.18).

Nas simulações da Figura 3.12, tomamos como condições iniciais do sistema $x_0 = 9$, $\theta_0 = \pi$ e $-3 \leq y_0 \leq 3$. A condição inicial $\theta_0 = \pi$ implica que a partícula se desloca com $v_x < 0$ e $v_y = 0$. Dessa forma, a condição inicial y_0 representa o parâmetro de impacto b do nosso sistema. Além disso, utilizamos $E/E_{max} = 1,626$ em 3.12a e $E/E_{max} = 0,260$ em 3.12b.

No caso em que $E < E_{max}$, os pontos b onde a função $\theta(b)$ é descontínua formam um conjunto fractal na reta. Veremos a seguir que a estrutura fractal desse sistema está relacionada ao fato dele apresentar órbitas caóticas quando $E < E_{max}$. Nessa condição, portanto, chamamos o problema de *espalhamento caótico*.

A dinâmica do sistema é dada da seguinte forma: para $E > E_{max}$, as órbitas do sistema são apenas influenciadas pelo potencial porém, para $E < E_{max}$, as órbitas efetivamente interagem com a região de espalhamento, rebatem entre os picos do potencial e, conseqüentemente, desviam da direção inicial. A segunda situação pode ser melhor analisada pela Figura 3.13, a qual mostra o tempo de escape τ de cada órbita, i.e., o tempo que cada órbita leva para sair da região de espalhamento e alcançar uma distância $d = \sqrt{x^2 + y^2} = 10$, longe o suficiente da influência do potencial.

Comparando as Figuras 3.12b e 3.13, podemos observar que as descontinuidades da função $\theta(b)$ coincidem com as descontinuidades do tempo de escape. Isso significa que as descontinuidades em $\theta(b)$ são causadas por órbitas que passam um tempo infinito rebatendo entre os picos, i.e., órbitas que nunca saem da região de espalhamento. Podemos então dizer que os valores de b que originam tais órbitas formam o conjunto invariante do

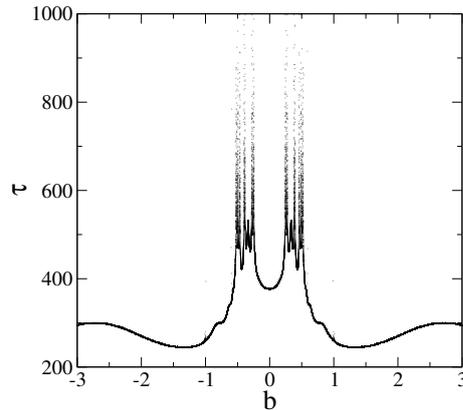


Figura 3.13: Tempo de escape para o problema de espalhamento caótico ($E < E_{max}$) utilizando o potencial (3.18).

sistema.

Quando tomamos duas órbitas cujas condições iniciais estão próximas de um parâmetro do conjunto invariante, elas podem rebater um número diferente de vezes entre os picos do potencial e, conseqüentemente, resultar em valores diferentes de ângulos de espalhamento. A Figura 3.14 apresenta duas órbitas com as mesmas condições iniciais $x_0 = 9$ e $\theta_0 = \pi$. Porém, a condição inicial $y_0 = b$ vale $b = -0,4968$ em 3.14a e $b = -0,4969$ em 3.14b. Podemos observar que, apesar dos parâmetros de impacto possuírem valores que diferem na ordem de $\mathcal{O}(10^{-4})$, os ângulos de espalhamento diferem na ordem de $\mathcal{O}(1)$. Isso sugere que o nosso sistema apresenta sensibilidade a condições iniciais.

A Figura 3.14c apresenta ambas as órbitas sobrepostas, onde podemos observar que as órbitas tomam direções diferentes após a quinta rebatida com o potencial na região de espalhamento. Finalmente, como esse sistema possui sensibilidade a condições iniciais e o conjunto invariante, por definição, é limitado, temos que esse conjunto apresenta órbitas caóticas.

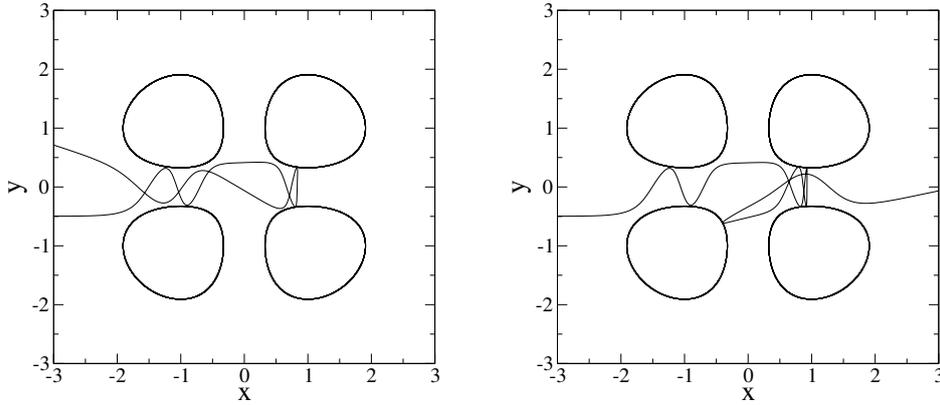
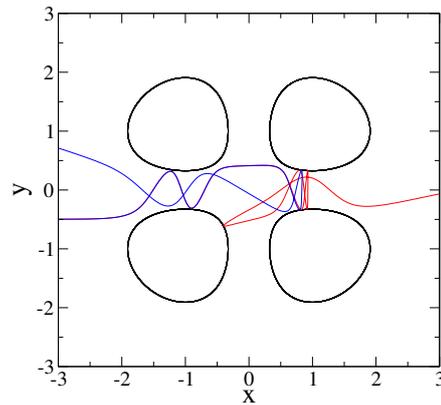
Definimos a fronteira do espalhamento caótico como sendo o conjunto invariante caótico e não atrator desse sistema. Dessa forma, a fronteira é novamente a variedade estável de um conjunto invariante instável.

O segundo potencial que utilizamos neste trabalho é dado por [19]

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^3 V_i e^{-r_i^2/2\sigma_i^2}, \quad (3.19)$$

onde

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2,$$

(a) $b = -0,4968$.(b) $b = -0,4969$.

(c) Órbitas sobrepostas.

Figura 3.14: Sensibilidade a condição iniciais no espalhamento caótico.

o qual está representado na Figura 3.11b com $x_1 = -x_2 = 4$, $x_3 = 0$, $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $V_1 = V_2 = 10$, $V_3 = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,75$ e $\sigma_3 = 0,325$.

A energia máxima atingida pelos picos do potencial é dada por $E_{1,2,max} = 10$ para os picos 1 e 2 e $E_{3,max} = 1$, para o pico 3. A Figura 3.15 apresenta as simulações para os casos onde $E = 10,05 > E_{1,2,max}$ (Figura 3.15a) e $E = 0,95 < E_{3,max}$ (Figura 3.15b). Em ambos os casos, tomamos como condições iniciais do sistema $y_0 = -9$, $\theta_0 = \pi/2$ e $0 \leq x_0 \leq 4$. A condição inicial $\theta_0 = \pi/2$ implica que a partícula se desloca com $v_x = 0$ e $v_y > 0$. Dessa forma, diferentemente do primeiro potencial, a condição inicial x_0 representa o parâmetro de impacto b do nosso sistema. Podemos observar o aparecimento do comportamento caótico quando $E < E_{3,max}$.

Assim como ocorre nos sistemas apresentados no capítulo 2, a dinâmica do espalhamento caótico está relacionada ao quão preciso nós podemos medir um ponto no espaço

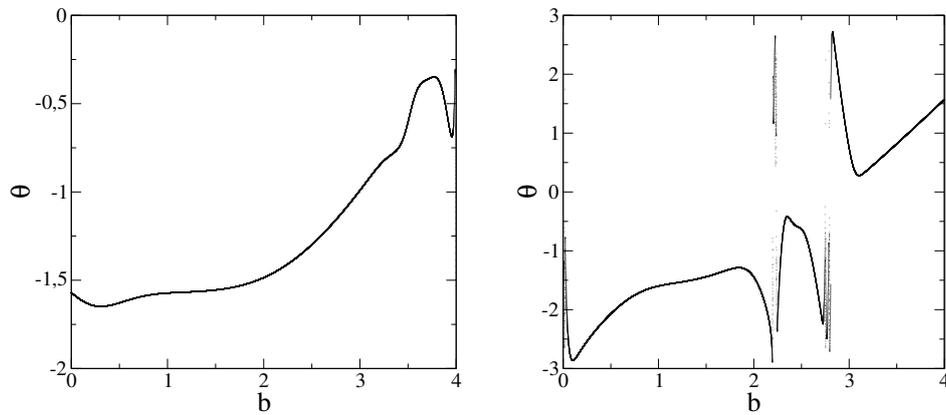
(a) $E = 10,05 > E_{1,2,max}$.(b) $E = 0,95 < E_{3,max}$.

Figura 3.15: Ângulo de espalhamento θ em função do parâmetro de impacto b para os casos (a) regular e (b) caótico, utilizando o potencial (3.19).

de fases e, conseqüentemente, à dimensão D da fronteira fractal. Dessa forma, precisamos conhecer D para conhecermos o comportamento de $\theta(b)$. No próximo capítulo, estudaremos os principais métodos para o cálculo de fronteiras fractais e apresentaremos o novo método proposto neste trabalho.

4

Cálculo da dimensão de fronteiras fractais

Neste capítulo, apresentamos, primeiro, os principais métodos que existem na literatura para se determinar a dimensão de uma fronteira fractal: o método da função incerteza [20] e o método da avaliação da função de saída [19]; em seguida, apresentamos o método da incerteza condicional, que é a contribuição original deste trabalho. Por último, utilizamos os três métodos para calcular as fronteiras fractais de alguns dos sistemas apresentados nos capítulos 2 e 3.

4.1 Método da função incerteza

O primeiro método que iremos estudar é o chamado *método da função incerteza*. Ele utiliza a função incerteza $f(\epsilon)$, definida na seção 3.3, e a lei de escala (3.11) para calcular a dimensão D de uma fronteira fractal.

Para entendermos como funciona esse método, consideremos um sistema dinâmico com dois atratores, A_1 e A_2 , e um ponto \mathbf{x}_0 no espaço de fases desse sistema. Primeiro, determinamos a que bacia de atração o ponto \mathbf{x}_0 pertence analisando o comportamento assintótico da órbita que se inicia nesse ponto. A ideia, agora, é perturbarmos o ponto \mathbf{x}_0 numa direção arbitrária $\hat{\mathbf{u}}$ e utilizarmos os pontos perturbados como novas condições iniciais, i.e., tomamos os pontos $\mathbf{x}_0 - \epsilon\hat{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{x}_0 + \epsilon\hat{\mathbf{u}}$ e calculamos a qual bacia de atração esses pontos pertencem, onde $\epsilon > 0$. A Figura 4.1 ilustra o método em um sistema bidimensional.

Caso algum dos pontos $\mathbf{x}_0 \pm \epsilon\hat{\mathbf{u}}$ pertença a uma bacia diferente da bacia de \mathbf{x}_0 , então existe, por definição, um ponto entre eles que pertence à fronteira. Dessa forma, \mathbf{x}_0 é um ponto ϵ -incerto.

Como ilustramos na Figura 4.1, podemos repetir esse procedimento para várias condições iniciais tomadas aleatoriamente. Com isso, definimos a razão:

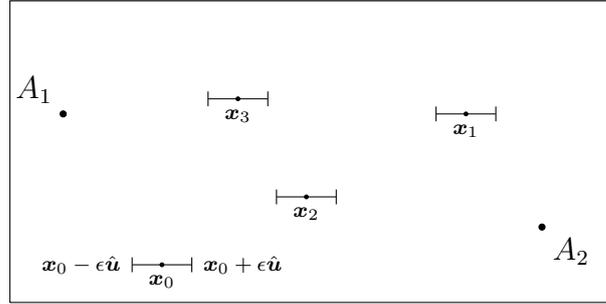


Figura 4.1: Ilustração do método da função incerteza: em um sistema dinâmico bidimensional com dois atratores, A_1 e A_2 , comparamos o estado final do sistema utilizando condições iniciais não-perturbadas com os das suas respectivas perturbações.

$$\bar{f}(\epsilon) = \frac{\text{Número de pontos testados que são } \epsilon\text{-incertos}}{\text{Número total de pontos testados}}. \quad (4.1)$$

Considerando que tomamos um número total de pontos testados grande o suficiente e que $\epsilon \ll 1$, podemos supor que [6]

$$\bar{f}(\epsilon) \approx K f(\epsilon), \quad (4.2)$$

onde $f(\epsilon)$ é a função incerteza, definida na seção 3.3 como a fração de condições iniciais ϵ -incertas do espaço de fases, e K é uma constante. Dessa forma, $\bar{f}(\epsilon)$ também segue a lei de escala (3.11), i.e.,

$$\bar{f}(\epsilon) \sim \epsilon^{N-D}, \quad (4.3)$$

para $\epsilon \ll 1$.

Sendo assim, se considerarmos que ϵ representa a incerteza do sistema, i.e., a precisão com a qual conseguimos medir um ponto no espaço de fases, obtemos com (4.3) uma relação que envolve uma grandeza mensurável, $\bar{f}(\epsilon)$, e a dimensão D da fronteira.

Agora, repetimos o processo apresentado para valores cada vez menores de ϵ , obtendo para cada ϵ um $\bar{f}(\epsilon)$ correspondente. No limite em que $\epsilon \rightarrow 0$, podemos reescrever a equação (4.3) como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \bar{f}(\epsilon)}{\ln \epsilon} = N - D = \alpha. \quad (4.4)$$

Em seguida, analisamos o gráfico de $\ln(\bar{f}(\epsilon))$ por $\ln(\epsilon)$ e calculamos a inclinação α da reta. Finalmente, utilizando a equação (4.4), obtemos o valor da dimensão D da fronteira entre as bacias de atração. Denominamos α o *expoente de incerteza*.

A limitação desse método se dá quando a fronteira possui baixa fractalidade, i.e., a dimensão fractal D é próxima de $N - 1$, onde N é a dimensão do espaço de fases. Nessa condição, a fronteira ocupa um volume pequeno no espaço de fases e, portanto, a maioria das condições iniciais tomadas aleatoriamente não será ϵ -incerta. Dessa forma,

precisamos de um maior número de pontos testados para determinarmos $\bar{f}(\epsilon)$ com uma margem estatística confiável. O método apresentado na próxima seção foi criado para tratar justamente desse problema.

4.2 Método da avaliação da função de saída

Como discutimos na seção anterior, o método da função incerteza é ineficiente para fronteiras de baixa fractalidade. Para evitar o problema de precisarmos tomar uma quantidade muito grande de pontos no espaço de fases, o *método da avaliação da função de saída* [19] concentra os cálculos em condições iniciais próximas à fronteira.

O método se baseia em *funções de saída* do sistema, que são funções que relacionam o valor de uma variável depois que o sistema atinge o estado final com a condição inicial do movimento. No caso do problema de espalhamento, por exemplo, a função de saída pode ser o ângulo de espalhamento $\theta(b)$ ou o tempo de escape $\tau(b)$.

O método se restringe a funções de saída cujos domínios são variedades unidimensionais que intersectam a fronteira do espaço de fases. Caso a fronteira seja fractal, a sua interseção com uma variedade unidimensional também o será, refletindo sua estrutura geométrica. Como consequência, a função de saída apresentará singularidades, de tal forma que a dimensão do conjunto formado pelas singularidades corresponderá à parte não inteira da dimensão da fronteira.

A fim de exemplificarmos a aplicação do método, vamos utilizar o problema do espalhamento caótico visto na seção 3.5 e tomar como função de saída o ângulo de espalhamento $\theta(b)$.

O nosso primeiro passo é calcular $\theta(b)$ com uma resolução ϵ . Poderíamos, a princípio, dividir a reta em intervalos de tamanho ϵ e calcular $\theta(b)$ para os valores de b em cada intervalo; nesse caso, porém, o número de órbitas do sistema que deveríamos calcular seria proporcional a $1/\epsilon$ e, para ϵ muito pequeno, esse número seria muito grande.

A ideia do método é dividir a reta utilizando intervalos de tamanho variável. Dessa forma, podemos focar nossa atenção em regiões da função onde precisamos de uma alta resolução. O tamanho Δ desses intervalos depende do quão acentuada é a variação de $\theta(b)$ nessa região, i.e., tomamos o tamanho do intervalo como sendo proporcional a $1/|d\theta/db|$, sendo o menor tamanho possível dado por ϵ .

Como referência, tomemos a Figura 3.12b: para valores de b longe da fronteira, $\theta(b)$ é suave e, portanto, podemos tomar um intervalo de tamanho maior; para valores de b próximos à fronteira, há uma variação muito grande nos valores de $\theta(b)$ e, portanto, tomamos um intervalo de tamanho próximo ou igual a ϵ . Com essa definição de grade, a qual divide a reta em intervalos de tamanho variado, a maior parte dos cálculos ocorre em valores de b próximos à fronteira.

Vamos, agora, definir formalmente o tamanho Δ_j dos passos que formam os intervalos

na reta. Para isso, tomamos um conjunto $\{b_0, b_1, \dots, b_j, \dots, b_k\}$ tal que $b_j < b_{j+1}$, o qual pertence ao intervalo (b_{in}, b_{fin}) . Aqui, escolhemos o intervalo (b_{in}, b_{fin}) de modo a englobar as regiões onde existem singularidades. Os primeiros termos do conjunto são dados por $b_0 = b_{in}$ e $b_1 = b_0 + \epsilon$.

Para os demais parâmetros de impacto temos $b_{j+1} = b_j + \Delta_j$, onde definimos o tamanho do passo Δ_j da seguinte maneira

$$\Delta_j = \begin{cases} \epsilon & , \text{ se } \xi_j < \epsilon \\ \Delta_{max} & , \text{ se } \xi_j > \Delta_{max} \\ \xi_j & , \text{ se } \epsilon \leq \xi_j \leq \Delta_{max} \end{cases}, \quad (4.5)$$

com

$$\xi_j = \min \left(\frac{\delta}{\left| \frac{d\theta(b_j)}{db} \right|}, \alpha \Delta_{j-1} \right),$$

onde Δ_{max} , δ e α são parâmetros constantes.

A ideia principal do método é definir o passo Δ_j de forma que $\theta_j - \theta_{j-1} \approx \delta$ numa aproximação de 1ª ordem, i.e., a variação de θ se mantém aproximadamente constante para os passos tomados. Aqui, definimos a notação $\theta(b_j) \equiv \theta_j$.

Utilizando a aproximação de Euler, temos

$$\theta_j - \theta_{j-1} \approx \left| \frac{d\theta(b_j)}{db} \right| \Delta_j.$$

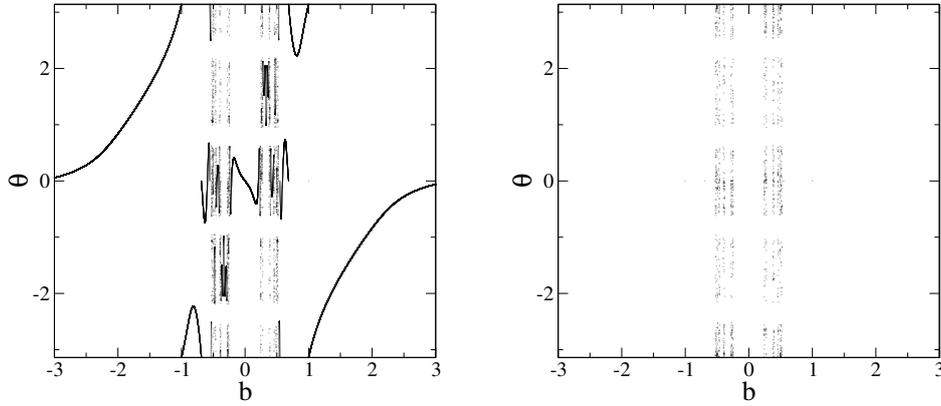
Portanto, para que a variação de θ se mantenha aproximadamente constante e igual a δ , devemos ter

$$\Delta_j \approx \frac{\delta}{\left| \frac{d\theta(b_j)}{db} \right|}, \quad (4.6)$$

justificando o primeiro termo de ξ_j . O segundo termo de ξ_j tem por finalidade impor um limite para que os passos não cresçam muito do atual para o próximo: $\Delta_j / \Delta_{j-1} \leq \alpha$, com $\alpha > 1$. Dessa forma, calculamos $b_2 = b_1 + \Delta_1$, $b_3 = b_2 + \Delta_2$ e assim por diante.

Tendo calculado $\theta(b)$ para todo $b \in (b_{in}, b_{fin})$, resta-nos selecionar os pontos que formam o conjunto fractal de singularidades. Para isso, tomamos b , numa resolução ϵ , em regiões onde a função $\theta(b)$ oscila em escalas menores que ϵ . Esses pontos b_j são tais que $|\theta_j - \theta_{j-1}| > \beta$, sendo $\beta > \delta$ um parâmetro do método.

A Figura 4.2 apresenta o ângulo de saída do espalhamento caótico em função do parâmetro de impacto antes (Figura 4.2a) e depois (Figura 4.2b) da aplicação do método. Para essa simulação, utilizamos o potencial (3.18) e condições iniciais $x_0 = 9$, $\theta_0 = \pi$ e $-3 \leq y_0 = b \leq 3$; além disso, utilizamos os parâmetros $\epsilon = 10^{-5}$, $\alpha = 2$, $\beta = 0,5$, $\delta = 0,03$, $\Delta_{max} = 10^{-3}$ e $E = 0,035 < E_{max}$.



(a) Antes da aplicação do método.

(b) Após a aplicação do método.

Figura 4.2: Ângulo de saída em função do parâmetro de espalhamento (a) antes e (b) depois da aplicação do método da avaliação da função de saída utilizando o potencial (3.18).

Agora que possuímos o conjunto de singularidades b que formam a estrutura fractal do problema, basta calcularmos a dimensão desse conjunto e, conseqüentemente, da fronteira fractal, utilizando o método da contagem de caixas ou algum outro método.

Como o método da avaliação da função de saída se concentra em pontos na vizinhança do conjunto de singularidades em b , para uma resolução alta o suficiente, o número de pontos N_{afs} avaliados pelo método é proporcional ao número de caixas $\tilde{N}(\epsilon)$ necessário para cobrir o conjunto fractal. Dessa forma, pela equação (2.11), temos

$$N_{afs} \sim \epsilon^{-D}. \quad (4.7)$$

No método da função incerteza, o número de órbitas analisadas N_{inc} necessário para que o cálculo da dimensão da fronteira seja confiável é tal que

$$N_{inc} \sim \epsilon^{D-1}, \quad (4.8)$$

onde estamos considerando que o espaço é unidimensional. Comparando os dois métodos, temos

$$\frac{N_{afs}}{N_{inc}} \sim \epsilon^{1-2D}. \quad (4.9)$$

As equações (4.7) e (4.8) são válidas para $\epsilon \ll 1$. Pela equação (4.9) podemos ver que, para $D < 0,5$ (baixa fractalidade), o número de órbitas avaliadas pelo método da avaliação da função de saída é menor do que o método da função incerteza, sendo mais eficiente nesse caso, como era a proposta do método inicialmente; por outro lado, para

$D > 0,5$ (alta fractalidade), o método mais eficiente é o método da função incerteza.

Vale observarmos que, apesar de termos mostrado que o método da avaliação da função de saída complementa o método da função incerteza, ele não é válido para sistemas de tempo discreto.

4.3 Método da incerteza condicional

Nesta seção, apresentamos um novo método para calcular a dimensão de fronteiras fractais, o qual propomos nesse trabalho: *o método da incerteza condicional*.

A ideia do método começa com a seguinte pergunta: dado que um ponto é ϵ -incerto, qual é a probabilidade dele ser ϵ' -incerto? Em outras palavras, conhecendo $P(\epsilon)$ e $P(\epsilon')$, quanto vale $P(\epsilon'|\epsilon)$?

Pela teoria de probabilidade, sabemos que, se $\epsilon' < \epsilon$, vale

$$P(\epsilon'|\epsilon) = \frac{P(\epsilon')}{P(\epsilon)}. \quad (4.10)$$

Consideremos, então, um sistema dinâmico que possui uma fronteira em seu espaço de fases. A probabilidade de tomarmos aleatoriamente um ponto ϵ -incerto nesse sistema é dada pela função incerteza do sistema, i.e.,

$$P(\epsilon) = f(\epsilon). \quad (4.11)$$

Sendo assim, podemos afirmar que a probabilidade de um ponto do espaço de fases ser ϵ -incerto escala com ϵ da mesma forma que a função incerteza. Portanto, de acordo com a equação (3.11), temos

$$P(\epsilon) \sim \epsilon^{N-D}, \quad (4.12)$$

para $\epsilon \ll 1$.

Como $\epsilon' < \epsilon$, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $\epsilon' = \lambda\epsilon$. Podemos, então, reescrever a nossa pergunta inicial da seguinte forma: dado que um ponto está ϵ distante da fronteira, qual é a probabilidade dele estar na verdade $\lambda\epsilon < \epsilon$ distante da fronteira? Ou seja, conhecendo $P(\epsilon)$ e $P(\lambda\epsilon)$, quanto vale $P(\lambda\epsilon|\epsilon)$?

Para responder essa pergunta, podemos utilizar a relação (4.10) e a lei de escala (4.12) e obtermos

$$P(\lambda\epsilon|\epsilon) \sim \lambda^{N-D}, \quad (4.13)$$

para $\epsilon \ll 1$.

Chegamos, então, a uma conclusão notável: a probabilidade de um ponto que sabemos ser ϵ -incerto estar na verdade mais próximo da fronteira do que sabíamos, i.e., ser $\lambda\epsilon$ -

incerto, escala apenas com o próprio λ . Obtemos, assim, uma lei de escala para os pontos ϵ -incertos que não depende diretamente do erro ϵ (desde que ϵ seja suficientemente pequeno) e que envolve a dimensão D da fronteira.

Vale salientar que, quando dizemos que um ponto x é ϵ -incerto, estamos nos referindo à distância desse ponto a um ponto específico da fronteira e, dada a possível estrutura fractal da fronteira, podem existir outros pontos da fronteira que estão mais perto de x . Sendo assim, se dissermos que um ponto está mais próximo da fronteira do que sabíamos a priori significa que existe um outro ponto da fronteira mais próximo a ele.

O nosso próximo passo consiste em tomarmos vários pontos ϵ -incertos e computar quantos desses pontos são, na verdade, $\lambda\epsilon$ -incertos. A relação dos pontos computados aproxima então $P(\lambda\epsilon|\epsilon)$. Podemos fazer isso de um modo eficiente da seguinte forma: vamos considerar que o nosso sistema é unidimensional e possui dois atratores: A_1 e A_2 . A Figura 4.3 ilustra um algoritmo que nos possibilita calcular D utilizando a equação (4.13) para esse sistema. Primeiro, tomamos um ponto y que pertence à fronteira do sistema. Em seguida, tomamos $\epsilon_0 > 0$, $x_0^+ = y + \epsilon_0$ que, por definição, é um ponto ϵ_0 -incerto e $\lambda < 1$, de forma que $\lambda\epsilon_0 < \epsilon_0$. A ideia agora é nos aproximarmos do ponto y partindo de x_0^+ . No primeiro passo, caminhamos $\lambda\epsilon_0$ na direção de y e chegamos ao ponto $x_1^+ = x_0^+ - \lambda\epsilon_0$. Como x_1^+ se encontra a $(1 - \lambda)\epsilon_0 \equiv \epsilon_1$ de distância de y , ele é um ponto ϵ_1 -incerto. No passo seguinte, caminhamos $\lambda\epsilon_1$ e chegamos a x_2^+ , um ponto que se encontra a $(1 - \lambda)^2\epsilon_0 \equiv \epsilon_2$ de distância de y e é, portanto, ϵ_2 -incerto. Tomando n passos, chegamos ao ponto x_n^+ que é ϵ_n -incerto, onde $\epsilon_n = (1 - \lambda)^n\epsilon_0$. Podemos observar que x_n^+ converge para y com $n \rightarrow \infty$ pois $\lambda \in (0, 1)$; dessa forma, tomamos o último número da sequência x_n^+ nos baseando na precisão com a qual desejamos nos aproximar de y . Analogamente, podemos utilizar o mesmo procedimento e nos aproximarmos de y a partir de $x_0^- = y - \epsilon_0$.

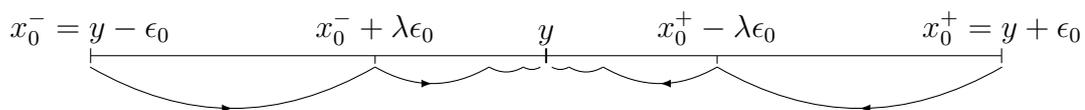


Figura 4.3: Algoritmo para o cálculo da dimensão D utilizando o método da incerteza condicional.

Para o cálculo do ponto da fronteira y , utilizamos o *método da bissecção*. Primeiro, testamos pares de pontos aleatórios no espaço de fases até encontrarmos dois pontos que estão a uma distância Δ um do outro e que pertencem a bacias de atração diferentes. Sendo assim, existe um ponto da fronteira entre eles. Em seguida, nós tomamos o ponto médio entre o par de pontos e calculamos a que bacia de atração esse ponto médio pertence. Com isso, conseguimos determinar em qual metade da distância Δ está o ponto da fronteira. O próximo passo, é tomar o ponto médio do novo subintervalo, calcular a que bacia de atração esse ponto pertence e assim sucessivamente, até obtermos y com uma

precisão adequada.

Agora, vamos assumir que o ponto x_0^+ pertence à bacia de A_1 . Caso o próximo ponto, x_1^+ , pertença à bacia de A_2 , significa que existe um ponto da fronteira entre os pontos x_0^+ e x_1^+ . Nesse caso, o ponto x_0^+ é, na verdade, um ponto $\lambda\epsilon_0$ -incerto, onde $\lambda\epsilon_0$ é a distância entre x_0^+ e x_1^+ .

No caso geral, a distância entre os pontos x_n e x_{n+1} é dada por $\lambda\epsilon_n$. Dessa forma, quando esses pontos pertencem a bacias diferentes, temos que o ponto x_n que é ϵ_n -incerto é, na verdade, $\lambda\epsilon_n$ -incerto, pois existe um ponto da fronteira entre x_n e x_{n+1} . Sendo assim, podemos definir a probabilidade de um ponto ϵ -incerto ser $\lambda\epsilon$ -incerto, $P(\lambda\epsilon|\epsilon)$, como sendo proporcional à fração dos passos dados onde houve uma troca da bacia de atração. Em seguida, utilizando os mesmos pontos y , x_0^+ e x_0^- , repetimos esse processo um número suficiente de vezes e obtemos $P(\lambda\epsilon|\epsilon)$ para diferentes valores de λ .

Tendo calculado numericamente todas as grandezas envolvidas, resta-nos agora calcular D . Da lei de escala dada pela equação (4.13), temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln P(\lambda\epsilon|\epsilon)}{\ln \lambda} = N - D = \alpha. \quad (4.14)$$

Dessa forma, podemos analisar o gráfico de $\ln P(\lambda\epsilon|\epsilon)$ em função de $\ln \lambda$ e calcular a inclinação α da curva. Por último, utilizando a equação (4.14), obtemos a dimensão D da fronteira fractal do nosso sistema.

4.4 Resultados numéricos

Nesta seção, fazemos algumas simulações e utilizamos os métodos apresentados nas seções 4.1, 4.2 e 4.3 para o cálculo da dimensão de fronteiras fractais. O nosso principal objetivo é validar o método da incerteza condicional como um método capaz de calcular a dimensão de fronteiras fractais. Em seguida, estabelecemos o desempenho desse método frente a aplicação aos problemas de espalhamento. Por último, fazemos uma comparação mais detalhada entre o método da incerteza condicional e o método da incerteza utilizando os mapas da tenda dupla simétrico e assimétrico, nos quais podemos obter as dimensões das fronteiras analiticamente ou por meio de uma equação transcendental. Para facilitar a notação, iremos utilizar, nesta seção, $\bar{f}(\epsilon) \equiv f(\epsilon)$, $P(\lambda\epsilon|\epsilon) \equiv P(\lambda)$ e $\tilde{N}(\epsilon) \equiv N(\epsilon)$.

Na seção 3.2, apresentamos o mapa da tenda dupla simétrico e calculamos a dimensão D da fronteira fractal analiticamente para uma inclinação $a = 5$ e obtivemos $D = \frac{\ln 3}{\ln 5} \approx 0,682$. Podemos, agora, seguir o mesmo raciocínio da seção 3.2 para obter D analiticamente para uma inclinação $a = 20$: após n iteradas do mapa da tenda dupla simétrico, existem 3^n intervalos que continuam no intervalo unitário, cada um com tamanho $(1/20)^n$. Dessa forma, pela definição (2.8) da dimensão da contagem de caixas, temos

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 20} \approx 0,367.$$

Vamos, então, tomar os valores analíticos calculados para os mapas da tenda dupla simétricos com inclinações 5 e 20 e compará-los aos valores obtidos numericamente pelo método da incerteza condicional. As Figuras 4.4a e 4.4b apresentam a relação obtida entre $P(\lambda)$ e λ para os casos $a = 5$ e $a = 20$, respectivamente.

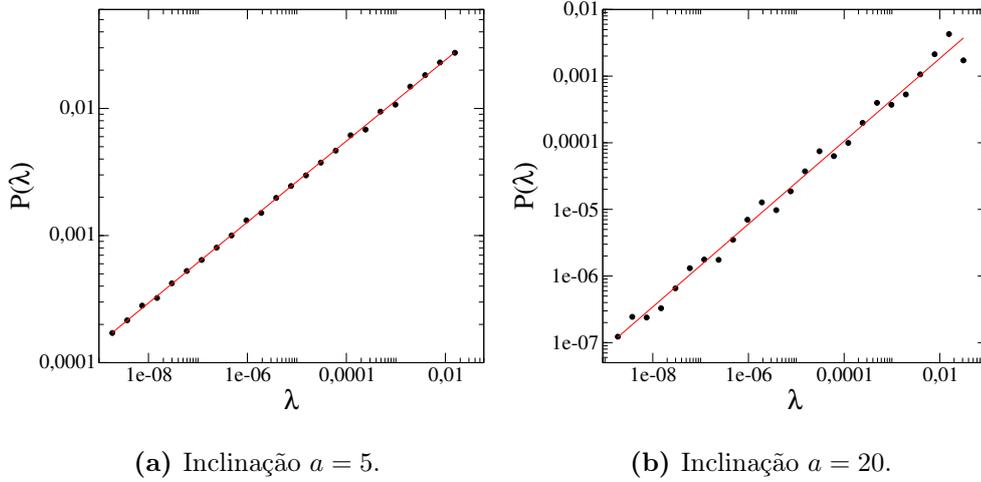


Figura 4.4: Simulações numéricas utilizando o método da incerteza condicional para o cálculo da dimensão D da fronteira fractal do mapa da tenda dupla simétrico com inclinação a .

Os resultados obtidos pelas simulações foram $D = 0,681 \pm 0,002$, para o caso com inclinação $a = 5$ (Figura 4.4a) e $D = 0,37 \pm 0,01$, para o caso com inclinação $a = 20$ (Figura 4.4b). Por comparação direta com os valores analíticos da dimensão para cada caso, podemos observar que o método da incerteza condicional funciona.

Como o método da incerteza condicional segue a mesma lei de escala que o método da incerteza, equações (4.3) e (4.13), esperamos que ele seja mais preciso para o cálculo de dimensões tais que $D > 0,5$. Ao tomarmos as inclinações 5 e 20 para o mapa da tenda dupla simétrico, pudemos verificar esse fato.

Vamos agora utilizar os métodos da incerteza, avaliação da função de saída e incerteza condicional para calcular a dimensão da fronteira fractal no problema de espalhamento caótico. Primeiro, utilizamos o potencial de 4 picos simétricos dado pela equação (3.18). Os parâmetros utilizados para o problema foram os mesmos que os discutidos na seção 3.5, a saber, tomamos como condições iniciais do sistema $x_0 = 9$, $\theta_0 = \pi$ e $-3 \leq y_0 \leq 3$; e a energia de tal forma que $E/E_{max} = 0,260$.

A Figura 4.5 mostra as relações obtidas numericamente com cada um dos três métodos para o problema de espalhamento caótico utilizando o potencial de 4 picos simétrico,

equação (3.18). As relações entre $f(\epsilon)$ e ϵ e entre $P(\lambda)$ e λ são apresentadas nas Figuras 4.5a e 4.5c, respectivamente. O método da avaliação da função de saída utiliza diretamente a definição da dimensão da contagem de caixas, eq. (2.8), para o cálculo da dimensão. Dessa forma, a relação apresentada na Figura 4.5b é entre $N(\epsilon)$ e $1/\epsilon$.

Os resultados numéricos obtidos foram: $D = 0,63 \pm 0,01$, para o método da incerteza; $D = 0,643 \pm 0,006$, para o método da avaliação da função de saída; e $D = 0,66 \pm 0,01$, para o método da incerteza condicional. Vale observar que todos os erros apresentados nesta seção representam o erro da regressão não-linear.

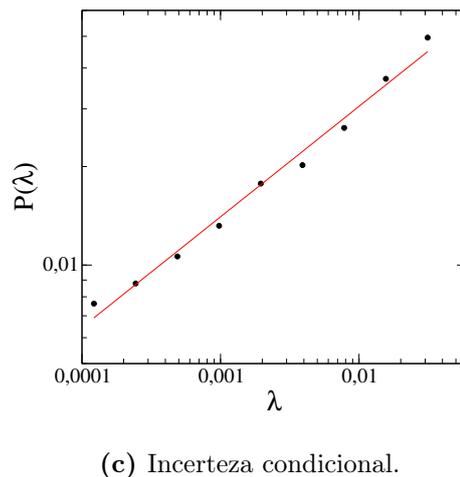
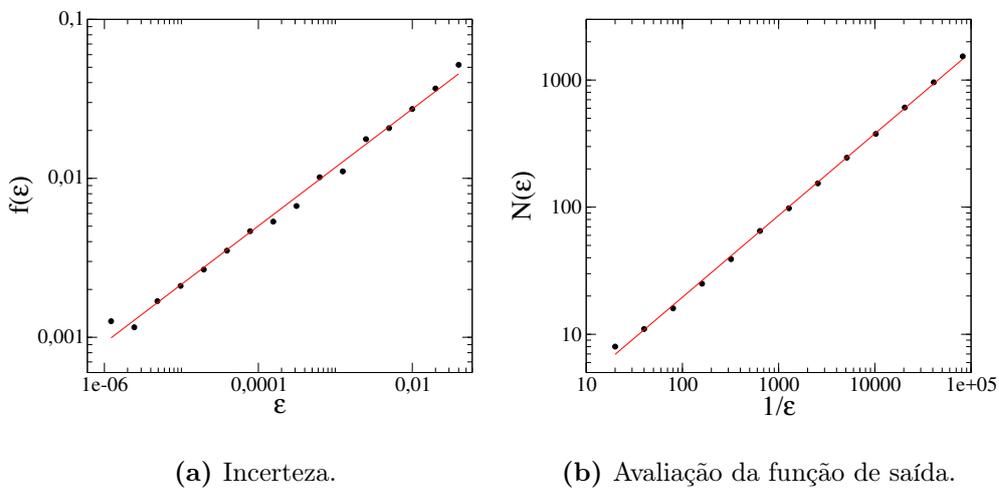
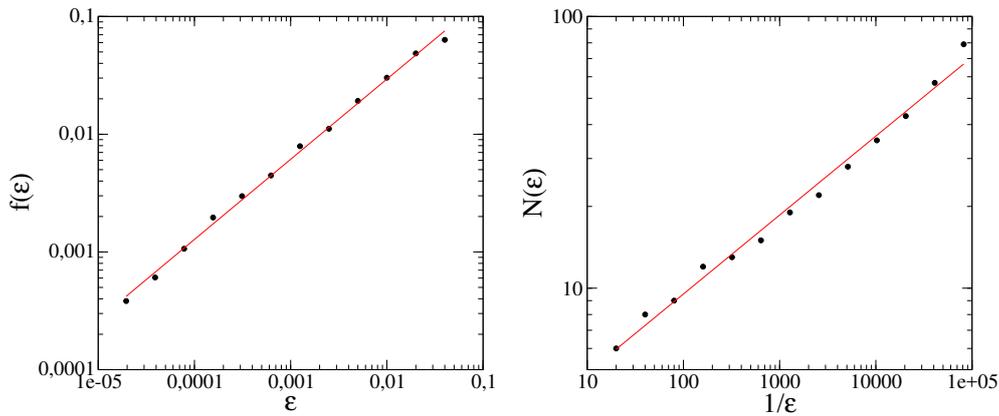


Figura 4.5: Simulações numéricas utilizando os três métodos para o cálculo da dimensão D da fronteira fractal do problema de espalhamento caótico utilizando o potencial de 4 picos, eq. (3.18).

A Figura 4.6 mostra as relações obtidas numericamente com cada um dos três métodos para o problema de espalhamento caótico utilizando o potencial de 3 picos assimétrico,

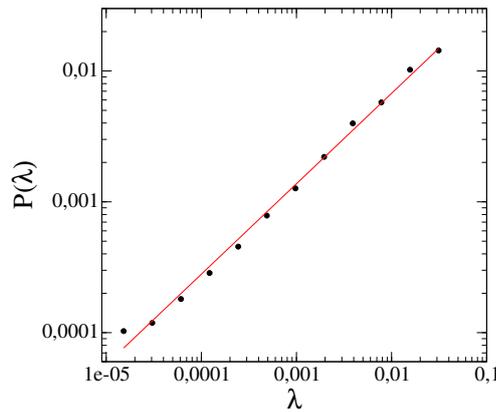
equação (3.19). Novamente, os parâmetros utilizados para o problema foram os mesmos que os discutidos na seção 3.5, a saber, $x_1 = -x_2 = 4$, $x_3 = 0$, $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $V_1 = V_2 = 10$, $V_3 = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,75$, $\sigma_3 = 0,325$ e $E = 0,95 < E_{3,max} = 1$. Tomamos como condições iniciais do sistema $y_0 = -9$, $\theta_0 = \pi/2$ e $0 \leq x_0 \leq 4$.

Os resultados obtidos foram: $D = 0,32 \pm 0,01$, para o método da incerteza; $D = 0,291 \pm 0,009$, para o método da avaliação da função de saída; e $D = 0,31 \pm 0,02$, para o método da incerteza condicional.



(a) Incerteza.

(b) Avaliação da função de saída.



(c) Incerteza condicional.

Figura 4.6: Simulações numéricas utilizando os três métodos para o cálculo da dimensão D da fronteira fractal do problema de espalhamento caótico utilizando o potencial de 3 picos, eq. (3.19).

Como não podemos calcular analiticamente a dimensão da fronteira fractal do problema de espalhamento caótico, não podemos determinar qual dos métodos melhor aproxima o valor real. Porém, podemos observar, pelas dimensões obtidas numericamente,

que os três métodos coincidem em uma casa decimal dentro da margem de erro.

A concordância entre os valores de dimensão calculados pelos métodos poderia ser melhorada se utilizássemos precisões mais altas. Contudo, devido ao fato desse problema ser de tempo contínuo, o custo computacional dessas simulações é muito maior do que no caso de mapas. Ressaltamos, porém, que o método da avaliação da função de saída só é válido para sistemas de tempo contínuo.

Agora, vamos comparar o desempenho do método da incerteza com o método da incerteza condicional aplicando-os ao mapa da tenda dupla simétrico e assimétrico. Aqui, temos a vantagem de podermos calcular analiticamente o valor das dimensões e utilizá-las como base para as comparações. Para isso, definimos o *erro relativo* como

$$E_{rel} = \frac{|D_{analítica} - D_{calculada}|}{D_{analítica}}, \quad (4.15)$$

onde $D_{calculada}$ é o valor da dimensão calculada utilizando cada um dos métodos.

Primeiro, utilizamos os mapas da tenda dupla simétricos com inclinações 5 e 20, os quais possuem fronteiras fractais cujas dimensões já foram calculadas nessa seção e valem $D = 0,682$ e $D = 0,367$, respectivamente. As Figuras 4.7 e 4.8 apresentam as simulações feitas para cada um dos casos.

As simulações foram feitas da seguinte maneira: para o método da incerteza, tomamos aleatoriamente pares de pontos no espaço de fases do sistema até encontrarmos 100 pares distintos formados por pontos que pertencem a bacias diferentes. Realizamos esse procedimento para valores de ϵ a partir de 5×10^{-2} até um valor mínimo, o qual ajustamos de acordo com o erro relativo; para o método da incerteza condicional, tomamos um ponto ϵ -incerto e nos aproximamos do ponto da fronteira até uma distância δ pré-definida, a qual foi usada como um “ajuste fino” para o cálculo da dimensão. Realizamos esse procedimento para valores de λ a partir de 5×10^{-2} até um valor mínimo, o qual, novamente, ajustamos de acordo com o erro relativo.

A fim de comparação, definimos como um valor aceitável a dimensão calculada numericamente que possuísse um erro relativo igual ou inferior a 1% do valor analítico, para o caso de inclinação 5, e igual ou inferior a 3%, para o caso de inclinação 20. Tomamos essa diferença entre os limites no erro relativo para cada caso devido ao menor desempenho de ambos os métodos na situação em que $D < 0,5$.

Medimos o desempenho computacional de cada método baseados na máxima precisão necessária para o método calcular um valor aceitável da dimensão e na velocidade com que o algoritmo do método fez o cálculo. Todos os resultados, em especial, o tempo de execução dos algoritmos, foram calculados na mesma máquina.

Utilizando o método da incerteza, necessitamos aumentar a precisão até $\epsilon = 10^{-6}$ para o mapa com inclinação 5 e $\epsilon = 10^{-7}$, para o mapa com inclinação 20. Em contrapartida, utilizando o método da incerteza condicional, aumentamos a precisão até $\lambda = 10^{-7}$, para o

mapa com inclinação 5 e $\lambda = 10^{-8}$, para o mapa com inclinação 20. As simulações são apresentadas nas Figuras 4.7a, 4.8a, 4.7b e 4.8b, respectivamente.

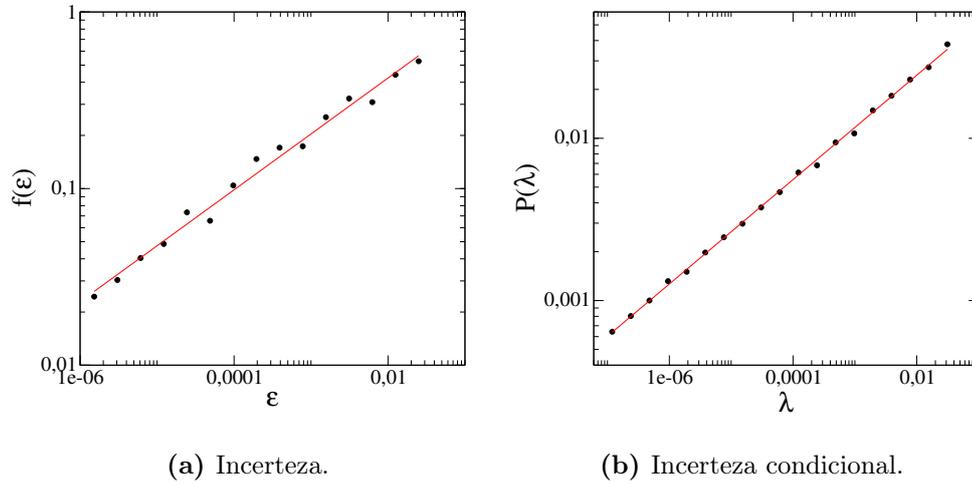


Figura 4.7: Simulações numéricas utilizando os métodos da incerteza e da incerteza condicional para o cálculo da dimensão D da fronteira fractal do mapa da tenda dupla simétrico com inclinação $a = 5$.

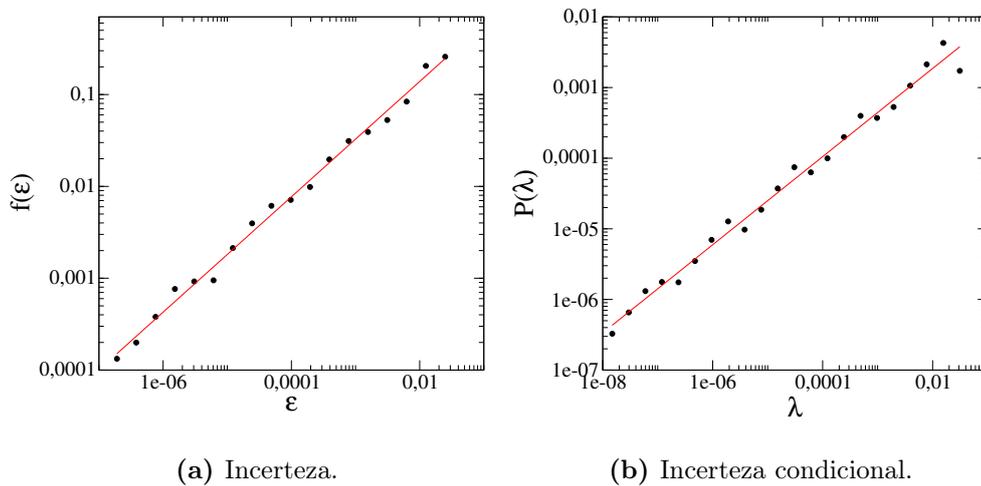


Figura 4.8: Simulações numéricas utilizando os métodos da incerteza e da incerteza condicional para o cálculo da dimensão D da fronteira fractal do mapa da tenda dupla simétrico com inclinação $a = 20$.

Os tempos t de simulação foram: para o método da incerteza, $t = 0,551s$ com $a = 2$ e $t = 5,46s$ com $a = 20$; para o método da incerteza condicional, $t = 0,940s$ com $a = 2$ e $t = 36,3s$ com $a = 20$.

O resumo dos resultados encontra-se na Tabela 4.1. Em ambos os casos e em ambos os critérios, o método da incerteza condicional obteve um desempenho próximo ao do método da incerteza.

Agora, vamos utilizar os mesmos critérios para comparar o desempenho dos métodos da incerteza e da incerteza condicional aplicados ao mapa da tenda dupla assimétrico. Para essa versão do mapa, eq. (3.5), tomamos como inclinações $a = 2$, $b = -0,6$ e $c = 1$, as quais, sob a aplicação do mapa, resultam em intervalos de tamanho $\lambda_a = 0,5$, $\lambda_b = 1,5$ e $\lambda_c = 1,0$. Dessa forma, utilizando a equação (3.6), obtemos $D \approx 0,467$. Aqui, estamos em um regime onde D é menor mas aproximadamente igual a $0,5$. Sendo assim, consideramos aceitável um erro relativo igual ou inferior a 2%.

Utilizando o método da incerteza, necessitamos aumentar a precisão até $\epsilon = 10^{-5}$, sendo o tempo de simulação $t = 0,464s$. Em contrapartida, utilizando o método da incerteza condicional, aumentamos a precisão até $\lambda = 10^{-6}$, sendo o tempo de simulação $t = 3,22s$. As simulações são apresentadas nas Figuras 4.9a e 4.9b, respectivamente.

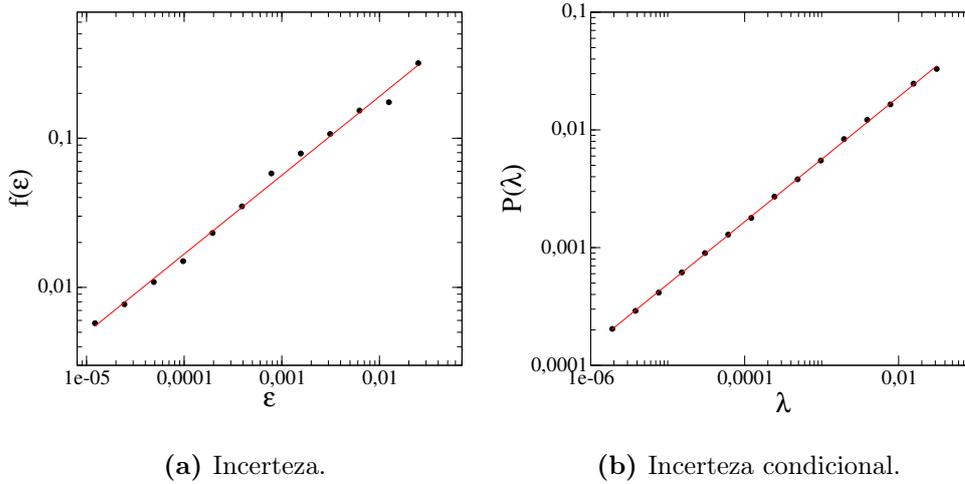


Figura 4.9: Simulações numéricas utilizando os métodos da incerteza e da incerteza condicional para o cálculo da dimensão D da fronteira fractal do mapa da tenda dupla assimétrico com inclinações $a = 2$, $b = -0,6$ e $c = 1$.

Nas simulações, a precisão máxima necessária para alcançar o erro relativo desejado foi determinada em passos de uma ordem de grandeza, i.e., no caso do método da incerteza aplicado ao mapa da tenda dupla simétrico com inclinação $a = 5$, por exemplo, determinamos que a máxima precisão necessária para obter um erro relativo menor que 1% é de $\epsilon = 10^{-6}$. Isso significa que a simulação foi de $\epsilon = 5 \times 10^{-2}$ até $\epsilon = 10^{-6}$. Para chegar no valor mínimo de ϵ , testamos primeiro os valores $\epsilon = 10^{-3}$, 10^{-4} e 10^{-5} , dessa forma, tomando uma ordem de grandeza como passo. Esse procedimento foi utilizado em todas as simulações.

O resumo dos resultados utilizando-se o mapa da tenda assimétrico encontra-se, também, na Tabela 4.1. Novamente, em ambos os critérios, o método da incerteza condicional obteve um desempenho próximo ao método da incerteza.

Tabela 4.1: Resultados das simulações utilizados para comparar os casos da incerteza e da incerteza condicional.

| Mapa da tenda dupla | Incerteza | | Incerteza condicional | |
|-----------------------------|----------------------|-----------|-----------------------|-----------|
| | Precisão | Tempo (s) | Precisão | Tempo (s) |
| Simétrico com inclinação 5 | $\epsilon = 10^{-6}$ | 0,551 | $\lambda = 10^{-7}$ | 0,940 |
| Simétrico com inclinação 20 | $\epsilon = 10^{-7}$ | 5,46 | $\lambda = 10^{-8}$ | 36,3 |
| Assimétrico | $\epsilon = 10^{-5}$ | 0,464 | $\lambda = 10^{-6}$ | 3,22 |

Computacionalmente, o método da incerteza condicional não necessita utilizar um gerador de números aleatórios, o que pode ser uma vantagem em algumas linguagens de programação. Em contrapartida, devemos escrever uma rotina em seu algoritmo que calcule um ponto da fronteira com uma precisão adequada.

Por fim, é interessante destacarmos que o método da incerteza condicional apresenta um caráter local pois os cálculos envolvidos se concentram em um único ponto da fronteira.

5

Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, apresentamos os conceitos fundamentais de sistemas dinâmicos e geometria fractal, a partir dos quais pudemos definir as fronteiras fractais entre bacias de atração. Mostramos que sistemas que possuem fronteiras fractais apresentam sensibilidade do estado final, tornando o conhecimento da dimensão da fronteira e, conseqüentemente, de métodos capazes de calcular essa dimensão, algo necessário para compreender o aspecto dinâmico desses sistemas.

Introduzimos o método da incerteza condicional e mostramos que esse método é válido como uma alternativa para o cálculo da dimensão de fronteiras fractais. Além disso, diferentemente do método da avaliação da função de saída, mostramos que o método da incerteza condicional pode ser utilizado tanto em sistemas de tempo contínuo, quanto em sistemas de tempo discreto.

Em termos de comparação, o método aqui apresentado obteve um desempenho próximo ao do método da função incerteza. Esse resultado já era esperado teoricamente, devido ao fato dos métodos se basearem na mesma lei de escala. Dessa forma, a principal diferença entre os métodos da incerteza e da incerteza condicional, do modo como foram utilizados neste trabalho, é a implementação computacional.

Como perspectiva deste trabalho, pretendemos investigar a existência de sistemas dinâmicos que possuem fronteiras com duas ou mais componentes disjuntas de dimensões distintas. Nesse caso, o método que introduzimos nesta dissertação possui a clara vantagem de ser um método local, permitindo o cálculo das diferentes dimensões. Em contraste, um método global mede apenas a maior dimensão.

Apêndice A

Tópicos extras em dinâmica e geometria

Este apêndice visa a apresentar brevemente alguns tópicos de dinâmica e geometria com o intuito de conectar esses dois assuntos de uma maneira mais direta. Primeiro, desenvolvemos a ideia de expoentes de Lyapunov, os quais são usados como uma caracterização de fenômenos caóticos. Em seguida, estendemos a definição de dimensão, de modo a englobar a dimensão de contagem de caixas num contexto mais geral. Por último, apresentamos uma conjectura que conecta os expoentes de Lyapunov de um sistema, que representam seu comportamento dinâmico, com a dimensão D_1 do espectro generalizado, a qual comporta a informação dada pela geometria do sistema.

Para simplificar, focamos as análises e resultados desse apêndice em mapas; porém, os conceitos dinâmicos aqui apresentados podem ser analogamente definidos para sistemas de tempo contínuo. As principais referências desse apêndice são [7] e [8].

A.1 Expoentes de Lyapunov

Como discutimos na seção 2.6, a derivada de um mapa M influencia fortemente sua estabilidade ao redor de um ponto fixo x_p . Para o caso de um mapa unidimensional, por exemplo, $f'(x_p) = c > 1$ significa que as órbitas de cada ponto x próximo a x_p se afastam de x_p em média c vezes a cada iterada.

No caso de um ponto periódico p de período k , temos que a derivada de ordem k do mapa, em qualquer ponto da órbita periódica, será igual ao produto das derivadas do mapa em todos os pontos da órbita devido à regra da cadeia, i.e., (equação (2.41)):

$$DM^k(p_r) = DM(p_k)DM(p_{k-1}) \cdots DM(p_1),$$

onde, caso o produto resulte num valor $c > 1$, temos que todos os pontos de uma vizinhança dessa órbita periódica se afastam dela em média $c^{1/k}$ a cada iterada.

Os números e expoentes de Lyapunov visam generalizar o conceito da taxa de separação entre órbitas e incluem os casos de órbitas não periódicas.

Tomemos um mapa N -dimensional \mathbf{M} , \mathbf{x}_0 uma condição inicial e \mathbf{x}_n a n -ésima iterada de uma órbita que se inicia em \mathbf{x}_0 . Então, definimos o *número de Lyapunov* como

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (|\mathbf{DM}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_0|)^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (|\mathbf{DM}(\mathbf{x}_0)| |\mathbf{DM}(\mathbf{x}_1)| \cdots |\mathbf{DM}(\mathbf{x}_n)| \cdot |\mathbf{u}_0|)^{1/n}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

caso esse limite exista. Definimos, também, o *expoente de Lyapunov* como

$$h(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \ln[L(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\mathbf{DM}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_0|, \quad (\text{A.2})$$

caso esse limite exista. Em ambas as definições, \mathbf{u}_0 nos fornece a direção a ser analisada.

Para um mapa N -dimensional, existem no máximo N expoentes de Lyapunov distintos para um dado \mathbf{x}_0 . O expoente efetivo da dinâmica depende da direção \mathbf{u}_0 tomada. Como regra geral, ordenamos os expoentes do maior para o menor:

$$h_1(\mathbf{x}_0) \geq h_2(\mathbf{x}_0) \geq \cdots \geq h_N(\mathbf{x}_0). \quad (\text{A.3})$$

Pela nossa definição de caos apresentada na seção 2.3, dizemos que uma órbita é caótica caso seja limitada, não seja assintoticamente periódica e apresente sensibilidade a condições iniciais [8]. Alguns autores, porém, definem uma órbita caótica como sendo limitada, não assintoticamente periódica e que possui um número de Lyapunov maior do que 1 ou, equivalentemente, um expoente de Lyapunov positivo [7].

A.2 Espectro de dimensões generalizadas

Na seção 2.2, definimos o método da contagem de caixas para calcular a dimensão de um conjunto. Em particular, podemos utilizar tal definição para calcular a dimensão de um atrator caótico. Fazendo isso, utilizamos uma grade com caixas de lado ϵ para cobrir o atrator e tomamos o limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Quando calculamos a dimensão dessa forma, estamos implicitamente assumindo que todas as caixas tem a mesma importância para a dinâmica do atrator, i.e., todas as caixas são visitadas com a mesma frequência por uma órbita no atrator. Porém, é comum em atratores caóticos que uma órbita nesse atrator passe mais tempo em algumas caixas do que em outras. Em particular, no limite $\epsilon \rightarrow 0$, uma órbita típica irá passar a maior parte do tempo numa pequena fração das caixas necessárias para cobrir o atrator. Para levar em consideração esse fato, podemos definir a medida natural de uma caixa.

Vamos tomar um atrator caótico, cobrí-lo com uma grade e medir a frequência com que

as órbitas visitam as caixas dessa grade no limite em que os comprimentos das órbitas tendem ao infinito. Caso essas frequências sejam as mesmas para todos os pontos da bacia de atração do atrator, a menos de um conjunto de medida nula, podemos definir a medida natural. Dessa forma, dada uma condição inicial \mathbf{x}_0 na bacia de atração do atrator caótico, a *medida natural* da caixa C_i é dada por

$$\mu_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\eta(C_i, \mathbf{x}_0, T)}{T}, \quad (\text{A.4})$$

onde $\eta(C_i, \mathbf{x}_0, T)$ é a quantidade de tempo que a órbita que se origina em \mathbf{x}_0 passa na caixa C_i no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$.

Podemos, então, generalizar a definição da dimensão da contagem de caixas e definir a dimensão

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln I(q, \epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}, \quad (\text{A.5})$$

com

$$I(q, \epsilon) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}(\epsilon)} \mu_i^q,$$

onde $\tilde{N}(\epsilon)$ é a quantidade de caixas de lado ϵ necessárias para cobrir o atrator. Chamamos D_q de *espectro de dimensões generalizadas*.

Se tomarmos $q = 0$, obtemos $I(q, \epsilon) = \tilde{N}(\epsilon)$ e recuperamos a definição da dimensão da contagem de caixas. Por outro lado, se assumirmos que todas as caixas possuam a mesma medida natural, i.e., $\mu_i^q = \mu^q = 1/\tilde{N}(\epsilon)$, recuperamos a dimensão da contagem de caixas, independentemente do parâmetro q . No geral, temos

$$D_{q_1} \leq D_{q_2} \text{ se } q_1 > q_2. \quad (\text{A.6})$$

Algumas dimensões do espectro generalizado D_q possuem uma importância maior em sistemas dinâmicos do que outras. Em especial, a dimensão D_1 é denominada *dimensão de informação*. Se definirmos $D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} D_q$, podemos utilizar a regra de L'Hospital para obter

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \epsilon} \sum_{i=1}^{\tilde{N}(\epsilon)} \mu_i \ln \mu_i. \quad (\text{A.7})$$

De modo geral, a dimensão de informação nos fornece a dimensão da subárea do atrator que concentra a maior parte de sua medida natural, i.e., D_1 é a dimensão da contagem de caixas da subárea do atrator onde as órbitas típicas passam a maior parte do tempo.

Os métodos apresentados no capítulo 4 se baseiam na dimensão da contagem de caixas e, conseqüentemente, calculam a dimensão D_0 do espectro generalizado. Na próxima

seção, mostramos uma relação que une a dinâmica de um sistema (expoentes de Lyapunov h) com a sua geometria (dimensão de informação D_1).

A.3 Conjectura de Kaplan-Yorke

Definimos a *dimensão de Lyapunov* da seguinte forma:

$$D_L = K + \frac{1}{|h_{K+1}|} \sum_{j=1}^K h_j, \quad (\text{A.8})$$

onde K é o maior número inteiro tal que

$$\sum_{j=1}^K h_j \geq 0. \quad (\text{A.9})$$

A *conjectura de Kaplan-Yorke* assume que a dimensão de Lyapunov e a dimensão de informação são as mesmas para um atrator típico, i.e.,

$$D_L = D_1. \quad (\text{A.10})$$

Em especial, para um mapa bidimensional com $h_1 > 0 > h_2$ e $h_1 + h_2 < 0$ como, por exemplo, o mapa de Hénon (2.10), temos

$$D_1 = 1 + \frac{h_1}{|h_2|}. \quad (\text{A.11})$$

Dessa forma, a conjectura de Kaplan-Yorke nos fornece uma relação direta entre dinâmica caótica e geometria fractal.

Referências Bibliográficas

- [1] H. POINCARÉ, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta mathematica, 13 (1890), pp. 1 – 270.
- [2] E. LORENZ, *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of the Atmospheric Sciences, 20 (1963), pp. 130 – 141.
- [3] R. SHAW, *The Dripping Faucet as a Model of Chaotic System*, The Science Frontier Express Series, Aerial Press, 1984.
- [4] J. C. SARTORELLI, W. M. GONÇALVES E R. D. PINTO, *Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment*, Physical Review E, 49 (1994), pp. 3963 – 3975.
- [5] B. B. MANDELBROT, *Fractals and the geometry of nature*, Encyclopaedia Britannica, (1980), pp. 168-181.
- [6] S. W. McDONALD, C. GREBOGI, E. OTT E J. A. YORKE, *Fractal basin boundaries*, Physica D, 17 (1985), pp. 125 – 153.
- [7] K. T. ALLIGOOD, T. D. SAUER E J. A. YORKE, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1997.
- [8] E. OTT, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.
- [9] M. HÉNON, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Communications in Mathematical Physics, 50 (1976), pp. 69 – 77.
- [10] D. A. RUSSELL, J. D. HANSON E E. OTT, *Dimension of strange attractors*, Physical Review Letters, 45 (1980), pp. 1175–1178.
- [11] J. SOTOMAYOR, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Textos Universitários IME-USP, Editora Livraria da Física, 2011.
- [12] S. SMALE, *Differentiable dynamical systems*, Bulletin of the American Mathematical Society, 73 (1967), pp. 747 – 817.
- [13] D. K. ARROWSMITH E C. PLACE, *An introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1990.

- [14] Y. LAI E T. TÉL, *Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite Time Scales*, Springer, 2011.
- [15] C. GREBOGI, E. KOSTELICH, E. OTT E J. YORKE, *Multi-dimensioned intertwined basin boundaries: basin structure of the kicked double rotor*, *Physica D*, 25 (1987), pp. 347 – 360.
- [16] S. BLEHER, C. GREBOGI, E. OTT E R. BROWN, *Fractal boundaries for exit in hamiltonian dynamics*, *Physical Review A*, 38 (1988), p. 930.
- [17] J. KENNEDY E J. YORKE, *Basins of wada*, *Physica D*, 51 (1991), pp. 213 – 225.
- [18] S. BLEHER, C. GREBOGI E E. OTT, *Bifurcation to chaotic scattering*, *Physica D*, 49 (1990), pp. 87 – 121.
- [19] A. P. S. DE MOURA E C. GREBOGI, *Output functions and fractal dimensions in dynamical systems*, *Physical Review Letters*, 86 (2001), pp. 2778 – 2781.
- [20] C. GREBOGI, S. W. McDONALD, E. OTT E J. YORKE, *Final state sensitivity: an obstruction to predictability*, *Physics Letters*, 99A (1983), pp. 415 – 418.