



Universidade Federal do ABC

ANDRÉ MAGALHÃES DE SÁ GOMES

# TEORIA HOMOLÓGICA DE DIGRAFOS

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da  
CAPES

**Santo André, 26 de fevereiro de 2018**





Universidade Federal do ABC

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

ANDRÉ MAGALHÃES DE SÁ GOMES

# TEORIA HOMOLÓGICA DE DIGRAFOS

Orientador: Prof. Dr. Daniel Miranda Machado

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de  
Matemática, Computação e Cognição para  
obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELO ALUNO ANDRÉ MAGALHÃES DE SÁ GOMES,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. DANIEL MIRANDA MACHADO.

SANTO ANDRÉ, 26 DE FEVEREIRO DE 2018

**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC**  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Gomes, André Magalhães de Sá

Teoria Homológica de Digrafos / André Magalhães de Sá Gomes. — 2018.

146 fls. : il.

Orientador: Daniel Miranda Machado

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2018.

1. Homologia. 2. Digrafos. 3. Teorema de Hodge. 4. Digrafos Aleatórios. 5. Laplaciano Discreto. I. Machado, Daniel Miranda. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018. III. Título.

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.**

**Santo André, 26 de Fevereiro de 2018.**

**Assinatura do autor:** André Magalhães de São Gomes

**Assinatura do orientador:** Daniela Miranda Machado



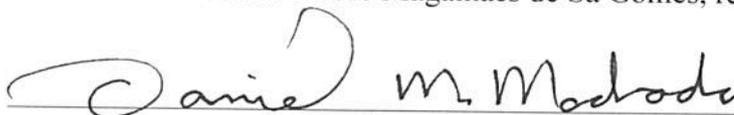


**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**Fundação Universidade Federal do ABC**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017  
ppg.matematica@ufabc.edu.br

**FOLHA DE ASSINATURAS**

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato André Magalhães de Sá Gomes, realizada em 23 de fevereiro de 2018:



Prof.(a) Dr.(a) **Daniel Miranda Machado** (Universidade Federal do ABC) – Presidente



Prof.(a) Dr.(a) **Marcelo Firer** (Universidade Estadual de Campinas) – Membro Titular



Prof.(a) Dr.(a) **Cristian Favio Coletti** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Mariana Rodrigues da Silveira** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Pedro Jose Catuogno** (Universidade Estadual de Campinas) – Membro Suplente



# Resumo

Neste trabalho estudamos a teoria (co)homológica de digrafos e algumas de suas aplicações. Mais precisamente, apresentamos a teoria e seus teoremas mais importantes, da perspectiva da Topologia Algébrica; como, por exemplo, o Teorema de Künneth e o Lema de Poincaré. Generalizamos a teoria para digrafos localmente finitos e, neste contexto, provamos o Teorema da separação de Hodge. Apresentamos ainda uma interpretação das homologias maiores por meio de um processo estocástico que generaliza o passeio aleatório sobre as faces de um complexo simplicial. Por fim apresentamos nossa conjectura de que as dimensões das homologias de um grafo de Cayley aleatório respeitam o Teorema Central do Limite, e a provamos para a primeira homologia,  $H_0$ ; em que o grupo subjacente é cíclico.

**Palavras-chave:** Homologia, Digrafos, Teorema de Hodge, Digrafos Aleatórios, Laplaciano Discreto



# Abstract

This work studies the (co)homological theory of digraphs and some of its applications. More precisely, we present the theory and its most important theorems, from the Algebraic Topology perspective; as, for example, the Künneth Theorem and Poincaré's Lemma. We generalize the theory to locally finite digraphs and, in this context, we prove the Hodge's separation Theorem. We also present an interpretation to the homologies via a stochastic process that generalizes the random walk over faces of a simplicial complex. At last we present our conjecture that the homologies' dimensions for a random Cayley's Graph satisfy the Central Limit Theorem, and prove it to the first homology,  $H_0$ ; where the underlying group is cyclic.

**Keywords:** Homology, Digraphs, Hodge, Random Digraphs, Discrete Laplacian



# Conteúdo

<b>I</b>	<b>Variedades Diferenciáveis</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Teoria de De Rham</b>	<b>3</b>
1.1	Formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$	3
1.2	Integrais de linha	8
1.3	Variedades diferenciáveis	10
1.4	Integração em variedades	16
1.4.1	Integração de formas diferenciais	16
1.4.2	Teorema de Stokes	17
1.4.3	Lema de Poincaré	20
1.5	Teoria de De Rham	22
1.5.1	O complexo de De Rham em $\mathbb{R}^n$	22
1.5.2	A Sequência Mayer-Vietoris	24
1.6	Laplaciano e o Teorema de Hodge	27
<b>II</b>	<b>Digrafos</b>	<b>29</b>
<b>2</b>	<b>Formas e Caminhos sobre um Conjunto Finito</b>	<b>31</b>
2.1	Espaço de caminhos e operador bordo	31
2.2	Junção de caminhos	34
2.3	Caminhos regulares	35
2.4	Formas e o Diferencial exterior	37
2.5	Concatenação de formas	39
2.6	Formas regulares	40
<b>3</b>	<b>Homologia Discreta</b>	<b>43</b>
3.1	Complexos de caminhos, complexos simpliciais e digrafos	43
3.2	Caminhos permitidos	45
3.3	Caminhos $\partial$ -invariantes	47
3.4	Formas $d$ -invariantes	52
3.5	Componentes conexas e $H^0$	57

3.6	União disjunta e soma direta . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Homologia de Digrafos e Aplicações</b>	<b>59</b>
4.1	Semi-arestas e caminhos $\partial$ -invariantes . . . . .	59
4.2	Triângulos, Quadrados e $\dim \Omega_p$ . . . . .	60
4.3	Cobras e Simplexos . . . . .	62
4.4	Digrafos estrelados e o Lema de Poincaré . . . . .	63
4.5	Grafos cíclicos . . . . .	63
4.6	Teorema de Hodge para digrafos finitos . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Digrafos Localmente Finitos</b>	<b>69</b>
5.1	(Co)Homologia e o operador Laplaciano . . . . .	69
5.2	Produto cartesiano de complexos de caminhos e a Fórmula de Künneth	73
5.3	Exemplos de homologias de grafos de Cayley . . . . .	75
5.4	Teoria homotópica de digrafos e os axiomas de Eilenberg-Steenrod . . .	80
5.4.1	Axiomas de Eilenberg-Steenrod . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Teorema de Decomposição de Hodge</b>	<b>85</b>
<b>7</b>	<b>Homologia de Complexos Simpliciais, Espectro e Passeios Aleatórios</b>	<b>91</b>
7.1	Complexos finitos . . . . .	92
7.2	$(d-1)$ -passeios aleatórios . . . . .	93
7.3	Operadores Laplacianos em complexos simpliciais . . . . .	95
<b>8</b>	<b>Homologia de Grafos Aleatórios</b>	<b>103</b>
8.1	Invariantes geométricos de grupos cíclicos . . . . .	103
8.2	Percolação de elos e grafos aleatórios . . . . .	107
<b>A</b>	<b>Álgebra Homológica</b>	<b>111</b>
A.1	Módulos . . . . .	111
A.2	Módulos livres . . . . .	114
A.3	Complexos e sequências exatas . . . . .	118
A.4	Sequências exatas cindidas . . . . .	119
A.5	Homologia e lema da cobra . . . . .	121
A.6	Homomorfismos . . . . .	124
A.7	Produto tensorial . . . . .	125
A.8	Categorias e funtores . . . . .	127
A.9	Funtores derivados . . . . .	132
A.10	Cohomologia de grupos . . . . .	136
A.10.1	A resolução de Bar . . . . .	138

"A vida em seus métodos diz calma  
Vai com calma, você vai chegar"  
Di Melo



# Agradecimentos

Tenho tanto e a tantos a agradecer por esses últimos dois anos – que foram os melhores de minha vida – que escrever estes agradecimentos está sendo a parte mais difícil deste trabalho.

Primeiramente gostaria de agradecer a minha família, meus pais Wilson e Cirlei e minha irmã Beatriz. Pois graças a eles sou quem sou e pude estar aqui. Este trabalho é muito mais mérito deles do que meu, e nisso não há dúvida. Meus pais trabalharam duro carregando peso no Brás como vendedores ambulantes, sob sol e chuva para que eu tivesse uma educação de qualidade. Sei que foi muito suor e muita garra correndo da fiscalização do famigerado RAPA, por não conseguirem se regulamentar, dado o intrincado sistema de corrupção que há para a regulamentação do nível mais baixo da cadeia hierárquica do empresariado. Eles, incluindo minha irmã, me deram todo o apoio e todos os exemplos que eu necessitei para seguir minha trajetória. Jamais serei capaz de expressar o quanto os amo e o tamanho de minha gratidão por tudo isso. E esses dois últimos anos, nos quais tive um certo afastamento, pude perceber isso com mais clareza. Espero que me perdoem por minhas incompreensões ao longo desta jornada.

Quero agradecer também aos meus tios, Andrea, Célia, César, Isabel e Wilton, por terem apoiado tanto minha família ao longo dos anos. Sem eles também, muito provavelmente, este trabalho não teria sido possível.

Gostaria de agradecer à Jéssica pelos ótimos quatro anos que tivemos juntos e por toda a força que me deu durante minha graduação e no começo de meu mestrado. Sua influência positiva na minha saúde emocional foi essencial.

Gostaria também de agradecer à Elisabete Pessanha, que passou por minha vida para mudar minhas perspectivas; o que me ajudou a organizar minha vida num momento conturbado.

Devo também agradecer aos meus amigos, que fizeram destes dois últimos anos os melhores anos de minha vida. Dentre eles gostaria de destacar o Túlio, o Tosa (me desculpe por te citar por meio de seu apelido, mas me recuso a te chamar de João), o Caio Rossi e sua esposa Katia, meu amigo de discussões matemáticas Vinícius, a Deborah e a Isabella (que mesmo não saindo muito de seu condado me proporcionou ótimos momentos, vários deles discutindo matemática). São os melhores loucos que alguém poderia ter amizade.

Esta seria a parte em que agradeceria a meus professores. Mas preciso destacar o Daniel, meu orientador, em meus agradecimentos. Ele fez muito mais do que seu papel como orientador. Além de me mostrar novas formas de pensar e estudar matemática ele me ajudou a lidar com problemas e inseguranças pessoais que tive ao longo de nossas conversas sobre matemática. Além do mais preciso agradecê-lo inclusive pelo seu ótimo trabalho nas atividades que lhe diziam respeito como orientador, sempre me deixando em um ambiente fértil para trabalhar e me guiando pelos melhores caminhos. Obrigado pela confiança que deposita em mim.

Guardo enorme admiração por vários de meus professores. Mas alguns merecem ser destacados. Primeiramente o professor Fabiano Brito, que pra mim é um modelo de pessoa e de matemático, por mudar positivamente minha forma de ver a matemática (e por me fazer querer conhecer a Polônia e a Suécia). Os professores Rafael Grisi e Cristian Coletti, que me ensinaram a ter uma intuição em Teoria da Medida e em Probabilidade. A professora Ana Boero que me fez amar Topologia, e em conjunto com o Grisi formam ótimos colegas de mesas de RPG. O professor Edson Iwaki por ter discutido diversas vezes álgebra comigo nos corredores, me dando diversas intuições para este trabalho. E o professor Roque Caiero, que além de me mostrar o maravilhoso mundo da lógica, mudou a forma com a qual eu questiono o mundo.

Gostaria de agradecer à CAPES por seu financiamento a este projeto.

Por último, gostaria de agradecer ao último governo legítimo deste país, que apesar de ter apresentado várias falhas, investiu em políticas sociais, que me permitiram seguir meus estudos ao longo da graduação, e não tratou a ciência e a educação com total descaso; como lamentavelmente é o caso do governo atual. Gostaria de ressaltar que nenhum país jamais se desenvolveu economicamente ou socialmente negligenciando essas áreas.

# Introdução

A topologia algébrica é a área da matemática que nos permite estudar espaços topológicos, e seus invariantes, por meio de estruturas algébricas. Tal associação – entre espaços topológicos e estruturas algébricas, e.g., módulos – é feita de maneira funtorial.

Na primeira parte desse trabalho apresentamos alguns resultados e definições da teoria de De Rham. Essa teoria é a motivação para o que segue.

Porém, o foco deste trabalho é o estudo de invariantes topológicos para (di)grafos. Em 2013 foi publicado o artigo, [6], no qual os autores Alexander Grigor'yan, Yong Lin, Yuri Muranov e Shing-Tung Yau constroem uma teoria homológica para digrafos finitos. Tal artigo foi referência fundamental para a segunda parte desse trabalho, em que apresentamos a teoria e alguns de seus resultados importantes.

No segundo e no terceiro capítulo apresentamos a teoria homológica para digrafos finitos e seus resultados fundamentais.

No quarto capítulo apresentamos alguns resultados e aplicações mais sofisticados, como o Lema de Poincaré e o Teorema de Hodge para digrafos finitos.

No quinto capítulo generalizamos a teoria para digrafos localmente finitos, apresentamos a Fórmula de Künneth, alguns exemplos de cálculos da homologia para digrafos infinitos e, finalmente, mostramos que nossa teoria segue um análogo discreto para os Axiomas de Eilenberg-Steenrod.

No sexto capítulo apresentamos, como resultado novo, o Teorema de Decomposição de Hodge para digrafos localmente finitos, que provamos analisando as soluções do Problema de Cauchy.

No sétimo capítulo apresentamos uma interpretação das homologias maiores por meio de um processo estocástico que generaliza o passeio aleatório sobre as faces de um complexo simplicial.

Por fim, no oitavo capítulo apresentamos nossa conjectura de que as dimensões das homologias de um grafo de Cayley aleatório respeitam o Teorema Central do Limite, e a provamos para a primeira homologia,  $H_0$ ; em que o grupo subjacente é cíclico.



# Parte I

## Variedades Diferenciáveis



# 1

## Teoria de De Rham

A topologia algébrica é a área que estuda propriedades de espaços topológicos associando-os a complexos de cadeias pela aplicação de funtores. Este capítulo tem por objetivo apresentar alguns resultados clássicos da área – quando o espaço topológico subjacente é dado por uma variedade diferenciável –, de maneira a preparar um bom arcabouço de ideias para a justificativa das definições feitas para o caso discreto, i.e., quando o espaço topológico subjacente é dado por digrafos ou por complexos simpliciais. Os teoremas aqui apresentados foram retirados de [4], [2] e [13]; sendo que as demonstrações omitidas podem ser encontradas nessas referências.

### 1.1 Formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$

Seja  $p$  em  $\mathbb{R}^n$ . Definimos o **espaço tangente de  $\mathbb{R}^n$  em  $p$**  como sendo o conjunto  $\mathbb{R}_p^n := \{q - p : q \in \mathbb{R}^n\}$ , i.e., o conjunto de vetores com origem em  $p$ . Seja  $\{e_i : i \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq i \leq n\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Definiremos a base canônica de  $\mathbb{R}_p^n$  como o conjunto  $\{(e_i)_p : (e_i)_p \text{ é o transladado de } e_i \text{ ao ponto } p\}$ . A partir deste ponto abusaremos da notação e identificaremos  $(e_i)_p$  como  $e_i$ .

**Definição 1.1.** *Um campo vetorial em  $\mathbb{R}^n$  é uma aplicação que associa cada ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  a um vetor em  $\mathbb{R}_p^n$  da forma*

$$v(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p)e_i;$$

em que as  $a_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são chamadas de **funções caracterizadoras do campo vetorial  $v$** . Se as funções  $a_i$  são diferenciáveis, dizemos que  $v$  é **diferenciável**.

Definimos também o **espaço dual de  $\mathbb{R}_p^n$**  como sendo o conjunto  $(\mathbb{R}_p^n)^* = \{\varphi : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ é aplicação linear}\}$ , como usual. Note que a base dual da base canônica de  $\mathbb{R}_p^n$  é o conjunto

$$\{(dx_i)_p : i = 1, \dots, n\};$$

## 1 Teoria de De Rham

em que  $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a  $i$ -ésima projeção canônica. De fato, como o diferencial de uma aplicação linear é a própria aplicação, temos que

$$(dx_i)_p(e_j) = \delta_{ij};$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

Defina o espaço vetorial  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^* := \{\varphi : (\mathbb{R}_p^n)^k \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ é } k\text{-linear alternada}\}$  com respeito às operações usuais de funções; em que

$$(\mathbb{R}_p^n)^k = \underbrace{\mathbb{R}_p^n \times \cdots \times \mathbb{R}_p^n}_{k \text{ vezes}}.$$

Dados  $\varphi_i \in (\mathbb{R}_p^n)^*$ ,  $i = 1, \dots, k$ , obtemos  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \in \Lambda(\mathbb{R}_p^n)^*$  definindo

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_k(v_1, v_2, \dots, v_k) := \det(\varphi_i(v_j)); \quad i, j = 1, \dots, k.$$

À operação  $\wedge$  é dado o nome **operador cunha**.

A definição acima, que é dada naturalmente uma vez em que se tenha em mente o fato de  $\det$  ser  $k$ -linear alternado, nos permite encontrar uma base – em certo sentido – simples para  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ , como mostra a proposição a seguir.

**Proposição 1.2.**  $\{(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p : i_1 < i_2 < \cdots < i_k, i_j \in \{1, \dots, n\}\}$  é uma base para  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ .

**Definição 1.3.** Uma  **$k$ -forma exterior** em  $\mathbb{R}$  é uma aplicação  $\omega$  que associa cada ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  a um elemento em  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$  da forma

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(p) (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_j \in \{1, \dots, n\},$$

em que  $a_{i_1 \dots i_k}$  são funções reais em  $\mathbb{R}^n$ . Note que a Proposição 1.2 (veja Apêndice A, página 113) nos garante que  $\omega(p)$  está de fato em  $\Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ . Dizemos que  $\omega$  é uma  **$k$ -forma diferencial** se as funções  $a_{i_1 \dots i_k}$  são diferenciáveis.

Por conveniência denotaremos a  $k$ -upla  $(i_1, \dots, i_k)$ , t.q.  $i_1 < \cdots < i_k$  e  $i_j \in \{1, \dots, n\}$ , por  $I$ , de modo que denotaremos  $\omega$  simplesmente por

$$\omega = \sum_I a_I dx_I$$

Convenciona-se que uma 0-forma é uma função real em  $\mathbb{R}^n$  diferenciável.

No que segue nos referiremos às  $k$ -formas diferenciais simplesmente por  $k$ -formas, uma vez que nos restringiremos a elas.

Definamos agora operações sobre  $k$ -formas em  $\mathbb{R}^n$ .

Sejam

$$\omega = \sum_I a_I dx_I$$

e

$$\varphi = \sum_I b_I dx_I$$

duas  $k$ -formas em  $\mathbb{R}^n$ . Definimos sua soma da seguinte maneira

$$\omega + \varphi = \sum_I (a_I + b_I) dx_I$$

Agora, sejam

$$\omega = \sum_I a_I dx_I \quad \text{e} \quad \varphi = \sum_J b_J dx_J$$

uma  $k$ -forma e uma  $s$ -forma, respectivamente. Definimos seu **produto exterior**, que é uma  $(s + k)$ -forma, da seguinte maneira

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$$

Note que se  $\varphi$  é uma 1-forma, então existem funções diferenciáveis  $a_i$  tais que  $\varphi = \sum_i a_i dx_i$ . Como  $\{dx_i : i = 1, 2, \dots, n\}$  é base para  $(\mathbb{R}^n)^*$ ,  $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ . Portanto, sejam  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  1-formas, vale

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k(v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j))$$

**Proposição 1.4.** *Sejam  $\omega$ ,  $\varphi$  e  $\theta$  uma  $k$ -forma, uma  $s$ -forma e uma  $r$ -forma, respectivamente. Então:*

1.  $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$ ;
2.  $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks}(\varphi \wedge \omega)$ ;
3. Se  $r = s$ ,  $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$ .

Note que, apesar de  $dx_i \wedge dx_i = 0$ , não é necessariamente verdade que para uma dada forma  $\omega$ ,  $\omega \wedge \omega = 0$ .

Outro aspecto importante das formas diferenciais é a maneira como elas se comportam sob aplicações diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , induz uma

aplicação  $f^*$ , dita **pullback**, que leva  $k$ -formas em  $\mathbb{R}^m$  à  $k$ -formas em  $\mathbb{R}^n$ , definida pela relação abaixo,

$$(f^*\omega)(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(p))(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k));$$

em que  $\omega$  é uma  $k$ -forma em  $\mathbb{R}^m$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}_p^n$  e  $df_p : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_{f(p)}^m$  é o diferencial da aplicação  $f$  em  $p$ . Se  $g$  é uma 0-forma, definimos

$$f^*(g) = g \circ f.$$

**Propriedades 1.5.** (de  $f^*$ ) Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicações diferenciáveis;  $\omega$  e  $\varphi$   $k$ -formas em  $\mathbb{R}^m$ ;  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  uma 0-forma e  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  duas formas quaisquer sobre  $\mathbb{R}^m$ . Então:

1.  $f^*(\omega + \varphi) = f^*\omega + f^*\varphi$ .
2.  $f^*(g\omega) = (f^*g)(f^*\omega)$ .
3.  $f^*(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = (f^*\varphi_1) \wedge (f^*\varphi_2)$ .
4.  $(f \circ h)^*\omega = h^*(f^*\omega)$ .

Ainda, o pullback pode ser interpretado como uma substituição de variáveis no seguinte sentido: sejam  $(x_1, \dots, x_n)$  coordenadas em  $\mathbb{R}^n$ ,  $(y_1, \dots, y_m)$  coordenadas em  $\mathbb{R}^m$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n).$$

Seja ainda  $\omega = \sum_I a_I dy_I$  uma  $k$ -forma em  $\mathbb{R}^m$ . Então,  $f^*\omega$  é uma  $k$ -forma em  $\mathbb{R}^n$  dada por

$$f^*\omega = \sum_I a_I(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}.$$

Neste sentido,  $f^*$  “substitui”, as variáveis  $y_i$  e seus diferenciais por funções de  $x_j$  e seus diferenciais.

**Definição 1.6.** Seja  $\omega = \sum_I a_I dx_I$  uma  $k$ -forma em  $\mathbb{R}^n$ . Definimos o **diferencial exterior**  $d\omega$  de  $\omega$  da seguinte maneira,

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I;$$

onde  $da_I$  é o diferencial de  $a_I$ .

Note que, se  $d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (d\omega)_{i_1 \dots i_{k+1}} (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k+1}})_p$ , então, pelas propriedades do operador cunha,

$$(d\omega)_{i_1 \dots i_{k+1}} = \sum_{q=0}^{p+1} (-1)^q a_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_{p+1}}. \quad (1.1)$$

Seguimos agora com algumas propriedades do diferencial exterior.

**Propriedades 1.7.** (de  $d\omega$ )

(a)  $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ ; onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são  $k$ -formas.

(b)  $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$ ; onde  $\omega$  e  $\varphi$  são uma  $k$ -forma e uma  $s$ -forma, respectivamente.

(c)  $d(d\omega) = d^2\omega = 0$ .

(d)  $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ , em que  $\omega$  é uma  $k$ -forma em  $\mathbb{R}^m$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação diferenciável.

*Demonstração.* (c) Provemos inicialmente para as 0-formas, i.e.,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) = \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j\right). \end{aligned}$$

Como  $f$  é suave,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ , e como  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ , se  $i \neq j$ , temos que

$$d(df) = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Agora, por (b),

$$d(a_I x_I) = da_I \wedge dx_I + a_I(dx_I).$$

Mas  $d(dx_I) = d(\text{Id}) \wedge dx_I = 0$ . Então,

$$d(da_I x_I) = d(da_I) \wedge dx_I + da_I \wedge d(dx_I) = 0.$$

O resultado é estendido a uma forma  $\omega = \sum a_I dx_I$  por (a).

□

## 1.2 Integrais de linha

Veremos mais detalhadamente à frente que formas diferenciais são objetos integráveis, dada a linguagem correta para tal. Porém nesta seção abordaremos as integrais de 1-formas ao longo de curvas, denominadas **integrais de linha**, uma vez que este caso pode ser abordado na linguagem já preestabelecida.

Antes, partamos de algumas definições.

**Definição 1.8.** *Uma curva  $c$  é dita **diferenciável por partes** se ela for contínua e se existir uma partição  $\{t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}\}$  de seu domínio tal que a restrição  $c|_{[t_j, t_{j+1}]} = c_j$  é diferenciável para  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ .*

**Definição 1.9.** *Seja  $U$  um aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Uma **mudança de parâmetros de uma curva**  $c : [a, b] \rightarrow U$  é um homeomorfismo diferenciável  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ . Diz-se que  $\varphi$  **preserva orientação** se ele é crescente; diz-se que  $\varphi$  **reverte orientação** se for decrescente.*

Agora, seja  $\omega = \sum a_i dx_i$  uma 1-forma diferencial definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . E seja  $c : [a, b] \rightarrow U$  uma curva diferenciável por partes dada por  $c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Note que para cada  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ , onde  $\{t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}\}$  é uma partição de  $[a, b]$ ,

$$c_j^* \omega = \sum_i a_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) \frac{dx_i}{dt} dt.$$

Definimos

$$\int_{c(t)} \omega = \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} c_j^* \omega = \int_a^b \left( \sum_i a_i(t) \frac{dx_i}{dt} \right) dt$$

Lançando mão de teoremas do cálculo diferencial temos que  $\int_c \omega$  é invariante para mudanças de parâmetros que preservam orientação. A saber, seja  $\varphi(\tau) = t$ , em que  $\varphi$  é uma mudança de parâmetros que preserva orientação,

$$\int_{c(t)} \omega = \int_{c(\tau)} \omega.$$

Analogamente, se  $\varphi$  reverte orientação,

$$\int_{c(t)} \omega = - \int_{c(\tau)} \omega.$$

Deste modo,

$$\int_{-c} \omega = - \int_c \omega;$$

em que  $c$  denota o traço de  $c(t)$  com uma dada orientação e  $-c$  denota a mesma curva com orientação contrária.

Vamos a algumas definições que se mostrarão importantes a partir deste ponto.

**Definição 1.10.** *Seja  $\omega$  uma forma diferencial no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que ela é*

1. **Fechada** se  $d\omega = 0$ ;
2. **Exata** em  $V \subset U$  se existir uma função  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável tal que  $\omega = df$  em  $V$ .

Note que toda forma exata em  $V$  é fechada em  $V$ , uma vez que  $d(df) = d^2f = 0$ . Ainda:

**Proposição 1.11.** *As afirmações abaixo são equivalentes.*

1.  $\omega$  é exata em um conjunto  $V \subset U$  aberto e conexo.
2.  $\int_c \omega$  depende apenas dos pontos extremos de  $c$  para toda curva  $c \in V$ .
3.  $\int_c \omega = 0$ , para toda curva fechada  $c \subset V$ .

**Definição 1.12.** *Uma forma  $\omega$  é dita **localmente exata** se para cada ponto na variedade existir alguma vizinhança dele em que  $\omega$  é exata.*

**Lema 1.13. (Lema de Poincaré para 1-formas)** *Uma 1-forma é fechada se, e somente se, ela é localmente exata.*

Lançando mão do lema, podemos estender a definição da integral de formas fechadas a curvas que são apenas contínuas. Para tal, sejam  $\omega$  uma forma fechada definida em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $c : [0, 1] \rightarrow U$  uma curva contínua. Podemos escolher uma partição  $\{t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}\}$  de  $[0, 1]$  tal que  $c_i = c[[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , está contida na bola  $B_i$  em que  $\omega$  é exata. Seja  $f_i : B_i \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $df_i = \omega$ . Então

$$\int_c \omega = \sum_i \int_{c_i} \omega = \sum_i [f_i(t_{i+1}) - f_i(t_i)]$$

Note que esta definição é independente da partição escolhida.

Vimos portanto que toda forma fechada é localmente exata. Para entendermos quando ela é globalmente exata faz-se necessária a introdução do conceito de homotopia.

**Definição 1.14.** Duas curvas contínuas  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1 : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$ , tais que  $\mathbf{c}_0(\mathbf{a}) = \mathbf{c}_1(\mathbf{a})$  e  $\mathbf{c}_0(\mathbf{b}) = \mathbf{c}_1(\mathbf{b})$ , são ditas **homotópicas** se existir uma função contínua

$$H : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{U}, \quad (s, t) \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [0, 1]$$

tal que,

$$H(s, 0) = \mathbf{c}_0(s), \quad H(s, 1) = \mathbf{c}_1(s), \tag{1.2}$$

$$H(\mathbf{a}, t) = \mathbf{c}_0(\mathbf{a}) = \mathbf{c}_1(\mathbf{a}), \quad H(\mathbf{b}, t) = \mathbf{c}_0(\mathbf{b}) = \mathbf{c}_1(\mathbf{b}). \tag{1.3}$$

Portanto, uma homotopia é uma família contínua de curvas  $H_t(s) := H(s, t)$  que deforma a curva  $H_0 = \mathbf{c}_0$  na curva  $H_1 = \mathbf{c}_1$ , mantendo fixos os pontos extremos  $H_t(\mathbf{a})$  e  $H_t(\mathbf{b})$ .

Se retirarmos a condição (1.3) da definição de  $H$ , a aplicação obtida é denominada **homotopia livre**.

Tal definição nos abre espaço para a seguinte proposição:

**Proposição 1.15.** Seja  $\omega$  uma 1-forma fechada no aberto  $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$  e sejam  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1 : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \mathbf{U}$  duas curvas contínuas homotópicas em  $\mathbf{U}$ . Então

$$\int_{\mathbf{c}_0} \omega = \int_{\mathbf{c}_1} \omega.$$

**Proposição 1.16.** Seja  $\omega$  uma 1-forma fechada definida em  $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$  e sejam  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1$  duas curvas fechadas livremente homotópicas em  $\mathbf{U}$ . Então  $\int_{\mathbf{c}_0} \omega = \int_{\mathbf{c}_1} \omega$ ; em particular, se  $\mathbf{c}_0$  é livremente homotópica a um ponto  $\int_{\mathbf{c}_0} \omega = 0$ .

**Definição 1.17.** Dizemos que um conjunto  $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$  aberto e conexo é **simplesmente conexo** se toda curva contínua e fechada em  $\mathbf{U}$  é livremente homotópica a um ponto em  $\mathbf{U}$ .

**Proposição 1.18.** Toda forma fechada cujo domínio é simplesmente conexo é exata.

## 1.3 Variedades diferenciáveis

Assim como tudo que diz respeito a diferenciabilidade, a teoria de formas diferenciais pode ser estendida a variedades diferenciáveis, que são – grosso modo – espaços em que podemos aplicar localmente o Cálculo Diferencial de  $\mathbb{R}^n$ .

Mais precisamente temos a seguinte definição.

**Definição 1.19.** Uma *variedade diferenciável*  $n$ -dimensional é um conjunto  $M$  com uma família de aplicações injetivas  $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ , onde  $U_\alpha$  é aberto para todo  $\alpha$ , tais que:

(1)  $\bigcup_{\alpha} f_\alpha(U_\alpha) = M$ .

(2) Para cada par  $\alpha, \beta$ , com  $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $f_\alpha^{-1}(W)$  e  $f_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha, f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$  são diferenciáveis.

(3) A família  $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$  é maximal em relação a (1) e (2).

O par  $(U_\alpha, f_\alpha)$  com  $p \in f_\alpha(U_\alpha)$  é dito uma **parametrização** (ou um **sistema de coordenadas**) de  $M$  em  $p$ ;  $f_\alpha(U_\alpha)$  é então chamada de **vizinhança coordenada** de  $p$ . Dizemos que uma família  $(f_\alpha, U_\alpha)$  que satisfaça as propriedades (1) e (2) é uma **estrutura diferenciável** em  $M$ .

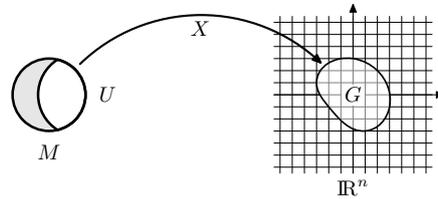


Figura 1.1: Sistema de coordenadas

**Exemplo 20.** Toda superfície regular  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  é uma variedade diferenciável 2-dimensional.

Com efeito, toda parametrização  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$  de  $S$  em  $p$  é um homeomorfismo diferenciável tal que  $df|_p : T_p(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.  $\square$

**Exemplo 21.** Todo subespaço  $k$ -dimensional,  $M$ , de  $\mathbb{R}^n$  é uma  $k$ -variedade diferenciável. De fato, sejam  $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^k$  uma base de  $M$ ,  $\mathcal{C} = \{\delta_i\}_{i=1}^k$  a base canônica de  $\mathbb{R}^k$  e  $\mathcal{D} = \{B_\alpha\}$  uma base da topologia de  $\mathbb{R}^k$ . Defina

$$f : \mathbb{R}^k \rightarrow M$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \delta_i \rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$$

e defina  $f_\alpha : B_\alpha \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$  de modo que  $f_\alpha = f|_{B_\alpha}$ . A família  $\{(B_\alpha, f_\alpha)\}$  é uma estrutura diferenciável. De fato, as aplicações  $f_\alpha$  satisfazem a condição 1 e a injetividade trivialmente. Agora, seja  $f_\alpha(B_\alpha) \cap f_\beta(B_\beta) = W \neq \emptyset$ . Note que  $x \in B_\alpha \cap B_\beta$  se, e somente se,  $f(x) \in W$ , equivalentemente,  $W = B_\alpha \cap B_\beta$ , que é aberto. Note que  $f_\beta \circ f_\alpha = f_\alpha \circ f_\beta = \text{Id}$ ; em que  $\text{Id}$  é a função identidade, que é diferenciável. Portanto,  $M$  é uma variedade diferenciável.

Disto segue diretamente que  $\mathbb{R}^n$  é sempre uma variedade  $n$ -dimensional. E, de maneira análoga,  $\mathbb{C}^n$  é uma variedade  $2n$ -dimensional.  $\square$

**Exemplo 22.** O **Plano projetivo real**  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  é o conjunto das linhas em  $\mathbb{R}^3$  passando pela origem. Equivalentemente,  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  pode ser visto como o conjunto das direções em  $\mathbb{R}^3$ .

Defina a relação de equivalência  $\sim$  em  $\mathbb{R}^3$  da seguinte forma:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) \sim \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

cujas classes de equivalência serão denotadas por  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, z]$ , e são justamente os elementos de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}^2)$ .

Defina agora os conjuntos:

$$V_1 = \{[\mathbf{x}, \mathbf{y}, z] : x \neq 0\},$$

$$V_2 = \{[\mathbf{x}, \mathbf{y}, z] : y \neq 0\},$$

$$V_3 = \{[\mathbf{x}, \mathbf{y}, z] : z \neq 0\}$$

e as aplicações  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow V_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , por

$$f_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [1, \mathbf{u}, \mathbf{v}], \quad f_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\mathbf{u}, 1, \mathbf{v}], \quad f_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, 1].$$

A família  $\{(f_i, \mathbb{R}^2)\}$  é uma estrutura diferenciável. De fato,  $f_1^{-1}(V_1 \cap V_2) = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \neq 0\}$ , que é aberto em  $\mathbb{R}^2$ , e

$$f_2^{-1} \circ f_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left( \frac{1}{\mathbf{u}}, \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}} \right),$$

que é diferenciável. A verificação para os demais casos é análoga.

Deste modo,  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  é de fato uma variedade diferenciável 2-dimensional.  $\square$

**Exemplo 23. (Espaço projetivo linear)** O exemplo anterior pode facilmente ser generalizado para  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  dado pelas classes de equivalência da seguinte relação:

$$\mathbf{x} \sim \lambda \mathbf{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

$\square$

Note que uma estrutura diferenciável induz, de maneira canônica, uma topologia em  $M$  de base  $\{f_\alpha(\mathbf{U}_\alpha)\}$ . Porém, essa topologia pode não ter algumas propriedades importantes para alguns teoremas do cálculo. Como queremos estender noções relativas à diferenciabilidade para variedades, nos restringiremos àquelas cuja topologia satisfaz:

**Axioma de Hausdorff:** Dois pontos distintos de  $M$  são separados por vizinhanças que não se intersectam. (Usado na demonstração da unicidade do limite de sequências convergentes).

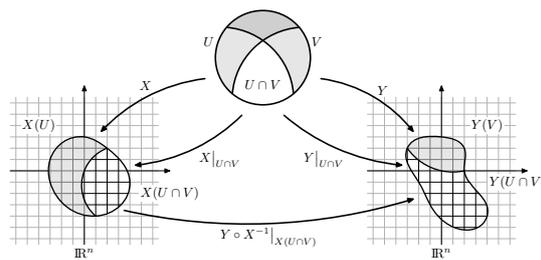
**Axioma de base contável:**  $M$  pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas. (Essencial para a existência de partições da unidade).

A partir do presente momento denotaremos a dimensão de uma variedade diferenciável  $M$  por um índice sobrescrito da seguinte maneira,  $M^n$  indica que a variedade diferenciável  $M$  é  $n$  dimensional.

**Definição 1.24.** *Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^m$  duas variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  é dita **diferenciável no ponto**  $\mathbf{p} \in M_1$  quando dada uma parametrização  $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$  em  $\varphi(\mathbf{p})$ , existe uma parametrização  $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$  em  $\mathbf{p}$  tal que  $\varphi(\mathbf{f}(U)) \subset \mathbf{g}(V)$  e a aplicação*

$$\mathbf{g}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

*é diferenciável em  $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ . A aplicação  $\varphi$  é **diferenciável em um aberto** de  $M_1$  se ela é diferenciável em todo ponto deste aberto.*



**Figura 1.2:** Variedade Diferenciável

Outro importante conceito a ser estendido para variedades é o de espaço tangente. Para tal fazem-se necessárias algumas definições, pois a definição aqui apresentada é baseada na noção de vetor tangente a uma curva, estendendo os conceitos já definidos no espaço euclidiano.

**Definição 1.25.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  – com  $I$  intervalo em  $\mathbb{R}$  contendo  $0$  – uma curva diferenciável na variedade diferenciável  $M$ , com  $\alpha(0) = \mathbf{p}$ , e seja  $D$  o conjunto de*

funções de  $M$  que são diferenciáveis em  $\mathfrak{p}$ . O **vetor tangente** à curva  $\alpha$  em  $\mathfrak{p}$  é a aplicação  $\alpha'(0) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0)\varphi = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)|_{t=0}$$

Um **vetor tangente** a  $\mathfrak{p} \in M$  é o vetor tangente de alguma curva diferenciável  $\alpha : I \rightarrow M$  como  $\alpha(0) = \mathfrak{p}$ .

Deste modo, note que

$$\alpha'(0)\varphi = \left( \sum_{i=1}^n x_i'(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) \varphi.$$

Logo, os vetores tangente  $\alpha'(0)$  em  $\mathfrak{p}$  podem ser escritos da forma

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x_i'(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0.$$

O espaço vetorial gerado por  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right\}$  é o espaço  $n$ -dimensional de todos os vetores tangentes à  $M$  em  $\mathfrak{p}$ , e é denotado por  $T_{\mathfrak{p}}M$  e chamado por **espaço tangente**.

Agora temos a linguagem necessária para a introdução da noção do diferencial de uma aplicação  $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^m$ .

**Definição 1.26.** *Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^m$  variedades diferenciáveis e  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  uma aplicação diferenciável. Para cada  $\mathfrak{p} \in M_1$ , o **diferencial** de  $\varphi$  em  $\mathfrak{p}$  é a aplicação linear  $d\varphi_{\mathfrak{p}} : T_{\mathfrak{p}}M_1 \rightarrow T_{\varphi(\mathfrak{p})}M_2$  que associa a cada  $\mathfrak{v} \in T_{\mathfrak{p}}M_1$  o vetor  $d\varphi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{v}) \in T_{\varphi(\mathfrak{p})}M_2$  definido da seguinte maneira: tome uma curva diferenciável  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_1$  de modo que  $\alpha(0) = \mathfrak{p}$  e  $\alpha'(0) = \mathfrak{v}$ ; então  $d\varphi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{v}) := (\varphi \circ \alpha)'(0)$ .*

**Definição 1.27.** *Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^m$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  bijetiva diferenciável e com inversa diferenciável é dita um **difeomorfismo**. A aplicação  $\varphi$  é dita um **difeomorfismo local** se existirem vizinhanças  $\mathcal{U}$  de  $\mathfrak{p}$  e  $\mathcal{V}$  de  $\varphi(\mathfrak{p})$  tal que  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  é um difeomorfismo.*

Certamente um dos teoremas mais importantes do Cálculo é o teorema da função inversa, que afirma que se  $d\varphi_{\mathfrak{p}}$  é um isomorfismo, então  $\varphi$  é um difeomorfismo local. Por se tratar de um teorema local ele se estende naturalmente às variedades diferenciáveis.

**Definição 1.28.** *Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $\varphi : M \rightarrow N$  é uma **imersão** se  $d\varphi_{\mathfrak{p}} : T_{\mathfrak{p}}M \rightarrow T_{\varphi(\mathfrak{p})}N$  é injetora para todo  $\mathfrak{p} \in M$ . Se, além de imersão,  $\varphi$  for um homeomorfismo sobre sua imagem  $\varphi(M) \subset N$  – em que  $\varphi(M)$  é munida da topologia induzida por  $N$  –,  $\varphi$  é dito um **mergulho**.*

Agora, se  $M \subset N$  e a inclusão  $i : M \subset N$  é um mergulho, então dizemos que  $M$  é uma **subvariedade** de  $N$ .

Certamente um dos resultados mais notórios na teoria de variedades é o de uma variedade diferenciável (i.e., Hausdorff e com base enumerável) de dimensão  $n$  sempre poder ser imersa em  $\mathbb{R}^{2n}$  e mergulhada em  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

Agora possuímos o necessário para estender o conceito de formas diferenciais à variedades diferenciáveis.

Dado um espaço vetorial  $V$ , denotaremos por  $\Lambda^k(V)$  o conjunto das aplicações  $k$ -lineares e alternadas,  $w : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $V^k$  representa o produto cartesiano de  $V$  consigo mesmo  $k$  vezes.

**Definição 1.29.** *Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável. Uma  $k$ -forma exterior  $w$  em  $M$  é a escolha, para cada  $p \in M$ , de um elemento  $w(p)$  do espaço  $\Lambda^k(T_p M)^*$  das formas  $k$ -lineares e alternadas do espaço tangente  $T_p M$ .*

Dadas uma  $k$ -forma  $w$  e uma parametrização  $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow M^n$ , em  $p \in f_\alpha(U_\alpha)$ , definimos a **representação** de  $w$  nesta parametrização como a  $k$ -forma  $w_\alpha$  em  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  dada por

$$w_\alpha(v_1, \dots, v_k) = w(df_\alpha(v_1), \dots, df_\alpha(v_k)), \quad v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n.$$

Se mudarmos de coordenadas para  $f_\beta : U_\beta \rightarrow M^n$ ,  $p \in f_\beta(U_\beta)$ , nós obtemos que  $(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* w_\beta = w_\alpha$ .

**Definição 1.30.** *Uma **forma diferencial de ordem  $k$**  (ou uma  $k$ -forma diferencial) em uma variedade diferenciável  $M^n$  é uma  $k$ -forma exterior tal que em algum sistema de coordenadas (portanto, em todos), sua representação é diferenciável.*

Todas as operações definidas sobre  $k$ -formas diferenciais em  $\mathbb{R}^n$  são estendidas a  $k$ -formas diferenciais em  $M^n$  por suas representações locais. Por exemplo, se  $w$  é uma  $k$ -forma diferencial em  $M$ ,  $dw$  é a forma diferencial em  $M$  cuja representação local é  $dw_\alpha$ . Uma vez que

$$dw_\alpha = d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* w_\beta = (f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* dw_\beta,$$

$dw$  está bem definida.

O conceito de formas diferenciais nos leva naturalmente à seguinte definição:

**Definição 1.31.** *Um **campo vetorial**  $X$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa cada  $p \in M$  a um vetor  $X(p) \in T_p M$ . O campo vetorial  $X$  é **diferenciável** se para cada função diferenciável  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X\varphi$  é também uma função diferenciável.*

**Lema 1.32.** *Sejam  $X$  e  $Y$  campos vetoriais sobre uma variedade diferenciável  $M$ . Então existe um único campo vetorial  $Z$  em  $M$  tal que, para cada  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,  $Z\varphi = (XY - YX)\varphi$ .*

**Definição 1.33.** *Uma variedade diferenciável  $M$  é **orientável** se possui alguma estrutura diferenciável  $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$  tal que para cada par  $(\alpha, \beta)$  com  $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$ , o diferencial da mudança de coordenadas  $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$  tem determinante positivo. Caso contrário  $M$  é não orientável.*

Neste caso, chamamos uma tal estrutura diferenciável de **orientação** de  $M$ .

**Exemplo 34. (Variedade orientável)** Toda variedade  $M$  que pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas  $V_1$  e  $V_2$  tais que  $W = V_1 \cap V_2$  é conexo é orientável. De fato, seja  $p \in W$ , se  $\det(d(f_2^{-1} \circ f_1)(p)) < 0$ , basta intercambiarmos duas coordenadas de  $V_1$  consecutivas. Como o determinante é alternado, teremos que o novo diferencial terá determinante positivo em  $p$ , definindo assim uma orientação de  $M$ .  $\square$

**Exemplo 35. (Variedade não-orientável)** O plano projetivo real,  $P^2(\mathbb{R})$  é uma variedade não-orientável. Note que a esfera quocientada pelas antípodas que relaciona os pontos opostos pelo equador,  $P^2(\mathbb{R})$ , tem a faixa de Möbius como subvariedade, pois é justamente uma faixa em torno do equador desta esfera, que é não orientável, como demonstrado em [3] §2.6.  $\square$

## 1.4 Integração em variedades

### 1.4.1 Integração de formas diferenciais

Esta seção se reserva à definição da integral de uma  $n$ -forma diferencial sobre uma variedade diferenciável  $n$  dimensional.

Seja  $\omega$  uma forma diferencial definida em um aberto  $U \subset M^n$ . O **suporte**  $K$  de  $\omega$  é o fecho do conjunto

$$\{p \in M^n : \omega(p) \neq 0\}.$$

Inicialmente, seja  $\omega$  uma  $n$ -forma em  $\mathbb{R}^n$ . Então

$$\omega = a(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Assuma que o suporte  $K$  de  $\omega$  é um compacto contido em  $U$  (aberto em  $\mathbb{R}^n$ ). Definimos

$$\int_U \omega = \int_K a dx_1 \cdots dx_n,$$

em que o lado direito da igualdade acima representa uma integral múltipla em  $\mathbb{R}^n$ .

Para a definição da integral de uma  $n$ -forma em  $M^n$ , assumiremos que  $M$  é compacta, e portanto, o suporte  $K$  da forma  $\omega$  também o é, por se tratar de um fechado em um compacto. Também assumiremos que  $M$  é orientável.

**Proposição 1.36. (Existência de uma partição de unidade diferenciável).** *Seja  $M$  uma variedade compacta (não necessariamente orientável) e seja  $\{V_\alpha\}$  uma cobertura de  $M$  por vizinhanças coordenadas. Então existem funções diferenciáveis  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  tais que:*

$$(a) \sum_{i=1}^m \varphi_i = \text{Id}$$

(b)  $0 \leq \varphi_i \leq 1$ , e o suporte de  $\varphi$  está contido em alguma  $V_{\alpha_i}$  da cobertura  $\{V_\alpha\}$ .

Agora seja  $\omega$  uma  $n$ -forma em  $M^n$  (orientável) tal que seu suporte,  $K$ , está contido em uma vizinhança coordenada  $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$ . Então, se a representação local  $\omega_\alpha$  de  $\omega$  em  $U_\alpha$  é

$$\omega_\alpha = a_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

define-se

$$\int_M \omega = \int_{V_\alpha} \omega_\alpha = \int_{U_\alpha} a_\alpha dx_1 \cdots dx_n,$$

em que o lado direito da igualdade acima representa uma integral em  $\mathbb{R}^n$ .

**Nota:** O sinal da integral só está bem definido em variedades orientáveis.

Agora, suponha que o suporte  $K$  da  $n$ -forma  $\omega$  não está contido em uma única vizinhança coordenada. Seja  $\{\varphi_i\}$  uma partição da unidade diferenciável. O suporte da forma  $\varphi_i \omega$  está contido em  $V_{\alpha_i}$ . Pela definição anterior, faz sentido definir

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^m \int_M \varphi_i \omega.$$

## 1.4.2 Teorema de Stokes

Antes de enunciarmos o Teorema de Stokes, algumas definições são necessárias.

Um **meio espaço** de  $\mathbb{R}^n$  é o conjunto

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}.$$

De modo que a topologia de  $H^n$  é a topologia induzida por  $\mathbb{R}^n$ .

Dizemos que uma função  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida em um aberto  $V$  de  $H^n$  é **diferenciável** quando existe um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $V \subset U$  e uma função diferenciável  $\bar{f}$  definida em  $U$  tal que a restrição de  $\bar{f}$  a  $V$  é  $f$ . Neste caso, o diferencial  $df_p$ ,  $p \in V$ , de  $f$  em  $p$  é definido como  $df_p = d\bar{f}_p$ .

**Definição 1.37.** *Uma variedade  $n$ -diferenciável com bordo (regular) é um conjunto  $M$  e uma família de funções injetivas  $f_\alpha : U_\alpha \subset H^n \rightarrow M$  de abertos em  $H^n$  a  $M$  tais que:*

1.  $\bigcup_{\alpha} f(U_\alpha) = M$ .
2. Para todo par  $\alpha, \beta$  com  $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$  os conjuntos  $f_\alpha^{-1}(W)$  e  $f_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $H^n$  e as aplicações  $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ ,  $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$  são diferenciáveis.
3. A família  $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$  é maximal em relação à (1) e (2).

Um ponto  $p \in M$  é dito um **ponto no bordo de  $M$**  se dada uma parametrização (e, portanto, para toda parametrização)  $f : U \subset H^n \rightarrow M$  em  $p$  nós tivermos que  $f(0, x_2, \dots, x_n) = p$ .

O conjunto dos pontos de bordo de  $M$  é chamado **bordo de  $M$**  e denotado por  $\partial M$ . As definições feitas para variedades diferenciáveis (e.g., função diferenciável, espaço tangente, orientabilidade, etc.) podem ser estendidas a variedades com bordo trocando-se  $\mathbb{R}^n$  por  $H^n$ .

**Proposição 1.38.** *O bordo  $\partial M$  de uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional com bordo é uma  $(n - 1)$ -variedade diferenciável. Além disso, se  $M$  é orientável, uma orientação em  $M$  induz uma orientação em  $\partial M$ .*

Agora podemos enunciar o teorema de Stokes.

**Proposição 1.39. (Teorema de Stokes):** *Seja  $M^n$  uma variedade com bordo, compacta e orientada. Seja  $\omega$  uma  $(n - 1)$ -forma diferencial em  $M$ , e seja  $i : \partial M \rightarrow M$  a aplicação inclusão do bordo  $\partial M$  em  $M$ . Então*

$$\int_{\partial M} i^* \omega = \int_M d\omega.$$

*Demonstração.* Seja  $K$  o suporte de  $\omega$ . Dividiremos a demonstração em alguns casos.

- 1)  $K \subset V = f(U)$  para alguma parametrização  $f : U \subset H^n \rightarrow M$ . Seja

$$\omega = \sum_{j=1}^n a_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

em  $\mathbf{U}$ . Então,

$$d\omega = \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Se  $f(\mathbf{U}) \cap \partial M = \emptyset$ , então  $\mathbf{K} \cap \partial M = \emptyset$ , o que nos leva a  $\omega = 0$  em  $\partial M$  e  $i^* \omega = 0$ . Portanto,

$$\int_{\partial M} i^* \omega = 0.$$

Resta mostrar que

$$\int_M d\omega = \int_{\mathbf{U}} \left( \sum_j (-1)^{j-1} \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \cdots dx_n = 0$$

Para tal, estendamos as funções  $\mathbf{a}_j$  para  $H^n$  da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_j(\mathbf{x}) &= \mathbf{a}_j(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbf{U} \\ \mathbf{a}_j(\mathbf{x}) &= 0, & \text{se } \mathbf{x} \in H^n \setminus \mathbf{U} \end{aligned}$$

Note que as funções  $\mathbf{a}_j$  são diferenciáveis, uma vez que  $f^{-1}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{U}$ . Agora considere o paralelepípedo  $Q = \prod_{j=1}^n [x_j^1, x_j^0] \subset H^n$  tal que  $f^{-1}(\mathbf{K}) \subset Q^\circ$  e  $x_j^1 \leq x_j \leq x_j^0$ ; em que  $Q^\circ$  representa o interior de  $Q$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{U}} \left( \sum_j (-1)^{j-1} \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \cdots dx_n &= \sum_j (-1)^{j-1} \int_Q \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x_j} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \sum_j (-1)^{j-1} \int [\mathbf{a}_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &\quad - \mathbf{a}_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, \dots, x_n)] dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n = 0; \end{aligned}$$

em que a segunda igualdade é dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo e a última pelo fato de  $\mathbf{a}_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, \dots, x_n) = \mathbf{a}_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, \dots, x_n) = 0$ , para todo  $j$ , por estes serem valores extremos em  $Q$ , i.e., não pertencentes a  $f^{-1}(\mathbf{K})$ .

Agora suponha que  $f(\mathbf{U}) \cap \partial M \neq \emptyset$ . Então a aplicação inclusão  $i$  é aplicação identidade, a menos da primeira coordenada que é anulada, i.e.,  $i(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$ . Portanto, lançando mão da orientação induzida no bordo,

$$i^* \omega = \mathbf{a}_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Considere agora  $P = [x_1^1, 0] \times \prod_{j=2}^n [x_j^1, x_j^0]$  tal que  $f^{-1}(\mathbf{K}) \subset P^\circ \cup \{(0, x_2, \dots, x_n) : x_i \in$

$\mathbb{R}; i = 2, 3, \dots, n\}$ . Então

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_P \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_P [a_1(0, x_2, \dots, x_n) - a_1(x_1^1, x_2, \dots, x_n)] dx_2 \cdots dx_n \\ &\quad + \sum_{j=2}^n (-1)^{j-1} \int [a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &\quad - a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^1, x_{j+1}, \dots, x_n)] dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n. \end{aligned}$$

Como  $a_1(x_1^1, x_2, \dots, x_n) = a_j(x_1, \dots, x_j^0, \dots, x_n) = a_j(x_1, \dots, x_j^1, \dots, x_n) = 0$ ; para  $j = 2, \dots, n$ , temos que

$$\int_M d\omega = \int a_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n = \int_{\partial M} i^* \omega.$$

2) Agora, seja  $\{V_\alpha\}$  uma cobertura de  $M$  por vizinhanças coordenadas compatíveis com a orientação, e sejam  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  uma partição da unidade diferenciável subordinada à  $V_\alpha$ . As formas  $\omega_j = \varphi_j \omega$  satisfazem as condições do item anterior. Além disso,

$$\sum \omega_j = \omega, \quad \sum d\omega_j = d\omega.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_{j=1}^m \int_M d\omega_j = \sum_{j=1}^m \int_{\partial M} i^* \omega_j \\ &= \int_{\partial M} i^* \sum_j \omega_j = \int_{\partial M} i^* \omega. \end{aligned}$$

□

### 1.4.3 Lema de Poincaré

Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável. Uma  $k$ -forma diferencial  $\omega$  em é dita **exata** se existir uma  $k-1$ -forma  $\beta$  tal que  $d\beta = \omega$ ;  $\omega$  é dita fechada se  $d\omega = 0$ . Uma vez que  $d^2 = 0$ , uma forma exata é fechada.

**Definição 1.40.** *Uma variedade diferenciável é dita **contráctil** a algum ponto  $p_0 \in M$ , se existe uma aplicação diferenciável  $H : M \times [0, 1] \rightarrow M$ ,  $H(p, t) \in M$ ,  $p \in M$ ,  $t \in$*

$[0, 1]$  tal que

$$H(\mathbf{p}, 1) = \mathbf{p}, \quad H(\mathbf{p}, 0) = \mathbf{p}_0, \quad \forall \mathbf{p} \in M.$$

Toda variedade diferenciável é localmente contráctil, por ser localmente difeomorfa a um aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

Enunciemos os seguintes lemas que serão cruciais na demonstração do importante Lema de Poincaré, que é o assunto principal desta seção.

**Lema 1.41.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável contráctil. Toda  $k$ -forma  $\bar{\omega}$  em  $M \times \mathbb{R}$  pode ser escrita unicamente da forma*

$$\bar{\omega} = \omega_1 + dt \wedge \eta,$$

em que  $\omega_1$  é uma  $k$ -forma em  $M \times \mathbb{R}$  com a propriedade de  $\omega_1(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = 0$  para algum  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ , pertencente ao  $\ker d\pi$  ( $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  tal que  $\pi(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p}$ ), e  $\eta$  uma  $(k-1)$ -forma com uma propriedade similar.

**Definição 1.42.** *Seja a inclusão  $i_t : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$  definida por  $i_t(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, t)$ . Definimos a aplicação  $I$  que leva  $k$ -formas em  $M \times \mathbb{R}$  a  $(k-1)$ -formas em  $M$  da seguinte maneira: sejam  $\mathbf{p} \in M$  e  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^k \subset T_{\mathbf{p}}M$ , então, em  $\mathbf{p}$ ,*

$$(I\bar{\omega})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}) = \int_0^1 \{\eta(\mathbf{p}, t)(d\mathbf{i}_t(\mathbf{v}_1), \dots, d\mathbf{i}_t(\mathbf{v}_{k-1}))\} dt,$$

em que  $\eta$  é dado conforme o lema anterior.

**Lema 1.43.**  $i_1^*\bar{\omega} - i_0^*\bar{\omega} = d(I\bar{\omega}) + I(d\bar{\omega})$ .

**Lema 1.44. (Lema de Poincaré)** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável contráctil e  $\omega$  uma  $k$ -forma diferenciável em  $M$  com  $d\omega = 0$ . Então  $\omega$  é exata, i.e., existe uma  $(k-1)$ -forma  $\alpha$  em  $M$  tal que  $\omega = d\alpha$ .*

*Demonstração.* Seja  $\pi$  a projeção definida nos lemas anteriores e  $\bar{\omega}$  uma  $k$ -forma em  $M \times \mathbb{R}$  dada por  $\bar{\omega} = H^*\omega$ , onde  $H$  é a aplicação dada pela definição de contractibilidade.

Como  $M$  é contráctil,

$$H \circ i_1 = \text{identidade}, \quad H \circ i_0 = \text{constante} = \mathbf{p}_0 \in M.$$

Portanto,

$$\omega = (H \circ i_1)^*\omega = i_1^*(H^*\omega) = i_1^*\bar{\omega},$$

$$d\omega = 0 = (H \circ i_0)^*\omega = i_0^*(H^*\omega) = i_0^*\bar{\omega}.$$

Então  $d\bar{\omega} = H^*d\omega = H^*0 = 0$ . Do lema anterior,

$$\omega = i_1^*\omega = d(I\bar{\omega}) = d\alpha,$$

em que  $\alpha = I\bar{\omega}$ . □

## 1.5 Teoria de De Rham

### 1.5.1 O complexo de De Rham em $\mathbb{R}^n$

**Definição 1.45.** As  $C^\infty$  formas sobre  $\mathbb{R}^n$  são elementos de

$$\Omega^*(\mathbb{R}^n) := \{ \text{Funções } C^\infty \text{ em } \mathbb{R}^n \} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*;$$

em que  $\Omega^*$  é a álgebra de base  $\{1, dx_i, dx_i dx_j, \dots, dx_1 \cdots dx_n : i < j\}$ , denominada **complexo de De Rham**.

Nota-se que  $\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{q=0}^n \Omega^q(\mathbb{R}^n)$ ; onde  $\Omega^q(\mathbb{R}^n)$  é o espaço das  $q$ -formas em  $\mathbb{R}^n$ , i.e.,  $\Omega^q(\mathbb{R}^n) = \Lambda^q(\mathbb{R}^n)$ . Ressalta-se ainda a existência de um operador diferencial (**diferencial exterior**)

$$d : \Omega^q(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{R}^n)$$

definido de acordo com a Definição 1.1.6, que pela Propriedade 1.1.7.(b) é uma antiderivação.

**Definição 1.46.** A  $q$ -ésima **cohomologia de De Rham** de  $\mathbb{R}^n$  é o espaço vetorial

$$H_{DR}^q = \{q\text{-formas fechadas}\} / \{q\text{-formas exatas}\}$$

O índice DR pode ser omitido na maioria dos casos. Se uma distinção entre a forma  $\omega$  e sua classe cohomológica se fizer necessária, denotaremos esta última por  $[\omega]$ .

Note que as definições deste capítulo funcionam bem para qualquer aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ ; e.g.,  $\Omega^*(U)$  e  $H_{DR}^*(U)$ .

O complexo de De Rham,

$$\dots \xrightarrow{d} \Omega^{q-1} \xrightarrow{d} \Omega^q \xrightarrow{d} \Omega^{q+1} \xrightarrow{d} \dots,$$

é um exemplo de complexo diferencial.

**Definição 1.47.** O **suporte** de uma função contínua  $f$  sobre um espaço topológico  $X$  é o conjunto  $\text{Sup } f = \overline{\{p \in X : f(p) \neq 0\}}$ .

Na definição 1.5.1. definimos a cohomologia de De Rham usando funções  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^n$ . Na definição a seguir nos restringiremos às funções de suporte compacto.

**Definição 1.48.** *Definimos sobre  $\mathbb{R}^n$  o complexo de De Rham com suportes compactos da seguinte maneira:*

$$\Omega_c^* = \{ \text{funções } C^\infty \text{ com suporte compacto} \} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*$$

A cohomologia deste complexo é denotada por  $H_c^*(\mathbb{R}^n)$ .

## 1.5.2 A Sequência Mayer-Vietoris

Na linguagem de álgebra homológica,  $\Omega^*$  é um funtor contravariante da categoria dos espaços euclidianos  $\{\mathbb{R}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e aplicações suaves de  $\mathbb{R}^m$  a  $\mathbb{R}^n$  à categoria das álgebras graduadas comutativas e seus homomorfismos. Este é o único funtor **pullback** de funções em  $\Omega^0(\mathbb{R}^n)$ ; do qual já apresentamos sua ação sobre formas diferenciáveis nas seções anteriores. Por comutatividade da álgebra graduada nos referimos à seguinte propriedade do produto

$$\tau\omega = (-1)^{\deg \tau \deg \omega} \omega\tau.$$

O funtor  $\Omega^*$  pode ser estendido à categoria das variedades diferenciáveis, como mostraremos a seguir.

Retomando os conceitos da Seção 1.3 deste trabalho, uma forma  $\omega$  na variedade diferenciável  $M$  é uma coleção de formas  $\omega_U$  para  $U$  na estrutura diferenciável de  $M$ , que são compatíveis no seguinte sentido: se  $i$  e  $j$  são inclusões de  $U \cap V$  em  $U$  e em  $V$ , respectivamente, então  $i^*\omega_U = j^*\omega_V$  em  $\Omega^*(U \cap V)$ . Lembrando também do fato de uma aplicação suave em variedades  $f : M \rightarrow N$  induzir uma aplicação  $f^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ , temos que  $\Omega^*$  é um funtor contravariante na categoria das variedades diferenciáveis.

A sequência de Mayer-Vietores, que será aqui definida, é uma ferramenta que nos permite calcular a cohomologia da união de dois abertos. Seja  $M$  a união dos abertos  $U$  e  $V$ . Temos a sequência de inclusões

$$M \leftarrow U \sqcup V \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial_0} \\ \xleftarrow{\partial_1} \end{array} U \cap V; \quad (1.4)$$

em que  $U \sqcup V$  é a união disjunta de  $U$  e  $V$  e  $\partial_0$  e  $\partial_1$  são as inclusões de  $U \cap V$  em  $U$  e em  $V$  respectivamente. Definimos a **sequência de Mayer-Vietores**

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & \Omega^*(M) & \rightarrow & \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) & \rightarrow & \Omega^*(U \cap V) & \rightarrow 0 \\ & & & (\omega, \tau) & \mapsto & \tau - \omega & \end{array} \quad (1.5)$$

a partir do funtor contravariante  $\Omega^*$  sobre a sequência (1.4), onde as setas das extremidades são definidas por aplicações triviais; a segunda como restrição de formas, i.e., imagem da forma sob as aplicações pullbacks induzida pelas inclusões,  $i^*, j^*$ ; e a terceira definida como a diferença das aplicações  $\partial_0^*$  e  $\partial_1^*$ .

**Proposição 1.49.** *A sequência de Mayer-Vietoris é exata (veja Definição A.32).*

*Demonstração.* Claramente, a aplicação  $(i^*, j^*)$  é injetiva e sua imagem é igual ao núcleo de  $\partial_0^* - \partial_1^*$ . Então só precisamos mostrar a exatidão no último passo. Primeiro, seja  $M = \mathbb{R}$ . Sejam  $f$  uma função  $C^\infty$  em  $U \cap V$  e  $\{\rho_U, \rho_V\}$  uma partição da unidade

subordinada à cobertura  $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ . Agora note que  $\rho_{\mathbf{U}}f$  e  $\rho_{\mathbf{V}}f$  são funções bem definidas em  $\mathbf{V}$  e em  $\mathbf{U}$ , respectivamente. Ainda,

$$(-\rho_{\mathbf{V}}f, \rho_{\mathbf{U}}f) \mapsto (\rho_{\mathbf{U}}f) - (-\rho_{\mathbf{V}}f) = f,$$

deste modo,  $\Omega^0(\mathbf{U}) \oplus \Omega^0(\mathbf{V}) \rightarrow \Omega^0(\mathbb{R})$  é sobrejetora. Para uma variedade genérica  $\mathbf{M}$ , se  $\omega \in \Omega^q(\mathbf{U} \cap \mathbf{V})$ , então  $(-\rho_{\mathbf{V}}\omega, \rho_{\mathbf{U}}\omega) \in \Omega^q(\mathbf{U}) \oplus \Omega^q(\mathbf{V})$  é mapeada em  $\omega$ .  $\square$

Deste modo, como sequência exata, a sequência de Mayer-Vietoris

$$0 \rightarrow \Omega^*(\mathbf{M}) \rightarrow \Omega^*(\mathbf{U}) \oplus \Omega^*(\mathbf{V}) \rightarrow \Omega^*(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) \rightarrow 0$$

induz a seguinte sequência longa, também chamada de sequência de Mayer-Vietoris,

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \longleftarrow \\ & & & & \swarrow \\ \mathbf{H}^{q+1}(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{H}^{q+1}(\mathbf{U}) \oplus \mathbf{H}^{q+1}(\mathbf{V}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^{q+1}(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) \\ & & \searrow & & \swarrow \\ & & \mathbf{d}^* & & \\ \mathbf{H}^q(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{H}^q(\mathbf{U}) \oplus \mathbf{H}^q(\mathbf{V}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^q(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) \\ & & & & \searrow \\ & & & & \longleftarrow \end{array}$$

Da sequência exata emerge o seguinte diagrama cujas linhas são sequências exatas

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{q+1}(\mathbf{M}) & \longrightarrow & \Omega^{q+1}(\mathbf{U}) \oplus \Omega^{q+1}(\mathbf{V}) & \longrightarrow & \omega^{q+1}(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \mathbf{d} & & \uparrow \mathbf{d} & & \uparrow \mathbf{d} \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^q(\mathbf{M}) & \longrightarrow & \Omega^q(\mathbf{U}) \oplus \Omega^q(\mathbf{V}) & \longrightarrow & \Omega^q(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) \longrightarrow 0 \\ & & & & \uparrow \in & & \uparrow \in \\ & & & & \xi & & \omega \end{array} \quad \mathbf{d}\omega = 0$$

Seja  $\omega \in \Omega^q(\mathbf{U} \cap \mathbf{V})$  uma forma fechada. Pela exatidão das linhas, existe  $\xi \in \Omega^q(\mathbf{U}) \oplus \Omega^q(\mathbf{V})$  cuja imagem é  $\omega$ , a saber,  $\xi = (-\rho_{\mathbf{V}}\omega, \rho_{\mathbf{U}}\omega)$ . Pela comutatividade do diagrama  $\mathbf{d}\xi \mapsto \mathbf{d}\omega = 0$ , i.e.,  $\mathbf{d}(-\rho_{\mathbf{V}}\omega) = \mathbf{d}(\rho_{\mathbf{U}}\omega)$  em  $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ . Novamente, pela exatidão das linhas,  $\mathbf{d}\xi$  é imagem de um elemento em  $\Omega^{q+1}(\mathbf{M})$ . Pelo lema da cobra, este elemento é justamente  $\mathbf{d}^*[\omega]$ , que é independente de escolhas nesta construção. Pode-se mostrar

que a fórmula explícita de  $\omega$  é dada por

$$d^*[\omega] = \begin{cases} [-d(\rho_V \omega)] & \text{em } U \\ [d(\rho_U \omega)] & \text{em } V. \end{cases}$$

Define-se  $\text{Supp } \omega = \overline{\{p \in M : \omega(p) \neq 0\}}$  como o suporte da forma  $\omega$  na variedade  $M$ . Note que  $d^*\omega \in H^*(M)$  tem suporte em  $U \cap V$ , pois  $\omega \in U \cap V$ .

**Exemplo 50. Cohomologia do círculo.** Para o cálculo da cohomologia do círculo  $S^1$ , considera-se uma cobertura de  $S^1$  por dois abertos  $U$  e  $V$ , ambos difeomorfos a um seguimento de reta, cuja a intersecção tem exatamente duas componentes conexas – por exemplo,

$$U = \left\{ (\cos(t), \sin(t)) : t \in \left[ \frac{\pi}{2} - \epsilon, \frac{3\pi}{2} + \epsilon \right] \right\} \quad \text{e} \quad V = \left\{ (\cos(t), \sin(t)) : t \in \left[ -\frac{\pi}{2} - \epsilon, \frac{\pi}{2} + \epsilon \right] \right\};$$

com  $\epsilon$  pequeno.

Note que  $(\ker d) \cap \Omega^0(U)$  são justamente as funções de  $U$  localmente constantes. Como  $U$  é conexo,  $H^0(U) = \mathbb{R}$ , pois toda função localmente constante, neste caso, é globalmente constante. Ainda, pelo lema de Poincaré,  $H^n(U) = 0$  para todo  $n > 0$ . Claramente o mesmo vale para  $V$ . Ainda, usando uma argumentação semelhante, mas ressaltando o fato de  $U \cap V$  ter exatamente duas componentes conexas, chega-se ao resultado

$$H^n(U \cap V) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, a sequência de Mayer-Vietores já fornece a seguinte informação,

$$\begin{array}{ccccccc} & & S^1 & & U \sqcup V & & U \cap V \\ & & & & & & \\ H^2 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & & & & \\ H^1 & & & & \longleftarrow 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \\ H^0 & & & & \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \end{array}$$

$d^*$

Com  $\delta$  sendo a aplicação que associa  $(\omega, \theta)$  a  $(\omega - \theta, \omega - \theta)$ , de modo que  $\dim \text{im } \delta = 1$  e, portanto,  $\dim \ker \delta = 1$ . Portanto,

$$H^0(S^1) = \ker \delta = \mathbb{R}$$

e

$$H^1(S^1) = \text{coker} \delta = \mathbb{R}$$

(Veja Definição A.10).

□

## 1.6 Laplaciano e o Teorema de Hodge

Nesta seção será definido o operador Laplaciano, por meio dos operadores bordo, que permite uma decomposição do espaço das  $p$ -formas sobre o espaço subjacente. Tal decomposição é dada pela soma direta ortogonal de seu núcleo e de sua imagem, mesmo em dimensões infinitas.

**Definição 1.51.** *Seja  $V$  um espaço vetorial  $n$ -dimensional com produto interno. Estendemos o produto interno de  $V$  a  $\Lambda(V)$  fixando-o como sendo zero em elementos que são de graus diferentes, e por*

$$\langle \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_p \rangle = \det \langle \omega_i, \varphi_j \rangle,$$

*estendendo-o por bilinearidade a todo  $\Lambda^p(V)$ . De sorte que uma base de  $\Lambda^p$  correspondente a uma base de  $V$  ortonormal também é ortonormal.*

*Uma **orientação** em  $V$  é uma escolha de uma componente de  $\Lambda^n(V) \setminus \{0\}$ ; ressalta-se que  $\Lambda_n(V)$  é 1-dimensional, dado que  $V$  é  $n$ -dimensional.*

*Seja agora  $V$  orientado com uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  fixada. Define-se sobre ele a transformação linear **estrela***

$$* : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V),$$

*pelo requerimento das seguintes propriedades*

$$*(-1) = \pm e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \quad *(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \pm 1,$$

$$*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) = \pm e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n;$$

*de modo que assume “+” se  $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$  está na componente escolhida de  $\Lambda_n(V)$  pela*

orientação e “−” caso contrário. Ressalta-se que

$$* : \Lambda^p(\mathbf{V}) \rightarrow \Lambda^{n-p}(\mathbf{V}).$$

Segue da definição que

$$** = (-1)^{p(n-p)}$$

e que

$$\langle \omega, \varphi \rangle = *(\omega \wedge *\varphi) = *(\varphi \wedge *\omega).$$

Assim, definimos o operador bordo  $\partial$  que atua sobre as  $p$ -formas levando-as nas  $(p-1)$ -formas por

$$\partial = (-1)^{n(p+1)+1} * d *.$$

Fixa-se  $\partial \equiv 0$  sobre as 0-formas. Com isto estamos em posição de definir o **Laplaciano**, que é o operador linear sobre  $\Lambda^p(\mathbf{M})$ , da seguinte maneira

$$\Delta = \partial d + d \partial;$$

com  $0 \leq p \leq n$ .

Uma forma  $\omega$  é dita **harmônica** se  $\Delta\omega = 0$ . Assim, definimos o espaço das  $p$ -formas harmônicas da seguinte maneira

$$H^p = \{\omega \in \Lambda^p(\mathbf{M}) : \Delta\omega = 0\}.$$

**Teorema 1.52. Teorema da decomposição de Hodge.**

Para cada inteiro não negativo  $P$ ,  $H^P$  tem dimensão finita e vale as seguintes decomposições de  $\Lambda^P(\mathbf{M})$  em somas diretas ortogonais:

$$\begin{aligned} \Lambda^p(\mathbf{M}) &= \Delta(\Lambda^p) \oplus H^p \\ &= d\partial(\Lambda^p) \oplus \partial d(\Lambda^p) \oplus H^p \\ &= d(\Lambda^{p-1}) \oplus \partial(\Lambda^{p+1}) \oplus H^p. \end{aligned}$$

De modo que a ortogonalidade é dada pelo seguinte produto interno:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_{\mathbf{M}} \alpha \wedge *\beta;$$

para todos  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\Lambda^k(\mathbf{M})$ , com  $k$  sendo qualquer inteiro não negativo.

Parte II

Digrafos



# 2 Formas e Caminhos sobre um Conjunto Finito

Recentemente a teoria de Homologia de de Rham foi transportada para o estudo de digrafos [6], possibilitando uma nova abordagem para os problemas da área. Este trabalho visa entender essa nova ferramenta utilizada no estudo da geometria discreta fazendo um paralelo com o caso contínuo; apresentado no primeiro capítulo deste trabalho.

Neste capítulo apresentaremos algumas definições algébricas enunciadas para um conjunto enumerável abstrato, para preparar o arcabouço algébrico da nossa teoria homológica. A conexão feita com a estrutura topológica de grafos finitos, isto é, a teoria homológica de digrafos propriamente dita será apresentada no próximo capítulo.

A linguagem aqui estabelecida é feita em termos de espaços vetoriais de dimensão finita. Isso nos fornece alguns ganhos computacionais e alguns resultados práticos enunciados em termos da dimensão do espaço. Estes resultados são poderosos e o caso finito nos permite abordar uma gama importante de problemas. Todavia, como veremos mais a frente nesse trabalho, não é difícil generalizar a teoria para o caso que nosso conjunto de vértices é enumerável e os objetos algébricos são tratados em termos de módulos. Um leitor atento pode ler este capítulo com tais generalizações em mente; com **bastante cuidado** para não generalizar os resultados que dependem da dimensão do espaço.

## 2.1 Espaço de caminhos e operador bordo

Sejam  $V \neq \emptyset$  um conjunto finito arbitrário cujos elementos serão chamados de vértices e  $\mathbb{K}$  um corpo de escalares.

## 2 Formas e Caminhos sobre um Conjunto Finito

**Definição 2.1.** Dado um inteiro não negativo  $p$ , um  $p$ -caminho elementar sobre o conjunto  $V$  é uma sequência de  $p + 1$  vértices (não necessariamente distintos)  $\{i_k\}_{k=0}^p$  de  $V$ . Para  $p = -1$  fixe um caminho como sendo o conjunto vazio  $\emptyset$ .

O  $p$ -caminho  $\{i_k\}_{k=0}^p$  será denotado também por  $i_0 \cdots i_p$  (sem delimitadores entre os vértices) ou por  $e_{i_0 \cdots i_p}$ ; de modo que  $e = \emptyset$ .

**Definição 2.2.** O  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial das  $\mathbb{K}$ -combinações lineares formais de todos os  $p$ -caminhos elementares será denotado por  $\Lambda_p = \Lambda_p(V, \mathbb{K})$  e seus elementos serão chamados por  $p$ -caminhos em  $V$ .

Segue da definição que  $\{e_{i_0 \cdots i_p} : i_0, \dots, i_p \in V\}$  é uma base para  $\Lambda_p$  de modo que cada  $p$ -caminho  $v$  tem uma única representação da forma

$$v = \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} v^{i_0 \cdots i_p} e_{i_0 \cdots i_p} \quad (2.1)$$

na qual  $v^{i_0 \cdots i_p} \in \mathbb{K}$ . Deste modo,  $\Lambda_{-1} \cong \mathbb{K}$ .

**Exemplo 3.** Seja  $V = \{i, j, k\}$ . Temos que:

$$\Lambda_{-1} = [e = \emptyset]$$

$$\Lambda_0 = [e_i, e_j, e_k]$$

$$\Lambda_1 = [e_{ii}, e_{ij}, e_{ik}, e_{ji}, e_{jj}, e_{jk}, e_{ki}, e_{kj}, e_{kk},]$$

E assim por diante. □

Para que possamos introduzir o conceito de homologia faz-se necessária a seguinte definição:

**Definição 2.4.** Dado um inteiro  $p \geq 0$ , o **operador bordo**  $\partial : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_{p-1}$  é o operador linear que definimos sobre os  $p$ -caminhos elementares de seguinte maneira:

$$\partial e_{i_0 \cdots i_p} = \sum_{q=0}^p (-1)^q e_{i_0 \cdots \widehat{i}_q \cdots i_p} \quad (2.2)$$

em que o circunflexo  $\widehat{i}_q$  denota a omissão do índice  $i_q$ .

De acordo com o Exemplo 2.1 temos que  $\partial e_{ij} = e_j - e_i$ .

Este operador pode ser facilmente estendido para qualquer  $p$ -caminho por linearidade, de modo que dado  $v \in \Lambda_p$  como na equação (2.1),

$$\partial v = \partial \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} v^{i_0 \cdots i_p} e_{i_0 \cdots i_p} =$$

$$\begin{aligned} \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} v^{i_0 \dots i_p} \partial e_{i_0 \dots i_p} &= \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} v^{i_0 \dots i_p} \sum_{q=0}^p (-1)^q e_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_p} = \\ &= \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} \sum_{q=0}^p v^{i_0 \dots i_p} (-1)^q e_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_p}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Como  $\partial v \in \Lambda_{p-1}$ ,

$$\partial v = \sum_{j_0 \dots j_{p-1}} (\partial v)^{j_0 \dots j_{p-1}} e_{j_0 \dots j_{p-1}}. \quad (2.4)$$

De (2.3) e (2.4) segue que

$$\begin{aligned} (\partial v)^{j_0 \dots j_{p-1}} &= \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} \sum_{q=0}^p v^{i_0 \dots i_p} (-1)^q (e_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_p})^{j_0 \dots j_{p-1}} = \\ &= \sum_{k \in V} \sum_{q=0}^p (-1)^q v^{j_0 \dots j_{q-1} k j_{q+1} \dots j_{p-1}}; \end{aligned}$$

$$\text{dado que } (e_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_p})^{j_0 \dots j_{p-1}} = \begin{cases} 1, & \text{se } i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_p = j_0 \dots j_{p-1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Destaca-se:

$$(\partial v)^{j_0 \dots j_{p-1}} = \sum_{k \in V} \sum_{q=0}^p (-1)^q v^{j_0 \dots j_{q-1} k j_{q+1} \dots j_{p-1}} \quad (2.5)$$

Agora, para que nossa teoria homológica esteja bem construída, fixe  $\Lambda_{-2} = \{0\}$  de modo que  $\partial : \Lambda_{-1} \rightarrow \Lambda_{-2}$  seja o operador nulo. Resta agora mostrar o seguinte lema para que  $\partial$  em conjunto com os espaços  $\Lambda_p$  formem um complexo de cadeia:

**Lema 2.5.**  $\partial^2 = 0$ .

*Demonstração.* Note que  $\partial^2 : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_{p-2}$ , portanto o lema só faz sentido para  $p \geq 0$ .

O caso  $p = 0$  é trivial, então seja  $p > 0$ .

$$\partial e_{i_0 \dots i_p} = \sum_{q=0}^p (-1)^q e_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_p},$$

portanto

$$\partial^2 e_{i_0 \dots i_p} = \sum_{q=0}^p (-1)^q \partial e_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_p}$$

## 2 Formas e Caminhos sobre um Conjunto Finito

Aplicando-se o bordo sobre  $e_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_p}$ ,

$$\partial e_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_p} = \sum_{q=0}^p (-1)^q \left( \sum_{r=0}^{q-1} (-1)^r e_{i_0 \dots \widehat{i}_r \dots \widehat{i}_q \dots i_p} + \sum_{r=q+1}^p (-1)^{r-1} e_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots \widehat{i}_r \dots i_p} \right)$$

Como  $(-1)^q (-1)^{r-1} = (-1)^{q+r-1} = -(-1)^{q+r}$ , segue que o último termo da igualdade acima é igual a

$$\sum_{0 \leq r < q \leq p} (-1)^{q+r} e_{i_0 \dots \widehat{i}_r \dots \widehat{i}_q \dots i_p} - \sum_{0 \leq q < r \leq p} (-1)^{q+r} e_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots \widehat{i}_r \dots i_p}.$$

Note que invertendo os índices  $q$  e  $r$  no último somatório temos que  $\partial^2 e_{i_0 \dots i_p} = 0$ . □

Deste modo temos o complexo de cadeias bem definido,

$$0 \leftarrow \mathbb{K} \leftarrow \Lambda_0 \leftarrow \dots \leftarrow \Lambda_{p-1} \leftarrow \Lambda_p \leftarrow \dots \quad (2.6)$$

em que as setas são dadas pelo operador  $\partial$  (para definição de complexo de cadeia veja a definição [A.31](#) no Apêndice A).

## 2.2 Junção de caminhos

**Definição 2.6.** *Definimos a operação **junção** sobre caminhos  $u \in \Lambda_p$  e  $v \in \Lambda_q$  por sua imagem  $uv \in \Lambda_{p+q+1}$  de modo que*

$$(uv)^{i_0 \dots i_p j_0 \dots j_q} = u^{i_0 \dots i_p} v^{j_0 \dots j_q}. \quad (2.7)$$

A associatividade desta operação se dá como consequência imediata da associatividade do produto no corpo. Agora, note que de (2.7) temos que

$$e_{i_0 \dots i_p} e_{j_0 \dots j_q} = e_{i_0 \dots i_p j_0 \dots j_q} \quad (2.8)$$

donde concluímos que não vale a comutatividade da junção.

Se  $p = -2$  e  $q \geq -1$  (ou vice-versa) fixamos  $uv = 0$ .

Aplicando (2.2) a (2.8) e estendendo o resultado por linearidade a junções de caminhos arbitrários temos:

**Lema 2.7. (Regra do produto)** *Para todos  $p, q \geq -1$  e  $u \in \Lambda_p$  e  $v \in \Lambda_q$  temos*

$$\partial(uv) = (\partial u)v + (-1)^{p+1} u \partial v. \quad (2.9)$$

## 2.3 Caminhos regulares

Note que caminhos em  $V$  podem ou não conter **loops**, isto é, conter subcaminhos da forma  $ii$ . Claramente a presença, ou não, de tais caminhos repercute diretamente em seu bordo, que é de suma relevância em nossos estudos. Também vários resultados importantes, como a fórmula de Künneth, dependem fortemente da regularidade dos nossos complexos. Por isso destacam-se as definições e os resultados a seguir.

**Definição 2.8.** *Um caminho  $i_0 \cdots i_p$  é dito **irregular** se  $i_{k-1} = i_k$  para algum  $k \in \{1, \dots, p\}$  e **regular** caso contrário.*

No Exemplo 2.1 o caminho  $e_{ii}$  exemplifica um caminho irregular, ao passo que  $e_{ij}$  é regular.

Para todo  $p \geq -1$  definimos o subespaço dos caminhos regulares de  $\Lambda_p$  da seguinte maneira:

$$\mathcal{R}_p = \mathcal{R}_p(V) := \text{span}\{e_{i_0 \cdots i_p} : i_0 \cdots i_p \text{ é regular}\}$$

Claramente  $\mathcal{R}_p = \Lambda_p$  se  $p \leq 0$  e  $\mathcal{R}_p \subsetneq \Lambda_p$  caso contrário. Definimos de maneira análoga o espaço gerado pelos caminhos irregulares de  $\Lambda_p$ :

$$\mathcal{J}_p = \mathcal{J}_p(V) := \text{span}\{e_{i_0 \cdots i_p} : i_0 \cdots i_p \text{ é irregular}\}$$

Voltando ao Exemplo 2.1 temos que

$$\mathcal{J}_0 = \{0\}$$

$$\mathcal{J}_1 = \text{span}\{e_{ii}, e_{jj}, e_{kk}\}$$

Fixando  $\mathcal{R}_{-2} = \mathcal{J}_{-2} = \{0\}$  e tomando em nossa atenção que um  $p$ -caminho elementar é ou regular ou irregular (se não for nulo) e que  $p$ -caminhos arbitrários são  $\mathbb{K}$ -combinações lineares de caminhos elementares, temos que  $\Lambda_p = \mathcal{R}_p \oplus \mathcal{J}_p$  para todo  $p \geq -2$ . Disto segue que

$$\mathcal{R}_p \cong \widetilde{\mathcal{R}}_p := \Lambda_p / \mathcal{J}_p.$$

**Definição 2.9.** *Os elementos de  $\mathcal{R}_p$  são chamados **p-caminhos regulares**. As classes de equivalência  $v \bmod \mathcal{J}_p \in \widetilde{\mathcal{R}}_p$  (com  $v \in \Lambda_p$ ) são chamadas **p-caminhos regularizados**.*

Note que subtração de quaisquer dois caminhos regulares é um caminho regular e que em cada classe de equivalência módulo  $\mathcal{J}_p$  não nula há um caminho regular, pois caso supuséssemos que não haja tal caminho em uma dada classe, esta seria formada apenas por caminhos irregulares, sendo ela justamente a classe nula; assim, qualquer  $p$ -caminho regularizado tem exatamente um representante nos  $p$ -caminhos regulares.

Claramente as operações bordo e junção não preservam regularidade. Isto não é interessante pelo fato de não conseguirmos fazer um complexo de cadeia dos espaços

## 2 Formas e Caminhos sobre um Conjunto Finito

regulares com respeito ao operador bordo aqui definido, dentre outros motivos que ficarão claros no decorrer deste trabalho. Podemos contornar este problema facilmente definindo novos operadores  $\partial$  e junção sobre  $\mathcal{R}_p$  como **pullbacks** de  $\widetilde{\mathcal{R}}_p$  pelo isomorfismo natural  $\mathcal{R}_p \rightarrow \widetilde{\mathcal{R}}_p$ . Para que isso faça sentido faz-se necessário o seguinte resultado:

**Lema 2.10.** *Sejam  $p, q \geq -1$ .*

(a) *Se  $v_1, v_2 \in \Lambda_p$  e  $v_1 = v_2 \pmod{\mathcal{J}_p}$  então  $\partial v_1 = \partial v_2 \pmod{\mathcal{J}_{p-1}}$ .*

(b) *Sejam  $u_1, u_2 \in \Lambda_p$  e  $v_1, v_2 \in \Lambda_q$ . Se  $u_1 = u_2 \pmod{\mathcal{J}_p}$  e  $v_1 = v_2 \pmod{\mathcal{J}_q}$  então  $u_1 v_1 = u_2 v_2 \pmod{\mathcal{J}_{p+q+1}}$ .*

*Demonstração.* (a) Note que para  $p \leq 0$  o fato é trivial, dado que, neste caso,  $\mathcal{J}_p = \{0\}$ . Agora, caso  $p \geq 1$ , note que  $v_1 = v_2 \pmod{\mathcal{J}_p}$  implica que um caminho regular  $e_{i_0 \dots i_p}$  aparece na representação de  $v_1$ , conforme (2.1), se, e somente se, ele também aparece na representação de  $v_2$ . Então precisamos apenas nos preocupar com os caminhos elementares irregulares que compõem  $v_1$  e  $v_2$ . Provaremos que se  $e_{i_0 \dots i_p}$  é irregular, então  $\partial e_{i_0 \dots i_p}$  também o é. De fato, se  $e_{i_0 \dots i_p}$  é irregular com  $i_k = i_{k+1}$ , então

$$\begin{aligned} \partial e_{i_0 \dots i_p} &= \sum_{q=0}^{k-1} (-1)^q e_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_p} + (-1)^k e_{i_0 \dots i_{k-1} i_{k+1} i_{k+2} \dots i_p} + \\ &(-1)^{k+1} e_{i_0 \dots i_{k-1} i_k i_{k+2} \dots i_p} + \sum_{q=k+2}^p (-1)^q e_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_p} \end{aligned}$$

Como  $i_k = i_{k+1}$ ,  $(-1)^k e_{i_0 \dots i_{k-1} i_{k+1} i_{k+2} \dots i_p} + (-1)^{k+1} e_{i_0 \dots i_{k-1} i_k i_{k+2} \dots i_p} = 0$ , ao passo que todos os outros termos são irregulares por conterem a dupla  $i_k i_{k+1}$ , portanto  $\partial e_{i_0 \dots i_p} \in \mathcal{J}_{p-1}$ .

Estendendo este resultado por linearidade provamos a proposição.

(b) Inicialmente, mostremos que se  $u = 0 \pmod{\mathcal{J}_p}$  ou  $v = 0 \pmod{\mathcal{J}_q}$ , então  $uv = 0 \pmod{\mathcal{J}_{p+q+1}}$ . O fato é trivial para  $p \leq 0$  pelos motivos expressos no item anterior. Agora, seja  $p \geq q$ ,  $u = 0 \pmod{\mathcal{J}_p}$  implica que  $u$  é combinação linear de caminhos elementares irregulares. Claramente a junção de caminhos elementares irregulares com qualquer caminho é irregular, o que prova o fato.

Como

$$u_1 v_1 - u_2 v_2 = (u_1 - u_2) v_1 + u_2 (v_1 - v_2)$$

e

$$u_1 - u_2 = 0 \pmod{\mathcal{J}_p}, \quad v_1 - v_2 = 0 \pmod{\mathcal{J}_q},$$

então,

$$u_1 v_1 - u_2 v_2 = 0 \pmod{\mathcal{J}_{p+q+1}},$$

o que nos leva a

$$u_1 v_1 = u_2 v_2 \pmod{\mathcal{J}_{p+q+1}}.$$

□

Estes operadores assim definidos serão chamados de **regulares**. Os definidos anteriormente sobre os espaços  $\Lambda_p$ , que não preservam regularidade, serão chamados de **irregulares**.

**Exemplo 11.**

- Operadores irregulares:

$$\partial e_{iji} = e_{ji} - e_{ii} + e_{ij} \text{ e } e_i e_i = e_{ii}$$

- Operadores regulares:

$$\partial e_{iji} = e_{ji} + e_{ij} \text{ e } e_i e_i = 0.$$

□

Deste modo temos o complexo de cadeia **regular** do conjunto  $V$ :

$$0 \leftarrow \mathbb{K} \leftarrow \mathcal{R}_0 \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{R}_{p-1} \leftarrow \mathcal{R}_p \leftarrow \cdots \quad (2.10)$$

em que as setas são dadas pelo operador bordo regular.

Note que se  $V' \subset V$  então cada caminho regular  $e_{i_0 \dots i_p}$  em  $V'$  também é regular em  $V$  e  $\partial e_{i_0 \dots i_p}$  tem mesma fórmula em  $\mathcal{R}_{p-1}(V')$  e em  $\mathcal{R}_{p-1}(V)$ ; portanto,  $\partial$  comuta com a inclusão.

## 2.4 Formas e o Diferencial exterior

Nesta seção o paralelo entre o caso contínuo e o discreto se torna bastante evidente. Aqui definiremos  $p$ -formas e o diferencial exterior sobre essas formas sobre o conjunto finito e não-vazio  $V$ . Estes conceitos serão essenciais para uma abordagem do problema por meio da topologia algébrica, assim como feito com variedades.

**Definição 2.12.** *Considere o inteiro  $p \geq -1$ . Denote por  $\Lambda^p = \Lambda^p(V)$  o  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial das aplicações de*

$$V^{p+1} = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p+1 \text{ termos}}$$

sobre o corpo. Deste modo,  $\Lambda^0 = \{\text{aplicações de } V \text{ em } \mathbb{K}\}$ , e, fixando  $V^0 := \{0\}$ , identificamos  $\Lambda^{-1}$  com  $\mathbb{K}$ .

Os elementos de  $\Lambda^p$  são denominados por  **$p$ -formas** sobre  $V$ .

## 2 Formas e Caminhos sobre um Conjunto Finito

A imagem do ponto  $(i_0, i_1, \dots, i_p) \in V^{p+1}$  pela forma  $\omega \in \Lambda^p$  será denotada por  $\omega_{i_0 \dots i_p}$ .

Fixando as  $p$ -formas ditas **elementares** como as da forma  $e^{j_0 \dots j_p} = \mathbb{I}_{\{(j_0, \dots, j_p)\}}$ ; em que  $\mathbb{I}_A$  é a função indicadora do conjunto  $A$ , temos claramente que uma dada forma  $\omega \in \Lambda^p$  pode ser escrita como

$$\omega = \sum_{j_0, \dots, j_p \in V} \omega_{j_0 \dots j_p} e^{j_0 \dots j_p};$$

donde extrai-se que  $\{e^{j_0 \dots j_p} : j_0, \dots, j_p \in V\}$  é uma base para  $\Lambda^p$ .

Sejam agora  $\omega \in \Lambda^p$  e  $\nu \in \Lambda_p$ . Definimos o pareamento natural entre  $p$ -formas e  $p$ -caminhos (em paralelo ao pareamento natural entre formas e campos vectoriais no caso contínuo) da seguinte maneira:

$$(\omega, \nu) := \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} \omega_{i_0 \dots i_p} \nu^{i_0 \dots i_p}. \quad (2.11)$$

Claramente  $\Lambda_p$  e  $\Lambda^p$  são duais com respeito a este pareamento.

**Definição 2.13.** Definimos o operador *diferencial exterior*  $d : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p+1}$  por

$$(d\omega)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{q=0}^{p+1} (-1)^q \omega_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_{p+1}}, \quad (2.12)$$

para cada  $\omega \in \Lambda^p$ .

Novamente, a definição sugere um paralelo com o caso do diferencial na teoria de De Rham, que goza da  $k$ -linearidade alternada. Veja (1.1).

Dadas estas definições concluímos:

**Lema 2.14.** Os operadores  $\partial : \Lambda_{p+1} \rightarrow \Lambda_p$  e  $d : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p+1}$  são duais, i.e., dado  $p \geq -2$  vale que para cada  $p$ -forma  $\omega$  e para cada  $(p+1)$ -caminho  $\nu$ ,

$$(d\omega, \nu) = (\omega, \partial\nu)$$

Este resultado é facilmente demonstrado provando-o para os caminhos elementares e estendendo-o por linearidade para o caso geral.

Disto segue que  $(d^2\omega, \nu) = (\omega, \partial^2\nu) = 0$  quaisquer que sejam  $\omega \in \Lambda^p$  e  $\nu \in \Lambda_{p+2}$ ; portanto,  $d^2\omega = 0$  para todo  $\omega$ , i.e.,  $d^2 = 0$ .

Deste modo temos o complexo de cocadeia

$$0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow \Lambda_0 \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda_p \rightarrow \Lambda_{p+1} \rightarrow \dots \quad (2.13)$$

cujas setas são dadas pelo operador  $d$ . Este complexo é dual ao complexo (2.6).

## 2.5 Concatenação de formas

Será de nosso interesse garantir uma estrutura de álgebra diferencial graduada para  $(\Lambda, d)$ , onde

$$\Lambda = \bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^p$$

Para tal faz-se necessária a próxima definição, que é um paralelo do cup product da topologia algébrica.

**Definição 2.15.** Para  $p, q \geq 0$  e para quaisquer duas formas  $\varphi \in \Lambda^p$  e  $\psi \in \Lambda^q$ , definimos sua **concatenação**  $\varphi\psi \in \Lambda^{p+q}$  por

$$(\varphi\psi)_{i_0 \dots i_{p+q}} = \varphi_{i_0 \dots i_p} \psi_{i_{p+1} \dots i_{p+q}} \quad (2.14)$$

Poderíamos definir a concatenação equivalentemente por meio das formas elementares da seguinte maneira:

$$e^{i_0 \dots i_p} e^{j_0 \dots j_q} = \begin{cases} 0, & i_p \neq j_0 \\ e^{i_0 \dots i_p j_1 \dots j_q}, & i_p = j_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Evidentemente esta operação é associativa e não-comutativa.

Deste modo, temos que  $\Lambda$  é uma álgebra graduada com respeito à operação concatenação.

Para que ela tenha a estrutura desejada, i.e., de álgebra **diferencial** graduada, basta utilizar seguinte lema.

**Lema 2.16.** Dados  $p, q \geq 0$  e  $\varphi \in \Lambda^p$  e  $\psi \in \Lambda^q$ , temos

$$d(\varphi\psi) = (d\varphi)\psi + (-1)^p \varphi d\psi \quad (2.16)$$

*Demonstração.*

$$(d(\varphi\psi))_{i_0 \dots i_{p+q+1}} = \sum_{r=0}^{p+q+1} (-1)^r (\varphi\psi)_{i_0 \dots \widehat{i}_r \dots i_{p+q+1}}$$

Para podermos lidar com cada forma separadamente, dividimos o somatório acima pelos índices de cada forma, obtendo:

$$\sum_{r=0}^p (-1)^r (\varphi\psi)_{i_0 \dots \widehat{i}_r \dots i_{p+1} \dots i_{p+q+1}} + \sum_{p+1}^{p+q+1} (-1)^r (\varphi\psi)_{i_0 \dots i_p \dots \widehat{i}_r \dots i_{p+q+1}}$$

## 2 Formas e Caminhos sobre um Conjunto Finito

Utilizando a definição de concatenação separamos o índices das formas nos somatórios acima obtendo:

$$\sum_{r=0}^p (-1)^r \varphi_{i_0 \dots \widehat{i_r} \dots i_{p+1}} \psi_{i_{p+1} \dots i_{p+q+1}} + \sum_{p+1}^{p+q+1} (-1)^r \varphi_{i_0 \dots i_p} \psi_{i_p \dots \widehat{i_r} \dots i_{p+q+1}}$$

Usando a definição do diferencial exterior e operações algébricas simples sobre a fórmula acima temos

$$\begin{aligned} (d(\varphi\psi))_{i_0 \dots i_{p+q+1}} &= [(d\varphi)_{i_0 \dots i_{p+1}} - (-1)^{p+1} \varphi_{i_0 \dots i_p}] \psi_{i_{p+1} \dots i_{p+q+1}} \\ &\quad + (-1)^p \varphi_{i_0 \dots i_p} [(d\psi)_{i_p \dots i_{p+q+1}} - \psi_{i_{p+1} \dots i_{p+q+1}}] \\ &= ((d\varphi)\psi)_{i_0 \dots i_{p+q+1}} + (-1)^p (\varphi d\psi)_{i_0 \dots i_{p+q+1}} \end{aligned}$$

□

## 2.6 Formas regulares

Em paralelo ao conceito de caminhos regulares pode-se facilmente restringir a teoria de formas para o caso das formas regulares. O conceito de regularidade aqui influenciará em nosso estudo topológico por meio do diferencial exterior, dado que alguns resultados importantes, como a fórmula de Künneth, só valem com condição de regularidade.

**Definição 2.17.** Para um dado inteiro  $p \geq -2$  defina o subespaço de  $\Lambda^p$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^p &= \mathcal{R}^p(V) = \text{span}\{e^{i_0 \dots i_p} : i_0 \dots i_p \text{ é regular}\} = \\ &= \{\omega \in \Lambda^p : \omega_{i_0 \dots i_p} = 0 \text{ se } i_0 \dots i_p \text{ é irregular}\} \end{aligned}$$

Os elementos de  $\mathcal{R}^p$  são chamados **p-formas regulares**.

Nosso objetivo é criar uma álgebra diferencial graduada em paralelo ao feito na seção anterior, porém sobre a soma direta

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{R}^p.$$

Para tal precisamos enunciar alguns resultados.

**Lema 2.18.** (a) Se  $\omega \in \mathcal{R}^p$  então  $d\omega \in \mathcal{R}^{p+1}$ .

(b) Sejam  $p, q \geq 0$ . Se  $\varphi \in \mathcal{R}^p$  e  $\psi \in \mathcal{R}^q$  então  $\varphi\psi \in \mathcal{R}^{p+q}$ .

(c) Se  $\omega \in \mathcal{R}^p$ ,  $v_1, v_2 \in \Lambda_p$  e  $v_1 = v_2 \pmod{\mathcal{J}_p}$  então  $(\omega, v_1) = (\omega, v_2)$ .

*Demonstração.* (a) Basta mostrar que

$$(\mathbf{d}\omega)_{i_0 \dots i_{p+1}} = 0$$

para todo  $i_0 \dots i_{p+1}$  irregular, com  $i_k = i_{k+1}$ . De fato,

$$\begin{aligned} (\mathbf{d}\omega)_{i_0 \dots i_{p+1}} &= \sum_{q=0}^{p+1} (-1)^q \omega_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_{p+1}} = \\ &= \sum_{q=0}^{k-1} (-1)^q \omega_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_k i_{k+1} \dots i_{p+1}} + (-1)^k \omega_{i_0 \dots i_{k-1} i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{p+1}} + \\ &+ (-1)^{k+1} \omega_{i_0 \dots i_{k-1} i_k i_{k+2} \dots i_{p+1}} + \sum_{q=k+2}^{p+1} (-1)^q \omega_{i_0 \dots i_k i_{k+1} \dots \widehat{i}_q \dots i_{p+1}} \end{aligned}$$

Note que o par  $i_k i_{k+1}$  se faz presente em todos os termos dos somatórios acima, que são consequentemente zerados pela regularidade de  $\omega$ . O que nos deixa com

$$\begin{aligned} (\mathbf{d}\omega)_{i_0 \dots i_{p+1}} &= \\ &= (-1)^k \omega_{i_0 \dots i_{k-1} i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{p+1}} + (-1)^{k+1} \omega_{i_0 \dots i_{k-1} i_k i_{k+2} \dots i_{p+1}} = 0 \end{aligned}$$

dado que  $i_k = i_{k+1}$ .

(b) Suponha que  $\varphi\psi \notin \mathcal{R}^{p+q}$ , então

$$(\varphi\psi)_{i_0 \dots i_{p+q}} \neq 0$$

para algum  $i_0 \dots i_p$  irregular, com  $i_k = i_{k+1}$ . Deste modo

$$\varphi_{i_0 \dots i_p} \psi_{i_p \dots i_{p+q}} \neq 0,$$

i.e.,

$$\varphi_{i_0 \dots i_p} \neq 0 \text{ e } \psi_{i_p \dots i_{p+q}} \neq 0.$$

Mas  $i_k i_{k+1}$  está presente em  $i_0 \dots i_p$  ou em  $i_p \dots i_{p+q}$ , então  $\varphi \notin \mathcal{R}^p$  ou  $\psi \notin \mathcal{R}^q$ .

O resultado segue por contrapositiva.

(c) Segue do fato de que  $v_1 - v_2 \in \mathcal{J}_p$  e de que  $(\omega, e_{i_0 \dots i_p}) = 0$  para todo caminho irregular  $i_0 \dots i_p$ , que  $(\omega, v_1 - v_2) = 0$ , então  $(\omega, v_1) = (\omega, v_2)$ .

□

De (c) segue que os espaços  $\mathcal{R}^p$  e  $\widetilde{\mathcal{R}}_p$  (ou,  $\mathcal{R}_p$ , trocando-se a classe por seu representante) e os operadores  $\mathbf{d} : \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^{p+1}$  e  $\widehat{\mathbf{d}} : \widetilde{\mathcal{R}}_{p+1} \rightarrow \widetilde{\mathcal{R}}_p$  são duais.

## 2 Formas e Caminhos sobre um Conjunto Finito

Deste modo obtemos o **complexo de cocadeia regular**

$$0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{R}^0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^{p+1} \rightarrow \dots$$

dual ao complexo de cadeia regular (2.10).

# 3

## Homologia Discreta

### 3.1 Complexos de caminhos, complexos simpliciais e digrafos

Nesta seção apresentaremos o conceito de digrafo e construiremos sobre eles complexos de caminhos, o que nos permitirá dar um significado geométrico para as definições feitas no capítulo anterior e apresentarmos de fato uma teoria homológica – baseada nas teorias homológicas para variedades, em especial a apresentada na primeira parte desse trabalho.

**Definição 3.1.** *Um complexo de caminhos sobre um conjunto  $V$  é uma coleção não vazia  $P$  de caminhos elementares em  $V$  com a seguinte propriedade: para todo  $n \geq 0$ ,*

*Se  $i_0 \cdots i_n \in P$  então  $i_0 \cdots i_{n-1}$  e  $i_1 \cdots i_n$  também pertencem a  $P$ . (\*)*

Denotaremos o conjunto dos  $n$ -caminhos de  $P$  por  $P_n$ ; assim,  $P = \{P_n\}_{n=-1}^{\infty}$ , em que  $P_{-1} = \{e\}$ . Fixado um complexo de caminhos  $P$ , um caminho será dito **permitido** se pertencer a  $P$ , caso contrário ele será dito **não-permitido**.

Nos restringiremos aos casos em que  $V = P_0$ , pois a não adoção desta medida apenas nos traria infortúnios sem nenhum ganho adicional. Os elementos de  $P_0$  serão chamados de **vértices**, ao passo que os de  $P_1$  serão chamados de **arestas** (direcionadas) de  $P$ . Note que se  $i_0 \cdots i_n \in P$  então  $i_k i_{k+1} \in P_1$  e  $i_k, i_{k+1} \in P_0$  para todo  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .

**Definição 3.2.** *Um complexo simplicial abstrato  $S$  é uma coleção de subconjuntos de um conjunto de vértices finito  $V$  que satisfaz a propriedade de que para todo elemento  $s \in S$  o conjunto das partes  $\mathcal{P}(s)$  também é subconjunto de  $S$ .*

Será de nosso interesse correlacionar os conceitos definidos nessa seção futuramente. Para tal, daremos uma definição equivalente para complexo simplicial mais adequada para nosso contexto.

Enumeremos os elementos de  $V$  por naturais distintos e identifiquemos qualquer subconjunto  $s$  de  $V$  pelo caminho elementar formado pelos elementos de  $s$  postos em ordem

estritamente crescente. Deste modo  $S$  pode ser visto como uma coleção de caminhos elementares em  $V$ . Diremos que  $S$  é um simplexo se para cada caminho elementar de  $S$  qualquer subsequência sua também pertencer a  $S$ . Neste caso, denotaremos os elementos de  $S$  por  $[i_0, \dots, i_p]$ ; sendo que  $i_j \in V$ .

Claramente todo complexo simplicial  $S$  é também um complexo de caminhos. Os  $n$ -caminhos elementares permitidos em  $S$  são exatamente os  $n$ -simplexos.

**Definição 3.3.** Um **digrafo** é uma dupla  $G = (V, E)$  tal que  $V$  é um conjunto finito de vértices com uma relação binária  $E$ . Denotaremos  $(i, j) \in E$  por  $i \rightarrow j$ . Os elementos de  $E$  são ditos **arestas**.

Se pedirmos que  $E$  goze de uma propriedade simétrica e indetificarmos as arestas  $(i, j)$  e  $(j, i)$ , então  $G = (V, E)$  é dito um **grafo**.

Neste trabalho nos restringiremos ao estudo de digrafos, i.e., mesmo se  $E$  for uma relação simétrica, não faremos a identificação  $(i, j) = (j, i)$ .

Um  $n$ -caminho elementar  $i_0 \cdots i_n$  em  $V$  é dito **permitido** se  $i_{k-1} \rightarrow i_k$  para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Denotaremos  $P_n(G) := P_n$  o conjunto dos  $n$ -caminhos permitidos. Em particular  $P_0 = V$  e  $P_1 = E$ . Claramente,  $P(G) := \{P_n\}$  é um complexo de caminhos, naturalmente associado ao digrafo  $G$ .

**Proposição 3.4.** Um complexo de caminhos é dado por um digrafo se, e somente se, para um dado caminho  $i_0 \cdots i_n$  se todos os pares  $i_{k-1}i_k$  são permitidos então todo o caminho  $i_0 \cdots i_n$  é permitido.

*Demonstração.* A suficiência é dada diretamente pela definição de um  $n$ -caminho elementar permitido em um grafo, dado que  $i_0 \cdots i_n$  é permitido somente se  $i_{k-1} \rightarrow i_k$  para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

Agora, se todo caminho  $i_0 \cdots i_n$  cujos pares  $i_{k-1}i_k$  são permitidos for permitido, então este complexo é dado pelo digrafo cujo conjunto dos vértices é justamente o conjunto de todos os elementos que figuram nestes pares e o conjunto das arestas é dado justamente por tais pares.  $\square$

**Definição 3.5.** Um complexo de caminhos  $P$  é **perfeito** se qualquer subsequência de qualquer caminho elementar permitido de  $P$  for também um caminho permitido.

**Definição 3.6.** Um complexo de caminhos  $P$  é dito **monótono** se existir uma função real injetiva sobre o conjunto de vértices de  $P$  que é estritamente crescente ao longo de qualquer caminho de  $P$ .

Estas definições nos levam à seguinte proposição:

**Proposição 3.7.** Um complexo de caminhos  $P$  é o complexo de caminho de um complexo simplicial se, e somente se, for perfeito e monótono.

*Demonstração.* O complexo de caminhos de um complexo simplicial é perfeito e monótono por definição. Agora, se  $P$  é monótono e perfeito, os vértices de  $i_0 \cdots i_p \in P$  são todos distintos. Note que este fato somado ao fato da perfeição de  $P$  nos garante que  $S = \{[i_0, \dots, i_n] : i_0 \cdots i_n \in P\}$  é um complexo simplicial. Usando a função da condição de monotonicidade para ordenar os vértices de  $S$ , vemos que  $S$  cada simplexo de  $S$  nos retorna um caminho de  $P$ .

□

Note que, se  $P$  é um complexo perfeito tal que  $ijk$  é um caminho permitido, i.e.,  $i \rightarrow j \rightarrow k$ ,  $ik$  também o é, ou seja,  $i \rightarrow k$ . Então a relação binária  $E$  é transitiva.

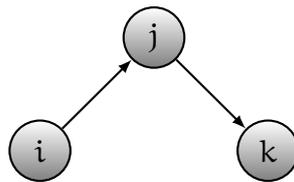
Tendo em vista que um **poset** (conjunto parcialmente ordenado) é um digrafo  $G$  em que a relação aresta  $E$  é reflexiva, transitiva e anti-simétrica, o complexo de caminhos de um poseté perfeito, e só é monótono se tirarmos a reflexividade de sua relação binária.

Destaca-se também o fato de um complexo de caminhos de um digrafo só ser perfeito se existir uma função  $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$i \rightarrow j \Rightarrow \Phi(i) < \Phi(j).$$

## 3.2 Caminhos permitidos

Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Note que  $\Lambda_p(V)$  é o espaço gerado por todas as sequências de  $p + 1$  vértices. Tal espaço não tem necessariamente alguma relação com a geometria do grafo. Por exemplo, considere o grafo cujo conjunto de vértices é  $V = \{i, j, k\}$  e o  $E = \{i \rightarrow j, j \rightarrow k\}$ , como mostra a figura abaixo:



Neste caso  $e_{ik} \in \Lambda_1$ , todavia ele não é um caminho permitido no grafo.

Como nosso foco é o complexo de caminhos de digrafos nos focaremos nos  $n$ -caminhos permitidos definidos a seguir.

**Definição 3.8.** Fixado um complexo de caminhos arbitrário  $P$  com um conjunto de vértices  $V$  finito, considere o  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $\mathcal{A}_n$  gerado pelos  $n$ -caminhos elementares de  $P$ , i.e.,

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(P) = \left\{ \sum_{i_0, \dots, i_n \in V} v^{i_0 \cdots i_n} e_{i_0 \cdots i_n} : i_0 \cdots i_n \in P_n, v^{i_0 \cdots i_n} \in \mathbb{K} \right\}.$$

### 3 Homologia Discreta

Fixe também  $\mathcal{A}_{-1} = \mathbb{K}$  e  $\mathcal{A}_{-2} = \{0\}$ . Ressalta-se ainda que  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0$ .

Por último, os elementos de  $\mathcal{A}_n$  são chamados de **n-caminhos permitidos**.

Note que  $\mathcal{A}_n$  é um subespaço do espaço  $\mathcal{A}_n$ .

Note também que o operador bordo  $\partial$  definido sobre os espaços  $\mathcal{A}_n$  não necessariamente comuta com a inclusão dos espaços  $\mathcal{A}_n$ , i.e., não é necessariamente verdadeira a afirmação de que

$$\partial\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n-1}. \quad (3.1)$$

Pois, note no exemplo do começo dessa seção que  $e_{ijl} \in \mathcal{A}_2$ , todavia,  $\partial e_{ijk} = e_{jk} - e_{ik} + e_{ij}$  não é permitido por conter uma coordenada não nula para o caminho  $e_{ik}$ .

Ressalta-se, todavia, que a inclusão (3.1) é válida para complexos de caminhos perfeitos. De fato, para  $n \leq 1$  o fato é trivial. Já para  $n \geq 2$ , seja  $e_{i_0 \dots i_n} \in \mathcal{A}_n$ . Temos que

$$\partial e_{i_0 \dots i_n} = \sum_{q=0}^n (-1)^q e_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_n},$$

porém  $i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_n$  é subsequência de  $i_0 \dots i_n$ , o que nos leva a concluir, conjuntamente com a perfeição do complexo, que o lado direito da igualdade é um  $(n-1)$ -caminho permitido. Deste modo, temos para um complexo de caminhos perfeito  $P$  o seguinte complexo de cadeia,

$$0 \leftarrow \mathbb{K} \leftarrow \mathcal{A}_0 \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{A}_{n-1} \leftarrow \mathcal{A}_n \leftarrow \dots \quad (3.2)$$

**Definição 3.9.** *Definimos como **grupos (ou espaços) homológicos**, ou mesmo **homologias**, do complexo de caminhos (3.2) os seguintes grupos (ou espaços):*

$$\tilde{H}_n = \frac{\ker \partial|_{\mathcal{A}_n}}{\partial\mathcal{A}_{n+1}}$$

Denotaremos a sequência  $\tilde{H}_n(P)$  por  $\tilde{H}_\bullet(P)$ .

Note que, como enunciado no apêndice, dado um complexo de cadeias, sempre definimos uma homologia para tal complexo de modo análogo.

$\tilde{H}_\bullet(P)$  também são chamadas de **homologias de caminhos reduzidas de P**. Definimos também o complexo truncado

$$0 \leftarrow \mathcal{A}_0 \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{A}_{n-1} \leftarrow \mathcal{A}_n \leftarrow \dots \quad (3.3)$$

cujos grupos homológicos – i.e.,  $\frac{\ker \partial|_{\mathcal{A}_n}}{\partial\mathcal{A}_{n+1}}$  – são denotados por  $H_\bullet(P)$  e são chamados de **homologias de caminhos de P** (neste caso  $\partial : \mathcal{A}_0 \rightarrow 0$  é o operador nulo).

No caso de um complexo de caminhos perfeito de um digrafo  $G$  (necessariamente com relação aresta  $E$  transitiva, para que o complexo seja de fato perfeito) denotaremos seus grupos homológicos por  $H_\bullet(G)$ .

## 3.3 Caminhos $\partial$ -invariantes

Como mencionado, no caso geral não há necessidade da inclusão (3.1). Veja por exemplo o grafo  $G = (V, E)$  tal que  $V = \{0, 1, 2\}$  e  $E = \{01, 12\}$ . O caminho  $e_{012}$  é permitido, ao passo que  $\partial e_{012} = e_{12} - e_{02} + e_{01}$  não. Deste modo, não é possível construir complexos de cadeia e de cocadeia com respeito ao operador bordo sobre caminhos permitidos. Contornaremos tal problema nesta seção com as definições e os resultados que seguem.

**Definição 3.10.** *Para todo inteiro  $n \geq -1$  define-se*

$$\Omega_n = \Omega_n(P) = \{v \in \mathcal{A}_n : \partial v \in \mathcal{A}_{n-1}\}. \quad (3.4)$$

*Os elementos deste conjunto são denominados  $n$ -caminhos  $\partial$ -invariantes.*

Segue da linearidade do operador  $\partial$  que  $\Omega_n$  é subespaço vetorial de  $\mathcal{A}_n$ .

Note também que

$$\partial\Omega_n \subset \Omega_{n-1},$$

dado que  $\partial^2 = 0$  e  $0 \in \Omega_{n-2}$ .

Assim, obtemos o complexo de cadeia dos caminhos  $\partial$ -invariantes:

$$0 \leftarrow \mathbb{K} \leftarrow \Omega_0 \leftarrow \cdots \leftarrow \Omega_{n-1} \leftarrow \Omega_n \leftarrow \cdots \quad (3.5)$$

em que as setas são dadas por  $\partial$ . Consideraremos também sua versão truncada

$$0 \leftarrow \Omega_0 \leftarrow \cdots \leftarrow \Omega_{n-1} \leftarrow \Omega_n \leftarrow \cdots \quad (3.6)$$

em que, novamente, o operador bordo será modificado em  $\Omega_0$  de modo que  $\partial|_{\Omega_0} \equiv 0$ . Este operador modificado será denominado **operador bordo truncado**.

**Definição 3.11.** *Os grupos homológicos dos complexos de cadeias acima são referidos por **grupos homológicos reduzidos de caminhos** e **grupos homológicos de caminhos** e denotados por  $\tilde{H}_n(P)$  ( $n \geq -1$ ) e  $H_n(P)$  ( $n \geq 0$ ), respectivamente.*

Podemos também nos valer de algumas modificações da teoria acima com as seguintes definições:

**Definição 3.12.** *Um complexo de caminhos é dito **regular** se todos os seus caminhos são regulares.*

Dada a definição de complexo de caminhos basta que um não contenha 1-caminhos da forma  $\bar{ii}$  para que seja regular.

Note que para um complexo de caminhos regular  $P$  os espaços  $\mathcal{A}_n$  são subespaços de  $\mathcal{R}_n$ , deste modo podemos trocar o operador bordo da definição de  $\Omega_n$  pelo operador bordo regular, obtendo os espaços dos caminhos  $\partial$ -invariantes regulares. Portanto, para os complexos de caminho regulares obtemos as versões regulares dos complexos de cadeia (3.5) e (3.6). E, tanto as versões regulares quanto as não regulares deste complexos são denotados por  $\Omega_\bullet(P)$  e chamados de complexos de cadeia do complexo de caminho  $P$ .

Note que  $H_\bullet(P)$  e  $\tilde{H}_\bullet(P)$  admitem as versões regular e irregular.

Deste modo temos, por definição de grupo homológico, que para todo  $n \geq 0$

$$H_n(P) := H_n(\Omega_\bullet(P)) := \ker \partial|_{\Omega_n} / \text{Im } \partial|_{\Omega_{n+1}} \quad (3.7)$$

Desta forma  $H_n(P)$  é  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial para todo  $n$ . Lembrando, os caminhos em  $\ker \partial|_{\Omega_n}$  são ditos **fechados**, ao passo que os caminhos em  $\text{Im } \partial|_{\Omega_{n+1}}$  são ditos **exatos**.

Definimos analogamente as homologias reduzidas  $\tilde{H}_n(P)$  para  $n \geq -1$ . Note que

$$\tilde{H}_n(P) = H_n(P), \forall n \geq 1$$

e que  $\tilde{H}_{-1}(P) = \{0\}$ . Agora, note que  $\text{Im } \partial|_{\Omega_1}$  é igual em ambos os complexos de cadeia, portanto a diferença entre  $\tilde{H}_0(P)$  e  $H_0(P)$  encontra-se justamente na diferença entre os  $\ker \partial|_{\Omega_0}$  nos diferentes complexos. Note porém que para toda 0-forma exata  $v = \partial u$  temos que  $(1, v) = (1, \partial u) = (d1, u) = 0$  (em que 1 é a 0-forma constante que assume imagem 1 para todos os vértices). Então se

$$v = h \quad \text{mod } \text{Im } \partial|_{\Omega_1},$$

$(1, v) = (1, h)$ . Agora,  $(1, v) = 0$  se, e somente se,  $v \in \ker \partial|_{\Omega_0 \rightarrow \mathbb{K}}$ , dado que  $(1, v) = \sum_{i \in V} v^i$  e  $\partial v = \sum_{i \in V} v^i e$ , lembrando que associamos o caminho  $e$  ao escalar 1 sem perda de generalidade. Deste modo,

$$\tilde{H}_0(P) = \{h \in H_0(P) : (1, h) = 0\} \quad (3.8)$$

e, em particular,

$$\dim \tilde{H}_0(P) = \dim H_0(P) - 1.$$

Se  $P(G)$  é complexo de caminhos de um digrafo  $G$ , então fixa-se a notação

$$\Omega_n(G) := \Omega_n(P(G)).$$

Os grupos homológicos correspondentes serão denotados por  $H_n(\mathbf{G})$  e  $\tilde{H}_n(\mathbf{G})$  e serão referidos por **homologias de caminhos do digrafo  $\mathbf{G}$** . Note que estes grupos são, finalmente, intimamente relacionados com a geometria do digrafo  $\mathbf{G}$  e, portanto, eles nos darão invariantes geométricos de  $\mathbf{G}$  e serão nosso principal objeto de estudo. Ressalta-se também o fato de eles estarem bem definidos para qualquer digrafo finito (na verdade, como veremos mais a frente, localmente finito). Toda a linguagem desenvolvida até aqui fora para nos permitir definir e trabalhar exatamente com estes objetos.

Agora, segue da definição de  $H_n$  que

$$\dim H_n = \dim \ker \partial|_{\Omega_n} - \dim \partial\Omega_{n+1}$$

Pelo teorema do núcleo-imagem

$$\dim H_n = \dim \Omega_n - \dim \partial\Omega_n - \dim \partial\Omega_{n+1}. \quad (3.9)$$

Definimos a **característica de Euler** de um complexo de caminhos como

$$\chi(\mathbf{P}) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \dim H_p(\mathbf{P}); \quad (3.10)$$

desde que exista  $n$  suficientemente grande tal que

$$\dim H_p(\mathbf{P}) = 0 \quad (3.11)$$

para todo  $p > n$ .

Se  $\dim \Omega_p = 0$  para todo  $p > n$ , segue de (3.9) que

$$\chi(\mathbf{P}) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \dim \Omega_p(\mathbf{P}). \quad (3.12)$$

Neste momento temos o necessário para enunciarmos a seguinte proposição.

**Proposição 3.13.** *Temos que*

$$H_n = \ker \partial|_{\mathcal{A}_n} / (\mathcal{A}_n \cap \partial\mathcal{A}_{n+1}) \quad (3.13)$$

e

$$\dim H_n = \dim \mathcal{A}_n - \dim \partial\mathcal{A}_n - \dim(\mathcal{A}_n \cap \partial\mathcal{A}_{n+1}). \quad (3.14)$$

### 3 Homologia Discreta

*Demonstração.* Note inicialmente que se  $v \in \mathcal{A}_n$  é tal que  $\partial v = 0$ , então  $v \in \Omega_n$ , então

$$\ker \partial|_{\mathcal{A}_n} = \ker \partial|_{\Omega_n}.$$

Ainda,

$$u \in \partial\Omega_{n+1} \Leftrightarrow u \in \mathcal{A}_n \text{ e } u \text{ é exata, i.e., existe } v \in \mathcal{A}_{n+1} \text{ tal que } u = \partial v,$$

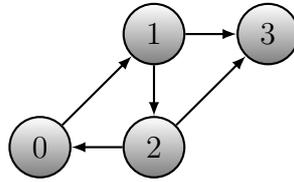
equivalentemente,

$$\partial\Omega_{n+1} = \mathcal{A}_n \cap \partial\mathcal{A}_{n+1}.$$

Disto segue (3.13) e, conseqüentemente, (3.14) pelo teorema do núcleo-imagem.  $\square$

Finalmente podemos ilustrar toda a linguagem construída até aqui por meio de um exemplo do cálculo da homologia. Ao longo do trabalho mostraremos ferramentas que facilitam esse trabalho. Porém, alguns resultados interessantes que permitem facilitar o cálculo da homologia foram deixados de fora desse trabalho para que não fugíssemos demais de nosso escopo. Um leitor curioso pode achá-los em [6].

**Exemplo 14.** Considere o digrafo



Os caminhos permitidos são

$$\mathcal{A}_0 = \langle e_0, e_1, e_2, e_3 \rangle,$$

$$\mathcal{A}_1 = \langle e_{01}, e_{12}, e_{13}, e_{20}, e_{23} \rangle,$$

$$\mathcal{A}_2 = \langle e_{012}, e_{013}, e_{120}, e_{123}, e_{201} \rangle,$$

$$\mathcal{A}_3 = \langle e_{0120}, e_{1201}, e_{2012} \rangle,$$

etc.

Assim, temos que  $\Omega_0 = \mathcal{A}_0$  e  $\Omega_1 = \mathcal{A}_1$ . Ainda, como  $\partial e_{ijk} = e_{jk} - e_{ik} + e_{ij}$ , temos que o único caminho elementar em  $\mathcal{A}_2$  com bordo permitido é  $e_{123}$ . Ainda, cálculos diretos mostram que nenhuma combinação linear de 2-caminhos com coeficientes não nulos para os outros caminhos, que não  $e_{123}$ , não tem bordo permitido. Assim,  $\Omega_2 = \langle e_{123} \rangle$ . Se  $n > 2$ , os únicos caminhos permitidos são aqueles formados pelo triângulo de vértices 0, 1, 2. Não é difícil ver que, portanto,  $\Omega_n = 0$  para  $n > 2$ .

Portanto, como  $\partial e_{ij} = e_j - e_i$ , e o digrafo é conexo,

$$H_0 \simeq \langle e_0 \rangle.$$

Ainda, cálculos rotineiros mostram que  $\ker \partial|_{\Omega_1} = \langle e_{20} + e_{01} + e_{13} - e + 23, e_{20} + e_{01} + e_{12} \rangle$ .  
 Todavia,  $\text{Im } \partial|_{\Omega_2} = \langle e_{23} - e_{13} + e_{12} \rangle$ . Deste modo, como  $(e_{20} + e_{01} + e_{13} - e + 23) - (e_{20} + e_{01} + e_{12}) = -(e_{23} - e_{13} + e_{12})$ , temos que  $H_1 = \langle e_{20} + e_{01} + e_{12} \rangle$ . Claramente,  $H_2 = 0$ .

□

Note que os cálculos envolvidos são simples e podem ser realizados de maneira algorítmica, o que os torna programáveis.

Quando se fizer necessária a distinção, os objetos regulares receberão um índice <sup>REG</sup>. E.g., o operador bordo regular pode ser denotado por  $\partial^{\text{REG}}$  para não ser confundido com o operador bordo genérico  $\partial$ .

Estabeleceremos a seguir uma condição suficiente para que  $\Omega_n = \Omega_n^{\text{REG}}$ .

**Definição 3.15.** Dizemos que um complexo de caminhos  $P$  é *estritamente regular* se for regular e não contiver caminhos da forma  $iji$ .

Note que o complexo de caminhos de um complexo simplicial é estritamente regular dado que a sequência de índices nos caminhos permitidos é estritamente crescente. Já o complexo de caminhos de um digrafo é estritamente regular se não tiver **loops** (i.e., caminhos da forma  $ii$ ) e não tiver arestas bidirecionadas (i.e., se  $i \rightarrow j$ , então  $j \not\rightarrow i$ ).

**Proposição 3.16.** Seja  $P$  um complexo de caminhos regular.

- (a) Para todo  $n \geq -1$  temos  $\Omega_n \subset \Omega_n^{\text{REG}}$ .
- (b) Se  $P$  é estritamente regular, então  $\Omega_n = \Omega_n^{\text{REG}}$  para tod  $n \geq -1$ .
- (c) Se  $\Omega_2 = \Omega_2^{\text{REG}}$ , então  $P$  é estritamente regular.

*Demonstração.* (a) Tome  $v \in \Omega_n$ . Por definição de  $\Omega_n$ ,  $\partial v \in \mathcal{A}_n$ , então  $\partial v$  é regular, dada a regularidade de  $P$ . Deste modo,  $\partial v = \partial^{\text{REG}} v$ , então  $v \in \Omega_n^{\text{REG}}$ .

(b) Note que se  $e_{i_0 \dots i_n} \in \Omega_n^{\text{REG}}$ , então não há nenhuma tripla da forma  $iji$  em  $i_0 \dots i_n$ . Deste modo, a omissão de um vértice no caminho  $i_0 \dots i_n$  não pode gerar um caminho irregular. Desta forma, por linearidade,  $\partial^{\text{REG}} v = \partial v$  para todo  $v \in \Omega_n^{\text{REG}}$ . Portanto,  $\Omega_n^{\text{REG}} \subset \Omega_n$ . Do item (a),  $\Omega_n^{\text{REG}} = \Omega_n$ .

(c) Se  $P$  não é estritamente irregular, então há um caminho da forma  $iji$  em  $P$ . Uma vez que

$$\partial e_{iji} = e_{ji} - e_{ii} + e_{ij} \notin \mathcal{A}_2$$

$$\partial^{\text{REG}} e_{iji} = e_{ji} + e_{ij} \in \mathcal{A}_2$$

$\Omega_n \neq \Omega_n^{\text{REG}}$ . O resultado sai por contrapositividade. □

O exemplo apresentado nessa seção nos mostra com, apesar de simples, os cálculos podem ser numerosos no cálculo explícito da homologia. Para simplificá-los provamos a seguinte proposição, que nos virá a ser útil no cálculo de algumas homologias de grafos infinitos nas seções que seguem.

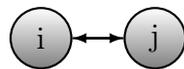
**Proposição 3.17.** *Para um dado digrafo  $G = (V, E)$  cuja cadeia dos caminhos permitidos de bordos permitidos é dada por  $\Omega_\bullet$  vale*

$$\ker \partial|_{\Omega_1} = \left\{ v \in \Omega_1 : \sum_{i \in V} v^{ij} = \sum_{i \in V} v^{ji}, \text{ para todo } j \in V \right\}.$$

*Demonstração.* Temos que  $v \in \ker \partial|_{\Omega_1}$  se, e somente se,  $\sum_{i,j \in V} v^{ij}(e_j - e_i) = 0$ . Assim,

$\sum_{i,j \in V} v^{ij} e_j = \sum_{i,j \in V} v^{ij} e_i$ . Note porém que fazendo uma mudança de índices,  $\sum_{i,j \in V} v^{ij} e_i = \sum_{i,j \in V} v^{ji} e_j$ . Portanto uma condição necessária e suficiente para que  $v \in \ker |_{\Omega_1}$  é que  $\sum_{i,j \in V} v^{ij} e_j = \sum_{i,j \in V} v^{ji} e_j$ , ou, equivalentemente,  $\sum_{i,j \in V} (v^{ij} - v^{ji}) e_j = 0$ . O resultado segue da independência linear de  $\{e_i : i \in V\}$ . □

Intuitivamente, essa proposição nos diz que os elementos de  $\ker \partial|_{\Omega_1}$  são as combinações de arestas que formam caminhos fechados. Ainda de maneira pictórica, as homologias medem os “buracos”  $n$ -dimensionais do grafo. A importância das definições com restrições de regularidade nos complexos e nos operadores envolvidos se dá em partes pelo fato de que na versão irregular o grafo



possui um “buraco” 1-dimensional, representado pelo caminho  $e_{ij} + e_{ji}$ , enquanto na versão regular não, como mostra o exemplo 3.14 de [6].

## 3.4 Formas $d$ -invariantes

Nosso objetivo nesta seção é apresentar o complexo de cocadeia  $\Omega^\bullet$  de formas e do diferencial exterior  $d$  sobre elas, dual ao complexo de cadeias  $\Omega_\bullet$  (regular ou irregular).

Este complexo também deverá, de certa forma, respeitar a geometria do grafo em questão.

Fixemos inicialmente algumas definições.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^n &= \text{span}\{e^{i_0 \cdots i_n} : i_0 \cdots i_n \text{ é não-permitido}\} \\ &= \{\omega \in \Lambda^n : \omega_{i_0 \cdots i_n} = 0 \text{ para todo caminho } i_0 \cdots i_n \text{ permitido}\}. \end{aligned}$$

Os elementos de  $\mathcal{N}^n$  são chamados de  $n$ -formas não permitidas. Defina também

$$\mathcal{J}^n = \mathcal{N}^n + d\mathcal{N}^{n-1}, \quad (3.15)$$

e

$$\Omega^n = \Omega^n(P) = \Lambda^n / \mathcal{J}^n. \quad (3.16)$$

Denotando por  $\mathcal{A}^n$  o subespaço de  $\Lambda^n$  das  $n$ -formas permitidas (definido analogamente ao  $\mathcal{N}^n$ ) e ressaltando-se o fato de uma forma elementar ser ou permitida ou não-permitida, temos que  $\Lambda^n = \mathcal{A}^n \oplus \mathcal{N}^n$ . Deste modo,

$$\Omega^n = \frac{\mathcal{A}^n \oplus \mathcal{N}^n}{\mathcal{J}^n};$$

portanto,

$$\Omega^n \cong \frac{\mathcal{A}^n}{\mathcal{A}^n \cap \mathcal{J}^n}. \quad (3.17)$$

Para provarmos que  $\Omega^\bullet$  é de fato um complexo de cocadeia precisamos nos valer do seguinte lema:

**Lema 3.18.** (a) Se  $\omega \in \mathcal{J}^n$ , então  $d\omega \in \mathcal{J}^{n+1}$ . Consequentemente,  $d$  está bem definido nos espaços  $\Omega^n$ .

(b) Se  $\omega \in \mathcal{J}^n$  então  $(\omega, \nu) = 0$  para todo  $\nu \in \Omega_n$ .

*Demonstração.* (a) Segue da linearidade de  $d$ , do fato de  $d^2 = 0$  e da definição  $\mathcal{J}^n$  que

$$d\mathcal{J}^n \subset d\mathcal{N}^n + d^2\mathcal{N}^{n-1} = d\mathcal{N}^n \subset \mathcal{J}^{n+1}.$$

Portanto,  $\omega_1 = \omega_2 \pmod{\mathcal{J}^n}$  implica que  $d\omega_1 = d\omega_2 \pmod{\mathcal{J}^{n+1}}$ , o que nos mostra que  $d$  está bem definido em  $\Lambda^n / \mathcal{J}^n = \Omega^n$ .

(b) Note que dado  $\omega \in \mathcal{J}^n$  existem  $\varphi \in \mathcal{N}^n$  e  $\psi \in \mathcal{N}^{n-1}$  tais que  $\omega = \varphi + d\psi$ . Seja agora  $\nu \in \mathcal{A}_n$ , então

$$(\varphi, \nu) = 0,$$

### 3 Homologia Discreta

pois se  $i_0 \cdots i_n$  for permitido,  $\varphi_{i_0 \cdots i_n} = 0$  e  $v^{i_0 \cdots i_n} = 0$  se for não-permitido. Ainda,

$$(\mathbf{d}\psi, v) = (\psi, \partial v) = 0,$$

pois  $\psi \in \mathcal{N}^{n-1}$  e  $\partial v \in \mathcal{A}_{n-1}$ .

□

Dado nosso último resultado, podemos enunciar a seguinte definição:

**Definição 3.19.** *Os elementos do espaço dual  $\Omega^n$  são chamados de **n-formas d-invariantes** do complexo de caminhos  $\mathbf{P}$ , e o operador  $\mathbf{d} : \Omega^n \rightarrow \Omega^{n+1}$  é chamado de **diferencial exterior**.*

Pelo Lema 3.18(b), qualquer elemento  $\omega \bmod \mathcal{J}^n$  de  $\Omega^n$  determina um funcional linear em  $\Omega_n$  por

$$(\omega \bmod \mathcal{J}^n, v) = (\omega, v).$$

Portanto obtemos o homomorfismo

$$\Omega^n \rightarrow (\Omega_n)';$$

em que  $(\Omega_n)'$  é o espaço dual ao  $\Omega_n$ . Facilmente demonstra-se que o homomorfismo acima é, em verdade, um isomorfismo.

Dado isto, segue que os operadores  $\partial : \Omega_{n+1} \rightarrow \Omega_n$  e  $\mathbf{d} : \Omega^n \rightarrow \Omega^{n+1}$  são duais, i.e., para quaisquer  $v \in \Omega_{n+1}$  e  $\omega \in \Omega^n$

$$(\mathbf{d}\omega, v) = (\omega, \partial v).$$

Obtemos assim o complexo de cocadeias  $\Omega^\bullet(\mathbf{P})$  de  $\mathbf{P}$ , i.e.,

$$0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow \Omega^0 \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega^n \rightarrow \Omega^{n+1} \rightarrow \cdots \quad (3.18)$$

em que as setas são dadas por  $\mathbf{d}$ . Suas cohomologias são referidas por **cohomologias de caminhos reduzidas de  $\mathbf{P}$**  e denotadas por  $\tilde{H}^\bullet(\mathbf{P})$ , i.e,

$$\tilde{H}^n(\mathbf{P}) = H^n(\Omega^\bullet(\mathbf{P})) = \ker \mathbf{d}|_{\Omega^n} / \text{Im } \mathbf{d}|_{\Omega^{n-1}},$$

para todo  $n \geq -1$ . Segue que  $\tilde{H}_n(\mathbf{P})$  e  $\tilde{H}^n(\mathbf{P})$  são  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais duais, tendo portanto mesma dimensão.

Já as cohomologias do complexo de cocadeia truncado

$$0 \rightarrow \Omega^0 \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega^n \rightarrow \Omega^{n+1} \rightarrow \cdots \quad (3.19)$$

são chamadas de **cohomologias de caminhos de P** e denotadas por  $H^n(P)$ ,  $n \geq 0$ . Obviamente  $H_n(P)$  e  $H^n(P)$  são duais. E analogamente a (3.9), temos

$$\dim H^n = \dim \Omega^n - \dim d\Omega^n - \dim d\Omega^{n-1},$$

e identidades análogas valem para  $\tilde{H}^n$ .

Podemos definir analogamente  $\Omega^n$  regular para um complexo de caminhos P regular, bastando fazer a seguinte alteração:

$$\mathcal{N}^n = \text{span}\{e^{i_0 \cdots i_n} : i_0 \cdots i_n \text{ é regular e não-permitido}\}.$$

As demais construções e demonstrações seguem de maneira análoga às feitas no caso irregular, de modo que

$$\Omega^n = \mathcal{R}^n / \mathcal{J}^n \tag{3.20}$$

O resultado a seguir mostra que a concatenação está bem definida nos espaços  $\Omega^n$  (versões regular e irregular).

**Lema 3.20.** *Sejam  $\varphi$  uma p-forma e  $\psi$  uma q-forma. Se  $\varphi \in \mathcal{J}^p$  ou  $\psi \in \mathcal{J}^q$ , então  $\varphi\psi \in \mathcal{J}^{p+q}$ , i.e.,  $\{\mathcal{J}^p\}$  é um ideal graduado para a concatenação. Consequentemente, a concatenação de duas formas está bem definida nos espaços  $\mathcal{J}^p$  assim como nos  $\Omega^p$ , e ela satisfaz a regra do produto (2.16).*

*Demonstração.* Note que se  $\varphi \in \mathcal{N}^p$ , então  $\psi\varphi \in \mathcal{N}^{p+q}$ . De fato, claramente isto é válido para formas elementares e é facilmente estendido para formas quaisquer.

Agora, se  $\varphi \in \mathcal{J}^p$ , então  $\varphi = \varphi_0 + d\varphi_1$ , em que  $\varphi_0 \in \mathcal{N}^p$  e  $\varphi_1 \in \mathcal{N}^{p-1}$ . Deste modo,

$$\varphi\psi = (\varphi_0 + d\varphi_1)\psi = \varphi_0\psi + (d\varphi_1)\psi$$

Note que

$$d(\varphi_1\psi) = (d\varphi_1)\psi + (-1)^{p-1}\varphi_1 d\psi,$$

por (2.16).

Assim,

$$(d\varphi_1)\psi = d(\varphi_1\psi) - (-1)^{p-1}\varphi_1 d\psi.$$

Donde se conclui que

$$\varphi\psi = \varphi_0\psi + d(\varphi_1\psi) - (-1)^{p-1}\varphi_1 d\psi.$$

Deste modo,  $\varphi\psi \in \mathcal{J}^{p+q}$ .

### 3 Homologia Discreta

Agora, resta mostrar que a concatenação está bem definida nos espaços  $\Omega^p$ . Para isto, sejam  $\varphi = \varphi' \pmod{\mathcal{J}^p}$  e  $\psi = \psi' \pmod{\mathcal{J}^q}$ , então

$$\varphi\psi - \varphi'\psi' = \varphi(\psi - \psi') + (\varphi - \varphi')\psi' = 0 \pmod{\mathcal{J}^{p+q}}.$$

A regra do produto vale para as classes, pois vale para seus representantes. □

Lançando mão do lema anterior e da regra do produto estendemos a concatenação para uma operação de classes homológicas, conforme a proposição a seguir.

**Proposição 3.21.** *Se  $\varphi \in \Omega^p$  e  $\psi \in \Omega^q$  são formas fechadas e uma das duas é exata, então  $\varphi\psi$  também é exata. Consequentemente, a concatenação é uma operação bem definida de  $H^p \times H^q$  a  $H^{p+q}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\varphi = d\omega$ . Temos

$$d(\omega\psi) = (d\omega)\psi + (-1)^p \omega d\psi = \varphi\psi.$$

Agora, sejam  $\varphi_1, \varphi_2$  e  $\psi_1, \psi_2$  formas fechadas tais que  $\varphi_1 = \varphi_2 \pmod{\text{Im } d}$  e  $\psi_1 = \psi_2 \pmod{\text{Im } d}$ . Temos

$$\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2 = \varphi_1(\psi_1 - \psi_2) + (\varphi_1 - \varphi_2)\psi_2 = 0 \pmod{\text{Im } d},$$

então  $\varphi_1\psi_1 = \varphi_2\psi_2 \pmod{\text{Im } d}$ . □

Portanto, a concatenação é análoga às operações produto cup para complexos simpliciais e o produto wedge ( $\wedge$ ) definido no capítulo de formas deste trabalho para variedades.

Neste caso,

$$\Omega = \bigoplus_{n \geq 0} \Omega^n$$

com as operações  $d$  e concatenação é uma álgebra diferencial graduada.

Para duas  $n$ -formas  $\varphi, \psi$  (de  $\Lambda^n$  ou  $\mathcal{R}^n$ ) fixe a seguinte relação de equivalência

$$\varphi \simeq \psi \text{ se } \varphi - \psi \pmod{\mathcal{J}^n}.$$

Sabemos que

$$\varphi \simeq 0 \Rightarrow d\varphi \simeq 0$$

e que

$$\varphi \simeq 0 \text{ ou } \psi \simeq 0 \Rightarrow \varphi\psi \simeq 0.$$

Também, por (3.16) e por (3.20) que as classes de equivalência de  $\simeq$  podem ser identificadas com os elementos de  $\Omega^n$ .

O resultado abaixo nos dá uma condição para que  $\dim \Omega^p = 0$ .

**Proposição 3.22.** (a) Se  $\dim \Omega^n = 0$ , então  $\dim \Omega^p = 0$  para todo  $p \geq n$ .

(b) Se os espaços  $\Omega^\bullet$  são regulares, então  $\dim \Omega^n \leq 1$  implica que  $\dim \Omega^p = 0$  para todo  $p > n$ .

## 3.5 Componentes conexas e $H^0$

Nas seções anteriores fica claro o paralelo entre o complexo de cocadeias  $\Omega^\bullet$  aqui descrito (e suas cohomologias  $H^n$ ) e o complexo de De Rham no caso contínuo (e suas cohomologias). Nesta seção mostraremos mais um paralelo entre as duas teorias. Assim como a dimensão do zerésimo grupo de De Rham indica o número de componentes conexas da variedade em questão, aqui  $\dim H^0$  nos dá o número de componentes conexas de um complexo de caminhos  $P$ ; definido corretamente o conceito de componente conexa em um complexo de caminhos.

**Definição 3.23.** Dado um complexo de caminhos  $P$  com um conjunto de vértices  $V$ , definimos uma **componente conexa de  $P$**  como sendo qualquer conjunto  $U$  de  $V$  que tenha a seguinte propriedade: se  $i \in U$ , então  $U$  contém qualquer vértice  $j \in V$  tal que  $ij$  ou  $ji$  é um 1-caminho permitido; de modo que  $U$  não tenha nenhum subconjunto próprio com essa mesma propriedade. Esta última condição é dita condição de minimalidade.

Se  $V$  é uma componente conexa, então o complexo de caminhos  $P$  é dito **conexo**.

**Proposição 3.24.** Dado um complexo de caminhos  $P$  temos

$$\dim H^0(P) = C, \quad (3.21)$$

em que  $C$  é o número de componentes conexas de  $P$ . Em particular, se  $P$  é conexo, então  $\dim H^0 = 1$  e  $\dim \tilde{H}^1 = 0$ .

*Demonstração.* Temos definido que

$$H^0(\Omega) = \ker d|_{\Omega^0} = \{f \in \Omega^0 : df \simeq 0\}.$$

Então  $f \in H^0$  se, e somente se,  $(df)_{ij} = f_j - f_i = 0$  para todo para  $ij$  permitido, i.e.,  $f_i = f_j$ . Isso implica que  $f$  é constante em toda componente conexa de  $P$ . Claramente o espaço destas funções tem dimensão  $C$ .  $\square$

O mesmo fato também vale para  $\dim H_0$ , todavia ele só poderá ser devidamente enunciado depois que definirmos uma teoria homotópica. Veja a Proposição (5.25).

## 3.6 União disjunta e soma direta

Sejam dois complexos de caminhos  $P$  e  $P'$  com conjuntos de vértices  $V$  e  $V'$ , respectivamente. Note que se  $i_0 \cdots i_n \in P \cup P'$ , então  $i_0 \cdots i_n \in P$  ou  $i_0 \cdots i_n \in P'$ . Suponha que  $i_0 \cdots i_n \in P$  sem perda de generalidade. Temos portanto que  $i_0 \cdots i_{n-1}$  e  $i_1 \cdots i_n$  também pertencem a  $P$ , i.e., também pertencem a  $P \cup P'$ . Deste modo,  $P \cup P'$  é também um complexo de caminhos, claramente com conjunto de vértices  $V \cup V'$ . Dizemos que  $P$  e  $P'$  são disjuntos de seus conjuntos de vértices forem disjuntos.

**Proposição 3.25.** *Se  $P'$  e  $P''$  são complexos de caminhos disjuntos, então, para sua união  $P = P' \cup P''$ , temos*

$$\Omega^n(P) = \Omega^n(P') \oplus \Omega^n(P'')$$

e, portanto,

$$H^n(P) \cong H^n(P') \oplus H^n(P'')$$

para todo  $n \geq 0$ .

*Demonstração.* Segue do fato dos espaços  $\Lambda, \mathcal{R}, \mathcal{N}, \mathcal{J}$  se separarem em somas diretas análogas à enunciada, e do fato de que  $d$  em  $\Lambda^n(P)$  se separa em soma direta dos operadores  $d$  em  $\Lambda^n(P')$  e  $\Lambda^n(P'')$ .  $\square$

# 4

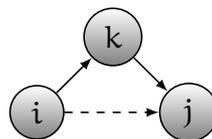
## Homologia de Digrafos e Aplicações

Este capítulo se reserva a relacionar a linguagem que construímos neste trabalho com o estudo de topologia algébrica dos digrafos, nosso principal objeto de estudo. Para tal, fixe o digrafo  $G = (V, E)$  sem **loops** – i.e., caminhos do tipo  $ii$ . Deste modo, o complexo de caminhos  $P(G)$  é regular. Nos focaremos a estudar aqui os espaços regulares  $\Omega_n(G)$  de caminhos  $\partial$ -invariantes e os grupos homológicos associados  $H_n(G)$  e  $\tilde{H}_n(G)$ .

### 4.1 Semi-arestas e caminhos $\partial$ -invariantes

Apresentaremos aqui uma condição necessária e suficiente para que um caminho seja  $\partial$ -invariante. Mas antes vamos a algumas definições necessárias.

**Definição 4.1.** Dizemos que um par de vértices  $ij$  é uma **semi-aresta** se ela não for uma aresta e se existir (ao menos) um vértice  $k$  tal que  $ik$  e  $kj$  são arestas, e a denotaremos por  $i \rightarrow j$ . O 2-caminho  $ijk$  é chamado de **ponte** da semi-aresta  $ij$ .



**Definição 4.2.** Dizemos que um caminho  $i_0 \cdots i_p$  é **semi-permitido** se exatamente um dos pares  $i_{q-1}i_q$  ( $q \in \{1, \dots, p\}$ ) for uma semi-aresta, ao passo que todos os outros são arestas. Um caminho  $i_0 \cdots i_{q-1}ki_q \cdots i_p$  é dito **extensão permitida** de  $i_0 \cdots i_{q-1}i_q \cdots i_p$  se  $i_{q-1}ki_q$  for ponte da semi-aresta  $i_{q-1}i_q$ .

**Definição 4.3.** Seja  $i_0 \cdots i_p$  um caminho semi-permitido de semi-aresta  $i_{q-1}i_q$ . Dado um  $p$ -caminho,  $v$ , definimos sua **deficiência**  $[v]^{i_0 \cdots i_p}$  ao longo do caminho  $i_0 \cdots i_p$  por

$$[\mathbf{v}]^{i_0 \cdots i_p} := \sum_{k \in V} \mathbf{v}^{i_0 \cdots i_{q-1} k i_q \cdots i_p}. \quad (4.1)$$

Deste modo podemos enunciar o seguinte lema:

**Lema 4.4.** *Seja  $p \geq 1$ . Um caminho  $\mathbf{v} \in \mathcal{A}_{p+1}$  pertence a  $\Omega_{p+1}$  se, e somente se, para todo caminho semi-permitido  $i_0 \cdots i_p$*

$$[\mathbf{v}]^{i_0 \cdots i_p} = 0.$$

*Demonstração.* Note que  $\mathbf{v} \in \Omega_{p+1}$  se, e somente se,

$$(\partial \mathbf{v})^{i_0 \cdots i_p} = 0 \quad (4.2)$$

para todo caminho regular não-permitido (inclusive os semi-permitidos)  $i_0 \cdots i_p$ . Por (2.5) temos

$$(\partial \mathbf{v})^{i_0 \cdots i_p} = \sum_{q=0}^{p+1} \sum_k (-1)^q \mathbf{v}^{i_0 \cdots i_{q-1} k i_q \cdots i_p}.$$

Note que se  $i_0 \cdots i_p$  não é semi-permitido temos duas opções, ou nenhum par  $i_q i_{q+1}$  é semi-aresta, ou ao menos dois pares são. No primeiro caso, a inserção de um vértice  $k$  entre  $i_q$  e  $i_{q+1}$  não resultará em um caminho permitido. Já no segundo, precisaríamos da inserção de ao menos dois vértices simultaneamente ao longo do caminho para que este resultasse em um permitido. Em ambos os casos a condição (4.2) é satisfeita. Agora, se a única semi-aresta em  $i_0 \cdots i_p$  é  $i_{q-1} i_q$ , então (4.2) pode ser reescrita como

$$\sum_k \mathbf{v}^{i_0 \cdots i_{q-1} k i_q \cdots i_p} = 0,$$

que era nossa tese. □

## 4.2 Triângulos, Quadrados e $\dim \Omega_p$

Nesta seção construiremos meios de estudar a dimensão de  $\Omega_p$  em um dado digrafo e, em alguns casos, seus grupos homológicos de caminhos.

Note que claramente  $\dim \Omega_0 = \dim \mathcal{A}_0 = |V|$  e  $\dim \Omega_1 = \dim \mathcal{A}_1 = |E|$ . Já para  $p = 2$  temos o seguinte resultado:

**Proposição 4.5.** *Seja  $\mathcal{S}$  o conjunto de semi-arestas do digrafo  $G$ , temos*

$$\dim \Omega_2 = \dim \mathcal{A}_2 - |\mathcal{S}| = |P_2| - |\mathcal{S}|. \quad (4.3)$$

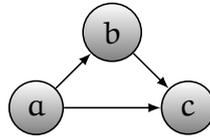
*Demonstração.* Claramente,

$$\dim \mathcal{A}_2 = |\mathcal{P}_2|.$$

Note agora que, pelo lema anterior,  $v \in \Omega_2$  implica que  $v \in \mathcal{A}_2$  e que  $\sum_b v^{abc} = 0$  para toda semi-aresta  $ac$ . Note que há exatamente uma condição desta para cada semi-aresta e que elas são todas independentes, do fato de que cada tripla  $abc$  determinar no máximo uma semi-aresta. Portanto,  $\Omega_2$  é obtido de  $\mathcal{A}_2$  impondo-se  $|S|$  condições linearmente independentes. □

As definições a seguir nos darão ferramentas para estudar  $\dim \Omega_p$  quando  $p > 2$ .

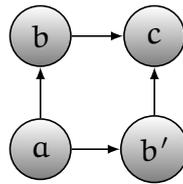
**Definição 4.6.** Chamaremos de **triângulo** uma sequência de três vértices distintos  $a, b, c \in V$  tais que  $a \rightarrow b$ ,  $b \rightarrow c$  e  $a \rightarrow c$ .



Note que um triângulo determina um 2-caminho  $e_{abc} \in \Omega_2$ . De fato,  $e_{abc} \in \mathcal{A}_2$  e

$$\partial e_{abc} = e_{bc} - e_{ac} + e_{ab} \in \mathcal{A}_1.$$

**Definição 4.7.** Chamaremos de **quadrado** uma sequência de quatro vértices distintos  $a, b, b', c \in V$  tais que  $a \rightarrow b$ ,  $b \rightarrow c$ ,  $a \rightarrow b'$ ,  $b' \rightarrow c$ .



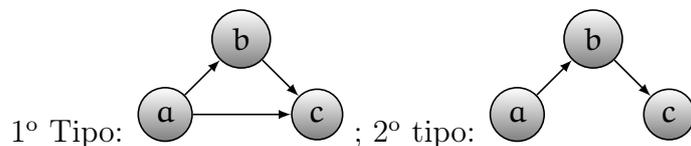
Note que um quadrado determina um 2-caminho  $v := e_{abc} - e_{ab'c} \in \Omega_2$ . De fato,  $v \in \mathcal{A}_2$  e

$$\partial v = (e_{bc} - e_{b'c}) - (e_{ac} - e_{ac}) + (e_{ab} - e_{ab'}) = e_{bc} - e_{b'c} + e_{ab} - e_{ab'} \in \mathcal{A}_1.$$

**Proposição 4.8.** Se o digrafo  $G$  não contiver quadrados (como subquadrados), então  $\dim \Omega_2$  é exatamente o número de triângulos distintos em  $G$ , e  $\dim \Omega_p(G) = 0$  para todo  $p > 2$ .

Em particular, se  $G$  não contém quadrados ou triângulos,  $\dim \Omega_p(G) = 0$  para todo  $p \geq 2$ . Consequentemente,  $\dim H_p(G) = 0$  para todo  $p \geq 2$ .

*Demonstração.* Dividamos os caminhos  $abc$  de  $P_2$  entre dois tipos distintos. O primeiro tipo formado por triângulos, i.e.,  $ac$  é uma aresta e o segundo tipo formado pelos caminhos  $abc$  em que  $ac$  não é uma aresta.



Cada caminho do primeiro tipo determina um único triângulo, ao passo que cada caminho do segundo tipo determina uma única semi-aresta. Com efeito, se  $abc$  e  $ab'c$  são extensões permitidas de  $ac$ , então temos um quadrado  $a, b, b', c$ , o que contradiz nossa hipótese. Portanto há exatamente  $|S|$  caminhos do segundo tipo, o que nos leva ao fato de haver exatamente  $|P_2| - |S|$  triângulos. Concluimos então que  $\dim \Omega_2$  é igual ao número de triângulos.

Agora, seja  $ijkl$  um caminho permitido em  $G$ . Suponha que  $jl$  é uma semi-aresta. Então  $ijl$  é semi-permitido, logo temos que  $[v]^{ijl} = 0$  para um  $v$  qualquer. Note que  $ijkl$  é a única extensão permitida de  $ijl$  pelo fato de não haver quadrados. Deste modo,  $v^{ijkl} = 0$ , se  $ik$  ou  $jl$  forem semi-permitidos.

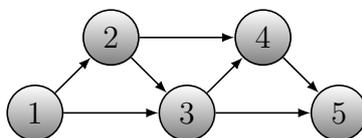
Note que se  $ijkl$  é permitido e nem  $ik$  nem  $jl$  forem semi-permitidos,  $i, j, k, l$  formam um quadrado. Deste modo,  $\Omega_3 = \{0\}$ . Deste modo,  $\Omega_p = \{0\}$  para todo  $p \geq 3$ .

□

## 4.3 Cobras e Simplexos

Esta seção se presta a definir um caso específico de digrafos que são também complexos simpliciais.

**Definição 4.9.** Uma *cobra* de comprimento  $p$  é uma sequência de  $p + 1$  vértices,  $0, 1, \dots, p$ , tal que  $i(i + 1)$  e  $i(i + 2)$  são arestas; para todo  $i = 0, \dots, p - 2$ . Deste modo,  $i(i + 1)(i + 2)$  é um triângulo. Como elucidada a figura abaixo.



Note que uma cobra contém um caminho  $v = e_{01\dots p}$   $\partial$ -invariante, pelo fato de para todo  $k \in \{1, \dots, p - 1\}$ ,  $(k - 1)(k + 1)$  ser uma aresta.

**Definição 4.10.** Seja  $n \geq 0$ . Um *digrafo-simplexo*  $Sm_n$  é um digrafo com o conjunto de vértices  $\{0, 1, \dots, n\}$  e as arestas são  $i \rightarrow j$  para todo  $i < j$ .

Claramente um simplexo contém uma cobra como subgrafo. Também ressaltamos o fato de um digrafo-simplexo ser um complexo simplicial.

## 4.4 Digrafos estrelados e o Lema de Poincaré

Indubitavelmente um dos resultados de maior importância da topologia algébrica é o lema de Poincaré para variedades. A linguagem apresentada neste trabalho nos permite criar um resultado análogo na teoria de digrafos. Mas antes algumas definições são necessárias.

**Definição 4.11.** *Um digrafo  $G$  é dito **estrelado** (respectivamente, **inversamente estrelado**) se existe um vértice  $\mathbf{a}$ , dito **centro da estrela** tal que  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$  (respectivamente,  $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a}$ ) para todo  $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$ .*

Note que um digrafo-simplexo é estrelado com o centro da estrela em 0.

Aqui o conceito de digrafo estrelado desempenha um papel análogo ao papel que o conceito de variedades contrácteis desempenha no caso contínuo, como ficará claro no teorema a seguir.

**Teorema 4.12.** *(Lema de Poincaré) Se  $G$  é um digrafo (inversamente) estrelado, então todas as homologias reduzidas  $\tilde{H}_n(G)$  são triviais.*

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{e}_{i_0 \dots i_n} \in \Omega_n$  tal que  $\partial \mathbf{e}_{i_0 \dots i_n} = 0$ . Note que  $\mathbf{e}_{\mathbf{a} i_0 \dots i_n} \in \mathcal{A}_{n+1}$ . De fato, se  $\mathbf{a} = i_0$ , então  $\mathbf{e}_{\mathbf{a} i_0 \dots i_n} = 0$ . Se  $\mathbf{a} \neq i_0$ , então  $\mathbf{e}_{\mathbf{a} i_0 \dots i_n}$  é permitido pelo fato de  $G$  ser estrelado.

Pela regra do produto,

$$\partial \mathbf{e}_{\mathbf{a} i_0 \dots i_n} = \partial(\mathbf{e}_{\mathbf{a}} \mathbf{e}_{i_0 \dots i_n}) = \mathbf{e}_{i_0 \dots i_n} - \mathbf{e}_{\mathbf{a}} \partial \mathbf{e}_{i_0 \dots i_n} = \mathbf{e}_{i_0 \dots i_n}.$$

Deste modo,  $\mathbf{u} \in \Omega_{n+1}$ . O resultado pode ser facilmente estendido para qualquer caminho  $\mathbf{v} \in \Omega_2$ , por ser combinação linear de caminhos da forma  $\mathbf{e}_{i_0 \dots i_n}$ . Deste modo,  $\tilde{H}_n(G) = 0$ .

A demonstração para o caso inversamente estrelado é análoga. □

## 4.5 Grafos cíclicos

Um grafo  $G$  é dito cíclico se é conexo e se cada vértice tiver grau 2.

Claramente em um grafo cíclico  $G = (V, E)$ ,  $\dim H_0(G) = 1$ , pois é conexo, e  $\dim \Omega_0(G) = |V| = |E| = \dim \Omega_1(G)$ .

Para dimensões maiores segue o seguinte resultado, cuja demonstração é achada em [6].

**Proposição 4.13.** *Seja  $G$  um grafo cíclico. Então*

$$\dim \Omega_p(G) = 0 \text{ para todo } p \geq 3$$

$$\dim H_p(G) = 0 \text{ para todo } p \geq 2.$$

*Se  $G$  for um triângulo ou um quadrado, então*

$$\dim \Omega_2(G) = 1, \quad \dim H_1(G) = 0, \quad \chi = 1.$$

*Do contrário,*

$$\dim \Omega_2(G) = 0, \quad \dim H_1(G) = 1, \quad \chi = 0.$$

## 4.6 Teorema de Hodge para digrafos finitos

Esta seção se trata de apresentar parte do trabalho que desenvolvemos na análise do operador Laplaciano de digrafos – que foi feita inspirada na teoria de Hodge para o contexto de variedades, que visa estudar a cohomologia de De Rham por meio do operador Laplaciano. Demonstramos o Teorema de Hodge, que diz que os espaços das formas são soma direta do núcleo com a imagem desse operador e que toda classe de cohomologia contém um único representante harmônico. Demonstramos tal teorema também para grafos localmente finitos, como veremos mais à frente. Todavia, o caso finito vale ser ressaltado – e sua demonstração é um tanto quanto mais simples.

Sejam  $G = (V, E)$  um digrafo e  $\Lambda^p$  o  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial das  $p$ -formas sobre  $G$ . Bem sabemos que o conjunto

$$\{e^{j_0 \cdots j_p} : j_0, \dots, j_p \in V\}$$

é uma base para  $\Lambda^p$ . Define-se naturalmente sobre este mesmo espaço o produto interno

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{j_0, \dots, j_p \in V} \varphi_{j_0 \cdots j_p} \psi_{j_0 \cdots j_p};$$

em que  $\varphi = \sum_{j_0, \dots, j_p \in V} \varphi_{j_0 \cdots j_p} e^{j_0 \cdots j_p}$  e  $\psi = \sum_{j_0, \dots, j_p \in V} \psi_{j_0 \cdots j_p} e^{j_0 \cdots j_p}$ . Claramente a base acima mencionada é ortonormal com respeito a tal produto interno.

Note que para toda  $\mathbf{p}$ -forma  $\varphi$

$$\begin{aligned} \langle d\varphi, e^{i_0 \cdots i_{p+1}} \rangle &= (d\varphi)_{i_0 \cdots i_{p+1}} = \sum_{q=0}^{p+1} (-1)^q \varphi_{i_0 \cdots \widehat{i}_q \cdots i_{p+1}} = \langle \varphi, \sum_{q=0}^p (-1)^q e^{i_0 \cdots \widehat{i}_q \cdots i_{p+1}} \rangle = \\ &= \langle \varphi, \partial e^{i_0 \cdots i_{p+1}} \rangle. \end{aligned}$$

Estendendo este resultado por linearidade obtemos o seguinte lema.

**Lema 4.14.** *Seja um inteiro  $\mathbf{p} \geq -1$ . Para toda  $\mathbf{p}$ -forma  $\varphi$  e para toda  $\mathbf{p} + 1$ -forma  $\psi$ , tem-se que*

$$\langle d\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \partial\psi \rangle.$$

*I.e., os operadores  $d$  e  $\partial$  são adjuntos.*

**Definição 4.15.** *Definimos o Laplaciano de grafos – a que nos referiremos simplesmente por Laplaciano – como sendo o operador sobre  $\Lambda^{\mathbf{p}}(\mathbf{G})$  pela igualdade*

$$\Delta = d\partial + \partial d;$$

Segue como corolário direto do lema (4.14) que  $\Delta$  é autoadjunto.

**Proposição 4.16.** *Seja  $\varphi$  uma  $\mathbf{p}$ -forma.  $\Delta\varphi = 0$  se, e somente se,  $d\varphi = 0$  e  $\partial\varphi = 0$ .*

*Demonstração.* Claramente  $d\varphi = 0$  e  $\partial\varphi = 0$  implicam que  $\Delta\varphi = 0$ . Agora,

$$\langle \Delta\varphi, \varphi \rangle = \langle (d\partial + \partial d)\varphi, \varphi \rangle = \langle d\varphi, d\varphi \rangle + \langle \partial\varphi, \partial\varphi \rangle = \|d\varphi\|^2 + \|\partial\varphi\|^2.$$

De sorte que se  $\Delta\varphi = 0$ , então  $d\varphi = 0$  e  $\partial\varphi = 0$ . □

Defina

$$H^{\mathbf{p}} = \{\varphi \in \Lambda^{\mathbf{p}} : \Delta\varphi = 0\}.$$

Dito espaço das  $\mathbf{p}$ -formas harmônicas.

**Lema 4.17.** *Seja  $\varphi$  uma  $\mathbf{p}$ -forma.  $\varphi \in H^{\mathbf{p}}$  se, e somente se,  $\varphi \in (\text{Im } d)^\perp \cap \ker d$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\varphi \in (\text{Im } d)^\perp \cap \ker d$ . Então  $d\varphi = 0$  e

$$\|\partial\varphi\|^2 = \langle \partial\varphi, \partial\varphi \rangle = \langle \varphi, d\partial\varphi \rangle = 0,$$

pois  $\varphi \in (\text{Im } d)^\perp$ . Logo, pela proposição (4.16),  $\Delta\varphi = 0$ .

Agora, suponha que  $\Delta\varphi = 0$ , então novamente pela Proposição (4.16),  $\varphi \in \ker d$ , e

$$\langle \varphi, d\psi \rangle = \langle \partial\varphi, \psi \rangle = 0.$$

□

**Teorema 4.18. (Teorema da decomposição de Hodge)** Para todo  $p$  inteiro, vale

$$\Lambda^p = \Delta(\Lambda^p) \oplus H^p.$$

Consequentemente, a equação  $\Delta\varphi = \psi$  tem solução  $\varphi \in \Lambda^p$  se, e somente se, a  $p$ -forma  $\psi$  é ortogonal ao espaço das  $p$ -formas harmônicas.

*Demonstração.* Note que segue da finitude de  $V$  que  $\Lambda^p$  tem dimensão finita. Decorre portanto que

$$\Lambda^p = (H^p)^\perp \oplus H^p.$$

Assim sendo, basta mostrar que  $\Delta(\Lambda^p) = (H^p)^\perp$ . Demonstraremos, equivalentemente, que  $\Delta(\Lambda^p)^\perp = H^p$ . Para tal, tome  $\varphi \in H^p$ . Tem-se então que  $\langle \varphi, \Delta\psi \rangle = \langle \Delta\varphi, \psi \rangle = 0$ . Logo,  $\varphi \in \Delta(\Lambda^p)^\perp$ . Agora, suponha o contrário, i.e.,  $\varphi \in \Delta(\Lambda^p)^\perp$ , então

$$\langle \Delta\varphi, e^{j_0 \cdots j_p} \rangle = \langle \varphi, \Delta e^{j_0 \cdots j_p} \rangle = 0, \text{ para todos } j_0, \dots, j_p \in V.$$

Deste modo,  $\varphi \in H^p$ . □

Note que segue diretamente do teorema acima com os resultados anteriores que

$$\Lambda^p = d\partial(\Lambda^p) \oplus \partial d(\Lambda^p) \oplus H^p = d(\Lambda^{p-1}) \oplus \partial(\Lambda^{p+1}) \oplus H^p.$$

**Definição 4.19.** Seja  $H$  o operador projeção de  $\Lambda^p$  em  $H^p$ . Definimos o operador de Green  $G : \Lambda^p \rightarrow (H^p)^\perp$  associando  $G(\alpha)$  à solução de  $\Delta\omega = \alpha - H(\alpha)$  em  $(H^p)^\perp$ .

Note que se  $\varphi$  e  $\psi$  são soluções de  $\Delta\omega = \alpha - H(\alpha)$  em  $(H^p)^\perp$ , então  $\Delta\varphi = \Delta\psi$ . Tem-se portanto que  $\Delta(\varphi - \psi) = 0$ , i.e.,  $(\varphi - \psi) \in H^p$ , mas  $\varphi - \psi \in (H^p)^\perp$ , logo  $\varphi - \psi = 0$ . Por conseguinte,  $\varphi = \psi$  e  $G$  está bem definido.

**Proposição 4.20.**  $G$  é autoadjunto e comuta com todo operador que comute com o Laplaciano.

*Demonstração.* Seja  $\{\omega_i\}_{i=1}^k$  uma base para  $H^p$ . Podemos completar tal conjunto a uma base  $\{\omega_i\}_{i=1}^n$  de  $\Lambda^p$ . Deste modo,

$$H\omega_i = \begin{cases} \omega_i, & \text{se } i \leq k \\ 0, & \text{se } i > k \end{cases}$$

Assim,

$$G\omega_i = \begin{cases} 0, & \text{se } i \leq k \\ \omega_i, & \text{se } i > k \end{cases}$$

Seja então  $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi^i \omega_i$ , de modo que  $\varphi^i \in \mathbb{K}$ . Deste modo,  $G\varphi = \sum_{i=k+1}^n \varphi^i \omega_i$  e, consequentemente,

$$\langle G\omega_i, \varphi \rangle = \langle \omega_i, G\varphi \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \leq k \\ \varphi^i, & \text{se } i > k \end{cases}$$

Estendendo o resultado por linearidade tem-se que  $G$  é autoadjunto.

Agora, sejam  $T$  um operador linear que comuta com o Laplaciano  $\Delta$  e  $\pi_{(H^p)^\perp} : \Lambda^p \rightarrow (H^p)^\perp$  o operador projeção. Nestas condições, segue da definição que  $G = (\Delta|_{(H^p)^\perp})^{-1} \circ \pi_{(H^p)^\perp}$ . Note ainda que do fato de  $T\Delta = \Delta T$  segue que  $T(\text{Im } \Delta) \subset \text{Im } \Delta$  e que  $T(\ker \Delta) \subset \ker \Delta$ , portanto,  $T((H^p)^\perp) \subset (H^p)^\perp$  e  $T((H^p)^\perp) \subset (H^p)^\perp$ . Assim sendo,  $T$  comuta com  $\pi_{(H^p)^\perp}$  e, em  $(H^p)^\perp$ , com  $(\Delta|_{(H^p)^\perp})$ , de sorte que, ainda em  $(H^p)^\perp$ ,  $T$  comuta com  $(\Delta|_{(H^p)^\perp})^{-1}$ . Por consequência,  $T$  comuta com  $G$ .  $\square$

**Teorema 4.21.** *Cada classe de cohomologia contém um único representante harmônico.*

*Demonstração.* Para todo  $\alpha \in \Lambda^p$ , segue do teorema da decomposição de Hodge que existe  $\varphi \in \Lambda^p$  tal que

$$\alpha = \Delta\varphi + H\alpha,$$

então

$$\Delta\varphi = \alpha - H\alpha.$$

Da definição de  $G$  obtém-se que

$$\varphi = G\alpha.$$

Logo,

$$\alpha = \Delta G\alpha + H\alpha = d\partial G\alpha + \partial dG\alpha + H\alpha.$$

Como  $G$  comuta com  $d$ ,

$$\alpha = d\partial G\alpha + \partial Gd\alpha + H\alpha.$$

Deste modo, se  $\alpha$  é uma  $p$ -forma fechada,

$$\alpha = d\partial G\alpha + H\alpha.$$

Portanto,  $H\alpha$  é uma forma harmônica na mesma classe cohomológica de De Rham de  $\alpha$ .

Se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são duas formas harmônicas na mesma classe de cohomologia e diferem pela forma fechada  $d\psi$ , i.e.,  $\omega_1 - \omega_2 = d\psi$ . Então

$$\langle d\psi, \omega_1 - \omega_2 \rangle = \langle \psi, \partial\omega_1 - \partial\omega_2 \rangle = 0,$$

#### 4 Homologia de Digrafos e Aplicações

dado que formas harmônicas estão no núcleo do operador  $\partial$ . Deste modo,  $d\psi = 0$  e  $\omega_1 = \omega_2$ .  $\square$

# 5

## Digrafos Localmente Finitos

A teoria de homologia de digrafos descrita até esta etapa se restringe a digrafos finitos. Todavia, digrafos infinitos abundam nas bibliografias, tanto em textos de contagem e probabilidade quanto em textos de ciências empíricas. Deste modo, reservamos este capítulo para a generalização da teoria homológica para digrafos localmente finitos.

**Definição 5.1.** *Um digrafo é **localmente finito** se cada vértice e extremidade de no máximo um número finito de arestas.*

### 5.1 (Co)Homologia e o operador Laplaciano

Note que, analogamente ao feito pro caso finito, dado um conjunto enumerável  $V$  podemos definir sobre ele o  $\mathbb{K}$ -espaço dos  $p$ -caminhos como sendo o espaço das  $\mathbb{K}$ -combinações lineares formais das sequências de  $p + 1$ -vértices sobre  $V$ . Note ainda que trocando o corpo da definição por um anel temos na verdade um módulo dos  $p$ -caminhos. Ambos serão denotados por  $\Lambda_p$ , e a distinção entre eles ficará clara pelo contexto. Analogamente definimos o espaço (módulo) das  $p$  formas,  $\Lambda^p$ , os operadores bordo e diferencial exterior. Temos assim, novamente, dois complexos, um de cadeia e um de cocadeia, dados respectivamente por  $(\Lambda_p, \partial)$  e por  $(\Lambda^p, d)$ . Deste modo, podemos estender a definição de Homologia e de Cohomologia para complexos de caminhos cujos conjuntos de vértices são enumeráveis. Logo, podemos (e vamos) estudar a (co)homologia de digrafos localmente finitos.

Fixe  $G = (V, E)$  um digrafo localmente finito arbitrário cujo conjunto de vértices é denotado por  $V$  e o de arestas por  $E$ .

Definimos então, para cada  $x \in V$ ,  $m(x) = |\{y \in V : y \sim x\}|$ ; em que  $y \sim x$  quer dizer que  $(x, y) \in E$ .  $m(x)$  é dita a **valência de  $x$** , ou o grau de  $x$ .

## 5 Digrafos Localmente Finitos

Para todo inteiro  $p \geq -1$ , defina  $\Lambda^p = \Lambda^p(V)$  como sendo o espaço dual ao  $\Lambda_p$ . Este espaço será denominado espaço das  $p$ -formas, cujos elementos serão chamados por  **$p$ -formas**, obviamente. Fixamos  $\Lambda^{-1} = \{0\}$ .

Nosso interesse principal será seguintes subespaços:

$$\mathfrak{l}^2(\Lambda_p) := \{f : \Lambda_p \rightarrow \mathbb{K}; \sum_{x \in \Lambda_p} f^2(x) \in \mathbb{K}\}$$

$$C_c(\Lambda_p) := \{f : \Lambda_p \rightarrow \mathbb{K}; |\{x : f(x) \neq 0\}| < \infty\}$$

Nesses espaços vetoriais consideraremos o seguinte produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in \Lambda_p} f(x)g(x).$$

Por comodidade operacional, dada um  $p$ -forma  $f$ , estenda-a ao seguinte mapa do espaço gerado pelas sequências arbitrárias de  $p + 1$  vértices de  $G$  em  $\mathbb{K}$ :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \Lambda_p \\ f(x), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Cometeremos o abuso de identificar  $\tilde{f}$  por  $f$ .

Definimos os operadores  $d : \Lambda^{p-1} \rightarrow \Lambda^p$  e  $\partial : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p-1}$  da seguinte maneira:

$$df(i_0 \cdots i_p) = \sum_{q=0}^p (-1)^q f(i_0 \cdots \widehat{i}_q \cdots i_p),$$

$$\partial f(i_0 \cdots i_p) = \sum_{k \in V} \sum_{q=0}^{p+1} (-1)^q f(i_0 \cdots i_{q-1} k i_q \cdots i_p);$$

em que  $\widehat{i}_q$  significa a omissão do índice  $i_q$ . Logicamente, os operadores  $d : \Lambda^{-1} \rightarrow \Lambda^0$  e  $\partial : \Lambda^0 \rightarrow \Lambda^{-1}$  são identicamente nulos.

Como  $V$  é localmente finito, temos a partir da definição de  $\partial f$  que  $f(i_0 \cdots i_{q-1} k i_q \cdots i_p)$  é distinto de 0 para no máximo um número finito de vértices  $k$ , de modo que  $\partial f$  está bem definido.

**Proposição 5.2.** *Se  $f \in \mathfrak{l}^2(\Lambda_{p-1})$  então  $df \in \mathfrak{l}^2(\Lambda_p)$ .*

*Demonstração.* Começamos observando que

$$\|df\|^2 = \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} df(i_0 \cdots i_p)^2 = \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} \left( \sum_{q=0}^p (-1)^q f(i_0 \cdots \widehat{i}_q \cdots i_p) \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} \sum_{q=0}^p \sum_{r=0}^p (-1)^{q+r} f(i_0 \cdots \widehat{i}_q \cdots i_p) f(i_0 \cdots \widehat{i}_r \cdots i_p) \\
 &= \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} \sum_{q=0}^p (f(i_0 \cdots \widehat{i}_q \cdots i_p))^2 + \sum_{r < p} (-1)^{q+r} f(i_0 \cdots \widehat{i}_r \cdots i_q \cdots i_p) f(i_0 \cdots i_r \cdots \widehat{i}_q \cdots i_p) + \\
 &\quad + \sum_{r > p} (-1)^{q+r-1} f(i_0 \cdots \widehat{i}_q \cdots i_r \cdots i_p) f(i_0 \cdots i_q \cdots \widehat{i}_r \cdots i_p)
 \end{aligned}$$

Dessa forma, invertendo-se os índices no somatório do último termo acima, temos que os dois últimos somatórios se anulam, assim:

$$\|df\|^2 = \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} \sum_{q=0}^p f(i_0 \cdots \widehat{i}_q \cdots i_p)^2 = \|f\|^2 < \infty.$$

□

Finalmente, ressaltamos ainda que com contas rotineiras mostra-se que  $d^2 \equiv 0$ .

Ressalta-se o fato de que se  $f \in \mathcal{L}^2(\Lambda_p)$  então  $\partial f \in \mathcal{L}^2(\Lambda_p)$ ; sendo  $\Lambda_\bullet$  um complexo de caminhos de um digrafo de valência limitada.

**Proposição 5.3.** *Os operadores  $d$  e  $\partial$  são adjuntos com respeito ao produto interno fixado.*

*Demonstração.* De fato, dadas  $f$  uma  $(p-1)$ -forma e  $g$  uma  $p$ -forma em  $G$ , com  $p > 0$ , sem perda de generalidade, temos que:

$$\begin{aligned}
 \langle df, g \rangle &= \sum_{i_0 \cdots i_p \in \Lambda_p} df(i_0 \cdots i_p) g(i_0 \cdots i_p) = \\
 &\sum_{i_0 \cdots i_p \in \Lambda_p} \sum_{q=0}^p (-1)^q f(i_0 \cdots \widehat{i}_q \cdots i_p) g(i_0 \cdots i_p) = \\
 &\sum_{i_0 \cdots i_{p-1} \in \Lambda_{p-1}} \sum_{q=0}^p \sum_{k \in V} (-1)^q f(i_0 \cdots i_{p-1}) g(i_0 \cdots i_{q-1} k i_q \cdots i_{p-1}) = \\
 &\sum_{i_0 \cdots i_{p-1} \in \Lambda_p} f(i_0 \cdots i_{p-1}) \partial g(i_0 \cdots i_{p-1}) = \langle f, \partial g \rangle.
 \end{aligned}$$

□

Deste modo, segue que  $\partial^2 \equiv 0$ .

**Definição 5.4.** *O Operador **Laplaciano** é o operador linear sobre o espaço das  $p$ -formas,  $\Lambda^p$ , é definido como:*

$$\Delta := d\partial + \partial d.$$

## 5 Digrafos Localmente Finitos

Segue do fato de  $\mathbf{d}$  e  $\partial$  serem adjuntos que  $\Delta$  é autoadjunto.

Podemos de maneira análoga ao caso finito definir o espaço dos  $\mathbf{p}$ -caminhos  $\partial$ -invariantes,  $\Omega_{\mathbf{p}}$  (ver definição 3.10), e os espaços das  $\mathbf{p}$ -formas  $\mathbf{d}$ -invariantes,  $\Omega^{\mathbf{p}}$  (ver (3.16)), e restringir os operadores dessa seção a tais objetos. Podemos também, do mesmo modo, definir as versões regulares dos operadores para este caso.

**Exemplo 5.** Seja  $f$  uma 0-forma. Então se

$$\partial f = 0,$$

temos que

$$\Delta f(x) = \partial \mathbf{d}f(x) = \sum_{k \sim x} (\mathbf{d}f(kx) - \mathbf{d}f(xk)) = \sum_{k \sim x} (f(x) - f(k) - f(k) + f(x)) = 2 \sum_{k \sim x} (f(x) - f(k)).$$

Logo,

$$\Delta f(x) = 2(m(x)f(x) - \sum_{y \sim x} f(y)). \quad (5.1)$$

□

Deste modo, podemos ver que o Laplaciano aqui definido é múltiplo do usualmente definido sobre grafos (veja [14]).

**Proposição 5.6.** *Seja  $f$  uma  $\mathbf{p}$ -forma.  $\Delta f = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{d}f = 0$  e  $\partial f = 0$ .*

*Demonstração.* Claramente  $\mathbf{d}f = 0$  e  $\partial f = 0$  implicam que  $\Delta f = 0$ . Agora,

$$\langle \Delta f, f \rangle = \langle (\mathbf{d}\partial + \partial\mathbf{d})f, f \rangle = \langle \mathbf{d}f, \mathbf{d}f \rangle + \langle \partial f, \partial f \rangle = \|\mathbf{d}f\|^2 + \|\partial f\|^2.$$

De sorte que se  $\Delta f = 0$ , então  $\mathbf{d}f = 0$  e  $\partial f = 0$ . □

**Definição 5.7.** *Uma forma  $f$  é dita **harmônica** se*

$$\Delta f = 0.$$

*Deste modo, definimos o espaço das  $\mathbf{p}$ -formas harmônicas,*

$$H^{\mathbf{p}} = \{\varphi \in \Lambda^{\mathbf{p}} : \Delta \varphi = 0\}.$$

**Lema 5.8.** *Seja  $f$  uma  $\mathbf{p}$ -forma.  $f \in H^{\mathbf{p}}$  se, e somente se,  $f \in (\text{Im } \mathbf{d})^{\perp} \cap \ker \mathbf{d}$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $f \in (\text{Im } d)^\perp \cap \ker d$ . Então  $df = 0$  e

$$\|\partial f\|^2 = \langle \partial f, \partial f \rangle = \langle f, d\partial f \rangle = 0,$$

pois  $f \in (\text{Im } d)^\perp$ . Logo, pela proposição (5.6),  $\Delta f = 0$ .

Agora, suponha que  $\Delta f = 0$ , então novamente pela proposição (5.6),  $f \in \ker d \cap \ker \partial$ , de sorte que

$$\langle f, dg \rangle = \langle \partial f, g \rangle = 0.$$

Logo,  $f \in (\text{Im } d)^\perp \cap \ker d$ . □

## 5.2 Produto cartesiano de complexos de caminhos e a Fórmula de Künneth

Esta seção foi baseada no capítulo 7 de [6]. É bem verdade que a teoria desenvolvida nesse artigo foi elaborada para digrafos finitos. Todavia, um leitor atento pode notar que neste capítulo não há uma única restrição feita quanto à cardinalidade do conjunto de vértices, de modo que os resultados aqui apresentados se mantêm no caso localmente finito. Só definiremos e enunciaremos aqui os fatos essenciais para o resto da teoria apresentada neste trabalho, de modo que, para um estudo mais aprofundado recomendamos fortemente a leitura da bibliografia recém citada.

Nesta seção consideramos  $V$  um conjunto enumerável de vértices e  $R(V) = R_\bullet(V)$  um complexo de caminhos regular sobre  $V$ . As homologias aqui tratadas serão as versões truncadas. E o operador bordo será tomado em sua versão regular.

Considere agora dois conjuntos de vértices  $X$  e  $Y$  e seu produto cartesiano,  $Z = X \times Y$ . Podemos definir sobre  $Z$   $r$ -caminhos elementares, que são da forma  $z = z_0 z_1 \cdots z_r$ ; em que  $z_i = (x_i, y_i)$ . Dizemos que  $x$  é um **caminho escada** se cada par de vértices consecutivos,  $z_{k-1} z_k$  for **vertical** (i.e.,  $x_{k-1} = x_k$ ), ou **horizontal** (i.e.,  $y_{k-1} = y_k$ ). Nessas condições, as projeções de  $z$  sobre  $X$  e  $Y$  definem caminhos elementares  $x = x_0 \cdots x_p$  e  $y = y_0 \cdots y_q$  sobre  $X$  e sobre  $Y$ , respectivamente; com  $p + q = r$ .

Um exemplo de um caminho escada  $z$  com suas projeções é mostrado na Figura 5.1.

Como sugerido na imagem acima, um caminho escada pode ser visto como um caminho, em forma de escada –  $S(z)$  –, em  $\mathbb{Z}^2$ , que conecta  $(0, 0)$  a  $(p, q)$ . Definimos ainda a **elevação de  $Z$**  como o número  $L(z)$  de células em  $\mathbb{Z}_+^2$  abaixo da escada  $S(z)$ . Como representa a Figura 5.2.

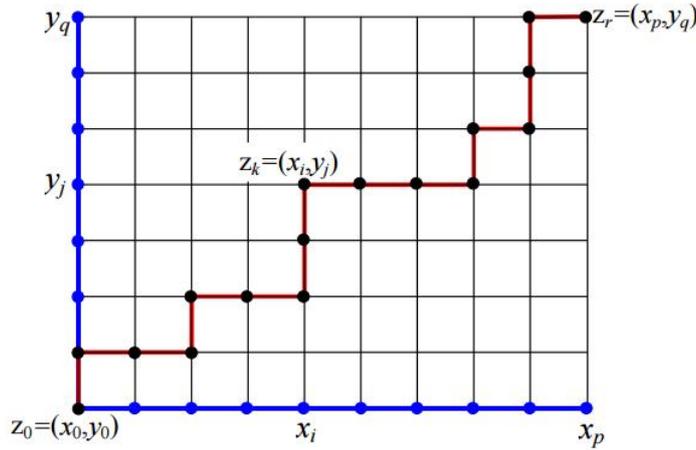


Figura 5.1: Um caminho escada  $z$  com suas projeções  $x$  e  $y$ . Imagem retirada de [6].

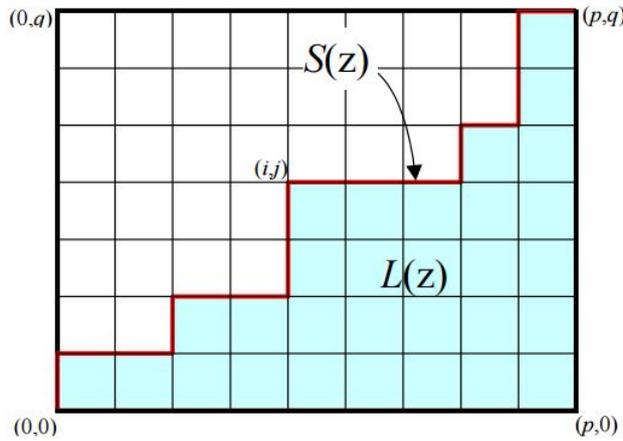


Figura 5.2: Uma escada  $S(z)$  com sua elevação  $L(z)$ . No caso,  $L(z) = 30$ . Imagem retirada de [6].

**Definição 5.9.** Dados dois caminhos  $u \in R_p(X)$  e  $v \in R_q(Y)$ , com  $p, q \geq 0$ , definimos seu **produto cartesiano** como sendo o  $(p+q)$ -caminho  $u \times v$  em  $Z$  pela seguinte regra: para cada  $(p+q)$ -caminho escada elementar  $z$  em  $Z$ , definimos a componente

$$(u \times v)^z = (-1)^{L(z)} u^x v^y;$$

em que  $x$  e  $y$  são as projeções de  $z$  em  $X$  e em  $Y$ , respectivamente. Ainda,  $u^x$  e  $v^y$  são as componentes correspondentes de  $u$  e de  $v$ . Se  $z$  não é escada, então  $(u \times v)^z := 0$ .

Destacamos a seguinte proposição.

**Proposição 5.10. (Regra do produto)** Se  $u \in R_p(X)$  e  $v \in R_q(Y)$ , com  $p, q \geq 0$ , então

$$\partial(u \times v) = (\partial u) \times v + (-1)^p u \times (\partial v).$$

Estamos finalmente prontos para enunciar a seguinte definição.

**Definição 5.11.** Dados dois conjuntos de vértices  $X$  e  $Y$ , com complexos de caminhos  $P(X)$  e  $P(Y)$ , respectivamente, definimos sobre o conjunto  $Z = X \times Y$  um complexo de caminhos  $P(Z)$  como sendo o conjunto de caminhos escada em  $Z$  cujas projeções estão em  $X$  e em  $Y$ .  $P(X) \boxplus P(Y) := P(Z)$  é dito produto cartesiano dos complexos de caminhos  $P(X)$  e  $P(Y)$ .

**Teorema 5.12. (Teorema de Künneth)** Se  $u \in \Omega_p(X)$  e  $v \in \Omega_q(Y)$ , então  $u \times v \in \Omega_{p+q}(Z)$ . Além disso,

$$\Omega_\bullet(X) \otimes \Omega_\bullet(Y) \cong \Omega_\bullet(Z);$$

com a aplicação  $\Omega_\bullet(X) \otimes \Omega_\bullet(Y) \rightarrow \Omega_\bullet(Z)$  dada por  $u \otimes v \mapsto u \times v$ . Consequentemente,

$$H_\bullet(Z) \cong H_\bullet(X) \otimes H_\bullet(Y).$$

I.e.,

$$H_r(Z) \cong \bigoplus_{p,q \geq 0: p+q=r} (H_p(X) \otimes H_q(Y)).$$

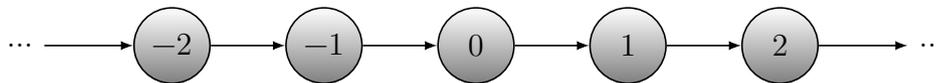
A demonstração desse fato pode ser encontrada no capítulo 7 de [6], como mencionado no início desta seção.

## 5.3 Exemplos de homologias de grafos de Cayley

Nesta seção estudamos algumas homologias de alguns grafos de Cayley.

Um digrafo de Cayley é um digrafo associado a um grupo  $G$  e a um conjunto de geradores  $S$  do grupo. Sendo que cada elemento de  $G$  é um vértice do grafo e as arestas são dadas por  $(g, gs)$ ; em que  $g \in G$  e  $S \in S$ .

**Exemplo 13.** Homologia do grafo de Cayley do grupo aditivo  $\mathbb{Z}$  com respeito ao conjunto gerador  $S = \{1\}$ .



É fácil ver que

$$\Omega_0 = \langle e_i : i \in \mathbb{Z} \rangle;$$

$$\Omega_1 = \langle e_{i(i+1)} : i \in \mathbb{Z} \rangle;$$

$$\Omega_i = 0, \quad \text{se } i \geq 2.$$

Tem-se trivialmente que  $\ker \partial|_{\Omega_0} = \Omega_0$  e que  $\partial\Omega_1 = \langle e_{(i+1)} - e_i \rangle$ , de modo que a classe de  $e_i$  em  $H_0$  é a mesma que a de  $e_{(i+1)}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Deste modo,  $H_0 = \langle e_0 \rangle$ .

## 5 Digrafos Localmente Finitos

Se considerarmos  $H_n$  como sendo um  $\mathbb{Z}$ -módulo, ao invés de um  $\mathbb{K}$ -espaço, temos que  $H_0 \cong \mathbb{Z}$ .

Note ainda que  $\ker \partial|_{\Omega_1} = \{v \in \Omega_1 : \sum_{i \in \mathbb{Z}} v^{ij} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} v^{ji}, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}\} = \{v \in \Omega_1 : v^{i(i+1)} = v^{(i-1)i} \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}\}$ . Assim, para um dado  $v$  no núcleo de  $\partial|_{\Omega_1}$ ,  $v^{i(i+1)} = v^{j(j+1)}$  para todos  $i, j \in \mathbb{Z}$ , o que se pode ser satisfeito pelo caminho nulo, 0.

Portanto,

$$H_i = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ 0, & i > 0. \end{cases}$$

□

Ressaltamos que no exemplo 5.3 o grafo é regular. Portanto, usando Künneth tem-se que a homologia do grafo de  $\mathbb{Z}^n$  com base canônica é  $H_0 = \mathbb{Z}$  e  $H_i = 0$  se  $i > 0$ .

**Exemplo 14.** Considere o grafo de Cayley do grupo aditivo  $\mathbb{Z}$  com respeito ao conjunto gerador  $S = \{-1, 1\}$ .

Neste exemplo consideraremos dois casos.

**Operador bordo usual:** Se considerarmos o operador bordo em sua versão usual, e não em sua versão regularizada, temos:

$$\Omega_0 = \langle e_i : i \in \mathbb{Z} \rangle;$$

$$\Omega_1 = \langle e_{i(i+1)}, e_{i(i-1)} : i \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Agora, note que se  $e_{ijk}$  é permitido, então ele é de alguma das formas:  $e_{i(i+1)(i+2)}$ ,  $e_{i(i-1)(i-2)}$ ,  $e_{i(i+1)i}$  ou  $e_{i(i-1)i}$ . Note que nas duas primeiras formas que um 2-caminho pode se apresentar descritas temos que em seus bordos aparece caminhos da forma  $e_{ik}$ , com  $|i - k| = 2$ . Como  $e_{i(i\pm 2)}$  só aparece no bordo de caminhos da forma  $e_{i(i\pm 1)(i\pm 2)}$ , temos que nenhuma combinação linear não nula contendo esses caminhos pode ter bordo permitido. Deste modo, eles não têm contribuição em  $\Omega_2$ . Por outro lado,  $\partial e_{i(i\pm 1)i} = e_{(i\pm 1)i} - e_{ii} + e_{i(i\pm 1)}$ . Como o grafo não contém loops, os únicos caminhos em  $\Omega_2$  são os gerados por  $e_{i(i+1)i} - e_{i(i-1)i}$ . Assim

$$\Omega_2 = \langle e_{i(i+1)i} - e_{i(i-1)i} : i \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Agora, seja  $e_{ijkl}$  um 3-caminho permitido. Note que  $\partial e_{ijkl} = e_{jkl} - e_{ikl} + e_{ijl} - e_{ijk}$ . Note que tanto  $e_{ikl}$  quanto  $e_{ijl}$  não podem ser permitidos. Ainda, os dois não podem aparecer simultaneamente no bordo de outro 3-caminho regular. E todo 3-caminho regular que contenha exatamente um dos dois na combinação linear de seu bordo deve

obrigatoriamente conter um terceiro 2-caminho não permitido na mesma combinação linear. Deste modo, o bordo de um 3-caminho qualquer terá obrigatoriamente pelo menos duas componentes não permitidas. Assim,

$$\Omega_i = 0, \quad i > 2.$$

Temos novamente que  $\ker \partial|_{\Omega_0} = \Omega_0$  e que  $\partial\Omega_1 = \langle e_{(i+1)} - e_i \rangle$ . Portanto,  $H_0 \cong \mathbb{Z}$ .

Pela proposição (3.17) temos que  $\ker \partial|_{\Omega_1} = \langle e_{i(i+1)} + e_{(i+1)i} \rangle$ . Ainda,  $\partial\Omega_2 = \langle e_{(i+1)i} + e_{i(i+1)} - (e_{(i-1)i} + e_{i(i-1)}) \rangle$ . Então, módulo  $\partial\Omega_2$ ,  $e_{(i+1)i} + e_{i(i+1)} = e_{(i-1)i} + e_{i(i-1)}$ , para todo inteiro  $i$ . Assim,  $H_1 = \langle e_{01} + e_{10} \rangle \cong \mathbb{Z}$ . Como  $\partial\Omega_2 = \langle e_{(i+1)i} + e_{i(i+1)} - (e_{(i-1)i} + e_{i(i-1)}) \rangle$ , temos que  $\ker \partial|_{\Omega_2} = 0$ . Note que isso condiz com a homologia de grupo de  $\mathbb{Z}$ .

**Operador bordo regular:** Se considerarmos o operador bordo regular, denotando-o aqui simplesmente por  $\partial$ , temos que

$$\Omega_0 = \langle e_i : i \in \mathbb{Z} \rangle;$$

$$\Omega_1 = \langle e_{i(i+1)}, e_{i(i-1)} : i \in \mathbb{Z} \rangle;$$

$$\Omega_2 = \langle e_{i(i\pm 1)i} : i \in \mathbb{Z} \rangle;$$

$$\Omega_3 = \langle e_{i(i+1)i(i+1)i}, e_{i(i-1)i(i-1)i} : i \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Os caminhos  $\partial$  invariantes são da forma  $ijij \cdots ij$  ou  $ijij \cdots jji$ , com  $j = i \pm 1$ . Note que a imagem de um caminho dessa forma é  $\partial e_{i_0 i_1 \cdots i_{p-1} i_p} = e_{i_1 \cdots i_p} + (-1)^p e_{i_0 \cdots i_{p-1}}$ ;  $p \geq 2$ . Então, nas classes de homologia,  $e_{i_1 \cdots i_p} = (-1)^{p+1} e_{i_0 \cdots i_{p-1}}$ . De modo que  $\ker \partial|_{\Omega_i} = 0$  se  $i \geq 2$ . Novamente  $H_0 \cong \mathbb{Z}$  e  $H_1 \cong \mathbb{Z}$ . □

Note que em ambos os casos acima têm complexo regular, portanto, podemos nos valer da fórmula de Künneth, obtendo  $H_q(\mathbb{Z}^d) = (\mathbb{Z})^{\binom{d}{q}}$ ; em que  $\binom{d}{q}$  é o coeficiente binomial, quando  $q > d$ , neste caso, este símbolo representa 0.

**Exemplo 15.** Considere agora o grafo de Cayley do grupo aditivo  $\mathbb{Z}$  com respeito ao conjunto gerador  $S = \{-3, -2, 2, 3\}$ .

**Operador bordo usual:** Temos neste caso: (cometeremos o abuso de linguagem de não especificar que o conjunto de índices é o conjunto dos inteiros, salvo menção explícita do contrário)

$$\Omega_0 = \langle e_i \rangle;$$

$$\Omega_1 = \langle e_{i\pm 2}, e_{i\pm 3} \rangle.$$

## 5 Digrafos Localmente Finitos

Note novamente que  $\ker \partial|_{\omega_0} = \Omega_0$  e que  $\partial\Omega_1 = \langle e_j - e_i : j \in i + S \rangle$ . Como  $\text{mdc}(2, 3) = 1$ , temos que há uma única classe em  $H_0$ . Portanto, novamente,  $H_0 \cong \mathbb{Z}$ .

Tome  $e_{ijk}$  um 2-caminho permitido. Então  $k \in \{i, i \pm 1, i \pm 4, i \pm 5, i \pm 6\}$ . Analisemos cada caso:

1.  $k = i \pm 6$ , então  $j = i \pm 3$ , necessariamente (de modo que  $\pm$  em ambos os casos deve se manter o mesmo, i.e., se  $k = i + 6$ , então  $j = i + 3$ ), de modo que  $e_{ik}$  aparece apenas no bordo de  $e_{ijk}$ . Assim, se  $v^{ijk} \neq 0$ , então  $v \notin \Omega_2$ .
2. O mesmo ocorre se  $k = i \pm 4$ , pois, neste caso,  $j = i \pm 2$ .
3. Agora, se  $k = i$ , então  $j$  pode admitir qualquer valor em  $i + S$ . Logo,  $\langle e_{i(i+S)i} - e_{i(i+S)i} \rangle \subset \Omega_2$ .
4. Se  $k = i + 1$ , temos que  $j = i + 3$  e se  $k = i - 1$ , temos que  $j = i - 3$  e, em ambos os casos não é possível compensar a componente  $e_{i(i \pm 1)}$  no bordo, por isso, se  $v^{ij(i \pm 1)} \neq 0$ , então  $v \notin \Omega_2$ .
5.  $k = i \pm 5$ , então  $j = i \pm 2$  ou  $j = i \pm 3$ , em que  $\pm$  toma mesmo sinal em todas as igualdades. Então  $\langle e_{i(i+2)(i+5)} - e_{i(i+3)(i+5)}, e_{i(i-2)(i-5)} - e_{i(i-3)(i-5)} \rangle \subset \Omega_2$ .

Deste modo,

$$\Omega_2 = \langle e_{i(i+S)i} - e_{i(i+S)i}, e_{i(i+2)(i+5)} - e_{i(i+3)(i+5)}, e_{i(i-2)(i-5)} - e_{i(i-3)(i-5)} \rangle.$$

Temos que

$$\ker \partial|_{\Omega_1} = \langle e_{i(i+2)} + e_{(i+2)i}, e_{i(i+3)} + e_{(i+3)i} \rangle.$$

Note que  $\partial(e_{i(i+2)i} - e_{i(i+3)i}) = e_{i(i+2)} + e_{(i+2)i} - (e_{i(i+3)} + e_{(i+3)i})$ . Então a classe de  $e_{i(i+2)} + e_{(i+2)i}$  e a classe de  $e_{i(i+3)} + e_{(i+3)i}$  são a mesma.

Além disso,  $\partial(e_{i(i+2)i} - e_{i(i-2)i}) = e_{i(i+2)} + e_{(i+2)i} - (e_{i(i-2)} + e_{(i-2)i})$ . Então, módulo  $\partial\Omega_2$ ,  $e_{i(i+2)} + e_{(i+2)i} = e_{i(i-2)} + e_{(i-2)i}$ . Pode-se ver então que, módulo  $\partial\Omega_2$ ,

$$e_{i(i-3)} + e_{(i-3)i} = e_{i(i-2)} + e_{(i-2)i} = (e_{i(i+2)} + e_{(i+2)i}) = e_{i(i+3)} + e_{(i+3)i}.$$

Então,  $e_{i(i+2)} + e_{(i+2)i} = e_{i(i+3)} + e_{(i+3)i} = e_{(i+1)i(i+3)} + e_{(i+3)(i+1)}$ . Então,  $e_{02} + e_{20} = e_{13} + e_{31}$ . Desta maneira, por indução,  $e_{(2p)(2p+2)} + e_{(2p+2)(2p)} = e_{02} + e_{20} = e_{13} + e_{31} = e_{(2p+1)(2p+3)}$ ; para todo inteiro  $p$ .

Deste modo,  $H_1 = \langle e_{02} + e_{20} \rangle \cong \mathbb{Z}$ .

Temos também que

$$\partial\Omega_2 = \langle e_{ji} + e_{ij} - (e_{ki} + e_{ik}), e_{i(i*2)} + e_{(i*2)(i*5)} - (e_{i(i*3)} + e_{(i*3)(i*5)}) : j, k \in i + S \rangle;$$

em que  $* \in \{+, -\}$ . De modo que  $\ker \partial|_{\Omega_2} = 0$ .

De maneira análogo ao feito no exemplo 5.3, temos que  $H_i = 0$  para  $i \geq 2$ .

□

Novamente obtivemos os mesmos grupos homológicos.

**Exemplo 16.** Homologia do grafo de Cayley do grupo aditivo  $\mathbb{Z}_n$ ,  $n > 4$ , com respeito ao conjunto gerador  $S = \{1\}$ .

Tal digrafo é cíclico e, portanto  $H_n = 0$  se  $n \geq 2$ . Ainda,  $\dim H_0 = 1$ . Agora, o grafo associado a  $\mathbb{Z}_n$  não é nunca um triângulo ou um quadrado (veja definições 4.6 e 4.7), então  $\dim H_1 = 1$ .

Assim,  $H_0 \cong H_1 \cong \mathbb{Z}$  e  $H_n = 0$ ,  $n > 1$ .

□

No exemplo 5.3 temos um exemplo de grafo de Cayley cuja homologia não é a mesma da do grupo associado.

Outros exemplos triviais como este são os associados aos grupos diedrais  $D_i$  com  $i \geq 5$ , cujos grafos de Cayley são cíclicos a menos de um número finito de vértices de grau 1. Em [6], na seção 5.2, é demonstrado que todos os vértices de grau 1 podem ser desprezados no cálculo da homologia. Então, podemos considerar os grafos em questão como grafos cíclicos que não são quadrados nem triângulos, obtendo a mesma homologia do exemplo 5.3, que também é diferente da homologia dos grupos diedrais.

Portanto, ao que tudo indica não há uma relação direta entre as duas teoria homológicas – de grupos e de grafos.

Note que a existência de quadrados no digrafo dado por um conjunto gerador antissimétrico implica que dois de seus geradores comutam. Isto mostra, por exemplo, que se  $H_i(\mathbf{G})$  é não trivial para algum  $i > 2$ , então ao menos dois elementos do conjunto gerador comutam. Se um grupo é livre seu grafo claramente não contém triângulos. Portanto, segue pela Proposição (4.8) que  $\dim H_p(\mathbf{G}) = 0$  para todo  $p \geq 2$ , caso  $\mathbf{G}$  seja livre. Isso é um indicativo de que a homologia do grafo de Cayley de  $\mathbf{G}$  com respeito a um conjunto gerador minimal  $S$  nos dá informações algébricas sobre o grupo  $\mathbf{G}$ .

## 5.4 Teoria homotópica de digrafos e os axiomas de Eilenberg-Steenrod

Há no caso contínuo um conjunto de axiomas que rege as diversas teorias homológicas, chamado de axiomas de Eilenberg-Steenrod. Nesta seção enunciaremos o análogo para o caso discreto, que foi enunciado pela primeira vez em [7]. Também neste artigo, foi demonstrado que, com algumas definições a mais, a teoria homológica para digrafos que estudamos ao longo deste trabalho satisfaz tal conjunto de axiomas. Outro importante resultado que enunciaremos aqui, também apresentado em [7], é a sequência de Mayer-Vietoris. A demonstração dos fatos aqui enunciados pode ser achada nesse mesmo trabalho.

Antes definamos uma teoria homotópica consistente com nossa teoria homológica sobre os digrafos.

Para um dado digrafo  $X$  fixamos a notação:  $V_X$  é seu conjunto de vértices e  $E_X$  de arestas.

**Definição 5.17.** *Um digrafo com base  $X^*$  é um digrafo  $X$  com uma escolha de um vértice  $*$ .*

**Definição 5.18.** *Uma aplicação de digrafos de um digrafo  $X$  a um digrafo  $Y$  é uma aplicação  $f : V_X \rightarrow V_Y$  tal que para qualquer aresta  $v \rightarrow w$  temos que  $f(v) = f(w)$  ou  $f(v) \rightarrow f(w)$  em  $Y$ .*

*Uma aplicação de digrafos com bases  $f : X^v \rightarrow Y^w$  é uma aplicação de digrafos tal que  $f(v) = w$ .*

Uma aplicação de digrafos é dita isomorfismo se é, além de uma aplicação de digrafos, uma bijeção cuja a inversa é também uma aplicação de digrafos.

Denotamos a categoria cujos objetos são os digrafos e os morfismos as aplicações de digrafos por  $\mathcal{D}$  e a categoria dos digrafos com base por  $\mathcal{D}^*$ .

Denotaremos por  $I_n$  um digrafo de vértices  $\{0, 1, \dots, n\}$  cujo conjunto das arestas contém exatamente uma das arestas  $i \rightarrow (i+1)$  ou  $(i+1) \rightarrow i$  para cada  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Tais digrafos serão chamados de **digrafos linha**. Denote ainda por  $I_n^*$  o digrafo linha com base  $* = 0$ .

**Definição 5.19.** *Dizemos que duas aplicações de digrafos  $f, g : X \rightarrow Y$  são **homotópicas**, e denotamos  $f \simeq g$ , se existir um digrafo linha  $I_n$  e uma aplicação de digrafos  $t.g$ .*

$$F : X \boxplus I_n \rightarrow Y \text{ tal que } F|_{X \boxplus 0} = f, \quad F|_{X \boxplus n} = g.$$

Em que  $X \boxplus I_n$  denota o produto cartesiano do digrafo  $X$  pelo digrafo  $I_n$ .

Tal  $F$  é dita uma **homotopia de  $f$  a  $g$** .

Se  $X^u$  e  $Y^*$  são digrafos com base, pedimos a propriedade  $F_{\{v\} \boxplus I_n} = *$  para a homotopia.

**Definição 5.20.** Dizemos ainda que dois digrafos são **homotopicamente equivalentes**, e denotamos  $X \simeq Y$ , se existirem aplicações de digrafos  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  t.q.

$$f \circ g \simeq \text{Id}_Y, g \circ f \simeq \text{Id}_X.$$

Tais  $f$  e  $g$  são ditas **inversas homotópicas uma da outra**.

Denotaremos por  $\mathcal{D}^*$  a categoria dos digrafos com as classes homotópicas das aplicações de digrafos e por  $\mathcal{D}^{*'}$  a versão dos digrafos com base.

**Definição 5.21.** Um digrafo  $Y$  é dito **subdigrafo** de  $X$  se  $V_Y \subset V_X$  e  $E_Y \subset E_X$ . Denotamos  $Y \sqsubset X$ . Se, além disso,

$$v, w \in V_Y \text{ e } (v, w) \in E_X \Rightarrow (v, w) \in E_Y,$$

então  $Y$  é dito um **subdigrafo induzido** de  $X$  e denotado por  $X \supset Y$ .

Um **par de digrafos** é um par da forma  $(X, Y)$  com  $Y \sqsubset X$ .

**Definição 5.22.** Sejam  $(X, Y)$  e  $(X', Y')$  dois pares de digrafos. Uma aplicação de digrafos  $f : X \rightarrow X'$  é dita uma **aplicação de pares de digrafos** se  $f(Y) \sqsubset Y'$ , e é denotada por  $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ .

Além disso, dada  $f : V \rightarrow V'$ , uma função entre dois conjuntos de vértices, definimos como **homomorfismo induzido por  $f$**  o homomorfismo  $f_* : \Omega_p(V) \rightarrow \Omega_p(V')$  por

$$f_*(e_{i_0 \dots i_p}) = e_{f(i_0) \dots f(i_p)}.$$

Na versão regular do complexo de cadeia, fixamos

$$f_*(e_{i_0 \dots i_p}) = \begin{cases} e_{f(i_0) \dots f(i_p)}, & \text{se } e_{f(i_0) \dots f(i_p)} \text{ é regular} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Segue diretamente da definição do operador bordo que  $\partial f_* = f_* \partial$ .

Da mesma maneira  $f$  induz um homomorfismo  $f_* : H_p(X) \rightarrow H_p(X')$ , em que  $X$  e  $X'$  são digrafos cujos conjuntos de vértices são  $V$  e  $V'$ , respectivamente. Além disso, duas aplicações homotopicamente equivalentes induzem os mesmos homomorfismos, de modo que as homologias são invariantes homotópicas.

O fato de  $f_*$  estar bem definida e o fato da homologia ser um invariante topológico foram enunciados em [7].

Agora apresentaremos o essencial para o cálculo de homologia de um par de digrafos. Fixe a seguir  $(X, Y)$  um par de digrafos.

**Proposição 5.23.** *O homomorfismo  $i_*$  induzido pela inclusão natural  $i : Y \rightarrow X$  é também uma inclusão.*

Definimo, portanto, o complexo de cadeis  $\Omega_\bullet(X, Y) := \Omega_\bullet(X)/\Omega_\bullet(Y)$ . E os respectivos grupos homológicos por  $H_\bullet(X, Y)$ , denominados por **grupos homológicos de caminhos relativos**.

**Teorema 5.24. (Homologia do par)** *Seja  $(X, Y)$  um par de digrafos. Então existe uma seqüência exata longa de homologias relativas*

$$0 \leftarrow H_0(X, Y) \leftarrow H_0(X) \leftarrow H_0(Y) \leftarrow \cdots \leftarrow H_{n-1}(Y) \leftarrow H_n(X, Y) \leftarrow H_n(X) \leftarrow \cdots$$

em que os homomorfismos  $H_n(Y) \rightarrow H_n(X)$  são os induzidos pela inclusão  $i : Y \rightarrow X$ .

**Proposição 5.25.** *Seja  $X$  um digrafo com  $C$  componentes conexas. Então  $\dim H_0(X) = C$ .*

Sejam  $X = Y_1 \cup Y_2$  e  $Z = Y_1 \cap Y_2$  a união e a intersecção de dois digrafos t.q. cada caminho elementar está exatamente em um dos digrafos  $Y_1$  ou  $Y_2$ . Considere ainda o seguinte diagrama comutativo de inclusões naturais de digrafos:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i^1} & Y_1 \\ \downarrow i^2 & & \downarrow j^1 \\ Y_2 & \xrightarrow{j^2} & X \end{array} \quad (5.2)$$

**Teorema 5.26. (Seqüência de Mayer-Vietoris)** *Sob as condições recém enunciadas para os digrafos  $X$  e  $Z$ , o diagrama (5.2) induz a seguinte seqüência exata longa de homologias:*

$$\cdots \longrightarrow H_n(Z) \xrightarrow{\delta} H_n(Y_1) \oplus H_n(Y_2) \xrightarrow{d} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(Z) \longrightarrow \cdots$$

em que  $\delta = (i_*^1, i_*^2)$ ,  $d(a, b) = j_*^1(a) - j_*^2(b)$  e  $\partial$  é o homomorfismo conector.

### 5.4.1 Axiomas de Eilenberg-Steenrod

A teoria homológica enunciada ao longo desta dissertação apresenta uma série de propriedades bastante similares àquelas dos axiomas de Eilenberg-Steenrod para o caso contínuo. Portanto, a definição axiomática de uma teoria homológica na categoria dos

pares de digrafos que se segue possui um modelo e mostra, novamente, que o caso discreto tem um comportamento bastante análogo ao contínuo.

Defina o funtor  $R : \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{D}^2$  pela seguinte regra

$$R(X, Y) = (Y, \emptyset) \quad \text{e} \quad R(f) = f_Y,$$

se  $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ .

Temos o funtor induzido  $R' : \mathcal{D}^{2'} \rightarrow \mathcal{D}^{2'}$ , que leva  $[f]$  a  $[f|_Y]$ .

Seja  $\mathcal{A}$  a categoria dos grupos abelianos.

Fixe também os funtores  $R : \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{D}^2$  e  $R' : \mathcal{D}^{2'} \rightarrow \mathcal{D}^{2'}$  definidos por

$$R(X, Y) = (X, \emptyset), \quad R(f) = f|_Y$$

e

$$R'(X, Y) = (X, \emptyset), \quad R'(f) = [f|_Y];$$

com  $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$  aplicação de pares de digrafos, sendo  $[f]$  sua classe homotópica.

**Definição 5.27.** *Uma teoria homológica não reduzida sobre a categoria  $\mathcal{D}^{2'}$  de pares de digrafos e classes homotópicas de aplicações de pares de digrafos compõe-se da sequência de funtores*

$$H_p : \mathcal{D}^{2'} \rightarrow \mathcal{A}, \quad p \in \mathbb{Z}$$

e das transformações naturais

$$\partial_n : H_n \rightarrow H_{n-1} \circ R, \quad n \in \mathbb{Z},$$

tais que satisfazem os axiomas que seguem.

1. **Axioma da exatidão:** Para todo par  $(X, Y) \in \mathcal{D}^{2'}$  a sequência

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, Y) \xrightarrow{(X, Y)^{\partial_{n+1}}} H_n(Y, \emptyset) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X, \emptyset) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, Y) \longrightarrow \cdots$$

é exata; com  $i$  e  $j$  sendo as inclusões naturais.

2. **Axioma da Excisão:** Considere os dois casos.

(a) Seja  $X$  um grafo no qual há dois subgrafos  $A_1$  e  $A_2$  tais que não há arestas saindo de  $V_{A_i}$  para  $V_X \setminus V_{A_i}$ ;  $i \in \{1, 2\}$ . Sejam ainda  $Y_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) os subgrafos de  $X$  obtidos deletando os digrafos  $A_i$  e todas as arestas que levam a eles (“arestas saindo” pode ser substituído por “arestas entrando”).

(b) Sejam  $X = Y_1 \cup Y_2$  e  $Y_1 \cap Y_2 = *$ , um digrafo de um único vértice.

Em ambos os casos a inclusão

$$j : (Y_1, Y_1 \cap Y_2) \rightarrow (X, Y_2)$$

## 5 Digrafos Localmente Finitos

induz isomorfismos

$$H_n(j) : H_n(Y_1, Y_1 \cap Y_2) \rightarrow H_n(X, Y_2), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. **Axioma da aditividade:** Se  $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$  é união disjunta de digrafos, então

$$H_n(X, \emptyset) = \bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha}, \emptyset).$$

4. **Axioma da dimensão:** Para o grafo de um vértice  $*$  vale

$$H_n(*, \emptyset) = \begin{cases} K & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

com  $K$  sendo um grupo abeliano fixado.

# 6 Teorema de Decomposição de Hodge

Neste capítulo apresentaremos um resultado inédito na literatura, o Teorema da decomposição de Hodge para digrafos localmente finitos. Observamos, todavia, desta vez não é possível prová-lo usando técnicas elementares de álgebra linear, como o feito na seção 4.6 para digrafos finitos. Desta vez nos inspiraremos na demonstração do teorema de Hodge para variedades que é feita estudando a equação do calor – como apresentado em [1]. A análise aqui feita da equação do calor é fortemente inspirada em [14].

Para demonstrarmos o Teorema de Hodge é necessário que estudemos a equação do calor em um grafo localmente finito e conexo  $G = (V, E)$ . Mais especificamente, o problema de Cauchy (PC)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \end{cases}$$

em  $[0, T[ \times V$  com condição inicial  $\mathbf{u}_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$ ; com  $T \in ]0, \infty[$ .

Intuitivamente, no caso contínuo, podemos ver  $\mathbf{u}_0$  como sendo uma configuração inicial da temperatura em cada ponto de uma variedade. Do ponto de vista termodinâmico é esperado que tal temperatura se “espalhe”, suavemente pela variedade, levando em consideração sua geometria. O fluxo  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  do (PC) para este caso nos dá a configuração da temperatura em cada instante  $t$ . Espera-se que após um tempo  $t$  suficiente esse sistema atinja um equilíbrio. Isto é, que  $\mathbf{u}(t, \cdot)$  convirja a uma forma harmônica para tempos suficientemente grandes.

No caso de digrafos podemos ter uma intuição análoga.

Dizemos que uma função  $\mathbf{p} : ]0, \infty[ \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução fundamental da equação do calor

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} = 0$$

## 6 Teorema de Decomposição de Hodge

se para qualquer condição inicial limitada  $\mathbf{u}_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$  a função

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in V} p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}_0(\mathbf{y}), \quad t > 0, \mathbf{x} \in V$$

for diferenciável em relação a  $t$ , for solução da equação do calor e para todo  $\mathbf{x} \in V$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}).$$

Se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são dois vértices de um digrafo  $G$  tais que  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$  ou  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$  então fixamos a notação  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ .

Defina sobre  $G$  a métrica usual de digrafos  $\mathbf{d} : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$  da seguinte maneira:  $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  e, se  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , existe um número finito de vértices  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \sim \mathbf{x}_1 \sim \dots \sim \mathbf{x}_k = \mathbf{y} \in V$  que conectam  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . Fixe  $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  como sendo o menor número  $k$  de tais vértices – ressalta-se a conexidade de  $G$ .

**Teorema 6.1.** [14] *Seja  $G = (V, E)$  um grafo tal que existem  $\mathbf{x}_0 \in V$  e  $C \geq 0$  com  $\Delta \mathbf{d}(\cdot, \mathbf{x}_0) \geq -C$ . Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- *Existe um única solução fundamental  $\mathbf{p} : ]0, \infty[ \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  da equação do calor.*
- *$G$  é estocasticamente completo, i.e.,*

$$\sum_{\mathbf{y} \in V} p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$$

para todos  $t > 0$  e  $\mathbf{x} \in V$ .

- *Para todo  $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{l}^1(V)$  e para toda solução correspondente de (PC)  $\mathbf{u}$ , temos que*

$$\sum_{\mathbf{x} \in V} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x} \in V} \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$$

para todo  $t > 0$ . Ainda,

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in V} p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}_0(\mathbf{y}).$$

Nas afirmações que seguem fixaremos um grafo  $G$  que satisfaz as condições do teorema acima.

Note que  $\Delta \mathbf{d}(\cdot, \mathbf{x}_0) \geq -C$  é uma restrição no crescimento do grafo, uma vez que, para um dado  $\mathbf{x} \in V$ ,

$$\frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = m(\mathbf{x}) \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - \sum_{\mathbf{y} \sim \mathbf{x}} \mathbf{d}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0);$$

note ainda que se  $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$ , então  $\mathbf{d}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0) = \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \pm 1$ . De modo que  $\Delta \mathbf{d}(\cdot, \mathbf{x}_0)$  só não é limitado inferiormente se as bolas de raio  $k$  centradas  $\mathbf{x}_0$  assumem números de vértices interiores com distância  $k-1$  de  $\mathbf{x}_0$  arbitrariamente grandes. Não tão somente, esse número deve superar (com diferença arbitrariamente grande) o número de vértices exteriores com distância  $k+1$  de  $\mathbf{x}_0$ . Claramente grafos de valência limitada satisfazem essa condição.

Utilizaremos esse teorema, junto com a intuição termodinâmica mencionada no início da seção, para provar o Teorema de Hodge.

**Teorema 6.2.** *(de decomposição de Hodge) Existem operadores lineares  $H$  (projeção harmônica) e  $G$  (operador de Green) de  $\Lambda^p$ , para todo  $p$ , caracterizados pelas seguintes propriedades*

- $H(\alpha)$  é harmônica;
- $G(\alpha)$  é ortogonal ao espaço das formas harmônicas;
- $\alpha = H(\alpha) + \Delta G(\alpha)$ .

Como consequência do teorema anterior isso implica que  $\Lambda^p = \Delta(\Lambda^p) \oplus H^p = \mathbf{d}\partial(\Lambda^p) \oplus \partial\mathbf{d}(\Lambda^p) \oplus H^p = \mathbf{d}(\Lambda^p) \oplus \partial(\Lambda^p) \oplus H^p$ .

Dividiremos a demonstração do Teorema de Hodge em duas proposições que apresentamos a seguir.

**Proposição 6.3.** *Se  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  é solução de (PC), então  $\|\mathbf{u}(t, \mathbf{x})\|^2$  é não crescente.*

*Demonstração.*

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\mathbf{u}(t, \mathbf{x})\|^2 = 2\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}, \mathbf{u} \right\rangle = -2\langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = -2(\|\mathbf{d}\mathbf{u}\|^2 + \|\partial\mathbf{u}\|^2) \leq 0.$$

□

Defina

$$T_t(\mathbf{u}_0) = \sum_{\mathbf{y} \in V} p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}_0(\mathbf{y})$$

com  $p$  como no Teorema 6.1. Esta é, como vimos, a única solução de (PC).

**Proposição 6.4.** *Vale a propriedade de semigrupo  $T_{t_1+t_2} = T_{t_1} T_{t_2}$ .*

*Demonstração.* Note que  $\mathbf{u}(t_1 + t_2, \mathbf{x})$  pode ser obtido resolvendo a equação do calor com condição inicial  $\mathbf{u}(t_2, \mathbf{x})$  e então calculando-a em  $t_1$ . □

**Proposição 6.5.**  *$T_t$  é autoadjunto.*

## 6 Teorema de Decomposição de Hodge

*Demonstração.* Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle T_t \alpha, T_\tau \beta \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} T_t \alpha, T_\tau \beta \right\rangle = -\langle \Delta T_t \alpha, T_\tau \beta \rangle \\ &= -\langle T_t \alpha, \Delta T_\tau \beta \rangle = \left\langle T_t \alpha, \frac{\partial}{\partial \tau} T_\tau \beta \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \tau} \langle T_t \alpha, T_\tau \beta \rangle, \end{aligned}$$

podemos escrever  $\langle T_t \alpha, T_\tau \beta \rangle = g(t + \tau)$ . Assim,

$$\langle T_t \alpha, \beta \rangle = g(t + 0) = g(0 + t) = \langle \alpha, T_t \beta \rangle.$$

□

**Proposição 6.6.**  $T_t \alpha$  converge a uma forma harmônica  $H(\alpha)$ .

*Demonstração.* Note que

$$\begin{aligned} \|T_{t+2h} \alpha - T_t \alpha\|^2 &= \langle T_{t+2h} \alpha - T_t \alpha, T_{t+2h} \alpha - T_t \alpha \rangle = \\ &= \|T_{t+2h} \alpha\|^2 + \|T_t \alpha\|^2 - 2\langle T_{t+2h} \alpha, T_t \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Usando (6.4) e, em seguida, (6.5), temos

$$\langle T_{t+2h} \alpha, T_t \alpha \rangle = \langle T_{t+h} \alpha, T_{t+h} \alpha \rangle = \|T_{t+h} \alpha\|^2.$$

Assim,

$$\|T_{t+2h} \alpha - T_t \alpha\|^2 = (\|T_{t+2h} \alpha\| - \|T_t \alpha\|)^2 - 2(\|T_{t+h} \alpha\|^2 - \|T_{t+2h} \alpha\| \cdot \|T_t \alpha\|).$$

Pela Proposição 6.3,  $\|T_t \alpha\|^2$  converge. Assim,  $\|T_{t+2h} \alpha - T_t \alpha\|^2$  pode ser tomado arbitrariamente pequeno. Como  $\mathcal{L}^2$  é completo, segue que  $T_t \alpha$  converge, no sentido  $\mathcal{L}^2$ , para uma forma  $H(\alpha) \in \mathcal{L}^2$ . Para provar que  $H(\alpha)$  é de fato harmônica, basta tomar  $\tau > 0$  e notar que a relação  $T_t \alpha = T_\tau T_{t-\tau} \alpha$  implica no limite que  $T_\tau H(\alpha) = H(\alpha)$ . Então  $T_t H(\alpha)$  é constante em  $t$ . Assim,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} T_t H(\alpha) = \frac{\partial}{\partial t} H(\alpha) = -\Delta H(\alpha).$$

Logo,  $H(\alpha)$  é de fato harmônica.

Ainda,

$$\langle H\alpha, \beta \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle T_t \alpha, \beta \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \alpha, T_t \beta \rangle = \langle \alpha, H\beta \rangle.$$

Assim,  $H$  é autoadjunto.

□

**Proposição 6.7.**  $T_t$  é compacto para todo  $t$ .

*Demonstração.* Considere  $\phi_i$  uma base ortonormal enumerável de  $\mathfrak{l}^2(\Lambda^p)$ . Temos então que  $\phi_i(x)\phi_j(y)$  é uma base ortonormal enumerável de  $\mathfrak{l}^2(\Lambda^p \times \Lambda^p)$ . Defina então

$$p_{i,j} = \sum_{x,y \in V} p(t, x, y) \phi_i(x) \phi_j(y),$$

de modo que

$$p(t, x, y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} p_{i,j} \phi_i(x) \phi_j(y).$$

Agora defina

$$p_n(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} p_{i,j} \phi_i(x) \phi_j(y),$$

e

$$T_n(u(x)) = \sum_{y \in V} p_n(x, y) u(y).$$

Deste modo,  $T_n$  tem como imagem um subespaço de dimensão finita de  $\mathfrak{l}^2(\Lambda^p)$  e, como todo operador cuja imagem tem dimensão finita é compacto,  $T_n$  também o é.

Note que

$$\begin{aligned} \|(T_t - T_n)u\|^2 &= \left\| \sum_{y \in V} (p(t, x, y) - p_n(x, y)) u(y) \right\|^2 = \\ &= \sum_{x \in V} \left( \sum_{y \in V} (p(t, x, y) - p_n(x, y)) u(y) \right)^2 \leq \sum_{x \in V} \left( \sum_{y \in V} (p(t, x, y) - p_n(x, y))^2 \cdot \sum_{y \in V} u^2(y) \right) \\ &= \left( \sum_{x,y \in V} (p(t, x, y) - p_n(x, y))^2 \right) \sum_{y \in V} u^2(y) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |p_{i,j}|^2 \cdot \|u\|^2. \end{aligned}$$

Como  $\|p\|_{\mathfrak{l}^2}^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |p_{i,j}|^2 < \infty$ , a soma acima tende a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim,  $T_n \rightarrow T_t$  na norma do operador. Assim, podemos lançar mão do teorema abaixo.  $\square$

**Teorema 6.8.** *Sejam  $A : X \rightarrow Y$  uma transformação linear e  $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$  uma sequência de operadores compactos tal que  $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$  na norma do operador. Então  $A$  é compacto.*

A prova desse teorema pode ser encontrada em [8], pág. 408.

**Proposição 6.9.** *O operador de Green, dado pela integral*

$$G(\alpha) = \int_0^{\infty} (T_t \alpha - H\alpha) dt$$

*está bem definido. E vale a seguinte igualdade*

$$\Delta G(\alpha) = \alpha - H\alpha.$$

## 6 Teorema de Decomposição de Hodge

Ainda,  $G(\alpha)$  é ortogonal ao espaço das formas harmônicas qualquer que seja  $\alpha$ .

*Demonstração.* Mostremos que a norma  $\|T_t\alpha(x) - H\alpha(x)\|$  decai rapidamente de modo que a integral está bem definida.

É um fato conhecido na teoria de espaços de Hilbert que se  $T$  é um operador compacto autoadjunto num espaço de Hilbert,  $H$ , e

$$m(T) := \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\},$$

então  $m(T)$  ou  $-m(T)$  é o maior autovalor de  $T$  e vale que

$$\|T\| = |m(T)|.$$

Dessa forma para o máximo do problema variacional:

$$m(T_t) := \sup\{|\langle T_t\alpha, \alpha \rangle| : \|\alpha\| \leq 1 \text{ e } H\alpha = 0\},$$

tem solução. Denominaremos por  $\beta(t)$  o máximo e  $\lambda(t)$  o correspondente valor máximo.

Note que, pela propriedade de semigrupo temos que  $T_{2t}\beta = \lambda^2(t)\beta$ . Mas, por outro lado,  $T_{2t}\beta = \lambda(2t)\beta$ . Logo,  $\lambda(t+t) = \lambda(t) \cdot \lambda(t)$ . Portanto a função  $\lambda(t)$  é multiplicativa e assim  $\lambda(t) = e^{-\lambda_1 t}$ , com  $\lambda_1 > 0$ , pois a função exponencial  $f(x) = e^x$  é a única função Lebesgue-mensurável com  $f(1) = e$  que satisfaz

$$f(x+y) = f(x)f(y) \text{ para todos } x \text{ e } y.$$

Ainda, o negativo no exponencial se dá pelo fato de  $T_t\beta$  convergir a  $H\beta = 0$  com  $t \rightarrow \infty$ .

Como  $\|T_t\alpha - H\alpha\| = \|T_t(\alpha - H\alpha)\| \leq \|T_t\beta\|$ , temos que  $\|T_t\alpha - H\alpha\| \leq e^{-\lambda_1 t} \|\beta\| \leq e^{-\lambda_1 t}$ . E assim decai rapidamente.

Agora,

$$\Delta G(\alpha) = \int_0^\infty \Delta(T_t\alpha - H\alpha) dt = \int_0^\infty \Delta T_t\alpha dt = - \int_0^\infty \frac{\partial T_t\alpha}{\partial t} dt = \alpha - H(\alpha).$$

Por último, seja  $\beta$  harmônica. Então

$$\langle G(\alpha), \beta \rangle = \int_0^\infty \langle (T_t - H)\alpha, \beta \rangle dt = \int_0^\infty \langle \alpha, (T_t - H)\beta \rangle dt = 0.$$

□

# 7

## Homologia de Complexos Simpliciais, Espectro e Passeios Aleatórios

É um resultado clássico o fato da primeira homologia e do espectro do laplaciano para grafos estarem relacionados ao comportamento assintótico de passeios aleatórios. Neste capítulo generalizamos essa interpretação para os diversos grupos homológicos por meio da análise de um processo estocástico sobre complexos simpliciais. Aqui também vemos a força que a análise do Laplaciano e de seu espectro nos proporciona.

Recentemente um processo estocástico similar ao de passeios aleatórios foi construído de modo a dar uma interpretação para homologias de grau maior em [10] e [11]. Apresentaremos tal processo nesta seção. Todavia, esse processo requer uma série de restrições. Como por exemplo, a homologia aqui construída, apesar de muito similar às anteriores, requer que o complexo em questão seja um complexo simplicial uniforme; uma condição relativamente muito restritiva se comparada às teorias anteriores. Porém, como dito, ela é frutífera no sentido de nos dar uma interpretação para as homologias. Não tão somente, ela é um solo fértil para que ideias para a interpretação das homologias recém apresentadas cresçam.

Fixe  $G = (V, E)$  um grafo  $k$ -regular; i.e., cada vértice tem valência exatamente  $k$ . De modo intuitivo, um passeio aleatório  $p$ -preguiçoso é um passeio começando em um vértice  $v_0$  e, em cada passo, ele se mantém estático com probabilidade  $p$  ou move para cada um de seus  $k$  vizinhos com probabilidade  $\frac{(1-p)}{k}$  (veja definição 7.4). Esse processo pode ser tomado como uma família de 0-formas  $p_n^{v_0}$ , em que  $p_n^{v_0}(v)$  indica a probabilidade do caminhante, que partiu de  $v_0$ , estar em  $v$  no tempo  $n$ . Temos para esse processo os seguintes resultados clássicos:

1. Se  $G$  é finito, então  $p_\infty^{v_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n^{v_0}$  existe, e é constante se, e somente se  $G$  é conexo.
2. Neste caso, a ordem de convergência de  $p_n^{v_0}$  é dada por

$$\|p_n^{v_0} - \text{constante}\| = O\left(\left(1 - \frac{1}{2}\lambda(G)\right)^n\right);$$

em que  $\lambda(G)$  é a **lacuna espectral** definido como o menor autovalor do operador Laplaciano de  $G$  sobre as 0-formas cuja soma se anula em  $V$ .

3. Quando  $G$  é infinito e conexo, a lacuna espectral é relacionado à probabilidade de retorno do passeio por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n^{v_0}(v_0)} = 1 - \frac{1}{2}\lambda(G).$$

Nota: Aqui, o Laplaciano referido é o definido classicamente por

$$\Delta^+ f(v) = f(v) - \sum_{w \sim v} f(w).$$

A relação com o laplaciano definido anteriormente fica evidente por (5.1). E, quando  $G$  é infinito,  $\lambda(G) := \min \text{Spec}(\Delta^+|_{L^2(V)})$ .

## 7.1 Complexos finitos

Fixe, nesta seção, e salvo menção explícita do contrário,  $X$  como sendo um complexo simplicial  $d$ -dimensional sobre um conjunto finito de vértices. Isto é,  $X$  é um subconjunto do conjunto das partes de  $V$  que também é um complexo simplicial. Aqui, nos referiremos aos elementos de  $X$  como **células**, ou simplexes.

**Definição 7.1.** A **dimensão** de uma célula de  $X$  é dita  $j$  se essa célula tiver cardinalidade  $j + 1$ . A **dimensão** de  $X$  é a dimensão maximal de suas células.

Denotaremos uma  $j$ -célula  $\sigma$ , i.e., uma célula de dimensão  $j$ , por  $\sigma = \{\sigma_0, \dots, \sigma_j\}$ .

**Definição 7.2.** Definimos o **grau** de  $\sigma$ ,  $\deg(\sigma)$  como sendo o número de  $(j + 1)$ -células que a contém.

Deste modo, o complexo simplicial  $X$  é dito **uniforme** se toda célula estiver contida nalguma célula de dimensão  $d = \dim X$ . Fixamos ainda  $X^j$  o conjunto das  $j$ -células de  $X$ .

Ressaltando o fato de que cada  $j$ -célula  $\sigma = \{\sigma_0, \dots, \sigma_j\}$  admite duas formas de ordenação de vértices, a menos de paridade por permutação, temos a seguinte definição:

**Definição 7.3.** Uma  $j$ -célula **orientada**  $\sigma$  é uma  $j$ -célula com uma escolha de paridade de permutação. Tal escolha é dita uma **orientação** da célula.

Denota-se a célula orientada com colchetes por delimitadores. Por exemplo, as duas orientações possíveis de  $\sigma = \{0, 1, 2\}$  são  $[0, 1, 2]$  e  $[1, 0, 2]$ .

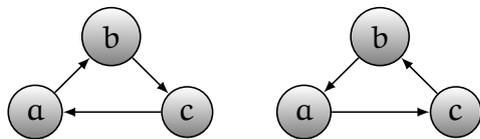
Denotamos por  $X_{\pm}^j$  o conjunto das  $j$ -células orientadas de  $X$ . Trivialmente  $|X_{\pm}^j| = 2|X^j|$  se  $j \geq 1$  e  $X_{\pm}^j = X^j$  se  $j = -1, 0$ . Uma escolha de orientação será denotada por  $X_+^j$  e a outra por  $X_-^j$ . Temos que para uma dada  $j$ -célula orientada  $\sigma$  denotaremos sua orientação inversa por  $\bar{\sigma}$ .

Para cada  $j$ -célula  $\sigma$  definimos ainda suas **faces** como sendo as  $(j-1)$ -células  $\sigma \setminus \sigma_i$  para  $i \in \{0, \dots, j\}$ . Ainda,  $\sigma$  induz sobre suas faces a seguinte orientação,  $\{\sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_j\}$  é orientada como  $(-1)^i[\sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_j]$ ; em que  $(-1)^i$  indica orientação positiva se  $i$  é par e negativa caso contrário.

Aqui nos restringiremos às seguintes formas sobre  $X$ :

$$\Omega^j = \Omega^j(X) = \{f : X_{\pm}^j \rightarrow \mathbb{R} : f(\bar{\sigma}) = -f(\sigma); \quad \forall \sigma \in X_{\pm}^j\}.$$

A figura abaixo mostra as possíveis orientações induzidas pela face  $[a, b, c]$  sobre as arestas, sendo elas, respectivamente, positiva e negativa.



Novamente,  $\Omega^{-1}$  pode ser identificado (por isomorfismo) a  $\mathbb{R}$  e, como não há escolhas distintas de orientação em  $X^0$ ,  $\Omega^0$  é simplesmente o conjunto das funções reais definidas sobre os vértices.

Por último, a cada  $j$ -célula orientada  $\sigma$  em  $X$  associamos uma  $j$ -forma, chamada **forma de Dirac**  $\mathbb{1}_{\sigma}$ , definida por

$$\mathbb{1}_{\sigma}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = \sigma \\ -1, & \tau = \bar{\sigma} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para  $j = 0$  a função de Dirac é a usual e para  $j = -1$  fixamos  $\mathbb{1}_{\emptyset} \equiv 1$ .

## 7.2 (d-1)-passeios aleatórios

Note que (di)grafos podem ser vistos como complexos simpliciais 1-dimensionais uniformes. E, como dito, os passeios aleatórios sobre os vértices, i.e., sobre as 0-faces, nos

dá informações sobre a zeresima homologia do grafo. Aqui construiremos um processo análogo.

Fixe  $X$  um complexo uniforme  $d$  dimensional e  $p \in [0, 1[$ .

**Definição 7.4.** *Um  $(d-1)$ -passeio aleatório  $p$ -preguiçoso sobre  $X$  sobre  $X$  é um processo estocástico que respeita os seguintes axiomas:*

1. *duas  $(d-1)$ -células orientadas  $\sigma$  e  $\sigma'$  são ditas vizinhas, e escrevemos  $\sigma \sim \sigma'$ , se ambas são faces de uma mesma  $d$ -célula com orientações induzidas opostas.*
2. *O passeio começa em uma  $(d-1)$ -célula orientada  $\sigma_0$ , e a cada passo permanece estático com probabilidade  $p$  ou toma uniformemente, com probabilidade  $(1-p)$ , algum de seus vizinhos.*

Note que cada  $(d-1)$ -célula  $\sigma$  de  $X$  pertence a  $\deg(\sigma)$   $d$ -células de  $X$  e cada uma dessas  $d$ -células tem  $d$  outras faces além de  $\sigma$ . Portanto, o número de vizinhos de  $\sigma$  é exatamente  $d \deg(\sigma)$ . Assim, podemos definir o processo acima como sendo a cadeia de Markov sobre  $X_{\pm}^{d-1}$  com probabilidades de transição

$$\text{Prob}(X_{n+1} = \sigma' | X_n = \sigma) = \begin{cases} p, & \sigma' = \sigma \\ \frac{1-p}{d \deg(\sigma)}, & \sigma' \sim \sigma \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que duas arestas em um complexo de dimensão maior que 1 são vizinhas se elas têm o mesmo ponto de origem ou o mesmo ponto final.

**Definição 7.5.** *Dizemos que  $X$  é  $(d-1)$ -conexo se para cada par  $\sigma$  e  $\sigma'$  de  $(d-1)$ -células houver um uma cadeia de  $(d-1)$ -células da seguinte maneira:  $\sigma = \sigma_0 \sim \sigma_1 \sim \dots \sim \sigma_n = \sigma'$ . As classes de equivalência definidas por essa relação são ditas  $(d-1)$ -componentes de  $X$ ; como era de se esperar.*

Denotaremos  $p_n^{\sigma_0}(\sigma)$  como sendo a probabilidade do  $(d-1)$ -passeio partindo de  $\sigma_0$  em  $X$  atingir  $\sigma$  no tempo  $n$ .

**Definição 7.6.** *O processo esperança em  $X$ , de dimensão  $d \geq 2$ , começando em  $\sigma_0$  é a sequência de  $(d-1)$ -formas  $\{\mathcal{E}_n^{\sigma_0}\}_{n \in \mathbb{N}}$  definidas por*

$$\mathcal{E}_n^{\sigma_0}(\sigma) = p_n^{\sigma_0}(\sigma) - p_n^{\sigma_0}(\bar{\sigma}).$$

Para grafos, i.e.,  $d = 1$ , definimos  $\mathcal{E}_n^{\sigma_0} = p_n^{\sigma_0}$ .

Se  $p \geq \frac{1}{2}$ , então  $\|\mathcal{E}_n^{\sigma_0}\| = \Theta\left(\left(\frac{p(d-1)+1}{d}\right)^n\right)$ . E  $\mathcal{E}_n^{\sigma_0}$  sempre converge a uma forma  $\mathcal{E}_{\infty}^{\sigma_0} \equiv 0$ . Por isso lançamos mão da seguinte definição.

**Definição 7.7.** O processo esperança normalizado é definido como

$$\tilde{\mathcal{E}}_n^{\sigma_0}(\sigma) = \left( \frac{d}{p(d-1)+1} \right)^n \mathcal{E}_n^{\sigma_0}.$$

O limite desse nova “esperança” sempre existe e é não nulo.

O nome “*esperança*” do processo é dado pelo seguinte fato:

$$\mathbb{E}_n^{\sigma_0}(f) = \sum_{\sigma \in X_{\pm}^{d-1}} p_n^{\sigma_0}(\sigma) f(\sigma) = \sum_{\sigma \in X^{d-1}} \mathcal{E}_n^{\sigma_0}(\sigma) f(\sigma).$$

Note que a probabilidade do  $(d-1)$ -passeio aleatório  $p$ -preguiçoso partindo de  $\sigma_0$  estar em  $\sigma$  no tempo  $n+1$ , i.e.,  $p_{n+1}^{\sigma_0}(\sigma)$  requer que ele estivesse em  $\sigma$  no tempo  $n$  e escolhesse ficar parado ou que ele estivesse em algum de seus vizinhos e escolhesse andar exatamente para  $\sigma$ , portanto

$$p_{n+1}^{\sigma_0}(\sigma) = p \cdot p_n^{\sigma_0}(\sigma) + \frac{1-p}{d} \sum_{\sigma' \sim \sigma} \frac{p_n^{\sigma_0}(\sigma')}{\deg(\sigma')}.$$

Assim, definimos o **operador evolução**  $A = A(X, P)$  sobre  $\Omega^{d-1}$  por

$$(Af)(\sigma) = pf(\sigma) + \frac{(1-p)}{d} \sum_{\sigma' \sim \sigma} \frac{f(\sigma')}{\deg(\sigma')}.$$

Como  $Ap_n^{\sigma_0} = Ap_{n+1}^{\sigma_0}$ , temos que  $A\mathcal{E}_n^{\sigma_0} = \mathcal{E}_{n+1}^{\sigma_0}$ .

## 7.3 Operadores Laplacianos em complexos simpliciais

Nessa seção será apresentada uma teoria homológica extremamente similar às apresentadas nos capítulos anteriores. Todavia, aqui será lançada mão do fato de que o objeto subjacente é um complexo simplicial.

Para uma dada célula  $\sigma$  de  $X$  e um dado vértice  $v \notin \sigma$  dizemos que  $v \triangleleft \sigma$  se  $v\sigma = \{v\} \cup \sigma$  é uma célula de  $X$ . Se  $\sigma = [\sigma_0, \dots, \sigma_k]$  é orientada, então  $v\sigma = [v, \sigma_0, \dots, \sigma_k]$  se  $v \triangleleft \sigma$ .

Aqui definimos o operador bordo  $\partial_k : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k-1}$  – em que cometeremos novamente o abuso de denotar simplesmente por  $\partial$  – por

$$\partial f(\sigma) = \sum_{v \triangleleft \sigma} f(v\sigma).$$

Em particular, se  $f$  é uma zero forma,  $\partial f(\emptyset) = \sum_{v \in V} f(v)$ .

**Exemplo 8.** Seja  $X$  o complexo simplicial orientado de dimensão 3 tal que  $X_+^3 = \{[\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]\}$ . Então temos que as faces, com orientação induzida, de  $\sigma = [\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$  são

$$\{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3], -[\sigma_0, \sigma_2, \sigma_3], [\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3], -[\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2]\}.$$

Tome  $f \in \Omega^1(X)$ . Temos

$$\partial f([\sigma_1, \sigma_3]) = f([\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3]) + f([\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3]) = f([\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3]) - f([\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]).$$

□

Temos então um complexo de cadeia simplicial de  $X$  dado pela sequência  $(\Omega^\bullet, \partial_\bullet)$ . Não é difícil provar que  $\partial^2 \mathcal{E} \equiv 0$ . Além disso, o fato da teoria homológica anterior ser uma generalização dessa, para complexos de caminhos que não são necessariamente dados por complexos simpliciais, é evidenciado por (2.5).

Novamente define-se os ciclos  $Z_k = \ker \partial_k$ , os bordos  $B_k = \text{Im } \partial_{k+1}$  e a  $k$ -ésima homologia (sobre os reais)  $H_k = Z_k/B_k$ .

Ainda, a  $\Omega^k$  pode ser atribuído o seguinte produto interno

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\sigma \in X^k} w(\sigma) f(\sigma) g(\sigma); \quad \forall f, g \in \Omega^k;$$

em que  $w : X \rightarrow ]0, \infty[$  é uma função peso pré-fixada. Note que nos capítulos anteriores a função peso foi adotada como a constante 1.

Dada a finitude de  $X$  temos que os operadores  $\partial_k$  admitem operadores adjuntos – com respeito ao produto interno fixado –  $\delta_k : \Omega^{k-1} \rightarrow \Omega^k$ ; ditos operadores **co-bordos**. Explícitamente, se  $f \in \Omega^{k-1}$ , então

$$\delta_k f(\sigma) = \frac{1}{w(\sigma)} \sum_{i=0}^k (-1)^i w(\sigma \setminus \sigma_i) f(\sigma \setminus \sigma_i); \quad 0 \leq k \leq d.$$

Este operador é o equivalente ao operador diferencial das teorias anteriores. Isso fica claro por (2.12).

Novamente definimos os **cociclos**, **cobordos** e **cohomologias** do **complexo simplicial de cocadeia** de  $X$ ,  $(\Omega_\bullet, \delta_\bullet)$ , por  $Z^k = \ker \delta_{k+1}$ ,  $B^k = \text{Im } \delta_k$  e  $H^k = Z^k/B^k$ , respectivamente. Os cociclos também recebem o nome de **formas fechadas** e os cobordos de **formas exatas**.

Neste capítulo fixaremos a seguinte função peso:

$$w(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(\sigma)}, & \sigma \in X^{d-1} \\ 1, & \sigma \in X \setminus X^{d-1}. \end{cases}$$

Ressalta-se ainda que, se  $\sigma \in X^{d-1}$ , então

$$w(\sigma)^{-1} = \frac{1}{d} |\{\sigma' \in X^{d-1} | \sigma' \sim \sigma\}|.$$

**Definição 7.9.** Finalmente definimos os **Laplacianos superior, inferior e completo**,  $\Delta^+$ ,  $\Delta^-$ ,  $\Delta : \Omega^{d-1} \rightarrow \Omega^{d-1}$  da seguinte maneira:

$$\Delta^+ = \partial_d \delta_d$$

$$\Delta^- = \delta_d \partial_d$$

$$\Delta = \Delta^+ + \Delta^-.$$

Em geral define-se os  $k$ -ésimos laplacianos trocando na definição acima  $d - 1$  por  $k$ . Fica claro pela definição que estes operadores são autoadjuntos com respeito a produto interno fixado.

Cálculos explícitos mostram que

$$(\Delta^+ f)(\sigma) = f(\sigma) - \sum_{\sigma' \sim \sigma} \frac{f(\sigma')}{\deg(\sigma')}. \quad (7.1)$$

E que

$$(\Delta^- f)(\sigma) = \deg \sigma \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i \sum_{\nu \triangleleft \sigma \setminus \sigma_i} f(\nu \sigma \setminus \sigma_i). \quad (7.2)$$

Novamente o núcleo do operador  $\Delta_k$  é chamado de  **$k$ -formas harmônicas**,  $\mathcal{H}^k = \mathcal{H}^k(X)$ .

Ressalta-se o Teorema de Hodge:

$$\Omega^k = B_k \oplus \mathcal{H}^k \oplus B^k.$$

Note que, pela definição (7.9), temos que o espectro de  $\Delta^+$  é não-negativo. Além disso, o zero é atingido exatamente nas formas fechadas, i.e., em  $Z^{d-1}$ , que contém o espaço das formas exatas,  $B^{d-1}$ , que também são denominadas **zeros triviais** no espectro de  $\Delta^+$ . A existência de zeros não triviais é um invariante topológico do complexo, no

sentido de nos dar informação da existência de uma homologia não trivial. A definição a seguir mede, em certo sentido, o quão trivial é a homologia.

**Definição 7.10.** *Definimos como **lacuna espectral** (do inglês, *spectral gap*) do complexo  $\mathbf{d}$ -dimensional  $X$  o seguinte escalar:*

$$\lambda(X) = \min \text{Spec}(\Delta^+|_{Z_{\mathbf{d}-1}}) = \min \text{Spec}(\Delta|_{Z_{\mathbf{d}-1}}).$$

*E definimos como **lacuna essencial** (do inglês, *essential gap*) de  $X$  o escalar:*

$$\tilde{\lambda}(X) = \min \text{Spec}(\Delta^+|_{B_{\mathbf{d}-1}}) = \min \text{Spec}(\Delta|_{B_{\mathbf{d}-1}}).$$

*A transição de  $\Delta^+$  para  $\Delta$  se dá pelo fato de  $\Delta^-$  se anular em  $Z_{\mathbf{d}-1}$ .*

Temos que  $\lambda$  se anula exatamente quando  $X$  tem sua  $(\mathbf{d} - 1)$ -homologia não trivial. Como grafos são 1-complexos, temos que  $\lambda$  nos dá informações sobre a conexidade. Em certo sentido,  $\lambda$  em um grafo mede o quão conexo ele é, sendo “mais conexo” para  $\lambda$  longe de zero.

Como  $B_{\mathbf{d}-1} = (Z^{\mathbf{d}-1})^\perp$ , temos que  $\tilde{\lambda} \neq 0$ . Ainda, se  $\lambda \neq 0$ , então  $\lambda = \tilde{\lambda}$ . Nos casos em que  $\lambda = 0$ ,  $\tilde{\lambda}$  mede a taxa de mistura, i.e., a ordem de convergência a uma medida invariante, como enunciaremos mais a frente.

**Definição 7.11.** *Definimos como **desorientação** em um  $\mathbf{d}$ -complexo  $X$ , a escolha de uma orientação  $X_+^{\mathbf{d}}$  de suas  $\mathbf{d}$ -células tal que sempre que  $\sigma, \sigma' \in X_+^{\mathbf{d}}$  intersectam numa mesma célula, elas induzem uma mesma orientação sobre ela. Se é possível definir uma desorientação sobre  $X$ , ele é dito **desorientável**.*

Note que para grafos, a desorientação é sinônimo de bipartição. Ainda, complexos podem ser desorientáveis e orientáveis ao mesmo tempo; um exemplo para tal pode ser achado em [11].

**Proposição 7.12.** *Seja  $X$  um complexo finito de dimensão  $\mathbf{d}$ .*

1.  $\text{Spec}(X)$  é a união disjunta de  $\text{Spec}(X_i)$ , em que  $X_i$  denota as componentes de  $X$ .
2.  $\text{Spec}(\Delta^+) \subset [0, \mathbf{d} + 1]$ .
3. Zero é atingido em  $Z^{\mathbf{d}-1}$ .
4. Se  $X$  é  $(\mathbf{d} - 1)$ -conexo, então  $\mathbf{d} + 1$  está no espectro se, e somente se,  $X$  é desorientável, e é atingido no bordo das desorientações.

As proposições que seguem relacionam o  $(\mathbf{d} - 1)$ -passeio aos invariantes topológicos aqui definidos.

**Proposição 7.13.** *Considere o  $(d-1)$ -passeio  $p$ -preguiçoso sobre o  $X$  começando em  $\sigma_0 \in X_{\pm}^{d-1}$ . Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *O operador transição  $A = A(X, P)$  é dado por*

$$A = \frac{p(d-1)+1}{d} \cdot I - \frac{1-p}{d} \cdot \Delta^+;$$

*I.e.,*

$$\mathcal{E}_n^{\sigma_0} = A^n \mathcal{E}_0^{\sigma_0}.$$

2. *O espectro de  $A$  está contido em  $\left[2p-1, \frac{p(d-1)+1}{d}\right]$ , com  $2p-1$  sendo atingido nas desorientações e  $\frac{p(d-1)+1}{d}$  em  $Z^{d-1}$ .*

3.  $\|\mathcal{E}_n^{\sigma_0}\| \in \left[ \frac{1}{\sqrt{K_{d-2}K_{d-1}}} \left( \frac{p(d-1)+1}{d} \right)^n, \max \left( |2p-1|, \frac{p(d-1)+1}{d} \right)^n \right]$ ; em que  $K_j$  denota o grau maximal de uma  $j$ -célula em  $X$ .

A proposição que segue relaciona o comportamento assintótico do passeio, a homologia e o espectro do complexo, como prometido anteriormente.

**Proposição 7.14.** *Fixe um  $d$ -complexo  $X$ , e considere  $\tilde{\mathcal{E}}_n^\sigma$  o processo esperança normalizado do  $(d-1)$ -passeio  $p$ -preguiçoso em  $X$  começando em  $\sigma$ . Então  $\tilde{\mathcal{E}}_\infty^\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{E}}_n^\sigma$  satisfaz:*

1. *Se  $\frac{d-1}{3d-1} < p < 1$ , então  $\tilde{\mathcal{E}}_\infty^\sigma$  é exato para qualquer  $\sigma$  se, e somente se,  $H_{d-1}(X) = 0$ .*
0. *Se  $p \geq \frac{1}{2}$ , então*

$$\text{dist}(\tilde{\mathcal{E}}_n^\sigma, B^{d-1}) = O \left( \left( 1 - \frac{1-p}{p(d-1)+1} \lambda(X) \right)^n \right).$$

2. *De maneira mais geral, a dimensão de  $H_{d-1}$  é igual à dimensão de*

$$\text{Span} \left\{ \mathbb{P}_{Z^{d-1}} \left( \tilde{\mathcal{E}}_\infty^\sigma \right) : \sigma \in X^{d-1} \right\};$$

$\mathbb{P}$  é o operador projeção.

3. *Se  $p = \frac{d-1}{3d-1}$ , então  $\tilde{\mathcal{E}}_\infty^\sigma$  é exata se, e somente se,  $H_{d-1}(X) = 0$  e  $X$  não tem  $(d-1)$ -componentes desorientáveis.*

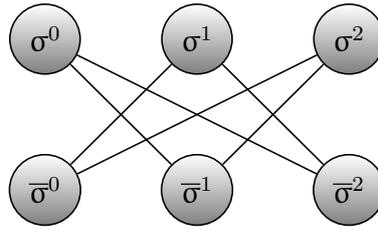
4. *De maneira mais geral, se  $\frac{d-1}{3d-1} < p < 1$  então, a menos que  $X$  tenha  $(d-1)$ -componente desorientável,  $\tilde{\mathcal{E}}_\infty^\sigma$  é fechada. Se  $p \geq \frac{1}{2}$ , então*

$$\text{dist}(\tilde{\mathcal{E}}_n^\sigma, Z^{d-1}) = O \left( \left( 1 - \frac{1-p}{p(d-1)+1} \tilde{\lambda}(X) \right)^n \right).$$

**Exemplo 15.** Considere  $X$  um complexo simplicial formado por um único  $d$ -simplexo  $\sigma = \{\sigma_0, \dots, \sigma_d\}$ . Deste modo, o grau de cada face é 1. Ainda,  $\sigma$  tem  $d+1$  faces (que são  $(d-1)$ -células).  $\sigma$  induz uma orientação sobre cada uma de suas faces. Denotaremos o conjunto das faces com orientação positiva por  $\{\sigma^0, \dots, \sigma^d\}$ , e o das faces com orientação negativa por  $\{\bar{\sigma}^0, \dots, \bar{\sigma}^d\}$ .

Temos que os vizinhos de  $\sigma^i$  são exatamente  $\bar{\sigma}^j$ ; com  $i \neq j$ . Deste modo, um  $(d-1)$ -passeio pode ser visto como um passeio em um grafo bipartido.

O grafo abaixo exemplifica o caso em que  $d = 2$ .



Em que cada aresta tem peso  $\frac{1-p}{d}$ .

Ressalta-se que  $\Omega^{d-1} = \langle \mathbb{1}_\sigma : \sigma \in X_+^{d-1} \rangle$ . Portanto,  $\dim \Omega^{d-1} = |X_+^{d-1}| = d + 1$ .

Fixada uma  $(d-1)$ -célula  $\sigma_0$  temos

$$p_0^{\sigma_0} = \begin{cases} 1, & \sigma = \sigma_0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De modo que

$$\mathcal{E}_0^{\sigma_0} = \mathbb{1}_{\sigma_0}.$$

Temos por (7.1) e pelo fato de  $\sigma' \sim \sigma$  se, e somente se, ambas são faces com orientações induzidas opostas por uma mesma  $d$ -célula, que

$$\Delta^+(\mathbb{1}_{\sigma_0})(\sigma) = \mathbb{1}_{\sigma_0}(\sigma) - \sum_{\sigma'} \mathbb{1}_{\sigma_0}(\sigma') \equiv 1.$$

Deste modo,

$$\Delta^+ = \sum_{i=0}^{d-1} \mathbb{1}_{\sigma_i}.$$

Agora, note que as  $(d-2)$ -faces de  $\sigma$  são da forma

$${}^i\sigma^j := \sigma^i \setminus \sigma_j = (-1)^i(\sigma \setminus \sigma_i) \setminus \sigma_j.$$

Ainda,  ${}^i\sigma^j$  tem orientação  $(-1)^{i+j}$  se  $j < i$  e  $(-1)^{i+j+1}$  se  $j > i$ . De modo que  ${}^i\sigma^j$  e  ${}^j\sigma^i$  têm orientações induzidas por  $\sigma$  opostas.

Assim,  $\{\beta_j^i := \mathbb{1}_{{}^i\sigma^j} : j < i \text{ e } i, j \in \{0, 1, \dots, d\}\}$  é base de  $\Omega^{d-2}$ . Ressaltamos o fato de  $\beta_j^i = -\beta_i^j$ . Ao passo que, como já vimos,  $\{\alpha_i := \mathbb{1}_{\sigma \setminus \sigma_i}\}$  é base de  $\Omega^{d-1}$ .

Note agora que

$$\partial\alpha_i(\sigma) = \sum_{v \triangleleft \sigma} \alpha_i(\sigma) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha = \sigma^j \text{ e } v = \sigma_i.$$

Assim,  $\partial\alpha_i(\sigma^j) = \alpha_i(\sigma_i^j) = (-1)^j$ . De sorte que  $\partial\alpha_i = \sum_{j < i} (-1)^j \beta_j^i - \sum_{j > i} (-1)^j \beta_j^i$ .

Considere  $f = \sum_{i=0}^d f^i \alpha_i$ , com  $f^i \in \mathbb{R}$  para todo  $i$ .

Cálculos explícitos mostram que  $f \in Z_{d-1} = \ker \partial_{d-1}$  se, e somente se, para todo par de índices distintos  $(i, j)$  temos que

$$f^i = f^j (-1)^{i+j+1}.$$

Note que, para o caso  $d = 1$ , i.e., se nosso complexo é um grafo constituído exatamente por dois vértices e uma aresta os interligando,

$$Z_{d-1} = \left\langle \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] \right\rangle.$$

Unindo este fato ao laplaciano recém calculado temos que  $\lambda(X) = 2$ , o que nos diz que tal grafo é conexo – como era de se esperar.

□



# 8

## Homologia de Grafos Aleatórios

Grafos de Cayley, como dito anteriormente, são objetos geométricos capazes de representar a estrutura algébrica de grupos. Porém como já observamos nas seções anteriores, as homologias dos grafos de Cayley associados a um dado grupo  $G$  não têm relação direta com as homologias do grupo em questão.

Surge então naturalmente a questão: as homologias dos grafos de Cayley nos retornam de algum modo invariantes algébricos do grupo subjacente?

Na primeira seção deste capítulo mostraremos que as homologias dos grupos cíclicos de ordem  $n$  com respeito a geradores minimais, i.e., aqueles em que nenhum subconjunto próprio seu também gera o grupo – são essencialmente as homologias do círculo (ou do cilindro) ou do toro.

Já na segunda seção deste capítulo abordamos o problema análogo para grafos aleatórios. Analisamos **computacionalmente**, por meio de simulações, o comportamento assintótico das homologias dos subgrafos dos grafos de Cayley de grupos cíclicos dados pelo processo de percolação de elos. Como consequência das simulações chegamos a conjectura de que tais homologias satisfazem um Teorema do Limite Central sobre suas dimensões.

Demonstraremos um caso dessa conjectura utilizando as técnicas desenvolvidas em [15]: que o resultado é verdadeiro para  $H_0$ .

### 8.1 Invariantes geométricos de grupos cíclicos

Considere  $\mathbb{Z}_n$  o grupo cíclico de ordem  $n$ . Pelo teorema de Bezout, um subconjunto  $S \subset \mathbb{Z}_n$  é um gerador minimal do grupo em questão se, e somente se,  $\text{mdc}(S \cup \{n\}) = 1$ . Lembramos que um conjunto  $S$  é dito um **conjunto gerador minimal** se gera  $\mathbb{Z}_n$

e se nenhum de seus subconjuntos próprios gera. Nesta seção consideraremos apenas conjuntos de geradores minimais e, conseqüentemente, cometeremos o abuso de tratá-los simplesmente por geradores; salvo menção explícita do contrário.

O objetivo desta seção é estudar a possível relação das homologias dos possíveis grafos de Cayley associados a  $\mathbb{Z}_n$  e as propriedades algébricas do grupo. Observamos inicialmente que, como todo grafo de Cayley é conexo o estudo de  $H_0$  se torna desinteressante. Por isso, inicialmente estudaremos  $H_1$ .

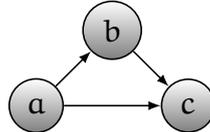
Claramente as cardinalidade possíveis de um conjunto gerador de  $\mathbb{Z}_n$  dependem do número de primos que figuram na decomposição prima de  $n$ . Por exemplo, todos os geradores de  $\mathbb{Z}_{p^n}$ , com  $p$  primo, têm apenas um elemento, dado que, para todo  $x \in \mathbb{Z}_{p^n}^*$  t.q.  $p$  não aparece na decomposição prima de  $x$ ,  $\text{mdc}(x, p^n) = 1$ . Já os possíveis geradores de  $\mathbb{Z}_{p \cdot q}$ , com  $p$  e  $q$  primos são  $\{x\}$ , com  $x$  coprimo com  $p \cdot q$ , e  $\{p, q\}$ .

Note ainda que dois conjuntos geradores de  $\mathbb{Z}_n$  de mesma cardinalidade tais que seus elementos têm mesma ordem no grupo geram o mesmo grafo de Cayley, a menos de renomeação dos vértices.

**Lema 8.1.** *Seja  $G$  o grafo de Cayley associado a  $\mathbb{Z}_n$  com respeito ao conjunto gerador  $S$ . Então o grafo de Cayley associado  $G$  só contém triângulos se  $S$  tem elementos de ordem 3.*

*Demonstração.* Evidentemente se  $S$  contém elementos de ordem 3, então  $G$  contém triângulos.

Por outro lado, suponha que em  $G$  há o seguinte triângulo



Então existem elementos  $x, y, z \in S$  (não necessariamente distintos) tais que  $x = a^{-1}b$ ,  $y = b^{-1}c$  e  $z = a^{-1}c$ . Donde,  $xy = z$ . Como os vértices de um triângulo são distintos, temos que  $y \neq x^{-1}$ . Se  $y \neq x$ , então  $S$  não é minimal, o que é uma contradição. Então  $z = x^2$ . Segue da minimalidade (e do fato dos vértices serem distintos) que  $z = x^{-1}$ . Portanto,  $x$  tem ordem 3. □

**Proposição 8.2.** *Se  $G$  é um grafo de Cayley associado a  $\mathbb{Z}_{p^n}$ , tal que  $p^n \geq 5$ , então  $\dim H_1(G) = 2$  e  $\dim H_1^{\text{reg}}(G) = 1$ .*

*Demonstração.* De fato, os únicos geradores possíveis de  $G$  têm cardinalidade 1, como comentado anteriormente. Então  $G$  é um grafo cíclico de  $p^n \geq 5$  vértices. Portanto, há apenas um grafo possível associado a  $\mathbb{Z}_{p^n}$ .

Agora, note que

$$\Omega_1(G) = \Omega_1^{\text{REG}} = \text{span}(\{e_{i(i\pm 1)} : i \in \mathbb{Z}_{p^n}\}).$$

Contas corriqueiras de álgebra linear mostram que

$$\dim \ker \partial|_{\Omega_1} = \dim \ker \partial^{\text{REG}}|_{\Omega_1^{\text{REG}}} = \mathfrak{p}^n + 1.$$

E que

$$\dim \text{Im } \partial|_{\Omega_2} = \mathfrak{p}^n - 1, \quad \dim \text{Im } \partial^{\text{REG}}|_{\Omega_1^{\text{REG}}} = \mathfrak{p}^n.$$

Deste modo,

$$\dim H_1(\mathbf{G}) = 2 \quad \text{e} \quad \dim H_1^{\text{reg}} = 1.$$

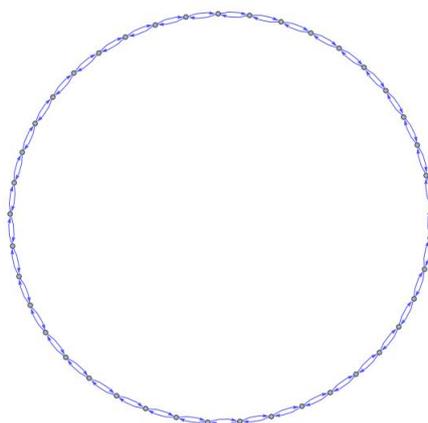
□

O resultado acima se segura se tomarmos o grafo de Cayley direcionado, i.e., com o conjunto de geradores não simétrico. Todavia, nesta hipótese,  $\dim H_1(\mathbf{G}) = 1$ .

**Proposição 8.3.** *Seja  $\mathbf{G}$  um grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ , com  $\mathfrak{p}$  e  $\mathfrak{q}$  primos e não ambos menores do que 4. Então,  $H_1^{\text{REG}}(\mathbf{G}) = 1$  ou  $H_1^{\text{REG}}(\mathbf{G}) = 2$ .*

*Demonstração.* O único conjunto gerador de  $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$  não unitário é  $\{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\}$ . Esse grafo é produto cartesiano dos grafos associados a  $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$  e a  $\mathbb{Z}_{\mathfrak{q}}$ . O resultado segue pela fórmula de Künneth; sendo 1 nos casos que  $\min\{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\} \in \{2, 3\}$ . □

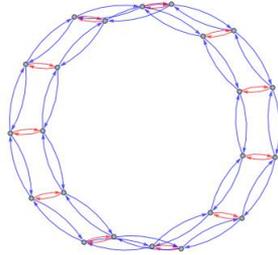
Os resultados anteriores possuem a seguinte intuição geométrica. Os grafos de  $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}^n}$  são todos cíclicos (lembrando que estamos nos restringindo a geradores minimais, no sentido enunciado no primeiro parágrafo desta seção), da forma



**Figura 8.1:** Grafo de  $\mathbb{Z}_{41}$

Podendo ser mergulhados em um círculo, ou, ser vistos como uma discretização do círculo com a escolha de  $\mathfrak{p}^n$  pontos equidistantes. É importante ressaltar que a homologia regular destes grafos é exatamente a mesma do círculo. O mesmo vale para qualquer grafo de Cayley associado a um grupo cíclico gerado por um conjunto de cardinalidade 1.

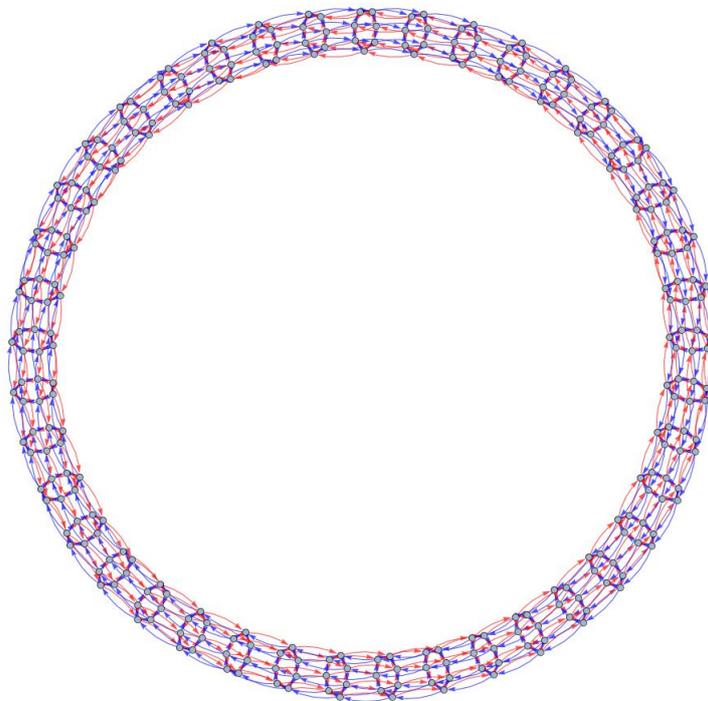
Já os grafos de  $\mathbb{Z}_{2,p}$  com  $p > 3$  primo e conjunto gerador  $\{2, p\}$  são cilindros (no sentido de produto cartesiano de grafos sendo que um dos grafos em questão é apenas uma aresta) da forma



**Figura 8.2:** Grafo de  $\mathbb{Z}_{2,11}$

Ressaltamos também o fato da homologia regular de tais grafos ser a mesma da do cilindro. O mesmo ocorre com os grafos da forma  $\mathbb{Z}_{3,p}$  ( $p > 3$  primo), uma vez que  $H_1$  “sente” os triângulos como arestas, de maneira pictórica.

Por outro lado, os grafos de  $\mathbb{Z}_{p,q}$ , com  $p, q > 3$  primos e conjunto gerador  $\{p, q\}$  são produtos cartesianos de ciclos, nos retornando grafos que podem ser enxergados como uma discretização do toro, como mostra a figura abaixo



**Figura 8.3:** Grafo de  $\mathbb{Z}_{7,41}$

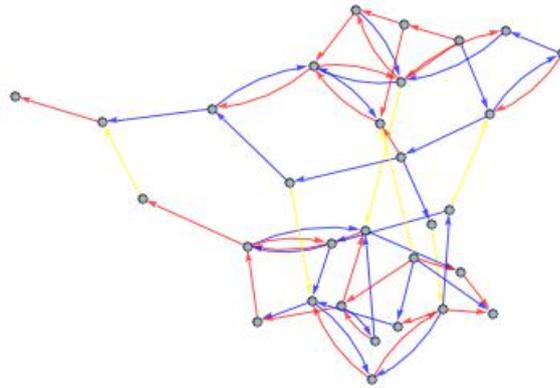
Novamente, tal grafo apresenta mesma homologia do toro.

## 8.2 Percolação de elos e grafos aleatórios

**Definição 8.4.** Definimos como **(di)grafo aleatório** um (di)grafo  $G(\mathbf{p})$  obtido a partir de um grafo  $G$  pré-fixado pelo processo aleatório de remover cada elo (aresta) com probabilidade  $1 - \mathbf{p}$  ou de mantê-lo com probabilidade  $\mathbf{p}$ . Tais grafos são também conhecidos como (di)grafos de Erdős-Rényi.

Esse modelo para (di)grafos aleatórios é conhecido também como o modelo de percolação elos, ou de arestas.

**Definição 8.5.** Um processo de **percolação independente de elos (arestas)** de um dado (di)grafo  $G = (V, E)$  é uma família de variáveis aleatorias i.i.d.  $\{X_e\}_{e \in E}$  tais que  $X_e \sim \text{ber}(\mathbf{p})$ . Ou seja,  $X_e = 1$  com probabilidade  $\mathbf{p}$  e 0 com probabilidade  $1 - \mathbf{p}$ . Dizemos que um elo está aberto se  $X_e = 1$  e fechado caso contrário.



**Figura 8.4:** Digrafo aleatório obtido a partir do grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}_{7,41}$  com probabilidade 0.6

Este processo tem como resultado elementos  $\omega \in \{0, 1\}^E$ , chamados de **configurações**, t.q.  $\omega(e) = X_e$ . Assim, temos o espaço de probabilidade  $(\{0, 1\}^E, \mathcal{F}, P_p)$ , em que  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos eventos cilíndricos e a medida de probabilidade é a usual sobre tais espaços, denotada por  $P_p$ . Cada  $\omega$  induz um subdigrafo (aleatório) de  $G$  definido pelas arestas abertas de  $\omega$  e seus respectivos vértices.

Por ora estamos interessados em estudar subgrafos aleatórios advindos de toros discretos. Defina os  $\mathbf{d}$ -toros como sendo os grafos de Cayley  $T_d^{(\mathbf{n})}$  – com  $(\mathbf{n}) = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$  –, relativos ao grupo  $\prod_{i=1}^d \mathbb{Z}_{n_i}$  com respeito ao conjunto gerador  $\{\mathbf{n}_i : i = 1, \dots, d\}$ . Fixe  $V(T_d^{(\mathbf{n})})$  e  $E(T_d^{(\mathbf{n})})$  o conjunto dos vértices e das arestas, respectivamente, do grafo em questão. Por brevidade fixe a notação  $A^n = T_d^{(\mathbf{n})}$ .

Queremos estudar famílias de subgrafos aleatórios encaixantes de  $A^n$ , denotadas por

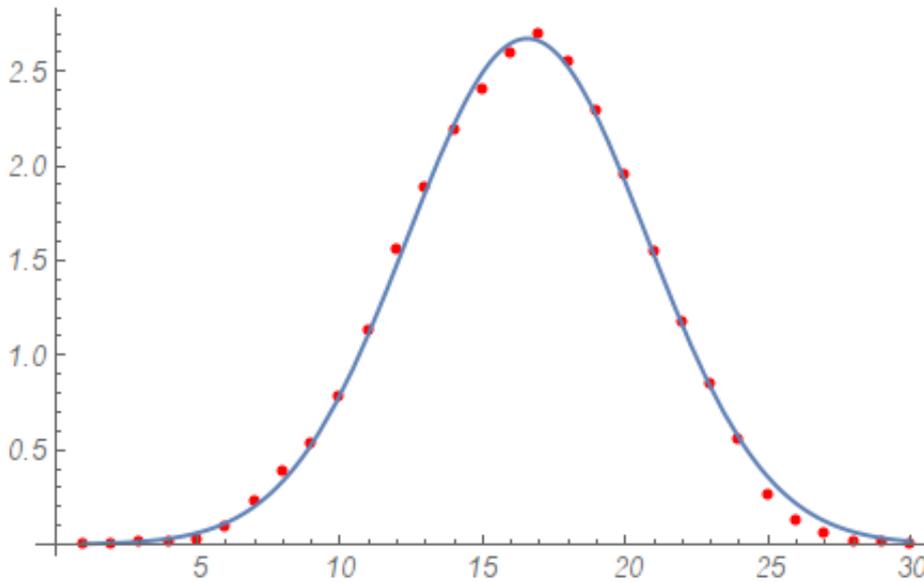
$\{[A^n]_p\}_{p \in [0,1]}$ . Construiremos tais famílias mais à frente. Mas antes nos debrucemos um pouco sobre nosso problema.

O objetivo dessa seção é mostrar que num processo de percolação  $\dim H_d([A^n]_p)$  satisfaz o Teorema Central do Limite.

Intuitivamente, um digrafo é “mais aleatório”, se ele é topologicamente “mais complexo”. Utilizaremos a dimensão de  $H_d$  para estudar tal complexidade topológica.

Ao longo de nossos trabalhos fizemos diversas simulações computacionais no programa Wolfram Mathematica calculando as dimensões dos grupos de homologia para os mais diversos grafos de Cayley – provenientes de grupos abelianos ou não – obtidos a partir do processo de percolação independente de Bernoulli.

Na Figura abaixo apresentamos um exemplo comparando a média das dimensões do segundo grupo de homologia dos grafo aleatórios obtidos a partir  $\mathbb{Z}_{12}$  com geradores  $\{3, 4\}$  efetivamente calculadas e a curva teórica esperada se fosse válido o Teorema do Limite Central. No eixo  $x$  temos  $30 \cdot p$  e no  $y$   $\dim H_2([\mathbb{Z}_{12}]_p)$ .



**Figura 8.5:** Dimensão de  $H_2$  para o grupo abeliano  $\mathbb{Z}_{12}$  com geradores  $\{3, 4\}$ .

Finalmente, definamos nossas famílias de subdigrafos encaixantes aleatórias.

**Definição 8.6.** Para cada  $p \in [0, 1]$  defina  $[A^n]^p$  como sendo o subdigrafo aleatório de  $A^n$  dado pelo processo de percolação de elos  $\{X_e^p\}_{e \in E(A^n)}$ , de modo que, para cada aresta  $e$  de  $A^n$ ,  $p \geq p' \Rightarrow X_e^p \geq X_e^{p'}$ . Note que isso garante que  $[A^n]^{p'} \subset [A^n]^p$ . Nessas condições, dizemos que  $\{[A^n]_p\}_p$  é uma **família de subdigrafos aleatórios encaixantes** de  $A^n$ .

A existência de tal processo segue diretamente de técnicas usuais de construção de acoplamentos de variáveis aleatórias para a garantia de dominação estocástica. Por

exemplo, podemos definir  $X_p^e : ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda_{[0,1]}) \rightarrow (\mathcal{R}, \mathcal{B}, \lambda)$  por  $X_p^e = \mathbb{1}_{[0,p]}$ ; em que as respectivas medidas e  $\sigma$ -álgebras são os borelianos e a medida de Lebesgue.

Seja  $K_{d,(n)}$  o número de clusters em  $T_d^{(n)}$  após a percolação. Denotaremos  $K_{d,(n)}$  simplesmente por  $K_n$  quando não houver possibilidade de confusão.

Por [15], temos que  $K_n$  satisfaz o Teorema do Limite Central (TLC) se

$$P_p \left( \frac{K_n - E_p(K_n)}{\sqrt{\text{Var}_p(K_n)}} \leq u \right) \rightarrow \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (8.1)$$

para todo  $u$  quando  $\min\{n_1, \dots, n_d\} \rightarrow \infty$ . Ressalta-se o fato de ter sido demonstrado para  $K_n$  como sendo o número de componentes conexas após a percolação na bola de raio  $n$  – com respeito à norma do máximo – ao redor da origem no reticulado  $\mathbb{Z}^d$ . Como  $H_0$  é justamente o grupo homológico que mede as componentes conexas do grafo, o resultado abaixo segue como corolário direto.

**Proposição 8.7.** *Nas condições acima descritas,*

$$P_p \left( \frac{\dim H_0(T_d^{(n)}) - E_p(\dim H_0(T_d^{(n)}))}{\sqrt{\text{Var}_p(\dim H_0(T_d^{(n)}))}} \leq u \right) \rightarrow \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

para todo  $u$  quando  $\min\{n_1, \dots, n_d\} \rightarrow \infty$ .

**Conjectura 8.8.** *Esperamos em trabalhos futuros demonstrar que, nas mesmas condições da proposição anterior,*

$$P_p \left( \frac{\dim H_k(T_d^{(n)}) - E_p(\dim H_k(T_d^{(n)}))}{\sqrt{\text{Var}_p(\dim H_k(T_d^{(n)}))}} \leq u \right) \rightarrow \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

para todo  $u$  e para todo  $k = 0, 1, \dots, n$ , quando  $\min\{n_1, \dots, n_d\} \rightarrow \infty$ .

Nossas simulações e as técnicas apresentadas no artigo [15] nos levam a crer em tal conjectura.



# A Álgebra Homológica

Neste trabalho usamos amplamente da linguagem estabelecida pela teoria da álgebra homológica. Nesta seção formalizaremos os resultados e definições de tal teoria utilizados no decorrer do texto. Ao longo das seções anteriores lançamos mão espaços vetoriais e seus homomorfismos como nossos principais objetos algébricos. Porém, nesta parte do trabalho lidaremos com módulos associados a um anel  $R$ , pois pouco seria ganho nos restringindo ao caso particular de espaços vetoriais. As demonstrações aqui omitidas podem ser encontradas em [12].

## A.1 Módulos

**Definição A.1.** *Seja  $R$  um anel com identidade. Um  $R$ -módulo à esquerda é um grupo abeliano  $M$  tal que dados  $r \in R$  e  $a \in M$  existe um único elemento  $ra$  em  $M$  tal que, para todos  $r, s \in R$ ,  $a, b \in M$ , vale:*

$$(a) (r + s)a = ra + sa;$$

$$(b) (rs)a = r(sa);$$

$$(c) r(a + b) = ra + rb;$$

$$(d) 1a = a, \text{ em que } 1 \text{ denota a identidade do anel } R.$$

De maneira análoga define-se um  $R$ -módulo à direita.

No decorrer deste texto faremos uso de alguns abusos de linguagem comuns em textos de álgebra, como o recém cometido abuso de identificar o grupo abeliano com seu conjunto, sem menção à sua operação. Deste modo, aqui  $M$  poderá ao mesmo tempo ser um conjunto, um grupo abeliano e um  $R$ -módulo, porém deixaremos claro a que estamos nos referindo.

Note que se  $R$  é um anel comutativo com identidade, então a todo  $R$ -módulo à esquerda pode ser dada uma estrutura de  $R$ -módulo à direita e vice-versa. Com efeito, sejam  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda,  $a \in M$  e  $r \in R$ , defina a operação  $a.r = ra$ . Então,

para todo  $\mathbf{a} \in M$ ,  $r, s \in R$ ,

$$\mathbf{a} \cdot (rs) = (rs)\mathbf{a} = (sr)\mathbf{a} = s(\mathbf{r}\mathbf{a}) = s(\mathbf{a} \cdot r) = (\mathbf{a} \cdot r) \cdot s$$

Mostrar que as demais propriedades de  $R$ -módulo à direita valem é um trabalho ainda mais simples, de modo que o omitiremos aqui. De maneira análoga mostramos que se pode dar uma estrutura de  $R$ -módulo à esquerda a um  $R$ -módulo à direita, de sorte que quando estivermos lidando com um anel  $R$  comutativo, diremos apenas que  $M$  é um  $R$ -módulo, sem distinguir entre módulos à direita ou à esquerda.

**Exemplo 2.** Todo  $K$ -espaço vetorial, com  $K$  corpo, é trivialmente um  $K$ -módulo, dado que todo corpo é também um anel.  $\square$

Este exemplo deixa clara uma das importâncias de estudarmos módulos, pois todos os resultados aqui obtidos são estendidos à espaços vetoriais.

**Exemplo 3.** Sejam  $S$  um anel e  $R$  um sub-anel de  $S$ . Dados  $r \in R$  e  $s \in S$ , em particular,  $r \in S$ , então  $rs \in S$ . Ainda, pelas propriedades de anel de  $S$ , verifica-se imediatamente que a  $S$  pode ser dada uma estrutura de  $R$ -módulo à esquerda. Analogamente, a  $S$  pode ser dada uma estrutura de  $R$ -módulo à direita. Deste modo, todo anel  $R$  pode ser visto como um  $R$ -módulo à esquerda ou à direita.  $\square$

**Definição A.4.** Se  $M$  é um  $R$ -módulo à esquerda e  $N$  é um subgrupo do grupo aditivo  $M$ , dizemos que  $N$  é um **submódulo** de  $M$  se para todo  $\mathbf{a} \in N$  e para todo  $r \in R$ , o valer que  $r\mathbf{a} \in N$ .

Neste caso, note que é necessário e suficiente para que um subconjunto não vazio  $N$  do  $R$ -módulo à esquerda  $M$  seja um submódulo de  $M$  que valha:

- (a) Para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in N$ , o elemento  $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in N$  (condição necessária e suficiente para que  $N$  seja um subgrupo do grupo aditivo  $M$ );
- (b)  $r\mathbf{a} \in N$ , para todo  $r \in R$  e para todo  $\mathbf{a} \in N$ .

**Definição A.5.** Sejam  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda e  $N$  um submódulo de  $M$ . Como, neste caso,  $N$  é um subgrupo do grupo abeliano aditivo  $M$ , podemos lançar mão do grupo quociente (abeliano)  $M/N = \{\mathbf{a} + N : \mathbf{a} \in M\}$ . Para  $\mathbf{a} \in M$ ,  $r \in R$ , definimos a operação

$$r(\mathbf{a} + N) = r\mathbf{a} + N. \tag{A.1}$$

Note que esta operação está bem definida. De fato, se  $\mathbf{a} + \mathbf{N} = \mathbf{b} + \mathbf{N}$ , então existe  $\mathbf{c} \in \mathbf{N}$  tal que  $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b}$ , de sorte que  $r(\mathbf{b} + \mathbf{N}) = r\mathbf{b} + \mathbf{N} = r(\mathbf{a} + \mathbf{c}) + \mathbf{N} = r\mathbf{a} + r\mathbf{c} + \mathbf{N} = r\mathbf{a} + \mathbf{N} = r(\mathbf{a} + \mathbf{N})$ , pois  $r\mathbf{c} \in \mathbf{N}$ . Deste modo  $M/\mathbf{N}$  tem estrutura de  $R$ -módulo à esquerda e é chamado de **módulo quociente** de  $M$  módulo  $\mathbf{N}$ .

Como era de se esperar, segue a proposição abaixo.

**Proposição A.6.** Se  $\mathbf{N}$  é um submódulo do  $R$ -módulo à esquerda  $M$ , então  $\mathbf{N}$  é um módulo.

**Definição A.7.** Um  $R$ -homomorfismo ou **homomorfismo de módulos** é uma aplicação  $f : M \rightarrow N$ , com  $M$  e  $N$   $R$ -módulos à esquerda, que satisfaz para todos  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$  e  $r \in R$ :

$$(a) f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$$

$$(b) f(r\mathbf{a}) = rf(\mathbf{a}).$$

Ainda, se  $f$  for injetiva dizemos que ela é um **monomorfismo**, se ela for sobrejetiva dizemos que ela é um **epimorfismo** e se ela for injetiva e sobrejetiva dizemos que ela é um **isomorfismo**. Dois  $R$ -módulos à esquerda,  $M$  e  $N$ , são ditos **isomorfos** se existir um isomorfismo entre eles e, neste caso, escreveremos  $M \cong N$ .

Nas duas definições que seguem, considere  $M$  e  $N$  dois  $R$ -módulos à esquerda e  $f : M \rightarrow N$  um  $R$ -homomorfismo.

**Definição A.8.** Definimos o **kernel** (ou **núcleo**) e a **imagem** de  $f$  respectivamente por

$$\ker f = \{\mathbf{a} \in M : f(\mathbf{a}) = 0\}$$

$$\text{Im } f = \{x \in N : x = f(\mathbf{a}) \text{ para algum } \mathbf{a} \in M\} = \{f(\mathbf{a}) : \mathbf{a} \in M\}$$

**Proposição A.9.**  $\ker f$  e  $\text{Im } f$  são submódulos de  $M$  e de  $N$ , respectivamente.

**Definição A.10.** O **cokernel** e a **coimagem** de  $f$  são respectivamente definidos por

$$\text{coker } f = N / \text{Im } f$$

$$\text{Coim } f = M / \ker f.$$

Seguem algumas proposições necessárias para fixarmos a linguagem utilizada ao longo do texto.

**Proposição A.11.** Um  $R$ -homomorfismo  $f : M \rightarrow N$  é um monomorfismo se, e somente se,  $\ker f = 0$ .

**Proposição A.12.** *Se  $f : M \rightarrow N$  é um  $R$ -homomorfismo, então  $M/\ker f \cong \text{Im } f$ .*

**Proposição A.13.** *Se  $A$  e  $B$  são submódulos do  $R$ -módulo à esquerda  $M$ , então  $A \cap B$  também o é.*

**Proposição A.14.** *Sejam  $A$  e  $B$  submódulos do  $R$ -módulo à esquerda  $M$ . Neste caso,  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$  é um submódulo de  $M$ .*

A partir do presente momento consideraremos todos os  $R$ -módulos como  $R$ -módulos à esquerda, salvo menção contrária.

## A.2 Módulos livres

**Definição A.15.** *Seja  $\{M_i\}_{i \in I}$  uma família de  $R$ -módulos à esquerda. Definimos o conjunto  $\prod_{i \in I} M_i$  das sequências  $(x_i)_{i \in I}$ ,  $x_i \in M_i$ , com  $(x_i) = (y_i)$  se, e somente se,  $x_i = y_i$  para todo  $i \in I$ . Para todos  $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$  e  $r \in R$  defina as operações:*

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i) \text{ e } r(x_i) = (rx_i).$$

Com estas operações  $\prod_{i \in I} M_i$  tem estrutura de  $R$ -módulo à esquerda e o denominamos **produto direto** da família  $\{M_i\}_{i \in I}$  de  $R$ -módulos à esquerda.

Note que a identidade aditiva em  $\prod_{i \in I} M_i$  é a sequência  $(x_i)_{i \in I}$  tal que  $x_i = 0$  para todo  $i \in I$ . Denotaremos este elemento por  $(0)$  ou simplesmente por  $0$ . Ainda, para cada  $(x_i) \in \prod_{i \in I} M_i$ , seu elemento inverso é a sequência  $(y_i)$  tal que  $y_i = -x_i$  para todo  $i \in I$ . Denotaremos o inverso aditivo de  $(x_i)$  por  $(-x_i)$ .

**Definição A.16.** *Seja  $\oplus \sum_{i \in I} M_i$  o subconjunto de  $\prod_{i \in I} M_i$  das sequências  $(x_i)_{i \in I}$  que não se anulam no máximo em um conjunto finito de índices em  $I$ . Não é difícil ver que  $\oplus \sum_{i \in I} M_i$  é um submódulo do  $R$ -módulo  $\prod_{i \in I} M_i$ . Damos ao  $R$ -módulo  $\oplus \sum_{i \in I} M_i$  o nome de **soma direta externa** da família  $\{M_i\}_{i \in I}$  de  $R$ -módulos.*

**Definição A.17.** *Dado um  $R$ -módulo  $M$  e uma família de submódulos  $\{M_i\}_{i \in I}$  de  $M$ , dizemos que  $M$  é a **soma direta (interna)** da família de submódulos se todo  $a \in M$  puder ser escrito unicamente da forma  $\sum_{i=1}^n a_i$ , em que  $a_i \in M_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Neste caso, cada  $M_i$  é dito um **somando direto** de  $M$ .*

A proposição que segue faz a conexão entre as somas diretas interna e externa.

**Proposição A.18.** *Sejam  $\{M_i\}_{i \in I}$  um família de  $R$ -módulos à esquerda e  $M = \oplus \sum_{i \in I} M_i$ . Para todo  $i \in I$  existem submódulos  $M'_i$  de  $M$  tais que  $M'_i \cong M_i$  e  $M$  é a soma direta (interna) da família  $\{M'_i\}_{i \in I}$  de submódulos de  $M$ .*

**Proposição A.19.** *Um  $R$ -módulo à esquerda  $M$  é soma direta de seus submódulos  $M_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , se, e somente se,  $M = \sum_{i=1}^n M_i$  e  $M_i \cap \sum_{j=1, j \neq i}^n M_j = 0$  para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .*

**Definição A.20.** *Sejam  $M$  um  $R$ -módulo e  $X$  um subconjunto de  $M$ . Dizemos que  $M$  é gerado por  $X$ , ou que o conjunto  $X$  gera o  $R$ -módulo  $M$ , se todo elemento de  $M$  puder ser escrito como uma soma finita  $\sum r_i x_i$ , com  $r_i \in R$  e  $x_i \in X$ . Se  $X$  for um conjunto finito, dizemos então que  $M$  é **finitamente gerado**. Ainda, se o único elemento de  $X$  for  $x$ , i.e.,  $X$  é unitário, então diremos que  $M$  é um **módulo cíclico** gerado por  $x$ .*

Considere novamente uma família  $\{M_i\}_{i \in I}$  de  $R$ -módulos. Para todo  $j \in I$  defina  $\alpha_j : M_j \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$  de modo que  $\alpha_j(x_j) = (y_k)$ , em que  $y_k = 0$  se  $k \neq j$  e  $y_j = x_j$ . Defina ainda para cada  $j \in I$   $\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$  por  $\pi_j((x_i)) = x_j$ , em que  $x_i \in M_i$  para todo  $i \in I$ . Não é difícil verificar que as aplicações  $\alpha_j$  e  $\pi_j$  são  $R$ -homomorfismos e que

$$\pi_k \alpha_j = \begin{cases} \text{identidade} & \text{se } k = j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Evidentemente,  $\alpha_j$  é um monomorfismo e  $\pi_j$  um epimorfismo para todo  $j \in I$ . Podemos facilmente restringir estes homomorfismos para  $\bigoplus \sum_{i \in I} M_i$ , que também serão simbolizados por  $\alpha_j$  e  $\pi_j$ , e os resultados recém comentados continuam valendo nesta restrição.

Enunciaremos a seguir a **propriedade universal** da soma direta e do produto direto. Seja  $\{M_i\}_{i \in I}$  uma família de  $R$ -módulos,  $\bigoplus \sum_{i \in I} M_i$  sua soma direta e  $\prod_{i \in I} M_i$  seu produto direto, com o monomorfismo  $\alpha_j : M_j \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$  e o epimorfismo  $\pi_{i \in I} : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$  para todo  $j \in I$ , recém definidos. Neste contexto segue a propriedade universal da soma direta enunciada no seguinte teorema.

**Proposição A.21.** *Dados um  $R$ -módulo  $M$  e os monomorfismos  $f_j : M_j \rightarrow M$ , para todo  $j \in I$ , existe um único  $R$ -homomorfismo  $f : \bigoplus \sum_{i \in I} M_i \rightarrow M$  tal que  $f \circ \alpha_j = f_j$  para todo  $j \in I$ .*

Desta proposição segue.

**Proposição A.22.** *Se  $A$  é um  $R$ -módulo e  $\beta_j : M_j \rightarrow A$  são monomorfismos para todo  $j \in I$ , e vale para quaisquer  $R$ -módulo  $M$  e monomorfismos  $g_j : M_j \rightarrow M$ , para todo  $j \in I$ , que existe um único  $R$ -homomorfismo  $g : A \rightarrow M$  tal que  $g\beta_j = g_j$ , para todo  $j \in I$ , então  $A \cong \bigoplus \sum_{i \in I} M_i$ . I.e., a soma direta de módulos é única a menos de isomorfismo pela propriedade universal acima.*

Segue ainda a propriedade universal do produto direto, conforme a seguinte proposição.

**Proposição A.23.** *Dados um  $\mathbf{R}$ -módulo  $M$  e epimorfismos  $g_j : M \rightarrow M_j$ , para todo  $j \in I$ , então existe um único  $\mathbf{R}$ -homomorfismo  $g : M \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$  tal que  $\pi_j g = g_j$  para todo  $j \in I$ .*

Análogo ao caso da soma direta, o produto direto é único a menos de isomorfismo pela propriedade universal enunciada no teorema anterior.

**Definição A.24.** *Dizemos que um  $\mathbf{R}$ -módulo à esquerda  $F$  é um  **$\mathbf{R}$ -módulo livre à esquerda** com base  $X \neq \emptyset$ , se existir uma aplicação  $\alpha : X \rightarrow F$  tal que para todo mapa  $f : X \rightarrow A$ , com  $A$   $\mathbf{R}$ -módulo à esquerda, existir um único  $\mathbf{R}$ -homomorfismo  $g : F \rightarrow A$  tal que  $g\alpha = f$ . Neste caso dizemos que o  $\mathbf{R}$ -homomorfismo  $g$  estende a aplicação  $f$ . I.e., dadas  $\alpha$  e  $f$ , como descrito acima,  $g$  é o único  $\mathbf{R}$ -homomorfismo que faz o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & F \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & A \end{array}$$

comutativo.

Suponha que existam  $x_1, x_2 \in X$  tais que  $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$  e  $x_1 \neq x_2$ . Seja  $A = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  com estrutura de  $\mathbf{R}$ -módulo dada pela soma e pela multiplicação por escalar definidas coordenada a coordenada. Defina agora  $f : X \rightarrow A$  da seguinte maneira:

$$f(x) = \begin{cases} (1, 0), & \text{se } x = x_1 \\ (0, 1), & \text{se } x = x_2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja ainda  $g : F \rightarrow A$  o único  $\mathbf{R}$ -homomorfismo que estende  $f$ . Deste modo

$$(1, 0) = f(x_1) = g\alpha(x_1) = g\alpha(x_2) = f(x_2) = (0, 1),$$

o que é um absurdo. Portanto  $\alpha$  é sempre injetiva.

Uma questão natural a ser feita neste ponto é se todo conjunto não vazio é base para algum  $\mathbf{R}$ -módulo livre à esquerda. Esta questão é respondida pela proposição abaixo.

**Proposição A.25.** *Para todo conjunto  $X \neq \emptyset$  existe um  $\mathbf{R}$ -módulo livre à esquerda  $F$  tal que  $X$  é base para  $F$ .*

*Demonstração.* Para todo  $x \in X$  defina o  $\mathbf{R}$ -módulo  $\mathbf{R}_x = \mathbf{R}$ , assim obtendo a família de  $\{\mathbf{R}_x\}_{x \in X}$ . Defina ainda  $F = \bigoplus \sum_{x \in X} \mathbf{R}_x$ . Pela proposição (A.18) podemos considerar  $F$  como sendo a soma direta interna da família de submódulos  $\{\mathbf{R}_x\}_{x \in X}$ , assim fazendo sentido falar na soma de um elemento de  $\mathbf{R}_x$  com um elemento de  $\mathbf{R}_{x'}$ , com  $x, x' \in X$ . Denotaremos um elemento  $r \in \mathbf{R}$  por  $rx$  quando este estiver sendo tratado como um

elemento de  $R_x$ , para todo  $x \in X$ , de sorte que cada elemento de  $F$  pode ser escrito unicamente da forma  $\sum_{i=1}^n r_i x_i$ , com  $r_i \in R$  e  $x_i \in X$ . Defina  $\alpha : X \rightarrow F$  como  $\alpha(x) = 1 \cdot x$ . Sejam  $A$  um  $R$ -módulo à esquerda e  $f : X \rightarrow A$  uma aplicação quaisquer. Defina o  $R$ -homomorfismo  $g : F \rightarrow A$  por

$$g\left(\sum_{i=1}^n r_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i f(x_i).$$

Evidentemente  $g$  é um  $R$ -homomorfismo se estiver bem definido. E ele está, dado o fato de  $f$  ser uma aplicação. Note ainda que  $g\alpha(x) = g(1x) = f(x)$ . Portanto,  $F$  é um  $R$ -módulo livre à esquerda tal que  $X$  é uma base para ele.  $\square$

Desta proposição segue que:

**Proposição A.26.** *Se  $F$  é  $R$ -módulo livre à esquerda com base  $X$ , então  $F \cong \bigoplus_{x \in X} R_x$  (conforme definido na proposição (A.25)). Além disso, todo elemento de  $F$  pode ser unicamente escrito na forma  $\sum r_i x_i$ ,  $r_i \in R$  e  $X$  pode ser visto como um subconjunto de  $F$ .*

**Exemplo 27.** Note que a proposição acima deixa claro que todo  $K$ -espaço vetorial de base  $\mathcal{B}$  é um  $K$ -módulo livre à esquerda de base  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**Exemplo 28.** Seja  $R[x]$  o anel de polinômios na variável  $x$  sobre o anel  $R$ . Pela proposição acima fica evidente que  $R[x]$  é  $R$ -módulo livre à esquerda de base  $X = \{x^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Note que se utilizarmos a definição, de que os polinômios em  $R[x]$  são sequências  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  em  $R$  de no máximo finitas variáveis não nulas, temos que  $R[x] = \bigoplus_{x \in \mathbb{N}} R_x$ , de sorte que  $\mathbb{N}$  é uma base para  $R[x]$ .  $\square$

**Nota:** Assumimos  $0 \in \mathbb{N}$ .

**Proposição A.29.** *Todo  $R$ -módulo é homomorfo à imagem de um  $R$ -módulo livre à esquerda.*

**Proposição A.30.** *Dados um  $R$ -módulo livre à esquerda,  $A$  e  $B$   $R$ -módulos,  $\alpha : A \rightarrow B$  um epimorfismo e  $f : A \rightarrow B$  um  $R$ -homomorfismo, existe um único  $R$ -homomorfismo  $g : f \rightarrow A$  tal que  $\alpha g = f$ .*

## A.3 Complexos e sequências exatas

**Definição A.31.** Um *complexo de cadeias de  $R$ -módulos*, ou simplesmente, um *complexo*, é uma sequência de  $R$ -módulos  $\{M_i\}$  e  $R$ -módulos homomorfismos  $\{d_i\}$

$$\cdots \xrightarrow{d_{i+2}} M_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots$$

tais que para todo  $i$ ,  $d_i \circ d_{i+1} = 0$ . Ou, equivalentemente,

$$\text{im } d_{i+1} \subset \ker d_i. \tag{A.2}$$

Podemos denotar um complexo por  $(M_\bullet, d_\bullet)$ , ou simplesmente por  $M_\bullet$ , sempre nos lembrando de que necessariamente há a sequência de homomorfismos  $d_i$  associada a ele.

A escolha de índices em um complexo é relativamente livre; o complexo pode ser infinito em ambas as direções, pode ter índices crescentes ou decrescentes, sendo chamado de **complexo de cocadeia** neste último caso, cujas homologias são chamadas de **cohomologias**.

Chamamos os homomorfismos  $d_i$  de **bordo**, ou **diferenciais**, pelos importantes exemplos da geometria, que foram apresentados neste trabalho.

A contenção (A.2) dada pelo diferencial pode ser própria. Um dos principais focos no estudo de complexos é “medir”, em certo sentido, tal diferença.

**Definição A.32.** Dizemos que o complexo  $M_\bullet$  é *exato* em  $M_i$  se a homologia for trivial neste ponto; i.e.,

$$\text{Im } d_{i+1} = \ker d_i.$$

Um complexo é dito **exato**, ou **sequência exata**, se for exato em todos os seus módulos.

**Definição A.33.** Uma *sequência exata curta* é um complexo exato da forma

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \rightarrow 0.$$

Uma ressalva a ser feita é que as setas nos extremos da sequência são dadas pelo homomorfismo nulo. Unindo este fato à exatidão do complexo, temos que  $\alpha$  é injetivo e  $\beta$  é sobrejetivo, uma vez que  $\ker \alpha = \text{Im } 0 = 0$  e  $\text{Im } \beta = \ker 0 = N$ ; aqui abusamos da linguagem chamando o operador nulo de simplesmente de 0. A informação extra é

carregada por uma sequência exata curta, i.e.,

$$\text{Im } \alpha = \ker \beta;$$

pelo teorema do isomorfismo,

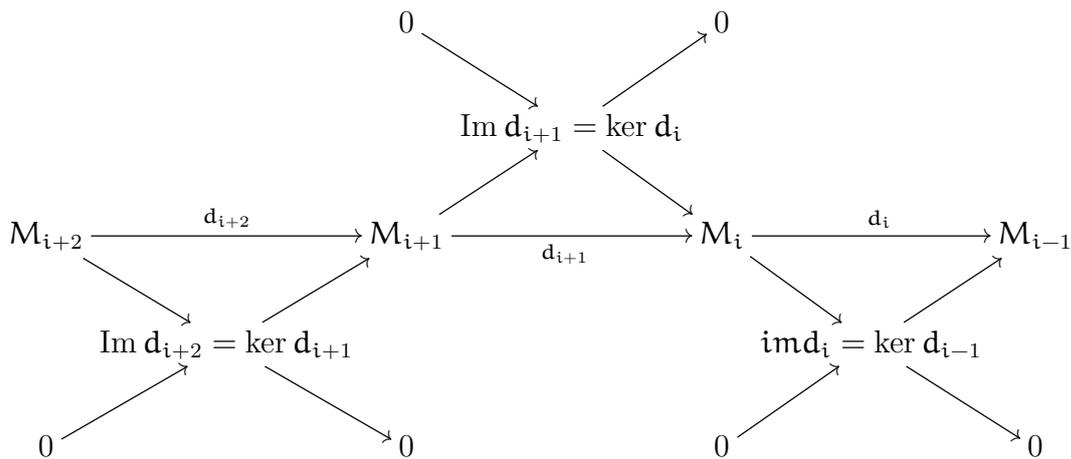
$$N \cong \frac{M}{\ker \beta} \cong \frac{M}{\text{Im } \alpha}.$$

De modo que nos é permitido identificar  $L$  como submódulo de  $M$  e  $N$  como o quociente  $M/L$ .

Um exemplo importante de sequência exata é o dado canonicamente por um homomorfismo  $\varphi : M \rightarrow M'$  qualquer como a que segue:

$$0 \rightarrow \ker \varphi \rightarrow M \rightarrow \text{Im } \varphi \rightarrow 0.$$

Isto nos permite quebrar todo complexo exato em várias sequências exatas curtas, como no diagrama abaixo:



## A.4 Sequências exatas cindidas

Um caso interessante de sequência exata curta emerge considerando a injeção de  $M_1$  na soma direta  $M_1 \oplus M_2$  e a segunda projeção da mesma soma em  $M_2$ , obtendo assim

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_2 \rightarrow 0,$$

de modo que  $M_1$  é o núcleo da projeção. Essas sequências exatas são ditas **cindidas**. De maneira mais ampla, dizemos que uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow N \rightarrow M_2 \rightarrow 0$$

cinde se for isomorfa a uma sequência cindida, de modo que há um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ 0 & \longrightarrow & M'_1 & \longrightarrow & M'_1 \oplus M'_2 & \longrightarrow & M'_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

em que as aplicações verticais são isomorfismos.

**Proposição A.34.** *Seja  $\varphi : M \rightarrow N$  um homomorfismo de  $R$ -módulos. Então*

- $\varphi$  tem inverso à esquerda se, e somente se, a sequência

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow \text{coker } \varphi \rightarrow 0$$

cinde.

- $\varphi$  tem inverso à direita se, e somente se, a sequência

$$0 \rightarrow \ker \varphi \rightarrow M \rightarrow \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow 0$$

cinde.

Graças a este resultado, homomorfismos de  $R$ -módulos com inverso à esquerda são chamados de **monomorfismos cindidos** e homomorfismos com inverso à direita são chamados de **epimorfismos cindidos**.

Seguem ainda os seguintes resultados.

**Proposição A.35.** *Dada uma sequência exata*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0 \tag{A.3}$$

as seguintes proposições são equivalentes:

- Existe um  $R$ -homomorfismo  $\alpha : B \rightarrow A$  tal que  $\alpha f = 1_A$ ;
- Existe um  $R$ -homomorfismo  $\beta : C \rightarrow B$  tal que  $g\beta = 1_C$ ;
- $\text{Im } f$  é um somando direto de  $B$ .
- A sequência (A.3) é cindida.

**Corolário A.36.** *Se a sequência exata (1.2) cinde e  $\alpha$  e  $\beta$  são como na Proposição (A.35), então*

- $B = f(A) \oplus \beta(C) = f(A) \oplus \ker g \cong A \oplus C$ .
- $\alpha\beta = 0$ .

# A.5 Homologia e lema da cobra

**Definição A.37.** Chamamos o  $R$ -módulo

$$H_i(M_\bullet) := \frac{\ker d_i}{\text{Im } d_{i+1}}$$

associado ao complexo

$$M_\bullet : \dots \xrightarrow{d_{i+2}} M_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots$$

de  $i$ -ésima homologia deste complexo.

De maneira heurística, a homologia é uma forma de captar a diferença entre o núcleo de um  $R$ -módulo por um diferencial  $d_i$  no complexo e a imagem do  $R$ -módulo anterior pelo diferencial  $d_{i+1}$ . Evidentemente,  $H_i(M_\bullet) = 0$  se, e somente se, o complexo  $M_\bullet$  for exato em  $M_i$ , i.e., os módulos homológicos medem “o quanto um complexo falha em ser exato”.

Note que segue da definição o fato de que em uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_0 \rightarrow 0$$

vale

$$H_1(M_\bullet) \cong \ker \varphi, \quad H_0(M_\bullet) \cong \text{coker } \varphi.$$

De forma mais abrangente segue o seguinte lema.

**Lema A.38. (Lema da cobra)** *Sejam duas sequências exatas curtas unidas por homomorfismos como o diagrama comutativo abaixo*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_1 & \xrightarrow{\beta_1} & N_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \lambda & & \downarrow \mu & & \downarrow \nu & & \\ 0 & \longrightarrow & L_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & M_0 & \xrightarrow{\beta_0} & N_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Associada a elas há uma sequência exata

$$0 \rightarrow \ker \lambda \rightarrow \ker \mu \rightarrow \ker \nu \xrightarrow{\delta} \text{coker } \lambda \rightarrow \text{coker } \mu \rightarrow \text{coker } \nu \rightarrow 0.$$

Poderíamos ter escrito tal sequência como

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(L_\bullet) & \longrightarrow & H_1(M_\bullet) & \longrightarrow & H_1(N_\bullet) \\ & & & & \searrow \delta & & \\ & & H_0(L_\bullet) & \longrightarrow & H_0(M_\bullet) & \longrightarrow & H_0(N_\bullet) \longrightarrow 0 \end{array}$$

em que  $L_\bullet$  é o complexo  $0 \rightarrow L_0 \xrightarrow{\lambda} L_1 \rightarrow 0$ , etc. O lema da cobra, em verdade, generaliza o fato para complexos arbitrários, gerando “sequências exatas longas” tais que esta, aqui enunciada, figura apenas a cauda final.

Outra versão popular do lema da cobra considera o seguinte diagrama comutativo, de maneira distinta à enunciada,

$$\begin{array}{ccccccc} & & L_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_1 & \xrightarrow{\beta_1} & N_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \lambda & & \downarrow \mu & & \downarrow \nu \\ 0 & \longrightarrow & L_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & M_0 & \xrightarrow{\beta_0} & N_0 \end{array}$$

De modo que as linhas são sequências exatas. O lema enunciará então que há apenas uma sequência exata

$$0 \rightarrow \ker \lambda \rightarrow \ker \mu \rightarrow \ker \nu \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \lambda \rightarrow \operatorname{coker} \mu \rightarrow \operatorname{coker} \nu \rightarrow 0.$$

O lema da cobra facilita a demonstração de várias proposições, dentre elas as enunciadas a seguir.

**Corolário A.39.** *Se nas hipóteses do lema da cobra tivermos que  $\mu$  é sobrejetiva e  $\nu$  injetiva, então  $\lambda$  é sobrejetiva e  $\nu$  é um isomorfismo.*

**Lema A.40. (Lema dos quatro)** *Se*

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & D_1 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\ A_0 & \longrightarrow & B_0 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & D_0 \end{array}$$

for um diagrama comutativo de  $R$ -módulos cujas linhas são sequências exatas,  $\alpha$  é um epimorfismo,  $\beta, \delta$  são monomorfismos, então  $\gamma$  é um isomorfismo. Mas se  $\alpha$  e  $\gamma$  forem epimorfismos e  $\delta$  for monomorfismo, então  $\beta$  é um isomorfismo.

**Lema A.41. (Lema dos cinco)** *Se*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & E_1 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon \\ A_0 & \longrightarrow & B_0 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & D_0 & \longrightarrow & E_0 \end{array}$$

for um diagrama comutativo cujas linhas são sequências exatas,  $\beta$  e  $\delta$  forem isomorfismos,  $\alpha$  epimorfismo e  $\epsilon$  monomorfismo, então  $\gamma$  é isomorfismo.

**Proposição A.42.** *Seja o seguinte diagrama de  $\mathbb{R}$ -módulos e homomorfismos*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & M & & & \\ & & & \downarrow f & & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \end{array}$$

*com a linha exata tal que  $\beta f = 0$ . Então existe um único homomorfismo  $g : M \rightarrow A$  tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & M & & & \\ & & & \downarrow f & & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \\ & & \swarrow g & & & & \end{array}$$

*comuta.*

**Corolário A.43.** *Dado o diagrama comutativo de  $\mathbb{R}$  módulos e homomorfismos*

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

*com  $gf = 0$  e a segunda linha exata, existe um único homomorfismo  $\alpha : A \rightarrow A'$  tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

*comuta.*

**Proposição A.44.** *Dado o seguinte diagrama de  $\mathbb{R}$ -módulos e homomorfismos com linha exata e  $f\alpha = 0$*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & & & \\ & & M & & & & \end{array}$$

*existe um único homomorfismo  $g : C \rightarrow M$  tal que  $f = g\beta$ , ou de maneira esquemática,*

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & \swarrow g & & & \\ & & M & & & & \end{array}$$

comuta.

**Corolário A.45.** Dado o diagrama comutativo de  $R$ -módulos e homomorfismos

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & & & \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & & \end{array}$$

com  $g'f' = 0$  e a primeira linha exata, existe um único homomorfismo  $\gamma : C \rightarrow C'$  tal que  $\gamma g = g'\beta$ .

## A.6 Homomorfismos

Nesta seção definimos o conjunto  $\text{Hom}_R(A, B)$  dos  $R$ -homomorfismos entre dois  $R$ -módulos  $A$  e  $B$  e apresentamos alguns resultados preliminares. Veremos mais à frente que tal conjunto desempenha um papel importante na teoria de categorias, mais especificamente, com ele definimos funtores importantes.

Dados dois  $R$ -módulos  $A$  e  $B$  definimos  $\text{Hom}_R(A, B)$  o conjunto de todos os  $R$ -homomorfismos de  $A$  a  $B$ . Sejam  $f, g \in \text{Hom}_R(A, B)$  defina  $+$  :  $\text{Hom}_R(A, B) \times \text{Hom}_R(A, B) \rightarrow \text{Hom}_R(A, B)$  por

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a), \quad \forall a \in A.$$

A demonstração de que  $\text{Hom}_R(A, B)$  com a adição recém definida é um grupo abeliano é direta. Não obstante, no caso geral  $\text{Hom}_R(A, B)$  não é um  $R$ -módulo, porém podemos lançar mão dos seguintes resultados.

**Proposição A.46.** Sejam  $A, B$   $R$ -módulos, com  $R$  anel comutativo.  $\text{Hom}_R(A, B)$  é um  $R$ -módulo com o produto por escalar usual.

E para o caso geral vale o seguinte resultado.

**Proposição A.47.** Para todo anel  $R$  e para todo  $R$ -módulo  $A$ ,  $\text{Hom}_R(R, A)$  é um  $R$ -módulo à esquerda. Ainda,  $\text{Hom}_R(R, A) \cong A$ , enquanto  $R$ -módulos.

Outro aspecto interessante é como tal grupo se comporta sob produtos diretos. Para explorarmos tais resultados, fixemos  $\{M_i\}_{i \in I}$  uma família de  $R$ -módulos, e para todo  $j \in I$ ,  $\alpha_j : M_j \rightarrow \bigoplus \sum_{i \in I} M_i$ , a injeção natural, e  $\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$ , a projeção natural.

**Proposição A.48.** *Dado um  $R$ -módulo  $A$  qualquer vale*

(a)  $\prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, A) \cong \text{Hom}_R(\bigoplus \sum_{i \in I} M_i, A)$ ;

(b)  $\prod_{i \in I} \text{Hom}_R(A, M_i) \cong \text{Hom}_R(A, \prod_{i \in I} M_i)$ .

*Os isomorfismos acima são  $R$ -módulos isomorfismos se  $R$  é um anel comutativo.*

Quando  $A$  e  $B$  são grupos abelianos, e por conseguinte,  $\mathbb{Z}$ -módulos, denotaremos  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$  simplesmente  $\text{Hom}(A, B)$ .

## A.7 Produto tensorial

Nesta seção definiremos o produto tensorial de  $R$ -módulos, que nos permite estudar as aplicações biaditivas que levam de produtos cartesianos de módulos a grupos abelianos por homomorfismos de grupos abelianos, que em geral são mais simples. Além do mais, em geral, o produto cartesiano de  $R$ -módulos é visto apenas como um conjunto, ao passo que o produto tensorial nos fornece uma estrutura de grupo abeliano, e por vezes de  $R$ -módulo.

**Definição A.49.** *Sejam  $M$  um  $R$ -módulo à direita,  $N$  um  $R$ -módulo à esquerda e  $G$  um grupo abeliano. Uma aplicação  $f : M \times N \rightarrow G$  é dita **biaditiva** se para todo  $m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R$  valer:*

(a)  $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$ ;

(b)  $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$ ;

(c)  $f(rm, n) = f(m, rn)$ .

**Definição A.50.** *Sejam  $M$  um  $R$ -módulo à direita e  $N$  um  $R$ -módulo à esquerda. Chamamos por **produto tensorial** de  $M$  por  $N$  sobre  $R$  a dupla do grupo abeliano  $M \otimes_R N$  e da aplicação biaditiva  $h : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$  tal que para todo grupo abeliano  $A$  e para toda aplicação biaditiva  $f : M \times N \rightarrow A$ , existe um único homomorfismo de grupos abelianos  $g : M \otimes_R N \rightarrow A$  que faz o diagrama abaixo comutativo.*

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \xrightarrow{h} & M \otimes_R N \\
 & \searrow f & \swarrow g \\
 & & A
 \end{array}$$

**Proposição A.51.** *Dados um  $R$ -módulo  $M$  à direita e um  $R$ -módulo  $N$  à esquerda, existe um produto tensorial de  $M$  por  $N$ .*

A saber, sejam  $Z(M, N)$  o  $Z$ -módulo livremente gerado por  $M \times N$  e  $B(M, N)$  o submódulo de  $Z(M, N)$  gerado pelos elementos da forma

- (a)  $(m + m', n) - (m, n) - (m', n)$ ;
- (b)  $(m, n + n') - (m, n) - (m, n')$ ;
- (c)  $(mr, n) - (m, rn)$  para todos  $m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R$ .

Seja  $M \otimes_R N := Z(M, N)/B(M, N)$ . Por simplicidade, denote  $(m, n) + B(M, N)$  simplesmente por  $m \otimes n$ . Evidentemente,

$$(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n, \quad (\text{A.4})$$

$$m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n' \quad (\text{A.5})$$

e

$$(mr) \otimes n = m \otimes (rn) \quad (\text{A.6})$$

para todos  $m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R$ . Também vale que  $m \otimes 0 = 0 \otimes n = 0$ , que  $(-m) \otimes n = m \otimes (-n) = -(m \otimes n)$  e que, para todo  $k$  inteiro,  $(km) \otimes n = m \otimes (kn) = k(m \otimes n)$ , de modo que todo elemento de  $M \otimes_R N$  é uma soma finita da forma  $\sum m_i \otimes n_i, m_i \in M, n_i \in N$ .

Defina

$$\begin{aligned} h : M \times N &\rightarrow M \otimes_R N \\ (m, n) &\mapsto m \otimes n \end{aligned}$$

Esta aplicação é biaditiva e, conjuntamente com o grupo  $M \otimes_R N$ , forma um produto tensorial de  $M$  por  $N$ .

Ressaltamos as seguintes propriedades de produto tensorial nas proposições que seguem.

**Proposição A.52.** *O produto tensorial entre um  $R$ -módulo à direita e um  $R$ -módulo à esquerda é único a menos de isomorfismo.*

**Proposição A.53.** *Se  $R$  é um anel comutativo, então  $M \otimes_R N$  é um  $R$ -módulo.*

**Proposição A.54.** *Para todo  $R$ -módulo à esquerda  $M$ ,  $R \otimes_R M$  é um  $R$ -módulo à esquerda isomorfo a  $M$ . Um resultado análogo é obtido para  $R$ -módulos à direita.*

**Definição A.55.** *Dados dois  $R$ -homomorfismos  $f : A \rightarrow M$  e  $g : B \rightarrow N$ , com  $A, M$  sendo  $R$ -módulos à direita e  $B, N$  à esquerda, definimos por  $f \otimes g$  o homomorfismo*

induzido pela aplicação biaditiva  $: A \times B \rightarrow M \otimes_{\mathbb{R}} N$  definida por  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto f(\mathbf{a}) \otimes f(\mathbf{b})$ ,  $\mathbf{a} \in A$ ,  $\mathbf{b} \in B$ .

A definição anterior será de grande valia para estudar propriedades functoriais do produto tensorial.

## A.8 Categorias e funtores

Nesta seção introduziremos dois conceitos importantes na matemática: categorias e funtores. Tais conceitos são essenciais no estudo das estruturas matemáticas e das relações que essas estruturas têm entre si. Aqui o estudo das relações entre os objetos se mostra muito mais proveitoso do que o estudo dos próprios objetos em si.

**Definição A.56.** *Uma categoria  $\mathcal{C}$  é formada por*

- *uma classe de objetos, denotado por  $\text{obj } \mathcal{C}$  ou simplesmente por  $\mathcal{C}$ ;*
- *para dados dois objetos  $A, B$  em  $\mathcal{C}$  um conjunto de morfismos, denotado por  $\text{Mor}(A, B)$  ou por  $\text{Hom}(A, B)$ . Sendo os conjuntos de morfismos dois a dois disjuntos e os morfismos em  $\text{Hom}(A, B)$  denotados por  $f : A \rightarrow B$ ;*
- *uma operação composição de morfismos,  $\text{Mor}(A, B) \times \text{Mor}(B, C) \rightarrow \text{Mor}(A, C)$  — com  $A, B$  e  $C$  objetos arbitrários de  $\mathcal{C}$  —, cuja imagem do par  $(f, g)$  de morfismos;  $f \in \text{Mor}(A, B)$  e  $g \in \text{Mor}(B, C)$ , é denotada por  $gf$ . Tal operação é associativa.*
- *para cada objeto  $A$  em  $\mathcal{C}$  existe um único morfismo dito identidade em  $\text{Mor}(A, A)$  e denotado por  $1_A$  tal que  $f1_A = f$  para todo  $f \in \text{Mor}(A, B)$  e  $1_A f = f$  para todo  $f \in \text{Mor}(B, A)$ .*

A definição de categorias é feita o mais abstratamente possível, para que possa abranger o máximo de estruturas possível. Note que muito pouco é imposto sobre a classe de objetos ou sobre o conjunto de morfismos, de modo que não necessariamente os morfismos sejam funções.

**Exemplo 57.** A categoria dos conjuntos, em que os objetos são conjuntos e os morfismos funções com a lei de composição usual. Note que se fosse pedido que a classe de objetos fosse um conjunto a categoria em questão não poderia existir, pois sua classe de objetos deveria ser um conjunto que contivesse todos os conjuntos.  $\square$

Além dessa temos outras categorias que permeiam diariamente a vida de um matemático, como a categoria dos módulos (à direita ou à esquerda); a dos espaços vetoriais;

a dos espaços topológicos; a dos grupos; a dos anéis e tantas outras similares. Todavia segue abaixo um exemplo que ilustra um dos casos em que os morfismos não são funções.

**Exemplo 58.** Um digrafo em que para todo vértice  $\mathbf{a}$  há uma aresta cujas ambas extremidades são justamente  $\mathbf{a}$  – i.e., um *loop*, ou um *laço* – é uma categoria cuja classe de objetos é constituída por seus vértices e os morfismos são caminhos no grafo e a lei de composição é dada pela concatenação de caminhos.  $\square$

**Definição A.59.** *Sejam  $\mathcal{C}$  uma categoria,  $A$  e  $B$  objetos dessa categoria e  $f : A \rightarrow B$  um morfismo. Dizemos que  $f$  é um **isomorfismo**, ou uma **equivalência**, se existir um morfismo  $g : B \rightarrow A$  em  $\mathcal{C}$  tal que  $gf = 1_A$  e  $fg = 1_B$ . Neste caso, dizemos que  $g$  é o **morfismo inverso** de  $f$ , denotado por  $f^{-1}$ . Com técnicas usuais demonstra-se que o morfismo inverso é único (caso exista) e que  $(f^{-1})^{-1} = f$ . Ainda, se for o caso de existência de um isomorfismo entre  $A$  e  $B$ , dizemos que estes objetos são **isomorfos** ou **equivalentes**.*

**Definição A.60.** *Um objeto  $O$  em uma categoria  $\mathcal{C}$  é dito um **objeto zero** se  $\text{Hom}(A, O)$  e  $\text{Hom}(O, A)$  são conjuntos unitários para todo  $A$  em  $\mathcal{C}$ . Sem lançar mão de técnicas não rotineiras demonstra-se que se um objeto zero existe em uma categoria, ele é único.*

Vale ressaltar, com certa redundância, que a teoria de categorias não diz nada sobre propriedades conjuntistas dos objetos. Assim, não faz muito sentido falar de “elementos” de um dado objeto abstrato de uma categoria qualquer. Por esse motivo uma boa linguagem para lidar neste contexto é a dos diagramas — a qual já foi introduzida neste trabalho e fizemos amplo uso, por exemplo, nas seções destinadas à complexos de cadeias. Ressaltamos o fato de que os diagramas pouco dizem sobre os objetos em si, porém nos permitem estudar com clareza como eles se relacionam entre si.

**Definição A.61.** *Uma categoria  $\mathcal{C}$  é dita **pré-aditiva** se*

- *tiver objeto zero;*
- *para cada par de objetos  $A, B$  em  $\mathcal{C}$  o conjunto  $\text{Hom}(A, B)$  é um grupo abeliano com respeito à adição;*
- *para todos os objetos  $A, B, C$  de  $\mathcal{C}$  existir uma aplicação bilinear  $\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$  caracterizando a distributividade da lei do composição. I.e., para cada par  $f, g \in \text{Hom}(B, C)$  e para cada par  $h, k \in \text{Hom}(A, B)$ ,*

$$(f + g)h = fh + gh; \quad f(h + k) = fh + fk.$$

**Definição A.62.** *Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  duas categorias. Um **F funtor covariante** da categoria  $\mathcal{C}$  à categoria  $\mathcal{D}$ , expresso por  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , é algo que satisfaz os seguintes axiomas*

- *F associa a cada objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  um único objeto  $F(A)$  de  $\mathcal{D}$ ;*
- *F associa a cada morfismo  $f : A \rightarrow B$  em  $\mathcal{C}$  um único morfismo  $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$  em  $\mathcal{D}$  tal que se  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  são morfismos em  $\mathcal{C}$ , então  $F(gf) = F(g)F(f)$ ;*
- *$F(1_A) = 1_{F(A)}$  para todo  $A$  em  $\mathcal{C}$ .*

**Definição A.63.** *Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  duas categorias. Um **F funtor contravariante** da categoria  $\mathcal{C}$  à categoria  $\mathcal{D}$ , expresso por  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , é algo que satisfaz os seguintes axiomas*

- *F associa a cada objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  um único objeto  $F(A)$  de  $\mathcal{D}$ ;*
- *F associa a cada morfismo  $f : A \rightarrow B$  em  $\mathcal{C}$  um único morfismo  $F(f) : F(B) \rightarrow F(A)$  em  $\mathcal{D}$  tal que se  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  são morfismos em  $\mathcal{C}$ , então  $F(gf) = F(f)F(g)$ ;*
- *$F(1_A) = 1_{F(A)}$  para todo  $A$  em  $\mathcal{C}$ .*

**Definição A.64.** *Um funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre categorias pré-aditivas,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , é dito **aditivo** se  $F(f+g) = F(f)+F(g)$  para todo par de morfismos  $f$  e  $g$  entre mesmos objetos da categoria  $\mathcal{C}$ .*

**Exemplo 65.** Um exemplo clássico de funtor contravariante é o funtor dualidade, que leva da categoria dos  $K$ -espaços vetoriais,  $\text{Lin}_K$ , nela mesma, definido sobre os objetos por  $V \rightarrow V^* = \mathcal{L}(V, K)$  e sobre os morfismos por  $f \rightarrow f^*$ , em que  $f^*$  é a transformação dual à  $f$ . □

**Exemplo 66.** O funtor  $\text{Hom}_R(X, -)$ , em que  $X$  é um  $R$ -módulo, que associa a cada  $R$ -módulo  $A$  o grupo abeliano  $\text{Hom}_R(X, A)$  e a cada  $R$ -homorfismo  $f : A \rightarrow B$  um homomorfismo  $\text{Hom}(1, f) : \text{Hom}_R(X, A) \rightarrow \text{Hom}_R(X, B)$  definido por

$$\text{Hom}(1, f)(\alpha) = f\alpha, \quad \alpha \in \text{Hom}_R(X, A).$$

Esse é um funtor covariante aditivo entre a categoria dos  $R$ -módulos e a categoria dos grupos abelianos. □

**Exemplo 67.** Analogamente definimos o functor  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(-, X)$ , em que  $X$  é um  $\mathbf{R}$ -módulo, que associa a cada  $\mathbf{R}$ -módulo  $A$  o grupo abeliano  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(A, X)$  e a cada  $\mathbf{R}$ -homomorfismo  $f : A \rightarrow B$  o homomorfismo  $\text{Hom}(f, 1) : \text{Hom}_{\mathbf{R}}(B, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{R}}(A, X)$  definido por

$$\text{Hom}(f, 1)(\alpha) = \alpha f, \quad \alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{R}}(B, X).$$

Esse é um functor contravariante aditivo entre a categoria dos  $\mathbf{R}$ -módulos e a categoria dos grupos abelianos.  $\square$

**Exemplo 68.** Fixe  $M$  e  $N$   $\mathbf{R}$ -módulos à direita e à esquerda respectivamente. Defina os seguintes funtores covariantes aditivos da categoria dos  $\mathbf{R}$ -módulos (à esquerda e à direita, respectivamente) à categoria dos grupos abelianos:

$$T_1(A) = M \otimes_{\mathbf{R}} A, \text{ sendo } A \text{ um } \mathbf{R}\text{-módulo à esquerda;}$$

$$T_2(B) = B \otimes_{\mathbf{R}} N, \text{ sendo } B \text{ um } \mathbf{R}\text{-módulo à direita.}$$

No caso de  $\mathbf{R}$  ser comutativo  $M \otimes_{\mathbf{R}} A$  e  $B \otimes_{\mathbf{R}} N$  são  $\mathbf{R}$ -módulo, de modo que estes funtores passam a ser da categoria dos  $\mathbf{R}$ -módulos nela mesma.

Representa-se  $T_1$  por  $M \otimes_{\mathbf{R}} -$  e  $T_2$  por  $- \otimes_{\mathbf{R}} N$ .  $\square$

**Definição A.69.** Sejam  $T, U : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  dois funtores ou ambos covariantes ou ambos contravariantes entre as categorias  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ .  $\mu : T \rightarrow U$  é dita uma **transformação natural (de  $T$  a  $U$ )** se para cada objeto  $A$  em  $\mathcal{C}$  existir um morfismo associado  $\mu_A : T(A) \rightarrow U(A)$  em  $\mathcal{D}$  tal que para todo morfismo  $f : A \rightarrow B$  em  $\mathcal{C}$  o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{T(f)} & T(B) \\ \mu_A \downarrow & & \downarrow \mu_B \\ U(A) & \xrightarrow{U(f)} & U(B) \end{array}$$

se ambos os funtores são covariantes ou o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T(B) & \xrightarrow{T(f)} & T(A) \\ \mu_B \downarrow & & \downarrow \mu_A \\ U(B) & \xrightarrow{U(f)} & U(A) \end{array}$$

se ambos os funtores são contravariantes é comutativo.

Se  $\mu_A$  é uma equivalência para todo  $A$  em  $\mathcal{C}$ , então  $\mu$  é dita uma **equivalência natural** e denotado por  $\mu : \mathbb{T} \approx \mathbb{U}$ . Neste caso também dizemos que  $\mathbb{T}$  e  $\mathbb{U}$  são **funtores naturalmente equivalentes**.

Por simplicidade introduziremos os símbolos  ${}_R\mathcal{M}$  e  $\mathcal{M}_R$  da categoria dos  $R$ -módulos à esquerda e da categoria dos  $R$ -módulos à direita, respectivamente.

**Definição A.70.** Um **funtor**  $\mathbb{T} : {}_R\mathcal{M} \rightarrow {}_S\mathcal{M}$  (ou  $\mathcal{M}_S$ ) é dito **exato à esquerda** se sempre que  $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$  for uma sequência exata em  ${}_R\mathcal{M}$ , então a sequência  $0 \rightarrow \mathbb{T}(A') \xrightarrow{\mathbb{T}(f)} \mathbb{T}(A) \xrightarrow{\mathbb{T}(g)} \mathbb{T}(A'')$  é exata, se  $\mathbb{T}$  for covariante, ou a sequência  $0 \rightarrow \mathbb{T}(A'') \xrightarrow{\mathbb{T}(g)} \mathbb{T}(A) \xrightarrow{\mathbb{T}(f)} \mathbb{T}(A')$  é exata se  $\mathbb{T}$  é contravariante.

Analogamente define-se um funtor **exato à direita**.

**Definição A.71.** Um **funtor exato** é um funtor  $\mathbb{T} : {}_R\mathcal{M} \rightarrow {}_S\mathcal{M}$  (ou  $\mathcal{M}_S$ ) que associa a toda sequência exata  $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$  em  ${}_R\mathcal{M}$  uma sequência exata  $\mathbb{T}(A') \xrightarrow{\mathbb{T}(f)} \mathbb{T}(A) \xrightarrow{\mathbb{T}(g)} \mathbb{T}(A'')$  se  $\mathbb{T}$  é covariante, e uma sequência exata  $\mathbb{T}(A'') \xrightarrow{\mathbb{T}(g)} \mathbb{T}(A) \xrightarrow{\mathbb{T}(f)} \mathbb{T}(A')$  se  $\mathbb{T}$  é contravariante.

funtores podem desempenhar um papel análogo ao de isomorfismos, como sugere a seguinte definição.

**Definição A.72.** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  duas categorias e  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  e  $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  dois funtores. Se os funtores  $HF : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  e  $FH : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  forem naturalmente equivalentes aos funtores identidade  $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  e  $1_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ , respectivamente, então dizemos que as categorias  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  são **equivalentes**.

Sejam  $X$  um  $R$ -módulo à esquerda e  $Y$  um  $R$ -módulo à direita. Temos que  $\text{Hom}_R(X, -)$  e  $\text{Hom}_R(-, X)$  são exatos à esquerda, porém não exatos, ao passo que os funtores  $Y \otimes_R -$  e  $- \otimes_R X$  são exatos à direita.

**Definição A.73.** Sejam  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  categorias. Dizemos que  $\mathbb{T} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  é um **bifuntor covariante nas duas variáveis** se para todos objetos  $A$  e  $A'$  de  $\mathcal{A}$  e todos objetos  $B$  e  $B'$  de  $\mathcal{B}$ ,  $\mathbb{T}(A, -) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  e  $\mathbb{T}(-, B) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  são funtores covariantes, e se para todos morfismos  $f : A \rightarrow A'$  e  $g : B \rightarrow B'$  de  $\mathcal{A}$  e de  $\mathcal{B}$ , respectivamente, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}(A, B) & \xrightarrow{\mathbb{T}(f, 1_B)} & \mathbb{T}(A', B) \\ \mathbb{T}(1_A, g) \downarrow & & \downarrow \mathbb{T}(1_{A'}, g) \\ \mathbb{T}(A, B') & \xrightarrow{\mathbb{T}(f, 1_{B'})} & \mathbb{T}(A', B') \end{array}$$

comuta.

Analogamente definimos bifuntores contravariantes em ambas as variáveis, covariantes na primeira e contra variantes na segunda e vice-versa.

Ressalta-se o fato de  $\text{Hom}_{\mathbb{R}} :_{\mathbb{R}} \mathcal{M} \times_{\mathbb{R}} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}b$  ser um bifuntor contravariante na primeira variável e covariante na segunda. Ainda,  $- \otimes_{\mathbb{R}} - : \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \times_{\mathbb{R}} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}b$  é um bifuntor covariante em ambas variáveis.

## A.9 Funtores derivados

Nesta seção apresentamos o conceito de módulos projetivos e injetivos e, lançando mão deles, de funtores derivados, que têm uma importância histórica nos estudos de topologia algébrica.

**Definição A.74.** Dizemos que um  $\mathbb{R}$ -módulo à esquerda  $P$  é **projetivo** se dado um diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow f & \\ A & \xrightarrow{\alpha} B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

de  $\mathbb{R}$ -módulos e homomorfismos com linha exata, existir um  $\mathbb{R}$ -homomorfismo  $g : P \rightarrow A$  que torna o diagrama completo comutativo, i.e.,  $\alpha g = f$ .

**Proposição A.75.** Todo módulo livre é projetivo.

Todavia, nem todo módulo projetivo é livre.

**Proposição A.76.** Seja  $P$  um  $\mathbb{R}$ -módulo projetivo. Se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow f & \\ A & \xrightarrow{\alpha} B & \xrightarrow{\beta} C \end{array}$$

de  $\mathbb{R}$ -módulos e homomorfismos é tal que  $\beta f = 0$ , então existe um homomorfismo  $g : P \rightarrow A$  tal que  $\alpha g = f$ .

Ainda, uma soma direta é projetiva se, e só se, cada um de seus somandos diretos são projetivos.

A proposição abaixo caracteriza os módulos projetivos lançando mão do funtor  $\text{Hom}$ .

**Proposição A.77.** Um  $\mathbb{R}$ -módulo  $P$  é projetivo se, e somente se, o funtor  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(P, -)$  é exato.

**Teorema A.78.** *Todo  $R$ -módulo é imagem homomorfa de um  $R$ -módulo projetivo.*

**Teorema A.79.** *Um  $R$ -módulo  $P$  é projetivo se, e só se, toda sequência exata  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow 0$  cinde.*

**Proposição A.80.** *Todo  $R$ -módulo projetivo é somando direto de um  $R$ -módulo livre.*

Estamos finalmente com o ferramental necessário para enunciarmos uma condição suficiente para que o funtor tensor seja exato.

**Teorema A.81.** *Sejam  $P$  e  $P'$   $R$ -módulos projetivos à direita e à esquerda, respectivamente. Então  $P \otimes_R -$  e  $- \otimes_R P'$  são funtores exatos.*

O que nos leva à seguinte definição.

**Definição A.82.** *Um  $R$ -módulo à direita  $A$  é dito **plano** se o funtor  $A \otimes_R -$  é exato. Analogamente diz-se que um  $R$ -módulo à esquerda  $B$  é plano se o funtor  $- \otimes_R B$  é exato.*

**Definição A.83.** *Por outro lado, um módulo  $E$  é dito **injetivo** se dado um diagrama*

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \xrightarrow{\alpha} B \\ & & \downarrow f \\ & & E \end{array}$$

de  $R$ -módulos e homomorfismos com linha exata, existir um homomorfismo  $g : B \rightarrow E$  que o torna comutativo, i.e.,  $g\alpha = f$ .

Da definição seguem algumas proposições que nos serão úteis.

**Proposição A.84.** *Se  $E$  é injetivo, então dado um diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \\ & & \downarrow f & & \\ & & E & & \end{array}$$

de  $R$ -módulos e homomorfismos com linha exata tal que  $f\alpha = 0$ , então existe um homomorfismo  $g : C \rightarrow E$  tal que faz o diagrama completo comutar, i.e.,  $g\beta = f$ .

**Teorema A.85.** *Sejam  $\{E_i\}_{i \in I}$  uma família de  $R$ -módulos e  $E = \prod_{i \in I} E_i$ . Então  $E$  é injetivo se, e somente se, todo  $E_j$  é injetivo.*

A proposição abaixo nos permite caracterizar os módulos injetivos por meio do funtor  $\text{Hom}$ .

**Proposição A.86.** *Um  $R$ -módulo é injetivo se, e somente se, o funtor  $\text{Hom}_R(-, M)$  é exato.*

**Proposição A.87.** Se  $E$  é um  $R$ -módulo injetivo, então toda sequência exata

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} B \rightarrow 0$$

cinde.

**Definição A.88.** Seja  $A$  um  $R$ -módulo. Uma sequência exata da forma

$$P: \cdots P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \rightarrow 0$$

em que  $P_n$  é projetivo para todo  $n \geq 0$ , é dita uma **resolução projetiva**. A sequência, não mais exata em  $P_0$ ,

$$P_A: \cdots P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow 0$$

é dado o nome de **complexo deletado** da resolução  $P$ .

A definição acima mostrar-se-á útil mais à frente, todavia ela poderia também mostrar-se restritiva. Por sorte a proposição a seguir mostra que este não é o caso.

**Proposição A.89.** Todo  $R$ -módulo possui uma resolução projetiva.

Em geral, um  $R$ -módulo tem mais de uma resolução projetiva. Porém quaisquer duas resoluções projetivas de um mesmo módulo estão relacionadas pelo teorema que segue. Mas antes, faz-se necessária uma breve definição.

**Definição A.90.** Sejam dois complexos

$$X: \cdots \rightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} \cdots \rightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\epsilon} A \rightarrow 0$$

$$X': \cdots \rightarrow X'_{n+1} \xrightarrow{d'_{n+1}} X'_n \xrightarrow{d'_{n-1}} \cdots \rightarrow X'_1 \xrightarrow{d'_1} X'_0 \xrightarrow{\epsilon'} B \rightarrow 0$$

de  $R$ -módulos e homomorfismos, e um homomorfismo  $f: A \rightarrow B$ . Definimos por **aplicação de cadeia sobre o homomorfismo  $f$**  uma coleção de homomorfismos  $\{f_n\}$ ,  $f_n: X_n \rightarrow X'_n$ , para  $n \geq 0$ , tal que  $f_{n-1}d_n = d'_n f_n$  para  $n \geq 1$  e  $\epsilon' f_0 = f \epsilon$ .

**Teorema A.91. (Teorema da comparação)** Dado um diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} P_A: \cdots & P_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & & & & \downarrow & f & \\ P_B: \cdots & B_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{d_n} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{d_1} & B_0 & \xrightarrow{\epsilon} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de  $R$ -módulos e homomorfismos, em que a segunda linha é exata e cada  $P_n$  na primeira é projetivo, existe uma aplicação de cadeia  $\{f_n\}: P_A \rightarrow P_B$  sobre  $f$  e quaisquer duas aplicações como essa são homotópicas.

Note que se tomarmos duas resoluções projetivas  $\mathbf{P}_A$  e  $\mathbf{P}'_A$  sobre um mesmo módulo  $A$ , pelo teorema da comparação, existem mapas de cadeia  $\mathbf{f} = \{f_n\} : \mathbf{P}_A \rightarrow \mathbf{P}'_A$  e  $\mathbf{g} = \{g_n\} : \mathbf{P}'_A \rightarrow \mathbf{P}_A$  ambas sobre a aplicação identidade. Lançando mão novamente do teorema da comparação, tem-se que  $\mathbf{fg}$  e  $\mathbf{gf}$  são homotópicas a  $1_{\mathbf{P}_A}$  e  $1_{\mathbf{P}'_A}$  respectivamente.

Temos definições e resultados simétricos para módulos injetivos, como mostra-se a seguir.

**Definição A.92.** *Uma resolução injetiva de um  $\mathbf{R}$ -módulo  $A$  é uma sequência exata*

$$\mathbf{E} : 0 \rightarrow A \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \dots \rightarrow E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \rightarrow \dots$$

de  $\mathbf{R}$ -módulos e homomorfismos em que para cada  $n \geq 0$   $E^n$  é um módulo injetivo.

O complexo

$$\mathbf{E} : 0 \rightarrow A \rightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \dots \rightarrow E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \rightarrow \dots$$

é dito de **complexo deletado** de  $\mathbf{E}$  e é denotado por  $\mathbf{E}_A$ .

O conceito de aplicação de cadeia é definido analogamente neste contexto, sempre prezando pela comutatividade dos diagramas envolvidos.

Também é válido o fato de que todo  $\mathbf{R}$ -módulo possui uma resolução injetiva. Ainda, resultados análogos aos de resoluções projetivas são dados para a comparação de duas resoluções injetivas de um mesmo módulo.

Por ora fixe para cada  $\mathbf{R}$ -módulo uma resolução projetiva e uma resolução injetiva. É possível mostrar que as definições e resultados que seguem não dependem da escolha de tais resoluções. Considera ainda  $S$  como sendo outro anel e  $T :_{\mathbf{R}} \mathcal{M} \rightarrow_S \mathcal{M}$  (ou  $\mathcal{A}b$ ) um functor covariante e  $T' :_{\mathbf{R}} \mathcal{M} \rightarrow_S \mathcal{M}$  (ou  $\mathcal{A}b$ ) um functor contravariante.

Sejam  $A$  e  $B$   $\mathbf{R}$ -módulos à esquerda de resoluções projetivas  $\mathbf{P}_A$  e  $\mathbf{P}_B$  respectivamente. Sejam ainda  $f : A \rightarrow B$  um homomorfismo e uma aplicação de cadeia  $\{f_n\} : \mathbf{P}_A \rightarrow \mathbf{P}_B$  sobre  $f$ . Para  $n \geq 0$  defina

$$(L_n T)A = H_n(T\mathbf{P}_A) = \ker Td_n / \text{Im } Td_{n+1}$$

e

$$(R^n T')A = H^n(T'\mathbf{P}_A) = \ker T'd_{n+1} / \text{Im } T'd_n.$$

Defina ainda

$$(L_n T)(f)(x + \text{Im } Td_{n+1}) = T(f_n)(x) + \text{Im } Td_{n+1}, \quad x \in \ker Td_n$$

e

$$(\mathbf{R}^n T')(f)(\mathbf{y} + \text{Im } T' d'_{n+1}) = T(f_n)(\mathbf{y}) + \text{Im } T' d_{n+1}, \mathbf{y} \in \ker T d_{n+1}.$$

É possível mostrar que a definição acima não depende da escolha da aplicação de cadeia  $\{f_n\}$ . Ainda, para todo  $n \geq 0$ ,  $L_n T :_{\mathbf{R}} \mathcal{M} \rightarrow_{\mathcal{S}} \mathcal{M}$  (ou  $\mathcal{A}b$ ) é um funtor covariante aditivo e  $\mathbf{R}^n T' :_{\mathbf{R}} \mathcal{M} \rightarrow_{\mathcal{S}} \mathcal{M}$  (ou  $\mathcal{A}b$ ) é um funtor contravariante aditivo, chamados de **funtor derivado à esquerda** de  $T$  e **funtor derivado à direita** de  $T'$ , respectivamente.

Analogamente define-se sobre as resoluções injetivas o **funtor derivado à direita** de  $T$ ,  $\mathbf{R}^n T$ , e o funtor derivado à esquerda de  $T'$ ,  $L_n T'$ , que são aditivos e são, respectivamente, covariante e contravariante.

**Definição A.93.** *Sejam  $M$  um  $\mathbf{R}$ -módulo à esquerda e  $N$  um  $\mathbf{R}$ -módulo à direita. Escrevemos*

$$\text{Tor}_n^{\mathbf{R}}(N, -) \text{ para } L_n T \text{ quando } T = N \otimes_{\mathbf{R}} -;$$

$$\text{tor}_n^{\mathbf{R}}(-, M) \text{ para } L_n T \text{ quando } T = - \otimes_{\mathbf{R}} M;$$

$$\text{Ext}_n^{\mathbf{R}}(-, M) \text{ para } \mathbf{R}^n T \text{ quando } T = \text{Hom}_{\mathbf{R}}(-, M);$$

$$\text{ext}_n^{\mathbf{R}}(M, -) \text{ para } \mathbf{R}^n T \text{ quando } T = \text{Hom}_{\mathbf{R}}(M, -).$$

Com certo esforço técnico demonstra-se o seguinte resultado.

**Teorema A.94.** *Para todo  $n \geq 0$ ,  $\text{Tor}_n^{\mathbf{R}}(-, -)$  é um bifuntor de  $\mathcal{M}_{\mathbf{R}} \times_{\mathbf{R}} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}b$  e  $\text{Ext}_n^{\mathbf{R}}(-, -) : \mathcal{M}_{\mathbf{R}} \times_{\mathbf{R}} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}b$  é um bifuntor covariante na segunda variável e contravariante na primeira.*

## A.10 Cohomologia de grupos

Sejam  $G$  um grupo e  $\mathbb{Z}G$  o anel de grupo integral de  $G$ . Seja ainda  $A$  um grupo Abeliano aditivo, que pode ser visto como um  $\mathbb{Z}$  módulo naturalmente. Podemos garantir a  $A$  uma estrutura de  $\mathbb{Z}G$ -módulo estendendo a ação trivial de  $G$  sobre  $A$  por linearidade; por ação trivial entende-se a ação  $g\mathbf{a} = \mathbf{a}$  para todo  $g \in G$  e para todo  $\mathbf{a} \in A$ . Sob estas condições dizemos que  $A$  é um  $\mathbb{Z}G$ -**módulo trivial**. Por praticidade todos os  $\mathbb{Z}G$ -módulos serão denotados simplesmente por  $G$ -módulos e onde houver a necessidade de indexação por  $\mathbb{Z}G$ , ela será feita indexando-se simplesmente por  $G$ , e.g.,  $A \otimes_G B = A \otimes_{\mathbb{Z}G} B$ .

**Definição A.95.** *Sejam  $G$  um grupo e  $A$  um  $G$ -módulo à esquerda. Definimos o  $n$ -ésimo grupo homológico  $H_n(G, A)$  e o  $n$ -ésimo grupo cohomológico por  $H^n(G, A)$  do grupo  $G$  com coeficientes em  $A$  por*

$$H_n(G, A) = \text{Tor}_n^G(\mathbb{Z}, A); \quad H^n(G, A) = \text{Ext}_G^n(\mathbb{Z}, A)$$

com  $n \geq 0$  e  $\mathbb{Z}$  tido como um  $G$ -módulo trivial, à esquerda no primeiro caso e à direita no segundo.

Segue da definição que  $H_n(G, -)$  e  $H^n(-, G)$  são funtores aditivos covariantes. Ainda, se  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  são resoluções projetivas do  $G$ -módulo à direita  $\mathbb{Z}$  e do  $G$ -módulo à esquerda  $\mathbb{Z}$ , respectivamente, então, para  $n \geq 0$  e para um dado  $G$ -módulo à esquerda  $A$ ,  $H_n(G, A) = H_n(\mathbf{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_G A)$  e  $H^n(G, A) = H^n(\text{Hom}_G(\mathbf{Q}_{\mathbb{Z}}, A))$ .

**Proposição A.96.** *Dada uma sequência exata curta  $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \rightarrow 0$  de  $G$ -módulos à esquerda, existem sequências exatas longas naturais*

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_{n+1}(G, A'') \rightarrow H_n(G, A') \rightarrow H_n(G, A) \rightarrow H_n(G, A'') \rightarrow H_{n-1}(G, A') \\ \rightarrow \cdots \rightarrow H_1(G, A'') \rightarrow H_0(G, A') \rightarrow H_0(G, A) \rightarrow H_0(G, A'') \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(G, A') \rightarrow H^0(G, A) \rightarrow H^0(G, A'') \rightarrow H^1(G, A') \rightarrow \cdots \rightarrow H^{n-1}(G, A'') \\ \rightarrow H^n(G, A') \rightarrow H^n(G, A) \rightarrow H^n(G, A'') \rightarrow H^{n+1}(G, A') \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

**Proposição A.97.** *Sejam  $A$  um  $G$ -módulo à esquerda e  $n \geq 2$ , então  $H^n(G, A) \cong \text{Ext}_G^{n-1}(I(G), A)$  e  $H_n(G, A) \cong \text{Tor}_{n-1}^G(I(G), A)$ ; em que  $I(G)$  denota o ideal aumentado de  $\mathbb{Z}G$ .*

Sejam  $G$  e  $G'$  grupos e  $f : G \rightarrow G'$  um homomorfismo. Note que para um dado  $G'$ -módulo  $A$  podemos conferir a ele uma estrutura de  $G$ -módulo definindo o produto  $ga = f(g)a$ , para todo  $g \in G$  e para todo  $a$  em  $A$ . Em particular  $\mathbb{Z}G'$  é também um  $G$  módulo e, para cada  $G$ -módulo à esquerda  $B$ ,  $\mathbb{Z}G' \otimes_G B$  é um  $G'$ -módulo à esquerda.

**Lema A.98.** *Se  $P$  é um  $G$ -módulo projetivo à esquerda, então  $\mathbb{Z}G' \otimes_G P$  é um  $G'$ -módulo projetivo à esquerda.*

Novamente considere  $A$  um  $G$ -módulo, sendo  $G$  um grupo. Defina

$$A^G = \{a \in A : ga = a \text{ para todo } g \in G\}$$

e  $K$  como sendo o subgrupo de  $\mathbb{Z} \otimes A$  gerado pelos elementos da forma  $n \otimes a - n \otimes ga = n(1-g)a$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $g \in G$  e  $a \in A$ . Mostra-se que  $H^0(G, A) \cong A^G$  e  $H_0(G, A) \cong \mathbb{Z} \otimes A / K$ , de modo que se  $A$  é um  $G$ -módulo trivial,  $H_0(G, A) \cong H^0(G, A) \cong A$ .

Ainda na mesma linha prática para a obtenção de  $H^n(G, A)$  e de  $H_n(G, A)$ , mais especificamente neste caso  $n = 1$ , considere a sequência exata  $0 \rightarrow I(G) \xrightarrow{i} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ ; em que  $i$  é a aplicação de inclusão e  $\epsilon$  a aplicação aumento. Mostra-se, com a ação dos funtores  $\text{Hom}$  e  $\otimes$  sobre tal sequência, que

$$H_1(G, A) \cong \ker(i \otimes 1 : I(G) \otimes_G A \rightarrow \mathbb{Z}G \otimes_G A) \cong \ker(i_* : I(G) \otimes_G A \rightarrow A)$$

e que

$$H^1(G, A) \cong \text{Hom}_G(I(G), A) / \text{Im}(\text{Hom}(\mathbb{Z}G, A) \rightarrow \text{Hom}_G(I(G), A))$$

$$\cong \text{Hom}_G(I(G), A) / \text{Im}(i^* : A \rightarrow \text{Hom}_G(I(G), A));$$

em que  $i_*((g-1) \otimes a) = (g-1)a$  em  $i^*(a)(g-1) = (g-1)a$ ,  $g \in G$  e  $a \in A$ .

Uma aplicação  $f : G \rightarrow A$  é dita uma **derivação** se  $f(xy) = f(x) + xf(y)$  para quaisquer  $x, y \in G$ . Denotamos por  $\text{Der}(G, A)$  o conjunto de todas as derivações de  $G$  a  $A$ . Uma **derivação interna**, ou um **homomorfismo cruzado principal**, é uma derivação  $f : G \rightarrow A$  tal que existe um  $a \in A$  tal que  $f(x) = (x-1)a$  para todo  $x \in G$ . O conjunto de todas as derivações internas denota-se por  $\text{Ider}(G, A)$ , que forma um subgrupo de  $\text{Der}(G, A)$ .

**Proposição A.99.**  $H^1(G, A) \cong \text{Der}(G, A) / \text{Ider}(G, A)$ , de modo que se  $A$  é trivial, então  $H^1(G, A) \cong \text{Hom}(G/G', A)$ .

**Proposição A.100.** Se  $A$  é um  $G$ -módulo trivial, então  $H_1(G, A) \cong (I(G)/I^2(G)) \otimes A \cong (G/G') \otimes A$ .

## A.10.1 A resolução de Bar

Fixe um grupo  $G$ . Para cada  $n \geq 0$  defina  $P_n$  como sendo o  $G$ -módulo livre gerado pelo conjunto das  $n$ -úplas ordenadas de elementos de  $G$   $[g_1, g_2, \dots, g_n]$ , sendo que  $P_0$  é fixado como sendo o  $G$ -módulo livre cuja base é dada por um elemento  $[\ ]$ . Defina para cada  $n \geq 1$  o homomorfismo  $d_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$  por

$$d_n[g_1, \dots, g_n] = g_1[g_2, \dots, g_n] + \sum (-1)^i [g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_n] \\ + (-1)^n [g_1, \dots, g_{n-1}];$$

sendo que  $d_1[g] = g[] - []$ . Defina ainda o  $G$ -homomorfismo  $\epsilon : P_0 \rightarrow \mathbb{Z}$  por  $\epsilon([]) = 1$ . Defina ainda os  $\mathbb{Z}$ -módulos  $F_n$  livremente gerados pelo conjunto das  $n + 1$ -úplas  $\langle g_0, \dots, g_n \rangle$ ,  $g_i \in G$ . Defina a  $G$  ação

$$g \langle g_0, \dots, g_n \rangle = \langle gg_0, \dots, g_n \rangle;$$

$g, g_i \in G$ ,  $0 \leq i \leq n$ . Com esta ação estendida por linearidade  $F_n$  é um  $G$ -módulo. Defina agora os  $\mathbb{Z}$ -homomorfismos (que trivialmente se torna um  $G$ -homomorfismo)  $\delta_n : F_n \rightarrow F_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ , e  $\delta_0 : F_1 \rightarrow F_0$  por

$$\delta_n \langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle = \sum (-1)^i \langle g_0, \dots, g_{i-1}, \widehat{g}_i, g_{i+1}, \dots, g_n \rangle; \quad \delta_0 \langle g_0 \rangle = 1;$$

em que o circunflexo  $\widehat{g}_i$  denota a omissão da  $i$ -ésima entrada. Defina ainda os  $\mathbb{Z}$ -homomorfismos (que também são  $G$ -homomorfismos)  $\theta_n : F_n \rightarrow P_n$ ,  $n \geq 1$ , por

$$\theta_n \langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle = g_0 [g_0^{-1} g_1, g_1^{-1} g_2 \dots, g_{n-1}^{-1} g_n]; \quad \theta_0 \langle g_0 \rangle = g_0 [].$$

$\theta_n$  é um  $G$ -isomorfismo de inversa  $\phi_n : P_n \rightarrow F_n$  dada por

$$\phi_n([g_1, \dots, g_n]) = \langle 1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 \dots g_n \rangle; \quad g_i \in g.$$

**Lema A.101.** Para todo  $n \geq 1$ ,  $\delta_{n-1} \delta_n = 0$ .

**Lema A.102.** O diagrama

$$\begin{array}{ccc} P_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_n \\ \phi_{n+1} \downarrow & & \downarrow \phi_n \\ F_{n+1} & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & F_n \end{array}$$

é comutativo.

**Proposição A.103.** Para todo  $n \geq 0$ ,  $d_n d_{n+1} = 0$ ; em que  $d_0 = \epsilon$ .

**Teorema A.104.** A sequência

$$\dots \rightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (\text{A.7})$$

é uma  $\mathbb{Z}G$ -resolução livre do  $G$ -módulo trivial  $\mathbb{Z}$ , chamada **Resolução de Bar** de  $\mathbb{Z}$ .

Seja novamente  $A$  um  $G$ -módulo. Uma  **$n$ -cocadeia** de  $G$  com coeficientes em  $A$  é uma aplicação da forma  $f : G \times \dots \times G \rightarrow A$ ,  $n \geq 1$ . Denota-se por  $C^n(G, A)$  o conjunto de todas as  $n$ -cocadeias e fixa-se  $C^0(G, A) = A$ .  $C^n(G, A)$  é um grupo abeliano com

respeito à soma usual de aplicações. Ainda,  $C^n(G, A) \cong \text{Hom}_g(P_n, A)$ . Para cada  $n \geq 0$  defina  $d^n : C^n(G, A) \rightarrow C^{n+1}(G, A)$  por

$$d^n(f) = \tilde{f}d_{n+1}, f \in C^n(G, A);$$

em que

$$\tilde{f}(\sum z_i[x_1, \dots, x_n] = \sum z_i f(x_1, \dots, x_n);$$

$$\tilde{g}(x_1, \dots, x_n) = g([x_1, \dots, x_n]), z_i, x_j \in G.$$

Deste modo obtemos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C^{n-1}(G, A) & \xrightarrow{d^{n-1}} & C^n(G, A) & \xrightarrow{d^n} & C^{n+1}(G, A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & \text{Hom}_G(P_{n-1}, A) & \xrightarrow{d_n^*} & \text{Hom}_G(P_n, A) & \xrightarrow{d_{n+1}^*} & \text{Hom}_G(P_{n+1}, A) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Portanto os dois complexos têm homologias isomorfas,  $H^n(G, A) \cong \ker d^n / \text{Im } d^{n-1}$ .

Denotamos  $\ker d^n$  também por  $Z^n(G, A)$ , e seus elementos são ditos **n-cociclos** de  $G$  com coeficientes em  $A$ . Já os elementos de  $\text{Im } d^{n-1}$  são ditos **n-cobordos** e também são denotados por  $B^n(G, A)$ . Tem-se que

$$B^0(G, A) = \{f \in G : \exists a \in A, f(x) = xa - a\}$$

e que

$$Z^0(G, A) = A^G.$$

**Definição A.105.** Uma *n-cocadeia*  $f$  é dita **normalizada** se  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  sempre que um dos elementos  $x_1, \dots, x_n$  for a identidade de  $G$ . O conjunto de tais elementos é denotado por  $C'^n(G, A)$ . Já o dos *n-cociclos normalizados* é denotado por  $Z'^n(G, A)$  e dos *n-cobordos normalizados*  $B'^n(G, A)$ .

Vale ressaltar que  $C'^n(G, A)$ ,  $Z'^n(G, A)$  e  $B'^n(G, A)$  são subgrupos de  $C^n(G, A)$ ,  $Z^n(G, A)$  e  $B^n(G, A)$ , respectivamente. Ainda,  $B'^n(G, A)$  é um subgrupo de  $Z'^n(G, A)$ . Seja portanto  $H'^n(G, A) = Z'^n(G, A)/B'^n(G, A)$ . Tem-se que  $H'^n(G, A) \cong H^n(G, A)$ .

**Lema A.106.** *Todo cociclo é cohomólogo a um cociclo normalizado.*

**Lema A.107.** *Toda cocadeia normalizada que é também um cobordo é cobordo de uma cocadeia normalizada.*

# Bibliografia

- [1] Donu Arapura. **Algebraic geometry over the complex numbers**. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] Raoul Bott e Loring W Tu. **Differential forms in algebraic topology**. Vol. 82. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] Manfredo Perdigao do Carmo. **Geometría diferencial de curvas y superficies**. Alianza Editorial, 1990.
- [4] Manfredo P Do Carmo. **Differential forms and applications**. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] William Fulton. **Algebraic topology: a first course**. Vol. 153. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] Alexander Grigor'yan et al. «Homologies of path complexes and digraphs». Em: **arXiv preprint arXiv:1207.2834** (2012).
- [7] Alexander Grigor'yan et al. «On the path homology theory of digraphs and Eilenberg-Steenrod axioms». Em: (2016).
- [8] Erwin Kreyszig. **Introductory functional analysis with applications**. Vol. 1. wiley New York, 1989.
- [9] William S Massey. **Algebraic topology: an introduction**. 1987.
- [10] Ori Parzanchevski. «High Dimensional Expanders». Tese de doutoramento. Hebrew University of Jerusalem, 2014.
- [11] Ori Parzanchevski e Ron Rosenthal. «Simplicial complexes: spectrum, homology and random walks». Em: **Random Structures & Algorithms** 50.2 (2017), pp. 225–261.
- [12] Lekh R Vermani. **An elementary approach to homological algebra**. CRC Press, 2003.
- [13] Frank W Warner. **Foundations of differentiable manifolds and Lie groups**. Vol. 94. Springer Science & Business Media, 2013.

## *Bibliografia*

- [14] Andreas Weber. «Analysis of the physical Laplacian and the heat flow on a locally finite graph». Em: **Journal of Mathematical Analysis and Applications** 370.1 (2010), pp. 146–158.
- [15] Yu Zhang. «A martingale approach in the study of percolation clusters on the  $\mathbb{Z}^d$  lattice». Em: **Journal of Theoretical Probability** 14.1 (2001), pp. 165–187.

# Índice

- R-homomorfismo, [113](#)
- R-módulo, [111](#)
- (Di)Grafo aleatório, [107](#)
- (d-1)-passeio aleatório p-preuioso, [94](#)
- Aplicação
  - Biaditiva, [125](#)
  - diferenciável, [13](#), [14](#)
- Aplicação de digrafos, [80](#)
- Aplicação de pares de digrafos, [81](#)
- Aplicações de digrafos homotópicas, [80](#)
- Arestas, [43](#)
- Base, [116](#)
- Bifunctor, [131](#)
- Bordo, [118](#)
- Célula, [92](#)
  - orientada, [93](#)
- Caminho
  - $\partial$ -invariante, [47](#)
  - $\partial$ -invariante regular, [48](#)
  - Escada, [73](#)
  - irregular, [35](#)
  - não-permitido, [43](#)
  - permitido, [43](#)
  - Regular, [35](#)
  - regular, [35](#)
  - Regularizado, [35](#)
  - semi-permitido, [59](#)
- caminho, [32](#)
- Caminho elementar, [32](#)
- Campo
  - vetorial, [3](#)
- Campo vetorial, [15](#)
- Característica de Euler, [49](#)
- Categoria
  - Equivalente, [131](#)
  - Pré-aditiva, [128](#)
- categoria, [127](#)
- Centro da estrela, [63](#)
- Cobra, [62](#)
- Cocadeia, [139](#)
  - Normalizada, [140](#)
- Cociclos, [140](#)
- Cohomologia de caminhos, [55](#)
- Cohomologia de caminhos reduzida, [54](#)
- Cohomologias, [118](#)
- Coimagem, [113](#)
- Cokernel, [113](#)
- Complexo, [118](#)
  - de cadeia regular, [37](#)
  - de cocadeia, [38](#)
  - de cocadeia regular, [42](#)
  - Exato, [118](#)
- Complexo de cadeia do complexo de caminho P, [48](#)
- Complexo de cadeias, [118](#)
- Complexo de caminhos, [43](#)
  - estritamente regular, [51](#)

## Índice

- monótono, 44
- perfeito, 44
- regular, 47
- Complexo de cocadeia, 118
- Complexo deletado, 134, 135
- Complexo Simplicial
  - Uniforme, 92
- Complexo simplicial, 43
- Componente conexa, 57
- Componentes, 94
- Concatenação, 39
- Conexo, 94
- conjunto gerador minimal, 103
- Curva
  - curvas homotópicas, 10
  - diferenciável por partes, 8
- Deficiência, 59
- Derivação, 138
  - Interna, 138
- Desorientação, 98
- Difeomorfismo, 14
- Difeomorfismo local, 14
- Diferencial, 118
- Diferencial exterior, 38, 54
- Digrafo, 44
  - com base, 80
  - digrafo-simplexo, 62
  - estrelado, 63
  - inversamente estrelado, 63
- Digrafo linha, 80
- Digrafo localmente finito, 69
- Dimensão, 92
- Elevação, 73
- Epimorfismo, 113
- Epimorfismo cindido, 120
- Equivalência, 128
- Equivalência natural, 131
- Equivalentes, 128
- Espaço
  - dual, 3
  - projetivo linear, 12
  - tangente, 3, 14
- Estrela, 27
- Estrutura diferenciável, 11
- Face, 93
- Forma, 37
  - k-forma , 4
  - k-forma exterior, 15
  - diferencial de ordem  $k$ , 15
  - diferencial exata, 9
  - diferencial fechada, 9
  - elementar, 38
  - Harmônica, 28, 65
  - harmônica, 72
  - k-forma exterior, 4
  - regular, 40
  - representação, 15
- Forma de Dirac, 93
- Formas
  - p-formas, 70
- Formas  $d$ -invariantes, 54
- Formas não permitidas, 53
- Fuctores naturalmente equivalentes, 131
- Functor
  - Contravariante, 129
  - Covariante, 129
- functor
  - Aditivo, 129
  - Exato, 131
  - Exato à direita, 131
  - Exato à esquerda, 131
  - functor derivado à direita, 136
  - functor derivado à esquerda, 136
- Grafo, 44
- Grau, 92
- Grupo cohomológico, 137

- Grupo Homológico, 46
- Grupo homológico, 137
- Grupo homológico de caminhos, 47
- Grupo homológico de reduzidos de caminhos, 47
- Grupos homológicos de caminhos relativos, 82
- Homologia, 46, 121
- Homologias de caminhos, 46
- Homologias de caminhos do digrafo  $G$ , 49
- Homologias de caminhos reduzidas, 46
- homomorfismo de módulos, 113
- Homomorfismo induzido, 81
- Homotopia, 10, 81
- Homotopia livre, 10
- Homotopicamente equivalentes, 81
- Imagem, 113
- Isomorfismo, 113, 128
- Isomorfos, 128
- Junção, 34
- Kernel, 113
- Lacuna espectral, 98
- Lacuna espectral., 92
- Lacuna essencial, 98
- Laplaciano, 28, 65, 71
  - Completo, 97
  - Inferior, 97
  - Superior, 97
- Lema da cobra, 121
- Lema de Poincaré, 21
  - em digrafos, 63
  - para 1-formas, 9
- Lema dos cinco, 122
- Lema dos quatro, 122
- Localmente exata, 9
- loop, 51
- Módulo
  - Cíclico, 115
  - Finitamente gerado, 115
  - Gerado, 115
  - Injetivo, 133
  - Livre, 116
  - Plano, 133
  - Projetivo, 132
  - Trivial, 136
- Módulo quociente, 113
- Módulos
  - Isomorfos, 113
- Monomorfismo, 113
- Monomorfismo cindido, 120
- Morfismo
  - Inverso, 128
- Mudança de parâmetros, 8
- núcleo, 113
- Objeto Zero, 128
- Operador
  - bordo, 32
- Operador cunha, 4
- Operador de Green, 66, 87
- Operador evolução, 95
- Orientação, 16
- Orientação de célula, 93
- Par de digrafos, 81
- Percolação, 107
- Pojção harmônica, 87
- Ponte, 59
- Processo
  - Esperança normalizada, 95
- Processo esperança, 94
- Produto
  - exterior (cunha), 5
- Produto cartesiano, 74

## Índice

- Produto direto, 114
- Produto Tensorial, 125
- Propriedade universal da soma direta, 115
- Pullback, 6
  
- Resolução de Bar, 139
- Resolução injetiva, 135
- Resolução projetiva, 134
  
- Semi-aresta, 59
- Sequência exata, 118
  - cindida, 119
  - curta, 118
- Simplesmente conexo, 10
- Simplexo, 44
- Soma direta (interna), 114
- Soma direta externa, 114
- Somando direto, 114
- Subdigrafo, 81
  - induzido, 81
- Submódulo, 112
- Subvariedade, 15
  
- Teorema de Stokes, 18
- Transformação natural, 130
  
- Vértices, 43
- Valência, 69
- Variedade
  - orientável, 16
- Variedade diferenciável, 11
- Vetor tangente, 14