



Universidade Federal do ABC

FELIPE DANTAS RODRIGUES ALVES

# Um estudo sobre as matrizes de Redheffer

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da  
"UFABC"

Santo André, 2024





Universidade Federal do ABC

**Universidade Federal do ABC**

**Centro de Matemática, Computação e Cognição**

**Felipe Dantas Rodrigues Alves**

# **Um estudo sobre as matrizes de Redheffer**

**Orientador: Prof. Dr. André Pierro de Camargo**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de  
Matemática, Computação e Cognição para  
obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELO ALUNO FELIPE DANTAS RODRIGUES ALVES,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. ANDRÉ PIERRO DE CAMARGO.

**Santo André, 2024**

**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC**  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Alves, Felipe Dantas Rodrigues  
Um estudo sobre as matrizes de Redheffer / Felipe Dantas  
Rodrigues Alves. — 2024.

76 fls. : il.

Orientação de: André Pierro de Camargo

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa  
de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2024.

1. Teoria dos Números. 2. Redheffer. 3. Análise Espectral. I.  
Camargo, André Pierro de. II. Programa de Pós-Graduação em  
Matemática, 2024. III. Título.

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) orientador(a).**

Santo André  22 de fevereiro de 2024

**Assinatura do(a) autor(a):**  Felipe Dantas Rodrigues Alves

**Assinatura do(a) orientador(a):**  Saulo R. de Carvalho



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**

**Fundação Universidade Federal do ABC**

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

**FOLHA DE ASSINATURAS**

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, FELIPE DANTAS RODRIGUES ALVES realizada em 20 de Dezembro de 2023:

**Prof.(a) LUAN ALBERTO FERREIRA**  
INSTITUTO FEDERAL DE SÃO PAULO

**Prof.(a) NAZAR ARAKELIAN**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

**Prof.(a) EDSON RYOJI OKAMOTO IWAKI**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

**Prof.(a) LUCAS COLUCCI**  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**Prof.(a) ANDRE PIERRO DE CAMARGO**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

\* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura



Universidade Federal do ABC

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação  
de  
Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES)  
–  
Código de Financiamento 001"



## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, ao meu orientador André, à minha irmã, à minha avó e a minha família em geral. Agradeço aos amigos, que sentam ou sentaram comigo à mesa. Agradeço pelo apoio financeiro fornecido pela UFABC. Agradeço ao Andrei, por ouvir minhas lamúrias nos maus momentos e por se alegrar com os bons.



Per aspera ad astra.



## RESUMO

As matrizes de Redheffer,  $R_n$ , descritas pela primeira vez em 1977, formam uma classe de matrizes intimamente relacionadas com alguns problemas importante em teoria dos números, como a hipótese de Riemann e o teorema dos números primos, e também o problema do Factorisatio Numerorum de Kàlmar. O objetivo dessa dissertação é descrever os principais resultados obtidos na literatura referentes à análise espectral de  $R_n$  e também a sua relação com o problema do Factorisatio Numerorum de Kàlmar. A nossa contribuição principal é uma nova validação computacional da desprova de uma conjectura com relação à localização dos auto-valores de  $R_n$  no plano complexo.

**Palavras-chave:** Teoria dos Números, Redheffer, análise espectral



## ABSTRACT

Redheffer matrices,  $R_n$ , first described in 1977, form a class of matrices closely related to some important problems in number theory, such as the Riemann hypothesis and the prime number theorem, and also the Kàlmar's Factorisatio Numerorum problem. The objective of this dissertation is to describe the main results obtained in the literature regarding the spectral analysis of  $R_n$  and also its relationship with Kàlmar's Factorisatio Numerorum problem. Our main contribution is a new computational validation of the disproof of a conjecture regarding the location of the eigenvalues of  $R_n$  in the complex plane.

**Keywords:** Number Theory, Redheffer, spectral analysis



# CONTEÚDO

1	Introdução	1
2	Preliminares	5
2.1	Alguns resultados de Análise Real e Complexa	5
2.2	Alguns resultados de Álgebra linear/Álgebra	9
2.3	Alguns Resultados de Teoria dos Números	18
3	A Matriz de Redheffer	23
3.1	O Determinante da matriz de Redheffer	23
3.2	Polinômio Característico	25
3.3	A Permanente e o Problema do Factorisatio Numerorum de Kalmár	34
4	Análise Espectral da Matriz de Redheffer	41
4.1	Um polinômio resultante do polinômio característico e suas raízes	41
4.2	A Conjectura de Barrett-Jarvis	46
5	Desprova da Conjectura de Barrett-Jarvis	47
5.1	Relato geral da desprova	47
5.2	Verificação dos Ciclos	50
5.3	Raízes dentro do Círculo Unitário	51
	Referência Bibliográfica	57



# 1

## INTRODUÇÃO

Duas funções de grande interesse em Teoria dos Números são as funções de Möbius ( $\mu$ ) e Mertens ( $M$ ):

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = p_1 p_2 \dots p_k, p_i \text{ primos distintos e } k \text{ par,} \\ -1 & \text{se } n = p_1 p_2 \dots p_k, p_i \text{ primos distintos e } k \text{ ímpar,} \\ 0 & \text{se } n = (p_k)^2 \alpha, p_k \text{ primo, } \alpha \text{ inteiro,} \end{cases} \quad (1)$$

$$M(n) = \sum_{k=1}^n \mu(k). \quad (2)$$

Alguns exemplos para a função de Möbius: para  $n = 35$ , temos que  $\mu(35) = 1$ , pois  $n = 35 = 5 \times 7$ ; para  $n = 5$ , temos que  $\mu(5) = -1$  e para  $n = 20$ ,  $\mu(20) = 0$ , pois  $n = 20 = 2^2 \times 5$ . Um exemplo para a função de Mertens:  $M(5) = \sum_{k=1}^5 \mu(k) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(4) + \mu(5) = 1 - 1 - 1 + 0 - 1 = -2$ .

O interesse nessas funções se dá, entre outros motivos, pois um dos problemas mais famosos da atualidade, a Hipótese de Riemann (R.H.), possui uma versão equivalente que pode ser descrita de forma bem simples em termos da função de Mertens (Titchmarsh (1988), p.370):

**Teorema 1.1.** *R.H. é equivalente à  $M(n) = O(n^{0.5+\epsilon})$ , para todo número  $\epsilon > 0$ .*

O Teorema dos números primos (T.N.P.), dado por  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$ , em que  $\pi(x)$  conta os números primos até  $x$ , também possui uma versão em termos da função de Mertens (Diamond (1982)):

**Teorema 1.2.** O Teorema dos números primos (T.N.P.) é equivalente a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{x} = 0$  em que  $M$  é a função de Mertens.

Uma forma equivalente de definir a função de Möbius é por meio das relações:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n > 1. \end{cases} \quad (3)$$

De fato, escrevendo as equações acima para  $j = 1, 2, \dots, n$ , obtemos um sistema de equações lineares triangular inferior cuja solução é o vetor  $(\mu(1), \mu(2), \dots, \mu(n))^t$ . Essa descrição da função de Möbius permite conectá-la com objetos algébricos da Teoria de matrizes. Por exemplo, Redheffer (1977) mostrou que a função de Mertens  $M(n)$  pode ser expressa como o determinante da seguinte matriz conhecida hoje como *Matriz de Redheffer*:

$$R_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}, \quad (4)$$

cuja definição precisa (para uma matriz de ordem  $n \times n$ ) é:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j|i \text{ ou } j = 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5)$$

Posteriormente, diversos autores se engajaram no estudo das propriedades espectrais da matriz de Redheffer (Barrett e Jarvis (1992), Cardon (2010), Vaughan (1993), Vaughan(1994)) e também observou-se que a permanente de  $R_n$  conecta-se a outro problema em teoria dos números conhecido como *Factorisatio Numerorum problem* (Wilf (2004), Hwang (2000)).

O objetivo dessa dissertação é descrever os principais resultados obtidos na literatura referentes à análise espectral de  $R_n$  e também sua relação com o problema do *Factorisatio Numerorum*. A nossa contribuição principal é uma nova validação computacional da desprova da conjectura de Barrett-Jarvis com relação à localização dos auto-valores de  $R_n$ . Barrett e Jarvis provaram que  $R_n$  tem  $n - s - 1$  auto-valores iguais a 1, com  $s = \lfloor \log_2 n \rfloor$ , e que, dos  $s + 1$  auto-valores restantes, dois são assintóticos a  $\sqrt{n}$  e  $-\sqrt{n}$ , respectivamente, e os auto-valores restantes possuem módulo com magnitude  $O(\log(n))$ . A conjectura feita pelos autores é de que esse  $s - 1$  auto-valores "menores" possuem módulo menor ou igual a 1. Cardon (2010) obteve algumas fórmulas de recorrência que permitiram o cálculo dos coeficientes do polinômio característico  $P_{R_n}$  de  $R_n$ , para valores grandes de  $n$ . Por exemplo, para  $n = 2^{36}$  e valores próximos, Cardon calculou as raízes não triviais (diferentes de 1) de  $P_{R_n}$  e concluiu que a conjectura de Barrett-Jarvis é falsa. No entanto, como algumas dessas raízes resultantes ficaram muito próximas da fronteira do círculo unitário, surgiu a dúvida se estas estão realmente fora do círculo, ou se algumas das raízes calculadas numericamente estão fora do círculo por conta de erros de arredondamento. Para investigar isso, implementamos uma rotina em C++, totalmente escrita em aritmética de precisão quádrupla (utilizando a biblioteca "libquadmath") para o cálculo do número de raízes de  $P_{R_n}$  dentro do círculo unitário, por meio da fórmula integral de Cauchy.

Quanto à estrutura da dissertação e o seu conteúdo, no segundo capítulo, reunimos alguns resultados preliminares diversos necessários para o entendimento do restante da dissertação: um pouco de Teoria de Determinantes, alguns tópicos de Análise Real e Complexa e também de Teoria de Números. No terceiro capítulo, apresentamos algumas das propriedades da matriz de Redheffer, como, por exemplo, a sua conexão com a função de Mertens; uma fórmula explícita para o seu polinômio característico e também uma análise sobre o comportamento assintótico da permanente de  $R_n$ . No quarto capítulo, apresentamos a análise espectral da matriz de Redheffer obtida por Barrett e Jarvis (1992) e enunciamos a conjectura de Barrett-Jarvis. No quinto e último capítulo, apresentamos o método de Cardon (2010) para obter contra-exemplos para a conjectura de Barrett-Jarvis e também a nossa metodologia própria desenvolvida para tratar a mesma questão.



# 2

## PRELIMINARES

Nesse capítulo, apresentaremos algumas definições e também alguns resultados prévios: lemas e teoremas que ajudam na compreensão dos capítulos subsequentes a esse. O capítulo "Preliminares" pode ser lido de forma tradicional, antes dos outros, como também pode-se ir para os capítulos seguintes e ir voltando aos resultados e definições de "Preliminares" conforme for preciso. Os resultados e definições estão divididos de acordo com temas.

### 2.1 ALGUNS RESULTADOS DE ANÁLISE REAL E COMPLEXA

**Lema 2.1.** Para  $k \geq 4$ , vale:

$$\int_1^{2^{k-1}} \frac{(\log w)^{k-2}}{w} dw > \frac{(k-2)^{k-2}}{e^{k-2}}. \quad (6)$$

*Demonstração.* Para  $k \geq 4$ , (6) é equivalente a  $\left( \frac{(k-1)\log 2}{k-1\sqrt{k-1}} \right)^{k-1} > \left( \frac{k-2}{e} \right)^{k-2}$ . Vamos mostrar esta desigualdade. Para isto, é suficiente mostrar que  $\frac{(k-1)\log 2}{k-1\sqrt{k-1}} > \frac{k-2}{e}$  para  $k \geq 4$ . Calculando a derivada de  $h(k) = \frac{(k-1)\log 2}{k-1\sqrt{k-1}}$  obtemos:

$$h'(k) = \frac{(1 - \log(k-1))^{k-1}\sqrt{k-1}}{(k-1)^2}.$$

Como  $h'(k) < 0$  para  $k \geq 4$ , então  $\frac{(k-1)\log 2}{k-1\sqrt{k-1}} \leq \frac{3\log 2}{3\sqrt{3}} \geq \frac{(k-1)\log 2}{k-1\sqrt{k-1}} \geq \frac{k-2}{e}$ . O que encerra a prova. □

**Lema 2.2.**

$$\sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} \frac{(\log w)^{k-2}}{w} < \int_{2^{k-1}}^{n-1} \frac{(\log w)^{k-2}}{w} dw + \frac{(k-2)^{k-2}}{e^{k-2}}.$$

*Demonstração.* Temos que o máximo de  $\phi(w) = \frac{(\log w)^{k-2}}{w}$ , é o valor  $\frac{(k-2)^{k-2}}{e^{k-2}}$ , que ocorre com  $w = e^{k-2}$ . Seja  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $q \leq e^{k-2} < q+1$  e vamos supor que :

$$\phi(q) \leq \phi(q+1). \quad (7)$$

Caso (7) não valha, o argumento é análogo ao que se segue. Como  $\phi$  é estritamente crescente em  $[2^{k-1}, q]$  e, por (7), o valor mínimo de  $\phi$  em  $[q, q+1]$  é  $\phi(q)$ , então vale :

$$\sum_{w=2^{k-1}}^q \phi(w) \leq \int_{2^{k-1}}^q \phi(t)dt + \phi(q) \leq \int_{2^{k-1}}^q \phi(t)dt + \int_q^{q+1} \phi(t)dt = \int_{2^{k-1}}^{q+1} \phi(t)dt. \quad (8)$$

Da mesma forma,  $\phi$  é estritamente decrescente em  $[q+1, n-1]$  e portanto:

$$\sum_{w=q+1}^{n-1} \phi(w) = \phi(q+1) + \sum_{w=q+2}^{n-1} \phi(w) \leq \phi(q+1) + \int_{q+1}^{n-1} \phi(t)dt. \quad (9)$$

De (8) e (9), temos:

$$\sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} \phi(w) \leq \phi(q+1) + \int_{2^{k-1}}^{n-1} \phi(t)dt \leq \phi(e^{k-2}) + \int_{2^{k-1}}^{n-1} \phi(t)dt.$$

□

**Lema 2.3.** Para  $x > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \in (0, \log 2)$ , vale que:

$$e^x - 1 - x < x^2. \quad (10)$$

*Demonstração.* Temos que por Taylor

$$e^x = 1 + x + e^y \left( \frac{x^2}{2} \right),$$

com  $0 < y < x$ . Daí basta ver que  $\frac{e^y}{2} < \frac{e^x}{2}$  e  $\frac{e^x}{2} < 1$  para  $x < \log 2$ . Como

$$e^x - 1 - x = \left( \frac{e^y}{2} \right) x^2,$$

a desigualdade vale para  $(0, \log 2)$ .

□

**Lema 2.4.** Para  $\epsilon > 0$ , existe  $x_0$  tal que:

$$(1 - \epsilon)x < (x - 1 - (\log_{2-\epsilon} x)^2).$$

em que vale  $x > x_0$ .

*Demonstração.* Para fazer essa demonstração observe que é equivalente a provar que  $(1 - \epsilon) < (1 - \frac{1}{x} - \frac{(\log_{2-\epsilon} x)^2}{x})$ . Temos que  $1 - \epsilon$  é constante e que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} - \frac{(\log_{2-\epsilon} x)^2}{x} \right) = 1,$$

Assim, a desigualdade é válida para  $x$  grande.  $\square$

**Teorema 2.5.** ([17], pág 131) Seja  $n(w, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-w}$ , sendo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $w$  um ponto e  $\gamma$  uma curva simples e fechada no plano complexo, então:

$$n(w, \gamma) = \begin{cases} 1 & \text{se } w \text{ está dentro da região delimitada por } \gamma \\ 0 & \text{se } w \text{ está fora da região delimitada por } \gamma \end{cases} \quad (11)$$

*Demonstração.* Primeiramente vamos provar o caso em que  $n(w, \gamma) = 1$ . Para isso considere o círculo  $C_{\rho}$  dentro da região delimitada pela curva fechada  $\gamma$ , de modo que  $w$  está em  $C_{\rho}$ . Esse círculo tem centro em  $\alpha$ , raio  $\rho$  e  $|w - \alpha| < \rho$ . Para demonstrar que  $n(w, \gamma) = 1$ , basta mostrar que  $\oint_{C_{\rho}} \frac{dz}{z-w} = 2\pi i$ , pois se dividirmos ambos os lados dessa equação por  $2\pi i$ , chegaremos que o lado direito é 1 e o lado esquerdo dá a definição de  $n(w, \gamma)$ . Note que:

$$\oint_{C_{\rho}} \frac{dz}{z - \alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}} d\theta = 2\pi i.$$

e

$$\oint_{C_{\rho}} \frac{dz}{(z - \alpha)^{k+1}} = 0$$

para  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Pois  $\oint_{C_{\rho}} \frac{dz}{(z - \alpha)^{k+1}} = \frac{i}{\rho^k} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\theta = 0$ . Para avaliar  $\oint_{C_{\rho}} \frac{dz}{z-w}$  primeiro devemos fazer

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-\alpha) - (w-\alpha)} = \frac{1}{(z-\alpha)[1 - \frac{w-\alpha}{z-\alpha}]} = \frac{1}{z-\alpha} \frac{1}{1-c}$$

onde  $c = \frac{w-\alpha}{z-\alpha}$  tem módulo  $\frac{|w-\alpha|}{\rho} < 1$  através de  $C_{\rho}$ . Assim  $\frac{1}{1-c} = 1 + c + c^2 + c^3 + \dots$  e

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-w} &= \frac{1}{z-\alpha} \left[ 1 + \frac{w-\alpha}{z-\alpha} + \frac{(w-\alpha)^2}{(z-\alpha)^2} + \frac{(w-\alpha)^3}{(z-\alpha)^3} + \dots \right] \\ \frac{1}{z-w} &= \frac{1}{z-\alpha} + \frac{w-\alpha}{(z-\alpha)^2} + \frac{(w-\alpha)^2}{(z-\alpha)^3} + \frac{(w-\alpha)^3}{(z-\alpha)^4} + \dots \end{aligned}$$

Assim:

$$\oint_{C_{\rho}} \frac{dz}{z-w} = \oint_{C_{\rho}} \frac{dz}{z-\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \oint_{C_{\rho}} \frac{(w-\alpha)^k}{(z-\alpha)^{k+1}} dz = 2\pi i.$$

Para mostrar que  $n(w, \gamma) = 0$  basta notar que  $\frac{1}{z-w}$  é holomorfa na região delimitada por  $\gamma$  caso  $w$  não esteja nessa região, como a integral de linha numa curva fechada de uma função holomorfa é nula, então temos o desejado.  $\square$

**Teorema 2.6.** ([15], pág 149) *Seja  $U$  um aberto em  $\mathbb{C}$ , simplesmente conexo,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f$  uma função holomorfa,  $R$  a região delimitada pela curva fechada  $\gamma$  em  $U$  e sejam  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_l$  os zeros distintos de  $f$  em  $R$  com multiplicidades  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_l$  respectivamente. Então:*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^l m_j n(z_j, \gamma). \quad (12)$$

*Demonstração.* Como  $f(z_1) = 0$  então olhando para a expansão em série de  $f$  em torno de  $z_1$ , temos que  $f(z) = (z - z_1)^{m_1} g(z)$  com  $g$  holomorfa em  $U/z_1$ . Aplicando o mesmo raciocínio para  $z_2, z_3, \dots, z_l$ , temos

$$f(z) = (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} (z - z_3)^{m_3} \dots (z - z_l)^{m_l} h(z),$$

com  $h$  holomorfa em  $U$  e  $h(z) \neq 0$  para qualquer  $z \in U$ . Além disso, por indução em  $l$ , conclui-se que:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^l \frac{m_j}{z - z_j} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

para  $z \neq z_1, z_2, z_3, \dots, z_l$ . Daí,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^l m_j n(z_j, \gamma) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz.$$

Sendo a última integral nula pois  $\frac{h'}{h}$  é holomorfa em  $U$ .  $\square$

**Teorema 2.7.** ([17], pág 136) *O número  $N$  de raízes de um polinômio  $P(z)$ ,  $z$  variável complexa, em uma curva fechada  $\gamma$  no plano complexo é dado por  $N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$ .*

*Demonstração.* Combinando os resultados dos Teoremas 2.5 e 2.6, obtemos o resultado desejado.  $\square$

**Teorema 2.8.** ([17], pág 137) [Conhecido como Teorema de Rouché.] *Suponha que  $f$  e  $g$  sejam analíticas e seja  $\gamma$  uma curva regular no Plano Complexo, de modo que  $|f(z)| > |g(z)|$  para todo  $z \in \gamma$ . Então  $f + g$  e  $f$  tem o mesmo número de raízes dentro de  $\gamma$ , contadas levando-se em consideração suas multiplicidades.*

*Demonstração.* Basta provar que:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(f+g)'(z)}{(f+g)(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

De fato, observe que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(f+g)'(z)}{(f+g)(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(f[1+g/f])'(z)}{(f[1+g/f])(z)} dz, \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(1+g/f)'(z)}{(1+g/f)(z)} dz. \end{aligned}$$

Como  $|\frac{g}{f}| < 1$  sobre  $\gamma$ , então existe um aberto  $U$  contendo  $\gamma$  tal que  $|\frac{g}{f}| < 1$  para qualquer  $z \in U$ . Logo, a função  $1 + \frac{g}{f}$  é holomorfa em  $U$  e sua imagem está contida no conjunto  $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ . Assim, a última integral é nula, pois a curva é fechada. □

## 2.2 ALGUNS RESULTADOS DE ÁLGEBRA LINEAR/ÁLGEBRA

**Definição 2.9.** Uma permutação  $\pi$  de  $1, 2, 3, \dots, n$  é uma bijeção que tem o conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  como domínio e contra-domínio.

Dada uma permutação  $\pi$  dos números  $1, 2, 3, \dots, n$ , podemos ter a seguinte representação em duas linhas dada pela matriz:

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n) \end{bmatrix}.$$

Um exemplo de uma permutação usando a notação acima:

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Definição 2.10.** Uma transposição  $t_{ij}$  é uma permutação que troca de posição os elementos  $i$  e  $j$  e deixa os outros elementos inalterados.

A definição acima pode ser exemplificada na representação em duas linhas:

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & \dots & n-1 & n \end{bmatrix}.$$

**Definição 2.11.** A permutação  $id$  que não altera a ordem de nenhum elemento é chamada de permutação identidade.

Exemplo da permutação identidade na representação em duas linhas:

$$id = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{bmatrix}.$$

**Definição 2.12.** Uma multiplicação de permutações ou ainda, associação, composição de permutações  $\pi$  e  $\sigma$  pode ser expressa por  $(\pi\sigma)(i) = \pi(\sigma(i))$ , em que é aplicada a permutação  $\sigma$  sobre cada elemento  $i$  e depois a permutação  $\pi$  sobre cada  $\sigma(i)$ .

Um exemplo para a definição acima usando a representação em duas linhas:

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$(\pi\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi(1) & \pi(3) & \pi(2) \end{bmatrix} \quad \text{logo,} \quad (\pi\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Definição 2.13.** O conjunto de todas as permutações  $\pi$  de  $1, 2, 3, \dots, n$  é chamado de  $S_n$ . Outro nome para  $S_n$  é grupo simétrico de grau  $n$ .

**Teorema 2.14.** ([9], pág 42-44.[16], pág 85.) Seja  $n \in \mathbb{Z}_+$  um inteiro positivo. Então o conjunto  $S_n$  tem as seguintes propriedades:

- (i) Dada duas quaisquer permutações  $\pi$  e  $\sigma$  então  $\pi \circ \sigma \in S_n$ ,
- (ii) Dada quaisquer três permutações  $\pi, \sigma$  e  $\tau \in S_n$ , vale que:  $(\pi \circ \sigma) \circ \tau = \pi \circ (\sigma \circ \tau)$ ,
- (iii) Dada qualquer permutação  $\pi \in S_n$ , então:  $\pi \circ id = id \circ \pi = \pi$ ,
- (iv) Dada qualquer permutação  $\pi \in S_n$ , existe uma única permutação  $(\pi)^{-1} \in S_n$ , chamada permutação inversa, em que vale:  $\pi \circ (\pi)^{-1} = (\pi)^{-1} \circ \pi = id$ .

*Demonstração.* (i) Como tanto  $\pi$  e  $\sigma$  são bijeções que têm o conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  como domínio e contra-domínio, temos que a imagem de  $\sigma$  esta em  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ , logo ao compor  $\pi$  com  $\sigma$ , temos que  $\pi$  toma um elemento (imagem de  $\sigma$ ) em  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  e leva em  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Logo,  $\pi \circ \sigma \in S_n$ .

(ii) Para verificar esse item podemos aplicar a  $(\pi \circ \sigma) \circ \tau$  a um elemento  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ :  $((\pi \circ \sigma) \circ \tau)(i)$ . Pela definição temos:  $((\pi \circ \sigma) \circ \tau)(i) = \pi(\sigma(\tau(i)))$ . Vamos agora aplicar  $\pi \circ (\sigma \circ \tau)$  ao mesmo elemento  $i$ :  $\pi \circ (\sigma \circ \tau)(i)$ . Pela definição, temos:  $\pi \circ (\sigma \circ \tau)(i) = \pi(\sigma(\tau(i)))$ . Logo  $(\pi \circ \sigma) \circ \tau = \pi \circ (\sigma \circ \tau)$ .

(iii) Como a permutação  $id$  não altera a ordem dos elementos  $\pi \circ id = \pi$  e  $id \circ \pi = \pi$ , logo  $\pi \circ id = id \circ \pi = \pi$ .

(iv) Dado que  $\pi$  é uma bijeção, para um  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  arbitrário, existe uma única  $\pi^{-1}$  tal que para  $\pi(i) = j$ ,  $\pi^{-1}(j) = i$ . Assim,  $(\pi \circ (\pi)^{-1})(j) = \pi((\pi)^{-1}(j)) = \pi(i) = j$  ou seja,  $\pi \circ (\pi)^{-1} = id$ . Por outro lado,  $((\pi)^{-1} \circ \pi)(i) = (\pi)^{-1}(\pi(i)) = (\pi)^{-1}(j) = i$ , ou seja,  $(\pi)^{-1} \circ \pi = id$ .

□

**Definição 2.15.** Um ciclo  $\sigma$  é uma permutação para alguns inteiros  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_p$  entre 1 e  $n$ ,  $p \leq n$  em que ocorre:  $\sigma(i_j) = i_{j+1}$  para  $1 \leq j < p$ ;  $\sigma(i_p) = i_1$ ;  $\sigma(i) = i$  sempre que  $i \neq i_1, i \neq i_2, i \neq i_3, \dots, i \neq i_p$ .

Algumas representações para um ciclo podem ser:  $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$ ,  $(i_1 \ i_2 \ i_3 \ \dots \ i_n)$  em que  $p = n$ ,  $[(i_1 \ i_2 \ i_3 \ \dots \ i_p)(i_{p+1})(i_{p+2}) \dots (i_n)]$ , em que  $p < n$ ; ou ainda:  $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \dots \rightarrow i_n$ . Além dessas podemos usar a representação em duas linhas. Tome por exemplo o ciclo qualquer  $\sigma_x = [(1 \ 2 \ 4)(3)]$ , podemos representá-lo como:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

esse ciclo contém 3 elementos, pois o objeto (3) é chamado de ponto fixo. O ponto fixo mapeia o elemento para si mesmo, nesse caso  $\sigma_x(3) = 3$ .

O ciclo  $\sigma_x$  representado acima pode ser interpretado também como uma permutação  $\pi_x$  contendo um único ciclo a saber (1 2 4). Todo ciclo é uma permutação mas nem toda permutação é um ciclo. Por exemplo, a permutação:

$$\pi_z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix},$$

não é um ciclo, mas note que esta permutação possui dois ciclos que a compõem: (1 2) e (4 5 6). A transposição  $t_{ij}$ , que pode ser representada por  $t_{ij} = (i \ j)$ , também é um ciclo.

**Teorema 2.16.** ([9], pág 45) *Todo ciclo é um produto de transposições.*

*Demonstração.* Suponha um ciclo  $\sigma$  de tamanho  $k + 1$ , ou seja  $k + 1$  elementos. Sem perda de generalidade considere  $k + 1 = 5$ . Uma possível representação desse ciclo é  $\sigma = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ . Então para provar o teorema basta notar que  $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = (i_1, i_5)(i_1, i_4)(i_1, i_3)(i_1, i_2)$ . Nessa representação se "lê" da direita para esquerda, por exemplo aplicando  $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$  em  $i_3$  temos:  $(i_1, i_2)(i_3) = i_3$ ,  $(i_1, i_3)(i_3) = i_1$ ,  $(i_1, i_4)(i_1) = i_4$  e  $(i_1, i_5)(i_4) = i_4$ . Ou seja  $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)(i_3) = i_4$ . Na representação em duas linhas temos:

$$\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \\ i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, de fato,  $i_3 \rightarrow i_4$ .

□

**Definição 2.17.** *Seja  $\pi \in S_n$  uma permutação. O par  $(i, j)$ , com  $i$  e  $j$  inteiros, é chamado de par de inversão de  $\pi$ , quando  $i < j$  implica em  $\pi(i) > \pi(j)$ .*

**Definição 2.18.** *Seja  $\pi \in S_n$  uma permutação e  $x$  a quantidade de pares de inversão de  $\pi$ . A função sinal da permutação é definida por:*

$$\text{sinal}(\pi) = (-1)^x = \begin{cases} 1, & x \text{ é par,} \\ -1, & x \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

**Teorema 2.19.** ([16], pág 86) *Dada uma transposição  $t_{ij}$ , para essa transposição existem  $2(j - i) - 1$  pares de inversão.*

*Demonstração.* Para efeito de comparação, considere a permutação *id* de ordem  $n$ :

$$\text{id} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{bmatrix}.$$

Agora considere uma permutação  $\pi$  que contém uma única transposição  $t_{ij} = (i j)$ , deixando todos os outros elementos inalterados. Podemos escrever:

$$\pi = t_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & j-1 & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & i+1 & \dots & j-1 & i & \dots & n \end{bmatrix}.$$

Desta maneira, percebemos que  $i + 1, i + 2, i + 3, \dots, j - 1, j$  quando colocados ao lado de  $i$ , formam pares de inversão e  $i + 1, i + 2, i + 3, \dots, j - 1$  quando colocados ao lado de  $j$

também formam pares de inversão. Assim para cada transposição há  $2(j - i) - 1$  pares de inversão.

□

**Teorema 2.20.** ([16], pág 87) *Seja  $n \in \mathbb{Z}_+$  um inteiro positivo. Vale:*

(i)  $\text{sinal}(id) = 1$ ,

(ii)  $\text{sinal}(t_{ij}) = -1$ ,

(iii) *Dada uma permutação  $\pi \in S_n$  e sua inversa  $\pi^{-1}$ , vale:  $\text{sinal}(\pi^{-1}) = \text{sinal}(\pi)$ ,*

(iv) *Dada quaisquer duas permutações  $\pi, \sigma \in S_n$ , então vale que:*

$\text{sinal}(\pi \circ \sigma) = \text{sinal}(\pi)\text{sinal}(\sigma)$ .

*Demonstração.* (i) Como  $id$  não altera a posição de nenhum elemento da permutação, então a quantidade de inversões  $x$  é tal que  $x = 0$ , então  $(-1)^0 = 1$ .

(ii) Temos que, pelo Teorema 2.19:  $\text{sinal}(t_{ij}) = (-1)^{2(j-i)-1} = -1$ .

(iii) Basta ver que a quantidade de pares de inversão de  $\pi$ ,  $x(\pi)$  e a quantidade de pares de inversão de  $\pi^{-1}$ ,  $x(\pi^{-1})$  são tais que  $x(\pi) = x(\pi^{-1})$ . Isso pode ser notado representando  $\pi$  e  $\pi^{-1}$  em duas linhas, a representação será a mesma. Por exemplo, considere sem perda de generalidade uma permutação:

$$\pi_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi_k(1) & \pi_k(2) & \pi_k(3) \end{bmatrix} \quad \text{tal que} \quad \pi_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A inversa  $(\pi_k)^{-1}$  tem que fazer  $(\pi_k)^{-1}(3) = 1$ , pois  $\pi_k(1) = 3$ ;  $(\pi_k)^{-1}(2) = 2$ , pois  $\pi_k(2) = 2$  e  $(\pi_k)^{-1}(1) = 3$ , pois  $\pi_k(3) = 1$ . Assim a representação em duas linhas de fica  $(\pi_k)^{-1}$ :

$$(\pi_k)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(iv) Temos que o par  $(i, j)$  não é um par de inversão de  $\pi \circ \sigma$  se e somente se : ou (A):  $(a, b) = (\sigma(i), \sigma(j))$  não é par de inversão nem de  $\sigma^{-1}$  nem de  $\pi$ , ou (B):  $(a, b) = (\sigma(i), \sigma(j))$  é par de inversão tanto de  $\sigma^{-1}$  quanto de  $\pi$ . Isso é verdade porque se (A) ocorre, nenhuma inversão ocorre para esse par, logo após  $\pi \circ \sigma$  sobre  $i$  e  $j$ , não há inversão. Se (B) ocorre, a permutação  $\pi$  "desfaz" a permutação  $\sigma^{-1}$  para  $(i, j)$ , assim  $(i, j)$  não é um

par de inversão de  $\pi \circ \sigma$ . Vamos denotar por  $x(\pi)$  a quantidade de pares de inversão  $(a, b)$  de  $\pi$ , por  $x(\sigma^{-1})$  a quantidade de pares de inversão  $(a, b)$  de  $\sigma^{-1}$ , por  $x(\sigma^{-1}, \pi)$  a quantidade de pares de inversão  $(a, b)$  tanto de  $\pi$  quanto de  $\sigma^{-1}$ . Por (iii) e pelo o que foi descrito acima temos que o número de inversões  $x(\pi \circ \sigma)$  de  $\pi \circ \sigma$  é tal que:

$$x(\pi \circ \sigma) = (x(\sigma) - x(\sigma, \pi)) + (x(\pi) - x(\sigma, \pi)) = (x(\sigma) + x(\pi)) - 2x(\sigma, \pi).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{ sinal}(\pi \circ \sigma) &= (-1)^{x(\sigma)}(-1)^{x(\pi)}(-1)^{-2x(\sigma^{-1}, \pi)}, \\ &= \text{ sinal}(\pi)\text{ sinal}(\sigma). \end{aligned}$$

□

**Lema 2.21.** *Toda permutação, exceto a identidade, é um produto de transposições.*

*Demonstração.* Toda permutação exceto a identidade tem ao menos um ciclo. Assim, aplicando o Teorema 2.16 podemos reduzir um ciclo ou mais ciclos de uma permutação à associação de transposições. □

**Lema 2.22.** *A função sinal de uma permutação  $\pi$  definida em 2.18 é equivalente a:*

$$\text{ sinal}(\pi) = (-1)^y$$

em que  $y$  é a quantidade de transposições.

*Demonstração.* Temos que pelo Lema 2.21, podemos decompor qualquer permutação exceto a identidade em um produto de transposições. Podemos aplicar 2.20, item (iv), após ter decomposto uma permutação  $\pi$  em  $y$  transposições e por 2.20, item (ii), temos que o sinal de uma transposição  $t_{ij}$  é tal que  $t_{ij} = -1$ , portanto temos que  $\text{ sinal}(\pi) = (-1)^y$ . □

**Teorema 2.23.** *Para um ciclo  $\sigma$  com  $k + 1$  elementos, vale:*

$$\text{ sinal}(\sigma) = (-1)^k.$$

*Demonstração.* Dado que a função sinal de um ciclo  $\sigma$  pode ser dada por  $\text{ sinal}(\sigma) = (-1)^y$  em que  $y$  é o número de transposições de acordo com o Lema 2.22, basta ver que pelo Teorema 2.16 ao representar o ciclo por transposições e usando a representação que o Teorema fornece, sempre há uma transposição a menos que o tamanho do ciclo. □

**Lema 2.24.** Dado um  $k$  inteiro e uma permutação  $\pi \in S_n$ , contendo um único ciclo com  $k + 1$  elementos, então temos:

$$\text{signal}(\pi)(-1)^{k+1} = -1.$$

*Demonstração.* Temos que pelo Teorema 2.23, o sinal de um ciclo com  $k + 1$  elementos é

$$\text{signal}(\sigma) = (-1)^k.$$

Assim,

$$\text{signal}(\pi)(-1)^{k+1} = \text{signal}(\sigma)(-1)^{k+1} = (-1)^k(-1)^{k+1} = (-1)^{2k+1} = -1.$$

□

**Definição 2.25.** Dada uma matriz  $A = a_{ij}$  quadrada de ordem  $n$ , define-se como o determinante de  $A$ :

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \text{signal}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} a_{3,\pi(3)} \dots a_{n,\pi(n)},$$

em que  $\pi$  são todas as permutações do grupo simétrico  $S_n$ .

**Teorema 2.26.** ([16], pág 90) Valem as seguintes propriedades:

(i) Temos que  $\det(0_n) = 0$  e  $\det(I_n) = 1$ .

(ii) Seja  $A^t$  a matriz transposta de  $A$ , então  $\det(A^t) = \det(A)$ .

(iii) Seja  $A^{(\cdot,1)}, A^{(\cdot,2)}, \dots, A^{(\cdot,j)}, \dots, A^{(\cdot,n)}$  colunas de  $A$ , em que todos os elementos  $a_{(\cdot,j)}$  de  $A^{(\cdot,j)}$  são tais que  $a_{(\cdot,j)} = b_{(\cdot,j)} + c_{(\cdot,j)}$ , de modo que a coluna  $A^{(\cdot,j)}$  pode ser representada por  $A^{(\cdot,j)} = B^{(\cdot,j)} + C^{(\cdot,j)}$ , com  $b_{(\cdot,j)}$  elementos de  $B^{(\cdot,j)}$  e  $c_{(\cdot,j)}$  elementos de  $C^{(\cdot,j)}$ . Defina  $B = (A^{(\cdot,1)}, A^{(\cdot,2)}, \dots, A^{(\cdot,j-1)}, B^{(\cdot,j)}, A^{(\cdot,j+1)}, \dots, A^{(\cdot,n)})$  e  $C = (A^{(\cdot,1)}, A^{(\cdot,2)}, \dots, A^{(\cdot,j-1)}, C^{(\cdot,j)}, A^{(\cdot,j+1)}, \dots, A^{(\cdot,n)})$ . Vale que  $\det A = \det B + \det C$ .

(iv) Seja  $A^{(\cdot,1)}, A^{(\cdot,2)}, \dots, A^{(\cdot,i)}, \dots, A^{(\cdot,j)}, \dots, A^{(\cdot,n)}$  colunas de  $A$ , considere a matriz  $A^* = (A^{(\cdot,1)}, A^{(\cdot,2)}, \dots, A^{(\cdot,j)}, \dots, A^{(\cdot,i)}, \dots, A^{(\cdot,n)})$ , em que houve as trocas das colunas  $i$  e  $j$  de  $A$ , então  $\det A^* = -\det A$ .

(v) Se  $A$  tem duas colunas idênticas ou duas linhas idênticas, então  $\det(A) = 0$ .

(vi) Se  $A$  tem alguma coluna ou linha nula, então  $\det(A) = 0$ .

(vii) Dada matrizes  $A, B$  ambas de ordem  $n$ , então  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

(viii) Se  $A$  é uma matriz triangular superior ou inferior, vale que:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

*Demonstração.* (i) Uma matriz que só possui 0 em seus elementos, terá sempre  $a_{1,\pi(1)}a_{2,\pi(2)}a_{3,\pi(3)}\dots a_{n,\pi(n)} = 0$ , para todas as permutações, assim  $\det(0_n) = 0$ . Para a matriz identidade de ordem  $n$ ,  $I_n$ , temos que a única parcela  $a_{1,\pi(1)}a_{2,\pi(2)}a_{3,\pi(3)}\dots a_{n,\pi(n)} \neq 0$ , é quando  $\pi = id$ , logo  $a_{1,\pi(1)}a_{2,\pi(2)}a_{3,\pi(3)}\dots a_{n,\pi(n)} = 1$  e  $\det(I_n) = 1$ .

(ii) Como temos que pela definição 2.25:  $\det A = \sum_{\pi \in S_n} \text{ sinal}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} a_{3,\pi(3)} \dots a_{n,\pi(n)}$ . Então para  $A^t$ , temos  $\det A^t = \sum_{\pi \in S_n} \text{ sinal}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} a_{\pi(3),3} \dots a_{\pi(n),n}$ , usando comutatividade e 2.20, item (iii):

$$\begin{aligned} \det A^t &= \sum_{\pi \in S_n} \text{ sinal}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} a_{\pi(3),3} \dots a_{\pi(n),n}, \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{ sinal}(\pi^{-1}) a_{\pi^{-1}(1),1} a_{\pi^{-1}(2),2} a_{\pi^{-1}(3),3} \dots a_{\pi^{-1}(n),n}, \\ &= \det A. \end{aligned}$$

(iii) Temos que  $\det A = \det A^t$ , logo:

$$\begin{aligned} \det A^t &= \sum_{\pi \in S_n} \text{ sinal}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(j),j} \dots a_{\pi(n),n}, \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{ sinal}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots (b_{\pi(j),j} + c_{\pi(j),j}) \dots a_{\pi(n),n}, \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{ sinal}(\pi) a_{\pi(1),1} \dots (b_{\pi(j),j}) \dots a_{\pi(n),n} + \sum_{\pi \in S_n} \text{ sinal}(\pi) a_{\pi(1),1} \dots (c_{\pi(j),j}) \dots a_{\pi(n),n}, \\ &= \det B^t + \det C^t = \det B + \det C. \end{aligned}$$

(iv) Temos que

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \text{ sinal}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} a_{3,\pi(3)} \dots a_{n,\pi(n)}$$

e

$$\det A^* = \sum_{\pi \in S_n} \text{ sinal}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \dots a_{j,\pi(i)} \dots a_{i,\pi(j)} \dots a_{n,\pi(n)}.$$

Defina  $\sigma = \pi \circ t_{ij}$  e note que  $\pi = \sigma \circ t_{ij}$ . Em particular,  $\pi(i) = \sigma(j)$  e  $\pi(j) = \sigma(i)$ , de onde:

$$\det A^* = \sum_{\pi \in S_n} \text{ sinal}(\sigma \circ t_{ij}) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{j,\sigma(j)} \dots a_{i,\sigma(i)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

Temos que  $\text{ sinal}(\sigma \circ t_{ij}) = -\text{ sinal}(\sigma)$ . Logo,  $\det A^* = -\det A$ .

(v)  $A = (A^{(\cdot,1)}, A^{(\cdot,2)}, \dots, A^{(\cdot,j)}, \dots, A^{(\cdot,j)}, \dots, A^{(\cdot,n)})$  em que  $A^{(\cdot,k)}$  em  $1 \leq k \leq n$  são as colunas de  $A$ . Vamos trocar as colunas iguais  $A^{(\cdot,j)}$  e obter  $A^* = (A^{(\cdot,1)}, A^{(\cdot,2)}, \dots, A^{(\cdot,j)}, \dots, A^{(\cdot,j)}, \dots, A^{(\cdot,n)})$ , temos que  $A = A^*$ , logo  $\det A = \det A^*$ , mas por (iv)  $\det A = -\det A^*$ . Assim,  $\det A = \det A^* = 0$ .

(vi) Basta provar para linha ou para coluna, se for verdade pra uma, é verdade pra outra, basta usar que  $\det A = \det A^t$ . Vamos provar para linha. Sabendo que  $\det A = \sum_{\pi \in S_n} \text{senal}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} a_{3,\pi(3)} \dots a_{n,\pi(n)}$ , basta notar que dado um  $x$  tal que  $1 \leq x \leq n$ , sempre o elemento  $a_{x,\pi(x)} = 0$ , anulando todas as parcelas  $a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} a_{3,\pi(3)} \dots a_{n,\pi(n)}$  do somatório do determinante.

(vii) Considere  $A, B$  matrizes quadradas, com elementos  $a_{ij}$  em  $A$  e  $b_{ij}$  em  $B$ , então temos:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{\pi \in S_n} \text{senal}(\pi) \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n a_{1,k_1} b_{k_1,\pi(1)} \dots a_{n,k_n} b_{k_n,\pi(n)}, \\ &= \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n a_{1,k_1} \dots a_{n,k_n} \sum_{\pi \in S_n} \text{senal}(\pi) b_{k_1,\pi(1)} \dots b_{k_n,\pi(n)}, \end{aligned}$$

Note que para  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n \in \{1, 2, \dots, n\}$  fixados, a soma  $\sum_{\pi \in S_n} \text{senal}(\pi) b_{k_1,\pi(1)} \dots b_{k_n,\pi(n)}$  é o determinante da matriz composta pelas linhas  $k_1, k_2, \dots, k_n$  de  $B$ , assim pela propriedade (v), segue que a expressão desaparece a menos que  $k_i$  sejam distintos dois a dois. Ou seja, a soma de todas as escolhas de  $k_1, k_2, \dots, k_n$  podem ser restritas ao conjunto de índices  $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$  em que  $\sigma$  é uma permutação do grupo  $S_n$ . Ou seja:

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} \sum_{\pi \in S_n} \text{senal}(\pi) b_{\sigma(1),\pi(1)} \dots b_{\sigma(n),\pi(n)}.$$

A expressão acima é equivalente a:

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{senal}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} \sum_{\pi \in S_n} \text{senal}(\pi \circ \sigma^{-1}) b_{1,\pi \circ \sigma^{-1}(1)} \dots b_{n,\pi \circ \sigma^{-1}(n)}.$$

Logo  $\det(AB) = \det A \det B$ .

(viii) Se  $A$  é matriz triangular superior, qualquer elemento  $a_{ij}$  dela tal que  $i < j$ , então  $a_{ij} = 0$ . Como a permutação  $\pi$  em  $\sum_{\pi \in S_n}$  são todas as permutações do grupo simétrico  $S_n$ , então sempre haverá pelo menos um elemento  $a_{x,\pi(x)}$  em  $a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} a_{3,\pi(3)} \dots a_{n,\pi(n)}$

tal que  $x < \pi(x)$  exceto pela permutação identidade. Ou seja, todas as parcelas do somatório dão 0, exceto quando  $\pi = id$ . Nesse caso a parcela dá  $a_{1,id(1)}a_{2,id(2)}a_{3,id(3)}\dots a_{n,id(n)} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ . Se  $A$  é matriz triangular inferior, o raciocínio é análogo. □

**Teorema 2.27.** [Conhecido como Teorema de Laplace.] *Seja  $A = a_{ij}$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e seja  $D_{ij}$  o determinante da matriz obtida a partir de  $A$ , removendo as suas linhas  $i$  e  $j$ . Escolhida uma linha  $i = k$  de  $A$ , então o determinante de  $A$ ,  $\det A$ , é tal que*

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}.$$

O mesmo pode ser feito escolhendo uma coluna  $j = k$  de  $A$ , nesse caso

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} D_{ik}.$$

**Definição 2.28.** *A permanente de uma matriz  $A = a_{ij}$  quadrada de ordem  $n$  é dada por*

$$\text{Per} A_n = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3} \dots a_{\sigma(n),n},$$

em que  $\sigma$  são todas as permutações do grupo simétrico  $S_n$ .

Daremos um exemplo de cálculo da Permanente. Seja

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

as permutações do grupo  $S_2$  são:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então  $\text{Per} A_2 = \sum_{\sigma \in S_2} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} = a_{1,\sigma_1(1)} a_{2,\sigma_1(2)} + a_{1,\sigma_2(1)} a_{2,\sigma_2(2)} = a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21} = 1 \times 1 + 2 \times (-1) = -1$ .

## 2.3 ALGUNS RESULTADOS DE TEORIA DOS NÚMEROS

**Definição 2.29.** *Dados  $n$  e  $k$  inteiros positivos, definimos  $v_{nk}$  ou  $v(n, k)$  como o número de seqüências de números inteiros positivos distintos  $m_1, m_2, \dots, m_{k+1}$  tais que  $m_1 = 1, m_{k+1} \leq n$  e*

$m_i | m_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ .

O número  $v_{nk}$  pode ser visto como a quantidade de ciclos com  $k + 1$  elementos distintos, em que seu primeiro elemento é o 1, cada elemento do ciclo divide o elemento subsequente e o último elemento é menor ou igual a  $n$ . Por exemplo,  $v(3, 1) = 2$ , pois temos as sequências  $\{1, 2\}$  e  $\{1, 3\}$ ;  $v(7, 2) = 3$ , pois temos as sequências  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 2, 6\}$  e  $\{1, 3, 6\}$ .

**Lema 2.30** ([2]). *Vale a seguinte desigualdade:*

$$v(n, k) < \frac{n(\log n)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

*Demonstração.* (A prova se dará por indução.) Como os ciclos com 3 elementos precisam atender o critério de divisibilidade, então eles serão da forma  $(1, k, dk)$ , com  $k = 2$ , temos que  $2d \leq n$ , logo  $1 < d \leq \frac{n}{2}$ , ou seja tem-se  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$  possibilidades. Com  $k = 3$ , temos que  $3d \leq n$ , logo  $1 < d \leq \frac{n}{3}$ , ou seja tem-se  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$  possibilidades. De forma geral, para  $k = l$ , temos  $\lfloor \frac{n}{l} \rfloor - 1$  possibilidades. Logo:

$$v(n, 2) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1 + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1 + \dots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor - 1 = \sum_{1 < k < n} (\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 1). \quad (13)$$

Seja  $v(n, 2) = \sum_{1 < k < n} (\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 1) \leq (\sum_{k=2}^{n-1} \frac{n}{k}) - (n-2) = n(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}) - (n-2)$ . Como  $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n-1} \frac{1}{t} dt < \int_1^n \frac{1}{t} dt = \log n$ , então:

$$v(n, 2) = \sum_{1 < k < n} (\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 1) < n \log(n).$$

Isso prova a desigualdade para o caso em que  $k = 2$ . No caso geral, considere ciclos da seguinte forma  $(i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, w, rw)$  com  $k + 1$  elementos que tem o elemento  $w$  na posição  $k$ . O número de ciclos da forma  $(i_1, i_2, \dots, i_{k-1})$  que atendem o critério de divisibilidade é  $v(w, k - 1) - v(w - 1, k - 1)$ . Além disso, o número  $r$  deve ser tal que  $1 < r \leq n$ , o que gera  $(\lfloor \frac{n}{w} \rfloor - 1)$  possibilidades. Assim vale:

$$v(n, k) = \sum_{w=2^{k-1}}^n v(w, k - 1) - v(w - 1, k - 1) \left( \lfloor \frac{n}{w} \rfloor - 1 \right).$$

Além disso, temos:

$$v(n, k) = \sum_{w=2^{k-1}}^n [v(w, k - 1) - v(w - 1, k - 1)] (\lfloor \frac{n}{w} \rfloor - 1) \leq \sum_{w=2^{k-1}}^n [v(w, k - 1) - v(w - 1, k - 1)] (\frac{n}{w} - 1).$$

Temos também,

$$\begin{aligned}
& \sum_{w=2^{k-1}}^n [v(w, k-1) - v(w-1, k-1)] \left(\frac{n}{w} - 1\right) \\
= & \sum_{w=2^{k-1}}^n v(w, k-1) \left(\frac{n}{w} - 1\right) - \sum_{w=2^{k-1}}^n v(w-1, k-1) \left(\frac{n}{w} - 1\right), \\
= & \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} v(w, k-1) \left(\frac{n}{w} - 1\right) - \sum_{w=2^{k-1}}^n v(w-1, k-1) \left(\frac{n}{w} - 1\right), \\
= & \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} v(w, k-1) \left(\frac{n}{w} - 1\right) - \sum_{w=2^{k-1}-1}^{n-1} v(w, k-1) \left(\frac{n}{w+1} - 1\right) = A.
\end{aligned}$$

Como  $v(2^{k-1} - 1, k-1) = 0$  então:  $A = \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} v(w, k-1) \left(\frac{n}{w} - 1 - \left[\frac{n}{w+1} - 1\right]\right)$

$$= \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} v(w, k-1) \left(\frac{n}{w} - \frac{n}{w+1}\right). \text{ Ou seja, vale:}$$

$$v(n, k) = \sum_{w=2^{k-1}}^n v(w, k-1) - v(w-1, k-1) \left(\left\lfloor \frac{n}{w} \right\rfloor - 1\right) \leq \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} v(w, k-1) \left(\frac{n}{w} - \frac{n}{w+1}\right).$$

Considerando a hipótese de indução  $v(n, k-1) < \frac{n(\log n)^{k-2}}{(k-2)!}$  temos:

$v(n, k) = n \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} \frac{v(w, k-1)}{w(w+1)} \leq n \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} \frac{w(\log w)^{k-2}}{(k-2)!w(w+1)} \leq \frac{n}{(k-2)!} \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} \frac{(\log w)^{k-2}}{w}$ . Para  $k=3$ , por exemplo, temos que  $v(n, 3) < n \sum_{w=4}^{n-1} \frac{\log w}{w}$  e dado que  $\frac{\log w}{w}$  é decrescente no intervalo  $(3, n-1)$ , podemos escrever:

$$v(n, 3) < n \int_3^{n-1} \frac{\log w}{w} dw < n \frac{(\log n)^2}{2}.$$

No caso geral, observe que o ponto máximo de  $\frac{(\log w)^{k-2}}{w}$ , no intervalo  $[2^{k-1}, n-1]$ , é  $w = e^{k-2}$ . Portanto, conforme foi provado nesse capítulo, vale o Lema 2.2, ou seja, vale:  $\sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} \frac{(\log w)^{k-2}}{w} < \int_{2^{k-1}}^{n-1} \frac{(\log w)^{k-2}}{w} dw + \frac{(k-2)^{k-2}}{e^{k-2}}$ . Mas lembrando que vale o Lema 2.1 (provado também nesse capítulo), ou seja, vale:

$$\begin{aligned}
& \int_1^{2^{k-1}} \frac{(\log w)^{k-2}}{w} dw > \frac{(k-2)^{k-2}}{e^{k-2}} \text{ para } k \geq 4. \text{ Então, combinando 2.1 e 2.2, temos:} \\
v(n, k) & < \frac{n}{(k-2)!} \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} \frac{(\log w)^{k-2}}{w} < \frac{n}{(k-2)!} \int_1^{n-1} \frac{(\log w)^{k-2}}{w} dw < n \frac{(\log n)^{k-1}}{(k-1)!}. \quad \square
\end{aligned}$$

**Teorema 2.31** ([1], pág.57). *Seja  $d(n)$  uma função que contabiliza a quantidade de divisores de um dado número  $n$ . Para todo  $x \geq 1$  temos:*

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}),$$

onde  $\gamma$  é a constante de Euler-Maclaurin.

*Demonstração.* Temos que  $\sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{d \leq x} \sum_{q \leq x/d} 1$ . Usando o método da hipérbole de Dirichlet, vamos construir o gráfico:

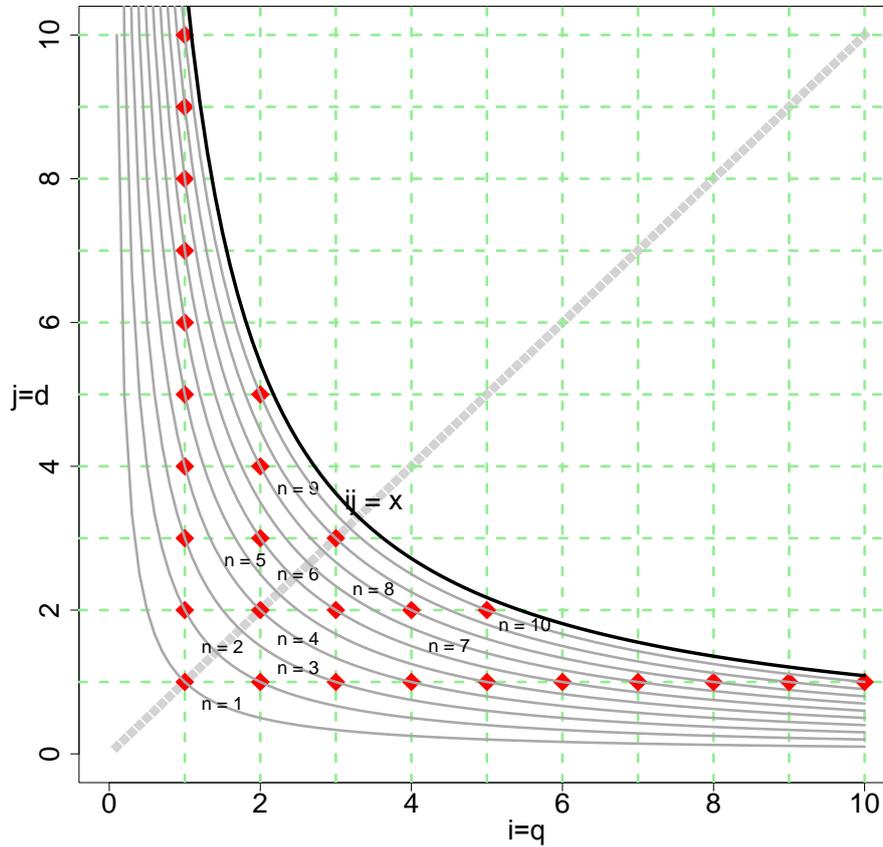


Figura 1

Assim temos  $\sum_{n \leq x} d(n) = 2 \sum_{d \leq \sqrt{x}} (\lfloor \frac{x}{d} \rfloor - d) + \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ . Como vale  $\lfloor y \rfloor = y + O(1)$ , logo:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} d(n) &= 2 \sum_{d \leq \sqrt{x}} [\frac{x}{d} - d + O(1)] + O(\sqrt{x}), \\ &= 2x \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{1}{d} - 2 \sum_{d \leq \sqrt{x}} d + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Como vale  $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(\frac{1}{x})$ , para  $x \geq 1$  e  $\sum_{n \leq x} n^\alpha = \sum_{n \leq x} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^\alpha)$ , com  $\alpha = 1$  ([1], pág 55), então temos:

$$\begin{aligned} 2x \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{1}{d} - 2 \sum_{d \leq \sqrt{x}} d + O(\sqrt{x}) &= 2x[\log \sqrt{x} + \gamma + O(\frac{1}{\sqrt{x}})] - 2[\frac{x}{2} + O(\sqrt{x})] + O(\sqrt{x}), \\ &= x \log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

□

# 3

## A MATRIZ DE REDHEFFER

A matriz de Redheffer é dada por:

$$R_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}, \quad (14)$$

conforme descrito em (5), sua regra de formação é a seguinte:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j|i \text{ ou } j = 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (15)$$

Nesse capítulo, apresentaremos algumas propriedades elementares do determinante e da permanente da matriz de Redheffer, assim como as do seu polinômio característico.

### 3.1 O DETERMINANTE DA MATRIZ DE REDHEFFER

A seguir, mostramos como o determinante da matriz de Redheffer se conecta com a função de Mertens definida em (2).

**Teorema 3.1.** [18] *O determinante da matriz de Redheffer  $R_n$ ,  $\det(R_n)$ , é tal que  $\det(R_n) = M(n)$  em que  $M$  é a função de Mertens.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, considere:

$$Y_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mu(3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mu(4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu(5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mu(6) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Considere também  $X_6$  a matriz obtida permutando-se a primeira linha com a segunda linha de  $R_6$ , depois a segunda com a terceira linha de  $R_6$ , assim sucessivamente, até que a primeira linha "termina" no lugar da última. Isso se dá via 5 transposições:

$$X_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Fazendo  $X_6 Y_6$  temos:

$$X_6 Y_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(1) + \mu(2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mu(1) + \mu(3) \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mu(1) + \mu(2) + \mu(4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu(1) + \mu(5) \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(6) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(4) + \mu(5) + \mu(6) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Usando a propriedade:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n > 1, \end{cases} \quad (19)$$

obtemos:

$$X_6 Y_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & M(6) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Daí segue que  $\det(X_6 Y_6) = M(6)$ . Por outro lado, por construção,  $\det(X_6) = (-1)^{6-1} \det(R_6)$  e por Laplace,  $\det(Y_6) = (-1)^{6-1}$  (basta desenvolver  $\det(Y_6)$  por Laplace pela primeira linha). Assim  $\det(X_6 Y_6) = \det(X_6) \det(Y_6) = -\det(R_6)(-1) = M(6)$ . Logo  $\det(R_6) = M(6)$ . O argumento pode ser refeito para qualquer matriz de Redheffer de ordem  $n$ ,  $R_n$ , bastando construir  $X_n$ ,  $Y_n$  e repetir os passos acima. Logo,  $\det(R_n) = M(n)$ .

□

## 3.2 POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

**Teorema 3.2.** [3] *O polinômio característico da matriz de Redheffer  $p_{R_n}(x)$  é tal que  $p_{R_n}(x) = (x-1)^n - \sum_{k=1}^s v_{nk}(x-1)^{n-k-1}$  em que  $s = \lfloor \log_2 n \rfloor$  e  $v_{nk}$  é definido em 2.29.*

Vamos dar um exemplo para o uso da expressão fornecida pelo teorema acima com  $n = 10$ . Temos que  $p_{R_{10}}(x) = (x-1)^{10} - \sum_{k=1}^3 v_{nk}(x-1)^{9-k} = (x-1)^{10} - v(10,1)(x-1)^8 - v(10,2)(x-1)^7 - v(10,3)(x-1)^6$ . Como  $v(10,1) = 9$ ,  $v(10,2) = 8$  e  $v(10,3) = 1$ ; então vale

$$p_{R_{10}}(x) = (x-1)^{10} - 9(x-1)^8 - 8(x-1)^7 - (x-1)^6.$$

*Demonstração.* Considere a matriz de Redheffer:

$$R_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Para determinar o polinômio característico, precisamos calcular  $\det(A_n(x))$ , sendo  $A_n(x) = xI - R_n$ . Como vale que  $\det(A_n(x)) = \det(A_n(x))^t$ , trabalharemos com  $(A_n(x))^t$ :

$$(A_n(x))^t = \begin{bmatrix} x-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots \\ -1 & x-1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \dots \\ -1 & 0 & x-1 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & x-1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & x-1 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Ou seja,  $(A_n(x))^t$  tem a seguinte regra de formação:

$$(A_n(x))^t = a_{ij} = \begin{cases} x-1 & \text{se } i = j, \\ -1 & \text{se } j = 1, i \neq 1; \\ -1 & \text{se } i|j, i \neq j; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (23)$$

Temos que :

$$\det(A_n(x))^t = \sum_{\pi \in S_n} \text{signal}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} a_{3,\pi(3)} \dots a_{n,\pi(n)}, \quad (24)$$

em que  $\pi$  é cada permutação do grupo simétrico  $S_n$ . As permutações que contribuem para  $\det(A_n(x))^t$  são aquelas que não possuem 0 em nenhum elemento do produto  $a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} a_{3,\pi(3)} \dots a_{n,\pi(n)}$ . Como cada permutação é composta de ao menos um ciclo, temos que descobrir quais as características dos ciclos das permutações que contribuem com o cálculo do determinante e também quantos ciclos existem em sua composição.

Considere a seguinte permutação genérica que não é a identidade:

$$\pi_x = [(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s, \tau_{s+1})\sigma], \quad (25)$$

sendo  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s, \tau_{s+1})$  um ciclo e  $\tau_1$  o menor dos seus elementos. Como esse ciclo tem mais de 1 elemento, tem  $s + 1$  elementos, ou seja ele não é a permutação identidade, então para ele contribuir, seus elementos têm que satisfazer a terceira regra de (23), ou seja,  $\tau_i | \tau_{i+1}$ . A última passagem do ciclo  $\tau_{s+1} \rightarrow \tau_1$ , representa o elemento  $a_{\tau_{s+1}, \tau_1}$ . Sendo  $\tau_1$  o menor elemento do ciclo, a única forma de  $a_{\tau_{s+1}, \tau_1} \neq 0$  é satisfazendo a segunda regra de (23). Dessa forma, é necessário que  $\tau_1 = 1$  e que  $\tau_i | \tau_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, s$ . Como o número 1 aparece em, no máximo, um dos ciclos que compõe  $\pi_x$ , segue que  $\pi_x$  deve ser formada por um único ciclo satisfazendo a condição de divisibilidade:

$$\tau_i | \tau_{i+1} \quad (26)$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, s$ .

A permutação identidade contribui com o termo  $(x - 1)^n$ . De acordo com o que foi discutido no parágrafo anterior, temos que os ciclos com  $k + 1$  elementos contribuem com:

$$\text{signal}(\pi) (-1)^{k+1} (x - 1)^{n-k-1}. \quad (27)$$

Pelo Lema 2.24:  $\text{signal}(\pi) (-1)^{k+1} = -1$ . Além disso, temos que a quantidade de ciclos de tamanho  $k + 1$ , indica a quantidade de vezes que uma parcela de  $\det(A_n(x))^t$  dá  $\text{signal}(\pi) (-1)^{k+1} (x - 1)^{n-k-1} = -(x - 1)^{n-k-1}$ . Então temos:

$$\det(A_n(x))^t = (x-1)^n + \sum_{k=1}^s -v_{nk}(x-1)^{n-k-1} = (x-1)^n - \sum_{k=1}^s v_{nk}(x-1)^{n-k-1}, \quad (28)$$

para algum  $s \leq n$  e  $v_{nk}$  definido em 2.29.

Agora precisamos descobrir quem é  $s$ . Devido aos critérios do ciclo, podemos montar o ciclo  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s, \tau_{s+1})$  da seguinte forma:

$$1 \rightarrow b_1 \rightarrow b_1 b_2 \rightarrow b_1 b_2 b_3 \rightarrow \dots \rightarrow b_1 b_2 b_3 \dots b_s, \quad (29)$$

em que  $\tau_1 = 1, \tau_2 = b_1, \tau_3 = b_1 b_2, \tau_4 = b_1 b_2 b_3, \dots, \tau_{s+1} = b_1 b_2 b_3 \dots b_s$ , com  $b_i \geq 2, 1 \leq i \leq s$ . Temos que  $b_1 b_2 b_3 \dots b_s \leq n$ , então quanto maior o valor de cada  $b_i$ , menor vai ser  $s$ . Como  $s$  é o maior valor de  $k$  possível, queremos maximizar  $s$ . Isso se dá quando todos os  $b_i$  são tais que  $b_i = 2$ , para  $1 \leq i \leq s$ . Assim:

$$2^s \leq n, \quad \text{ou seja,} \quad s \leq \log_2(n).$$

Como  $s$  é inteiro, o maior valor de  $s$  possível é  $s = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ . Logo, temos que  $P_{R_n}(x) = (x-1)^n - \sum_{k=1}^s v_{nk}(x-1)^{n-k-1}$ , com  $s = \lfloor \log_2 n \rfloor$ . □

Veremos a seguir que o polinômio característico  $P_{R_n}$  pode ser calculado recursivamente em  $n$ . Para tal, iremos considerar o polinômio  $U$ , definido por

$$U(x, n) = \det(u_{i,j}), \quad (30)$$

em que  $u_{i,j}$  é tal que:

$$u_{i,j} = \begin{cases} x-1 & \text{se } i = 1 \text{ ou } i = j, \\ -1 & \text{se } j \neq i \text{ e } j|i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (31)$$

Assim, podemos enunciar dois teoremas que mostraremos abaixo.

**Teorema 3.3.** [5]

Para  $n \geq 1$ , vale:  $U(x, n) = -(x-1)(P_{R_n}(x) - x(x-1)^{n-1})$ .

*Demonstração.*

$$U(x, n) = \begin{vmatrix} x-1 & x-1 & x-1 & x-1 & x-1 & \cdots & x-1 \\ -1 & x-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}. \quad (32)$$

Colocando os termos  $x - 1$  da primeira linha em evidência, temos:

$$U(x, n) = -(x-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & x-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}. \quad (33)$$

Note que:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & x-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & x-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Assim,  $U(x, n) = -(x - 1)(P_{R_n}(x) - x(x - 1)^{n-1})$ .

□

**Teorema 3.4.** [5] Para  $n \geq 1$  e  $x \neq 1$ , vale que:

$$U(x, n) = (x - 1)^{n-1} \left( (x - 1) + \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{U(x, \lfloor \frac{n}{k} \rfloor)}{(x - 1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}} \right). \quad (34)$$

*Demonstração.* Temos que:

$$U(x, n) = \begin{vmatrix} x-1 & x-1 & x-1 & x-1 & x-1 & \cdots & x-1 \\ -1 & x-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}. \quad (35)$$

Utilizando um processo de eliminação em  $U(x, n)$ , consistindo de operações em colunas, obtemos a equação abaixo com  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  resultantes desse processo:

$$U(x, n) = \begin{vmatrix} x-1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_n \\ -1 & x-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}. \quad (36)$$

Em cada passo, foi adicionada uma combinação linear adequada de colunas com índices  $2k, 3k, \dots, lk$  com  $l = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  e  $k \geq 2$ , na  $k$ -ésima coluna de  $U(x, n)$ , para assim eliminar as entradas  $u_{ki,k}$ , com  $i = 2, 3, \dots, l$  da  $k$ -ésima coluna de  $U(x, n)$ . Fazendo esse processo de eliminação com  $k = 2, 3, \dots, n$ , nessa ordem, cada determinante  $\det U[1, 2k, 3k, \dots, lk; k, 2k, 3k, \dots, lk]$  formados pela entradas de  $U(x, n)$  nas intersecções das linhas e das colunas de  $U(x, n)$  com os índices  $1, 2k, 3k, \dots, lk$  e  $k, 2k, 3k, \dots, lk$  respectivamente são deixados inalterados. Note que  $U(x, l) = \det U[1, 2k, 3k, \dots, lk; k, 2k, 3k, \dots, lk]$ . Então os números  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  em (36) satisfazem:

$$U(x, l) = \alpha_k(x-1)^{l-1}. \quad (37)$$

Em seguida, por outro processo de eliminação, eliminamos os  $-1$  na primeira coluna do determinante do lado direito de (36). Logo, utilizando (37):

$$U(x, n) = (x-1)^{n-1} \left( (x-1) + \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{\alpha_k}{x-1} \right) = (x-1)^{n-1} \left( (x-1) + \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{U(x, \lfloor \frac{n}{k} \rfloor)}{(x-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}} \right).$$

□

O teorema a seguir, obtido por Cardon (2010), estabelece algumas fórmulas de recorrência para os coeficientes  $v_{nk}$  do polinômio característico de  $R_n$ . Utilizando os resultados acima para o polinômio  $U$ , podemos dar uma demonstração alternativa para as recorrências que Cardon obteve.

**Teorema 3.5.** [4] *Vale que:*

$$v(n, v) = \sum_{2 \leq i \leq n} v\left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor, v-1\right),$$

para  $n \geq 1$  e  $v \leq \lfloor \log_2 n \rfloor$ .

*Demonstração.* Sabendo que vale o Teorema 3.2 e utilizando os Teoremas 3.3 e 3.4, podemos escrever:

$$\begin{aligned} (x-1)^{n-1} \left( (x-1) + \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{U(x, \lfloor \frac{n}{k} \rfloor)}{(x-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}} \right) &= -(x-1)(P_{R_n}(x) - x(x-1)^{n-1}), \\ (x-1)^{n-1} \left( (x-1) + \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{U(x, \lfloor \frac{n}{k} \rfloor)}{(x-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}} \right) &= -(x-1)(P_{R_n}(x) - (x-1)^n - (x-1)^{n-1}), \\ (x-1)^{n-1} \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{U(x, \lfloor \frac{n}{k} \rfloor)}{(x-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}} &= -(x-1)P_{R_n}(x) + (x-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.3, vale que:

$$U(x, \lfloor \frac{n}{k} \rfloor) = -(x-1)(P_{R_{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}}(x) - (x-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} - (x-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 1}). \quad (38)$$

Então:

$$(x-1)^{n-1} \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{-(x-1)P_{R_{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}}(x) + (x-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1} + (x-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}}{(x-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}} = -(x-1)P_{R_n}(x) + (x-1)^{n+1}. \quad (39)$$

Além disso, pelo Teorema 3.2, vale que

$$P_{R\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}(x) = (x-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} - \sum_{l=1}^{\lfloor \log_2 \lfloor \frac{n}{k} \rfloor \rfloor} v\left(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, l\right)(x-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - l - 1}. \quad (40)$$

Como iremos também usar o Teorema 3.2 no lado direito da expressão (39), sendo que no lado direito a substituição se dá para ordem  $n$ , e no lado esquerdo a substituição se dá para ordem  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ , iremos usar a notação  $l = ld$  para a substituição no lado direito e  $l = le$  para a substituição no lado esquerdo da expressão (39). Então temos:

$$\sum_{2 \leq k \leq n} \frac{-(x-1)^n((x-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} - \sum_{le=1}^{\lfloor \log_2 \lfloor \frac{n}{k} \rfloor \rfloor} v(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, le)(x-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - le - 1}) + (x-1)^{n+1} + (x-1)^{n+\lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 1}}{(x-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}} = -(x-1)((x-1)^n - \sum_{ld=1}^s v(n, ld)(x-1)^{n-ld-1}) + (x-1)^{n+1},$$

$$\sum_{2 \leq k \leq n} -(x-1)^n \left(1 - \sum_{le=1}^{\lfloor \log_2 \lfloor \frac{n}{k} \rfloor \rfloor} v(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, le)(x-1)^{-le-1}\right) + (x-1)^n + (x-1)^{n-1} = \sum_{ld=1}^s v(n, ld)(x-1)^{n-ld-1}(x-1),$$

$$\sum_{2 \leq k \leq n} \sum_{le=1}^{\lfloor \log_2 \lfloor \frac{n}{k} \rfloor \rfloor} v(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, le)(x-1)^{n-le-1} + (x-1)^{n-1} = \sum_{ld=1}^s v(n, ld)(x-1)^{n-ld},$$

$$\sum_{le=1}^{\lfloor \log_2 \lfloor \frac{n}{k} \rfloor \rfloor} \left( \sum_{2 \leq k \leq n} v(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, le) \right) (x-1)^{n-le-1} + (n-1)(x-1)^{n-1} = \sum_{ld=1}^s v(n, ld)(x-1)^{n-ld}.$$

Vamos comparar os termos de mesmo grau. Temos que  $n - le - 1 = n - ld$ , segue daí que  $le = ld - 1$ . Comparar os termos de mesmo grau também implica que

$$\sum_{2 \leq k \leq n} v(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, le) = v(n, ld), \text{ logo } \sum_{2 \leq k \leq n} v(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, ld - 1) = v(n, ld).$$

Fazendo  $k = i$  e  $ld = v$ , então temos:

$$\left( \sum_{2 \leq i \leq n} v(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor, v - 1) \right) = v(n, v).$$

□

Como consequência do teorema acima provado, temos o seguinte corolário:

**Corolário 3.6.** [4] Vale que:

$$v(n, v) = \sum_{j < n} v(j, v-1) \left( \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{j+1} \right\rfloor \right). \quad (41)$$

*Demonstração.* Sendo  $j$  tal que  $1 \leq j \leq n$ , para quais  $i$  temos  $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor = j$ ?

Temos que:

$$\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = j \Leftrightarrow j \leq \frac{n}{i} < j+1 \Leftrightarrow \frac{n}{j+1} < i \leq \frac{n}{j}.$$

Assim, pelo Teorema anterior, temos:

$$v(n, v) = \sum_{j < n} \sum_{\frac{n}{j+1} < i \leq \frac{n}{j}} v\left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor, v-1\right) = \sum_{j < n} \sum_{\frac{n}{j+1} < i \leq \frac{n}{j}} v(j, v-1) = \sum_{j < n} v(j, v-1) \left( \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{j+1} \right\rfloor \right). \quad \square$$

Também a partir do Teorema 3.5, podemos obter um outro corolário:

**Corolário 3.7.** [4] Seja  $1 \leq 2^v \leq n$  e  $v \geq 1$ . Então vale que

$$v(n, v) = \sum_{i=2}^{s'} v\left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor, v-1\right) + \sum_{j=2^{v-1}}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \left( \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{j+1} \right\rfloor \right) v(j, v-1),$$

$$\text{onde } s' = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1} \right\rfloor.$$

*Demonstração.* Vamos reescrever a expressão do Teorema 3.5 da seguinte maneira:

$$v(n, v) = \sum_{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1} v\left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor, v-1\right) + \sum_{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor} v\left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor, v-1\right), \quad (42)$$

onde o índice  $i$  atende a  $2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2^{v-1}} \right\rfloor$ .

Temos que:

$$\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 \Leftrightarrow \frac{n}{i} \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 \Leftrightarrow i \leq \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1} \Leftrightarrow i \leq \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1} \right\rfloor$$

Logo, vale que  $s' = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1} \right\rfloor$ .

Para o segundo somatório, fazendo  $j = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ , temos que para um dado  $j$ , vale:

$$j = \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \Leftrightarrow j \leq \frac{n}{i} < j+1 \Leftrightarrow \frac{n}{j+1} < i \leq \frac{n}{j}.$$

Assim, para cada  $j$ , temos a seguinte quantidade de  $i$  distintos, ou seja de  $v(j, v-1)$ :  $(\lfloor \frac{n}{j} \rfloor - \lfloor \frac{n}{j+1} \rfloor)$ . Logo, o segundo somatório pode ser escrito como:

$$\sum_{2^{v-1}}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} (\lfloor \frac{n}{j} \rfloor - \lfloor \frac{n}{j+1} \rfloor) v(j, v-1).$$

□

### 3.3 A PERMANENTE E O PROBLEMA DO FACTORISATIO NUMERORUM DE KALMÁR

Observe que, para cada par de inteiros positivos  $n$  e  $k$  com  $k \leq n$ , o número  $v_{nk}$  definido em 2.29 fornece o número de maneiras de se fatorar um número  $m \leq n$  em  $k$  fatores (não necessariamente distintos) considerando-se que ordenações distintas dos fatores levam a fatorações distintas. Por exemplo, para  $n = 7$  e  $k = 2$  apenas os números 4 e 6 (menores ou iguais a 7) podem ser fatorados em  $k$  fatores:

$$4 = 2 \times 2 \quad \text{e} \quad 6 = 2 \times 3 = 3 \times 2,$$

portanto,  $v_{7,2} = 3$ . Dessa forma, o número  $F(n)$  definido por:

$$F(n) = 1 + \sum_{k=1}^n v_{n,k}$$

representa a soma:

$$F(n) = 1 + \sum_{j=1}^n g(j)$$

dos números  $g(j), j = 1, 2, \dots, n$ , sendo  $g(1) = 1$  e  $g(j)$  o número de fatorações ordenadas do inteiro  $j > 1$ .

Kálmár(1930) estudou o comportamento assintótico de  $F(n)$  e provou que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n)}{n^\rho} = -\frac{1}{\rho \zeta'(\rho)}, \quad (43)$$

sendo  $\rho \approx 1.7286472389$  a raiz positiva da equação  $\zeta(\rho) = 2$ ,  $\zeta$  é a função zeta de Riemann.

Mais tarde, Erdős (1941) forneceu uma prova elementar da existência do limite no lado esquerdo de (43), a qual baseia-se na seguinte fórmula de recorrência:

$$F(n) = 1 + \sum_{2 \leq j \leq n} F(\lfloor n/j \rfloor), \quad n \geq 1. \quad (44)$$

Utilizando (44), Erdős também provou, de forma bastante elementar, que existem constantes positivas  $c_0$  e  $C_0$  tais que:

$$c_0 n^\rho \leq F(n) \leq C_0 n^\rho \quad \forall n \geq 1. \quad (45)$$

Posteriormente, Wilf (2004) provou que  $F(n)$  é, na verdade, a permanente de  $R_n$ . A seguir discutimos esse fato e também reproduzimos a prova de Erdős de (45) em detalhe.

**Lema 3.8.** [5] Para  $n \geq 1$ ,  $Per R_n = U(2, n)$ , com  $U$  definido em (30).

*Demonstração.* De acordo com a definição da permanente dada em 2.28, temos:

$$Per R_n = \sum_{\sigma \in S_n} r_{\sigma(1),1} r_{\sigma(2),2} r_{\sigma(3),3} \dots r_{\sigma(n),n}. \quad (46)$$

Agora, de acordo com a fórmula do Teorema 3.2, vamos escrever o polinômio característico da matriz de Redheffer da seguinte forma:

$$P_R(x) = f(x-1)(x-1)^{n-s-1}, \quad (47)$$

com  $s = \lfloor \log_2 n \rfloor$  e

$$f(t) = t^{s+1} - \sum_{k=1}^s v_{n,k} t^{s-k}. \quad (48)$$

Note que o produto  $r_{\sigma(1),1} r_{\sigma(2),2} r_{\sigma(3),3} \dots r_{\sigma(n),n}$  contribui com o permanente somente se  $\sigma$  é um ciclo  $\sigma = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$  tal que  $\tau_1 = 1$  e  $\tau_l | \tau_{l+1}$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots, k-1$ . Nesse caso, nos temos que  $r_{\sigma(1),1} r_{\sigma(2),2} r_{\sigma(3),3} \dots r_{\sigma(n),n} = 1$ . Somando todos os ciclos com tamanho de  $k = 1$  a  $n$ , adicionando o ciclo que representa a permutação identidade e utilizando a expressão (46), nós temos:

$$Per R_n = \sum_{\sigma \in S_n} r_{\sigma(1),1} r_{\sigma(2),2} r_{\sigma(3),3} \dots r_{\sigma(n),n} = 1 + \sum_{k=1}^n v_{n,k}. \quad (49)$$

Pelo Teorema 3.3, nós temos:

$$U(2, n) = -P_R(2) + 2 = -f(1) + 2 = -\left[1 - \sum_{k=1}^s v_{n,k}\right] + 2 = 1 + \sum_{k=1}^n v_{n,k}. \quad (50)$$

Comparando as duas últimas equações, encerra-se a demonstração.  $\square$

**Corolário 3.9.** [23] *Vale a seguinte igualdade  $PerR_n = F(n)$ .*

*Demonstração.* Comparando a expressão (50) com a definição de  $F(n)$ , concluímos que  $PerR_n = F(n)$ .  $\square$

**Teorema 3.10.** [5][7] *Existem constantes positivas  $c$  e  $C$  que obedecem a  $0.0874 < c \leq C < 1.0000094$  tais que, para todo  $n \geq 1$ , vale que:*

$$c \leq \frac{PerR_n}{n^\rho} \leq C,$$

onde  $\rho$  é aproximadamente igual a 1.728647 e  $\zeta(\rho) = 2$ ,  $\zeta$  é a função  $\zeta$  de Riemann.

*Demonstração.* Vamos estender  $U(2, \cdot)$  para uma função de variável real  $x \geq 1$  da seguinte maneira:  $U(2, x) = U(2, \lfloor x \rfloor)$  para  $x \geq 1$ . Pelo Lema 3.8, é suficiente provar o teorema acima para  $U(2, x)$ .

Seja:

$$c_0 = \min_{1 \leq n \leq 1000} \frac{U(2, n)}{n^\rho} \quad \text{e} \quad C_0 = \max_{1 \leq n \leq 1000} \frac{U(2, n)}{n^\rho}.$$

Seja também  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $1 \leq x \leq 1000$ , como

$$\frac{U(2, \lfloor x \rfloor)}{x^\rho} = \frac{U(2, \lfloor x \rfloor)}{(\lfloor x \rfloor)^\rho} \frac{(\lfloor x \rfloor)^\rho}{x^\rho} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2^\rho} < \frac{(\lfloor x \rfloor)^\rho}{x^\rho} \leq 1,$$

então temos:

$$\frac{c_0}{2^\rho} \leq \frac{U(2, x)}{x^\rho} \leq C_0, \quad (51)$$

para qualquer  $x \in [1, 1000]$ .

Vamos provar que para cada  $\nu \geq -1$  se:

$$1000 \times 2^\nu < x \leq 1000 \times 2^{\nu+1}, \quad (52)$$

então

$$U(2, x) \leq \left( C_0 + \frac{1}{1000^\rho} \left( \sum_{l=0}^{\nu} \frac{1}{(2^\rho)^l} \right) \right) x^\rho \quad (53)$$

e

$$\frac{c_0}{2^\rho} \left( \prod_{l=1}^{\nu+1} c_l \right) x^\rho \leq U(2, x), \quad (54)$$

onde  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_l, \dots$  com  $l \geq 1$ , são definidos da seguinte maneira:

$$c_l = \left[ 1 - \frac{1}{1000^{(\rho-1)}(\rho-1)2^{(l-1)(\rho-1)}} \right], \quad (55)$$

com  $l \geq 1$ .

Vamos provar que se (52) vale para  $\nu$ , então vale para  $\nu + 1$ . Seja  $x$  tal que

$$1000 \times 2^{\nu+1} < x \leq 1000 \times 2^{\nu+2}. \quad (56)$$

Pelo Teorema 3.4 e pela hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} U(2, x) &= 1 + \sum_{2 \leq k \leq x} U(2, x/k) \leq 1 + \left( C_0 + \frac{1}{1000^\rho} \left( \sum_{l=0}^{\nu} \frac{1}{(2^\rho)^l} \right) \right) x^\rho \sum_{2 \leq k \leq x} \frac{1}{k^\rho}, \\ &\leq 1 + \left( C_0 + \frac{1}{1000^\rho} \left( \sum_{l=0}^{\nu} \frac{1}{(2^\rho)^l} \right) \right) x^\rho (\zeta(\rho) - 1), \\ &= \left[ \frac{1}{x^\rho} + \left( C_0 + \frac{1}{1000^\rho} \left( \sum_{l=0}^{\nu} \frac{1}{(2^\rho)^l} \right) \right) \right] x^\rho, \\ &\leq \left( C_0 + \frac{1}{1000^\rho} \left( \sum_{l=0}^{\nu+1} \frac{1}{(2^\rho)^l} \right) \right) x^\rho. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, vamos assumir que (54) vale para  $\nu$  e vamos provar que vale para  $\nu + 1$ . Seja  $x$  um real satisfazendo (56). Pelo Teorema 3.4 e pela hipótese de indução, nós temos que:

$$\begin{aligned}
U(2, x) &= 1 + \sum_{2 \leq k \leq x} U(2, x/k) \geq \sum_{2 \leq k \leq x} \frac{c_0}{2^\rho} \left( \prod_{l=1}^{\nu+1} c_l \right) \left( \frac{x}{k} \right)^\rho, \\
&= \frac{c_0}{2^\rho} \left( \prod_{l=1}^{\nu+1} c_l \right) x^\rho \sum_{2 \leq k \leq x} \frac{1}{k^\rho}, \\
&= \frac{c_0}{2^\rho} \left( \prod_{l=1}^{\nu+1} c_l \right) \left[ \zeta(\rho) - 1 - \sum_{k > [x]} \frac{1}{k^\rho} \right] x^\rho, \\
&= \frac{c_0}{2^\rho} \left( \prod_{l=1}^{\nu+1} c_l \right) \left[ 1 - \sum_{k > [x]} \frac{1}{k^\rho} \right] x^\rho, \\
&\geq \frac{c_0}{2^\rho} \left( \prod_{l=1}^{\nu+1} c_l \right) \left[ 1 - \frac{1}{(\rho-1)([x])^{\rho-1}} \right] x^\rho, \\
&\geq \frac{c_0}{2^\rho} \left( \prod_{l=1}^{\nu+1} c_l \right) \left[ 1 - \frac{1}{1000^{\rho-1}(\rho-1)2^{(\nu+1)(\rho-1)}} \right] x^\rho, \\
&\geq \frac{c_0}{2^\rho} \left( \prod_{l=1}^{\nu+2} c_l \right) x^\rho.
\end{aligned}$$

Agora vamos estimar  $\omega_\nu = \left( \prod_{l=1}^{\nu+1} c_l \right)$ , com  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ , usando o fato de que vale:

$$\log(1-x) \geq -x - x^2 \geq -\frac{3}{2}x,$$

para  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
\log(\omega_\nu) &\geq -\frac{3}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{1000^{(\rho-1)}(\rho-1)2^{(l-1)(\rho-1)}} \right], \\
&= -\frac{3}{2 \times 1000^{(\rho-1)}(\rho-1)} \sum_{l=1}^{\infty} (2^{(\rho-1)})^{(1-l)}, \\
&= -\frac{3}{2 \times 1000^{(\rho-1)}(\rho-1)} \frac{1}{1-2^{(1-\rho)}} \geq -0.033834.
\end{aligned}$$

Logo, temos que  $w_\nu \geq 0.9667$  para todo  $\nu \geq 0$ .

Escrevendo uma pequena rotina na linguagem de programação R, obtemos que  $c_0 = 0,2998396$  e  $C_0 = 1$ . Além disso, temos que  $\sum_{l=0}^{v+1} \frac{1}{(2^p)^l} < 1.433$ . Assim, concluímos que  $0.0874 < c \leq \frac{PerR_n}{n^p} \leq C < 1.0000094$ .  $\square$



# 4

## ANÁLISE ESPECTRAL DA MATRIZ DE REDHEFFER

Barrett e Jarvis, em 1992, fizeram a análise espectral da Matriz de Redheffer. Nesse capítulo, apresentaremos os resultados obtidos por esses autores bem como uma interessante conjectura.

### 4.1 UM POLINÔMIO RESULTANTE DO POLINÔMIO CARACTERÍSTICO E SUAS RAÍZES

Vamos fazer a mudança de variável  $t = x - 1$ , em que  $x$  é a raiz de  $P_{R_n}(x) = (x - 1)^n - \sum_{k=1}^s v_{nk}(x - 1)^{n-k-1}$ , definido no Teorema 3.2 e vamos considerar o polinômio denotado por  $f_n(t)$  e expresso abaixo:

$$f_n(t) = \frac{P_{R_n}(t+1)}{t^{n-s-1}} = t^{s+1} - \sum_{k=1}^s v(n, k)t^{s-k}. \quad (57)$$

Barrett e Jarvis (1992) consideraram esse polinômio, para não precisar analisar todos os autovalores  $x = 1$  (ou  $t = 0$ ). Então a partir daí fizeram o estudo das raízes de  $f_n(t)$  e obtiveram alguns fatos que mostraremos a seguir. O primeiro deles está enunciado abaixo e trata-se das raízes de módulo grande de  $f_n(t)$

**Teorema 4.1** ([3]). *O polinômio  $f_n(t)$  tem raízes  $t_n^+$ ,  $t_n^-$  tais que :*

$$t_n^+ = \sqrt{n} + \log \sqrt{n} + \gamma - \frac{3}{2} + O\left(\frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}}\right) \quad (58)$$

e

$$t_n^- = -\sqrt{n} + \log \sqrt{n} + \gamma - \frac{3}{2} + O\left(\frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}}\right) \quad (59)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , onde  $\gamma = 0.5772\dots$  é a constante de Euler.

*Demonstração.* Pelo Lema 2.30, para cada  $n \geq 1$  e  $k \leq n$ , podemos afirmar:

$$v(n, k) < \frac{n(\log n)^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (60)$$

Lembrando que vale:

$$v(n, 1) = n - 1, \quad (61)$$

pois para  $k = 1$ , o ciclo contém 2 elementos. Como este deve iniciar em 1 e 1 divide todos os outros  $n - 1$  elementos possíveis para se colocar na segunda posição do ciclo, então  $v(n, 1) = n - 1$ . Assim, por (57), (60) e (61) temos:

$$\left| \frac{f_n(t)}{t^{s-1}} - t^2 + n - 1 \right| \leq \sum_{k=2}^s v(n, k) |t|^{1-k} < \sum_{k=2}^s \frac{n}{(k-1)!} \left( \frac{\log n}{|t|} \right)^{k-1}.$$

Logo, lembrando que  $e^y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}$ :

$$\left| \frac{f_n(t)}{t^{s-1}} - t^2 + n - 1 \right| < n \left( e^{\frac{\log n}{|t|}} - 1 \right), \quad (62)$$

e

$$\left| \frac{f_n(t)}{t^{s-1}} - t^2 + n - 1 + \frac{v(n, 2)}{t} \right| < n \left( e^{\frac{\log n}{|t|}} - 1 - \frac{\log n}{|t|} \right). \quad (63)$$

Vamos provar a existência de  $t_n^+$  e  $t_n^-$ . Colocando  $t = c\sqrt{n}$  em (62) temos:

$$\left| \frac{f_n(c\sqrt{n})}{(c\sqrt{n})^{s-1}} - c^2n + n - 1 \right| < n \left( e^{\frac{\log n}{|c|\sqrt{n}}} - 1 \right), \quad (64)$$

para  $n$  suficientemente grande:

$$e^{\frac{\log n}{|c|\sqrt{n}}} - 1 < \left( 2 \frac{\log n}{|c|\sqrt{n}} \right), \quad (65)$$

isso porque vale

$$e^y - 1 < 2y \quad (66)$$

para  $y$  pequeno, basta tomar  $y = \left( 2 \frac{\log n}{|c|\sqrt{n}} \right)$ , pois  $n$  grande torna  $y$  pequeno e (65) é verdadeira. A equação (66) é válida devido ao Teorema do Valor Médio,  $e^y - 1 =$

$e^y - e^0 = e^u(y - 0)$ , para  $0 \leq u \leq y$ . Daí para  $y < \log 2$ ,  $e^u < e^y = 2$ , ou seja  $e^y - 1 < 2y$ .

Assim,

$$\left| \frac{f_n(c\sqrt{n})}{(c\sqrt{n})^{s-1}} - n(c^2 - 1) - 1 \right| < n \left( 2 \frac{\log n}{|c|\sqrt{n}} \right) = \frac{2\sqrt{n} \log n}{|c|}. \quad (67)$$

De (67), temos:

$$\begin{aligned} -\frac{2\sqrt{n} \log n}{|c|} &< \frac{f_n(c\sqrt{n})}{(c\sqrt{n})^{s-1}} - n(c^2 - 1) - 1 < \frac{2\sqrt{n} \log n}{|c|}, \\ -\frac{2\sqrt{n} \log n}{|c|} + n(c^2 - 1) + 1 &< \frac{f_n(c\sqrt{n})}{(c\sqrt{n})^{s-1}} < \frac{2\sqrt{n} \log n}{|c|} + n(c^2 - 1) + 1. \end{aligned}$$

Então, de (67), obtemos com  $c = \pm 2$ :

$$-\sqrt{n} \log n + 3n + 1 < \frac{f_n(\pm 2\sqrt{n})}{(\pm 2\sqrt{n})^{s-1}} < \sqrt{n} \log n + 3n + 1,$$

e com  $c = \pm \frac{1}{2}$ , obtemos:

$$-4\sqrt{n} \log n - \frac{3n}{4} + 1 < \frac{f_n(\pm \frac{1}{2}\sqrt{n})}{(\pm \frac{1}{2}\sqrt{n})^{s-1}} < 4\sqrt{n} \log n - \frac{3n}{4} + 1.$$

Ou seja, colocando  $c = \pm 2$  e  $c = \pm \frac{1}{2}$ , temos que para  $n$  grande:

$$\frac{f_n(\pm 2\sqrt{n})}{(\pm 2\sqrt{n})^{s-1}} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{f_n(\pm \frac{1}{2}\sqrt{n})}{(\pm \frac{1}{2}\sqrt{n})^{s-1}} < 0.$$

Então, para  $n$  suficientemente grande, temos que  $f_n(\pm 2\sqrt{n})f_n(\pm \frac{1}{2}\sqrt{n}) < 0$ . Desta maneira, temos que  $f_n(t)$  tem uma raiz  $t_n^+ \in (\frac{1}{2}\sqrt{n}, 2\sqrt{n})$  e uma outra raiz  $t_n^- \in (-2\sqrt{n}, -\frac{1}{2}\sqrt{n})$ . Vamos denotar por  $t_n^{+,-}$  para representar  $t_n^+$  ou  $t_n^-$ . Assim, colocando  $t = t_n^{+,-}$  em (62), temos:

$$\left| (t_n^{+,-})^2 - (n - 1) \right| < n \left( e^{\frac{\log n}{|t_n^{+,-}|}} - 1 \right).$$

Assim, para  $n$  grande, aplicando o mesmo raciocínio feito para a partir de (64) obter (67), temos:

$$\left| (t_n^{+,-})^2 - n \right| < 2n \frac{\log n}{|t_n^{+,-}|} < 4\sqrt{n} \log n.$$

Logo:

$$|t_n^+ - \sqrt{n}| < \frac{4\sqrt{n} \log n}{t_n^+ + \sqrt{n}} = O(\log n).$$

De maneira similar,

$$|t_n^- + \sqrt{n}| = O(\log n).$$

Então temos que:

$$t_n^{+,-} = \pm\sqrt{n} + O(\log n). \tag{68}$$

Vamos refinar essas estimativas. Colocando  $t = t_n^{+,-}$  em (63), segue que :

$$\left| (t_n^{+,-})^2 - (n-1) - \frac{v(n,2)}{t_n^{+,-}} \right| < n \left( e^{\frac{\log n}{|t_n^{+,-}|}} - 1 - \frac{\log n}{|t_n^{+,-}|} \right).$$

Como vale o Lema 2.3, o lado direito da equação acima é menor que  $\frac{n(\log n)^2}{|t_n^{+,-}|^2}$  para  $n$  grande, basta tomar  $x = \frac{\log n}{|t_n^{+,-}|}$ , então temos:

$$(t_n^{+,-})^2 = n + \frac{v(n,2)}{t_n^{+,-}} + O([\log n]^2). \tag{69}$$

De (68), segue que:

$$\left( \frac{1}{t_n^{+,-}} \right) = \pm \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

Então, por (60), temos que:

$$\frac{v(n,2)}{t_n^{+,-}} = \pm \frac{v(n,2)}{\sqrt{n}} + O([\log n]^2).$$

Logo, por (69):

$$(t_n^{+,-})^2 = n \pm \frac{v(n,2)}{\sqrt{n}} + O([\log n]^2) = n \left[ 1 \pm \frac{v(n,2)}{n^{3/2}} + O\left(\frac{[\log n]^2}{n}\right) \right].$$

Dado que  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$  quando  $x \rightarrow 0$  e dado que, por (60), vale  $\frac{v(n,2)}{n^{3/2}} < \frac{\log n}{\sqrt{n}}$ , segue que:

$$t_n^{+,-} = \pm\sqrt{n} \left[ 1 \pm \frac{v(n,2)}{2n^{3/2}} + O\left(\frac{[\log n]^2}{n}\right) \right] = \pm\sqrt{n} + \frac{v(n,2)}{2n} + O\left(\frac{[\log n]^2}{\sqrt{n}}\right). \tag{70}$$

Temos que  $v(n, 2)$  conta todas as fatorações de números  $m \leq n$  em dois fatores não necessariamente distintos, assim:

$$v(n, 2) = \sum_{j=2}^n [d(j) - 2] = \sum_{j=1}^n d(j) - 2n + 1, \quad (71)$$

onde  $d(j)$  é o número de divisores de  $j$ . Então pelo Teorema 2.31, temos que:

$$v(n, 2) = n \log n + (2\gamma - 3)n + O(\sqrt{n}).$$

Substituindo em (70), temos:

$$t_n^+ = \sqrt{n} + \log \sqrt{n} + \gamma - \frac{3}{2} + O\left(\frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}}\right)$$

e

$$t_n^- = -\sqrt{n} + \log \sqrt{n} + \gamma - \frac{3}{2} + O\left(\frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}}\right).$$

□

Barrett e Jarvis(1992) também obtiveram um resultado sobre as raízes de módulo pequeno do polinômio  $f_n(t)$ . Isto é mostrado no Teorema abaixo.

**Teorema 4.2.** [3] *Dado  $\epsilon > 0$ , para  $n$  grande,  $f_n(t) = t^{s+1} - \sum_{k=1}^s v(n, k)t^{s-k}$  tem  $s - 1$  raízes dentro do círculo  $|t| < \log_{2-\epsilon} n$ , com  $t \in \mathbb{C}$ .*

*Demonstração.* Para  $r_n(t) = t^{s+1} - v(n, 1)t^{s-1}$ , no círculo  $|t| = \log_{2-\epsilon} n$  e lembrando que  $v(n, 1) = n - 1$ , vale:

$$|r_n(t)| = (\log_{2-\epsilon} n)^{s-1} |v(n, 1) - t^2| \geq (\log_{2-\epsilon} n)^{s-1} (n - 1 - (\log_{2-\epsilon} n)^2).$$

Utilizando o Lema 2.30 e a desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned} |f_n(t) - r_n(t)| &= (\log_{2-\epsilon} n)^{s-1} \left| \sum_{k=2}^s \frac{v_{nk}}{t^{k-1}} \right|, \\ &< (\log_{2-\epsilon} n)^{s-1} \sum_{k=2}^s \frac{n(\log n)^{k-1}}{(k-1)! (\log_{2-\epsilon} n)^{k-1}}, \\ &< (\log_{2-\epsilon} n)^{s-1} n (e^{\log(2-\epsilon)} - 1), \\ &= (1 - \epsilon)n (\log_{2-\epsilon} n)^{s-1}. \end{aligned}$$

Podemos usar do fato de que  $(1 - \epsilon)n < (n - 1 - (\log_{2-\epsilon} n)^2)$  para  $n$  grande conforme o Lema 2.4, ou seja, vale que:

$$|f_n(t) - r_n(t)| < (n - 1 - (\log_{2-\epsilon} n)^2) (\log_{2-\epsilon} n)^{s-1} \leq |r_n(t)|,$$

para  $n$  suficientemente grande. Então pelo Teorema de Rouché 2.8,  $r_n(t)$  e  $f_n(t)$  tem o mesmo número de raízes no círculo  $|t| = \log_{2-\epsilon} n$ . □

## 4.2 A CONJECTURA DE BARRETT-JARVIS

O Teorema 4.2 diz respeito a fronteira que os autovalores do polinômio característico de ordem  $n$  devem respeitar. Talvez devido a ele, Barrett e Jarvis (1992) fizeram a seguinte conjectura:

"Todas as raízes de  $f_n(t) = t^{s+1} - \sum_{k=1}^s v(n, k)t^{s-k}$  exceto duas, estão no círculo  $|t + 1| \leq 1$ , com  $t \in \mathbb{C}$ ". Isso foi testado numericamente para todos os  $n$  tais que  $n \leq 500$ . No entanto, Cardon (2010) encontrou um contra-exemplo para  $n = 2^{36}$ . Isso será alvo de discussão no próximo capítulo desse trabalho.

# 5

## DESPROVA DA CONJECTURA DE BARRETT-JARVIS

### 5.1 RELATO GERAL DA DESPROVA

Cardon (2010) conseguiu construir contra-exemplos para a conjectura de Barrett-Jarvis. Seu primeiro passo foi calcular a quantidade de ciclos  $v_{nk}$  das matrizes de Redheffer para ordens  $n = 10^6$ ,  $n = 2^{28}$  e  $n = 2^{36}$ . Após isso, mostrou que algumas raízes  $t$  de módulo pequeno de  $f_n(t)$  geravam autovalores  $x$  tais que  $|x| > 1$ , ou seja, estavam fora do círculo  $|t + 1| \leq 1$ , o que constitui uma contra-prova da conjectura de Barret-Jarvis. O autovalor de maior módulo se deu para a matriz de ordem  $n = 2^{36}$ ,  $|x| = 1.031192$ .

Maior módulo de autovalores "pequenos" de $P_{R_n}(x)$ . Fonte: Cardon (2010)	
$n$	$ x $
$10^6$	0.983108
$2^{28}$	0.998885
$2^{29}$	0.999120
$2^{30}$	0.999324
$2^{31}$	0.999501
$2^{32}$	0.999676
$2^{33}$	1.002646
$2^{34}$	1.005213
$2^{35}$	1.007423
$2^{36}$	1.031192

Nota-se que os contra-exemplos cujos módulos são maiores que 1 são muito próximos de 1. Por exemplo, para o autovalor cujo módulo é o maior,  $|x| = 1.031192$ , ele está acima de 1 por apenas 0.031192. Como essa diferença em relação a 1 é muito pequena, desconfiamos que a mesma poderia ter se dado devido a metodologia de cálculo, ou seja, algum erro computacional de arredondamento. Isso porque na tabela com a quantidades de ciclos  $v_{nk}$  que Cardon (2010) obteve, os números estão muito grandes,

alguns deles para a matriz de ordem  $n = 2^{36}$  ultrapassam 17 dígitos. Nesse caso, estes nem podem ser armazenados em aritmética IEEE 457 padrão, usada na maioria dos computadores de mesa, segundo Higham (2002). Esse fato pode ter gerado polinômios incorretos, o que explicaria o motivo de alguns autovalores serem ligeiramente maiores que 1. Além disso, Cardon (2010) usou linguagem de programa Mathematica e seu colega, Rodney Forcade, verificou independentemente usando linguagem de programação Maple, que parecem ser mais adequadas para computação simbólica em vez de computação numérica de alta precisão. Segue na próxima página a tabela obtida por Cardon (2010).

Quantidade $v_{nk}$ de ciclos. Fonte: Cardon (2010).			
$k$	$n = 10^6$	$n = 2^{28}$	$n = 2^{36}$
1	999,999	268,435,455	68,719,476,735
2	11,970,035	4,714,411,991	1,587,951,104,025
3	67,120,491	39,550,266,080	17,712,699,735,807
4	233,959,922	210,866,000,001	127,006,997,038,631
5	567,345,854	801,946,179,797	657,738,684,402,616
6	1,015,020,739	2,314,766,752,399	2,620,541,404,211,325
7	1,386,286,166	5,267,935,378,357	8,354,699,452,581,663
8	1,475,169,888	9,693,670,870,002	21,888,970,237,054,221
9	1,237,295,133	14,675,212,443,928	48,028,484,118,248,949
10	822,451,796	18,500,845,515,388	89,496,511,738,284,187
11	433,656,192	19,585,798,031,078	143,118,705,146,069,804
12	180,821,164	17,506,983,509,953	197,979,547,265,239,162
13	59,146,673	13,254,336,924,806	238,336,089,820,847,725
14	14,935,574	8,508,754,910,066	250,812,663,743,567,239
15	2,829,114	4,628,591,443,629	231,467,885,026,020,936
16	383,693	2,128,656,115,076	187,727,209,728,498,411
17	34,630	824,357,770,148	133,949,812,310,943,213
18	1672	267,263,904,116	84,103,735,312,636,462
19	20	71,941,723,387	46,433,832,280,215,021
20		15,889,930,335	22,505,741,596,654,059
21		2,830,811,858	9,551,600,816,612,963
22		396,537,923	3,536,981,261,202,340
23		42,162,106	1,137,490,727,898,326
24		3,284,753	315,879,734,318,303
25		177,731	75,228,001,661,856
26		4707	15,244,074,212,812
27		55	2,604,780,031,507
28		1	371,154,513,760
29			43,388,420,848
30			4,049,932,603
31			290,175,811
32			15,487,073
33			582,143
34			9555
35			71
36			1

Com isso, decidimos fazer nossa própria investigação, implementando uma rotina de verificação computacional feita em C++, usando a biblioteca de precisão quádrupla, chamada de "libquadmath" para averiguar se os valores calculados por Cardon estão corretos. Primeiro, recalculamos os coeficientes  $v_{nk}$ . Após isto, utilizando a fórmula do teorema 2.7, calculamos quantas raízes há dentro do círculo unitário para as matrizes de Redheffer de ordem  $n = 10^6$ ,  $n = 2^{28}$  e  $n = 2^{36}$  e comparamos com a quantidade de raízes esperadas para os respectivos polinômios  $f_n(t)$  das respectivas ordens. A seguir, relataremos essas tarefas com mais detalhes.

## 5.2 VERIFICAÇÃO DOS CICLOS

Para verificar as quantidades de ciclos  $v_{nk}$  apresentadas por Cardon (2010), precisamos implementar uma fórmula de recorrência para cálculo das quantidades de ciclos. Em princípio, poderia se utilizar o Corolário 3.6. Porém, a partir do que observa Cardon (2010), pode-se a partir de 3.5 obter uma fórmula mais eficiente do ponto de vista computacional, ou seja, o Corolário 3.7:

"Seja  $1 \leq 2^v \leq n$  e  $v \geq 1$ . Então vale que

$$v(n, v) = \sum_{i=2}^{s'} v\left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor, v-1\right) + \sum_{j=2^{v-1}}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \left( \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{j+1} \right\rfloor \right) v(j, v-1),$$

onde  $s' = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1} \right\rfloor$ ."

Num primeiro momento, ao implementar o código tendo como base o Corolário 3.7, para um polinômio característico de ordem  $n$ , escrevemos esse código de modo que uma matriz de ordem  $n$  seja necessária. No entanto para ordens muito grandes, como por exemplo  $n = 2^{28}$  e  $n = 2^{36}$ , há um problema de alocação de memória. Cada número quadmath tem 128 bits, ou seja, 16 bytes (1 byte = 8 bits). A ordem da matriz seria  $\log_2(n) \times n$ . No total, para  $n = 2^{36}$ , seriam necessários  $(36 \times 2^{36}) \times 16 = 39582418599936$  bytes, ou, equivalentemente, 39582.42 Gigabytes de memória RAM. Isso é muito, mesmo para supercomputadores, conforme mostram Hoisie *et al.* (2006).

Então foi necessário pensar numa maneira de tornar o código eficiente. Heyman (2019), mostrou que a cardinalidade de  $S(X) = [m : m = \lfloor \frac{X}{i} \rfloor, i \leq X]$  é tal que  $|S(X)| = \lfloor \sqrt{4X+1} \rfloor - 1$ , ou seja,  $|S(X)| \neq X$  e  $|S(X)|$  muito menor que  $X$ . Assim, não são necessárias todas as linhas da matriz de Redheffer de ordem  $n$  para calcular os  $v_{nk}$  dessa ordem  $n$ . O código então foi alterado criando-se uma rotina que localiza as linhas que realmente importam para a implementação da fórmula do Corolário 3.7. Desta maneira, a rotina computacional conseguiu rodar com relativa rapidez, mesmo para as matrizes de  $n = 2^{28}$  e  $n = 2^{36}$ . Isso porque usando o resultado de Heyman (2019), podemos substituir o  $n$  por  $2\sqrt{n}$ , grosso modo. Daí o novo espaço de alocação necessário fica aproximadamente  $(36 \times 2^{19}) \times 16 = 301989888$  bytes, ou, equivalentemente, 0.301989888 Gigabytes de memória RAM. Isso qualquer notebook atual consegue suportar. Após a finalização da rotina para cada matriz, verificamos que a quantidade de ciclos  $v_{nk}$  obtidas por esse presente trabalho confere com as de Cardon (2010).

### 5.3 RAÍZES DENTRO DO CÍRCULO UNITÁRIO

Usando o Teorema 2.7 podemos verificar a conjectura de Barrett-Jarvis. Isso porque ela conta a quantidade de raízes dentro do caminho da integral de linha. Então, para verificar a conjectura para uma dada ordem, por exemplo  $n = \alpha$ , sabemos que  $f_n(t)$  para essa ordem tem grau  $\lfloor \log_2 \alpha \rfloor + 1$ . Assim, se a conjectura de Barret-Jarvis for verdadeira, o valor da fórmula do Teorema 2.7 para  $n = \alpha$  tem que dar  $\lfloor \log_2 \alpha \rfloor - 1$ . Isso posto, implementamos uma rotina computacional para calcular numericamente a integral de contorno do Teorema 2.7.

Essa rotina necessita de métodos numéricos de integração, logo usamos a Regra dos Trapézios e a Regra de Simpson. Na rotina computacional para implementar essas regras foi necessário desenvolver uma aritmética para números complexos, pois o integrando possui variável complexa. Os teoremas abaixo descrevem esses métodos para funções de variáveis reais e limitam seu erro. Para integrais de contorno complexas, quando são aplicados os métodos diretamente, isso corresponde a aplicar esse mesmos métodos para a parte real e a parte imaginária do integrando.

**Teorema 5.1.** ([8], pág 165-167) Regra dos Trapézios. Vale que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{M-1}) + f(x_M)),$$

em que  $h = \frac{b-a}{M}$  e o erro  $E$  é tal que  $E = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi)$ ,  $a < \xi < b$ .

**Teorema 5.2.** ([8], pág 165-167) Regra de Simpson. Vale que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{M-1}) + f(x_M)),$$

em que  $h = \frac{b-a}{M}$  e o erro  $E$  é tal que  $E = -\frac{1}{180}(b-a)h^4 f^4(\xi)$  para  $a < \xi < b$ .

Em todos os métodos, implementamos essas integrais numéricas para várias quantidade de passos  $M$  para matrizes de ordem  $n = 10^6$ ,  $n = 2^{28}$  e  $n = 2^{36}$ . Para as matrizes de ordem  $n = 10^6$  e  $n = 2^{28}$ , os métodos foram utilizados para validar o que Cardon (2010) obteve. Para ordem  $n = 10^6$ , o polinômio  $f_n(t)$  tem grau 20, e em todos os métodos utilizados, a integral convergiu para 18, o que era esperado; todas as raízes exceto as de módulo grande estão no círculo unitário. Para ordem  $2^{28}$ , o polinômio  $f_n(t)$  tem grau 29, em todos os métodos utilizados a integral numérica convergiu para 27, o que também era esperado. Para a matriz de Redheffer de ordem  $n = 2^{36}$ , havia a expectativa de que talvez o trabalho de Cardon (2010) contivesse erros de arredondamento e que de fato nenhum autovalor  $x$  dessa matriz fosse tal que  $|x| > 1$ . Os resultados obtidos para essa matriz com esses dois métodos de integração numérica para variadas quantidade de passos  $M$  estão apresentados nas tabelas que estão na próxima página.

Regra de Simpson	
$M$	$N = a + ib$
$10^3$	$2.585859956512849568480852950316950X10^1 - i6.937995556681334687082962187112872X10^{-25}$
$10^4$	$2.532356203259925503372167721379398X10^1 - i1.443339732307440053625258357657753X10^{-26}$
$10^5$	$2.500352356445336147085551525718331X10^1 - i1.434228988111162817015827047338539X10^{-26}$
$2 \times 10^5$	$2.500001063966516957300241679908075X10^1 - i2.832564618006594248420239367433519X10^{-27}$
$3 \times 10^5$	$2.499999996793190979719793048750191X10^1 - i3.759044997214999714687759752585939X10^{-26}$
$4 \times 10^5$	$2.49999999922254378680068596689933X10^1 - i1.056647588212195624306963158954785X10^{-26}$
$5 \times 10^5$	$2.4999999999301984303056516194162X10^1 + i1.654958328679778943054342073303604X10^{-26}$
$6 \times 10^5$	$2.499999999995736832731615009732X10^1 - i2.674810405877637353164607720089651X10^{-26}$
$7 \times 10^5$	$2.49999999999983097544038197743X10^1 + i9.378864122055366348579668003325529X10^{-27}$
$8 \times 10^5$	$2.499999999999994206661447285X10^1 - i6.709253289510715859213656096956119X10^{-27}$
$9 \times 10^5$	$2.5000000000000000000000630044154911X10^1 - i3.089221418205185071775237144349771X10^{-27}$
$10 \times 10^5$	$2.5000000000000000000000006957207418X10^1 - i2.566686161213998138191216234823331X10^{-27}$
$13 \times 10^5$	$2.499999999999999999999999430380X10^1 + i2.092754189915879629643661450351790X10^{-26}$
$14 \times 10^5$	$2.499999999999999999999999585407X10^1 + i1.828016421316724039855785214714047X10^{-26}$
$15 \times 10^5$	$2.499999999999999999999999697097X10^1 - i7.443831179200389428487645462668366X10^{-27}$
$19 \times 10^5$	$2.4999999999999999999999998944831X10^1 - i8.916304459166232694348330939207476X10^{-28}$
$100 \times 10^5$	$2.5000000000000000000000000358050X10^1 - 4.878360891130347475203505318545296X10^{-27}$

Regra dos Trapézios	
$M$	$N = a + ib$
$10^5$	$2.499996809033396584216532106984664X10^1 - i5.848790743966075289953485490923366X10^{-27}$
$2 \times 10^5$	$2.500000000233236864029314286677209X10^1 - i3.586763622086178639074242095624150X10^{-27}$
$3 \times 10^5$	$2.500000000000012789501805157276387X10^1 - i2.816838181807381190685107733386733X10^{-26}$
$4 \times 10^5$	$2.500000000000000000000017380019186687X10^1 - i8.821403134727529555791442524829826X10^{-27}$
$5 \times 10^5$	$2.499999999999999999999979129572409X10^1 + i1.834502758376600246149701265630968X10^{-26}$
$6 \times 10^5$	$2.5000000000000000000000000576456X10^1 - i2.710314383112825156655824669367389X10^{-26}$
$7 \times 10^5$	$2.4999999999999999999999998132551X10^1 + i9.187289611766043039076580614189280X10^{-27}$
$8 \times 10^5$	$2.5000000000000000000000000882169X10^1 - i7.237304883467571477202851705742242X10^{-27}$
$9 \times 10^5$	$2.5000000000000000000000630044154911X10^1 - i3.089221418205185071775237144349771X10^{-27}$
$10 \times 10^5$	$2.500000000000000000000000298723X10^1 - i2.661302861041816841942444767828850X10^{-27}$

De fato, ao observar as tabelas, percebemos que em todos os métodos, o valor da integral numérica  $N$  converge para 25. O grau do polinômio  $f_n(t)$  da matriz de Redheffer de

ordem  $n = 2^{36}$  é 37, para que a conjectura de Barrett-Jarvis fosse verdadeira, a integral deveria convergir para 35. Poderia ser o caso em que nessa matriz há 25 autovalores dentro do círculo e 10 na borda do mesmo. Porém se isso fosse verdade a integral numérica não convergiria, ficando instável. Assim, acabamos confirmando o trabalho de Cardon (2010) e fornecendo uma nova desprova para a Conjectura de Barrett-Jarvis.

Importante notar que a Regra dos Trapézios e a Regra de Simpson convergem mais rápido que o esperado, principalmente considerando as gradações escolhidas para  $M$ . Isso se dá porque o integrando é uma função racional trigonométrica e segundo Trefethen e Weidman (2014), esse tipo de função converge exponencialmente para as mesmas. Além disso, na Regra dos Trapézios (e também na Regra de Simpson) há uma demora na convergência e repentinamente ela "explode". Isso ocorre devido ao fato de que o valor da parte real do integrando tem dois picos: quando o círculo passa pela raiz mais próxima dele e também quando passa perto da conjugada daquela. Quando este fato ocorre,  $P(z)$  fica pequeno e  $\frac{P'(z)}{P(z)}$  fica grande. Assim, a convergência aumenta rapidamente quando se consegue cobrir a área próxima aos picos (responsáveis pela maior quantidade de área a integrar) com maior quantidade possível de trapézios, ou seja, quando o número de passos  $M$  é da ordem de  $10^5$ . Para melhor compreensão, segue na próxima página uma figura de um dos picos para matriz de Redheffer para ordem  $n = 36$ . O eixo  $y$  é o valor da parte real do integrando e o eixo  $x$  é o parâmetro  $t$  de integração tal que  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

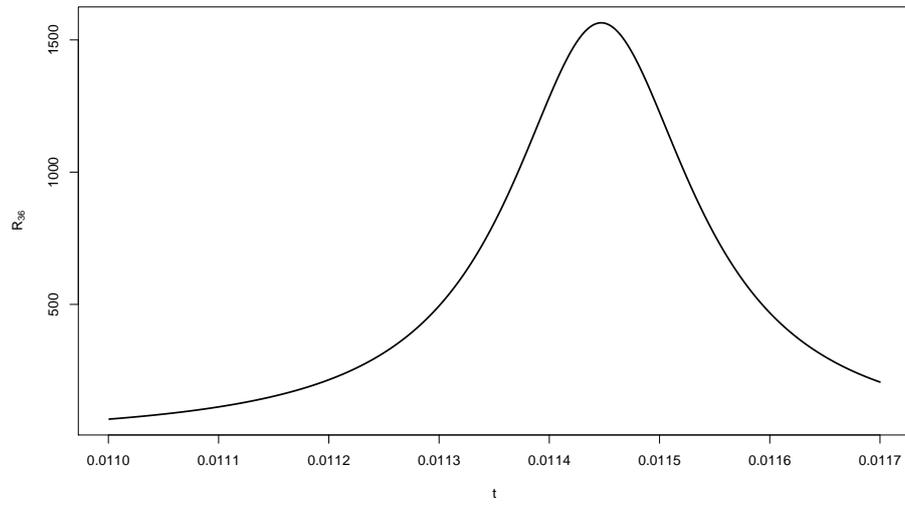


Figura 2



## BIBLIOGRAFIA

- [1] T.M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer Verlag, New York, 1976.
- [2] W. W. Barrett, W. F. Forcade e A. D. Follington, *On the Spectral Radius of a  $(0,1)$  Matrix Related to Mertens' Function*, *Linear Algebra and its Applications* 107(1988), 151-159.
- [3] W. W. Barrett, T. J. Jarvis, *Spectral Properties of a Matrix of Redheffer*, *Linear Algebra and its Applications* 162-164 (1992), 673-683.
- [4] D.A. Cardon, *Matrices associated to Dirichlet series*, *J. Number Theory* 130 (2010) 27-39.
- [5] A.P. de Camargo, *Dirichlet matrices: Determinants, permanents and the Factorisatio Numerorum problem*, *Linear Algebra and its Applications*, 628 (2021), 115-129.
- [6] H.G. Diamond, *Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers*, *Bull. Am. Math. Soc.* 7 (3) (1982), 553-589.
- [7] P. Erdős, *On some asymptotic formulas in the theory of the "Factorisatio Numerorum"*, *Ann Math.* 42 (4) (1941), 989-993.
- [8] W. Gautschi; *Numerical Analysis*, Birkäuser, Boston, 2011.
- [9] P.R. Halmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Springer, New York, 1974.
- [10] R. Heyman, *Cardinality of a floor function set*, *Integers* 19 (2019), A67.
- [11] N. Higham, *Accuracy and stability of numerical algorithms*, SIAM, Philadelphia, 2002.
- [12] A. Hoisie, G. Johnson, D. J. Kerbyson, M. Lang e S. Pakin, *A Performance Comparison Through Benchmarking and Modeling of Three Leading Supercomputers: Blue Gene/L, Red Storm, and Purple*, SC '06: Proceedings of the 2006 ACM/IEEE Conference on Supercomputing, Tampa, FL, USA, 2006, pp. 3-3, doi: 10.1109/SC.2006.4.

- [13] H. Hwang, *Distribution of the number of factors in random ordered factorizations of integers*, J. Number Theory 81 (2000) 61–92.
- [14] L. Kalmár, *Über die mittlere Anzahl der Produktdarstellungen der Zahlen*, Acta Sci. Math. 5(2-2)(1930-1932), 95-107.
- [15] S.Lang, *Complex Analysis*, Springer, New York, 1999.
- [16] I. Lankham, B. Nachtergaele e A. Schilling, *Linear Algebra as An Introduction to Abstract Mathematics*, World Scientific, 2016.
- [17] D.J. Newman e J. Bak, *Complex Analysis*, Springer, New York, 2010.
- [18] R. Redheffer, *Eine explizit lösbare Optimierungsaufgabe*, Numerische Methoden bei Optimierungsaufgaben, Band 3, Birkhäuser, Basel, 1977.
- [19] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, Oxford University Press, New York, 1988.
- [20] L.N. Trefethen e J.A.C Weidman, *The Exponentially Convergent Trapezoidal Rule*, SIAM Review, 56(3) (2014), 385-458.
- [21] R.C. Vaughan, *On the eigenvalues of redheffer's matrix, I*, Routledge, New York, 1993.
- [22] R.C. Vaughan, *On the eigenvalues of redheffer's matrix, II*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 60 (1996), 260-273.
- [23] H.S. Wilf, *The Redheffer matrix of a partially ordered set*, Electron. J. Comb. 11 (2) (2004) #R10.