



Universidade Federal do ABC

ALTEMIR BORTULI JUNIOR

# Tratamento Matemático de Modelos de Tumores Sólidos Localizados Via Simetrias de Lie

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da  
"Universidade Federal do ABC"

Santo André, 2021





Universidade Federal do ABC

**Universidade Federal do ABC**

**Centro de Matemática, Computação e Cognição**

**Altemir Bortuli Junior**

# **Tratamento Matemático de Modelos de Tumores Sólidos Localizados Via Simetrias de Lie**

**Orientador: Prof. Dr. Igor Leite Freire**

**Coorientador: Prof. Dr. Norberto Anibal Maidana**

Tese de doutorado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Doutor em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE  
DEFENDIDA PELO ALUNO ALTEMIR BORTULI JUNIOR,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. IGOR LEITE FREIRE.

**Santo André, 2021**

**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC**  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Bortuli Junior, Altemir

Tratamento Matemático de Modelos de Tumores Sólidos Localizados  
Via Simetrias de Lie / Altemir Bortuli Junior. — 2021.

111 fls.

Orientador: Igor Leite Freire

Tese (Doutorado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2021.

1. Tumores Sólidos Localizados. 2. Invasão de Tumores. 3. Modelos Matemáticos. 4. Simetrias de Lie. 5. Soluções Exatas. I. Freire, Igor Leite. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2021. III. Título.

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).**

**Santo André , 23 de agosto de 2021 .**

*Altamir Bertoli Junior*

**Nome completo e Assinatura do(a) autor(a)**

*Joaquim Lito Frain*

**Nome completo e Assinatura do(a) (co)orientador(a)**





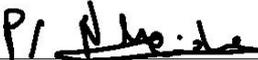
## MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

### Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

#### FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato, ALTEMIR BORTULI JUNIOR realizada em 16 de Agosto de 2021:

  
\_\_\_\_\_  
**Prof.(a) FELIPO BACANI**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

\_\_\_\_\_  
**Prof.(a) JULIANA MILITAO DA SILVA BERBERT**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

  
\_\_\_\_\_  
**Prof.(a) PRISCILA LEAL DA SILVA**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

  
\_\_\_\_\_  
**Prof.(a) STYLIANOS DIMAS**  
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

\_\_\_\_\_  
**Prof.(a) JÚLIO CÉSAR SANTOS SAMPAIO**  
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

  
\_\_\_\_\_  
**Prof.(a) MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

\_\_\_\_\_  
**Prof.(a) PAULO FERNANDO DE ARRUDA MANCERA**  
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO

\_\_\_\_\_  
**Prof.(a) RENATO MENDES COUTINHO**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

  
\_\_\_\_\_  
**Prof.(a) NORBERTO ANIBAL MAIDANA**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC – Presidente

\* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001”

# DEDICATÓRIA

Aos meus pais, com amor, dedico.



## AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares. Em especial, aos meus pais, Altemir Bortuli e Cecília Groff Bortuli, pelo apoio incondicional.

Aos meus amigos, Alcindo Teles Galvão e Bruno Rogério Locatelli dos Santos, por toda a parceria.

Ao pessoal da república, pela convivência.

Ao Prof. Igor Leite Freire, por todos os ensinamentos, pela paciência, pela orientação segura e dedicada e, principalmente, pela amizade, que torna leves os nossos encontros.

Ao Prof. Norberto Anibal Maidana, que me acompanha desde o mestrado, por ter sugerido o tema e o Prof. Igor como orientador, por todos os ensinamentos, pela co-orientação e pela amizade ao longo desta caminhada.

À Prof. Maria José de Paula Castanho, pela orientação durante a graduação e pelo incentivo e apoio para que eu prosseguisse na vida acadêmica.

À Prof. Priscila Leal da Silva e à Prof. Juliana Militão da Silva Berbert, por terem aceito compor a banca da minha qualificação e pelas contribuições e sugestões ao texto desta tese.

À Prof. Priscila Leal da Silva, ao Prof. Felipe Bacani, ao Prof. Stylianos Dimas e ao Prof. Marcus Antônio Mendonça Marrocos, por terem aceito compor minha banca de defesa e pelas correções e sugestões ao texto final desta tese.

A todos os professores que contribuíram, cada um à sua forma e à sua época, para a minha formação.

Por fim, à UFABC, pela estrutura de trabalho e pelo suporte financeiro.



## RESUMO

Nesta tese, estudamos um modelo matemático para invasão tumoral. O modelo consiste em um sistema não-linear de equações diferenciais parciais, que descreve a dinâmica de interações entre a densidade de células tumorais, a densidade da matriz extracelular e a concentração de enzimas degradantes da matriz. Realizamos uma completa classificação dos grupos locais de transformações de pontos de Lie do sistema. Usamos as técnicas de simetrias para construir soluções invariantes para o modelo. Consequentemente, obtivemos soluções particulares do sistema, que são majoritariamente consistentes com a biologia do fenômeno.

**Palavras-chave:** Tumores Sólidos Localizados, Invasão de Tumores, Modelos Matemáticos, Simetrias de Lie, Soluções Exatas.



## ABSTRACT

In this thesis, we study a mathematical model for tumor invasion. It consists of a nonlinear system of partial differential equations describing the dynamics of interactions between tumor cells density, extracellular matrix density, and the matrix degrading enzymes concentration. We carried out a complete group classification of the Lie point symmetries of the system. We used symmetry techniques to construct invariant solutions for the model. Consequently, we obtained particular solutions of the system, which are mostly consistent with the biology of the phenomenon.

**Keywords:** Localized Solid Tumors, Tumor Invasion, Mathematical Models, Lie Symmetries, Exact Solutions.



# CONTEÚDO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	1
2	O CÂNCER E O MODELO MATEMÁTICO . . . . .	3
2.1	O Câncer . . . . .	3
2.2	O Modelo Matemático . . . . .	12
3	SIMETRIAS DE LIE . . . . .	17
3.1	Existência e unicidade de soluções . . . . .	17
3.2	Grupos Locais de Lie de Transformações . . . . .	22
3.3	Transformações infinitesimais . . . . .	24
3.3.1	Primeiro Teorema Fundamental de Lie . . . . .	24
3.3.2	Geradores infinitesimais . . . . .	27
3.3.3	Funções invariantes . . . . .	33
3.4	Transformações Pontuais e Transformações estendidas . . . . .	34
3.4.1	Grupos estendidos de transformações pontuais: $m$ variáveis dependentes e $n$ independentes . . . . .	36
3.4.2	Transformações infinitesimais estendidas: $m$ variáveis dependentes e $n$ independentes . . . . .	37
3.5	Critério de invariância . . . . .	46
3.6	Construção de invariantes e Soluções . . . . .	48
3.6.1	Método de características . . . . .	49
3.6.2	Obtenção de invariantes e soluções . . . . .	50
4	CLASSIFICAÇÃO DE SIMETRIAS DE LIE . . . . .	53
4.1	Equações determinantes . . . . .	53
4.2	Células tumorais e MDEs com difusões diferentes ( $D_1 \neq D_2$ ) . . . . .	59
4.2.1	Modelo completo ( $\rho\delta\lambda\mu \neq 0$ ) . . . . .	59
4.2.2	Sem decaimento de MDEs ( $\rho\delta\mu \neq 0$ e $\lambda = 0$ ) . . . . .	60
4.2.3	Sem degradação da ECM ( $\rho\mu\lambda \neq 0$ e $\delta = 0$ ) . . . . .	60
4.2.4	Sem decaimento de MDEs e sem degradação da ECM ( $\rho\mu \neq 0$ e $\lambda = \delta = 0$ ) . . . . .	61
4.2.5	Sem haptotaxia ( $\mu\delta\lambda \neq 0$ e $\rho = 0$ ) . . . . .	61

4.2.6	Sem decaimento de MDEs e sem haptotaxia ( $\mu\delta \neq 0$ e $\lambda = \rho = 0$ )	63
4.2.7	Sem haptotaxia e sem degradação da ECM ( $\mu\lambda \neq 0$ e $\rho = \delta = 0$ )	63
4.2.8	Sem decaimento de MDEs, sem haptotaxia e sem degradação da ECM ( $\mu \neq 0$ e $\lambda = \rho = \delta = 0$ ) . . . . .	64
4.2.9	Sem produção de MDEs ( $\rho\delta\lambda \neq 0$ e $\mu = 0$ ) . . . . .	64
4.2.10	Sem produção e decaimento de MDEs ( $\rho\delta \neq 0$ e $\lambda = \mu = 0$ ) .	65
4.2.11	Sem haptotaxia e sem produção de MDEs ( $\delta\lambda \neq 0$ e $\rho = \mu = 0$ )	65
4.2.12	Sem produção e decaimento de MDEs e sem haptotaxia ( $\delta \neq 0$ e $\lambda = \rho = \mu = 0$ ) . . . . .	66
4.2.13	Sem degradação da ECM e sem produção de MDEs ( $\rho \neq 0, \forall \lambda$ e $\delta = \mu = 0$ ) . . . . .	67
4.2.14	Sem haptotaxia, sem degradação da ECM e sem produção de MDEs ( $\forall \lambda$ e $\delta = \rho = \mu = 0$ ) . . . . .	68
4.3	Células tumorais e MDEs com difusões iguais ( $D_1 = D_2$ ) . . . . .	69
4.3.1	Sem haptotaxia e sem produção de MDEs ( $\delta\lambda \neq 0$ e $\rho = \mu = 0$ )	69
4.3.2	Sem haptotaxia e sem produção e decaimento de MDEs ( $\delta \neq 0$ e $\lambda = \rho = \mu = 0$ ) . . . . .	71
4.3.3	Sem haptotaxia, sem degradação da ECM e sem produção de MDEs ( $\forall \lambda$ e $\delta = \rho = \mu = 0$ ) . . . . .	71
4.3.4	Sem haptotaxia e sem degradação da ECM ( $\lambda\mu \neq 0$ e $\delta = \rho = 0$ )	72
4.3.5	Sem haptotaxia, sem degradação da ECM e sem decaimento de MDEs ( $\mu \neq 0$ e $\lambda = \delta = \rho = 0$ ) . . . . .	74
5	CONSTRUÇÃO DE SOLUÇÕES INVARIANTES . . . . .	79
5.1	Sistema em coordenadas esféricas . . . . .	79
5.2	Simetrias do sistema (5.2) . . . . .	80
5.3	Soluções particulares do sistema (5.2) . . . . .	82
5.3.1	Sem haptotaxia e sem decaimento de MDEs ( $\rho = \lambda = 0$ ) . . .	82
5.3.2	Sem decaimento de MDEs ( $\lambda = 0$ ) . . . . .	85
6	DISCUSSÕES . . . . .	87
7	CONCLUSÃO . . . . .	91
	REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA . . . . .	91

# 1

## INTRODUÇÃO

O câncer é um dos principais problemas de saúde pública no mundo, que causa um alto impacto financeiro e emocional. É a segunda causa de morte, atrás apenas de doenças cardiovasculares [29]. O câncer tem início em nível subcelular com mutações nos genes que controlam a maneira como as células funcionam, principalmente seu crescimento e divisão, e manifesta alterações funcionais na escala celular e tecidual. A complexidade é tal que precisamos nos concentrar em subconjuntos da miríade de processos envolvidos, a fim de parcialmente compreender a evolução do câncer.

Quando buscamos compreender a evolução de tumores sólidos em estágio avascular, uma possível abordagem é via modelos contínuos de equações diferenciais parciais. Em [3], como um exemplo dessa abordagem, Anderson *et al.* propuseram um modelo que descreve a produção de enzimas degradativas pelas células tumorais, a degradação do tecido hospedeiro e a resposta migratória das células tumorais. Neste caso, o que está em consideração é o microambiente, onde as interações entre os elementos celulares e moleculares que o compõem são determinantes na progressão tumoral.

Uma alternativa para encontrarmos soluções analíticas de equações diferenciais em geral, e de modelos de tumores sólidos em particular, é por meio da teoria de simetrias de Lie [7, 19]. Uma simetria de um sistema de equações diferenciais é uma transformação que leva qualquer solução em outra solução do sistema. Do ponto de vista de Lie, tais transformações são grupos locais que dependem de parâmetros contínuos e consiste de transformações de pontos agindo no espaço das variáveis independentes e dependentes, podendo, mais geralmente, também agir no espaço de derivadas das variáveis dependentes até qualquer ordem finita.

Se um sistema de equações diferenciais é invariante sob a ação de um grupo local de pontos de Lie, podemos encontrar, construtivamente, soluções especiais, chamadas soluções invariantes, que são invariantes sob a ação de um subgrupo do grupo total admitido pelo sistema. Essas soluções resultam da solução de um sistema de equações diferenciais parciais reduzido, com menos variáveis independentes.

Neste trabalho, demos um tratamento matemático, via simetrias de Lie, ao modelo de tumores sólidos localizados proposto em [3].

A tese está estruturada como segue:

- No Capítulo 2, apresentamos estatísticas de câncer no mundo, alguns aspectos da biologia do câncer e o modelo matemático de tumores sólidos localizados.
- No Capítulo 3, introduzimos os conceitos básicos da teoria de simetrias de Lie, com exemplos ilustrativos majoritariamente contruídos a partir de resultados deste trabalho.
- No Capítulo 4, classificamos os grupos locais de simetrias de Lie do sistema estudado.
- No Capítulo 5, construímos soluções invariantes e reescrevemos o modelo proposto em coordenadas esféricas. Realizamos uma nova classificação de simetrias de Lie do novo sistema e, a partir dos geradores encontrados, construímos soluções invariantes para o sistema.
- No Capítulo 6, discutimos os nossos resultados.
- Por fim, no Capítulo 7, descrevemos as principais conclusões.

Essencialmente, os principais resultados estão nos Capítulos 4 e 5. Apresentamos esses resultados em [8,9] e os publicamos em [10].

# 2

## O CÂNCER E O MODELO MATEMÁTICO

Neste capítulo, apresentamos estatísticas de câncer no mundo, alguns aspectos de sua biologia e o modelo matemático de interesse deste trabalho.

### 2.1 O CÂNCER

Câncer é um termo genérico que representa um grupo heterogêneo de doenças caracterizadas pelo crescimento descontrolado e disseminação de células anormais [26,27]. Uma célula pode se tornar anormal, cancerosa, quando ocorrem mutações em um ou mais genes. Estas mutações, por sua vez, rompem os mecanismos normais de controle celular [21], o que leva, conseqüentemente, ao desenvolvimento de câncer.

Existem diversos fatores de risco ligados ao surgimento de câncer. Estes fatores incluem tabaco, genética, idade, dieta, ocupação, meio ambiente e agentes infecciosos. Entretanto, nenhum deles invariavelmente o causa, pois, por exemplo, nem todos os fumantes ou todas as pessoas com histórico familiar de câncer o desenvolveram [27]. Assim sendo, não existe um consenso em termos do que realmente causa câncer. As causas da anomalia são possivelmente diversas, até mesmo para um tipo específico de câncer, como o de pulmão.

O câncer, que é referido frequentemente como uma condição única, apresenta diversas manifestações. Existem mais de 200 tipos diferentes de câncer [28]. Entretanto, do ponto de vista histológico, que considera o tipo de tecido onde o câncer inicialmente surgiu, podemos agrupar todas as formas da anomalia, de acordo com [27], nas seis seguintes categorias:

- **Carcinomas** - surgem em células do revestimento interno ou externo do corpo e são os tipos mais comuns de câncer. Afetam, geralmente, órgãos ou glândulas capazes de secreção, tais como mama, pulmão, bexiga, cólon, próstata.

- **Sarcomas** - têm origem em tecidos de suporte e conectivos como ossos, tendões, cartilagem, músculos, gorduras. O câncer ósseo é um dos sarcomas denominado osteossarcoma.
- **Mielomas** - é o câncer que se origina nas células plasmáticas da medula óssea. As células do mieloma impedem a produção normal de anticorpos, deixando o sistema imunológico enfraquecido e suscetível à infecções. Isso faz com que eles interfiram na produção de células sanguíneas normais.
- **Leucemias** - é um tipo de câncer encontrado no sangue e na medula óssea e está frequentemente associada à superprodução de glóbulos brancos anormais. Tem como principal característica o acúmulo de células cancerosas na medula óssea, que substituem as células sanguíneas normais.
- **Linfomas** - desenvolvem-se no sistema linfático, conjunto formado por uma rede de vasos, nódulos e órgãos que purificam fluidos corporais e produzem as células responsáveis pela imunidade. Os linfomas também podem ocorrer em órgãos específicos, como o estômago, mama, cérebro.
- **Tipos Mistos** - os componentes de tipo podem estar dentro de uma categoria ou de categorias diferentes. Um exemplo é o carcinossarcoma, que é uma mistura de carcinoma (câncer de tecido epitelial) e sarcoma (câncer de tecido conjuntivo).

Os profissionais das áreas médicas, comumente, utilizam a classificação dos cânceres de acordo com o tipo histológico. Entretanto, o público em geral tem mais familiaridade com a classificação dos cânceres de acordo com o local primário, que é o local no corpo onde o câncer surgiu. Dentre os mais variados tipos, o câncer de mama é um exemplo, que o nome identifica o local, mas não o tipo de tecido envolvido.

A incidência e mortalidade por câncer está crescendo em todo o mundo. A Agência Internacional de Pesquisa em Câncer (IARC), ligada a Organização Mundial da Saúde (OMS), estima que um em cada cinco homens e uma em cada seis mulheres em todo o mundo desenvolvam câncer ao longo de suas vidas, e que um em cada oito homens e uma em cada dez mulheres morrerão da doença. A IARC estimou a incidência de 18,1 milhões de casos e 9,6 milhões de mortes por câncer em 2018. Uma análise ampla dessas estimativas de incidência e mortalidade em 185 países e para 36 tipos de câncer está disponível em [12].

A Figura 2.1 e a Figura 2.2 mostram, respectivamente, as estimativas de distribuição da incidência e da mortalidade, independente da idade ou do sexo, para os dez tipos mais comuns de câncer no mundo em 2018.

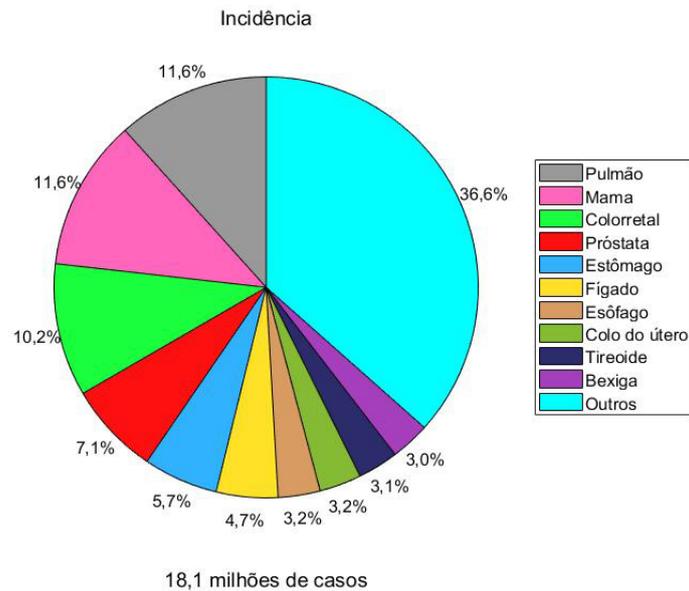


Figura 2.1: gráfico de setores feito a partir de dados disponibilizados em [12], que descreve estimativas de incidências dos 10 tipos mais comuns de câncer no mundo em 2018.

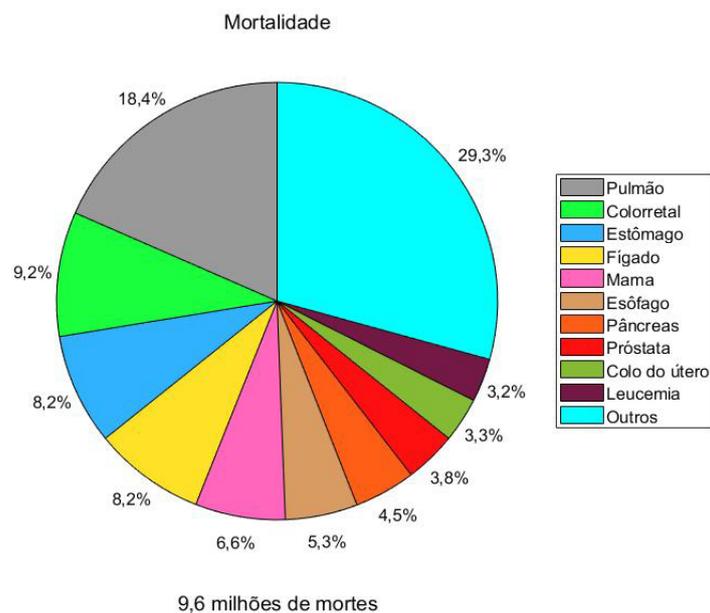


Figura 2.2: gráfico de setores feito a partir de dados disponibilizados em [12], que descreve os 10 tipos de câncer com maiores estimativas de mortalidade no mundo em 2018.

A Figura 2.3 e a Figura 2.4 mostram, respectivamente, as estimativas de distribuição da incidência e da mortalidade para os dez tipos mais comuns de cânceres no sexo masculino em 2018.

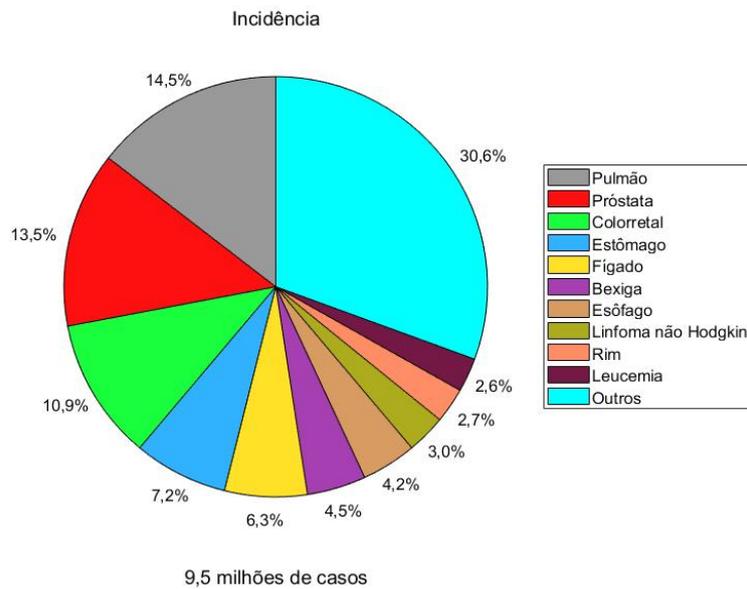


Figura 2.3: gráfico de setores feito a partir de dados disponibilizados em [12], que descreve estimativas de incidências dos 10 tipos mais comuns de câncer no sexo masculino no mundo em 2018.

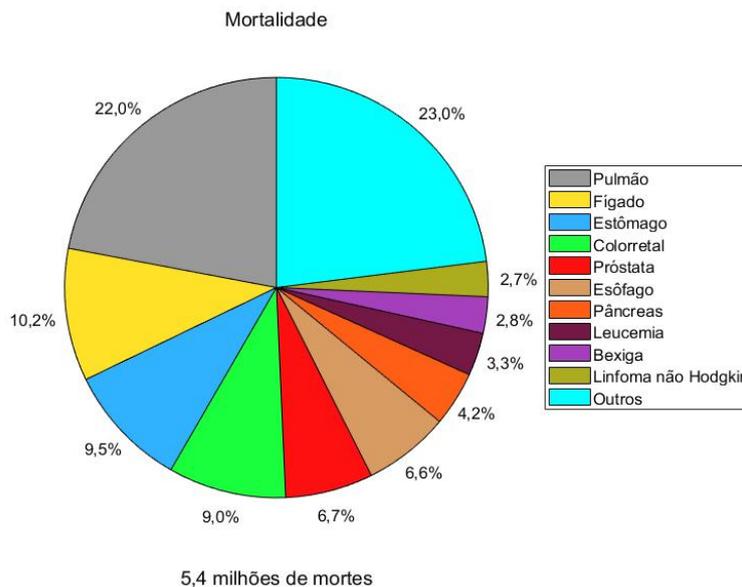


Figura 2.4: gráfico de setores feito a partir de dados disponibilizados em [12], que descreve os 10 tipos de câncer com maiores estimativas de mortalidade no sexo masculino no mundo em 2018.

Por fim, a Figura 2.5 e a Figura 2.6 mostram as estimativas de distribuição da incidência e da mortalidade, respectivamente, dos dez tipos mais comuns de câncer no sexo feminino no mundo em 2018.

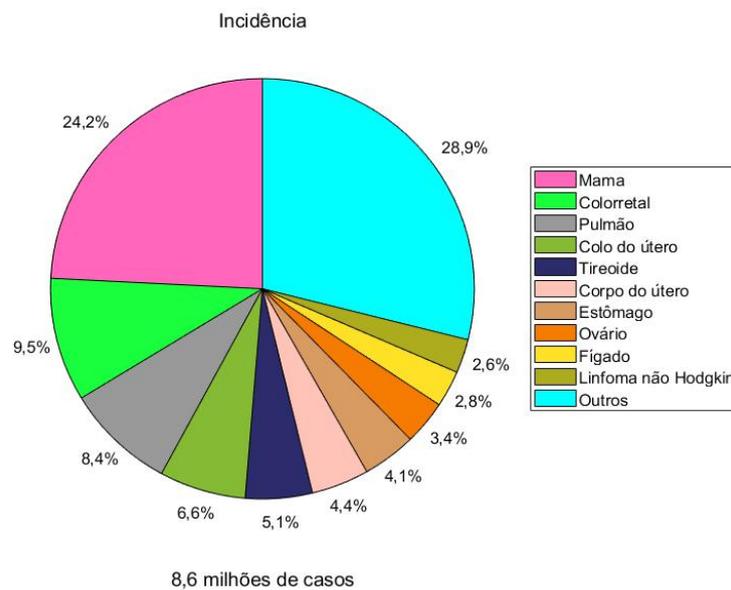


Figura 2.5: gráfico de setores feito a partir de dados disponibilizados em [12], que descreve estimativas de incidências dos 10 tipos mais comuns de câncer no sexo feminino no mundo em 2018.

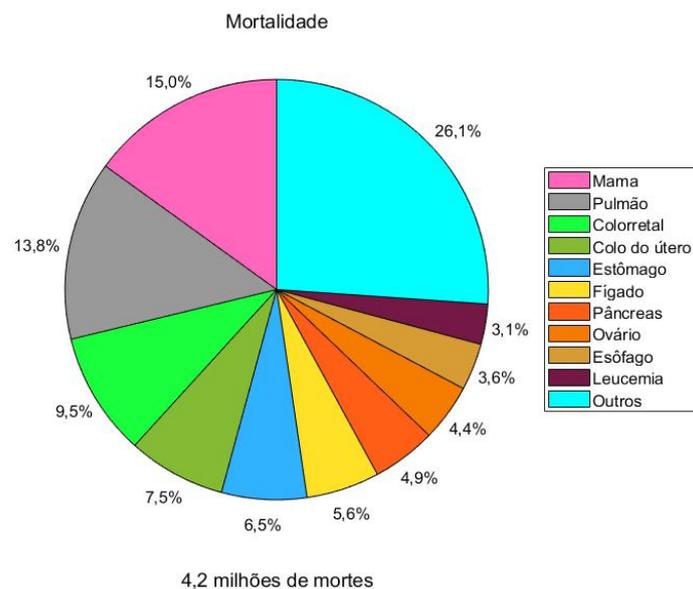


Figura 2.6: gráfico de setores feito a partir de dados disponibilizados em [12], que descreve os 10 tipos de câncer com maiores estimativas de mortalidade no sexo feminino no mundo em 2018.

Em [25] é possível observar, em mapas globais, o tipo de câncer mais comum e o tipo de câncer que causou maior mortalidade em 2018 em cada país. A Figura 2.7 e a Figura 2.8, respectivamente, mostram o câncer mais comumente diagnosticado e o que causou maior número de mortes a nível nacional em todo o mundo em 2018 para ambos os sexos.

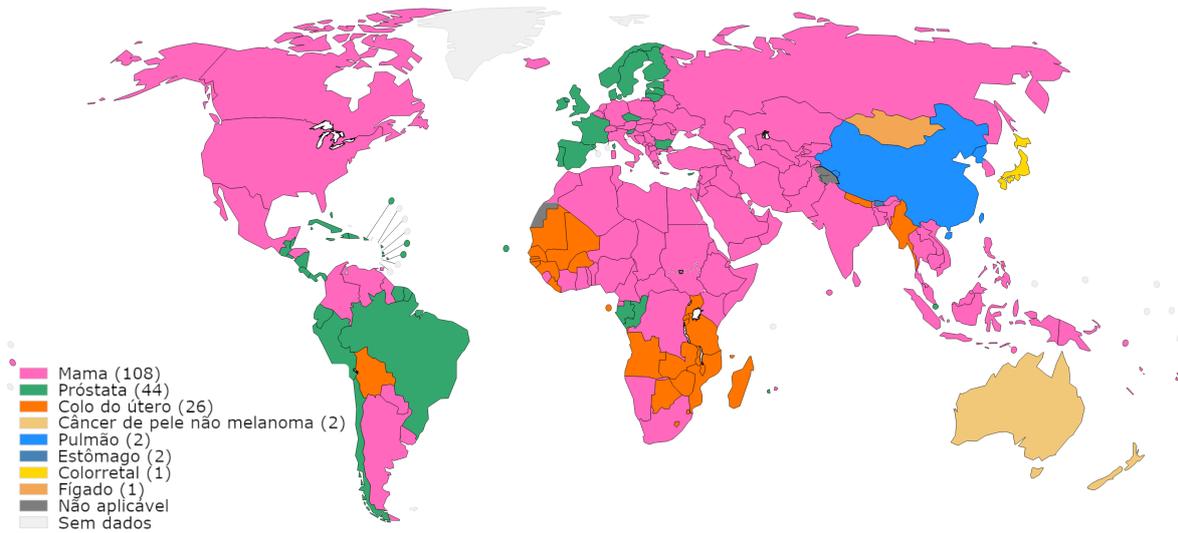


Figura 2.7: figura gerada em [25], que mostra o câncer com maior incidência em cada país em 2018, para ambos os sexos, e o número de países representados em cada grupo de classificação.

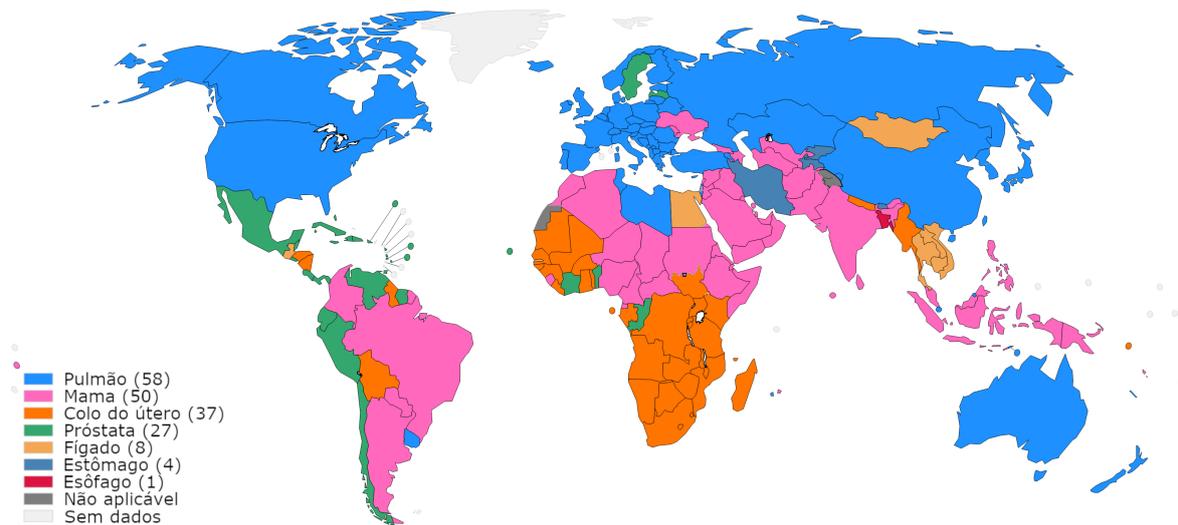


Figura 2.8: figura gerada em [25], que mostra o tipo de câncer que causou o maior número de mortes em cada país em 2018, para ambos os sexos, e o número de países representados em cada grupo de classificação.

Os mapas mostram a diversidade global dos cânceres com maior incidência ou mortalidade em cada país em 2018, principalmente, para o sexo masculino como mostra a Figura 2.9 e a Figura 2.10.

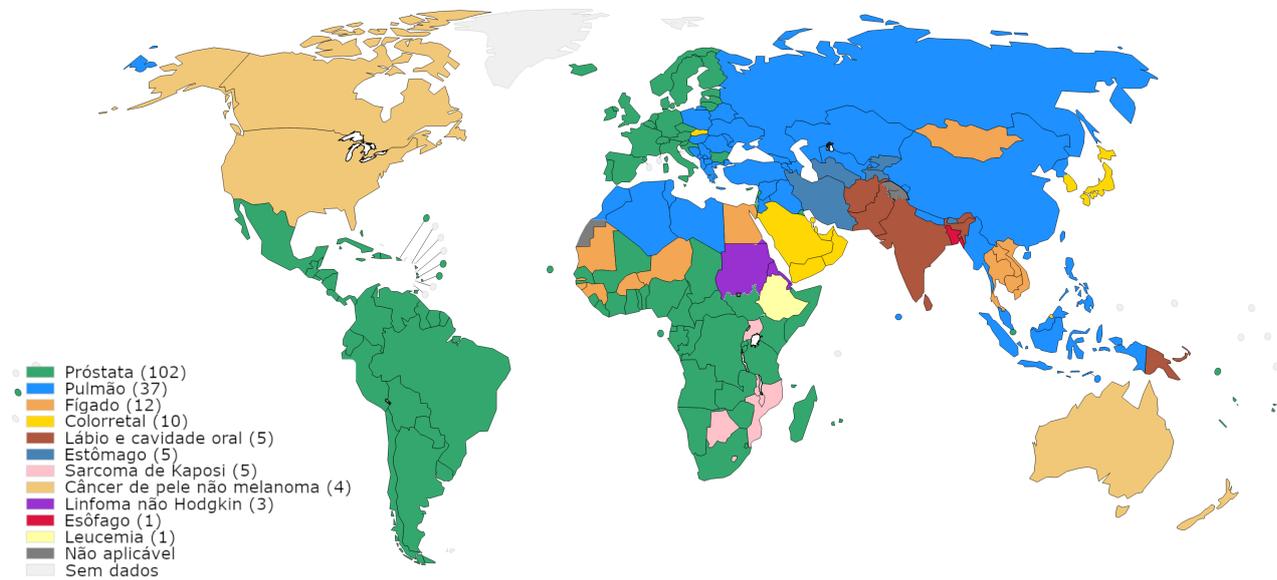


Figura 2.9: figura gerada em [25], que mostra o câncer com maior incidência no sexo masculino, em cada país em 2018, e o número de países representados em cada grupo de classificação.

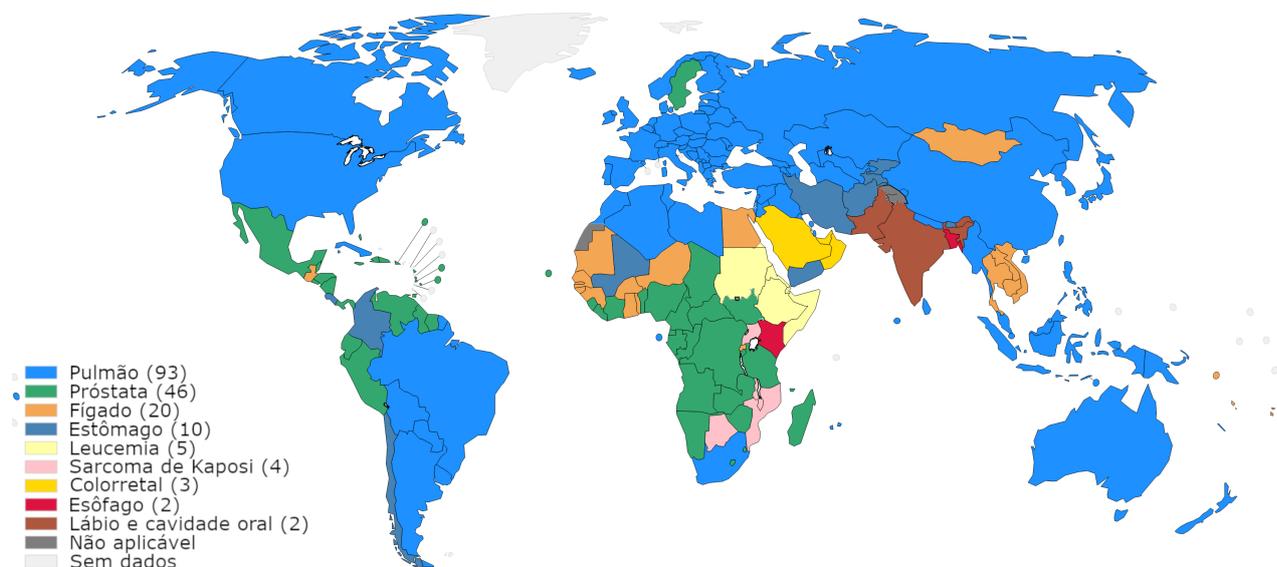


Figura 2.10: figura gerada em [25], que mostra o câncer com maior mortalidade no sexo masculino, em cada país em 2018, e o número de países representados em cada grupo de classificação.

Entre as mulheres, o tipo de câncer com maior incidência ou maior taxa de mortalidade, em cada país, pertence a um conjunto com seis tipos de ocorrência, como mostra a Figura 2.11 e a Figura 2.12.

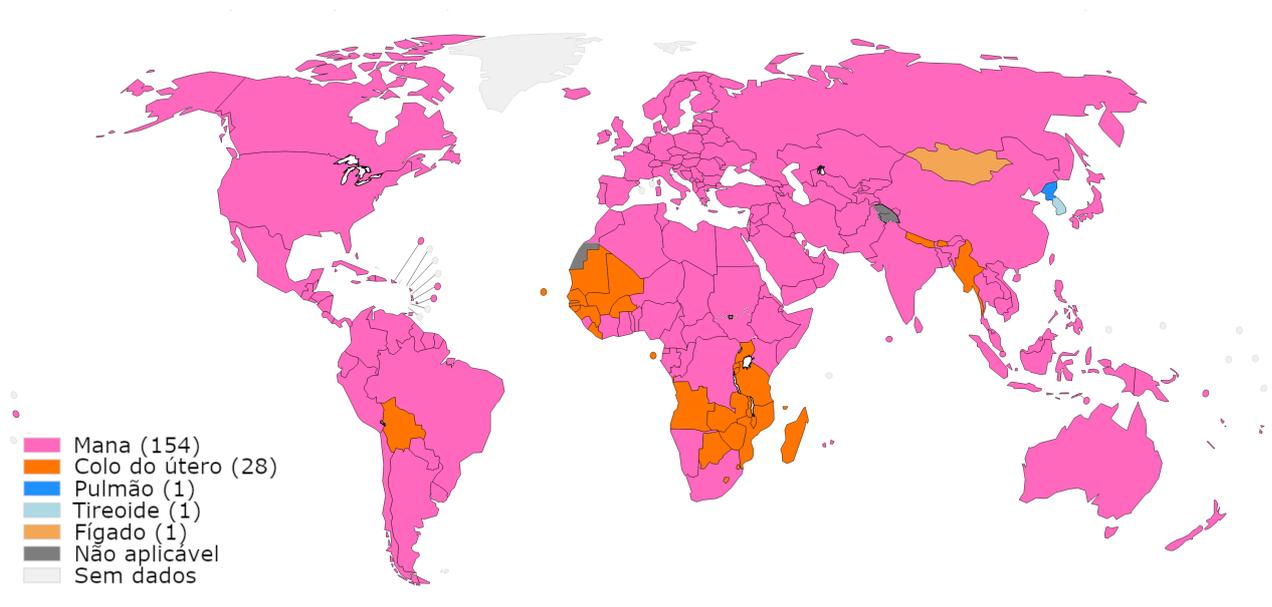


Figura 2.11: figura gerada em [25], que mostra o câncer com maior incidência no sexo feminino, em cada país em 2018, e o número de países representados em cada grupo de classificação.

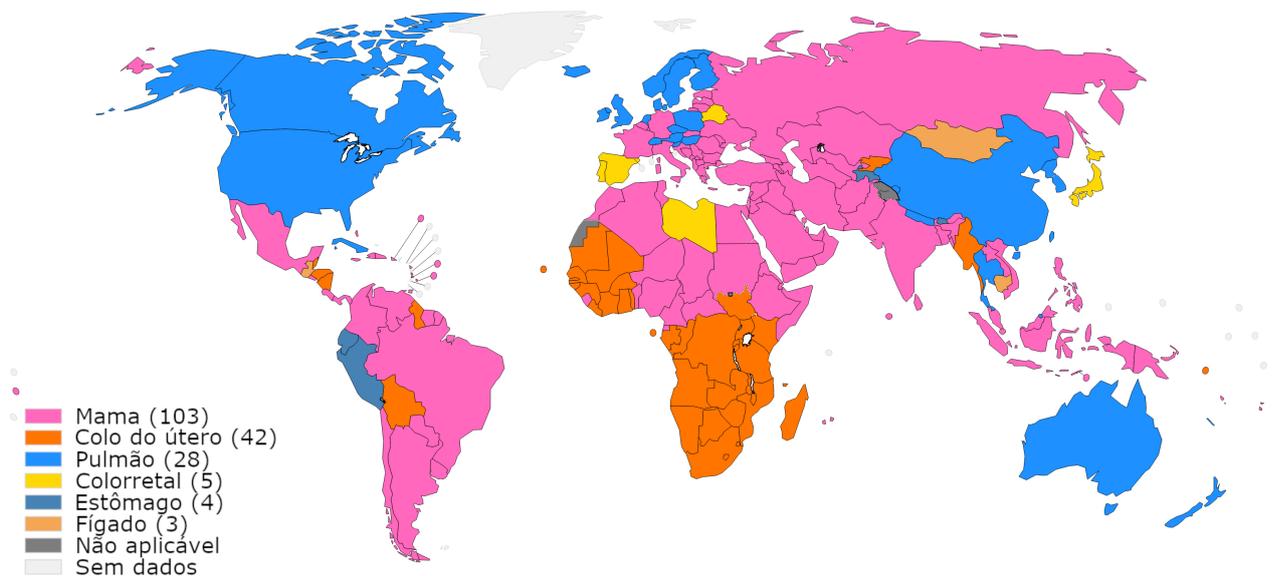


Figura 2.12: figura gerada em [25], que mostra o câncer com maior mortalidade no sexo feminino, em cada país em 2018, e o número de países representados em cada grupo de classificação.

Para a maioria dos tipos de câncer, a incidência e a mortalidade aumentam com a idade. De acordo com [1, 15], a idade é o fator de risco mais importante para o desenvolvimento do câncer, e que idosos com 65 anos ou mais representam em torno de 60% dos pacientes diagnosticados com a doença. A Figura 2.13 e a Figura 2.14, geradas em [25], evidenciam este fato.

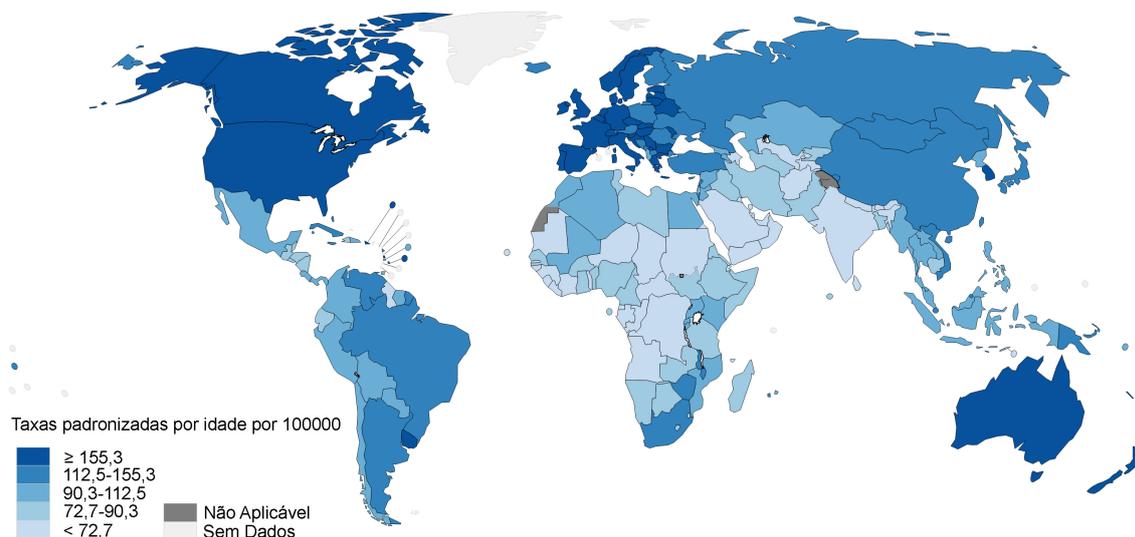


Figura 2.13: figura gerada em [25], que descreve estimativas das taxas de incidência padronizadas por idade (Mundial) em 2018, todos os cânceres, ambos os sexos, com idades entre 0 e 64 anos.

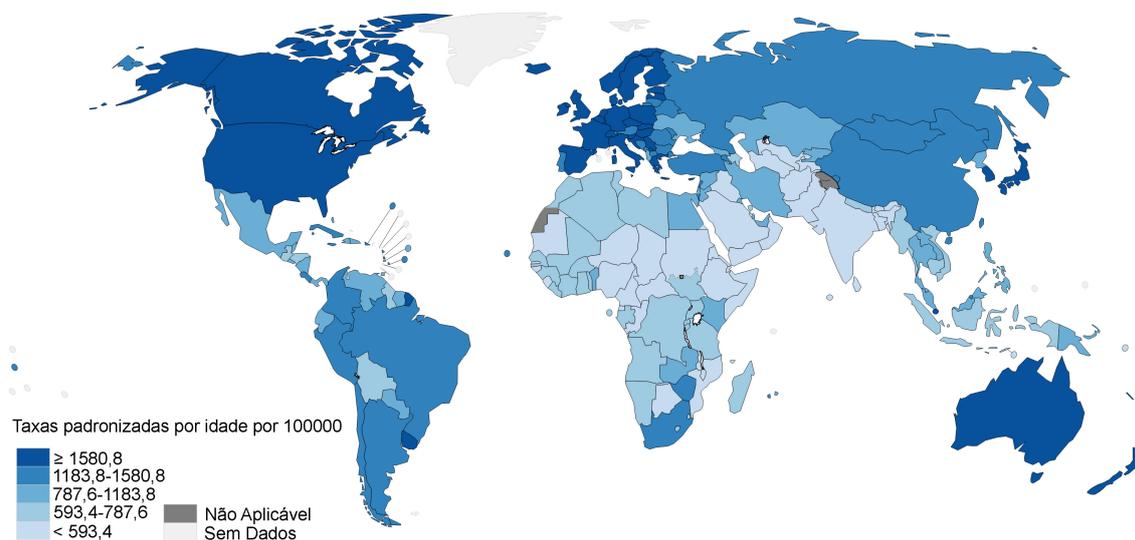


Figura 2.14: figura gerada em [25], que descreve estimativas das taxas de incidência padronizadas por idade estimadas (Mundial) em 2018, todos os cânceres, ambos os sexos, com 65 anos ou mais.

As taxas estimadas de incidência padronizadas por idade, por 100.000 pessoas no ano de 2018, aumentam substancialmente em todo o mundo para pessoas com 65 anos ou mais. Dessa forma, a associação entre câncer e envelhecimento é mais do que aparente. Além disso, o aumento da expectativa de vida é uma realidade e, conseqüentemente, o provável aumento da incidência de câncer pode causar impactos significativos na saúde pública mundial.

Entre os diferentes tipos de câncer, aqueles que formam tumores sólidos, por exemplo, sarcomas, carcinomas e linfomas, são responsáveis por mais de 80% de todos os casos [27]. O crescimento dos tumores sólidos ocorre em dois estágios diferentes: avascular e vascular. No estágio avascular, o tumor degrada parte do tecido circundante e, à medida que cresce, seu centro fica cada vez mais distante dos vasos sanguíneos do tecido normal. Assim, o centro do tumor recebe menos oxigênio e nutrientes, o que compromete a sobrevivência das células cancerosas. Devido a isso, elas enviam sinais, chamados fatores angiogênicos, que estimulam o crescimento de novos vasos sanguíneos no tumor (angiogênese).

Agora, no estágio vascular, os vasos sanguíneos trazem nutrientes e oxigênio ao tumor, o que o possibilita crescer mais e rapidamente. Após o tumor atingir um certo tamanho, as células cancerosas migram para outras partes do corpo, pela corrente sanguínea ou através do sistema linfático, e formam, conseqüentemente, tumores secundários (metástase). Essa característica distingue o câncer dos outros crescimentos celulares anormais, que permanecem na parte do corpo onde surgiram.

Os estágios avascular e vascular envolvem outras interações que ocorrem em diferentes escalas, o que evidencia a complexidade da doença. Assim, neste cenário, como uma ferramenta alternativa para compreender a evolução do câncer, surgem os modelos matemáticos, objetos da próxima seção.

## 2.2 O MODELO MATEMÁTICO

A complexa e dinâmica natureza do câncer está cada vez mais sendo explorada por meio de modelos matemáticos e computacionais, pois estes possibilitam integrar múltiplas variáveis de interação e prever de forma dinâmica como essas variáveis mudam no espaço e no tempo [2, 13]. Esses modelos auxiliam, assim, no processo de compreensão e tratamento do câncer [5].

Os modelos contínuos de equações diferenciais parciais, dentre as diversas formas de abordagem, possibilitam explorar processos inerentemente espaciais, como a invasão de tecidos e a disseminação metastática. Entretanto, quando restringimos essa forma de abordagem ao estudo de tumores sólidos em estágio avascular, de particular interesse para o nosso trabalho é o modelo de Anderson *et al.* [3], que descreve a dinâmica espacial da interação entre células tumorais, matriz extracelular (ECM) e enzimas degradantes da matriz (MDEs). Aqui, representamos a densidade de células tumorais, a densidade da ECM e a concentração das MDEs por  $N$ ,  $E$  e  $M$ , respectivamente.

A ECM é uma rede macromolecular não celular na qual as células residem em tecidos e órgãos [22]. É composta por proteínas formadoras de fibras, como colágenos, lamininas, elastinas, fibronectinas, e moléculas não fibrilares como proteoglicanos e glicoproteínas [23]. Esses componentes macromoleculares regulam muitos processos celulares, como sobrevivência, crescimento, migração, diferenciação, homeostase e morfogênese [22].

A degradação da ECM é um aspecto crucial do crescimento e propagação do câncer. As células tumorais produzem MDEs, como os *ativadores do plasminogênio* e a grande família de *metaloproteinases da matriz*, que degradam a ECM localmente [4, 24]. Essa degradação cria um espaço onde as células tumorais podem se mover por simples difusão. Além disso, as células tumorais seguem o fluxo haptotático, que é uma migração celular direcionada em resposta a gradientes de moléculas adesivas na ECM [16]. Seguindo as descrições anteriores, a equação diferencial parcial que rege o movimento das células tumorais, na ausência de proliferação celular, é:

$$N_t = \overbrace{\nabla \cdot (D_1 \nabla N)}^{\text{difusão}} - \overbrace{\rho \nabla \cdot (N \nabla E)}^{\text{haptotaxia}},$$

em que  $D_1$  e  $\rho$  são os coeficientes constantes de difusão e haptotaxia, respectivamente.

Como mencionado anteriormente, as MDEs degradam a ECM por contato e, portanto, a equação a seguir modela o processo de degradação:

$$E_t = - \overbrace{\delta M E}^{\text{degradação}},$$

em que  $\delta$  é o coeficiente constante de degradação da ECM.

As células tumorais produzem MDEs, que se difundem por todo o tecido e decaem naturalmente. Portanto, a seguinte equação governa a evolução da concentração de MDEs:

$$M_t = \overbrace{\nabla \cdot (D_2 \nabla M)}^{\text{difusão}} + \overbrace{\mu N}^{\text{produção}} - \overbrace{\lambda M}^{\text{decaimento}},$$

em que  $D_2$ ,  $\mu$ , e  $\lambda$  são coeficientes constantes de difusão, reprodução e decaimento de MDEs, respectivamente. Observamos que todas as constantes nas equações anteriores são não-negativas.

Logo, conforme detalhamos nos parágrafos anteriores, o sistema de equações diferenciais em [3], que descreve as interações entre as células tumorais, ECM e MDEs, é:

$$\begin{cases} N_t = D_1 \nabla^2 N - \rho \nabla \cdot (N \nabla E), \\ E_t = -\delta M E, \\ M_t = D_2 \nabla^2 M + \mu N - \lambda M, \end{cases} \quad (2.1)$$

em que  $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$  é o operador nabla e  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$  é o laplaciano em 3-dimensões. O domínio do sistema é uma região limitada do tecido, denotada por  $\Omega$ , com condições iniciais apropriadas para cada variável. Uma vez que as células tumorais e as MDEs permanecem, no estágio avascular, dentro do domínio, ou seja, o tecido em questão, condições apropriadas de contorno também são impostas em  $\partial\Omega$ , fronteira de  $\Omega$ . A Figura 2.15 e a Figura 2.16 mostram, para uma melhor visualização do processo de invasão do câncer, uma esquematização do modelo (2.1).

Observamos que devido a dificuldades em obter valores experimentais adequados para os parâmetros do sistema (2.1), apenas os valores de difusões  $D_1$  e  $D_2$  são conhecidos e são da ordem de  $10^{-3}$  em valores adimensionais. Os valores dos demais parâmetros são estimados, não obtidos de dados experimentais *in vivo*, e variam de acordo com as simulações, veja [3, páginas 133 e 135], [4, páginas 168 e 174], [18, página 687, Table 1] e [9, página 14].

Ressaltamos que o estudo do modelo (2.1) em [3] foi numérico, por meio de simulações, e, até onde sabemos, nenhum trabalho anterior apresentou soluções analíticas para ele. Por esse motivo, adotaremos como nossa principal ferramenta o maquinário de simetrias de Lie [7, 19, 20], que nos permite encontrar soluções para o sistema (2.1). Assim, na próxima seção, apresentaremos os principais aspectos dessa teoria.

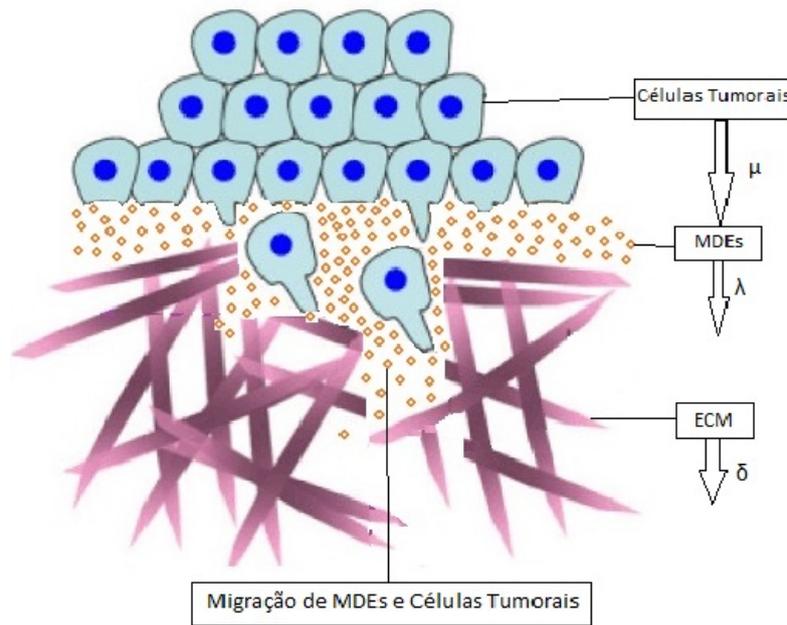


Figura 2.15: adaptada de [11]. A figura representa as células tumorais produzindo MDEs que degradam a ECM e, assim, tanto as células tumorais quanto as MDEs migram para o tecido circundante.

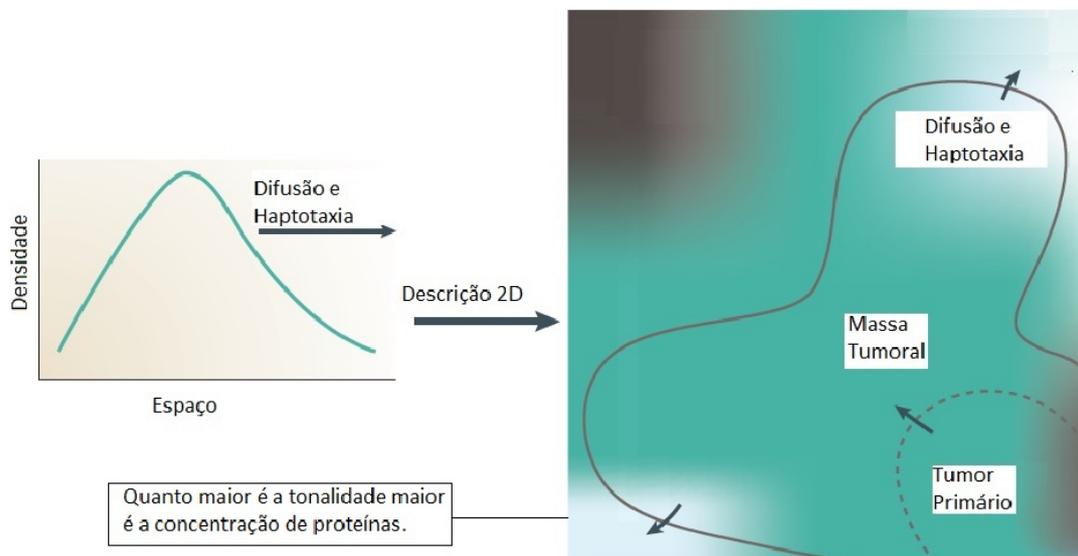


Figura 2.16: adaptada de [13]. A figura representa a difusão e haptotaxia com movimento governado no sentido da maior concentração de proteínas.



# 3

## SIMETRIAS DE LIE

Aqui descrevemos os principais aspectos teóricos relacionados à teoria de simetrias de Lie de equações diferenciais. Destacamos que os exemplos que ilustram os teoremas e corolários são originais e os construímos a partir de nossos resultados. Todavia, a escrita dos demais resultados teóricos, clássicos na literatura, segue de perto as referências [6,7,17,19]. Ainda, para que não haja dúvida nas seções seguintes, reforçamos que apenas neste capítulo os resultados anunciados na forma de lema, teorema e corolário não são originais.

### 3.1 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

O clássico teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem desempenha um papel central na teoria dos grupos locais de Lie de transformações, seus invariantes e equações invariantes. Devido a isso, no que segue, retomamos as ideias a ele relacionadas e o apresentamos.

Preliminares

Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto não-vazio e conexo do espaço  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1+n}$ . Um ponto de  $\mathbb{R}^{1+n}$  será denotado por  $(t, \mathbf{x})$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ .

Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua e seja  $I$  um intervalo não degenerado da reta, ou seja, um subconjunto não-vazio e conexo de  $\mathbb{R}$  não reduzido a um ponto.

**Definição 3.1.** *Uma função diferenciável  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  chama-se solução da equação*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, \mathbf{x}) \tag{3.1}$$

*no intervalo  $I$  se:*

(i) o gráfico de  $\varphi$  em  $I$  está contido em  $\Omega$ , isto é,  $\{(t, \varphi(t)); t \in I\} \subset \Omega$  e

(ii)  $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$  para todo  $t \in I$ .

A equação (3.1) chama-se equação diferencial ordinária de primeira ordem e é denotada abreviadamente por

$$\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}). \quad (3.2)$$

Estamos interessados nos casos em que (3.2) tenha uma, e só uma, solução  $\varphi$  num intervalo que contém  $t_0$  e tal que  $\varphi(t_0) = x_0$ . Essa tal  $\varphi$  será chamada de solução do problema com dados iniciais  $(t_0, x_0)$  para a equação (3.2). Este problema, também é conhecido como problema de Cauchy, será denotado por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' &= f(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

A equação (3.3) é equivalente à equação integral

$$\mathbf{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \mathbf{x}(s)) ds, \quad (3.4)$$

ou seja, se  $t_0 \in I$ , uma função contínua cujo gráfico está contido em  $\Omega$  é solução de (3.4) se, e somente se, é solução de (3.3). Esse resultado é decorrente do Teorema Fundamental do Cálculo.

Na sequência veremos, entretanto, que hipóteses relativamente gerais sobre  $f$  darão condições suficientes para termos existência e unicidade do problema de Cauchy (3.3), ao menos, localmente.

Existência de unicidade de soluções

**Definição 3.2.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Dizemos que a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  é uma sequência de Cauchy se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n, m \geq N_\varepsilon$ ,  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ . Além disso, dizemos que  $(X, d)$  é completo se toda sequência de Cauchy em  $X$  é convergente.*

**Definição 3.3.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Uma função  $T : X \rightarrow X$  é chamada contração se existir  $\lambda \in [0, 1)$  tal que  $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ , para quaisquer elementos  $x, y \in X$ .*

A constante  $\lambda$  é denominada constante de contração. Um ponto  $x \in X$  tal que  $T(x) = x$  é chamado ponto fixo de  $T$ .

**Observação 3.1.** Uma contração  $T$  é uniformemente contínua. Com efeito, supondo sem perda de generalidade que  $\lambda > 0$ , dados  $x, y \in X$ ,  $\varepsilon > 0$  e escolhendo  $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$ , temos

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y) < \lambda \frac{\varepsilon}{\lambda} < \varepsilon.$$

**Observação 3.2.** Aqui, optamos por manter o padrão da literatura com as constantes  $\lambda$  e  $\delta$ , que não devemos confundir, em hipótese alguma, com as constantes do sistema (2.1).

**Teorema 3.1.** (Princípio de Contração de Banach) Se  $T : X \rightarrow X$  é uma contração em um espaço métrico completo  $(X, d)$ , então existe exatamente uma solução para a equação  $T(x) = x$ .

**Demonstração.** Seja  $\lambda$  a constante de contração de  $T$ . Queremos mostrar, para qualquer  $x_0 \in X$ , que a iteração definida recursivamente  $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$  para  $n \geq 1$  converge para um ponto fixo de  $T$ .

Primeiro, mostremos que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $X$ . Se  $n > m \geq 1$ , então pela Definição 3.3 e a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(T^n x_0, T^m x_0) \leq \lambda^m d(T^{n-m} x_0, x_0) \\ &\leq \lambda^m \left[ d(T^{n-m} x_0, T^{n-m-1} x_0) + d(T^{n-m-1} x_0, T^{n-m-2} x_0) + \dots + d(T x_0, x_0) \right] \\ &\leq \lambda^m \left[ \sum_{k=0}^{n-m-1} \lambda^k \right] d(x_1, x_0) \leq \lambda^m \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \right] d(x_1, x_0) = \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Agora, tome  $\varepsilon > 0$  e escolha  $N \geq 1$  de tal forma que  $\frac{\lambda^N}{1-\lambda} d(x_0, x_1) < \varepsilon$ . Então, para algum  $n > m \geq N$ , temos

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_0, x_1) \leq \frac{\lambda^N}{1-\lambda} d(x_0, x_1) < \varepsilon.$$

Isto prova que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy. Uma vez que  $X$  é completo,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para um limite  $x \in X$ . O fato que o limite  $x$  é um ponto fixo de  $T$  segue da continuidade de  $T$ :

$$Tx = T \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

Finalmente, se  $x$  e  $y$  são dois pontos fixos, então

$$0 \leq d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y).$$

Uma vez que  $\lambda < 1$ , temos  $d(x, y) = 0$ , assim  $x = y$  e o ponto fixo é único.  $\square$

**Definição 3.4.** Uma aplicação  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  chama-se localmente Lipschitziana em  $\Omega$  relativamente à segunda variável ( $\mathbf{x}$ ) ou, simplesmente Lipschitziana, se existe uma constante  $\lambda > 0$  tal que:

$$\|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})\| \leq \lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \forall (t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in \Omega.$$

A constante  $\lambda$  é denominada constante de Lipschitz de  $f$ . Ademais, diz-se que  $f$  é localmente Lipschitziana em  $\Omega$  se cada  $(t_0, x_0)$  tem uma vizinhança  $V = V(t_0, x_0)$  tal que  $f|_V$  é Lipschitziana em  $V$ .

**Exemplo 3.1.** Se  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  admite derivada parcial em relação à segunda variável,  $D_2f$ , com  $\|D_2f\| \leq \lambda$  em  $\Omega$ , e  $\Omega_t = \{\mathbf{x}; (t, \mathbf{x}) \in \Omega\}$  é um conjunto convexo para todo  $t$ , então  $f$  é Lipschitziana em  $\Omega$  e  $\lambda$  é a constante de Lipschitz. Realmente, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})\| \leq \sup_{0 < \theta < 1} \|D_2f(t, \theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{y})\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

**Teorema 3.2** (Existência local de soluções). Sejam  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  fixados e  $\Omega = I_a \times B_b \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , em que  $I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$  e  $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| \leq b\}$ . Suponha que  $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$  seja uma função contínua e localmente Lipschitziana em relação à  $\mathbf{x}$ . Então, existe uma única solução do problema de Cauchy correspondente a  $f$  com valores iniciais  $x(t_0) = x_0$ , definida no intervalo  $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , em que  $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$  e  $M := \sup \{\|f(t, \mathbf{x})\|; (t, \mathbf{x}) \in \Omega\}$ .

**Demonstração.** Seja  $X = C(I_\alpha, B_b)$  o espaço métrico completo das funções contínuas  $\varphi : I_\alpha \longrightarrow B_b$ , com a métrica  $d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup \{\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|; t \in I_\alpha\}$ .

Para  $\varphi \in X$ , seja  $T : X \longrightarrow X$  definida por:

$$T(\varphi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, t \in I_\alpha.$$

Destacamos o seguinte a respeito de  $T$ :

- $T$  está bem definida e  $T(X) \subseteq X$ .

De fato,  $T(\varphi)$  é uma aplicação contínua, uma vez que  $\varphi$  o é. Além disso, se  $\varphi \in X$

$$\|T(\varphi) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right\| \leq M |t - t_0| \leq M\alpha \leq b.$$

Isto mostra que  $T(\varphi) \subseteq B_b$ . Logo,  $T$  leva funções em  $X$  em funções em  $X$ .

- Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n$  é contração sempre que  $n \geq n_0$ .

Com efeito, seja  $\lambda$  a constante de Lipschitz de  $f$  em relação à segunda variável. Provemos, por indução, que  $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in X$  e  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|T^n(\varphi_1)(t) - T^n(\varphi_2)(t)\| \leq \frac{\lambda^n}{n!} |t - t_0|^n d(\varphi_1, \varphi_2), \forall t \in I_\alpha.$$

Efetivamente, para  $n = 1$ , temos

$$\begin{aligned} \|T(\varphi_1)(t) - T(\varphi_2)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \lambda d(\varphi_1, \varphi_2) ds \\ &\leq \lambda |t - t_0| d(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Assumindo a hipótese de indução válida para  $n \in \mathbb{N}$ . Então,

$$\begin{aligned} \|T^{n+1}(\varphi_1)(t) - T^{n+1}(\varphi_2)(t)\| &= \|T(T^n(\varphi_1)(t)) - T(T^n(\varphi_2)(t))\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, T^n(\varphi_1(s))) - f(s, T^n(\varphi_2(s)))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \lambda \|T^n(\varphi_1(s)) - T^n(\varphi_2(s))\| ds \\ &\leq \lambda \int_{t_0}^t \frac{\lambda^n}{n!} |s - t_0|^n d(\varphi_1, \varphi_2) ds \\ &\leq \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^n ds d(\varphi_1, \varphi_2) \right| \\ &\leq \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \left| \frac{(t - t_0)^{n+1}}{n+1} d(\varphi_1, \varphi_2) \right| \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1} d(\varphi_1, \varphi_2), \end{aligned}$$

o que conclui a indução.

Uma vez que  $|t - t_0| \leq \alpha$ , concluímos que

$$d(T^n(\varphi_1), T^n(\varphi_2)) \leq \frac{\lambda^n \alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Como o fatorial é dominante em relação a potência, temos que fixado  $0 < c < 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{\lambda^n \alpha^n}{n!} < c, \forall n \geq n_0$ . Portanto, para todo  $n \geq n_0$ ,  $T^n$  é uma contração, como queríamos mostrar.

Uma vez que  $X$  é um espaço métrico completo e  $T : X \rightarrow X$ , segue do Teorema 3.1 que  $T^n$  possui um único ponto fixo. Entretanto se  $\varphi$  é o único ponto fixo de  $T^n$ , ele também é o único ponto fixo de  $T$ , pois

$$\varphi = \lim T^n(T(\varphi)) = \lim T^{n+1}(\varphi) = \lim T(T^n(\varphi)) = T(\lim T^n(\varphi)) = T(\varphi).$$

Isto equivale a existência de uma única solução para o problema de Cauchy com domínio  $I_\alpha$ . □

## 3.2 GRUPOS LOCAIS DE LIE DE TRANSFORMAÇÕES

Vamos começar com a definição de um grupo e, então considerar um grupo local de transformações, mais especificamente, um grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro.

Grupos

**Definição 3.5.** Um grupo  $G$  é um conjunto de elementos com uma lei de composição  $\phi$  entre elementos satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Fechamento. Para quaisquer elementos  $a, b$  de  $G$ ,  $\phi(a, b)$  é um elemento de  $G$ .
- (ii) Associatividade. Para quaisquer elementos  $a, b, c$  de  $G$ :

$$\phi(a, \phi(b, c)) = \phi(\phi(a, b), c).$$

(iii) *Elemento identidade.* Existe um único elemento  $e$  de  $G$  tal que, para qualquer elemento  $a$  em  $G$ ,

$$\phi(a, e) = \phi(e, a) = a.$$

(iv) *Elemento inverso.* Para todo elemento  $a$  de  $G$ , existe um único elemento inverso  $a^{-1}$  em  $G$  tal que

$$\phi(a, a^{-1}) = \phi(a^{-1}, a) = e.$$

**Exemplo 3.2.**  $(\mathbb{R}, +)$ . Os números reais com a lei de composição dada pela soma formam um grupo, em que  $e = 0$  e, para todo  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a^{-1} = -a$ .

**Exemplo 3.3.**  $Gl(n, \mathbb{R})$ . Grupo de matrizes  $n \times n$  de coeficientes reais e determinante não-nulo, com lei de composição  $\phi(A, B) = AB$ . O elemento neutro é  $e = I$ , a matriz identidade, e a inversa de um elemento  $A \in Gl(n, \mathbb{R})$  é sua própria matriz inversa  $A^{-1}$ .

**Definição 3.6.** Um grupo  $G$  é abeliano se  $\phi(a, b) = \phi(b, a), \forall a, b \in G$ .

**Definição 3.7.** Um subgrupo de  $G$  é um grupo formado por um subconjunto de elementos de  $G$ , com a mesma lei de composição  $\phi$ , e fechado com respeito a ela.

**Exemplo 3.4.** O conjunto de números reais positivos não nulos  $\mathbb{R}_+^*$  é um subgrupo de  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ .

**Definição 3.8.** (Grupo local de transformações a 1-parâmetro). Seja  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$  pertencente a um aberto, conexo e não-vazio  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ . O conjunto de transformações

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon),$$

define, para cada  $\mathbf{x} \in D$ , e um parâmetro  $\epsilon$  pertencente a um conjunto  $S \subset \mathbb{R}$ , com  $\phi(\epsilon, \delta)$  definindo uma lei de composição dos parâmetros  $\epsilon$  e  $\delta$  em  $S$ , um grupo local de transformações a 1-parâmetro em  $D$  se valem as condições:

- (i) Para cada  $\epsilon \in S$ , a transformação é bijetora em  $D$ .
- (ii) O conjunto  $S$  com a lei de composição  $\phi$  forma um grupo  $G$ .
- (iii) Para cada  $\mathbf{x} \in D$ ,  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$  quando  $\epsilon = e$ , isto é,  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; e) = \mathbf{x}$ .
- (iv) Se  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}; \delta)$ , então  $\bar{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \delta))$ .

**Definição 3.9.** Um grupo local de transformações a 1-parâmetro define um grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro se forem satisfeitas, em adição as condições (i)-(iv) da Definição 3.8, as seguintes condições:

(v)  $\epsilon$  é um parâmetro contínuo, isto é,  $S$  é um intervalo da reta real.

(vi)  $\mathbf{X}$  é infinitamente diferenciável com respeito a  $\mathbf{x}$  em  $D$  e é função analítica de  $\epsilon$  em  $S$ .

(vii)  $\phi(\epsilon, \delta)$  é analítica de  $\epsilon$  e  $\delta$ , com  $\epsilon, \delta \in S$ .

### 3.3 TRANSFORMAÇÕES INFINITESIMAIS

Considere um grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon), \quad (3.5)$$

com a identidade  $\epsilon = e$  e lei de composição  $\phi$ . Expandindo (3.5) em torno de  $\epsilon = e$ , para alguma vizinhança de  $\epsilon = e$ , temos

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} + (\epsilon - e) \left( \left. \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=e} \right) + \frac{(\epsilon - e)^2}{2} \left( \left. \frac{\partial^2 \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon^2} \right|_{\epsilon=e} \right) + \dots \\ &= \mathbf{x} + (\epsilon - e) \left( \left. \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=e} \right) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Defina

$$\bar{\zeta}(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=e}. \quad (3.7)$$

Por conseguinte, substituindo (3.7) em (3.6), a transformação  $\bar{\mathbf{x}}$  até a primeira ordem é:

$$\bar{\mathbf{x}} \approx \mathbf{x} + (\epsilon - e)\bar{\zeta}(\mathbf{x}). \quad (3.8)$$

A transformação (3.8) é chamada transformação infinitesimal do grupo local de Lie de transformações de (3.5). As componentes de  $\bar{\zeta}(\mathbf{x}) = (\bar{\zeta}^1(\mathbf{x}), \dots, \bar{\zeta}^n(\mathbf{x}))$  são chamadas de infinitésimos.

#### 3.3.1 Primeiro Teorema Fundamental de Lie

O lema seguinte nos é útil:

**Lema 3.1.** O grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro (3.5) satisfaz a seguinte relação:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon + \Delta\epsilon) = \mathbf{X}\left(\bar{\mathbf{x}}; \phi\left(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon\right)\right), \quad (3.9)$$

em que  $\epsilon^{-1}$  denota o elemento inverso de  $\epsilon$  e  $\Delta\epsilon$  é um pequeno incremento em  $\epsilon$ .

**Demonstração.** Realmente, pela Definição 3.8 e o axioma (ii) da Definição 3.5, concluímos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\left(\bar{\mathbf{x}}; \phi\left(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon\right)\right) &= \mathbf{X}\left(\mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon); \phi\left(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon\right)\right) = \mathbf{X}\left(\mathbf{x}; \phi\left(\epsilon, \phi\left(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon\right)\right)\right) \\ &= \mathbf{X}\left(\mathbf{x}; \phi\left(\phi\left(\epsilon, \epsilon^{-1}\right), \epsilon + \Delta\epsilon\right)\right) = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \phi(e, \epsilon + \Delta\epsilon)) \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon + \Delta\epsilon). \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.3.** (Primeiro Teorema Fundamental de Lie). Existe uma parametrização  $\tau(\epsilon)$  tal que o grupo local de Lie de transformações (3.5) é equivalente a solução do problema de valor inicial do sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem dado por:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\tau} = \xi(\bar{\mathbf{x}}), \\ \bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Em particular,

$$\tau(\epsilon) = \int_e^\epsilon \Gamma(\epsilon') d\epsilon', \quad (3.11)$$

em que

$$\Gamma(\epsilon) = \left. \frac{\partial\phi(a, b)}{\partial b} \right|_{a=\epsilon^{-1}, b=\epsilon} \quad (3.12)$$

e

$$\Gamma(e) = 1.$$

**Demonstração.** Primeiro, fazendo a expansão em série de Taylor do lado esquerdo da expressão (3.9) em relação a  $\Delta\epsilon$  em torno de  $\Delta\epsilon = 0$ , obtemos

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon + \Delta\epsilon) = \bar{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial\mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial\epsilon}\right) \Delta\epsilon + O(\Delta\epsilon^2) = \bar{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial\bar{\mathbf{x}}}{\partial\epsilon}\right) \Delta\epsilon + O(\Delta\epsilon^2). \quad (3.13)$$

Agora, expandindo  $\phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon)$  em uma série de potências em  $\Delta\epsilon$  em torno de  $\Delta\epsilon = 0$ , temos

$$\phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon) = \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon) + \Gamma(\epsilon) \Delta\epsilon + O(\Delta\epsilon^2) = e + \Gamma(\epsilon) \Delta\epsilon + O(\Delta\epsilon^2), \quad (3.14)$$

em que  $\Gamma(\epsilon)$  é definido em (3.12).

Pelo Lema 3.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon + \Delta\epsilon) &= \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}; \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon)) = \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}; e + \Gamma(\epsilon) \Delta\epsilon + O(\Delta\epsilon^2)) \\ &= \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}; e) + \Gamma(\epsilon) \Delta\epsilon \left( \frac{\partial \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}; \delta)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=e} \right) + O(\Delta\epsilon^2) \\ &= \bar{\mathbf{x}} + \Gamma(\epsilon) \zeta(\bar{\mathbf{x}}) \Delta\epsilon + O(\Delta\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Comparando (3.13) com (3.15), temos

$$\bar{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \epsilon} \right) \Delta\epsilon + O(\Delta\epsilon^2) = \bar{\mathbf{x}} + \Gamma(\epsilon) \zeta(\bar{\mathbf{x}}) \Delta\epsilon + O(\Delta\epsilon^2).$$

Assim,

$$\frac{1}{\Gamma(\epsilon)} \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\epsilon} = \zeta(\bar{\mathbf{x}}),$$

e, então,

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\tau} = \zeta(\bar{\mathbf{x}}),$$

pois, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, como  $\Gamma(\epsilon)$  é contínua no intervalo  $[e, \epsilon]$ , podemos definir  $\tau(\epsilon)$  como:

$$\tau(\epsilon) = \int_e^\epsilon \Gamma(\epsilon') d\epsilon' \Rightarrow d\tau = \Gamma(\epsilon) d\epsilon,$$

com  $\tau(e) = 0$  por definição. Portanto, obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\tau} = \zeta(\bar{\mathbf{x}}), \\ \bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Como  $\frac{\partial \zeta^i(\mathbf{x})}{\partial x^i}$  é contínua para todo  $i = 1, \dots, n$ , pelo Teorema 3.2 e pelo Exemplo 3.1, a solução de (3.16) existe e é única.  $\square$

O Primeiro Teorema Fundamental de Lie mostra que a transformação infinitesimal contém a informação essencial para determinar um grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro. Além disso, sempre podemos reparametrizar um dado grupo em termos

de um parâmetro  $\tau$  de modo que para os valores  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , a lei de composição se torna  $\phi(\tau_1, \tau_2) = \tau_1 + \tau_2$ . Também, o Teorema 3.3 mostra que um grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro (3.5) define um fluxo estacionário dado por (3.10), valendo também a recíproca.

**Exemplo 3.5.** Considere  $\mathbf{x} = (x, y, z, t, N, E, M)$ ,  $\mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon) = (x, y, z, t, \epsilon N, E^\epsilon, \epsilon M)$ , com  $\epsilon > 0$ . Logo,  $\mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)$  é um grupo multiplicativo, ou seja,  $\phi(a, b) = ab$ ,  $e = 1$  e  $\epsilon^{-1} = \frac{1}{\epsilon}$ . Então, aplicando o Teorema 3.3, temos

$$\left. \frac{\partial \phi(a, b)}{\partial b} \right|_{a=\epsilon^{-1}, b=\epsilon} = \epsilon^{-1} = \frac{1}{\epsilon}, \quad \Gamma(1) = 1.$$

Assim, temos

$$\tau(\epsilon) = \int_1^\epsilon \Gamma(\epsilon') d\epsilon' = \int_1^\epsilon \frac{d\epsilon'}{\epsilon'} = \ln \epsilon' \Big|_1^\epsilon = \ln \epsilon \Rightarrow \epsilon = e^\tau.$$

Portanto, a transformação reparametrizada é dada por:  $\mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon) = (x, y, z, t, e^\tau N, E^{e^\tau}, e^\tau M)$ , com lei de composição  $\phi(a, b) = a + b$ .

### 3.3.2 Geradores infinitesimais

Devido ao Primeiro Teorema Fundamental de Lie, de agora em diante, assumimos que um grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro  $\epsilon$  é parametrizado de modo que sua lei de composição seja aditiva, ou seja,  $\phi(a, b) = a + b$ , tal que  $\epsilon^{-1} = -\epsilon$  e  $\Gamma(\epsilon) \equiv 1$ . Logo, em termos dos infinitesimais  $\zeta(\mathbf{x})$ , o grupo local de Lie de transformações (3.5), torna-se:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\epsilon} = \zeta(\bar{\mathbf{x}}), \\ \bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (3.17)$$

**Definição 3.10.** O gerador infinitesimal do grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro (3.5) é o operador diferencial

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x}) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^n \zeta^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (3.18)$$

em que  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$  é o operador gradiente e os coeficientes  $\zeta^i(\mathbf{x})$  são dados em (3.7).

Para qualquer função diferenciável  $F(\mathbf{x}) = F(x^1, \dots, x^n)$ , temos:

$$\mathbf{X}F(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x}) \cdot \nabla F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \zeta^i(\mathbf{x}) \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x^i}. \quad (3.19)$$

Observe que  $\mathbf{X}\mathbf{x} = \zeta(\mathbf{x})$ .

Segue que um grupo local de Lie de transformações, que no Teorema 3.3 é determinado por suas transformações infinitesimais, é também determinado por seu gerador infinitesimal. O Teorema a seguir mostra que o uso do gerador infinitesimal (3.18) nos conduz a um algoritmo para encontrar a solução explícita do problema de valor inicial (3.17).

**Teorema 3.4.** *O grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro (3.5) é equivalente a*

$$\bar{\mathbf{x}} = e^{\epsilon \mathbf{X}} \mathbf{x} = \mathbf{x} + \epsilon \mathbf{X}\mathbf{x} + \frac{\epsilon^2}{2} \mathbf{X}^2 \mathbf{x} + \dots = \left[ 1 + \epsilon \mathbf{X} + \frac{\epsilon^2}{2} \mathbf{X}^2 + \dots \right] \mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \mathbf{X}^k \mathbf{x}, \quad (3.20)$$

em que o operador  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$  é definido por (3.18) e o operador  $\mathbf{X}^k = \mathbf{X}^k(\mathbf{x})$  é dado por  $\mathbf{X}^k = \mathbf{X}\mathbf{X}^{k-1}$ ,  $k \geq 1$ . Em particular,  $\mathbf{X}^k F(\mathbf{x})$  é a função obtida aplicando o operador  $\mathbf{X}$  à função  $\mathbf{X}^{k-1} F(\mathbf{x})$ ,  $k \geq 1$ , com  $\mathbf{X}^0 F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$ .

**Demonstração.** *Seja*

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \zeta^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.21)$$

e

$$\mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n \zeta^i(\bar{\mathbf{x}}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}, \quad (3.22)$$

em que

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon) \quad (3.23)$$

é o grupo local de Lie de transformações (3.5). Expandindo (3.23) em série de Taylor em torno de  $\epsilon = 0$ , obtemos:

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \left( \frac{\partial^k \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon^k} \Big|_{\epsilon=0} \right). \quad (3.24)$$

Se  $F(\mathbf{x})$  é uma função diferenciável qualquer, obtemos pela regra da cadeia que

$$\frac{d}{d\epsilon} F(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{k=0}^n \frac{\partial F(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \bar{x}^i} \frac{d\bar{x}^i}{d\epsilon} = \sum_{k=0}^n \zeta^i(\bar{\mathbf{x}}) \frac{\partial F(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \bar{x}^i} = \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}) F(\bar{\mathbf{x}}). \quad (3.25)$$

Dessa forma, para  $F(\bar{x}) = \bar{x}$ , a expressão (3.25), torna-se

$$\frac{d\bar{x}}{d\epsilon} = \mathbf{X}(\bar{x})\bar{x}, \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{d\bar{x}}{d\epsilon} \right) = \frac{d^2\bar{x}}{d\epsilon^2} = \mathbf{X}(\bar{x})\mathbf{X}(\bar{x})\bar{x} = \mathbf{X}^2(\bar{x})\bar{x}$$

e, admitindo a validade para a derivada de ordem  $k$ , indutivamente, segue

$$\frac{d^{k+1}\bar{x}}{d\epsilon^{k+1}} = \frac{d}{d\epsilon} \left( \mathbf{X}^k(\bar{x})\bar{x} \right) = \mathbf{X}^k(\bar{x})\mathbf{X}(\bar{x})\bar{x} = \mathbf{X}^{k+1}(\bar{x})\bar{x}. \quad (3.27)$$

Assim, em geral,

$$\frac{d^k\bar{x}}{d\epsilon^k} = \mathbf{X}^k(\bar{x})\bar{x}, k = 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

Consequentemente, temos

$$\left. \frac{d^k\bar{x}}{d\epsilon^k} \right|_{\epsilon=0} = \mathbf{X}^k(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{X}^k\mathbf{x}, k = 1, 2, \dots \quad (3.29)$$

Por conseguinte, substituindo (3.29) em (3.24), concluímos que

$$\bar{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \mathbf{X}^k\mathbf{x} = e^{\epsilon\mathbf{X}}. \quad (3.30)$$

□

Sumarizando, existem duas formas de encontrar explicitamente um grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro a partir de sua transformação infinitesimal:

- (i) Expressar o grupo em termos de uma série de potências (3.20), chamada série de Lie, que é construída a partir do gerador infinitesimal (3.18); ou
- (ii) Determinar a solução explícita do problema de valor inicial (3.10).

No exemplo seguinte, ilustramos os dois casos.

**Exemplo 3.6.** Vamos aplicar os procedimentos (i) e (ii), descritos acima, para obter o grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro a partir do gerador

$$\mathbf{X}_1 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.31)$$

definido em  $\mathbb{R}^7$ , nas coordenadas  $(x, y, z, t, N, E, M)$ :

(i) Expressar o grupo local de transformações associado à (3.31) em termos de uma série de potências. Assim,

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{N}, \bar{E}, \bar{M}) &= e^{\epsilon \mathbf{X}_1} (x, y, z, t, N, E, M) \\ &= \left( e^{\epsilon \mathbf{X}_1} x, e^{\epsilon \mathbf{X}_1} y, e^{\epsilon \mathbf{X}_1} z, e^{\epsilon \mathbf{X}_1} t, e^{\epsilon \mathbf{X}_1} N, e^{\epsilon \mathbf{X}_1} E, e^{\epsilon \mathbf{X}_1} M \right). \end{aligned}$$

Entretanto temos,  $\mathbf{X}_1 x = -y$ ,  $\mathbf{X}_1^2 x = -x$ ,  $\mathbf{X}_1^3 x = y$ ,  $\mathbf{X}_1^4 x = x$ ,  $\mathbf{X}_1^5 x = -y$ , ...

Logo, segue que

$$\begin{aligned} \bar{x} &= e^{\epsilon \mathbf{X}_1} x = x + \epsilon \mathbf{X}_1 x + \frac{\epsilon^2}{2!} \mathbf{X}_1^2 x + \frac{\epsilon^3}{3!} \mathbf{X}_1^3 x + \frac{\epsilon^4}{4!} \mathbf{X}_1^4 x + \frac{\epsilon^5}{5!} \mathbf{X}_1^5 x + \dots \\ &= x - \epsilon y - \frac{\epsilon^2}{2!} x + \frac{\epsilon^3}{3!} y + \frac{\epsilon^4}{4!} x - \frac{\epsilon^5}{5!} y - \dots \\ &= x \left( 1 - \frac{\epsilon^2}{2!} + \frac{\epsilon^4}{4!} \dots \right) - y \left( \epsilon - \frac{\epsilon^3}{3!} + \frac{\epsilon^5}{5!} \dots \right) \\ &= x \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\epsilon^{2k}}{(2k)!} \right) - y \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\epsilon^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= x \cos(\epsilon) - y \sin(\epsilon). \end{aligned}$$

De forma análoga,  $\mathbf{X}_1 y = x$ ,  $\mathbf{X}_1^2 y = -y$ ,  $\mathbf{X}_1^3 y = -x$ ,  $\mathbf{X}_1^4 y = y$ ,  $\mathbf{X}_1^5 y = x$ , ...

Assim, temos

$$\begin{aligned} \bar{y} &= e^{\epsilon \mathbf{X}_1} y = y + \epsilon \mathbf{X}_1 y + \frac{\epsilon^2}{2!} \mathbf{X}_1^2 y + \frac{\epsilon^3}{3!} \mathbf{X}_1^3 y + \frac{\epsilon^4}{4!} \mathbf{X}_1^4 y + \frac{\epsilon^5}{5!} \mathbf{X}_1^5 y + \dots \\ &= y + \epsilon x - \frac{\epsilon^2}{2!} y - \frac{\epsilon^3}{3!} x + \frac{\epsilon^4}{4!} y + \frac{\epsilon^5}{5!} x - \dots \\ &= x \left( \epsilon - \frac{\epsilon^3}{3!} + \frac{\epsilon^5}{5!} \dots \right) + y \left( 1 - \frac{\epsilon^2}{2!} + \frac{\epsilon^4}{4!} \dots \right) \\ &= x \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\epsilon^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) + y \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\epsilon^{2k}}{(2k)!} \right) \\ &= x \sin(\epsilon) + y \cos(\epsilon). \end{aligned}$$

Por fim, como o gerador (3.31) não envolve as variáveis  $z, t, N, E$  e  $M$ , segue que:  $\mathbf{X}_1 z = \mathbf{X}_1 t = \mathbf{X}_1 N = \mathbf{X}_1 E = \mathbf{X}_1 M = 0$ .

Consequentemente,

$$\bar{z} = e^{\epsilon X_1} z = z, \quad \bar{t} = e^{\epsilon X_1} t = t, \quad \bar{N} = e^{\epsilon X_1} N = N, \quad \bar{E} = e^{\epsilon X_1} E = E \quad e \quad \bar{M} = e^{\epsilon X_1} M = M.$$

Por conseguinte,

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{N}, \bar{E}, \bar{M}) = (x \cos(\epsilon) - y \sin(\epsilon), x \sin(\epsilon) + y \cos(\epsilon), z, t, N, E, M).$$

(ii) Expressar o grupo local de transformações associado à (3.31) resolvendo o problema de valor inicial (3.10). Assim, quanto às variáveis  $x$  e  $y$ , temos

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\epsilon} = -\bar{y}, \\ \frac{d\bar{y}}{d\epsilon} = \bar{x}, \\ (\bar{x}(0), \bar{y}(0)) = (x, y). \end{cases} \quad (3.32)$$

Seja  $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$ , então a forma matricial do sistema (3.32) é:

$$\mathbf{W}' = A\mathbf{W}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de  $A$  é:  $p(s) = s^2 + 1$ .

Logo, os autovalores de  $A$  são:  $s_1 = i$  e  $s_2 = -i$ . Já, os autovetores associados aos autovalores  $s_1 = i$  e  $s_2 = -i$ , respectivamente, são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad v_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução geral é:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= c_1 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\epsilon) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(\epsilon) \right) + c_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\epsilon) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(\epsilon) \right) \\ &= c_1 \begin{bmatrix} -\sin(\epsilon) \\ \cos(\epsilon) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos(\epsilon) \\ \sin(\epsilon) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando a condição inicial

$$\mathbf{W}(0) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Conseqüentemente,  $c_1 = y$  e  $c_2 = x$ . Portanto, a solução do problema é:

$$\mathbf{W} = y \begin{bmatrix} -\text{sen}(\epsilon) \\ \text{cos}(\epsilon) \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} \text{cos}(\epsilon) \\ \text{sen}(\epsilon) \end{bmatrix}$$

Na forma paramétrica, temos  $\bar{x} = x \text{cos}(\epsilon) - y \text{sen}(\epsilon)$  e  $\bar{y} = x \text{sen}(\epsilon) + y \text{cos}(\epsilon)$ .

Em relação às variáveis  $z$ ,  $t$ ,  $N$ ,  $E$  e  $M$ , temos:

$$\frac{d\bar{z}}{d\epsilon} = \frac{d\bar{t}}{d\epsilon} = \frac{d\bar{N}}{d\epsilon} = \frac{d\bar{E}}{d\epsilon} = \frac{d\bar{M}}{d\epsilon} = 0.$$

Portanto, as soluções são constantes:  $\bar{z} = c_3$ ,  $\bar{t} = c_4$ ,  $\bar{N} = c_5$ ,  $\bar{E} = c_6$ ,  $\bar{M} = c_7$ .

Agora, usando as condições iniciais  $\bar{z}(0) = z$ ,  $\bar{t}(0) = t$ ,  $\bar{N}(0) = N$ ,  $\bar{E}(0) = E$  e  $\bar{M}(0) = M$ , obtemos  $\bar{z} = z$ ,  $\bar{t} = t$ ,  $\bar{N} = N$ ,  $\bar{E} = E$  e  $\bar{M} = M$ .

Por conseguinte, o gerador  $\mathbf{X}_1$  leva à seguinte transformação:

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{N}, \bar{E}, \bar{M}) = (x \text{cos}(\epsilon) - y \text{sen}(\epsilon), x \text{sen}(\epsilon) + y \text{cos}(\epsilon), z, t, N, E, M).$$

O Teorema 3.4 tem o seguinte corolário:

**Corolário 3.1.** Se  $F(\mathbf{x})$  é analítica, então para um grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro (3.5), com gerador infinitesimal dado por (3.20), temos

$$F(\bar{\mathbf{x}}) = F(e^{\epsilon \mathbf{X}} \mathbf{x}) = e^{\epsilon \mathbf{X}} F(\mathbf{x}). \quad (3.33)$$

**Demonstração.**

$$F(\bar{\mathbf{x}}) = F(e^{\epsilon \mathbf{X}} \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \left( \frac{d^k F(\bar{\mathbf{x}})}{d\epsilon^k} \Big|_{\epsilon=0} \right).$$

De (3.29), concluímos que  $\frac{d^k F(\bar{\mathbf{x}})}{d\epsilon^k} \Big|_{\epsilon=0} = \mathbf{X}^k(\mathbf{x}) F(\mathbf{x})$  e, portanto,

$$F(\bar{\mathbf{x}}) = F(e^{\epsilon \mathbf{X}} \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\epsilon^k}{k!} \mathbf{X}^k(\mathbf{x}) \right) F(\mathbf{x}) = e^{\epsilon \mathbf{X}} F(\mathbf{x}).$$

□

O seguinte exemplo ilustra o Corolário 3.1.

**Exemplo 3.7.** Suponha  $F : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$F(x, y, z, t, N, E, M) = x + y. \tag{3.34}$$

A transformação associada ao gerador infinitesimal  $\mathbf{X}_1$ , dado por (3.31), é:

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{N}, \bar{E}, \bar{M}) = (x \cos(\epsilon) - y \sin(\epsilon), x \sin(\epsilon) + y \cos(\epsilon), z, t, N, E, M). \tag{3.35}$$

Portanto, para  $F$  dada por (3.34), temos:

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{N}, \bar{E}, \bar{M}) = \bar{x} + \bar{y} = x \cos(\epsilon) - y \sin(\epsilon) + x \sin(\epsilon) + y \cos(\epsilon). \tag{3.36}$$

Além disso, de (3.35), segue que  $e^{\epsilon \mathbf{X}_1} x = x \cos(\epsilon) - y \sin(\epsilon)$  e  $e^{\epsilon \mathbf{X}_1} y = x \sin(\epsilon) + y \cos(\epsilon)$ .

Portanto, de (3.36), concluímos que

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{N}, \bar{E}, \bar{M}) = e^{\epsilon \mathbf{X}_1} (x + y) = e^{\epsilon \mathbf{X}_1} F(x, y, z, t, N, E, M).$$

### 3.3.3 Funções invariantes

**Definição 3.11.** Uma função infinitamente diferenciável  $F(x)$  é uma função invariante sob um grupo local de Lie de transformações (3.5) se, e somente se,

$$F(\bar{x}) \equiv F(x), \quad \bar{x} = \mathbf{X}(x; \epsilon). \tag{3.37}$$

Se  $F(x)$  é uma função invariante por (3.5), então  $F(x)$  é chamada um invariante de (3.5) e é dita ser um invariante por (3.5).

De posse da Definição 3.11, podemos provar o seguinte teorema.

**Teorema 3.5.** Uma função  $F(x)$  é invariante sob um grupo local de Lie de transformações (3.5) se, e somente se,  $\mathbf{X}F(x) \equiv 0$ .

**Demonstração.** Pelo Corolário 3.1, temos

$$F(\bar{x}) \equiv e^{\epsilon \mathbf{X}} F(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \mathbf{X}^k F(x) \equiv F(x) + \epsilon \mathbf{X}F(x) + \frac{\epsilon^2}{2} \mathbf{X}^2 F(x) + \dots \tag{3.38}$$

Suponha que  $F(\bar{x}) \equiv F(x)$ . Então, de (3.38), segue que

$$\epsilon \mathbf{X}F(x) + \frac{\epsilon^2}{2} \mathbf{X}^2F(x) + \dots \equiv 0,$$

para todo  $\epsilon$ . Devido a isto,  $\mathbf{X}F(x) \equiv 0$ .

Reciprocamente, se  $\mathbf{X}F(x) \equiv 0$ , então  $\mathbf{X}^n F(x) \equiv 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Logo, por (3.38), concluímos que  $F(\bar{x}) \equiv F(x)$ .  $\square$

**Exemplo 3.8.** Vamos considerar novamente o gerador infinitesimal (3.31)

$$\mathbf{X}_1 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x},$$

e seja  $F : \mathbb{R}^7 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$F(x, y, z, t, N, E, M) = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.39)$$

Além disso, já determinamos que

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{N}, \bar{E}, \bar{M}) = (x \cos(\epsilon) - y \sin(\epsilon), x \sin(\epsilon) + y \cos(\epsilon), z, t, N, E, M).$$

A função  $F$ , dada por (3.39), é invariante por (3.31), pois de acordo com a Definição 3.11, temos

$$\begin{aligned} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{N}, \bar{E}, \bar{M}) &= \sqrt{(x \cos(\epsilon) - y \sin(\epsilon))^2 + (x \sin(\epsilon) + y \cos(\epsilon))^2} \\ &= \sqrt{x^2 (\cos^2(\epsilon) + \sin^2(\epsilon)) + y^2 (\sin^2(\epsilon) + \cos^2(\epsilon))} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} = F(x, y, z, t, N, E, M). \end{aligned}$$

Uma vez que  $F$  é invariante, de acordo com o Teorema 3.5, segue que

$$\mathbf{X}_1 F = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \equiv 0.$$

## 3.4 TRANSFORMAÇÕES PONTUAIS E TRANSFORMAÇÕES ESTENDIDAS

O objetivo desta seção é introduzir os grupos locais de transformações de pontos de Lie admitidos por um dado sistema  $S$  de equações diferenciais. Essas transformações preservam as soluções de  $S$ .

**Definição 3.12.** Um grupo local de transformações de pontos de Lie a 1-parâmetro  $\epsilon$  é um grupo local de transformações da forma

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon) = \left( X^1(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon), \dots, X^n(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon) \right), \\ \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon) = \left( U^1(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon), \dots, U^m(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon) \right),\end{aligned}\tag{3.40}$$

que age no espaço de  $n + m$  variáveis:  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$  e  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$ , em que  $\mathbf{x}$  representa  $n$  variáveis independentes, e  $\mathbf{u}$  representa  $m$  variáveis dependentes.

Seja  $\partial\mathbf{u}$  o conjunto de  $nm$  coordenadas correspondentes a todas as derivadas parciais de primeira ordem de  $\mathbf{u}$  em relação a  $\mathbf{x}$ :

$$\partial\mathbf{u} = \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^1}, \frac{\partial u^1}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial u^1}{\partial x^n}, \frac{\partial u^2}{\partial x^1}, \frac{\partial u^2}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial u^2}{\partial x^n}, \dots, \frac{\partial u^m}{\partial x^1}, \frac{\partial u^m}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial u^m}{\partial x^n} \right).\tag{3.41}$$

Em geral, para  $k \geq 1$ ,  $\partial^k\mathbf{u}$  denota o conjunto de coordenadas

$$u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu = \frac{\partial^k u^\mu}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_k}}, \quad \mu = 1, 2, \dots, m, \quad i_j = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

corresponde a todas as derivadas de ordem  $k$  de  $\mathbf{u}$  em relação a  $\mathbf{x}$ .

A transformação natural de derivadas parciais das variáveis dependentes conduz sucessivamente a extensões de um grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro (3.40) agindo no espaço  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  para um grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro (3.40) agindo nos espaços  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}), \dots, (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}, \dots, \partial^k\mathbf{u})$ ,  $k \geq 2$ . Então, a transformação infinitesimal de (3.40) é naturalmente estendida sucessivamente a transformações infinitesimais agindo nos espaços  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}, \dots, \partial^l\mathbf{u})$ ,  $l = 1, \dots, k$ .

A motivação de definir transformações estendidas vem do fato que podemos formular o problema de encontrar o grupo local de Lie de transformações da forma (3.40), admitido por um dado sistema de equações diferenciais  $S$ , em termos dos geradores infinitesimais admitidos por  $S$ . Assim, podemos reduzir o estudo de grupos local de Lie de transformações estendidas ao estudo de transformações infinitesimais estendidas.

Aqui, estamos interessados no caso com  $m$  variáveis dependentes  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$  e  $n$  variáveis independentes  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ , com  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  e  $m \geq 2$ , que está relacionado ao estudo de sistemas de equações diferenciais parciais. Isto nos leva a considerar transformações estendidas do espaço  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  ao espaço  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}, \dots, \partial^k\mathbf{u})$ , em que  $\partial^k\mathbf{u}$  denota as componentes de todas as derivadas parciais de ordem  $k$  de  $\mathbf{u}$  com relação a  $\mathbf{x}$ .

Podemos reescrever o grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro (3.40) da seguinte forma:

$$\bar{x}^i = X^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.42)$$

$$\bar{u}^\mu = U^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon), \quad \mu = 1, 2, \dots, m,$$

em que

$$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) = (X^1(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon), \dots, X^n(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon))$$

e

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^m) = (U^1(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon), \dots, U^m(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon)).$$

Definamos também

$$u_i^\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^i}, \quad \bar{u}_i^\mu = \frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial U^\mu}{\partial X^i},$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} + u_{ij}^\mu \frac{\partial}{\partial u_j^\mu} + u_{i_1 i_2 \dots i_n}^\mu \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_n}^\mu} + \dots,$$

com soma ao longo dos índices repetidos.

### 3.4.1 Grupos estendidos de transformações pontuais: $m$ variáveis dependentes e $n$ independentes

A  $k$ -ésima extensão do grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro (3.40) é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= X^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon), \\ \bar{u}^\mu &= U^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon), \\ \partial \bar{\mathbf{u}} &= \partial \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}; \epsilon), \end{aligned} \quad (3.43)$$

⋮

$$\partial^k \bar{\mathbf{u}} = \partial^k \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^k \mathbf{u}; \epsilon),$$

em que  $i = 1, \dots, n$ ,  $\mu = 1, \dots, m$ . Já, as componentes  $\bar{u}_i^\mu$  de  $\partial \bar{\mathbf{u}}$  são determinadas por

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^\mu \\ \bar{u}_2^\mu \\ \vdots \\ \bar{u}_n^\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^\mu \\ U_2^\mu \\ \vdots \\ U_n^\mu \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U^\mu \\ D_2 U^\mu \\ \vdots \\ D_n U^\mu \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

em que  $A^{-1}$  é a inversa (que assume-se existir) da matriz

$$A = \begin{bmatrix} D_1 X^1 & \dots & D_1 X^n \\ \vdots & & \vdots \\ D_n X^1 & \dots & D_n X^n \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

e as componentes  $\bar{u}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i}^\mu$  de  $\partial^k \bar{\mathbf{u}}$  são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1}^\mu \\ \bar{u}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2}^\mu \\ \vdots \\ \bar{u}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n}^\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1}^\mu \\ U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2}^\mu \\ \vdots \\ U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n}^\mu \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^\mu \\ D_2 U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^\mu \\ \vdots \\ D_n U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^\mu \end{bmatrix}, k \geq 2. \quad (3.46)$$

### 3.4.2 Transformações infinitesimais estendidas: $m$ variáveis dependentes e $n$ independentes

A  $k$ -ésima extensão do grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro (3.43) agindo no espaço  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^k \mathbf{u})$  é representada a seguir por seus infinitesimais:

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= X^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon) = x^i + \epsilon \zeta^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + O(\epsilon^2), \\ \bar{u}^\mu &= U^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \epsilon) = u^\mu + \epsilon \eta^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + O(\epsilon^2), \\ \bar{u}_i &= U_i^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}; \epsilon) = u_i^\mu + \epsilon \eta_1^{(1)\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}) + O(\epsilon^2), \\ &\quad \vdots \\ \bar{u}_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu &= U_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^k \mathbf{u}; \epsilon) = u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu + \epsilon \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^k \mathbf{u}) + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

com os infinitesimais estendidos  $\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu}$  dados por

$$\begin{aligned} \eta_i^{(1)\mu} &= D_i \eta^\mu - (D_i \zeta^j) u_j^\mu, \\ \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu} &= D_{i_k} \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(k-1)\mu} - (D_{i_k} \zeta^j) u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j}^\mu \end{aligned} \quad (3.47)$$

em que  $i = 1, \dots, n$ ,  $\mu = 1, \dots, m$ ,  $i_l = 1, \dots, n$  para  $l = 1, \dots, k$  e  $k \geq 2$ .

A  $k$ -ésima extensão do gerador infinitesimal é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(k)} &= \zeta^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u^\mu} + \eta_i^{(1)\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u_i^\mu} + \dots \\ &+ \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^k \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (3.48)$$

**Exemplo 3.9.** Consideremos o sistema (2.1) reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} N_t = D_1 (N_{xx} + N_{yy} + N_{zz}) - \rho (E_x N_x + N E_{xx} + E_y N_y + N E_{yy} + E_z N_z + N E_{zz}), \\ E_t = -\delta M E, \\ M_t = D_2 (M_{xx} + M_{yy} + M_{zz}) + \mu N - \lambda M. \end{cases} \quad (3.49)$$

Aqui, temos  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ,  $x^4 = t$ ,  $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ ,  $u^1 = N(x, y, z, t)$ ,  $u^2 = E(x, y, z, t)$  e  $u^3 = M(x, y, z, t)$ .

Portanto, para o sistema (3.49), o gerador infinitesimal de simetrias é:

$$\mathbf{X} = \zeta^1 \frac{\partial}{\partial x} + \zeta^2 \frac{\partial}{\partial y} + \zeta^3 \frac{\partial}{\partial z} + \zeta^4 \frac{\partial}{\partial t} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial N} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial E} + \eta^3 \frac{\partial}{\partial M}, \quad (3.50)$$

em que os coeficientes  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \eta^1, \eta^2$  e  $\eta^3$  são funções diferenciáveis de  $x, y, z, t, N, E$  e  $M$ .

Assim, de (3.49), por razões que explicaremos mais à frente, basta-nos calcular os seguintes infinitesimais estendidos:  $\eta_t^{(1)\mu}, \eta_{xx}^{(2)\mu}, \eta_{yy}^{(2)\mu}$  e  $\eta_{zz}^{(2)\mu}$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ ,  $\eta_x^{(1)\mu}, \eta_y^{(1)\mu}$  e  $\eta_z^{(1)\mu}$ ,  $\mu = 1, 2$ .

Logo, o correspondente gerador infinitesimal de segunda ordem de (3.50), simplificado, é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(2)} &= \mathbf{X} + \eta_t^{(1)1} \frac{\partial}{\partial N_t} + \eta_t^{(1)2} \frac{\partial}{\partial E_t} + \eta_t^{(1)3} \frac{\partial}{\partial M_t} + \eta_x^{(1)1} \frac{\partial}{\partial N_x} + \eta_x^{(1)2} \frac{\partial}{\partial E_x} + \eta_y^{(1)1} \frac{\partial}{\partial N_y} \\ &+ \eta_y^{(1)2} \frac{\partial}{\partial E_y} + \eta_z^{(1)1} \frac{\partial}{\partial N_z} + \eta_z^{(1)2} \frac{\partial}{\partial E_z} + \eta_{xx}^{(2)1} \frac{\partial}{\partial N_{xx}} + \eta_{xx}^{(2)2} \frac{\partial}{\partial E_{xx}} + \eta_{xx}^{(2)3} \frac{\partial}{\partial M_{xx}} \\ &+ \eta_{yy}^{(2)1} \frac{\partial}{\partial N_{yy}} + \eta_{yy}^{(2)2} \frac{\partial}{\partial E_{yy}} + \eta_{yy}^{(2)3} \frac{\partial}{\partial M_{yy}} + \eta_{zz}^{(2)1} \frac{\partial}{\partial N_{zz}} + \eta_{zz}^{(2)2} \frac{\partial}{\partial E_{zz}} + \eta_{zz}^{(2)3} \frac{\partial}{\partial M_{zz}}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

As extensões de primeira ordem são dadas por:

$$\begin{aligned} \eta_x^{(1)1} &= D_x \eta^1 - (D_x \zeta^1) N_x - (D_x \zeta^2) N_y - (D_x \zeta^3) N_z - (D_x \zeta^4) N_t, \\ \eta_x^{(1)2} &= D_x \eta^2 - (D_x \zeta^1) E_x - (D_x \zeta^2) E_y - (D_x \zeta^3) E_z - (D_x \zeta^4) E_t, \\ \eta_y^{(1)1} &= D_y \eta^1 - (D_y \zeta^1) N_x - (D_y \zeta^2) N_y - (D_y \zeta^3) N_z - (D_y \zeta^4) N_t, \\ \eta_y^{(1)2} &= D_y \eta^2 - (D_y \zeta^1) E_x - (D_y \zeta^2) E_y - (D_y \zeta^3) E_z - (D_y \zeta^4) E_t, \\ \eta_z^{(1)1} &= D_z \eta^1 - (D_z \zeta^1) N_x - (D_z \zeta^2) N_y - (D_z \zeta^3) N_z - (D_z \zeta^4) N_t, \\ \eta_z^{(1)2} &= D_z \eta^2 - (D_z \zeta^1) E_x - (D_z \zeta^2) E_y - (D_z \zeta^3) E_z - (D_z \zeta^4) E_t, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned}
\eta_t^{(1)1} &= D_t \eta^1 - \left( D_t \tilde{\zeta}^1 \right) N_x - \left( D_t \tilde{\zeta}^2 \right) N_y - \left( D_t \tilde{\zeta}^3 \right) N_z - \left( D_t \tilde{\zeta}^4 \right) N_t, \\
\eta_t^{(1)2} &= D_t \eta^2 - \left( D_t \tilde{\zeta}^1 \right) E_x - \left( D_t \tilde{\zeta}^2 \right) E_y - \left( D_t \tilde{\zeta}^3 \right) E_z - \left( D_t \tilde{\zeta}^4 \right) E_t, \\
\eta_t^{(1)3} &= D_t \eta^3 - \left( D_t \tilde{\zeta}^1 \right) M_x - \left( D_t \tilde{\zeta}^2 \right) M_y - \left( D_t \tilde{\zeta}^3 \right) M_z - \left( D_t \tilde{\zeta}^4 \right) M_t,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

em que  $\eta_x^{(1)\mu} = \eta_x^{(1)\mu}(x, y, z, t, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u})$ ,  $\eta_y^{(1)\mu} = \eta_y^{(1)\mu}(x, y, z, t, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u})$ ,  $\eta_z^{(1)\mu} = \eta_z^{(1)\mu}(x, y, z, t, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u})$ , com  $\mu = 1, 2$  e  $\eta_t^{(1)\mu} = \eta_t^{(1)\mu}(x, y, z, t, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u})$ , para  $\mu = 1, 2, 3$ .

Já, os operadores derivada total  $D_x, D_y, D_z$  e  $D_t$  são dados por:

$$\begin{aligned}
D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + N_x \frac{\partial}{\partial N} + E_x \frac{\partial}{\partial E} + M_x \frac{\partial}{\partial M} + N_{xx} \frac{\partial}{\partial N_x} + E_{xx} \frac{\partial}{\partial E_x} + M_{xx} \frac{\partial}{\partial M_x} + N_{xy} \frac{\partial}{\partial N_y} \\
&+ E_{xy} \frac{\partial}{\partial E_y} + M_{xy} \frac{\partial}{\partial M_y} + N_{xz} \frac{\partial}{\partial N_z} + E_{xz} \frac{\partial}{\partial E_z} + M_{xz} \frac{\partial}{\partial M_z} + N_{xt} \frac{\partial}{\partial N_t} + E_{xt} \frac{\partial}{\partial E_t} \\
&+ M_{xt} \frac{\partial}{\partial M_t}, \\
D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + N_y \frac{\partial}{\partial N} + E_y \frac{\partial}{\partial E} + M_y \frac{\partial}{\partial M} + N_{yx} \frac{\partial}{\partial N_x} + E_{yx} \frac{\partial}{\partial E_x} + M_{yx} \frac{\partial}{\partial M_x} + N_{yy} \frac{\partial}{\partial N_y} \\
&+ E_{yy} \frac{\partial}{\partial E_y} + M_{yy} \frac{\partial}{\partial M_y} + N_{yz} \frac{\partial}{\partial N_z} + E_{yz} \frac{\partial}{\partial E_z} + M_{yz} \frac{\partial}{\partial M_z} + N_{yt} \frac{\partial}{\partial N_t} + E_{yt} \frac{\partial}{\partial E_t} \\
&+ M_{yt} \frac{\partial}{\partial M_t}, \\
D_z &= \frac{\partial}{\partial z} + N_z \frac{\partial}{\partial N} + E_z \frac{\partial}{\partial E} + M_z \frac{\partial}{\partial M} + N_{zx} \frac{\partial}{\partial N_x} + E_{zx} \frac{\partial}{\partial E_x} + M_{zx} \frac{\partial}{\partial M_x} + N_{zy} \frac{\partial}{\partial N_y} \\
&+ E_{zy} \frac{\partial}{\partial E_y} + M_{zy} \frac{\partial}{\partial M_y} + N_{zz} \frac{\partial}{\partial N_z} + E_{zz} \frac{\partial}{\partial E_z} + M_{zz} \frac{\partial}{\partial M_z} + N_{zt} \frac{\partial}{\partial N_t} + E_{zt} \frac{\partial}{\partial E_t} \\
&+ M_{zt} \frac{\partial}{\partial M_t}, \\
D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + N_t \frac{\partial}{\partial N} + E_t \frac{\partial}{\partial E} + M_t \frac{\partial}{\partial M} + N_{tx} \frac{\partial}{\partial N_x} + E_{tx} \frac{\partial}{\partial E_x} + M_{tx} \frac{\partial}{\partial M_x} + N_{ty} \frac{\partial}{\partial N_y} \\
&+ E_{ty} \frac{\partial}{\partial E_y} + M_{ty} \frac{\partial}{\partial M_y} + N_{tz} \frac{\partial}{\partial N_z} + E_{tz} \frac{\partial}{\partial E_z} + M_{tz} \frac{\partial}{\partial M_z} + N_{tt} \frac{\partial}{\partial N_t} + E_{tt} \frac{\partial}{\partial E_t} \\
&+ M_{tt} \frac{\partial}{\partial M_t}.
\end{aligned}$$

Os espaços de derivadas são:

$$\partial \mathbf{u} = (N_x, N_y, N_z, N_t, E_x, E_y, E_z, E_t, M_x, M_y, M_z, M_t)$$

e

$$\begin{aligned}
\partial^2 \mathbf{u} &= (N_{xx}, N_{xy}, N_{xz}, N_{xt}, N_{yy}, N_{yz}, N_{yt}, N_{zz}, N_{zt}, N_{tt}, E_{xx}, E_{xy}, E_{xz}, E_{xt}, E_{yy}, E_{yz}, \\
&E_{yt}, E_{zz}, E_{zt}, E_{tt}, M_{xx}, M_{xy}, M_{xz}, M_{xt}, M_{yy}, M_{yz}, M_{yt}, M_{zz}, M_{zt}, M_{tt}).
\end{aligned}$$

Logo, aplicando  $D_x$ ,  $D_y$  e  $D_z$  em (3.52), obtemos as seguintes extensões de primeira ordem no espaço:

$$\begin{aligned}
\eta_x^{(1)1} &= M_x\eta_M^1 + E_x\eta_E^1 + N_x\eta_N^1 + \eta_x^1 - N_xM_x\tilde{\zeta}_M^1 - N_xE_x\tilde{\zeta}_E^1 - N_xN_x\tilde{\zeta}_N^1 - N_x\tilde{\zeta}_x^1 \\
&\quad - N_yM_x\tilde{\zeta}_M^2 - N_yE_x\tilde{\zeta}_E^2 - N_yN_x\tilde{\zeta}_N^2 - N_y\tilde{\zeta}_x^2 - N_zM_x\tilde{\zeta}_M^3 - N_zE_x\tilde{\zeta}_E^3 - N_zN_x\tilde{\zeta}_N^3 \\
&\quad - N_z\tilde{\zeta}_x^3 - N_tM_x\tilde{\zeta}_M^4 - N_tE_x\tilde{\zeta}_E^4 - N_tN_x\tilde{\zeta}_N^4 - N_t\tilde{\zeta}_x^4, \\
\eta_x^{(1)2} &= M_x\eta_M^2 + E_x\eta_E^2 + N_x\eta_N^2 + \eta_x^2 - E_xM_x\tilde{\zeta}_M^1 - E_xE_x\tilde{\zeta}_E^1 - E_xN_x\tilde{\zeta}_N^1 - E_x\tilde{\zeta}_x^1 \\
&\quad - E_yM_x\tilde{\zeta}_M^2 - E_yE_x\tilde{\zeta}_E^2 - E_yN_x\tilde{\zeta}_N^2 - E_y\tilde{\zeta}_x^2 - E_zM_x\tilde{\zeta}_M^3 - E_zE_x\tilde{\zeta}_E^3 - E_zN_x\tilde{\zeta}_N^3 \\
&\quad - E_z\tilde{\zeta}_x^3 - E_tM_x\tilde{\zeta}_M^4 - E_tE_x\tilde{\zeta}_E^4 - E_tN_x\tilde{\zeta}_N^4 - E_t\tilde{\zeta}_x^4, \\
\eta_y^{(1)1} &= M_y\eta_M^1 + E_y\eta_E^1 + N_y\eta_N^1 + \eta_y^1 - N_xM_y\tilde{\zeta}_M^1 - N_xE_y\tilde{\zeta}_E^1 - N_xN_y\tilde{\zeta}_N^1 - N_x\tilde{\zeta}_y^1 \\
&\quad - N_yM_y\tilde{\zeta}_M^2 - N_yE_y\tilde{\zeta}_E^2 - N_yN_y\tilde{\zeta}_N^2 - N_y\tilde{\zeta}_y^2 - N_zM_y\tilde{\zeta}_M^3 - N_zE_y\tilde{\zeta}_E^3 - N_zN_y\tilde{\zeta}_N^3 \\
&\quad - N_z\tilde{\zeta}_y^3 - N_tM_y\tilde{\zeta}_M^4 - N_tE_y\tilde{\zeta}_E^4 - N_tN_y\tilde{\zeta}_N^4 - N_t\tilde{\zeta}_y^4, \\
\eta_y^{(1)2} &= M_y\eta_M^2 + E_y\eta_E^2 + N_y\eta_N^2 + \eta_y^2 - E_xM_y\tilde{\zeta}_M^1 - E_xE_y\tilde{\zeta}_E^1 - E_xN_y\tilde{\zeta}_N^1 - E_x\tilde{\zeta}_y^1 \\
&\quad - E_yM_y\tilde{\zeta}_M^2 - E_yE_y\tilde{\zeta}_E^2 - E_yN_y\tilde{\zeta}_N^2 - E_y\tilde{\zeta}_y^2 - E_zM_y\tilde{\zeta}_M^3 - E_zE_y\tilde{\zeta}_E^3 - E_zN_y\tilde{\zeta}_N^3 \\
&\quad - E_z\tilde{\zeta}_y^3 - E_tM_y\tilde{\zeta}_M^4 - E_tE_y\tilde{\zeta}_E^4 - E_tN_y\tilde{\zeta}_N^4 - E_t\tilde{\zeta}_y^4, \\
\eta_z^{(1)1} &= M_z\eta_M^1 + E_z\eta_E^1 + N_z\eta_N^1 + \eta_z^1 - N_xM_z\tilde{\zeta}_M^1 - N_xE_z\tilde{\zeta}_E^1 - N_xN_z\tilde{\zeta}_N^1 - N_x\tilde{\zeta}_z^1 \\
&\quad - N_yM_z\tilde{\zeta}_M^2 - N_yE_z\tilde{\zeta}_E^2 - N_yN_z\tilde{\zeta}_N^2 - N_y\tilde{\zeta}_z^2 - N_zM_z\tilde{\zeta}_M^3 - N_zE_z\tilde{\zeta}_E^3 - N_zN_z\tilde{\zeta}_N^3 \\
&\quad - N_z\tilde{\zeta}_z^3 - N_tM_z\tilde{\zeta}_M^4 - N_tE_z\tilde{\zeta}_E^4 - N_tN_z\tilde{\zeta}_N^4 - N_t\tilde{\zeta}_z^4, \\
\eta_z^{(1)2} &= M_z\eta_M^2 + E_z\eta_E^2 + N_z\eta_N^2 + \eta_z^2 - E_xM_z\tilde{\zeta}_M^1 - E_xE_z\tilde{\zeta}_E^1 - E_xN_z\tilde{\zeta}_N^1 - E_x\tilde{\zeta}_z^1 \\
&\quad - E_yM_z\tilde{\zeta}_M^2 - E_yE_z\tilde{\zeta}_E^2 - E_yN_z\tilde{\zeta}_N^2 - E_y\tilde{\zeta}_z^2 - E_zM_z\tilde{\zeta}_M^3 - E_zE_z\tilde{\zeta}_E^3 - E_zN_z\tilde{\zeta}_N^3 \\
&\quad - E_z\tilde{\zeta}_z^3 - E_tM_z\tilde{\zeta}_M^4 - E_tE_z\tilde{\zeta}_E^4 - E_tN_z\tilde{\zeta}_N^4 - E_t\tilde{\zeta}_z^4.
\end{aligned}$$

Analogamente, aplicando  $D_t$  em (3.53), obtemos as extensões de primeira ordem no tempo, dadas por:

$$\begin{aligned}
\eta_t^{(1)1} &= M_t\eta_M^1 + E_t\eta_E^1 + N_t\eta_N^1 + \eta_t^1 - N_xM_t\tilde{\zeta}_M^1 - N_xE_t\tilde{\zeta}_E^1 - N_xN_t\tilde{\zeta}_N^1 - N_x\tilde{\zeta}_t^1 \\
&\quad - N_yM_t\tilde{\zeta}_M^2 - N_yE_t\tilde{\zeta}_E^2 - N_yN_t\tilde{\zeta}_N^2 - N_y\tilde{\zeta}_t^2 - N_zM_t\tilde{\zeta}_M^3 - N_zE_t\tilde{\zeta}_E^3 - N_zN_t\tilde{\zeta}_N^3 \\
&\quad - N_z\tilde{\zeta}_t^3 - N_tM_t\tilde{\zeta}_M^4 - N_tE_t\tilde{\zeta}_E^4 - N_tN_t\tilde{\zeta}_N^4 - N_t\tilde{\zeta}_t^4, \\
\eta_t^{(1)2} &= M_t\eta_M^2 + E_t\eta_E^2 + N_t\eta_N^2 + \eta_t^2 - E_xM_t\tilde{\zeta}_M^1 - E_xE_t\tilde{\zeta}_E^1 - E_xN_t\tilde{\zeta}_N^1 - E_x\tilde{\zeta}_t^1 \\
&\quad - E_yM_t\tilde{\zeta}_M^2 - E_yE_t\tilde{\zeta}_E^2 - E_yN_t\tilde{\zeta}_N^2 - E_y\tilde{\zeta}_t^2 - E_zM_t\tilde{\zeta}_M^3 - E_zE_t\tilde{\zeta}_E^3 - E_zN_t\tilde{\zeta}_N^3 \\
&\quad - E_z\tilde{\zeta}_t^3 - E_tM_t\tilde{\zeta}_M^4 - E_tE_t\tilde{\zeta}_E^4 - E_tN_t\tilde{\zeta}_N^4 - E_t\tilde{\zeta}_t^4, \\
\eta_t^{(1)3} &= M_t\eta_M^3 + E_t\eta_E^3 + N_t\eta_N^3 + \eta_t^3 - M_xM_t\tilde{\zeta}_M^1 - M_xE_t\tilde{\zeta}_E^1 - M_xN_t\tilde{\zeta}_N^1 - M_x\tilde{\zeta}_t^1 \\
&\quad - M_yM_t\tilde{\zeta}_M^2 - M_yE_t\tilde{\zeta}_E^2 - M_yN_t\tilde{\zeta}_N^2 - M_y\tilde{\zeta}_t^2 - M_zM_t\tilde{\zeta}_M^3 - M_zE_t\tilde{\zeta}_E^3 - M_zN_t\tilde{\zeta}_N^3 \\
&\quad - M_z\tilde{\zeta}_t^3 - M_tM_t\tilde{\zeta}_M^4 - M_tE_t\tilde{\zeta}_E^4 - M_tN_t\tilde{\zeta}_N^4 - M_t\tilde{\zeta}_t^4.
\end{aligned}$$

As extensões de segunda ordem no espaço são dadas por (3.47), isto é,

$$\begin{aligned}
\eta_{xx}^{(2)1} &= D_x \eta_x^{(1)1} - \left( D_x \tilde{\zeta}^1 \right) N_{xx} - \left( D_x \tilde{\zeta}^2 \right) N_{xy} - \left( D_x \tilde{\zeta}^3 \right) N_{xz} - \left( D_x \tilde{\zeta}^4 \right) N_{xt}, \\
\eta_{xx}^{(2)2} &= D_x \eta_x^{(1)2} - \left( D_x \tilde{\zeta}^1 \right) E_{xx} - \left( D_x \tilde{\zeta}^2 \right) E_{xy} - \left( D_x \tilde{\zeta}^3 \right) E_{xz} - \left( D_x \tilde{\zeta}^4 \right) E_{xt}, \\
\eta_{xx}^{(2)3} &= D_x \eta_x^{(1)3} - \left( D_x \tilde{\zeta}^1 \right) M_{xx} - \left( D_x \tilde{\zeta}^2 \right) M_{xy} - \left( D_x \tilde{\zeta}^3 \right) M_{xz} - \left( D_x \tilde{\zeta}^4 \right) M_{xt}, \\
\eta_{yy}^{(2)1} &= D_y \eta_y^{(1)1} - \left( D_y \tilde{\zeta}^1 \right) N_{yx} - \left( D_y \tilde{\zeta}^2 \right) N_{yy} - \left( D_y \tilde{\zeta}^3 \right) N_{yz} - \left( D_y \tilde{\zeta}^4 \right) N_{yt}, \\
\eta_{yy}^{(2)2} &= D_y \eta_y^{(1)2} - \left( D_y \tilde{\zeta}^1 \right) E_{yx} - \left( D_y \tilde{\zeta}^2 \right) E_{yy} - \left( D_y \tilde{\zeta}^3 \right) E_{yz} - \left( D_y \tilde{\zeta}^4 \right) E_{yt}, \\
\eta_{yy}^{(2)3} &= D_y \eta_y^{(1)3} - \left( D_y \tilde{\zeta}^1 \right) M_{yx} - \left( D_y \tilde{\zeta}^2 \right) M_{yy} - \left( D_y \tilde{\zeta}^3 \right) M_{yz} - \left( D_y \tilde{\zeta}^4 \right) M_{yt}, \\
\eta_{zz}^{(2)1} &= D_z \eta_z^{(1)1} - \left( D_z \tilde{\zeta}^1 \right) N_{zx} - \left( D_z \tilde{\zeta}^2 \right) N_{zy} - \left( D_z \tilde{\zeta}^3 \right) N_{zz} - \left( D_z \tilde{\zeta}^4 \right) N_{zt}, \\
\eta_{zz}^{(2)2} &= D_z \eta_z^{(1)2} - \left( D_z \tilde{\zeta}^1 \right) E_{zx} - \left( D_z \tilde{\zeta}^2 \right) E_{zy} - \left( D_z \tilde{\zeta}^3 \right) E_{zz} - \left( D_z \tilde{\zeta}^4 \right) E_{zt}, \\
\eta_{zz}^{(2)3} &= D_z \eta_z^{(1)3} - \left( D_z \tilde{\zeta}^1 \right) M_{zx} - \left( D_z \tilde{\zeta}^2 \right) M_{zy} - \left( D_z \tilde{\zeta}^3 \right) M_{zz} - \left( D_z \tilde{\zeta}^4 \right) M_{zt},
\end{aligned}$$

em que  $\eta_{xx}^{(2)\mu} = \eta_{xx}^{(1)\mu}(x, y, z, t, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u})$ ,  $\eta_{yy}^{(2)\mu} = \eta_{yy}^{(1)\mu}(x, y, z, t, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u})$ ,  $\eta_{zz}^{(2)\mu} = \eta_{zz}^{(1)\mu}(x, y, z, t, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u})$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ . Então,

$$\begin{aligned}
\eta_{xx}^{(2)1} &= M_{xx} \eta_M^1 + E_{xx} \eta_E^1 + N_{xx} \eta_N^1 - 2N_{xx} \left( M_x \tilde{\zeta}_M^1 + E_x \tilde{\zeta}_E^1 + N_x \tilde{\zeta}_N^1 + \tilde{\zeta}_x^1 \right) \\
&\quad - 2N_{xy} \left( M_x \tilde{\zeta}_M^2 + E_x \tilde{\zeta}_E^2 + N_x \tilde{\zeta}_N^2 + \tilde{\zeta}_x^2 \right) - 2N_{xz} \left( M_x \tilde{\zeta}_M^3 + E_x \tilde{\zeta}_E^3 + N_x \tilde{\zeta}_N^3 + \tilde{\zeta}_x^3 \right) \\
&\quad - 2N_{xt} \left( M_x \tilde{\zeta}_M^4 + E_x \tilde{\zeta}_E^4 + N_x \tilde{\zeta}_N^4 + \tilde{\zeta}_x^4 \right) + M_x \eta_{xM}^1 + M_x \left( M_x \eta_{MM}^1 + E_x \eta_{EM}^1 \right. \\
&\quad \left. + N_x \eta_{NM}^1 + \eta_{xM}^1 \right) + E_x \eta_{xE}^1 + E_x \left( M_x \eta_{EM}^1 + E_x \eta_{EE}^1 + N_x \eta_{NE}^1 + \eta_{xE}^1 \right) \\
&\quad + N_x \eta_{xN}^1 + N_x \left( M_x \eta_{NM}^1 + E_x \eta_{NE}^1 + N_x \eta_{NN}^1 + \eta_{xN}^1 \right) + \eta_{xx}^1 - N_x \left( M_{xx} \tilde{\zeta}_M^1 \right. \\
&\quad \left. + E_{xx} \tilde{\zeta}_E^1 + N_{xx} \tilde{\zeta}_N^1 + M_x \tilde{\zeta}_{xM}^1 + M_x \left( M_x \tilde{\zeta}_{MM}^1 + E_x \tilde{\zeta}_{EM}^1 + N_x \tilde{\zeta}_{NM}^1 + \tilde{\zeta}_{xM}^1 \right) + E_x \tilde{\zeta}_{xE}^1 \right. \\
&\quad \left. + E_x \left( M_x \tilde{\zeta}_{EM}^1 + E_x \tilde{\zeta}_{EE}^1 + N_x \tilde{\zeta}_{NE}^1 + \tilde{\zeta}_{xE}^1 \right) + N_x \tilde{\zeta}_{xN}^1 + N_x \left( M_x \tilde{\zeta}_{NM}^1 + E_x \tilde{\zeta}_{NE}^1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + N_x \tilde{\zeta}_{NN}^1 + \tilde{\zeta}_{xN}^1 \right) + \tilde{\zeta}_{xx}^1 \right) - N_y \left( M_{xx} \tilde{\zeta}_M^2 + E_{xx} \tilde{\zeta}_E^2 + N_{xx} \tilde{\zeta}_N^2 + M_x \tilde{\zeta}_{xM}^2 \right. \\
&\quad \left. + M_x \left( M_x \tilde{\zeta}_{MM}^2 + E_x \tilde{\zeta}_{EM}^2 + N_x \tilde{\zeta}_{NM}^2 + \tilde{\zeta}_{xM}^2 \right) + E_x \tilde{\zeta}_{xE}^2 + E_x \left( M_x \tilde{\zeta}_{EM}^2 + E_x \tilde{\zeta}_{EE}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + N_x \tilde{\zeta}_{NE}^2 + \tilde{\zeta}_{xE}^2 \right) + N_x \tilde{\zeta}_{xN}^2 + N_x \left( M_x \tilde{\zeta}_{NM}^2 + E_x \tilde{\zeta}_{NE}^2 + N_x \tilde{\zeta}_{NN}^2 + \tilde{\zeta}_{xN}^2 \right) + \tilde{\zeta}_{xx}^2 \right) \\
&\quad - N_z \left( M_{xx} \tilde{\zeta}_M^3 + E_{xx} \tilde{\zeta}_E^3 + N_{xx} \tilde{\zeta}_N^3 + M_x \tilde{\zeta}_{xM}^3 + M_x \left( M_x \tilde{\zeta}_{MM}^3 + E_x \tilde{\zeta}_{EM}^3 + N_x \tilde{\zeta}_{NM}^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \tilde{\zeta}_{xM}^3 \right) + E_x \tilde{\zeta}_{xE}^3 + E_x \left( M_x \tilde{\zeta}_{EM}^3 + E_x \tilde{\zeta}_{EE}^3 + N_x \tilde{\zeta}_{NE}^3 + \tilde{\zeta}_{xE}^3 \right) + N_x \tilde{\zeta}_{xN}^3 \right. \\
&\quad \left. + N_x \left( M_x \tilde{\zeta}_{NM}^3 + E_x \tilde{\zeta}_{NE}^3 + N_x \tilde{\zeta}_{NN}^3 + \tilde{\zeta}_{xN}^3 \right) + \tilde{\zeta}_{xx}^3 \right) - N_t \left( M_{xx} \tilde{\zeta}_M^4 + E_{xx} \tilde{\zeta}_E^4 \right. \\
&\quad \left. + N_{xx} \tilde{\zeta}_N^4 + M_x \tilde{\zeta}_{xM}^4 + M_x \left( M_x \tilde{\zeta}_{MM}^4 + E_x \tilde{\zeta}_{EM}^4 + N_x \tilde{\zeta}_{NM}^4 + \tilde{\zeta}_{xM}^4 \right) + E_x \tilde{\zeta}_{xE}^4 \right. \\
&\quad \left. + E_x \left( M_x \tilde{\zeta}_{EM}^4 + E_x \tilde{\zeta}_{EE}^4 + N_x \tilde{\zeta}_{NE}^4 + \tilde{\zeta}_{xE}^4 \right) + N_x \tilde{\zeta}_{xN}^4 + N_x \left( M_x \tilde{\zeta}_{NM}^4 + E_x \tilde{\zeta}_{NE}^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + N_x \tilde{\zeta}_{NN}^4 + \tilde{\zeta}_{xN}^4 \right) + \tilde{\zeta}_{xx}^4 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{xx}^{(2)2} &= M_{xx}\eta_M^2 + E_{xx}\eta_E^2 + N_{xx}\eta_N^2 - 2E_{xx} \left( M_x\zeta_M^1 + E_x\zeta_E^1 + N_x\zeta_N^1 + \zeta_x^1 \right) \\
&- 2E_{xy} \left( M_x\zeta_M^2 + E_x\zeta_E^2 + N_x\zeta_N^2 + \zeta_x^2 \right) - 2E_{xz} \left( M_x\zeta_M^3 + E_x\zeta_E^3 + N_x\zeta_N^3 + \zeta_x^3 \right) \\
&- 2E_{xt} \left( M_x\zeta_M^4 + E_x\zeta_E^4 + N_x\zeta_N^4 + \zeta_x^4 \right) + M_x\eta_{xM}^2 + M_x \left( M_x\eta_{MM}^2 + E_x\eta_{EM}^2 \right. \\
&+ N_x\eta_{NM}^2 + \eta_{xM}^2 \left. \right) + E_x\eta_{xE}^2 + E_x \left( M_x\eta_{EM}^2 + E_x\eta_{EE}^2 + N_x\eta_{NE}^2 + \eta_{xE}^2 \right) \\
&+ N_x\eta_{xN}^2 + N_x \left( M_x\eta_{NM}^2 + E_x\eta_{NE}^2 + N_x\eta_{NN}^2 + \eta_{xN}^2 \right) + \eta_{xx}^2 - E_x \left( M_{xx}\zeta_M^1 \right. \\
&+ E_{xx}\zeta_E^1 + N_{xx}\zeta_N^1 + M_x\zeta_{xM}^1 + M_x \left( M_x\zeta_{MM}^1 + E_x\zeta_{EM}^1 + N_x\zeta_{NM}^1 + \zeta_{xM}^1 \right) + E_x\zeta_{xE}^1 \\
&+ E_x \left( M_x\zeta_{EM}^1 + E_x\zeta_{EE}^1 + N_x\zeta_{NE}^1 + \zeta_{xE}^1 \right) + N_x\zeta_{xN}^1 + N_x \left( M_x\zeta_{NM}^1 + E_x\zeta_{NE}^1 \right. \\
&+ N_x\zeta_{NN}^1 + \zeta_{xN}^1 \left. \right) + \zeta_{xx}^1 \left. \right) - E_y \left( M_{xx}\zeta_M^2 + E_{xx}\zeta_E^2 + N_{xx}\zeta_N^2 + M_x\zeta_{xM}^2 \right. \\
&+ M_x \left( M_x\zeta_{MM}^2 + E_x\zeta_{EM}^2 + N_x\zeta_{NM}^2 + \zeta_{xM}^2 \right) + E_x\zeta_{xE}^2 + E_x \left( M_x\zeta_{EM}^2 + E_x\zeta_{EE}^2 \right. \\
&+ N_x\zeta_{NE}^2 + \zeta_{xE}^2 \left. \right) + N_x\zeta_{xN}^2 + N_x \left( M_x\zeta_{NM}^2 + E_x\zeta_{NE}^2 + N_x\zeta_{NN}^2 + \zeta_{xN}^2 \right) + \zeta_{xx}^2 \left. \right) \\
&- E_z \left( M_{xx}\zeta_M^3 + E_{xx}\zeta_E^3 + N_{xx}\zeta_N^3 + M_x\zeta_{xM}^3 + M_x \left( M_x\zeta_{MM}^3 + E_x\zeta_{EM}^3 + N_x\zeta_{NM}^3 \right. \right. \\
&+ \zeta_{xM}^3 \left. \right) + E_x\zeta_{xE}^3 + E_x \left( M_x\zeta_{EM}^3 + E_x\zeta_{EE}^3 + N_x\zeta_{NE}^3 + \zeta_{xE}^3 \right) + N_x\zeta_{xN}^3 \\
&+ N_x \left( M_x\zeta_{NM}^3 + E_x\zeta_{NE}^3 + N_x\zeta_{NN}^3 + \zeta_{xN}^3 \right) + \zeta_{xx}^3 \left. \right) - E_t \left( M_{xx}\zeta_M^4 + E_{xx}\zeta_E^4 \right. \\
&+ N_{xx}\zeta_N^4 + M_x\zeta_{xM}^4 + M_x \left( M_x\zeta_{MM}^4 + E_x\zeta_{EM}^4 + N_x\zeta_{NM}^4 + \zeta_{xM}^4 \right) + E_x\zeta_{xE}^4 \\
&+ E_x \left( M_x\zeta_{EM}^4 + E_x\zeta_{EE}^4 + N_x\zeta_{NE}^4 + \zeta_{xE}^4 \right) + N_x\zeta_{xN}^4 + N_x \left( M_x\zeta_{NM}^4 + E_x\zeta_{NE}^4 \right. \\
&+ N_x\zeta_{NN}^4 + \zeta_{xN}^4 \left. \right) + \zeta_{xx}^4 \left. \right), \\
\eta_{xx}^{(2)3} &= M_{xx}\eta_M^3 + E_{xx}\eta_E^3 + N_{xx}\eta_N^3 - 2M_{xx} \left( M_x\zeta_M^1 + E_x\zeta_E^1 + N_x\zeta_N^1 + \zeta_x^1 \right) \\
&- 2M_{xy} \left( M_x\zeta_M^2 + E_x\zeta_E^2 + N_x\zeta_N^2 + \zeta_x^2 \right) - 2M_{xz} \left( M_x\zeta_M^3 + E_x\zeta_E^3 + N_x\zeta_N^3 + \zeta_x^3 \right) \\
&- 2M_{xt} \left( M_x\zeta_M^4 + E_x\zeta_E^4 + N_x\zeta_N^4 + \zeta_x^4 \right) + M_x\eta_{xM}^3 + M_x \left( M_x\eta_{MM}^3 + E_x\eta_{EM}^3 \right. \\
&+ N_x\eta_{NM}^3 + \eta_{xM}^3 \left. \right) + E_x\eta_{xE}^3 + E_x \left( M_x\eta_{EM}^3 + E_x\eta_{EE}^3 + N_x\eta_{NE}^3 + \eta_{xE}^3 \right) \\
&+ N_x\eta_{xN}^3 + N_x \left( M_x\eta_{NM}^3 + E_x\eta_{NE}^3 + N_x\eta_{NN}^3 + \eta_{xN}^3 \right) + \eta_{xx}^3 - M_x \left( M_{xx}\zeta_M^1 \right. \\
&+ E_{xx}\zeta_E^1 + N_{xx}\zeta_N^1 + M_x\zeta_{xM}^1 + M_x \left( M_x\zeta_{MM}^1 + E_x\zeta_{EM}^1 + N_x\zeta_{NM}^1 + \zeta_{xM}^1 \right) + E_x\zeta_{xE}^1 \\
&+ E_x \left( M_x\zeta_{EM}^1 + E_x\zeta_{EE}^1 + N_x\zeta_{NE}^1 + \zeta_{xE}^1 \right) + N_x\zeta_{xN}^1 + N_x \left( M_x\zeta_{NM}^1 + E_x\zeta_{NE}^1 \right. \\
&+ N_x\zeta_{NN}^1 + \zeta_{xN}^1 \left. \right) + \zeta_{xx}^1 \left. \right) - M_y \left( M_{xx}\zeta_M^2 + E_{xx}\zeta_E^2 + N_{xx}\zeta_N^2 + M_x\zeta_{xM}^2 \right. \\
&+ M_x \left( M_x\zeta_{MM}^2 + E_x\zeta_{EM}^2 + N_x\zeta_{NM}^2 + \zeta_{xM}^2 \right) + E_x\zeta_{xE}^2 + E_x \left( M_x\zeta_{EM}^2 + E_x\zeta_{EE}^2 \right. \\
&+ N_x\zeta_{NE}^2 + \zeta_{xE}^2 \left. \right) + N_x\zeta_{xN}^2 + N_x \left( M_x\zeta_{NM}^2 + E_x\zeta_{NE}^2 + N_x\zeta_{NN}^2 + \zeta_{xN}^2 \right) + \zeta_{xx}^2 \left. \right) \\
&- M_z \left( M_{xx}\zeta_M^3 + E_{xx}\zeta_E^3 + N_{xx}\zeta_N^3 + M_x\zeta_{xM}^3 + M_x \left( M_x\zeta_{MM}^3 + E_x\zeta_{EM}^3 + N_x\zeta_{NM}^3 \right. \right. \\
&+ \zeta_{xM}^3 \left. \right) + E_x\zeta_{xE}^3 + E_x \left( M_x\zeta_{EM}^3 + E_x\zeta_{EE}^3 + N_x\zeta_{NE}^3 + \zeta_{xE}^3 \right) + N_x\zeta_{xN}^3 \\
&+ N_x \left( M_x\zeta_{NM}^3 + E_x\zeta_{NE}^3 + N_x\zeta_{NN}^3 + \zeta_{xN}^3 \right) + \zeta_{xx}^3 \left. \right) - M_t \left( M_{xx}\zeta_M^4 + E_{xx}\zeta_E^4 \right. \\
&+ N_{xx}\zeta_N^4 + M_x\zeta_{xM}^4 + M_x \left( M_x\zeta_{MM}^4 + E_x\zeta_{EM}^4 + N_x\zeta_{NM}^4 + \zeta_{xM}^4 \right) + E_x\zeta_{xE}^4 \\
&+ E_x \left( M_x\zeta_{EM}^4 + E_x\zeta_{EE}^4 + N_x\zeta_{NE}^4 + \zeta_{xE}^4 \right) + N_x\zeta_{xN}^4 + N_x \left( M_x\zeta_{NM}^4 + E_x\zeta_{NE}^4 \right. \\
&+ N_x\zeta_{NN}^4 + \zeta_{xN}^4 \left. \right) + \zeta_{xx}^4 \left. \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{yy}^{(2)1} &= M_{yy}\eta_M^1 + E_{yy}\eta_E^1 + N_{yy}\eta_N^1 - 2N_{xy} \left( M_y\zeta_M^1 + E_y\zeta_E^1 + N_y\zeta_N^1 + \zeta_y^1 \right) \\
&- 2N_{yy} \left( M_y\zeta_M^2 + E_y\zeta_E^2 + N_y\zeta_N^2 + \zeta_y^2 \right) - 2N_{yz} \left( M_y\zeta_M^3 + E_y\zeta_E^3 + N_y\zeta_N^3 + \zeta_y^3 \right) \\
&- 2N_{yt} \left( M_y\zeta_M^4 + E_y\zeta_E^4 + N_y\zeta_N^4 + \zeta_y^4 \right) + M_y\eta_{yM}^1 + M_y \left( M_y\eta_{MM}^1 + E_y\eta_{EM}^1 \right. \\
&+ N_y\eta_{NM}^1 + \eta_{yM}^1 \left. \right) + E_y\eta_{yE}^1 + E_y \left( M_y\eta_{EM}^1 + E_y\eta_{EE}^1 + N_y\eta_{NE}^1 + \eta_{yE}^1 \right) \\
&+ N_y\eta_{yN}^1 + N_y \left( M_y\eta_{NM}^1 + E_y\eta_{NE}^1 + N_y\eta_{NN}^1 + \eta_{yN}^1 \right) + \eta_{yy}^1 - N_x \left( M_{yy}\zeta_M^1 \right. \\
&+ E_{yy}\zeta_E^1 + N_{yy}\zeta_N^1 + M_y\zeta_{yM}^1 + M_y \left( M_y\zeta_{MM}^1 + E_y\zeta_{EM}^1 + N_y\zeta_{NM}^1 + \zeta_{yM}^1 \right) + E_y\zeta_{yE}^1 \\
&+ E_y \left( M_y\zeta_{EM}^1 + E_y\zeta_{EE}^1 + N_y\zeta_{NE}^1 + \zeta_{yE}^1 \right) + N_y\zeta_{yN}^1 + N_y \left( M_y\zeta_{NM}^1 + E_y\zeta_{NE}^1 \right. \\
&+ N_y\zeta_{NN}^1 + \zeta_{yN}^1 \left. \right) + \zeta_{yy}^1 \left. \right) - N_y \left( M_{yy}\zeta_M^2 + E_{yy}\zeta_E^2 + N_{yy}\zeta_N^2 + M_y\zeta_{yM}^2 \right. \\
&+ M_y \left( M_y\zeta_{MM}^2 + E_y\zeta_{EM}^2 + N_y\zeta_{NM}^2 + \zeta_{yM}^2 \right) + E_y\zeta_{yE}^2 + E_y \left( M_y\zeta_{EM}^2 + E_y\zeta_{EE}^2 \right. \\
&+ N_y\zeta_{NE}^2 + \zeta_{yE}^2 \left. \right) + N_y\zeta_{yN}^2 + N_y \left( M_y\zeta_{NM}^2 + E_y\zeta_{NE}^2 + N_y\zeta_{NN}^2 + \zeta_{yN}^2 \right) + \zeta_{yy}^2 \left. \right) \\
&- N_z \left( M_{yy}\zeta_M^3 + E_{yy}\zeta_E^3 + N_{yy}\zeta_N^3 + M_y\zeta_{yM}^3 + M_y \left( M_y\zeta_{MM}^3 + E_y\zeta_{EM}^3 + N_y\zeta_{NM}^3 \right. \right. \\
&+ \zeta_{yM}^3 \left. \right) + E_y\zeta_{yE}^3 + E_y \left( M_y\zeta_{EM}^3 + E_y\zeta_{EE}^3 + N_y\zeta_{NE}^3 + \zeta_{yE}^3 \right) + N_y\zeta_{yN}^3 \\
&+ N_y \left( M_y\zeta_{NM}^3 + E_y\zeta_{NE}^3 + N_y\zeta_{NN}^3 + \zeta_{yN}^3 \right) + \zeta_{yy}^3 \left. \right) - N_t \left( M_{yy}\zeta_M^4 + E_{yy}\zeta_E^4 \right. \\
&+ N_{yy}\zeta_N^4 + M_y\zeta_{yM}^4 + M_y \left( M_y\zeta_{MM}^4 + E_y\zeta_{EM}^4 + N_y\zeta_{NM}^4 + \zeta_{yM}^4 \right) + E_y\zeta_{yE}^4 \\
&+ E_y \left( M_y\zeta_{EM}^4 + E_y\zeta_{EE}^4 + N_y\zeta_{NE}^4 + \zeta_{yE}^4 \right) + N_y\zeta_{yN}^4 + N_y \left( M_y\zeta_{NM}^4 + E_y\zeta_{NE}^4 \right. \\
&+ N_y\zeta_{NN}^4 + \zeta_{yN}^4 \left. \right) + \zeta_{yy}^4 \left. \right), \\
\eta_{yy}^{(2)2} &= M_{yy}\eta_M^2 + E_{yy}\eta_E^2 + N_{yy}\eta_N^2 - 2E_{xy} \left( M_y\zeta_M^1 + E_y\zeta_E^1 + N_y\zeta_N^1 + \zeta_y^1 \right) \\
&- 2E_{yy} \left( M_y\zeta_M^2 + E_y\zeta_E^2 + N_y\zeta_N^2 + \zeta_y^2 \right) - 2E_{yz} \left( M_y\zeta_M^3 + E_y\zeta_E^3 + N_y\zeta_N^3 + \zeta_y^3 \right) \\
&- 2E_{yt} \left( M_y\zeta_M^4 + E_y\zeta_E^4 + N_y\zeta_N^4 + \zeta_y^4 \right) + M_y\eta_{yM}^2 + M_y \left( M_y\eta_{MM}^2 + E_y\eta_{EM}^2 \right. \\
&+ N_y\eta_{NM}^2 + \eta_{yM}^2 \left. \right) + E_y\eta_{yE}^2 + E_y \left( M_y\eta_{EM}^2 + E_y\eta_{EE}^2 + N_y\eta_{NE}^2 + \eta_{yE}^2 \right) \\
&+ N_y\eta_{yN}^2 + N_y \left( M_y\eta_{NM}^2 + E_y\eta_{NE}^2 + N_y\eta_{NN}^2 + \eta_{yN}^2 \right) + \eta_{yy}^2 - E_x \left( M_{yy}\zeta_M^1 \right. \\
&+ E_{yy}\zeta_E^1 + N_{yy}\zeta_N^1 + M_y\zeta_{yM}^1 + M_y \left( M_y\zeta_{MM}^1 + E_y\zeta_{EM}^1 + N_y\zeta_{NM}^1 + \zeta_{yM}^1 \right) + E_y\zeta_{yE}^1 \\
&+ E_y \left( M_y\zeta_{EM}^1 + E_y\zeta_{EE}^1 + N_y\zeta_{NE}^1 + \zeta_{yE}^1 \right) + N_y\zeta_{yN}^1 + N_y \left( M_y\zeta_{NM}^1 + E_y\zeta_{NE}^1 \right. \\
&+ N_y\zeta_{NN}^1 + \zeta_{yN}^1 \left. \right) + \zeta_{yy}^1 \left. \right) - E_y \left( M_{yy}\zeta_M^2 + E_{yy}\zeta_E^2 + N_{yy}\zeta_N^2 + M_y\zeta_{yM}^2 \right. \\
&+ M_y \left( M_y\zeta_{MM}^2 + E_y\zeta_{EM}^2 + N_y\zeta_{NM}^2 + \zeta_{yM}^2 \right) + E_y\zeta_{yE}^2 + E_y \left( M_y\zeta_{EM}^2 + E_y\zeta_{EE}^2 \right. \\
&+ N_y\zeta_{NE}^2 + \zeta_{yE}^2 \left. \right) + N_y\zeta_{yN}^2 + N_y \left( M_y\zeta_{NM}^2 + E_y\zeta_{NE}^2 + N_y\zeta_{NN}^2 + \zeta_{yN}^2 \right) + \zeta_{yy}^2 \left. \right) \\
&- E_z \left( M_{yy}\zeta_M^3 + E_{yy}\zeta_E^3 + N_{yy}\zeta_N^3 + M_y\zeta_{yM}^3 + M_y \left( M_y\zeta_{MM}^3 + E_y\zeta_{EM}^3 + N_y\zeta_{NM}^3 \right. \right. \\
&+ \zeta_{yM}^3 \left. \right) + E_y\zeta_{yE}^3 + E_y \left( M_y\zeta_{EM}^3 + E_y\zeta_{EE}^3 + N_y\zeta_{NE}^3 + \zeta_{yE}^3 \right) + N_y\zeta_{yN}^3 \\
&+ N_y \left( M_y\zeta_{NM}^3 + E_y\zeta_{NE}^3 + N_y\zeta_{NN}^3 + \zeta_{yN}^3 \right) + \zeta_{yy}^3 \left. \right) - E_t \left( M_{yy}\zeta_M^4 + E_{yy}\zeta_E^4 \right. \\
&+ N_{yy}\zeta_N^4 + M_y\zeta_{yM}^4 + M_y \left( M_y\zeta_{MM}^4 + E_y\zeta_{EM}^4 + N_y\zeta_{NM}^4 + \zeta_{yM}^4 \right) + E_y\zeta_{yE}^4 \\
&+ E_y \left( M_y\zeta_{EM}^4 + E_y\zeta_{EE}^4 + N_y\zeta_{NE}^4 + \zeta_{yE}^4 \right) + N_y\zeta_{yN}^4 + N_y \left( M_y\zeta_{NM}^4 + E_y\zeta_{NE}^4 \right. \\
&+ N_y\zeta_{NN}^4 + \zeta_{yN}^4 \left. \right) + \zeta_{yy}^4 \left. \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{yy}^{(2)3} &= M_{yy}\eta_M^3 + E_{yy}\eta_E^3 + N_{yy}\eta_N^3 - 2M_{xy} \left( M_y\zeta_M^1 + E_y\zeta_E^1 + N_y\zeta_N^1 + \zeta_y^1 \right) \\
&- 2M_{yy} \left( M_y\zeta_M^2 + E_y\zeta_E^2 + N_y\zeta_N^2 + \zeta_y^2 \right) - 2M_{yz} \left( M_y\zeta_M^3 + E_y\zeta_E^3 + N_y\zeta_N^3 + \zeta_y^3 \right) \\
&- 2M_{yt} \left( M_y\zeta_M^4 + E_y\zeta_E^4 + N_y\zeta_N^4 + \zeta_y^4 \right) + M_y\eta_{yM}^3 + M_y \left( M_y\eta_{MM}^3 + E_y\eta_{EM}^3 \right. \\
&+ N_y\eta_{NM}^3 + \eta_{yM}^3 \left. \right) + E_y\eta_{yE}^3 + E_y \left( M_y\eta_{EM}^3 + E_y\eta_{EE}^3 + N_y\eta_{NE}^3 + \eta_{yE}^3 \right) \\
&+ N_y\eta_{yN}^3 + N_y \left( M_y\eta_{NM}^3 + E_y\eta_{NE}^3 + N_y\eta_{NN}^3 + \eta_{yN}^3 \right) + \eta_{yy}^3 - M_x \left( M_{yy}\zeta_M^1 \right. \\
&+ E_{yy}\zeta_E^1 + N_{yy}\zeta_N^1 + M_y\zeta_{yM}^1 + M_y \left( M_y\zeta_{MM}^1 + E_y\zeta_{EM}^1 + N_y\zeta_{NM}^1 + \zeta_{yM}^1 \right) + E_y\zeta_{yE}^1 \\
&+ E_y \left( M_y\zeta_{EM}^1 + E_y\zeta_{EE}^1 + N_y\zeta_{NE}^1 + \zeta_{yE}^1 \right) + N_y\zeta_{yN}^1 + N_y \left( M_y\zeta_{NM}^1 + E_y\zeta_{NE}^1 \right. \\
&+ N_y\zeta_{NN}^1 + \zeta_{yN}^1 \left. \right) + \zeta_{yy}^1 \left. \right) - M_y \left( M_{yy}\zeta_M^2 + E_{yy}\zeta_E^2 + N_{yy}\zeta_N^2 + M_y\zeta_{yM}^2 \right. \\
&+ M_y \left( M_y\zeta_{MM}^2 + E_y\zeta_{EM}^2 + N_y\zeta_{NM}^2 + \zeta_{yM}^2 \right) + E_y\zeta_{yE}^2 + E_y \left( M_y\zeta_{EM}^2 + E_y\zeta_{EE}^2 \right. \\
&+ N_y\zeta_{NE}^2 + \zeta_{yE}^2 \left. \right) + N_y\zeta_{yN}^2 + N_y \left( M_y\zeta_{NM}^2 + E_y\zeta_{NE}^2 + N_y\zeta_{NN}^2 + \zeta_{yN}^2 \right) + \zeta_{yy}^2 \left. \right) \\
&- M_z \left( M_{yy}\zeta_M^3 + E_{yy}\zeta_E^3 + N_{yy}\zeta_N^3 + M_y\zeta_{yM}^3 + M_y \left( M_y\zeta_{MM}^3 + E_y\zeta_{EM}^3 + N_y\zeta_{NM}^3 \right. \right. \\
&+ \zeta_{yM}^3 \left. \right) + E_y\zeta_{yE}^3 + E_y \left( M_y\zeta_{EM}^3 + E_y\zeta_{EE}^3 + N_y\zeta_{NE}^3 + \zeta_{yE}^3 \right) + N_y\zeta_{yN}^3 \\
&+ N_y \left( M_y\zeta_{NM}^3 + E_y\zeta_{NE}^3 + N_y\zeta_{NN}^3 + \zeta_{yN}^3 \right) + \zeta_{yy}^3 \left. \right) - M_t \left( M_{yy}\zeta_M^4 + E_{yy}\zeta_E^4 \right. \\
&+ N_{yy}\zeta_N^4 + M_y\zeta_{yM}^4 + M_y \left( M_y\zeta_{MM}^4 + E_y\zeta_{EM}^4 + N_y\zeta_{NM}^4 + \zeta_{yM}^4 \right) + E_y\zeta_{yE}^4 \\
&+ E_y \left( M_y\zeta_{EM}^4 + E_y\zeta_{EE}^4 + N_y\zeta_{NE}^4 + \zeta_{yE}^4 \right) + N_y\zeta_{yN}^4 + N_y \left( M_y\zeta_{NM}^4 + E_y\zeta_{NE}^4 \right. \\
&+ N_y\zeta_{NN}^4 + \zeta_{yN}^4 \left. \right) + \zeta_{yy}^4 \left. \right), \\
\eta_{zz}^{(2)1} &= M_{zz}\eta_M^1 + E_{zz}\eta_E^1 + N_{zz}\eta_N^1 - 2N_{xz} \left( M_z\zeta_M^1 + E_z\zeta_E^1 + N_z\zeta_N^1 + \zeta_z^1 \right) \\
&- 2N_{yz} \left( M_z\zeta_M^2 + E_z\zeta_E^2 + N_z\zeta_N^2 + \zeta_z^2 \right) - 2N_{zz} \left( M_z\zeta_M^3 + E_z\zeta_E^3 + N_z\zeta_N^3 + \zeta_z^3 \right) \\
&- 2N_{zt} \left( M_z\zeta_M^4 + E_z\zeta_E^4 + N_z\zeta_N^4 + \zeta_z^4 \right) + M_z\eta_{zM}^1 + M_z \left( M_z\eta_{MM}^1 + E_z\eta_{EM}^1 \right. \\
&+ N_z\eta_{NM}^1 + \eta_{zM}^1 \left. \right) + E_z\eta_{zE}^1 + E_z \left( M_z\eta_{EM}^1 + E_z\eta_{EE}^1 + N_z\eta_{NE}^1 + \eta_{zE}^1 \right) \\
&+ N_z\eta_{zN}^1 + N_z \left( M_z\eta_{NM}^1 + E_z\eta_{NE}^1 + N_z\eta_{NN}^1 + \eta_{zN}^1 \right) + \eta_{zz}^1 - N_x \left( M_{zz}\zeta_M^1 \right. \\
&+ E_{zz}\zeta_E^1 + N_{zz}\zeta_N^1 + M_z\zeta_{zM}^1 + M_z \left( M_z\zeta_{MM}^1 + E_z\zeta_{EM}^1 + N_z\zeta_{NM}^1 + \zeta_{zM}^1 \right) + E_z\zeta_{zE}^1 \\
&+ E_z \left( M_z\zeta_{EM}^1 + E_z\zeta_{EE}^1 + N_z\zeta_{NE}^1 + \zeta_{zE}^1 \right) + N_z\zeta_{zN}^1 + N_z \left( M_z\zeta_{NM}^1 + E_z\zeta_{NE}^1 \right. \\
&+ N_z\zeta_{NN}^1 + \zeta_{zN}^1 \left. \right) + \zeta_{zz}^1 \left. \right) - N_y \left( M_{zz}\zeta_M^2 + E_{zz}\zeta_E^2 + N_{zz}\zeta_N^2 + M_z\zeta_{zM}^2 \right. \\
&+ M_z \left( M_z\zeta_{MM}^2 + E_z\zeta_{EM}^2 + N_z\zeta_{NM}^2 + \zeta_{zM}^2 \right) + E_z\zeta_{zE}^2 + E_z \left( M_z\zeta_{EM}^2 + E_z\zeta_{EE}^2 \right. \\
&+ N_z\zeta_{NE}^2 + \zeta_{zE}^2 \left. \right) + N_z\zeta_{zN}^2 + N_z \left( M_z\zeta_{NM}^2 + E_z\zeta_{NE}^2 + N_z\zeta_{NN}^2 + \zeta_{zN}^2 \right) + \zeta_{zz}^2 \left. \right) \\
&- N_z \left( M_{zz}\zeta_M^3 + E_{zz}\zeta_E^3 + N_{zz}\zeta_N^3 + M_z\zeta_{zM}^3 + M_z \left( M_z\zeta_{MM}^3 + E_z\zeta_{EM}^3 + N_z\zeta_{NM}^3 \right. \right. \\
&+ \zeta_{zM}^3 \left. \right) + E_z\zeta_{zE}^3 + E_z \left( M_z\zeta_{EM}^3 + E_z\zeta_{EE}^3 + N_z\zeta_{NE}^3 + \zeta_{zE}^3 \right) + N_z\zeta_{zN}^3 \\
&+ N_z \left( M_z\zeta_{NM}^3 + E_z\zeta_{NE}^3 + N_z\zeta_{NN}^3 + \zeta_{zN}^3 \right) + \zeta_{zz}^3 \left. \right) - N_t \left( M_{zz}\zeta_M^4 + E_{zz}\zeta_E^4 \right. \\
&+ N_{zz}\zeta_N^4 + M_z\zeta_{zM}^4 + M_z \left( M_z\zeta_{MM}^4 + E_z\zeta_{EM}^4 + N_z\zeta_{NM}^4 + \zeta_{zM}^4 \right) + E_z\zeta_{zE}^4 \\
&+ E_z \left( M_z\zeta_{EM}^4 + E_z\zeta_{EE}^4 + N_z\zeta_{NE}^4 + \zeta_{zE}^4 \right) + N_z\zeta_{zN}^4 + N_z \left( M_z\zeta_{NM}^4 + E_z\zeta_{NE}^4 \right. \\
&+ N_z\zeta_{NN}^4 + \zeta_{zN}^4 \left. \right) + \zeta_{zz}^4 \left. \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{zz}^{(2)2} &= M_{zz}\eta_M^2 + E_{zz}\eta_E^2 + N_{zz}\eta_N^2 - 2E_{xz} \left( M_z\zeta_M^1 + E_z\zeta_E^1 + N_z\zeta_N^1 + \zeta_z^1 \right) \\
&- 2E_{yz} \left( M_z\zeta_M^2 + E_z\zeta_E^2 + N_z\zeta_N^2 + \zeta_z^2 \right) - 2E_{zz} \left( M_z\zeta_M^3 + E_z\zeta_E^3 + N_z\zeta_N^3 + \zeta_z^3 \right) \\
&- 2E_{zt} \left( M_z\zeta_M^4 + E_z\zeta_E^4 + N_z\zeta_N^4 + \zeta_z^4 \right) + M_z\eta_{zM}^2 + M_z \left( M_z\eta_{MM}^2 + E_z\eta_{EM}^2 \right. \\
&+ N_z\eta_{NM}^2 + \eta_{zM}^2 \left. \right) + E_z\eta_{zE}^2 + E_z \left( M_z\eta_{EM}^2 + E_z\eta_{EE}^2 + N_z\eta_{NE}^2 + \eta_{zE}^2 \right) \\
&+ N_z\eta_{zN}^2 + N_z \left( M_z\eta_{NM}^2 + E_z\eta_{NE}^2 + N_z\eta_{NN}^2 + \eta_{zN}^2 \right) + \eta_{zz}^2 - E_x \left( M_{zz}\zeta_M^1 \right. \\
&+ E_{zz}\zeta_E^1 + N_{zz}\zeta_N^1 + M_z\zeta_{zM}^1 + M_z \left( M_z\zeta_{MM}^1 + E_z\zeta_{EM}^1 + N_z\zeta_{NM}^1 + \zeta_{zM}^1 \right) + E_z\zeta_{zE}^1 \\
&+ E_z \left( M_z\zeta_{EM}^1 + E_z\zeta_{EE}^1 + N_z\zeta_{NE}^1 + \zeta_{zE}^1 \right) + N_z\zeta_{zN}^1 + N_z \left( M_z\zeta_{NM}^1 + E_z\zeta_{NE}^1 \right. \\
&+ N_z\zeta_{NN}^1 + \zeta_{zN}^1 \left. \right) + \zeta_{zz}^1 \left. \right) - E_y \left( M_{zz}\zeta_M^2 + E_{zz}\zeta_E^2 + N_{zz}\zeta_N^2 + M_z\zeta_{zM}^2 \right. \\
&+ M_z \left( M_z\zeta_{MM}^2 + E_z\zeta_{EM}^2 + N_z\zeta_{NM}^2 + \zeta_{zM}^2 \right) + E_z\zeta_{zE}^2 + E_z \left( M_z\zeta_{EM}^2 + E_z\zeta_{EE}^2 \right. \\
&+ N_z\zeta_{NE}^2 + \zeta_{zE}^2 \left. \right) + N_z\zeta_{zN}^2 + N_z \left( M_z\zeta_{NM}^2 + E_z\zeta_{NE}^2 + N_z\zeta_{NN}^2 + \zeta_{zN}^2 \right) + \zeta_{zz}^2 \left. \right) \\
&- E_z \left( M_{zz}\zeta_M^3 + E_{zz}\zeta_E^3 + N_{zz}\zeta_N^3 + M_z\zeta_{zM}^3 + M_z \left( M_z\zeta_{MM}^3 + E_z\zeta_{EM}^3 + N_z\zeta_{NM}^3 \right. \right. \\
&+ \zeta_{zM}^3 \left. \right) + E_z\zeta_{zE}^3 + E_z \left( M_z\zeta_{EM}^3 + E_z\zeta_{EE}^3 + N_z\zeta_{NE}^3 + \zeta_{zE}^3 \right) + N_z\zeta_{zN}^3 \\
&+ N_z \left( M_z\zeta_{NM}^3 + E_z\zeta_{NE}^3 + N_z\zeta_{NN}^3 + \zeta_{zN}^3 \right) + \zeta_{zz}^3 \left. \right) - E_t \left( M_{zz}\zeta_M^4 + E_{zz}\zeta_E^4 \right. \\
&+ N_{zz}\zeta_N^4 + M_z\zeta_{zM}^4 + M_z \left( M_z\zeta_{MM}^4 + E_z\zeta_{EM}^4 + N_z\zeta_{NM}^4 + \zeta_{zM}^4 \right) + E_z\zeta_{zE}^4 \\
&+ E_z \left( M_z\zeta_{EM}^4 + E_z\zeta_{EE}^4 + N_z\zeta_{NE}^4 + \zeta_{zE}^4 \right) + N_z\zeta_{zN}^4 + N_z \left( M_z\zeta_{NM}^4 + E_z\zeta_{NE}^4 \right. \\
&+ N_z\zeta_{NN}^4 + \zeta_{zN}^4 \left. \right) + \zeta_{zz}^4 \left. \right), \\
\eta_{zz}^{(2)3} &= M_{zz}\eta_M^3 + E_{zz}\eta_E^3 + N_{zz}\eta_N^3 - 2M_{xz} \left( M_z\zeta_M^1 + E_z\zeta_E^1 + N_z\zeta_N^1 + \zeta_z^1 \right) \\
&- 2M_{yz} \left( M_z\zeta_M^2 + E_z\zeta_E^2 + N_z\zeta_N^2 + \zeta_z^2 \right) - 2M_{zz} \left( M_z\zeta_M^3 + E_z\zeta_E^3 + N_z\zeta_N^3 + \zeta_z^3 \right) \\
&- 2M_{zt} \left( M_z\zeta_M^4 + E_z\zeta_E^4 + N_z\zeta_N^4 + \zeta_z^4 \right) + M_z\eta_{zM}^3 + M_z \left( M_z\eta_{MM}^3 + E_z\eta_{EM}^3 \right. \\
&+ N_z\eta_{NM}^3 + \eta_{zM}^3 \left. \right) + E_z\eta_{zE}^3 + E_z \left( M_z\eta_{EM}^3 + E_z\eta_{EE}^3 + N_z\eta_{NE}^3 + \eta_{zE}^3 \right) \\
&+ N_z\eta_{zN}^3 + N_z \left( M_z\eta_{NM}^3 + E_z\eta_{NE}^3 + N_z\eta_{NN}^3 + \eta_{zN}^3 \right) + \eta_{zz}^3 - M_x \left( M_{zz}\zeta_M^1 \right. \\
&+ E_{zz}\zeta_E^1 + N_{zz}\zeta_N^1 + M_z\zeta_{zM}^1 + M_z \left( M_z\zeta_{MM}^1 + E_z\zeta_{EM}^1 + N_z\zeta_{NM}^1 + \zeta_{zM}^1 \right) + E_z\zeta_{zE}^1 \\
&+ E_z \left( M_z\zeta_{EM}^1 + E_z\zeta_{EE}^1 + N_z\zeta_{NE}^1 + \zeta_{zE}^1 \right) + N_z\zeta_{zN}^1 + N_z \left( M_z\zeta_{NM}^1 + E_z\zeta_{NE}^1 \right. \\
&+ N_z\zeta_{NN}^1 + \zeta_{zN}^1 \left. \right) + \zeta_{zz}^1 \left. \right) - M_y \left( M_{zz}\zeta_M^2 + E_{zz}\zeta_E^2 + N_{zz}\zeta_N^2 + M_z\zeta_{zM}^2 \right. \\
&+ M_z \left( M_z\zeta_{MM}^2 + E_z\zeta_{EM}^2 + N_z\zeta_{NM}^2 + \zeta_{zM}^2 \right) + E_z\zeta_{zE}^2 + E_z \left( M_z\zeta_{EM}^2 + E_z\zeta_{EE}^2 \right. \\
&+ N_z\zeta_{NE}^2 + \zeta_{zE}^2 \left. \right) + N_z\zeta_{zN}^2 + N_z \left( M_z\zeta_{NM}^2 + E_z\zeta_{NE}^2 + N_z\zeta_{NN}^2 + \zeta_{zN}^2 \right) + \zeta_{zz}^2 \left. \right) \\
&- M_z \left( M_{zz}\zeta_M^3 + E_{zz}\zeta_E^3 + N_{zz}\zeta_N^3 + M_z\zeta_{zM}^3 + M_z \left( M_z\zeta_{MM}^3 + E_z\zeta_{EM}^3 + N_z\zeta_{NM}^3 \right. \right. \\
&+ \zeta_{zM}^3 \left. \right) + E_z\zeta_{zE}^3 + E_z \left( M_z\zeta_{EM}^3 + E_z\zeta_{EE}^3 + N_z\zeta_{NE}^3 + \zeta_{zE}^3 \right) + N_z\zeta_{zN}^3 \\
&+ N_z \left( M_z\zeta_{NM}^3 + E_z\zeta_{NE}^3 + N_z\zeta_{NN}^3 + \zeta_{zN}^3 \right) + \zeta_{zz}^3 \left. \right) - M_t \left( M_{zz}\zeta_M^4 + E_{zz}\zeta_E^4 \right. \\
&+ N_{zz}\zeta_N^4 + M_z\zeta_{zM}^4 + M_z \left( M_z\zeta_{MM}^4 + E_z\zeta_{EM}^4 + N_z\zeta_{NM}^4 + \zeta_{zM}^4 \right) + E_z\zeta_{zE}^4 \\
&+ E_z \left( M_z\zeta_{EM}^4 + E_z\zeta_{EE}^4 + N_z\zeta_{NE}^4 + \zeta_{zE}^4 \right) + N_z\zeta_{zN}^4 + N_z \left( M_z\zeta_{NM}^4 + E_z\zeta_{NE}^4 \right. \\
&+ N_z\zeta_{NN}^4 + \zeta_{zN}^4 \left. \right) + \zeta_{zz}^4 \left. \right).
\end{aligned}$$

Na próxima seção, estabelecemos o critério para determinar os geradores de simetrias associados a um sistema de EDPs.

### 3.5 CRITÉRIO DE INVARIÂNCIA

Nesta seção, apresentamos o critério infinitesimal para a invariância de um sistema de EDPs, que conduz a um algoritmo para determinar os geradores infinitesimais, do grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro, admitidos por tal sistema.

**Definição 3.13.** (*Critério de invariância para um sistema de EDPs*). Um sistema de EDPs definido por

$$F_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}, \dots, \partial^k\mathbf{u}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (3.54)$$

é invariante para um grupo local de Lie de transformações a 1-parâmetro (3.42) se, e somente se,

$$F_\alpha(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \partial\bar{\mathbf{u}}, \dots, \partial^k\bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad \text{quando} \quad F_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}, \dots, \partial^k\mathbf{u}) = 0, \alpha = 1, \dots, m.$$

Para um sistema de EDPs, analogamente, temos um critério de invariância em termos do gerador infinitesimal do grupo local de transformações associado:

**Teorema 3.6.** (*Critério infinitesimal para a invariância de um sistema de EDPs*). Seja

$$\mathbf{X} = \zeta^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u^\mu} \quad (3.55)$$

o gerador infinitesimal do grupo local de Lie de transformações (3.42), e seja

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(k)} &= \zeta^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u^\mu} + \eta_i^{(1)\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u_i^\mu} + \dots \\ &+ \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}, \dots, \partial^k\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu}, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

o gerador infinitesimal estendido de  $k$ -ésima ordem ( $k \geq 1$ ) correspondente, para  $i = 1, \dots, n$ ,  $\mu = 1, \dots, m$ ,  $i_l = 1, \dots, n$ ,  $l = 1, \dots, k$ . As extensões  $\eta_i^{(1)\mu}$  e  $\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu}$  são dadas por (3.47), em termos de  $\zeta^i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  e  $\eta^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . Então o grupo local de transformações de pontos de Lie a 1-parâmetro (3.40) é admitido pelo sistema de EDPs de ordem no máximo  $k$  (3.54) se, e somente se,

$$\mathbf{X}^{(k)} F_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}, \dots, \partial^k\mathbf{u}) = 0 \quad \text{quando} \quad F_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}, \dots, \partial^k\mathbf{u}) = 0, \alpha = 1, \dots, m. \quad (3.56)$$

**Demonstração.** Suponhamos que  $F$  seja invariante sob (3.40). Então

$$\begin{aligned}
F(\bar{x}) &= F\left(x^i + \epsilon \zeta^i(x, \mathbf{u}) + O(\epsilon^2), u^\mu + \epsilon \eta^\mu(x, \mathbf{u}) + O(\epsilon^2), u_i^\mu + \epsilon \eta_1^{(1)\mu}(x, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}) \right. \\
&\quad \left. + O(\epsilon^2), \dots, u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu + \epsilon \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu}(x, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^k \mathbf{u}) + O(\epsilon^2)\right) \\
&= F + \epsilon \left( \zeta^i(x, \mathbf{u}) \frac{\partial F}{\partial x^i} + \eta^\mu(x, \mathbf{u}) \frac{\partial F}{\partial u^\mu} + \eta_i^{(1)\mu}(x, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}) \frac{\partial F}{\partial u_i^\mu} + \dots \right. \\
&\quad \left. + \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu}(x, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u}, \dots, \partial^k \mathbf{u}) \frac{\partial F}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu} + O(\epsilon^2) \right) \\
&= F + \epsilon X^{(k)} F + O(\epsilon^2),
\end{aligned}$$

para todo  $\epsilon$ . Portanto,  $F$  é invariante sob o grupo local de transformações (3.40) se, e somente se, vale (3.56).  $\square$

Para uma outra demonstração do Teorema 3.6, veja [20], p.161, Theorem 2.71.

O Teorema 3.6 fornece a base para a determinação sistemática de grupos locais de simetrias de um sistema de EDPs. Quando aplicamos a condição (3.56) a um dado sistema de EDPs, obtemos as chamadas equações determinantes do gerador infinitesimal  $\mathbf{X}$ , dado por (3.55). Uma vez que o conjunto de equações determinantes forma um sistema homogêneo sobredeterminado de EDPs lineares, podemos, geralmente, determinar os geradores infinitesimais de forma explícita e, como consequência, as simetrias associadas.

**Exemplo 3.10.** Considere o sistema do Exemplo 3.9, objeto de estudo deste trabalho, reescrito da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = -N_t + D_1 (N_{xx} + N_{yy} + N_{zz}) - \rho (E_x N_x + N E_{xx} + E_y N_y + N E_{yy} + E_z N_z + N E_{zz}) = 0, \\ F_2 = -E_t - \delta M E = 0, \\ F_3 = -M_t + D_2 (M_{xx} + M_{yy} + M_{zz}) + \mu N - \lambda M = 0. \end{array} \right. \quad (3.57)$$

Ao aplicarmos o gerador infinitesimal de segunda ordem  $\mathbf{X}^{(2)}$ , dado por (3.51), à cada equação de (3.57), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(2)}F_1 &= -\eta_t^{(1)1} + D_1 \left( \eta_{xx}^{(2)1} + \eta_{yy}^{(2)1} + \eta_{zz}^{(2)1} \right) - \rho \left( \eta_x^{(1)2} N_x + \eta_x^{(1)1} E_x + \eta^1 E_{xx} + \eta_{xx}^{(2)2} N \right. \\ &\quad \left. + \eta_y^{(1)2} N_y + \eta_y^{(1)1} E_y + \eta^1 E_{yy} + \eta_{yy}^{(2)2} N + \eta_z^{(1)2} N_z + \eta_z^{(1)1} E_z + \eta^1 E_{zz} + \eta_{zz}^{(2)2} N \right), \\ \mathbf{X}^{(2)}F_2 &= -\eta_t^{(1)2} - \delta \left( \eta^3 E + \eta^2 M \right), \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{X}^{(2)}F_3 = -\eta_t^{(1)3} + D_2 \left( \eta_{xx}^{(2)3} + \eta_{yy}^{(2)3} + \eta_{zz}^{(2)3} \right) + \mu\eta^1 - \lambda\eta^3.$$

Agora, utilizando a volta do Teorema 3.6, mostremos que (3.57) admite os seguintes geradores de simetrias:

$$\mathbf{X}_1 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_2 = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{X}_3 = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}.$$

A partir do gerador  $\mathbf{X}_1$ , concluímos que

$$\bar{\zeta}^1 = -y, \quad \bar{\zeta}^2 = x \text{ e } \bar{\zeta}^3 = \bar{\zeta}^4 = \eta^1 = \eta^2 = \eta^3 = 0. \quad (3.59)$$

Assim, com base nos resultados do Exemplo 3.9, temos

$$\begin{aligned} \eta_x^{(1)1} &= -N_y, \quad \eta_y^{(1)1} = N_x, \quad \eta_x^{(1)2} = -E_y, \quad \eta_y^{(1)2} = E_x, \quad \eta_{xx}^{(2)1} = -2N_{xy}, \quad \eta_{yy}^{(2)1} = 2N_{xy}, \\ \eta_{xx}^{(2)2} &= -2E_{xy}, \quad \eta_{yy}^{(2)2} = 2E_{xy}, \quad \eta_{xx}^{(2)3} = -2M_{xy}, \quad \eta_{yy}^{(2)3} = 2M_{xy} \quad e \\ \eta_t^{(1)1} &= \eta_t^{(1)2} = \eta_t^{(1)3} = \eta_z^{(1)1} = \eta_z^{(1)2} = \eta_{zz}^{(2)1} = \eta_{zz}^{(2)2} = \eta_{zz}^{(2)3} = 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Ao substituir (3.59) e (3.60) em (3.58), obtemos  $\mathbf{X}_1^{(2)}F_1 = 0$ ,  $\mathbf{X}_1^{(2)}F_2 = 0$ ,  $\mathbf{X}_1^{(2)}F_3 = 0$ .

Assim, a condição de invariância (3.56) é satisfeita, pois  $\mathbf{X}_1^{(2)}F_\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Portanto, pelo Teorema 3.6, o sistema (3.57) admite o gerador de simetrias  $\mathbf{X}_1$ . Analogamente, podemos provar que o sistema (3.57) admite os geradores de simetrias  $\mathbf{X}_2$  e  $\mathbf{X}_3$ .

## 3.6 CONSTRUÇÃO DE INVARIANTES E SOLUÇÕES

Nesta seção, a partir dos geradores de simetrias, mostramos como construir invariantes e, destes, encontrar soluções especiais de equações, chamadas soluções invariantes.

No que segue, apresentamos o método das características que é de fundamental importância na construção de invariantes.

### 3.6.1 Método de características

Para ilustrar o método nos atemos ao caso  $n = 2$  e  $m = 1$ . Para tanto, considere a EDP

$$a(x, y) u_x + b(x, y) u_y = c(x, y) u + d(x, y), \quad (3.61)$$

e a parametrização  $t \mapsto (x(t), y(t))$ , com  $u = u(x(t), y(t))$ . Logo, pela Regra da Cadeia, segue que

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = x' u_x + y' u_y. \quad (3.62)$$

Se impusermos que

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t)), \\ y'(t) = b(x(t), y(t)), \end{cases}$$

a equação (3.61), torna-se

$$\frac{du}{dt} = a(x, y) u_x + b(x, y) u_y = c(x, y) u + d(x, y).$$

Portanto,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = b(x(t), y(t)), \\ \frac{du}{dt} = c(x(t), y(t)) u + d(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (3.63)$$

ou

$$\frac{dx}{a(x(t), y(t))} = \frac{dy}{b(x(t), y(t))} = \frac{du}{c(x(t), y(t)) u + d(x(t), y(t))}. \quad (3.64)$$

As equações (3.63) e (3.64) são chamadas equações características. Caso as funções  $a, b, c$  e  $d$  sejam nulas, denotamos a equação (3.64) com o denominador nulo.

## 3.6.2 Obtenção de invariantes e soluções

A seguir, apresentamos um resultado que será de extrema importância para a obtenção de soluções invariantes do sistema (3.49).

**Teorema 3.7.** (*Construção de Invariantes*). Assuma que o seguinte sistema com  $m$  equações

$$F_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \partial\mathbf{u}, \dots, \partial^k\mathbf{u}) = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq s$$

admita um grupo contínuo  $G$ , e seja  $H$  um grupo com  $p$  geradores,

$$X^\nu = \xi_\nu^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta_\nu^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n, \\ \nu = 1, \dots, p, \\ \mu = 1, \dots, m. \end{array}$$

Seja

$$p_* = \text{posto} \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} | & & | & | & | & | \\ \xi_\nu^1 & \dots & \xi_\nu^n & \eta_\nu^1 & \dots & \eta_\nu^m \\ | & & | & | & | & | \end{array} \right] \end{array} \right).$$

Então,  $H$  possui  $(m + n - p_*)$  invariantes funcionalmente independentes:

$$J_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \dots, J_{m+n-p_*}(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Suponha

$$\text{posto} \left( \frac{\partial J_\beta}{\partial u^\mu} \right) = m, \quad \mu = 1, \dots, m, \quad \beta = 1, \dots, m.$$

Então, definindo

$$\begin{aligned} \lambda^j &= J_{m+j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad 1 \leq j \leq n - p_*, \\ \phi_\beta &= J_\beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad 1 \leq \beta \leq m, \end{aligned}$$

podemos escrever as soluções invariantes da forma

$$\phi_\beta = \Phi_\beta(\lambda^1, \dots, \lambda^{n-p_*}), \quad 1 \leq \beta \leq m.$$

**Demonstração.** Omitiremos a demonstração deste resultado, pois é preciso usar o Teorema de Frobenius e, assim, foge ao escopo do texto. Para mais detalhes, veja [19], p.225, e [20], p.39, Theorem 1.40.  $\square$

**Exemplo 3.11.** Considere que o sistema (3.49) seja simultaneamente invariante sob ação dos geradores de simetrias:

$$\mathbf{X}_1 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_2 = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{X}_3 = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.65)$$

Para construir os invariantes, precisamos resolver as equações características associadas aos geradores (3.65):

$$\begin{cases} \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0} = \frac{dt}{0} = \frac{dN}{0} = \frac{dE}{0} = \frac{dM}{0}, \\ \frac{dx}{0} = \frac{dy}{-z} = \frac{dz}{x} = \frac{dt}{0} = \frac{dN}{0} = \frac{dE}{0} = \frac{dM}{0}, \\ \frac{dx}{0} = \frac{dy}{-z} = \frac{dz}{y} = \frac{dt}{0} = \frac{dN}{0} = \frac{dE}{0} = \frac{dM}{0}. \end{cases} \quad (3.66)$$

Logo,

$$\begin{aligned} p^* &= \text{posto} \left( \begin{bmatrix} -y & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z & y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{posto} \left( \begin{bmatrix} -y & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2. \end{aligned}$$

Portanto, temos  $(m + n - p^*) = (3 + 4 - 2) = 5$  invariantes:

$$\begin{cases} \lambda^1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \lambda^2 = t, \\ J_1 = N, \\ J_2 = E, \\ J_3 = M. \end{cases} \quad (3.67)$$

Além disso, para  $1 \leq \beta \leq 3, 1 \leq \mu \leq 3$ , temos

$$\text{posto} \left( \frac{\partial J_\beta}{\partial u^\mu} \right) = \text{posto} \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial J_1}{\partial N} & \frac{\partial J_1}{\partial E} & \frac{\partial J_1}{\partial M} \\ \frac{\partial J_2}{\partial N} & \frac{\partial J_2}{\partial E} & \frac{\partial J_2}{\partial M} \\ \frac{\partial J_3}{\partial N} & \frac{\partial J_3}{\partial E} & \frac{\partial J_3}{\partial M} \end{bmatrix} \right) = \text{posto} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 3.$$

Portanto, pelo Teorema 3.7, podemos encontrar  $m = 3$  soluções invariantes da forma:

$$N(x, y, z, t) = \Phi_1(r, t), \quad E(x, y, z, t) = \Phi_2(r, t), \quad e \quad M(x, y, z, t) = \Phi_3(r, t), \quad (3.68)$$

em que  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Destacamos que substituindo  $\Phi_\mu(r, t)$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ , em (3.49) transformamos o problema original em um novo sistema de EDPs com uma variável espacial e uma temporal. Essa transformação é de fundamental importância ao nosso trabalho e, mais adiante, no momento oportuno, a ela retornaremos.

# 4

## CLASSIFICAÇÃO DE SIMETRIAS DE LIE

Neste capítulo, apresentamos a classificação dos grupos de simetrias de Lie do sistema (2.1). No capítulo 3, descrevemos a teoria que é sustentáculo para o que segue. No entanto, notadamente, o Teorema 3.6 é a base para a obtenção das equações determinantes e, conseqüentemente, a resolução destas nos permite a obtenção dos geradores infinitesimais.

### 4.1 EQUAÇÕES DETERMINANTES

No Exemplo 3.9, consideramos o sistema (2.1) reescrito, em (3.49), da seguinte forma:

$$\begin{cases} N_t = D_1 (N_{xx} + N_{yy} + N_{zz}) - \rho (E_x N_x + N E_{xx} + E_y N_y + N E_{yy} + E_z N_z + N E_{zz}), \\ E_t = -\delta M E, \\ M_t = D_2 (M_{xx} + M_{yy} + M_{zz}) + \mu N - \lambda M. \end{cases}$$

Na seqüência, construímos  $\mathbf{X}^{(2)}$ , dado por (3.51), o correspondente gerador infinitesimal estendido de segunda ordem do gerador (3.50). Na extensão do gerador (3.50), como pode ser visto no Exemplo 3.9, calculamos apenas os infinitesimais estendidos para os quais temos, considerando o espaço das derivadas, uma variável presente no sistema (3.49). Os demais infinitesimais estendidos não são necessários, pois se anulam quando aplicamos  $\mathbf{X}^{(2)}$  ao sistema (3.49).

No Exemplo 3.10, aplicamos  $\mathbf{X}^{(2)}$  à cada uma das equações de (3.57) e obtivemos (3.58). Isso, à luz da ida do Teorema 3.6, nos conduz as desejadas equações determinantes. Todavia, para otimizar o tempo de obtenção das equações determinantes, utilizamos o pacote SYM do Mathematica™ [14].

Assim, as equações determinantes resultantes, após considerar  $D_1 D_2 \neq 0$  e fazer as devidas simplificações, são:

$$\begin{aligned} \zeta_z^1 + \zeta_x^3 = 0, \quad \zeta_y^1 + \zeta_x^2 = 0, \quad \zeta_z^2 + \zeta_y^3 = 0, \\ \zeta_t^4 - 2\zeta_x^1 = 0, \quad \zeta_t^4 - 2\zeta_y^2 = 0, \quad \zeta_t^4 - 2\zeta_z^3 = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\eta_M^2 = 0, \quad \eta_N^2 = 0, \quad (4.2)$$

$$\eta_{NN}^3 = 0, \quad \eta_{MM}^3 = 0, \quad \eta_{MN}^3 = 0, \quad (4.3)$$

$$\eta_{xN}^3 = 0, \quad \eta_{yN}^3 = 0, \quad \eta_{zN}^3 = 0, \quad \eta_{EM}^3 = 0, \quad (4.4)$$

$$\eta_{NN}^1 = 0, \quad \eta_{MM}^1 = 0, \quad \eta_{MN}^1 = 0, \quad (4.5)$$

$$\eta_{xM}^1 = 0, \quad \eta_{yM}^1 = 0, \quad \eta_{zM}^1 = 0, \quad (4.6)$$

$$(D_1 - D_2)\eta_N^3 = 0, \quad (4.7)$$

$$(D_1 - D_2)\eta_M^1 = 0, \quad (4.8)$$

$$\rho\eta_N^3 + 2D_2\eta_{EN}^3 = 0, \quad (4.9)$$

$$\rho N\eta_N^3 + D_2\eta_E^3 = 0, \quad (4.10)$$

$$\rho \left( \eta_E^1 + N\eta_{EE}^2 \right) = D_1\eta_{EE}^1,$$

$$\rho\eta_M^1 = 2D_1\eta_{EM}^1,$$

$$\rho \left( \eta_z^1 + 2N\eta_{zE}^2 - \left( \zeta_{zz}^3 + \zeta_{yy}^3 + \zeta_{xx}^3 \right) N \right) = 2D_1\eta_{zE}^1,$$

$$\rho \left( \eta_y^1 + 2N\eta_{yE}^2 - \left( \zeta_{zz}^2 + \zeta_{yy}^2 + \zeta_{xx}^2 \right) N \right) = 2D_1\eta_{yE}^1,$$

$$\rho \left( \eta_x^1 + 2N\eta_{xE}^2 - \left( \zeta_{zz}^1 + \zeta_{yy}^1 + \zeta_{xx}^1 \right) N \right) = 2D_1\eta_{xE}^1,$$

$$\zeta_{zz}^3 + \zeta_{yy}^3 + \zeta_{xx}^3 = 2\eta_{zM}^3, \quad (4.11)$$

$$\tilde{\zeta}_{zz}^2 + \tilde{\zeta}_{yy}^2 + \tilde{\zeta}_{xx}^2 = 2\eta_{yM}^3, \quad (4.12)$$

$$\tilde{\zeta}_{zz}^1 + \tilde{\zeta}_{yy}^1 + \tilde{\zeta}_{xx}^1 = 2\eta_{xM}^3, \quad (4.13)$$

$$\delta \left( M\eta^2 + E\eta^3 - EM\eta_E^2 + EM\zeta_t^4 \right) + \eta_t^2 = 0,$$

$$\rho \left( \eta^1 - N\eta_N^1 + N\eta_E^2 \right) = D_1\eta_E^1, \quad (4.14)$$

$$\rho\eta_z^2 - 2D_1\eta_{zN}^1 + D_1 \left( \tilde{\zeta}_{zz}^3 + \tilde{\zeta}_{yy}^3 + \tilde{\zeta}_{xx}^3 \right) = 0, \quad (4.15)$$

$$\rho\eta_y^2 - 2D_1\eta_{yN}^1 + D_1 \left( \tilde{\zeta}_{zz}^2 + \tilde{\zeta}_{yy}^2 + \tilde{\zeta}_{xx}^2 \right) = 0, \quad (4.16)$$

$$\rho\eta_x^2 - 2D_1\eta_{xN}^1 + D_1 \left( \tilde{\zeta}_{zz}^1 + \tilde{\zeta}_{yy}^1 + \tilde{\zeta}_{xx}^1 \right) = 0, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} (\mu N - \lambda M)\eta_M^1 - \delta EM\eta_E^1 + \eta_t^1 + \rho \left( \eta_{zz}^2 + \eta_{yy}^2 + \eta_{xx}^2 \right) N \\ - D_1 \left( \eta_{zz}^1 + \eta_{yy}^1 + \eta_{xx}^1 \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\rho\eta_E^2 = 2D_1\eta_{EN}^1,$$

$$\begin{aligned} \mu \left( N\eta_M^3 - \eta^1 - N\zeta_t^4 \right) + \lambda(\eta^3 + M\zeta_t^4 - M\eta_M^3) - \delta EM\eta_E^3 + \eta_t^3 \\ - D_2 \left( \eta_{zz}^3 + \eta_{yy}^3 + \eta_{xx}^3 \right) = 0. \end{aligned}$$

**Lema 4.1.** Assuma que as funções  $\tilde{\zeta}^1$ ,  $\tilde{\zeta}^2$ ,  $\tilde{\zeta}^3$  e  $\tilde{\zeta}^4$  satisfaçam (4.1). Então,

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}^1 &= c_5 + c_6x - c_8y - c_2z, & \tilde{\zeta}^2 &= c_7 + c_8x + c_6y - c_3z, \\ \tilde{\zeta}^3 &= c_1 + c_2x + c_3y + c_6z, & \tilde{\zeta}^4 &= c_4 + 2c_6t, \end{aligned} \quad (4.18)$$

em que  $c_i \in \mathbb{R}$ , com  $i = 1, \dots, 8$ .

*Demonstração.* Consequência direta de (4.1). □

**Corolário 4.1.** Para  $D_1D_2 \neq 0$  e quaisquer valores de  $\rho$ ,  $\delta$ ,  $\mu$  e  $\lambda$ , os operadores

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}, \quad R_1 = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \\ R_2 &= y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \quad R_3 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

formam um subgrupo de simetrias do sistema (3.49).

*Demonstração.* Basta substituir (4.18) em (3.50) para obter uma combinação linear dos geradores (4.19).  $\square$

**Lema 4.2.** *Suponha que  $\eta^3$  satisfaça (4.3), (4.9) e (4.10). Então,*

$$\eta_{EN}^3 = 0.$$

*Demonstração.* Tendo em vista (4.3) e derivando (4.10) em relação à  $N$ , obtemos

$$\rho\eta_N^3 = -D_2\eta_{EN}^3. \quad (4.20)$$

Substituindo (4.20) em (4.9), concluímos que  $\eta_{EN}^3 = 0$ .  $\square$

**Lema 4.3.** *Suponha que  $\eta^3$  satisfaça (4.11), (4.12) e (4.13). Então,*

$$\eta_{zM}^3 = \eta_{yM}^3 = \eta_{xM}^3 = 0.$$

*Demonstração.* Consequência direta do Lema 4.1.  $\square$

**Lema 4.4.** *Nas condições do Lema 4.2, do Lema 4.3 e se  $\eta^3$  satisfaz (4.3) e (4.4), então existem funções diferenciáveis  $\alpha_3 = \alpha_3(t)$ ,  $\beta_3 = \beta_3(t)$  e  $\gamma_3 = \gamma_3(x, y, z, t, E)$  tais que*

$$\eta^3 = \alpha_3(t)M + \beta_3(t)N + \gamma_3(x, y, z, t, E).$$

*Demonstração.* De (4.3), concluímos que  $\eta^3$  é linear em  $M$  e  $N$ , isto é,

$$\eta^3 = \alpha_3(x, y, z, t, E)M + \beta_3(x, y, z, t, E)N + \gamma_3(x, y, z, t, E).$$

Agora, utilizando o Lema 4.2, o Lema 4.3 e as equações (4.4), concluímos que

$$\eta^3 = \alpha_3(t)M + \beta_3(t)N + \gamma_3(x, y, z, t, E),$$

como desejado.  $\square$

**Lema 4.5.** *Suponha que  $\eta^1$  satisfaça (4.5) e (4.6). Então existem funções diferenciáveis  $\alpha_1 = \alpha_1(t, E)$ ,  $\beta_1 = \beta_1(x, y, z, t, E)$  e  $\gamma_1 = \gamma_1(x, y, z, t, E)$  tais que*

$$\eta^1 = \alpha_1(t, E)M + \beta_1(x, y, z, t, E)N + \gamma_1(x, y, z, t, E).$$

*Demonstração.* De (4.5), concluímos que  $\eta^1$  é linear em  $M$  e  $N$ , isto é,

$$\eta^1 = \alpha_1(x, y, z, t, E)M + \beta_1(x, y, z, t, E)N + \gamma_1(x, y, z, t, E).$$

Por fim, utilizando (4.6), obtemos

$$\eta^1 = \alpha_1(t, E)M + \beta_1(x, y, z, t, E)N + \gamma_1(x, y, z, t, E),$$

como desejado.  $\square$

**Corolário 4.2.** *Nas condições do Lema 4.4, do Lema 4.5 e, se  $D_1 \neq D_2$ , então*

$$\eta^3 = \alpha_3(t)M + \gamma_3(x, y, z, t)$$

e

$$\eta^1 = \beta_1(x, y, z, t, E)N + \gamma_1(x, y, z, t, E).$$

*Demonstração.* Uma vez que  $D_1 \neq D_2$ , das equações (4.7) e (4.8), temos  $\eta_N^3 = 0$  e  $\eta_M^1 = 0$ , respectivamente. Como consequência, em (4.10),  $\eta_E^3 = 0$  e, assim, utilizando o Lema 4.4 e o Lema 4.5 segue o resultado.  $\square$

**Corolário 4.3.** *Nas condições do Corolário 4.2 e, se  $\rho = 0$ , então*

$$\eta^1 = \beta_1(t)N + \gamma_1(x, y, z, t).$$

*Demonstração.* Pelo Corolário 4.2, temos  $\eta^1 = \beta_1(x, y, z, t, E)N + \gamma_1(x, y, z, t, E)$ . Também, como consequência do Lema 4.1, concluímos que  $\zeta_{zz}^2 + \zeta_{yy}^2 + \zeta_{xx}^2 = 0$ . Devido a isto, e, se  $\rho = 0$  nas equações (4.14), (4.15), (4.16) e (4.17), obtemos  $\eta_E^1 = 0$ ,  $\eta_{zN}^1 = 0$ ,  $\eta_{yN}^1 = 0$  e  $\eta_{zN}^1 = 0$ , respectivamente, que nos dá resultado.  $\square$

**Corolário 4.4.** *Nas condições do Lema 4.4, do Lema 4.5 e, se  $\rho = 0$ , então*

$$\eta^3 = \alpha_3(t)M + \beta_3(t)N + \gamma_3(x, y, z, t)$$

e

$$\eta^1 = \alpha_1(t)M + \beta_1(t)N + \gamma_1(x, y, z, t).$$

*Demonstração.* Utilizando o Lema 4.4 e a equação (4.10), concluímos que  $\eta^3 = \alpha_3(t)M + \beta_3(t)N + \gamma_3(x, y, z, t)$ .

Agora, pelo Lema 4.5 e, se  $\rho = 0$  nas equações (4.14), (4.15), (4.16) e (4.17), concluímos que  $\eta^1 = \alpha_1(t)M + \beta_1(t)N + \gamma_1(x, y, z, t)$ .  $\square$

**Teorema 4.1.** *As equações determinantes podem ser reduzidas a (4.2) e*

$$(D_1 - D_2)\eta_N^3 = 0, \tag{4.21}$$

$$(D_1 - D_2)\eta_M^1 = 0, \tag{4.22}$$

$$\rho\eta_N^3 + 2D_2\eta_{EN}^3 = 0,$$

$$\rho N\eta_N^3 + D_2\eta_E^3 = 0, \quad (4.23)$$

$$\rho \left( \eta_E^1 + N\eta_{EE}^2 \right) = D_1\eta_{EE}^1,$$

$$\rho\eta_M^1 = 2D_1\eta_{EM}^1,$$

$$\rho \left( \eta_z^1 + 2N\eta_{zE}^2 \right) = 2D_1\eta_{zE}^1, \quad (4.24)$$

$$\rho \left( \eta_y^1 + 2N\eta_{yE}^2 \right) = 2D_1\eta_{yE}^1, \quad (4.25)$$

$$\rho \left( \eta_x^1 + 2N\eta_{xE}^2 \right) = 2D_1\eta_{xE}^1, \quad (4.26)$$

$$\delta \left( M\eta^2 + E\eta^3 - EM\eta_E^2 + 2c_6EM \right) + \eta_t^2 = 0, \quad (4.27)$$

$$\rho \left( \eta^1 - N\eta_N^1 + N\eta_E^2 \right) = D_1\eta_E^1, \quad (4.28)$$

$$\rho\eta_z^2 = 2D_1\eta_{zN}^1, \quad (4.29)$$

$$\rho\eta_y^2 = 2D_1\eta_{yN}^1, \quad (4.30)$$

$$\rho\eta_x^2 = 2D_1\eta_{xN}^1, \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} (\mu N - \lambda M)\eta_M^1 - \delta EM\eta_E^1 + \eta_t^1 + \rho \left( \eta_{zz}^2 + \eta_{yy}^2 + \eta_{xx}^2 \right) N \\ - D_1 \left( \eta_{zz}^1 + \eta_{yy}^1 + \eta_{xx}^1 \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\rho\eta_E^2 = 2D_1\eta_{EN}^1, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \mu \left( N\eta_M^3 - \eta^1 - 2c_6N \right) + \lambda(\eta^3 + 2c_6M - M\eta_M^3) - \delta EM\eta_E^3 + \eta_t^3 \\ - D_2 \left( \eta_{zz}^3 + \eta_{yy}^3 + \eta_{xx}^3 \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

*Demonstração.* Consequência do Lema 4.1, do Lema 4.3 e do Lema 4.5.  $\square$

Na sequência, devido as equações (4.21) e (4.22), dividimos a apresentação do cálculo das simetrias do sistema (3.49) em dois macro casos, a saber,  $D_1 \neq D_2$  e  $D_1 = D_2$ .

## 4.2 CÉLULAS TUMORAIS E MDES COM DIFUSÕES DIFERENTES ( $D_1 \neq D_2$ )

### 4.2.1 Modelo completo ( $\rho\delta\lambda\mu \neq 0$ )

De (4.21)  $\eta_N^3 = 0$  e, conseqüentemente, de (4.23)  $\eta_E^3 = 0$ . Tendo isto em vista e derivando (4.34) em relação à  $E$ , obtemos

$$\mu\eta_E^1 = 0 \Rightarrow \eta_E^1 = 0. \quad (4.35)$$

Como consequência em (4.33), temos

$$\rho\eta_E^2 = 0 \Rightarrow \eta_E^2 = 0. \quad (4.36)$$

Derivando (4.27) em relação à  $E$ , concluímos que

$$\delta(\eta^3 + 2c_6M) = 0 \Rightarrow \eta^3 = -2c_6M.$$

Derivando (4.34) em relação à  $N$ , obtemos

$$\mu(\eta_M^3 - \eta_N^1 - 2c_6) = 0 \Rightarrow \eta_N^1 = -4c_6. \quad (4.37)$$

Substituindo (4.37) em (4.28), concluímos que

$$\rho(\eta^1 + 4c_6N) = 0 \Rightarrow \eta^1 = -4c_6N.$$

Derivando (4.27) em relação à  $t$ , obtemos

$$\delta M\eta_t^2 + \eta_{tt}^2 = 0 \Rightarrow \eta_t^2 = 0.$$

Além disso, das equações (4.29), (4.30), (4.31), (4.36) e (4.2), temos  $\eta_z^2 = 0$ ,  $\eta_y^2 = 0$ ,  $\eta_x^2 = 0$ ,  $\eta_E^2 = 0$ ,  $\eta_M^2 = 0$  e  $\eta_N^2 = 0$ , respectivamente. Assim, concluímos que  $\eta^2 = c_9$ , em que  $c_9 \in \mathbb{R}$ .

Agora vamos verificar as condições de compatibilidade. Em (4.27), obtemos  $c_9\delta M = 0$ , o que implica  $c_9 = 0$  e, assim,  $\eta^2 = 0$ .

Já, em (4.34), obtemos

$$2c_6\lambda M = 0 \Rightarrow c_6 = 0. \quad (4.38)$$

Assim,  $\eta^1 = \eta^2 = \eta^3 = 0$ . Substituindo as expressões de  $\zeta^1$ ,  $\zeta^2$ ,  $\zeta^3$ ,  $\zeta^4$ ,  $\eta^1$ ,  $\eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que o grupo local de simetrias para este caso é dado pela combinação linear dos geradores (4.19).

4.2.2 Sem decaimento de MDEs ( $\rho\delta\mu \neq 0$  e  $\lambda = 0$ )

Neste caso, de (4.38), podemos concluir que  $\eta^3 = -2c_6M$  e  $\eta^1 = -4c_6N$  e, além disso,  $\eta^2 = 0$  como no caso anterior. Logo, substituindo os valores de  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \eta^1, \eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluimos que

$$\mathbf{X} = c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_6S_1 + c_7Y + c_8R_3,$$

em que

$$S_1 = -2M \frac{\partial}{\partial M} - 4N \frac{\partial}{\partial N} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.39)$$

4.2.3 Sem degradação da ECM ( $\rho\mu\lambda \neq 0$  e  $\delta = 0$ )

Em (4.27), temos que  $\eta_t^2 = 0$ . Além disso, das equações (4.29), (4.30), (4.31), (4.36) e (4.2), temos  $\eta_z^2 = 0, \eta_y^2 = 0, \eta_x^2 = 0, \eta_E^2 = 0, \eta_M^2 = 0$  e  $\eta_N^2 = 0$ , respectivamente. Logo,  $\eta^2 = c_{10}$ , em que,  $c_{10} \in \mathbb{R}$ .

Também, das equações (4.26), (4.25), (4.24), (4.28), (4.35) e (4.22), temos  $\eta_x^1 = 0, \eta_y^1 = 0, \eta_z^1 = 0, \eta_t^1 = 0, \eta_E^1 = 0$  e  $\eta_M^1 = 0$ , respectivamente. Por isso,

$$\eta^1 = c_{11}N + c_{12}, \quad (4.40)$$

em que,  $c_{11}, c_{12} \in \mathbb{R}$ .

Substituindo (4.40) em (4.28), obtemos  $\rho c_{12} = 0$ , o que implica  $c_{12} = 0$ . Assim,  $\eta^1 = c_{11}N$ .

Derivando (4.34) em relação à  $N$ , obtemos  $\mu(\eta_M^3 - \eta_N^1 + -2c_6) = 0$ , o que implica  $\eta_M^3 = 2c_6 + c_{11}$ .

Combinando estes resultados com o Corolário 4.2 concluimos, então, que  $\eta^3 = (2c_6 + c_{11})M + \gamma_3(x, y, z, t)$ .

Verificando as condições de compatibilidade na equação (4.34), temos

$$\lambda\gamma_3 + \gamma_{3t} + 2c_6\lambda M - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \quad (4.41)$$

Uma vez que  $\gamma_3$  não é função de  $M$ , segue de (4.41) que

$$2c_6\lambda = 0 \Rightarrow c_6 = 0. \quad (4.42)$$

Logo, concluimos que  $\eta^1 = c_{11}N, \eta^2 = c_{10}$  e  $\eta^3 = c_{11}M + \gamma_3(x, y, z, t)$  e, em adição,

$$\lambda\gamma_3(x, y, z, t) + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \quad (4.43)$$

Assim, substituindo as expressões de  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \eta^1, \eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\mathbf{X} = c_1 Z + c_2 R_1 + c_3 R_2 + c_4 T + c_5 X + c_7 Y + c_8 R_3 + c_{10} E_1 + c_{11} S_2 + M_{\gamma_3},$$

em que

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial E}, \quad S_2 = M \frac{\partial}{\partial M} + N \frac{\partial}{\partial N}, \quad M_{\gamma_3} = \gamma_3(x, y, z, t) \frac{\partial}{\partial M}, \quad (4.44)$$

com  $\gamma_3$  satisfazendo (4.43).

#### 4.2.4 Sem decaimento de MDEs e sem degradação da ECM ( $\rho\mu \neq 0$ e $\lambda = \delta = 0$ )

Neste caso, podemos concluir a partir de (4.42) que  $\eta^1 = c_{11}N$ ,  $\eta^2 = c_{10}$ ,  $\eta^3 = (2c_6 + c_{11})M + \gamma_3(x, y, z, t)$  e, em adição,

$$\gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \quad (4.45)$$

Assim, substituindo as expressões de  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \eta^1, \eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\mathbf{X} = c_1 Z + c_2 R_1 + c_3 R_2 + c_4 T + c_5 X + c_6 S_3 + c_7 Y + c_8 R_3 + c_{10} E_1 + c_{11} S_2 + M_{\gamma_3}$$

em que,

$$S_3 = 2M \frac{\partial}{\partial M} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z},$$

com  $\gamma_3$  satisfazendo (4.45), e  $M_{\gamma_3}$  é dado em (4.44).

#### 4.2.5 Sem haptotaxia ( $\mu\delta\lambda \neq 0$ e $\rho = 0$ )

Estamos nas condições do Corolário 4.3, então  $\eta^1 = \beta_1(t)N + \gamma_1(x, y, z, t)$ . Logo, utilizando (4.32), temos

$$\beta_1'(t)N + \gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0. \quad (4.46)$$

Uma vez que  $\beta_1$  e  $\gamma_1$  não são funções de  $N$ , segue de (4.46) que  $\beta_1'(t) = 0$ , o que implica  $\beta_1(t) = c_{13}$ , com  $c_{13} \in \mathbb{R}$ .

Logo,  $\eta^1 = c_{13}N + \gamma_1(x, y, z, t)$  e, além disso,  $\gamma_1$  satisfaz

$$\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0. \quad (4.47)$$

Agora, das equações (4.21) e (4.23), temos  $\eta_N^3 = 0$  e  $\eta_E^3 = 0$ , respectivamente. Logo, derivando (4.34) em relação à  $N$ , obtemos  $\mu(\eta_M^3 - 2c_6 - \eta_N^1) = 0$ , o que implica  $\eta_M^3 = 2c_6 + c_{13}$  e, junto com o Corolário 4.2, concluímos que  $\eta^3 = (2c_6 + c_{13})M + \gamma_3(x, y, z, t)$ .

Verificando as condições de compatibilidade na equação (4.34), temos

$$\lambda\gamma_3(x, y, z, t) - \mu\gamma_1(x, y, z, t) + \gamma_{3t} + 2c_6\lambda M - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \quad (4.48)$$

Uma vez que  $\gamma_3$  e  $\gamma_1$  não são funções de  $M$ , concluímos, de (4.48), que

$$2c_6\lambda = 0 \Rightarrow c_6 = 0. \quad (4.49)$$

Logo,  $\eta^3 = c_{13}M + \gamma_3(x, y, z, t)$  e, em adição,

$$\lambda\gamma_3(x, y, z, t) - \mu\gamma_1(x, y, z, t) + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \quad (4.50)$$

Temos, de (4.2), que  $\eta_M^2 = 0$  e  $\eta_N^2 = 0$ . Assim,  $\eta^2 = \gamma(x, y, z, t, E)$ .

Utilizando (4.27), temos

$$\delta(\gamma(x, y, z, t, E) + c_{13}E - \gamma_E E)M + \delta\gamma_3(x, y, z, t)E + \gamma_t = 0. \quad (4.51)$$

Segue, de (4.51), que

$$\gamma(x, y, z, t, E) + c_{13}E - \gamma_E E = 0 \quad (4.52)$$

e

$$\delta\gamma_3(x, y, z, t)E + \gamma_t = 0. \quad (4.53)$$

A solução de (4.52) é:  $\gamma(x, y, z, t, E) = c_{13}E \ln(E) + E\gamma_2(x, y, z, t)$ .

Utilizando (4.53), obtemos

$$\delta\gamma_3(x, y, z, t)E = -\gamma_t = -\gamma_{2t}E \Rightarrow \gamma_3(x, y, z, t) = -\frac{1}{\delta}\gamma_{2t}. \quad (4.54)$$

Logo,  $\eta^2 = c_{13}E \ln(E) + E\gamma_2(x, y, z, t)$ .

Substituindo as expressões de  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \eta^1, \eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\mathbf{X} = c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_7Y + c_8R_3 + c_{13}S_4 + \Sigma_{\Gamma_1},$$

sendo que

$$S_4 = E \ln(E) \frac{\partial}{\partial E} + M \frac{\partial}{\partial M} + N \frac{\partial}{\partial N}, \quad \Sigma_{\Gamma_1} = E\gamma_2 \frac{\partial}{\partial E} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial M} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial N}, \quad (4.55)$$

com  $\Gamma_1 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ , em que  $\gamma_3 = \gamma_3(x, y, z, t)$ ,  $\gamma_1 = \gamma_1(x, y, z, t)$  e  $\gamma_2 = \gamma_2(x, y, z, t)$ , satisfazem (4.47), (4.50) e (4.54).

4.2.6 Sem decaimento de MDEs e sem haptotaxia ( $\mu\delta \neq 0$  e  $\lambda = \rho = 0$ )

Neste caso, podemos concluir a partir de (4.49) que  $\eta^2 = (4c_6 + c_{13})E \ln(E) + E\gamma_2(x, y, z, t)$ ,  $\eta^3 = (2c_6 + c_{13})M + \gamma_3(x, y, z, t)$ ,  $\eta^1 = c_{13}N + \gamma_1(x, y, z, t)$  e, em adição,

$$\gamma_{1t} - D_1 (\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0, \tag{4.56}$$

$$\mu\gamma_1(x, y, z, t) - \gamma_{3t} + D_2 (\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0, \tag{4.57}$$

com

$$\gamma_3(x, y, z, t) = -\frac{1}{\delta}\gamma_{2t}. \tag{4.58}$$

Assim, substituindo as expressões de  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \eta^1, \eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\mathbf{X} = c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_7Y + c_6S_5 + c_8R_3 + c_{13}S_4 + \Sigma_{\Gamma_1},$$

em que

$$S_5 = 4E \ln(E) \frac{\partial}{\partial E} + 2M \frac{\partial}{\partial M} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z},$$

com  $\Sigma_{\Gamma_1}$  dado em (4.55), e  $\gamma_2, \gamma_3$  e  $\gamma_1$  satisfazem (4.56), (4.57) e (4.58).

4.2.7 Sem haptotaxia e sem degradação da ECM ( $\mu\lambda \neq 0$  e  $\rho = \delta = 0$ )

Neste caso,  $\eta^1$  e  $\eta^3$  são determinadas como no caso 4.2.5 e são as mesmas. Já em relação à  $\eta^2$ , temos de (4.2) e (4.27) que  $\eta_M^2 = 0$ ,  $\eta_N^2 = 0$  e  $\eta_t^2 = 0$ , respectivamente e, assim, concluímos que  $\eta^2 = \gamma_2(x, y, z, E)$ .

Substituindo as expressões de  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \eta^1, \eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\mathbf{X} = c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_7Y + c_8R_3 + c_{13}S_2 + E\gamma_2 + \Sigma_{\Gamma_2},$$

em que

$$E\gamma_2 = \gamma_2(x, y, z, E) \frac{\partial}{\partial E} \quad e \quad \Sigma_{\Gamma_2} = \gamma_3 \frac{\partial}{\partial M} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial N}, \tag{4.59}$$

com  $\Gamma_2 = (\gamma_1, \gamma_3)$ , em que  $\gamma_3 = \gamma_3(x, y, z, t)$  e  $\gamma_1 = \gamma_1(x, y, z, t)$  satisfazem (4.47) e (4.50).

4.2.8 Sem decaimento de MDEs, sem haptotaxia e sem degradação da ECM ( $\mu \neq 0$  e  $\lambda = \rho = \delta = 0$ )

Neste caso, podemos concluir a partir de (4.49) que  $\eta^1 = c_{13}N + \gamma_1(x, y, z, t)$ ,  $\eta^2 = \gamma_2(x, y, z, E)$  e  $\eta^3 = (2c_6 + c_{13})M + \gamma_3(x, y, z, t)$ . Assim, substituindo as expressões de  $\xi^1$ ,  $\xi^2$ ,  $\xi^3$ ,  $\xi^4$ ,  $\eta^1$ ,  $\eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\mathbf{X} = c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_6S_3 + c_7Y + c_8R_3 + c_{13}S_2 + E\gamma_2 + \Sigma_{\Gamma_2},$$

em que  $\Sigma_{\Gamma_2}$  é dado em (4.59), e  $\gamma_3$  e  $\gamma_1$  satisfazem (4.56) e (4.57).

4.2.9 Sem produção de MDEs ( $\rho\delta\lambda \neq 0$  e  $\mu = 0$ )

Das equações (4.22) e (4.2), temos  $\eta_M^1 = 0$ ,  $\eta_M^2 = 0$  e  $\eta_N^2 = 0$ , respectivamente. Tendo isto em vista e derivando (4.32) em relação à  $M$ , obtemos  $\delta E\eta_E^1 = 0$ , o que implica  $\eta_E^1 = 0$ .

Consequentemente em (4.33)  $\eta_E^2 = 0$  e, em (4.24), (4.25), (4.26), temos  $\eta_z^1 = 0$ ,  $\eta_y^1 = 0$  e  $\eta_x^1 = 0$ , respectivamente. Devido a isto, em (4.29), (4.30) e (4.31), temos  $\eta_z^2 = 0$ ,  $\eta_y^2 = 0$  e  $\eta_x^2 = 0$ , respectivamente. Por fim, em (4.32), obtemos  $\eta_t^1 = 0$ .

Agora utilizando o Corolário 4.2, concluímos que  $\eta^1 = c_{14}N + c_{15}$ ,  $c_{14}, c_{15} \in \mathbb{R}$ .

Substituindo  $\eta^1$  em (4.28), obtemos  $c_{15}\rho = 0$ , o que implica  $c_{15} = 0$ . Logo,  $\eta^1 = c_{14}N$ .

Também, devido ao que foi descrito, concluímos que  $\eta^2 = \gamma_2(t)$ .

Substituindo  $\eta^2$  em (4.27) e derivando em relação à  $E$ , obtemos  $\delta(\eta^3 + 2c_6M) = 0$ , o que implica  $\eta^3 = -2c_6M$ .

Agora, utilizando (4.27), temos  $\delta\gamma_2(t)M + \gamma_2'(t) = 0$ , o que implica  $\gamma_2(t) = 0$ . Assim,  $\eta^2 = 0$ .

Verificando as condições de compatibilidade em (4.34), obtemos

$$2c_6\lambda M = 0 \Rightarrow c_6 = 0. \quad (4.60)$$

Assim,  $\eta^3 = 0$ .

Logo, substituindo as expressões de  $\xi^1$ ,  $\xi^2$ ,  $\xi^3$ ,  $\xi^4$ ,  $\eta^1$ ,  $\eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\mathbf{X} = c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_7Y + c_8R_3 + c_{14}S_6,$$

em que

$$S_6 = N \frac{\partial}{\partial N}.$$

4.2.10 Sem produção e decaimento de MDEs ( $\rho\delta \neq 0$  e  $\lambda = \mu = 0$ )

Neste caso, podemos concluir a partir de (4.60) que  $\eta^1 = c_{14}N$ ,  $\eta^2 = 0$  e  $\eta^3 = -2c_6M$ . Assim, substituindo as expressões de  $\xi^1$ ,  $\xi^2$ ,  $\xi^3$ ,  $\xi^4$ ,  $\eta^1$ ,  $\eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\mathbf{X} = c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_6S_7 + c_7Y + c_8R_3 + c_{14}S_6,$$

em que

$$S_7 = -2M \frac{\partial}{\partial M} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

4.2.11 Sem haptotaxia e sem produção de MDEs ( $\delta\lambda \neq 0$  e  $\rho = \mu = 0$ )

Neste caso estamos nas condições do Corolário 4.2 e, assim,  $\eta^3 = \alpha_3(t)M + \gamma_3(x, y, z, t)$ .

Temos da equação (4.22) que  $\eta_M^1 = 0$ . Logo, derivando (4.34) em relação à  $M$ , obtemos  $\eta_{Mt}^3 = -2c_6\lambda = \alpha_3'(t)$ , o que implica  $\alpha_3(t) = -2c_6\lambda t + c_{16}$ , em que,  $c_{16} \in \mathbb{R}$ .

Assim,  $\eta^3 = (-2c_6\lambda t + c_{16})M + \gamma_3(x, y, z, t)$ .

Utilizando (4.34), obtemos

$$\lambda\gamma_3(x, y, z, t) + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \quad (4.61)$$

Também, em relação à  $\eta^1$ , estamos nas condições do Corolário 4.3 e, assim,  $\eta^1 = \beta_1(t)N + \gamma_1(x, y, z, t)$ .

Utilizando (4.32), obtemos

$$\beta_1'(t)N + \gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0. \quad (4.62)$$

Uma vez que  $\gamma_1$  não é função de  $N$ , concluímos a partir de (4.62) que  $\beta_1'(t) = 0$ , o que implica  $\beta_1(t) = c_{17}$ ,  $c_{17} \in \mathbb{R}$

Logo,  $\eta^1 = c_{17}N + \gamma_1(x, y, z, t)$  e, em adição,  $\gamma_1$  satisfaz

$$\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0. \quad (4.63)$$

Temos de (4.2) que  $\eta_M^2 = 0$  e  $\eta_N^2 = 0$ . Logo,  $\eta^2 = \gamma(x, y, z, t, E)$ .

Utilizando (4.27), temos

$$\delta(\gamma(x, y, z, t, E) + (-2c_6\lambda t + c_{16} + 2c_6)E - \gamma_E E)M + \delta\gamma_3(x, y, z, t)E + \gamma_t = 0. \quad (4.64)$$

De (4.64), concluímos que

$$\gamma(x, y, z, t, E) + (-2c_6\lambda t + c_{16} + 2c_6)E - \gamma_E E = 0 \quad (4.65)$$

e

$$\delta\gamma_3(x, y, z, t)E + \gamma_t = 0. \quad (4.66)$$

A solução de (4.65) é:

$$\gamma(x, y, z, t, E) = E((-2c_6\lambda t + c_{16} + 2c_6)\ln(E) + \gamma_2(x, y, z, t)).$$

Utilizando (4.66), obtemos  $\gamma_3(x, y, z, t) = \frac{1}{\delta}(2c_6\lambda\ln(E) - \gamma_{2t})$ . Uma vez que  $\gamma_3$  não é função de  $E$ , concluímos que

$$2c_6\lambda = 0 \Rightarrow c_6 = 0 \quad (4.67)$$

e, assim,

$$\gamma_3(x, y, z, t) = -\frac{1}{\delta}\gamma_{2t}. \quad (4.68)$$

Logo, substituindo as expressões de  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \eta^1, \eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\mathbf{X} = c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_7Y + c_8R_3 + c_{16}S_8 + c_{17}S_6 + \Sigma_{\Gamma_3} + N_{\gamma_1},$$

em que

$$S_8 = E \ln(E) \frac{\partial}{\partial E} + M \frac{\partial}{\partial M}, \quad N_{\gamma_1} = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial N} \quad e \quad \Sigma_{\Gamma_3} = E\gamma_2 \frac{\partial}{\partial E} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial M}, \quad (4.69)$$

com  $\Gamma_3 = (\gamma_2, \gamma_3)$ , e  $\gamma_2 = \gamma_2(x, y, z, t)$ ,  $\gamma_3 = \gamma_3(x, y, z, t)$  e  $\gamma_1 = \gamma_1(x, y, z, t)$  satisfazem (4.68), (4.63) e (4.61).

#### 4.2.12 Sem produção e decaimento de MDEs e sem haptotaxia ( $\delta \neq 0$ e $\lambda = \rho = \mu = 0$ )

Neste caso, podemos concluir a partir de (4.67) que  $\eta^1 = c_{16}N + \gamma_1(x, y, z, t)$ ,  $\eta^2 = (2c_6 + c_{16})E \ln(E) + E\gamma_2(x, y, z, t)$  e  $\eta^3 = c_{15}M + \gamma_3(x, y, z, t)$ .

Assim, substituindo os valores de  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \eta^1, \eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\mathbf{X} = c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_6S_9 + c_7Y + c_8R_3 + c_{16}S_8 + c_{17}S_6 + \Sigma_{\Gamma_3} + N_{\gamma_1},$$

em que

$$S_9 = 2E \ln(E) \frac{\partial}{\partial E} + 2M \frac{\partial}{\partial M} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Além disso,  $\Sigma_{\Gamma_3}$  e  $N_{\gamma_1}$  são dados em (4.69), com  $\gamma_2, \gamma_3$  e  $\gamma_1$  satisfazendo (4.61), (4.63) e (4.68).

4.2.13 Sem degradação da ECM e sem produção de MDEs ( $\rho \neq 0, \forall \lambda$  e  $\delta = \mu = 0$ )

Das equações (4.2) e (4.5) temos  $\eta_N^2 = 0$  e  $\eta_{NN}^1 = 0$ , respectivamente. Tendo isto em vista e derivando a equação (4.28) em relação à  $N$ , obtemos

$$\rho\eta_E^2 - D_1\eta_{NE}^1 = 0. \quad (4.70)$$

Da equação (4.33), temos

$$\frac{\rho}{2}\eta_E^2 = D_1\eta_{EN}^1. \quad (4.71)$$

Substituindo (4.71) em (4.70), segue que

$$\rho\eta_E^2 - \frac{\rho}{2}\eta_E^2 = 0 \Rightarrow \frac{\rho}{2}\eta_E^2 = 0 \Rightarrow \eta_E^2 = 0 \quad (4.72)$$

e, conseqüentemente, em (4.71), obtemos

$$\eta_{EN}^1 = 0. \quad (4.73)$$

Agora, pelo Corolário 4.2 e por (4.73), concluímos que  $\eta^1 = \beta_1(x, y, z, t)N + \gamma_1(x, y, z, t, E)$ .

Utilizando (4.28), temos

$$\rho\gamma_1(x, y, z, t, E) - D_1\gamma_{1E} = 0. \quad (4.74)$$

A solução de (4.74) é:  $\gamma_1(x, y, z, t, E) = \gamma_4(x, y, z, t)e^{\frac{\rho}{D_1}E}$ .

Assim,  $\eta^1 = \beta_1(x, y, z, t)N + \gamma_4(x, y, z, t)e^{\frac{\rho}{D_1}E}$ .

Agora utilizando as equações (4.24), (4.25) e (4.26), concluímos que  $\eta^1 = \beta_1(t)N + \gamma_4(t)e^{\frac{\rho}{D_1}E}$ .

Pelas equações (4.2), (4.72), (4.27), (4.29), (4.30) e (4.31), concluímos que  $\eta^2 = c_{18}$ , em que  $c_{18} \in \mathbb{R}$ .

Agora, pela equação (4.32), concluímos que  $\beta_1(x, y, z, t) = c_{19}$  e  $\gamma_4(x, y, z, t) = c_{20}$ , em que  $c_{19}, c_{20} \in \mathbb{R}$ .

Portanto,  $\eta^1 = c_{19}N + c_{20}e^{\frac{\rho}{D_1}E}$ .

Em relação à  $\eta^3$  também, neste caso, estamos nas condições do Corolário 4.2 e, assim,  $\eta^3 = \alpha_3(t)M + \gamma_3(x, y, z, t)$ .

Pela equação (4.34), temos

$$(\alpha_3'(t) + 2c_6\lambda)M + \lambda\gamma_3(x, y, z, t) + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \quad (4.75)$$

Logo, de (4.75), concluímos que

$$\alpha_3'(t) + 2c_6\lambda = 0 \Rightarrow \alpha_3'(t) = -2c_6\lambda \Rightarrow \alpha_3(t) = -2c_6\lambda t + c_{21}, c_{21} \in \mathbb{R}$$

Assim,  $\eta^3 = (-2c_6\lambda t + c_{22})M + \gamma_3(x, y, z, t)$  e, em adição,  $\eta^3$  satisfaz

$$\lambda\gamma_3(x, y, z, t) + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \quad (4.76)$$

Assim, substituindo as expressões de  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \eta^1, \eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\mathbf{X} = c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_6S_{10} + c_7Y + c_8R_3 + c_{18}E_1 + c_{19}S_6 + c_{20}S_{11} + c_{21}S_{12} + M_{\gamma_3},$$

com

$$S_{10} = -2\lambda t M \frac{\partial}{\partial M} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}, \quad S_{11} = e^{\frac{\rho}{b_1} E} \frac{\partial}{\partial N} \quad e \quad S_{12} = M \frac{\partial}{\partial M},$$

em que,  $M_{\gamma_3}$  é dado em (4.44), e  $\gamma_3$  satisfaz (4.76).

4.2.14 Sem haptotaxia, sem degradação da ECM e sem produção de MDEs ( $\forall \lambda$  e  $\delta = \rho = \mu = 0$ )

Estamos nas condições do Corolário 4.3 e, assim,  $\eta^1 = \beta_1(t)N + \gamma_1(x, y, z, t)$ .

Agora, utilizando (4.32), temos

$$\beta_1'(t)N + \gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0. \quad (4.77)$$

Consequentemente, de (4.77), concluímos que  $\beta_1'(t) = 0$ , o que implica  $\beta_1(t) = c_{22}, c_{22} \in \mathbb{R}$ .

Portanto,  $\eta^1 = c_{22}N + \gamma_1(x, y, z, t)$  e, em adição,  $\gamma_3$  satisfaz

$$\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0. \quad (4.78)$$

Temos também das equações (4.2) e (4.27) que  $\eta_M^2 = 0, \eta_N^2 = 0$  e  $\eta_t^2 = 0$ , respectivamente. Assim, concluímos que  $\eta^2 = \gamma_2(x, y, z, E)$ .

Também, pelo Corolário 4.2, temos que  $\eta^3 = \alpha_3(t)M + \gamma_3(x, y, z, t)$ . Consequentemente, utilizando (4.34), temos

$$(\alpha_3'(t) + 2c_6\lambda)M + \lambda\gamma_3(x, y, z, t) + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \quad (4.79)$$

Logo, concluímos de (4.79) que  $\alpha_3'(t) + 2c_6\lambda = 0$ , o que implica  $\alpha_3(t) = -2c_6\lambda t + c_{23}, c_{23} \in \mathbb{R}$ .

Assim,  $\eta^3 = (-2c_6\lambda t + c_{23})M + \gamma_3(x, y, z, t)$  e, em adição,  $\gamma_3$  satisfaz

$$\lambda\gamma_3(x, y, z, t) + \gamma_{3t} - D_2 (\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \quad (4.80)$$

Assim, substituindo as expressões de  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \eta^1, \eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\mathbf{X} = c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_6S_{10} + c_7Y + c_8R_3 + c_{22}S_6 + c_{23}S_{12} + E_{\gamma_2} + M_{\gamma_3} + N_{\gamma_1},$$

em que  $M_{\gamma_3}$  é dado em (4.44),  $N_{\gamma_1}$  é dado em (4.69), e  $\gamma_3$  e  $\gamma_1$  satisfazendo (4.80) e (4.78).

### 4.3 CÉLULAS TUMORAIS E MDES COM DIFUSÕES IGUAIS ( $D_1 = D_2$ )

#### 4.3.1 Sem haptotaxia e sem produção de MDEs ( $\delta\lambda \neq 0$ e $\rho = \mu = 0$ )

Aqui, estamos nas condições do Corolário 4.4 e, assim,  $\eta^3 = \alpha_3(t)M + \beta_3(t)N + \gamma_3(x, y, z, t)$ .

Utilizando (4.34), obtemos

$$\begin{aligned} & (\alpha'_3(t) + 2c_6\lambda)M + (\lambda\beta_3(t) + \beta'_3(t))N + \lambda\gamma_3(x, y, z, t) + \gamma_{3t} \\ & - D_2 (\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \end{aligned} \quad (4.81)$$

De (4.81), concluímos que

$$\lambda\beta_3(t) + \beta'_3(t) = 0 \quad (4.82)$$

e

$$\alpha'_3(t) + 2c_6\lambda = 0. \quad (4.83)$$

Além disso,  $\gamma_3$  satisfaz

$$\lambda\gamma_3(x, y, z, t) + \gamma_{3t} - D_2 (\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \quad (4.84)$$

A solução de (4.82) é  $\beta_3(t) = c_{24}e^{-\lambda t}$ ,  $c_{24} \in \mathbb{R}$ . Já, a solução de (4.83) é  $\alpha_3(t) = -2c_6\lambda t + c_{25}$ ,  $c_{25} \in \mathbb{R}$ .

Assim,  $\eta^3 = (-2c_6\lambda t + c_{25})M + c_{24}e^{-\lambda t}N + \gamma_3(x, y, z, t)$ , com  $\gamma_2$  satisfazendo (4.84).

Temos de (4.2) que  $\eta_M^2 = 0$  e  $\eta_N^2 = 0$ . Logo,  $\eta^2 = \gamma(x, y, z, t, E)$ .

Agora, utilizando (4.27), obtemos

$$\begin{aligned} \delta (\gamma(x, y, z, t, E) + (-2c_6\lambda t + c_{25} + 2c_6)E - \gamma_E E) M + c_{24}\delta e^{-\lambda t} EN \\ + \delta\gamma_3(x, y, z, t)E + \gamma_t = 0. \end{aligned} \quad (4.85)$$

De (4.85), concluímos que  $c_{24} = 0$  e, além disso,

$$\gamma(x, y, z, t, E) + (-2c_6\lambda t + c_{25} + 2c_6)E - \gamma_E E = 0, \quad (4.86)$$

e

$$\delta\gamma_3(x, y, z, t)E + \gamma_t = 0. \quad (4.87)$$

A solução de (4.86) é:

$$\gamma(x, y, z, t, E) = (-2c_6\lambda t + c_{25} + 2c_6)E \ln(E) + E\gamma_2(x, y, z, t) \quad (4.88)$$

Substituindo  $\gamma_t$  em (4.87), obtemos

$$\gamma_3(x, y, z, t) = -\frac{1}{\delta} (-2c_6\lambda \ln(E) + \gamma_{2t}) \Rightarrow c_6 = 0 \Rightarrow \gamma_3(x, y, z, t) = -\frac{1}{\delta} \gamma_{2t}. \quad (4.89)$$

Logo,  $\eta^2 = c_{24}E \ln(E) + E\gamma_2(x, y, z, t)$  e  $\eta^3 = c_{25}M + \gamma_3(x, y, z, t)$ .

Também, por estarmos nas condições do Corolário 4.4,  $\eta^1 = \alpha_1(t)M + \beta_1(t)N + \gamma_1(x, y, z, t)$ .

Utilizando (4.32), temos

$$(\alpha_1'(t) - \lambda\alpha_1(t))M + \beta_1'(t)N + \gamma_{1t} - D_1 (\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0. \quad (4.90)$$

Consequentemente, concluímos de (4.90) que

$$\beta_1'(t) = 0 \Rightarrow \beta_1(t) = c_{26}, c_{26} \in \mathbb{R},$$

e

$$\alpha_1'(t) - \lambda\alpha_1(t) = 0 \Rightarrow \alpha_1(t) = c_{27}e^{\lambda t}, c_{27} \in \mathbb{R}.$$

Além disso,  $\gamma_1$  satisfaz

$$\gamma_{1t} - D_1 (\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0. \quad (4.91)$$

Logo,  $\eta^1 = c_{26}N + c_{27}e^{\lambda t}M + \gamma_1(x, y, z, t)$ .

Assim, substituindo as expressões de  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \eta^1, \eta^2, \eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\mathbf{X} = c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_7Y + c_8R_3 + c_{25}S_8 + c_{26}S_6 + c_{27}S_{13} + \Sigma_{\Gamma_3} + N_{\gamma_1},$$

em que

$$S_{13} = e^{\lambda t}M \frac{\partial}{\partial N},$$

com  $\Sigma_{\Gamma_3}$  e  $N_{\gamma_1}$  dados em (4.69), e  $\gamma_2, \gamma_3$  e  $\gamma_1$  satisfazem (4.89), (4.84) e (4.91).

4.3.2 Sem haptotaxia e sem produção e decaimento de MDEs ( $\delta \neq 0$  e  $\lambda = \rho = \mu = 0$ )

Neste caso, podemos concluir a partir de (4.89) que  $\eta^1 = c_{26}N + c_{27}M + \gamma_1(x, y, z, t)$ ,  $\eta^2 = (2c_6 + c_{24})E \ln(E) + E\gamma_2(x, y, z, t)$  e  $\eta^3 = c_{25}M + \gamma_3(x, y, z, t)$ .

Assim, substituindo as expressões de  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \eta^1, \eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\mathbf{X} = c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_6S_9 + c_7Y + c_8R_3 + c_{25}S_8 + c_{26}S_6 + c_{27}S_{14} + \Sigma_{\Gamma_3} + N_{\gamma_1},$$

em que

$$S_{14} = M \frac{\partial}{\partial N},$$

com  $\Sigma_{\Gamma_3}$  e  $N_{\gamma_1}$  dados em (4.69), e  $\gamma_2, \gamma_3$  e  $\gamma_1$  satisfazem (4.89), (4.84) e (4.91).

4.3.3 Sem haptotaxia, sem degradação da ECM e sem produção de MDEs ( $\forall \lambda$  e  $\delta = \rho = \mu = 0$ )

Estamos nas condições do Corolário 4.4 e, assim,  $\eta^1 = \alpha_1(t)M + \beta_1(t)N + \gamma_1(x, y, z, t)$ .

Utilizando (4.32), obtemos

$$(\alpha_1'(t) - \lambda\alpha_1(t))M + \beta_1'(t)N + \gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0. \quad (4.92)$$

Consequentemente, concluímos de (4.92) que

$$\beta_1'(t) = 0 \Rightarrow \beta_1(t) = c_{28}, c_{28} \in \mathbb{R}$$

e

$$\alpha_1'(t) - \lambda\alpha_1(t) = 0 \Rightarrow \alpha_1(t) = c_{29}e^{\lambda t}, c_{29} \in \mathbb{R}.$$

Além disso,  $\gamma_1$  satisfaz

$$\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0. \quad (4.93)$$

Portanto,  $\eta^1 = c_{29}e^{\lambda t}M + c_{28}N + \gamma_1(x, y, z, t)$ .

Temos também pelas equações (4.2) e (4.27) que  $\eta_M^2 = 0, \eta_N^2 = 0$  e  $\eta_t^2 = 0$ , respectivamente. Assim,  $\eta^2 = \gamma_2(x, y, z, E)$ .

Agora, novamente pelo Corolário 4.4, temos que  $\eta^3 = \alpha_3(t)M + \beta_3(t)N + \gamma_3(x, y, z, t)$ .

Utilizando (4.34), obtemos

$$(\lambda\beta_3(t) + \beta_3'(t))N + (\alpha_3'(t) + 2c_6\lambda)M + \lambda\gamma_3(x, y, z, t) + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0.$$

Logo,

$$\alpha'_3(t) + 2c_6\lambda = 0 \Rightarrow \alpha'_3(t) = -2c_6\lambda \Rightarrow \alpha_3(t) = -2c_6\lambda t + c_{30}, c_{30} \in \mathbb{R}$$

e

$$\lambda\beta_3(t) + \beta'_3(t) = 0 \Rightarrow \beta_3(t) = c_{31}e^{-\lambda t}, c_{31} \in \mathbb{R}.$$

Além disso,  $\gamma_3$  satisfaz

$$\lambda\gamma_3(x, y, z, t) + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \quad (4.94)$$

Assim,  $\eta^3 = (-2c_6\lambda t + c_{30})M + c_{31}e^{-\lambda t}N + \gamma_3(x, y, z, t)$ .

Assim, substituindo as expressões de  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \eta^1, \eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_6S_{10} + c_7Y + c_8R_3 + c_{28}S_6 + c_{29}S_{13} + c_{30}S_2 + c_{31}S_{15} \\ &+ E_{\gamma_2} + M_{\gamma_3} + N_{\gamma_1}, \end{aligned}$$

em que

$$S_{15} = e^{-\lambda t}N \frac{\partial}{\partial M},$$

com  $M_{\gamma_3}$  dado em (4.44),  $N_{\gamma_1}$  dado em (4.69) e  $\gamma_3$  e  $\gamma_1$  satisfazem (4.94) e (4.93).

#### 4.3.4 Sem haptotaxia e sem degradação da ECM ( $\lambda\mu \neq 0$ e $\delta = \rho = 0$ )

Pelo Corolário 4.4, temos que  $\eta^1 = \alpha_1(t)M + \beta_1(t)N + \gamma_1(x, y, z, t)$ .

Utilizando (4.32), obtemos

$$(\alpha'_1(t) - \lambda\alpha_1(t))M + (\beta'_1(t) + \mu\alpha_1(t))N + \gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0. \quad (4.95)$$

Consequentemente, de (4.95), concluímos que

$$\alpha'_1(t) - \lambda\alpha_1(t) = 0 \Rightarrow \alpha_1(t) = c_{32}e^{\lambda t}, c_{32} \in \mathbb{R} \quad (4.96)$$

e

$$\beta'_1(t) + \mu\alpha_1(t) = 0 \Rightarrow \beta_1(t) = -c_{32}\frac{\mu}{\lambda}e^{\lambda t} + c_{33}, c_{33} \in \mathbb{R}. \quad (4.97)$$

Além do mais,  $\gamma_1$  satisfaz

$$\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0. \quad (4.98)$$

Portanto,  $\eta^1 = \left(-c_{32}\frac{\mu}{\lambda}e^{\lambda t} + c_{33}\right)N + c_{32}e^{\lambda t}M + \gamma_1(x, y, z, t)$ .

Também, pelo Corolário 4.4, temos que  $\eta^3 = \alpha_3(t)M + \beta_3(t)N + \gamma_3(x, y, z, t)$ .

Derivando (4.34) em relação à  $M$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mu\eta_M^1 - \eta_{Mt}^3 - 2c_6\lambda &= 0 \Rightarrow c_{32}\mu e^{\lambda t} - \alpha_3'(t) - 2c_6\lambda = 0 \\ \Rightarrow \alpha_3(t) &= c_{32}\frac{\mu}{\lambda}e^{\lambda t} - 2c_6\lambda t + c_{34}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

em que  $c_{34} \in \mathbb{R}$ .

Derivando (4.34) em relação à  $N$ , temos  $\lambda\eta_N^3 - \mu\eta_N^1 + \mu\eta_M^3 + \eta_{Nt}^3 - 2c_6\mu = 0$  e, utilizando o que já obtemos em relação à  $\eta^3$  e à  $\eta^1$ , concluímos que

$$\lambda\beta_3(t) + \beta_3'(t) = -2c_{32}\frac{\mu^2}{\lambda}e^{\lambda t} + (2c_6\lambda t + c_{33} + 2c_6 - c_{34})\mu \quad (4.100)$$

A solução de (4.100) é:

$$\beta_3(t) = 2c_6\mu t + \frac{(c_{33} - c_{34})\lambda\mu - c_{32}\mu^2 e^{\lambda t} + c_{35}\lambda^2 e^{-\lambda t}}{\lambda^2}, \quad c_{35} \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \eta^3 &= \left( c_{32}\frac{\mu}{\lambda}e^{\lambda t} - 2c_6\lambda t + c_{34} \right) M \\ &+ \left( 2c_6\mu t + \frac{(c_{33} - c_{34})\lambda\mu - c_{32}\mu^2 e^{\lambda t} + c_{35}\lambda^2 e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \right) N \\ &+ \gamma_3(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Utilizando (4.34), obtemos

$$\lambda\gamma_3(x, y, z, t) - \mu\gamma_1(x, y, z, t) + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \quad (4.101)$$

Das equações (4.2) e (4.27) temos  $\eta_M^2 = 0$ ,  $\eta_N^2 = 0$  e  $\eta_t^2 = 0$ , respectivamente. Devido a isto,  $\eta^2 = \gamma_2(x, y, z, E)$ .

Assim, substituindo as expressões de  $\zeta^1$ ,  $\zeta^2$ ,  $\zeta^3$ ,  $\zeta^4$ ,  $\eta^1$ ,  $\eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= c_1Z + c_2R_1 + c_3R_2 + c_4T + c_5X + c_6S_{16} + c_7Y + c_8R_3 + c_{32}S_{17} + c_{33}S_{18} + c_{34}S_{19} \\ &+ c_{35}S_{20} + E_{\gamma_2} + \Sigma_{\Gamma_2}, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} S_{16} &= 2t(\mu N - \lambda M)\frac{\partial}{\partial M} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}, \\ S_{17} &= \frac{\mu}{\lambda}e^{\lambda t} \left( \left( M - \frac{\mu}{\lambda}N \right) \frac{\partial}{\partial M} + \left( \frac{\lambda}{\mu}M - N \right) \frac{\partial}{\partial N} \right), \\ S_{18} &= \frac{\mu}{\lambda}N\frac{\partial}{\partial M} + N\frac{\partial}{\partial N}, \\ S_{19} &= \left( M - \frac{\mu}{\lambda}N \right) \frac{\partial}{\partial M}. \end{aligned} \quad (4.102)$$

com  $\Sigma_{\Gamma_2}$  dado em (4.59), e  $\gamma_3$  e  $\gamma_1$  satisfazem (4.101) e (4.98).

4.3.5 Sem haptotaxia, sem degradação da ECM e sem decaimento de MDEs ( $\mu \neq 0$  e  $\lambda = \delta = \rho = 0$ )

Segue, de (4.96) e (4.97), que

$$\beta_1'(t) = 0 \Rightarrow \beta_1(t) = c_{36}, c_{36} \in \mathbb{R},$$

e

$$\mu\beta_1(t) + \alpha_1'(t) = 0 \Rightarrow \alpha_1(t) = -c_{36}\mu t + c_{37}, c_{37} \in \mathbb{R}.$$

Além disso,  $\gamma_1$  satisfaz

$$\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0. \quad (4.103)$$

Portanto,  $\eta^1 = (-c_{36}\mu t + c_{37})N + c_{36}M + \gamma_1(x, y, z, t)$ .

De (4.99), temos

$$\alpha_3'(t) - c_{36}\mu = 0 \Rightarrow \alpha_3(t) = c_{36}\mu t + c_{38}, c_{38} \in \mathbb{R}.$$

Derivando (4.34) em relação à  $N$ , obtemos

$$\mu\eta_N^1 - \mu\eta_M^3 - \eta_{Nt}^3 = 0.$$

Consequentemente,

$$-\mu(-c_{36}\mu t + c_{37}) + \mu(c_{37}\mu t + c_{38}) + \beta_3'(t) = 0 \Rightarrow \beta_3(t) = -c_{36}\mu^2 t^2 - (c_{38} - c_{37})\mu t + c_{39},$$

em que  $c_{39} \in \mathbb{R}$ .

Logo,  $\eta^3 = (c_{36}\mu t + c_{38})M + (-c_{36}\mu^2 t^2 - (c_{38} - c_{37})\mu t + c_{39})N + \gamma_3(x, y, z, t)$ .

Utilizando (4.34), temos

$$-\mu\gamma_1(x, y, z, t) - 2c_6\mu N + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0. \quad (4.104)$$

Uma vez que  $\gamma_3$  e  $\gamma_1$  não são funções de  $N$ , concluímos de (4.104) que  $c_6 = 0$  e, além disso,

$$-\mu\gamma_1(x, y, z, t) + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0 \quad (4.105)$$

Também das equações (4.2) e (4.27), temos  $\eta_M^2 = 0$ ,  $\eta_N^2 = 0$  e  $\eta_t^2 = 0$ , respectivamente. Em vista disso,  $\eta^2 = \gamma_2(x, y, z, E)$ .

Assim, substituindo as expressões de  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \eta^1, \eta^2$  e  $\eta^3$  no operador (3.50), concluímos que

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= c_1 Z + c_2 R_1 + c_3 R_2 + c_4 T + c_5 X + c_7 Y + c_8 R_3 + c_{36} S_{20} + c_{37} S_{21} + c_{38} S_{22} \\ &+ c_{39} S_{23} + E_{\gamma_2} + \Sigma_{\Gamma_2}, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} S_{20} &= (\mu t M - \mu^2 t^2 N) \frac{\partial}{\partial M} + (M - \mu t N) \frac{\partial}{\partial N}, & S_{21} &= \mu t N \frac{\partial}{\partial M} + N \frac{\partial}{\partial N}, \\ S_{22} &= (M - \mu t N) \frac{\partial}{\partial M}, & S_{23} &= N \frac{\partial}{\partial M}, \end{aligned}$$

com  $\Sigma_{\Gamma_2}$  dado em (4.59), e  $\gamma_3$  e  $\gamma_1$  satisfazem (4.103) e (4.105).

Nas tabelas 1 e 2, resumizamos os resultados que obtivemos nesta seção.

Tabela 1: simetrias para  $D_1 \neq D_2$ . As funções  $\gamma_1, \gamma_2$  e  $\gamma_3$  dependem de  $(x, y, z, t)$  e são diferenciáveis.

Caso	$\lambda$	$\rho$	$\mu$	$\delta$	Geradores
1	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$X = \partial_x, Y = \partial_y, Z = \partial_z, T = \partial_t, R_1 = x\partial_z - z\partial_x,$ $R_2 = y\partial_z - z\partial_y, R_3 = x\partial_y - y\partial_x.$
2	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3,$ $S_1 = -2M\partial_M - 4N\partial_N + 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z.$
3	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	$X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, E_1 = \partial_E, S_2 = M\partial_M + N\partial_N,$ $M_{\gamma_3} = \gamma_3\partial_M, \lambda\gamma_3 + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3zz}) = 0.$
4	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	$X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, E_1, S_2, M_{\gamma_3},$ $S_3 = 2M\partial_M + 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,$ $\gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3zz}) = 0.$
5	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, S_4 = E \ln E \partial_E + M\partial_M + N\partial_N,$ $\Sigma_{\Gamma_1} = E\gamma_2\partial_E + \gamma_3\partial_M + \gamma_1\partial_N,$ $\lambda\gamma_3 - \mu\gamma_1 + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0,$ $\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0, \gamma_3 = -\frac{1}{\delta}\gamma_{2t}.$
6	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, S_4, \Sigma_{\Gamma_1},$ $S_5 = 4E \ln E \partial_E + 2M\partial_M + 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,$ $-\mu\gamma_1 + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0,$ $\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0, \gamma_3 = -\frac{1}{\delta}\gamma_{2t}.$
7	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, S_2, E_{\gamma_2} = \gamma_2\partial_E,$ $\Sigma_{\Gamma_2} = \gamma_3\partial_M + \gamma_1\partial_N,$

8	= 0	= 0	≠ 0	= 0	$\lambda\gamma_3 - \mu\gamma_1 + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0,$ $\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0.$ $X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, S_2, S_3, E_{\gamma_2}, \Sigma_{\Gamma_2},$ $-\mu\gamma_1 + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0,$ $\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0.$
9	≠ 0	≠ 0	= 0	≠ 0	$X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, S_6 = N\partial_N.$
10	= 0	≠ 0	= 0	≠ 0	$X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, S_6,$ $S_7 = -2M\partial_M + 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z.$
11	≠ 0	= 0	= 0	≠ 0	$X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, S_6, S_8 = E \ln E\partial_E + M\partial_M,$ $N_{\gamma_1} = \gamma_1\partial_N, \Sigma_{\Gamma_3} = E\gamma_2\partial_E + \gamma_3\partial_M,$ $\lambda\gamma_3 + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0,$ $\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0, \gamma_3 = -\frac{1}{\delta}\gamma_{2t}.$
12	= 0	= 0	= 0	≠ 0	$X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, S_6, S_8, N_{\gamma_1}, \Sigma_{\Gamma_3},$ $S_9 = 2E \ln E\partial_E + 2M\partial_M + 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,$ $\gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0,$ $\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0, \gamma_3 = -\frac{1}{\delta}\gamma_{2t}$
13	∀	≠ 0	= 0	= 0	$X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, S_6, E_1, M_{\gamma_3},$ $S_{10} = -\lambda t M\partial_M + 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,$ $S_{11} = e^{\frac{\rho E}{D_1}}\partial_N, S_{12} = M\partial_M,$ $\lambda\gamma_3 + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0.$
14	∀	= 0	= 0	= 0	$X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, S_6, S_{10}, S_{12}, E_{\gamma_2}, M_{\gamma_3}, N_{\gamma_1},$ $\lambda\gamma_3 + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0,$ $\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0.$

Tabela 2: simetrias para  $D_1 = D_2$ . As funções  $\gamma_1, \gamma_2$  e  $\gamma_3$  dependem de  $(x, y, z, t)$  e são diferenciáveis.

Caso	$\lambda$	$\rho$	$\mu$	$\delta$	Geradores
15	≠ 0	= 0	= 0	≠ 0	$X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, S_6, S_8, N_{\gamma_1}, \Sigma_{\Gamma_3}, S_{13} = e^{\lambda t} M\partial_N,$ $\lambda\gamma_3 + \gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0,$ $\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0, \gamma_3 = -\frac{1}{\delta}\gamma_{2t}.$
16	= 0	= 0	= 0	≠ 0	$X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, S_6, S_8, S_9, N_{\gamma_1}, \Sigma_{\Gamma_3}, S_{14} = M\partial_N,$ $\gamma_{3t} - D_2(\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0,$

17	$\forall$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\gamma_{1t} - D_1 (\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0, \gamma_3 = -\frac{1}{\delta} \gamma_{2t}.$ $X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, S_2, S_6, S_{10}, S_{13},$ $E_{\gamma_2}, M_{\gamma_3}, N_{\gamma_1}, S_{15} = e^{-\lambda t} N \partial_M,$ $\lambda \gamma_3 + \gamma_{3t} - D_2 (\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0,$
18	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\gamma_{1t} - D_1 (\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0.$ $X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, S_{15}, E_{\gamma_2}, \Sigma_{\Gamma_2},$ $S_{16} = 2t (\mu N - \lambda M) \partial_M + 2t \partial_t + x \partial_x + y \partial_y + z \partial_z,$ $S_{17} = \frac{\mu}{\lambda} e^{\lambda t} \left( \left( M - \frac{\mu}{\lambda} N \right) \partial_M + (\lambda M - \mu N) \partial_N \right),$ $S_{18} = \frac{\mu}{\lambda} N \partial_M + N \partial_N, S_{19} = \left( M - \frac{\mu N}{\lambda} \right) \partial_M,$ $\lambda \gamma_3 - \mu \gamma_1 + \gamma_{3t} - D_2 (\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0,$
19	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\gamma_{1t} - D_1 (\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0.$ $X, Y, Z, T, R_1, R_2, R_3, E_{\gamma_2}, \Sigma_{\Gamma_2},$ $S_{20} = (\mu t M - \mu^2 t^2 N) \partial_M + (M - \mu t N) \partial_N,$ $S_{21} = \mu t N \partial_M + N \partial_N, S_{22} = (M - \mu t N) \partial_M, S_{23} = N \partial_M,$ $-\mu \gamma_1 + \gamma_{3t} - D_2 (\gamma_{3zz} + \gamma_{3yy} + \gamma_{3xx}) = 0,$ $\gamma_{1t} - D_1 (\gamma_{1zz} + \gamma_{1yy} + \gamma_{1xx}) = 0.$

Note que os operadores obtidos em 4.2.1, para  $D_1 D_2 \neq 0$  e quaisquer valores de  $\rho, \delta, \mu$  e  $\lambda$ , formam um subgrupo de simetrias de qualquer outro caso.



# 5

## CONSTRUÇÃO DE SOLUÇÕES INVARIANTES

Neste capítulo, como principal resultado, apresentamos soluções particulares do sistema (3.49).

### 5.1 SISTEMA EM COORDENADAS ESFÉRICAS

No capítulo 4, obtivemos que o sistema (3.49) admite os geradores  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  dados em (4.19). Além disso, no Exemplo 3.11, assumimos que o sistema (3.49) fosse simultaneamente invariante sob esses operadores e, utilizando o Teorema 3.7, construímos as seguintes soluções invariantes:

$$N = \Phi_1(r, t), \quad E = \Phi_2(r, t) \text{ e } M = \Phi_3(r, t), \quad (5.1)$$

em que  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Agora, substituindo (5.1) em (3.49) e utilizando coordenadas esféricas, podemos reescrever o sistema (3.49) da seguinte forma:

$$\begin{cases} N_t = D_1 \left( N_{rr} + \frac{2}{r} N_r \right) - \rho \left( N_r E_r + N E_{rr} + \frac{2}{r} N E_r \right), \\ E_t = -\delta M E, \\ M_t = D_2 \left( M_{rr} + \frac{2}{r} M_r \right) + \mu N - \lambda M. \end{cases} \quad (5.2)$$

Na próxima seção, classificamos os grupos locais de simetias de Lie do sistema (5.2).

## 5.2 SIMETRIAS DO SISTEMA (5.2)

Por um processo similar ao desenvolvido no Capítulo 4, podemos calcular as simetrias do sistema (5.2). Devido a isso, a fim de evitar repetições, apresentamos na Tabela 3 e na Tabela 4 as simetrias do sistema (5.2), com seus respectivos casos e restrições.

Tabela 3: simetrias para  $D_1 \neq D_2$ . As funções  $\gamma_1, \gamma_2$  e  $\gamma_3$  dependem de  $(r, t)$  e são diferenciáveis.

Caso	$\lambda$	$\rho$	$\mu$	$\delta$	Geradores
1	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$T = \partial_t$ .
2	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$T, X_1 = \frac{r}{2}\partial_r + t\partial_t - M\partial_M - 2N\partial_N$ .
3	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	$T, E = \partial_E, X_2 = M\partial_M + N\partial_N, M_{\gamma_3} = \gamma_3\partial_M,$ $\lambda r\gamma_3 + r\gamma_{3t} - D_2(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0.$
4	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	$T, E, X_2, M_{\gamma_3}, X_3 = \frac{r}{2}\partial_r + t\partial_t + M\partial_M,$ $r\gamma_{3t} - D_2(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0.$
5	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$T, X_4 = \partial_r - \frac{E \ln E}{r}\partial_E - \frac{M}{r}\partial_M - \frac{N}{r}\partial_N,$ $X_5 = E \ln E \partial_E + M\partial_M + N\partial_N,$ $\Sigma_{\Gamma_1} = E\gamma_2\partial_E + \gamma_3\partial_M + \gamma_1\partial_N,$ $\lambda r\gamma_3 - \mu r\gamma_1 + r\gamma_{3t} - D_2(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0,$ $r\gamma_{1t} - D_1(\gamma_{1r} + r\gamma_{1rr}) = 0, \gamma_3 = -\frac{1}{\delta}\gamma_{2t}.$
6	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$T, X_4, X_5, \Sigma_{\Gamma_1}, X_6 = \frac{r}{2}\partial_r + t\partial_t + 2E \ln E \partial_E + M\partial_M$ $-\mu r\gamma_1 + r\gamma_{3t} - D_2(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0,$ $r\gamma_{1t} - D_1(2\gamma_{1r} + r\gamma_{1rr}) = 0, \gamma_3 = -\frac{1}{\delta}\gamma_{2t}.$
7	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$T, X_2, X_7 = \partial_r - \frac{M}{r}\partial_M - \frac{N}{r}\partial_N, E_{\gamma_2} = \gamma_2\partial_E,$ $\Sigma_{\Gamma_2} = \gamma_3\partial_M + \gamma_1\partial_N,$ $\lambda r\gamma_3 - \mu r\gamma_1 + r\gamma_{3t} - D_2(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0,$ $r\gamma_{1t} - D_1(2\gamma_{1r} + r\gamma_{1rr}) = 0.$
8	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$T, X_2, X_7, E_{\gamma_2}, \Sigma_{\Gamma_2}, X_8 = \frac{r}{2}\partial_r + t\partial_t - N\partial_N,$ $-\mu r\gamma_1 + r\gamma_{3t} - D_2(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0,$ $r\gamma_{1t} - D_1(2\gamma_{1r} + r\gamma_{1rr}) = 0.$
9	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$T, X_9 = N\partial_N.$
10	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$T, X_9, X_{10} = \frac{r}{2}\partial_r + t\partial_t - M\partial_M$
11	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$T, X_4, X_9, X_{11} = \ln E \partial_E + M\partial_M, N_{\gamma_1} = \gamma_1\partial_N,$

12	= 0	= 0	= 0	≠ 0	$\Sigma_{\Gamma_3} = E\gamma_2\partial_E + \gamma_3\partial_M,$ $\lambda r\gamma_3 + r\gamma_{3t} - D_2(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0,$ $r\gamma_{1t} - D_1(2\gamma_{1r} + r\gamma_{1rr}) = 0, \gamma_3 = -\frac{1}{\delta}\gamma_{2t}.$ $T, X_4, X_9, X_{11}, X_{12} = \frac{r}{2}\partial_r + t\partial_t + E \ln E\partial_E, N_{\gamma_3}, \Sigma_{\Gamma_3},$ $r\gamma_{3t} - D_2(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0,$ $r\gamma_{1t} - D_1(2\gamma_{1r} + r\gamma_{1rr}) = 0, \gamma_3 = -\frac{1}{\delta}\gamma_{2t}.$
13	∇	≠ 0	= 0	= 0	$T, X_9, M_{\gamma_3}, X_{13} = \partial_r - \frac{2D_1}{r\rho}\partial_E - \frac{M}{r}\partial_M - \frac{2N}{r}\partial_N,$ $X_{14} = \frac{r}{2}\partial_r + t\partial_t - \lambda t M\partial_M, X_{15} = \partial_E + \frac{\rho N}{2D_1}\partial_N,$ $X_{16} = M\partial_M, X_{17} = e^{\frac{\rho E}{D_1}}\partial_N,$ $\lambda r\gamma_3 - \mu r\gamma_1 + r\gamma_{3t} - D_2(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0.$
14	∇	= 0	= 0	= 0	$T, X_7, X_9, X_{14}, X_{16}, E_{\gamma_2}, M_{\gamma_3}, N_{\gamma_1},$ $\lambda r\gamma_3 + r\gamma_{3t} - D_2(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0,$ $r\gamma_{1t} - D_1(2\gamma_{1r} + r\gamma_{1rr}) = 0.$

Tabela 4: simetrias para  $D_1 = D_2$ . As funções  $\gamma_1, \gamma_2$  e  $\gamma_3$  dependem de  $(r, t)$  e são diferenciáveis.

Caso	$\lambda$	$\rho$	$\mu$	$\delta$	Geradores
15	≠ 0	= 0	= 0	≠ 0	$T, X_4, X_9, X_{11}, X_{18} = e^{\lambda t}M\partial_N, N_{\gamma_1}, \Sigma_{\Gamma_3},$ $\lambda r\gamma_3 + r\gamma_{3t} - D_1(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0,$ $r\gamma_{1t} - D_1(2\gamma_{1r} + r\gamma_{1rr}) = 0, \gamma_3 = -\frac{1}{\delta}\gamma_{2t}.$
16	= 0	= 0	= 0	≠ 0	$T, X_4, X_9, X_{11}, X_{12}, X_{19} = M\partial_N, N_{\gamma_1}, \Sigma_{\Gamma_3},$ $r\gamma_{3t} - D_1(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0,$ $r\gamma_{1t} - D_1(2\gamma_{1r} + r\gamma_{1rr}) = 0, \gamma_3 = -\frac{1}{\delta}\gamma_{2t}.$
17	∇	= 0	= 0	= 0	$T, X_7, X_9, X_{14}, X_{16}, X_{18}, X_{20} = e^{-\lambda t}M\partial_M, E_{\gamma_2}, M_{\gamma_3}, N_{\gamma_1},$ $\lambda r\gamma_3 + r\gamma_{3t} - D_1(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0,$ $r\gamma_{1t} - D_1(2\gamma_{1r} + r\gamma_{1rr}) = 0.$
18	≠ 0	= 0	≠ 0	= 0	$T, X_7, X_{20}, X_{21} = \frac{r}{2}\partial_r + t\partial_t + t(\mu N - \lambda M)\partial_M,$ $X_{22} = \frac{\mu}{\lambda}e^{\lambda t}\left(\left(M - \frac{\mu}{\lambda}N\right)\partial_M + (\lambda M - \mu N)\partial_N\right),$ $X_{23} = \frac{\mu}{\lambda}N\partial_M + N\partial_N, X_{24} = \left(M - \frac{\mu N}{\lambda}\right)\partial_M, E_{\gamma_2}, \Sigma_{\Gamma_2},$ $\lambda r\gamma_3 - \mu r\gamma_1 + r\gamma_{3t} - D_1(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0,$

19	= 0	= 0	≠ 0	= 0	$r\gamma_{1t} - D_1(2\gamma_{1r} + r\gamma_{1rr}) = 0,$ $T, X_7, X_{25} = \frac{r}{2}\partial_r + t\partial_t + \mu t N\partial_M,$ $X_{26} = (\mu t M - \mu^2 t^2 N)\partial_M + (M - \mu t N)\partial_N, X_{27} = N\partial_M,$ $X_{28} = (M - \mu t N)\partial_M, X_{29} = \mu t N\partial_M + N\partial_N, E_{\gamma_2}, \Sigma_{\Gamma_2},$ $-\mu r\gamma_1 + r\gamma_{3t} - D_1(2\gamma_{3r} + r\gamma_{3rr}) = 0,$ $r\gamma_{1t} - D_1(2\gamma_{1r} + r\gamma_{1rr}) = 0.$
----	-----	-----	-----	-----	---

### 5.3 SOLUÇÕES PARTICULARES DO SISTEMA (5.2)

Nesta seção, apresentamos soluções de subsistemas do sistema (5.2), nomeadamente, para o caso em que  $\rho = \lambda = 0$  e para o caso  $\lambda = 0$ .

#### 5.3.1 Sem haptotaxia e sem decaimento de MDEs ( $\rho = \lambda = 0$ )

Determinamos que o subsistema do sistema (5.2), a este caso associado, admite o gerador  $X_6$ , veja Tabela 3. Assim, utilizando o Teorema 3.7, construímos as seguintes soluções invariantes:

$$N = \Phi_1(w), \quad E = e^{r^4\Phi_2(w)} \quad \text{e} \quad M = r^2\Phi_3(w), \quad (5.3)$$

em que  $w = \frac{r}{\sqrt{t}}$ .

Logo, substituindo (5.3) em (5.2) com  $\rho = \lambda = 0$ , obtemos o seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}w^2\Phi_1' = D_1(2\Phi_1' + w\Phi_1''), \\ \frac{1}{2}w^3\Phi_2' = \delta\Phi_3, \\ -\frac{1}{2}w^3\Phi_3' = D_2\left(6\Phi_3 + 6w\Phi_3' + w^2\Phi_3''\right) + \mu\Phi_1. \end{cases} \quad (5.4)$$

Três soluções do sistema (5.4) são:

1. Para quaisquer valores de  $D_1$  e  $D_2$ :

$$\Phi_1 = \frac{D_2}{\delta\mu}, \quad \Phi_2 = -\left(\frac{1}{3w^2} + \frac{3D_2}{2w^4}\right) \quad \text{e} \quad \Phi_3 = \frac{1}{\delta}\left(\frac{3D_2}{w^2} + \frac{1}{3}\right). \quad (5.5)$$

2. Para  $D_1 = D_2$ :

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \frac{e^{-\frac{w^2}{4D_2}}}{w} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{D_2}} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{w}{2\sqrt{D_2}} \right) - 1 \right), \\
 \Phi_2 &= \frac{\delta\mu}{240D_2^{\frac{5}{2}}w^5} \left( 2\sqrt{D_2}e^{-\frac{w^2}{4D_2}} (w^2 - 8D_2) (w^2 + 6D_2) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\pi}w \left( (w^2 - 60D_2^2) \operatorname{erf} \left( \frac{w}{2\sqrt{D_2}} \right) - 20D_2w^2 \right) \right), \\
 \Phi_3 &= \frac{\mu}{12w^3} \left( 12e^{-\frac{w^2}{4D_2}} + \frac{\sqrt{\pi}w}{D_2^{\frac{3}{2}}} \left( w^2 + 6D_2 \operatorname{erf} \left( \frac{w}{2\sqrt{D_2}} \right) \right) \right).
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

3. Para  $D_1 < D_2$ :

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \frac{1}{8\mu} \left( \frac{2e^{-\frac{w^2}{4D_1}}}{w} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{D_1}} \operatorname{erf} \left( \frac{w}{2\sqrt{D_1}} \right) \right), \\
 \Phi_2 &= \frac{\delta}{1920D_1^{\frac{3}{2}}w^5(D_1 - D_2)} \left( -\sqrt{\pi}w (60D_1^2 + 20D_1w^2 + w^4) \operatorname{erf} \left( \frac{w}{2\sqrt{D_1}} \right) \right. \\
 &\quad + \frac{\sqrt{D_1}}{D_2^{\frac{3}{2}}} \left( 2\sqrt{D_2} \left( -D_2e^{-\frac{w^2}{4D_1}} (2D_1 + w^2) (16D_1 + w^2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + D_1e^{-\frac{w^2}{4D_2}} (2D_2 + w^2) (16D_2 + w^2) - 2\sqrt{\pi}D_2w^4 \sqrt{\frac{w^2}{D_1}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\pi}D_1w (60D_2^2 + 20D_2w^2 + w^4) \operatorname{erf} \left( \frac{w}{2\sqrt{D_2}} \right) \right), \\
 \Phi_3 &= \frac{1}{96w^3(D_2 - D_1)} \left( e^{-\frac{w^2(D_1+D_2)}{4D_1D_2}} \left( 2(4D_2 + w^2) e^{\frac{w^2}{4D_1}} - 2(4D_1 + w^2) e^{\frac{w^2}{4D_2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\pi}w \left( \frac{(6D_2 + w^2) \operatorname{erf} \left( \frac{w}{2\sqrt{D_2}} \right)}{\sqrt{D_2}} - \frac{(6D_1 + w^2) \operatorname{erf} \left( \frac{w}{2\sqrt{D_1}} \right)}{\sqrt{D_1}} \right) \right),
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

em que

$$\operatorname{erf}(u) := \int_0^u e^{-s^2} ds.$$

Ainda, para o mesmo caso, consideramos a combinação linear dos geradores  $X_5$  e  $X_6$  dada por  $2X_6 - 2X_5 = r\partial_r + 2t\partial_t + 2E \ln E\partial_E - 2N\partial_N$ . Então, utilizando o Teorema 3.7, construímos as seguintes soluções invariantes:

$$N = \frac{1}{r^2}\Phi_1(w), \quad E = e^{r^2\Phi_2(w)} \quad \text{e} \quad M = \Phi_3(w), \tag{5.8}$$

em que  $w = \frac{r}{\sqrt{t}}$ .

Assim, ao substituir (5.8) em (5.2) com  $\rho = \lambda = 0$ , obtivemos o seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}w^3\Phi_1' = D_1(2\Phi_1 - 2w\Phi_1' + w^2\Phi_1''), \\ \frac{1}{2}w^3\Phi_2' = \delta\Phi_3, \\ -\frac{1}{2}w^3\Phi_3' = D_2(2w\Phi_3' + w^2\Phi_3'') + \mu\Phi_1. \end{cases} \quad (5.9)$$

Duas soluções do sistema (5.9) são:

1. Para  $D_1 = D_2$ :

$$\begin{aligned} \Phi_1(w) &= we^{-\frac{w^2}{4D_1}}, \\ \Phi_2(w) &= \frac{\delta\mu}{3D_1} \left( \frac{e^{-\frac{w^2}{4D_1}}(w^2 - 2D_1)}{w^3} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{D_1}} \operatorname{erf}\left(\frac{w}{2\sqrt{D_1}}\right) \right), \\ \Phi_3(w) &= \frac{\mu e^{-\frac{w^2}{4D_1}}}{w}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

2. Para  $D_1 < D_2$ :

$$\begin{aligned} \Phi_1(w) &= we^{-\frac{w^2}{4D_1}}, \\ \Phi_2(w) &= \frac{\delta\mu e^{-\frac{w^2(D_1+D_2)}{4D_1D_2}}}{6\sqrt{D_1}D_2w^3(D_1 - D_2)} \left( \sqrt{\pi}we^{\frac{w^2(D_1+D_2)}{4D_1D_2}} \left( D_1(6D_2 + w^2) \operatorname{erf}\left(\frac{w}{2\sqrt{D_2}}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - D_2(6D_1 + w^2) \operatorname{erf}\left(\frac{w}{2\sqrt{D_1}}\right) \right) - 2\sqrt{D_1}D_2(4D_1 + w^2)e^{\frac{w^2}{4D_2}} \right. \\ &\quad \left. + 2D_1\sqrt{D_2}e^{\frac{w^2}{4D_1}}(4D_2 + w^2) \right), \\ \Phi_3(w) &= \frac{\sqrt{D_1}\mu}{w(D_2 - D_1)} \left( \sqrt{\pi}w \left( \operatorname{erf}\left(\frac{w}{2\sqrt{D_2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{w}{2\sqrt{D_1}}\right) \right) - 2\sqrt{D_1}e^{-\frac{w^2}{4D_1}} \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{D_2}e^{-\frac{w^2}{4D_2}} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.3.2 Sem decaimento de MDEs ( $\lambda = 0$ )

O sistema (5.2), com  $\lambda = 0$ , admite o gerador  $X_1$ , veja Tabela 3. Novamente, utilizando o Teorema 3.7, construímos as seguintes soluções invariantes:

$$N = \frac{1}{r^4} \Phi_1(w), E = \Phi_2(w) \text{ e } M = \frac{1}{r^2} \Phi_3(w), \quad (5.12)$$

em que  $w = \frac{r}{\sqrt{t}}$ .

Logo, ao substituir (5.12) em (5.2) com  $\lambda = 0$ , obtemos o seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}w^3\Phi_1' = D_1(12\Phi_1 - 6w\Phi_1' + w^2\Phi_1'') - \rho(w^2\Phi_1'\Phi_2' + w^2\Phi_1\Phi_2'' - 2w\Phi_1\Phi_2'), \\ \frac{1}{2}w^3\Phi_2' = \delta\Phi_3\Phi_2, \\ -\frac{1}{2}w^3\Phi_3' = D_2(2\Phi_3 - 2w\Phi_3' + w^2\Phi_3'') + \mu\Phi_1. \end{cases} \quad (5.13)$$

Dois soluções do sistema (5.13) são:

1. Para  $D_1 = D_2$ :

$$\begin{aligned} \Phi_1(w) &= w^3 e^{-\frac{w^2}{4D_1}} (w^2 - 2D_1), \\ \Phi_2(w) &= 0, \\ \Phi_3(w) &= \mu w^3 e^{-\frac{w^2}{4D_1}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

2. Para  $D_1 < D_2$ :

$$\begin{aligned} \Phi_1(w) &= w^3 e^{-\frac{w^2}{4D_1}} (2D_1 - w^2), \\ \Phi_2(w) &= 0, \\ \Phi_3(w) &= w \left( e^{-\frac{w^2}{4D_2}} + \frac{4D_1^2 \mu}{D_2 - D_1} e^{-\frac{w^2}{4D_1}} \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Ao retornar as variáveis originais, obtemos as soluções particulares do sistema (5.2) e, conseqüentemente, do sistema (2.1), como desejávamos.

No próximo capítulo, discutiremos as soluções obtidas neste capítulo.



# 6

## DISCUSSÕES

Inicialmente, consideramos o modelo matemático contínuo (2.1), proposto em [3], que descreve a invasão do tecido por células tumorais. A abordagem deste modelo em [3] é numérica e, até onde sabemos, nenhum trabalho anterior apresentou soluções analíticas para ele. Esse fato nos motivou a encontrar soluções analíticas para (2.1). Para atingir este objetivo, estudamos este sistema sob a perspectiva da teoria de simetrias de Lie. Aplicamos o Teorema 3.6 ao sistema (2.1) para obtermos as equações determinantes e realizarmos uma classificação completa, e inédita, dos grupos locais de simetrias de pontos de Lie admitidos pelo sistema, que são os 19 casos que apresentamos nas seções 4.2 e 4.3.

Após classificar os grupos locais de simetrias do sistema (2.1), com três variáveis espaciais e uma temporal, passamos a analisar a possibilidade de construir soluções invariantes para o sistema. Para este fim, consideramos os geradores  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , dados em (4.19), e aplicamos o Teorema 3.7 para construirmos os invariantes (5.1), que impusemos serem soluções do sistema (2.1). Este processo nos possibilitou transformar, com o uso de coordenadas esféricas, o sistema (2.1) no sistema (5.2), que é um novo sistema de EDPs com uma variável espacial e outra temporal. Entretanto, ainda, não conseguimos encontrar soluções analíticas do sistema (5.2). Por esta razão, realizamos uma nova classificação dos grupos locais de simetrias de pontos de Lie do sistema (5.2), que apresentamos nas tabelas 3 e 4. Posteriormente, aplicamos o Teorema 3.7 aos geradores  $X_1$ ,  $X_6$  e  $2X_6 - 2X_5$ , com  $X_1$ ,  $X_5$  e  $X_6$  dados na Tabela 3, para construir soluções invariantes para o sistema (5.2). Como resultado, obtivemos sete soluções analíticas para o sistema (5.2).

Na seção 5.3, apresentamos as soluções analíticas do sistema (5.2). Cinco deles são para o caso  $\rho = \lambda = 0$ , que biologicamente representam a ausência de fluxo haptotático e decaimento natural de MDEs. As demais são para  $\lambda = 0$ , caso em que não há decaimento natural de MDEs. Também, essas soluções dependem dos valores dos parâmetros de

difusão  $D_1$  e  $D_2$ , que dividem as soluções em três casos, para valores arbitrários de  $D_1$  e  $D_2$ ,  $D_1 = D_2$ , e  $D_2 > D_1$ .

Primeiramente, consideremos a seguinte solução para o sistema (5.2), para  $\rho = \lambda = 0$  e  $D_1 = D_2$ , que obtemos quando substituímos (5.10) em (5.8)

$$\begin{aligned}
 N(r, t) &= \frac{e^{-\frac{r^2}{4D_1t}}}{r\sqrt{t}}, \\
 E(r, t) &= e^{\frac{\delta\mu r^2}{3D_1} \left( \frac{\sqrt{\pi}\operatorname{erf}\left(\frac{r}{2\sqrt{D_1}\sqrt{t}}\right)}{2\sqrt{D_1}} + \frac{\sqrt{t}e^{-\frac{r^2}{4D_1t}}(r^2 - 2D_1t)}{r^3} \right)}, \\
 M(r, t) &= \frac{\mu\sqrt{t}e^{-\frac{r^2}{4D_1t}}}{r}.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

A solução (6.1) descreve a invasão das células tumorais e MDEs por simples difusão, bem como a degradação da ECM pelas MDEs. Uma vez que  $\rho = \lambda = 0$ , o fluxo haptotático não é considerado e as MDEs não sofrem nenhuma forma de decaimento.

As próximas três figuras mostram o comportamento da solução (6.1) para valores específicos dos parâmetros. A Figura 6.1 mostra a difusão das MDEs, enquanto a Figura 6.2 mostra a degradação da ECM pelas MDEs à medida que o tempo evolui. Podemos observar na Figura 6.1 que as MDEs se propagam por difusão  $D_2$  e pela produção do tumor  $\mu$ . Portanto, sua densidade aumenta com o tempo em todo o espaço.

A degradação da ECM pelas MDEs permite a invasão do tecido pelas células tumorais por difusão, como é mostrado na Figura 6.3. No entanto, as células tumorais se propagam somente por difusão  $D_1$ , pois o crescimento tumoral não é considerado no modelo. Por isso, ao longo do tempo, a densidade do tumor é menor perto da origem e maior na frente de invasão.

Um ponto a ser destacado é que a velocidade de propagação de células tumorais e MDEs decresce com o tempo. Assim, entender a dinâmica do tumor e a velocidade de propagação da frente de onda são ingredientes essenciais para desenvolver possíveis estratégias para controlar o desenvolvimento da anomalia.

A solução para o sistema (5.2), para  $\rho = \lambda = 0$  e quaisquer valores de  $D_1$  e  $D_2$ , obtidas quando substituímos (5.5) em (5.3), representa o caso em que a densidade das células tumorais é constante e, portanto, não há crescimento tumoral.

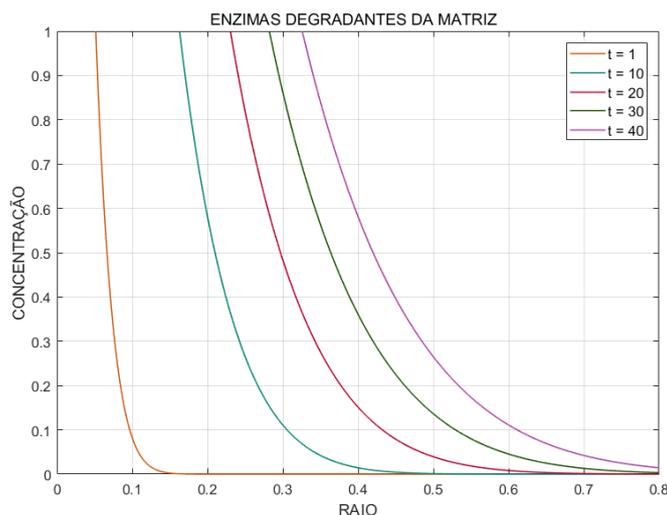


Figura 6.1: Gráfico mostra a difusão de MDEs para os seguintes valores dos parâmetros:  $D_1 = D_2 = 0.001$ ,  $\delta = 10$ ,  $\mu = 0.1$  e  $\rho = \lambda = 0$ , em  $t = 1, 10, 20, 30$  e  $40$ .

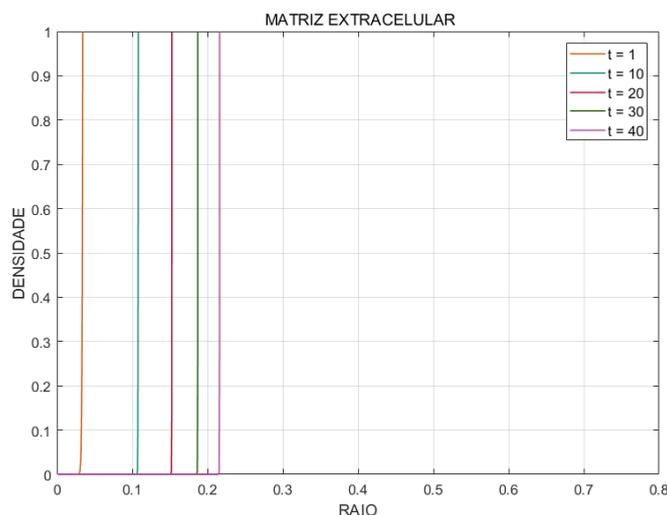


Figura 6.2: O gráfico mostra a degradação da ECM para os seguintes valores dos parâmetros:  $D_1 = D_2 = 0.001$ ,  $\delta = 10$ ,  $\mu = 0.1$  e  $\rho = \lambda = 0$ , em  $t = 1, 10, 20, 30$  e  $40$ .

Para o caso  $\lambda = 0$ , obtivemos duas soluções para o sistema (5.2). Um deles, para  $D_1 = D_2$ , obtemos substituindo (5.14) em (5.12). A outro, para  $D_2 > D_1$ , obtemos substituindo (5.15) em (5.12). Essas soluções descrevem o estágio final do câncer; as MDEs degradaram totalmente a ECM.

As três últimas soluções são para o caso  $\rho = \lambda = 0$ . Para  $D_1 < D_2$ , obtemos as duas soluções substituindo (5.11) em (5.8) e (5.7) em (5.3). A outra, para  $D_1 = D_2$ , obtemos substituindo (5.6) em (5.3). Essas soluções são matematicamente interessantes, mas uma análise cuidadosa delas mostra que podem se tornar negativas, o que é biologicamente

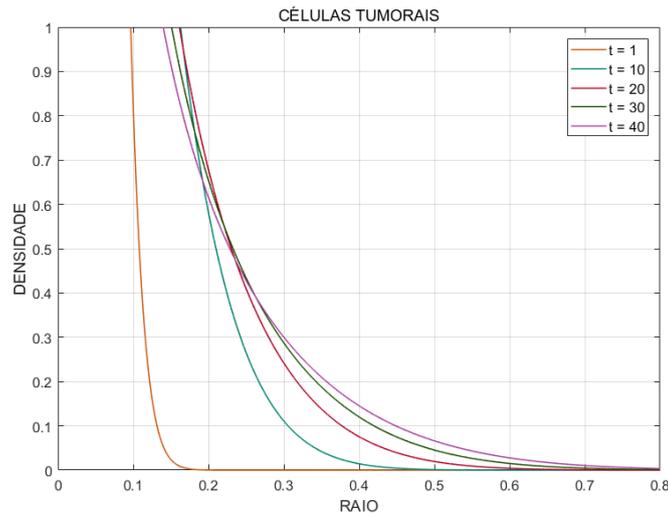


Figura 6.3: O gráfico mostra a invasão de células tumorais para os seguintes valores dos parâmetros:  $D_1 = D_2 = 0.001$ ,  $\delta = 10$ ,  $\mu = 0.1$  e  $\rho = \lambda = 0$ , em  $t = 1, 10, 20, 30$  e  $40$ .

inaceitável. Porém, se impormos restrições aos seus domínios, poderemos obter uma solução biologicamente consistente que descreva a evolução do tumor. Sua validade, entretanto, é limitada apenas a subconjuntos próprios de  $[0, \infty) \times [0, \infty)$ . Isso sugere que podemos ter uma solução que descreva o fenômeno, mas com restrições.

Observamos que a solução (6.1) do sistema (5.2) descreve a evolução do câncer ao longo do tempo. As outras soluções do sistema (5.2), entretanto, descrevem casos extremos ou apenas parcialmente o fenômeno. Por esse motivo, representamos graficamente aqui apenas a solução (6.1).

É interessante notar que realizamos uma classificação matemática dos grupos locais de simetrias Lie do sistema (5.2). Entretanto, para construirmos as soluções invariantes, consideramos apenas os casos biologicamente viáveis. Todavia, não foi possível obter uma solução que englobasse a haptotaxia, que é um movimento celular direcionado em resposta a gradientes de moléculas adesivas na MEC. Esse movimento é conhecido e demonstrado *in vitro*, mas ainda incerto *in vivo* [3, página 132]. Como o valor do coeficiente de haptotaxia ( $\rho$ ) não é determinado experimentalmente, em [9], consideramos o caso em que  $0 \leq \rho \ll 1$ , aplicamos a teoria de perturbações e obtivemos uma solução aproximada que contempla este caso. Para mais detalhes e discussões dessas soluções, veja [9, Seções 5 e 6].

# 7

## CONCLUSÃO

Neste trabalho, aplicamos a teoria de simetrias de Lie ao modelo (2.1), proposto em [3], que descreve a dinâmica de interações entre a densidade de células tumorais, a densidade da ECM e a concentração de MDEs.

Classificamos, no Capítulo 4, os grupos locais de simetrias de Lie do sistema (2.1). A partir dos geradores encontrados, construímos invariantes e soluções invariantes que possibilitaram reescrever o sistema (2.1), em coordenadas esféricas, de modo a obter o sistema (5.2). Realizamos uma nova classificação de grupos de simetrias de Lie do sistema (5.2), que sumarizamos na Tabela 3 e na Tabela 4.

Usamos as simetrias e obtivemos sete soluções particulares do sistema (2.1), que, conforme apontamos nas discussões dos nossos resultados, a maioria delas é biologicamente consistente com a fenomenologia do câncer. Quatro dessas são para o caso  $\lambda = \rho = 0$ , que construímos a partir do gerador  $X_6$  e da combinação linear  $2X_5 - 2X_6$ . As outras duas são para o caso  $\lambda = 0$ , que construímos a partir do gerador  $X_1$ , veja Tabela 3. Pelo que sabemos, as soluções que encontramos são as únicas soluções analíticas conhecidas para o sistema (2.1) até o momento.

A aplicação da técnica de simetrias de Lie possibilitou a obtenção de soluções particulares do sistema (2.1). Portanto, a técnica pode ser uma alternativa para encontrarmos soluções analíticas de modelos matemáticos para a invasão tumoral.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] AL-MANSOUR, Z.; PANG, L.; BATHINI, V.; *Novel Cancer Therapeutics in Geriatrics: What is Unique to the Aging Patient?*, *Drugs & aging*, v. 36, p. 1–11, 2019.
- [2] ALTROCK, P. M.; LIU, L. L.; MICHOR, F.; *The mathematics of cancer: integrating quantitative models*, *Nature Reviews Cancer*, v.15, p.730–745, 2015.
- [3] ANDERSON, A. R. A. et al; *Mathematical modelling of tumour invasion and metastasis*, *Journal of Theoretical Medicine*, v. 2, p. 129–154, 2000.
- [4] ANDERSON, A. R. A.; *A hybrid mathematical model of solid tumour invasion: the importance of cell adhesion*, *Mathematical Medicine and Biology*, v. 22, p. 163–186, 2005.
- [5] ANDERSON, A. R. A.; QUARANTA, V.; *Integrative mathematical oncology*, *Nature Reviews Cancer*, v. 8, p. 227–234, 2008.
- [6] BACANI, F.; *Tratamento de modelos para a dinâmica populacional do Aedes aegypti via simetrias de Lie*. 2016. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Campinas, SP.
- [7] BLUMAN, G. W.; CHEVIAKOV, A. F.; ANCO, S. C.; *Applications of symmetry methods to partial differential equations*, Springer, New York, 2010.
- [8] BORTULI JUNIOR, A.; FREIRE, I. L. ; MAIDANA, N. A.; *Tumores Sólidos Localizados: Uma Abordagem Via Simetrias de Lie*, In: CNMAC 2018 XXXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Campinas, 2018.
- [9] BORTULI JUNIOR, A.; FREIRE, I. L.; MAIDANA, N. A.; *Soluções de Modelos Matemáticos de Tumores Sólidos Via Simetrias de Lie*, In: CNMAC 2019 XXXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Uberlândia, 2019.
- [10] BORTULI JUNIOR, A.; FREIRE, I. L.; MAIDANA, N. A.; *Group classification and analytical solutions of a radially symmetric avascular cancer model*, *Studies in Applied Mathematics*, 2021.

- [11] BRAVO-CORDERO, J. J.; HODGSON, L.; CONDEELIS, J.; *Directed cell invasion and migration during metastasis*. *Current opinion in cell biology*, v. 24, p. 277–283, 2012.
- [12] BRAY, F. et al; *Global cancer statistics 2018: GLOBOCAN estimates of incidence and mortality worldwide for 36 cancers in 185 countries*, *CA: a cancer journal for clinicians*, v. 68, p. 394–424, 2018.
- [13] BYRNE, H. M.; *Dissecting cancer through mathematics: from the cell to the animal model*, *Nature Reviews Cancer*, v. 10, p. 221–230, 2010.
- [14] DIMAS, S.; TSOUBELIS, D.; *SYM: A new symmetry-finding package for Mathematica*. In: *Proceedings of the 10th international conference in modern group analysis*, University of Cyprus Press, p. 64–70, 2004.
- [15] DOTAN, E.; *Advancing Treatment Approach to the Older Patient with Cancer Through Clinical Trials Participation*, *Surgical Oncology Clinics*, v. 26, p. 719–728, 2017.
- [16] ENDERLING, H.; AJ CHAPLAIN, M.; *Mathematical modeling of tumor growth and treatment*, *Current pharmaceutical design*, v. 20, p. 4934–4940, 2014.
- [17] FREIRE, I. L.; *Notas de aula do curso de Tópicos de Análise I*, UFABC, (2019).
- [18] GERISCH, A.; CHAPLAIN, M. A.; *Mathematical modelling of cancer cell invasion of tissue: Local and non-local models and the effect of adhesion*, *Journal of Theoretical Biology*, v. 250, p. 684–704, 2008.
- [19] IBRAGIMOV, N. H.; *Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations*, John Wiley and Sons, United Kingdom, 1999.
- [20] OLVER, P. J.; *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [21] REECE, J. B. et al.; *Biologia de Campbell*, Artmed Editora, 2019.
- [22] THEOCHARIS, A. D. et al.; *Extracellular matrix structure*, *Advanced drug delivery reviews*, v. 97, p. 4–27, 2016.
- [23] THEOCHARIS, A. D.; MANOU, D.; KARAMANOS, N. K.; *The extracellular matrix as a multitasking player in disease*, *The FEBS journal*, v. 286, p. 2830–2869, 2019.

- [24] TRYGGVASON, K.; HÖYHTYÄ, M.; SALO, T; *Proteolytic degradation of extracellular matrix in tumor invasion*, *Biochimica et Biophysica Acta (BBA)-Reviews on Cancer*, v. 907, p. 191–217, 1987.
- [25] <http://gco.iarc.fr/today/home> (acesso em 11 de junho de 2019).
- [26] <https://www.inca.gov.br/o-que-e-cancer>. (acesso em 13 de fevereiro de 2020).
- [27] <https://training.seer.cancer.gov/disease/cancer/>. (acesso em 13 de fevereiro de 2020).
- [28] <https://www.cancerresearchuk.org/about-cancer/what-is-cancer>. (acesso em 25 de outubro de 2020).
- [29] <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/cancer>. (acesso em 25 de outubro de 2020)