Universidade Federal do ABC

Diego Sousa de Oliveira

Teoria Espectral do Laplaciano em Grupos de Lie Compactos

Santo André, 2019

Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Diego Sousa de Oliveira

Teoria Espectral do Laplaciano em Grupos de Lie Compactos

Orientador: Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre em Matemática

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Diego Sousa de Oliveira, e orientada pelo Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos.

Santo André, 2019

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Oliveira, Diego Sousa de
Teoria espectral do laplaciano em grupos de Lie compactos / Diego Sousa de Oliveira. — 2019.

96 fls.

Orientador: Marcus Antonio Mendonça Marrocos

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2019.

1. Grupo de Lie. 2. Laplaciano. 3. Representações. 4. Teoria Espectral. I. Marrocos, Marcus Antonio Mendonça. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) orientador(a).

Santo André/SP 18 de Outubro de 2019

Assinatura do(a) autor(a): ______________________

Assinatura do(a) orientador(a): ______________________

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, DIEGO SOUSA DE OLIVEIRA realizada em 23 de Agosto 2019:

Prof.(a) Dr.(a) DRAGOMIR MITKOV TSONEV
UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) FRANCISCO JOSE GOZZI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) RODRIGO FRESNEDA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Membro Suplente

Marcus Marrocos

Prof.(a) Dr.(a) MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

***** Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação aos meus familiares, amigos, colegas estudantes, professores, à equipe da UFABC de modo geral e à toda comunidade matemática e científica, a qual eu desejo que faça proveito do conteúdo fornecido por este trabalho.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Deixo então menção e agradecimento à CAPES, a qual incentiva a pesquisa de modo geral e o auxílio à formação acadêmica de estudantes e pesquisadores.

Agradeço a todos os que me ajudaram na elaboração deste trabalho. Em especial, pelos auxílios, reuniões, sugestões e desenvolvimento do projeto, ao professor Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos. Agradeço também à equipe em geral da Universidade Federal do ABC, a qual possibilitou um curso de qualidade e bem estruturado, além de uma boa infra-estrutura e profissionais dispostos a atender os estudantes da melhor forma, principalmente o corpo docente vinculado à matemática, o qual sempre se manteve prestativo e mantendo uma boa relação com os alunos. Por fim, os familiares, amigos e colegas da pós-graduação, por incentivarem, compartilharem momentos, auxiliarem nas discussões e estarem sempre presentes ao longo do processo.

Ao conjunto de regras é errônea a atribuição barreira
Reflita sobre um papiro sem matéria-prima de escrita
Um pulso desprovido de qualquer domínio sobre este papiro
Viu só? Como é bom ter um objeto que se transforma
E de quebra um bônus chamado metalinguagem
Com uma "subcoisa" metalinguística em forma de arte.
— Diego Sousa de Oliveira

RESUMO

Esta dissertação investiga a teoria espectral do operador de Laplace em grupos de Lie compactos com métricas invariantes à esquerda. São apresentados critérios com a finalidade de determinar quando os autoespaços são representações irredutíveis.

Palavras-chave: Laplaciano, Grupo de Lie, Representações, Teoria Espectral.

ABSTRACT

This thesis reviews the spectral theory of the Laplace operator on compact Lie groups with left-invariant metrics. Criteria are presented in order to determine when the eigenspaces are irreducible representations.

Keywords:Laplacian, Lie Group, Representations, Spectral Theory.

CONTEÚDO

1 INTRODUÇÃO

Um importante operador que age sobre o espaço de funções reais (ou complexas) diferenciáveis $C^\infty(M)$, em uma variedade riemanniana (M,g), é o laplaciano Δ_g (ou operador de Laplace), definido por:

$$\Delta_g f = -div(\nabla f), \quad \forall f \in C^\infty(M),$$

o qual auxilia na descrição de fenômenos como os potenciais elétrico e gravitacional, a propagação de onda, a difusão do calor, o fluxo e a dinâmica de partículas em mecânica quântica.

O estudo espectral do laplaciano (ver [Cha] e [Ros]) se dá por meio da equação de Helmholtz

$$(\Delta_g + \lambda)f = 0, \quad f \in C^\infty(M), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

e permite a extração de informações acerca da variedade considerada, a obtenção de um sistema ortonormal completo de autofunções para o espaço de funções de quadrado integrável $L^2(\Omega)$ sobre domínios limitados Ω, além de outras vertentes como, por exemplo, a captação de simetrias ou o problema isoespectral (quando duas variedades com mesmo espectro de autovalores são isométricas, ver [Arr]).

Sabemos ainda da teoria do estudo espectral para o laplaciano que os autovalores em uma variedade compacta, conexa e sem bordo são não negativos e podem ser dispostos da seguinte forma:

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to +\infty,$$

onde cada λ_i se repete tantas vezes quanto sua multiplicidade (finita). Nesta perspectiva, K. Uhlenbeck publicou um resultado em 1976 [Uhl] afirmando que as métricas, neste tipo de variedade, são genericamente simples (ou seja, os autovalores têm multiplicidade 1). Aqui, o termo "genericamente"significa que esta propriedade vale para a "grande maioria"das métricas no sentido de Baire, ou seja, em um subconjunto residual do conjunto de métricas consideradas. Tal resultado pode ser lido como uma descrição qualitativa que revela que, em geral, espera-se o menor tamanho possível para os autoespaços do laplaciano.

Uma observação pertinente, que embora fuja ao escopo deste trabalho, é que esta mesma problemática é muito mais complicada para variedades não compactas, envolvendo parte contínua do espectro, como na abordagem em [Lan] para o $SL_2(\mathbb{R})$.

É bem conhecido que o laplaciano é invariante por isometrias, isto é, se $h : M \longrightarrow M$ é uma isometria então vale:

$$\Delta_g f \circ h(p) = \Delta_g f(h(p)), \quad \forall f \in C^\infty(M), \quad \forall p \in M.$$

Consequentemente, se f é autofunção de um autovalor λ de Δ, então $f \circ h$ também é autofunção de λ. Portanto, em variedades riemannianas com grande presença de simetrias, não se pode esperar que o espectro seja simples, visto que as isometrias associadas podem produzir novas autofunções. Portanto, os autoespaços de Δ_g são representações do grupo de isometrias de (M, g).

Um caso em que há abundância de simetrias é quando consideramos métricas invariantes à esquerda em um grupo de Lie conexo e compacto. Mesmo que não possamos esperar espectro simples, podemos nos perguntar se, genericamente, os autoespaços são representações irredutíveis, ou seja, não produz degenerescências além do que as prescritas por tais simetrias. Nesta perspectiva, D. Schueth [Sch] (2017), estabeleceu um critério puramente algébrico para quando o laplaciano em G admite espectro G-simples, ou seja, os autoespaços são representações irredutíveis da representação regular à esquerda, a qual é responsável por organizar as simetrias advindas das translações à esquerda. Essencialmente, o critério foi aplicado para o grupo $SU(2)$.

O enfoque do presente trabalho é principalmente o entendimento deste critério e dos conceitos envolvidos. Apresentamos preliminares em grupos de Lie e teoria de representações para estudá-lo. Como contribuição segue o fato deste se tornar uma literatura mais acessível dos resultados obtidos no artigo [Sch], com o preenchimento de detalhes e organização do conteúdo, adicionando e filtrando elementos básicos, explicações e comentários.

2 GRUPOS DE LIE

O presente capítulo contém resultados básicos da teoria de grupos de Lie, podendo ser explorados também em [BD], [Ha], [War], [Lee] e [Mch]. O conteúdo servirá de preliminar para o entendimento do capítulo 4. Em especial, a construção da álgebra de Lie a partir dos campos invariantes à esquerda, os quais são importantes para análise do laplaciano em métricas invariantes à esquerda. Recomenda-se o conhecimento prévio da teoria elementar de variedades diferenciáveis (ver apêndice 2).

Convencionaremos o termo *diferenciável* como sendo *suave* ou *classe* C^∞.

Definição. *Seja* $(G, .)$ *um grupo tal que* G *é também uma variedade diferenciável, com as aplicações* $G \times G \ni (x, y) \mapsto x.y \in G$ *e* $G \ni x \mapsto x^{-1} \in G$ *diferenciáveis. Então* G *é dito um* grupo de Lie*.*

Um grupo de Lie é um objeto que relaciona estruturas algébrica e diferencial simultaneamente e o intermédio entre elas se dá pela exigência da diferenciabilidade da operação e da inversão do grupo.

Definição. *Seja* G *um grupo de Lie. Dado* $x \in G$ *considere as aplicações* $l_x : G \longrightarrow G$ *e* $r_x : G \longrightarrow G$ *definidas por* $l_x(y) = xy$ *e* $r_x(y) = yx$*. As aplicações* l_x *e* r_x *são chamadas* translações à esquerda *e* à direita*, respectivamente.*

Trabalharemos principalmente com as translações à esquerda, contudo os resultados para as translações à direita são análogos. Note que $(l_x)^{-1} = l_{x^{-1}}$ e $l_{xy} = l_x \circ l_y$, $\forall x, y \in G$.

Proposição. *O fibrado tangente* TG *é difeomorfo a* $G \times T_eG$*.*

Demonstração. A aplicação $\phi : G \times T_eG \longrightarrow TG$, $\phi(x, v) = dl_x(e).(v)$, é diferenciável com inversa diferenciável dada por $\phi^{-1}(v_x) = (x\, ,\, dl_{x^{-1}}(x).(v_x))$, $\forall v_x \in T_xG$, $\forall x \in G$. □

O resultado acima diz simplesmente que todo grupo de Lie G é paralelizável ou que TG é um fibrado trivial (consultar [Lee] e [BD]).

Definição. *Seja X campo diferenciável de G. Se X satisfaz $X \circ l_x(y) = dl_x(y).X(y)$, $\forall x, y \in G$, então X é denominado um* campo invariante à esquerda*. O conjunto dos campos invariantes à esquerda de G é denotado por LG.*

Observação. Se X é um campo invariante à esquerda, então vale a comutatividade do diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "l_x"] \arrow[d, "X"'] & G \arrow[d, "X"] \\ TG \arrow[r, "dl_x"] & TG \end{tikzcd}$$

Observação. LG tem estrutura natural de espaço vetorial e o colchete entre elementos arbitrários $X, Y \in LG$ também pertence a LG, pois:

$$\begin{aligned} [X,Y] \circ l_x(y)(f) &= [X,Y](xy)(f) \\ &= X(xy)(Y(f)) - Y(xy)(X(f)) \\ &= dl_x(y)(\ X(y))(Y(f)) - dl_x(y)(Y(y)\ )(X(f)) \\ &= dl_x(y)(\ X(y)(Y(f)) - Y(y)(X(f))\ ) \\ &= dl_x(y)[X,Y](y)(f), \quad \forall x, y \in G, \forall f \in C^\infty(G). \end{aligned}$$

Definição. *O espaço vetorial LG, munido do produto $[.,.]$ (colchete de Lie), é chamado* álgebra de Lie de G *e é denotado também por $\mathfrak{g}$.*

Proposição. *Seja $X : G \longrightarrow TG$ um campo invariante à esquerda. Então vale a relação $X(x) = dl_x(e).v$, $\forall x \in G$, onde $v = X(e) \in T_eG$. Reciprocamente, dado $v \in T_eG$ a aplicação $x \mapsto dl_x(e).v$ determina um campo vetorial invariante à esquerda denotado por X_v.*

Demonstração. Dados $x, y \in G$ vale $X \circ l_x(y) = dl_x(y) \circ X(y)$, ou seja, $X(x.y) = dl_x(y).(X(y))$. Tomando $y = e$ temos $X(x) = dl_x(e).X(e)$, conforme desejado. Reciprocamente, considere a aplicação X_v e sejam $x, y \in G$ arbitrários. Por um lado temos $X_v \circ l_x(y) = X_v(xy)$. Por outro lado, usando a definição de X_v, junto à propriedade $l_{xy} = l_x \circ l_y$ e a regra da cadeia, então obtemos:

$$X_v(xy) = dl_{xy}(e).v = d(l_x \circ l_y)(e).v = dl_x(y) \circ dl_y(e).v = dl_x(y).(X_v(y)) = dl_x(y) \circ X_v(y)$$

Com isto, concluímos $X_v \circ l_x(y) = dl_x(y) \circ X_v(y), \forall x, y \in G$, ou seja, X_v é campo vetorial invariante à esquerda. $\square$

Este resultado nos diz que todo campo vetorial invariante à esquerda está completamente caracterizado por um vetor de T_eG, podendo serem vistos como uma noção de translação deste vetor no fibrado TG, a qual se dá pela diferencial das translações à esquerda de G.

Observação. Vale a igualdade $LG = \{X_v | v \in T_eG\}$. De fato, dado $X \in LG$ temos $X = X_v$ para $v = X(e)$ e, reciprocamente, dado $v \in T_eG$ temos $X_v \in LG$. Embora não seja padrão a notação X_v, ela nos será útil para transmitir a ideia de "o campo invariante à esquerda associado a $v \in T_eG$". Além disso, o colchete em LG induz um colchete em T_eG dado por $[v, w] := [X_v, X_w](e)$, $\forall v, w \in T_eG$, fornecendo também uma estrutura de álgebra de Lie para T_eG. Para estudo das construções de álgebras de Lie, noção de morfismos e propriedades do ponto de vista algébrico puro, sugerimos uma consulta a [Mar].

Corolário 2.1. *LG e T_eG são álgebras de Lie isomorfas.*

Demonstração. É de simples verificação, a partir da observação anterior, que a aplicação $T_eG \ni v \mapsto X_v \in LG$ determina um isomorfismo de álgebras de Lie (ou seja, um isomorfismo entre espaços vetoriais que preserva a operação do colchete). $\square$

O resultado acima permite enxergarmos a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G como LG ou T_eG.

Proposição 2.2. *Se $f : G \longrightarrow H$ é homomorfismo de grupos de Lie (isto é, um homomorfismo de grupos diferenciável), então $Lf : LG \longrightarrow LH$ dada por $Lf(X_v) = X_{df(e)(v)}$ determina um homomorfismo entre as álgebras de Lie LG e LH.*

Demonstração. Sejam $Y, Z \in LG$. Temos $Y = X_{Y(e)}$ e $Z = X_{Z(e)}$. Notamos a igualdade de vetores tangentes em T_eH dada por $(df(e).(Z(e)))(X_{df(e)(Y(e))}(.)) = (df(e).(Z(e)(X_{Y(e)})))(.)$ (esta relação é uma espécie de associatividade). Além disso, esta igualdade é totalmente análoga trocando as posições de Z e Y.

A linearidade de Lf é fácil de verificar. Resta ver que $Lf[Z, Y] = [Lf(Z), Lf(Y)]$ (preservação do colchete de Lie). É suficiente provar que $Lf[Z, Y](e) = [Lf(Z), Lf(Y)](e)$, pois cada campo $W \in LH$ está totalmente caracterizado por $W(e)$.

Por um lado, $Lf[Z, Y](e) = X_{df(e)([Z,Y](e))}(e) = df(e)([Z, Y](e))$. Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} [Lf(Z), Lf(Y)](e) &= [X_{df(e)(Z(e))}, X_{df(e)(Y(e))}](e) \\ &= df(e)(Z(e))(X_{df(e)(Y(e))}) - df(e)(Y(e))(X_{df(e)(Z(e))}) \end{aligned}$$

Usando a propriedade do início desta demonstração em cada parcela, temos:

$$\begin{aligned}[Lf(Z), Lf(Y)](e) &= df(e)[Z(e)(X_{(Y(e))}) - Y(e)(X_{(Z(e))})] \\ &= df(e)[Z(e)(Y) - Y(e)(Z)] \\ &= df(e)([Z, Y](e)) \\ &= Lf[Z, Y](e),\end{aligned}$$

donde segue o homomorfismo de álgebras de Lie. □

Observação. Lf e $df(e)$ são a mesma aplicação, exceto pelo fato de trocarmos os espaços LG e LH por T_eG e T_eH, respectivamente com auxílio do isomorfismo $v \mapsto X_v$, identificado no corolário 2.1. Veremos também, no decorrer do capítulo (proposição 2.6) que, se j é a aplicação de inversão em $(G, .)$ então Lj (ou $dj(e)$) é a aplicação de inversão em $(LG, +)$ dada por $X \mapsto -X$ (ou $v \mapsto -v$).

Proposição. *Seja G um grupo de Lie e α uma curva integral de um campo invariante à esquerda $X \in LG$, então $\alpha_x := l_x \circ \alpha$ também é uma curva integral de X.*

Demonstração. Pela regra da cadeia, $\alpha_x'(t) = (l_x \circ \alpha)'(t) = dl_x(\alpha(t)) \circ d\alpha(t) = dl_x(\alpha(t)).\alpha'(t)$. Como $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$, então $\alpha_x'(t) = dl_x(\alpha(t)).X(\alpha(t))$. Por fim, pela invariância à esquerda de X concluímos que $\alpha_x'(t) = X(l_x(\alpha(t))) = X(\alpha_x(t))$, conforme desejado. □

Proposição 2.3. *O fluxo de um campo $X \in LG$ é global, satisfazendo $\Phi(t, x) = x\alpha^X(t)$ para todos $t \in \mathbb{R}$ e $x \in G$, onde α^X é a curva maximal com condição inicial $\alpha^X(0) = e$.*

Demonstração. Seja $x \in G$ fixado, então $\alpha_x(t) = \Phi(t, x)$ é a única solução maximal de $y' = X(y)$ com condição inicial $y(0) = x$. Por outro lado, $l_x \circ \alpha^X(0) = x\alpha^X(0) = x$ e, pela demonstração da proposição anterior, $(l_x \circ \alpha^X)'(t) = X(l_x \circ \alpha^X(t))$, ou seja, do teorema de existência e unicidade temos que $\alpha_x(t) = l_x \circ \alpha^X(t) = x\alpha^X(t)$. Por fim, pode-se mostrar que o domínio de α^X pode ser estendido por $\pm\varepsilon$, fornecendo a globalidade do fluxo. □

Definição. *Qualquer homomorfismo de grupos de Lie (portanto também há diferenciabilidade) da forma $\alpha : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (G, .)$ é chamado um* grupo a 1-parâmetro.

Proposição 2.4. *Dado α um grupo a 1-parâmetro de G, então a aplicação $X \mapsto \alpha^X$ define uma bijeção canônica entre a álgebra de Lie de G e os grupos a 1-parâmetro .*

Demonstração. Primeiramente é fácil verificar que α^X é um grupo a 1-parâmetro usando as propriedades do fluxo (proposição 2, apêndice de variedades diferenciáveis) e a construção de α^X na proposição 2.3, pois:

$$\alpha^X(s+t) = \Phi_{t+s}(e) = \Phi_t \circ \Phi_s(e) = \Phi_t(\Phi_s(e)) = \Phi_s(e)\Phi_t(e) = \alpha^X(s)\alpha^X(t)$$

A injetividade vem do fato que se $\alpha^X = \alpha^Y$ então os fluxos associados a X e Y coincidem e daí, usando o item (iv) da proposição 2, vemos que X e Y coincidem.

Dado um grupo a 1-parâmetro α então, se definirmos $\Phi(t,x) = x\alpha(t)$, teremos que Φ satisfaz as propriedades de fluxo, sendo que $X(x) := \frac{\partial}{\partial t}|_0 \Phi(t,x) = dl_x(e)(\alpha'(0))$ determina o campo invariante à esquerda $X_{\alpha'(0)}$ que possui como fluxo correspondente a aplicação Φ. Por fim, $\alpha^X(t) = \alpha_e(t) = \Phi(t,e) = e\alpha(t) = \alpha(t)$, com $\alpha^X(0) = \alpha(0) = e$. Logo, a aplicação $X \mapsto \alpha^X$ é também sobrejetiva. $\square$

Exemplo (1). Se V é espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimensão n, então V coincide com $T_eV \simeq LV$ e cada aplicação α^v, dada por $\alpha^v(t) = tv$, $\forall t \in \mathbb{R}$, determina o grupos a 1-parâmetro associado a cada $v \in V$. Vamos achar o campo invariante à esquerda X associado a v, ou seja, tal que $\alpha^X = \alpha^v$. A translação l_x é dada por $l_x(w) = x + w$, $\forall w \in V$, logo:

$$X(x) = X_{\alpha^v{}'(0)}(x) = dl_x(e).\alpha^v{}'(0) = id(\alpha^v{}'(0)) = id(v) = v,$$

ou seja, X é o campo constante igual a v e, através desta identificação, escrevemos $LV = V$, a álgebra de Lie do grupo aditivo V.

Exemplo (2). Considere V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimensão n. Se $GL(V) = AutV = \{T : V \longrightarrow V\ ;\ T \text{ é isomorfismo linear}\}$ então $GL(V)$ é aberto no espaço vetorial $End(V) = \{T : V \longrightarrow V\ ;\ T \text{ é linear}\}$ e, portanto, sua álgebra de Lie é dada por $\mathfrak{gl}(V) = End(V)$. Como espaços vetoriais de dimensão finita são completamente caracterizados por sua dimensão e os operadores lineares por matrizes numa dada base fixada, então podemos fazer as seguintes identificações: $GL(n,\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \,|\, \det A \neq 0\}$ e $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$. O grupo de Lie $GL(V)$ (ou $GL(n,\mathbb{K})$) é chamado *grupo linear geral* e trata-se de um exemplo importante por conter os chamados *grupos clássicos* ou *lineares*, os quais serão explorados ao longo do texto.

Definição. *A aplicação* $ad : LG \longrightarrow LAut(LG) \simeq End(LG)$ *dado por* $ad(X)(.) = [X,.]$ *é dita* adjunta de $\mathfrak{g} = LG$.

Definição. *A aplicação $Ad : G \longrightarrow Aut(LG)$ dada por $Ad(y) = L(c(y))$, onde $c(y) : G \longrightarrow G$ é o automorfismo interno definido por $c(y)(x) = yxy^{-1}$. Ad é dita* adjunta de G.

Proposição. *Seja G grupo de Lie. Então $ad(X)(Y) = \frac{\partial}{\partial s}|_0 \frac{\partial}{\partial t}|_0 a(s,t)$, onde $a(.,.)$ é a função dada por $a(s,t) = c(\alpha^X(s))(\alpha^Y(t)) = \alpha^X(s)\alpha^Y(t)\alpha^X(-s) = Ad(\alpha^X(s))(\alpha^Y(t))$.*

Demonstração. As contas desta demonstração são extensas, porém nada mais é do que um exercício de calcular a derivada de segunda ordem do membro direito da igualdade. A prova completa pode ser encontrada em [BD], capítulo 2, seção 2. □

Observação. É de se esperar deste processo que as representações adjunta do grupo e da álgebra estejam relacionadas de alguma forma. Lembremos que se $f : G \longrightarrow H$ é um homomorfismo de grupos de Lie então $df(e) : T_eG \longrightarrow T_eH$ é homomorfismo de álgebras de Lie identificado também como a aplicação $Lf : LG \longrightarrow LH$. Este é o raciocínio que nos leva à relação $ad = LAd$ (verifique que LAd coincide com a derivada de segunda ordem expressa na proposição anterior).

Proposição 2.5. *Se G é grupo de Lie abeliano então LG é abeliana, ou seja, $[.,.] \equiv 0$.*

Demonstração. Dado $X_v \in LG$, temos $ad(X_v) = LAd(X_v) = X_{dAd(e).v}$. Se $g \in G$ então $Ad(y) = L(c(y))$ e $c(y)(x) = yxy^{-1} = x$ (pois G é comutativo). Logo $c(y) = id$, $\forall y \in G$. Daí a aplicação Ad é constante e vale $L(id) = id_{LG}$ em todo ponto. Com isso, $dAd(e) \equiv 0$, o que implica $X_{dAd(e).v} = X_0$. Como $X_0 = 0$ é o campo vetorial nulo de $LAut(LG)$, concluímos então da primeira igualdade que $ad(X_v) = 0$, para cada $X_v \in LG$, ou seja, $ad(X)(Y) = [X,Y] = 0$ para todos $X, Y \in LG$. Portanto LG é abeliana e só tem a estrutura de espaço vetorial visto que $[.,.] \equiv 0$. □

Proposição. *Seja $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ um grupo de Lie, então o colchete de Lie é dado por $ad(X)(Y) = [X,Y] = XY - YX$ (comutador de matrizes).*

Demonstração. Temos $a(s,t) = \alpha^X(s)\alpha^Y(t)\alpha^X(-s) = \exp(sX)\exp(tY)\exp(-sX)$. Daí:

$$\begin{aligned} ad(X)(Y) &= \frac{\partial}{\partial s}|_0 \frac{\partial}{\partial t}|_0 a(s,t) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}|_0 \exp(sX) Y \mathbb{I} \exp(-sX) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}|_0 \exp(sX) Y \exp(-sX) \\ &= XY - YX \end{aligned}$$

□

Logo, para grupos lineares (contidos em $GL(V)$) o colchete de Lie tem uma forma bem conhecida, expressa por intermédio do comutador matricial.

Exemplo (3). Toda álgebra de Lie de um grupo abeliano só tem estrutura de espaço vetorial, pois o colchete é identicamente nulo (ver proposição 2.5).

Exemplo (4). Considere os grupos de Lie *ortogonal* e *especial ortogonal*, os quais são definidos por $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = \mathbb{I}\}$ e $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$, respectivamente. Então $\mathfrak{so}(n) := LSO(n)$ é o espaço das matrizes antissimétricas de dimensão n. De fato, se X é antissimétrica então $X = -X^T$. Como as matrizes X e X^T comutam, temos $\alpha^X(s)^T\alpha^X(s) = \exp(sX^T)\exp(sX) = \exp(s(X + X^T)) = \exp(0) = \mathbb{I}$. Além disso, exponenciais de matrizes sempre tem determinante positivo, logo $\alpha^X(s) \in SO(n)$ e α^X é um grupo a 1-parâmetro de $SO(n)$. Reciprocamente, se α^X é um grupo a 1-parâmetro (ou seja, $\alpha^X(t) = \Phi(t, \mathbb{I})$) em $SO(n)$, então $\alpha^X(s)^T\alpha^X(s) = \mathbb{I}$ e, portanto, $\exp(s(X^T + X)) = \mathbb{I}$. Em particular, se tomamos $s = 1$, concluímos que $X + X^T = 0$, ou seja, X é antissimétrica. Conclusão: $X \in \mathfrak{so}(n)$ se, e somente se, X é antissimétrica.

Exemplo (5). Sejam $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid AA^* = \mathbb{I}\}$ e $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$ os grupos de Lie *unitário* e *especial unitário*, respectivamente. Então $\mathfrak{u}(n) := LU(n)$ é o espaço das matrizes anti-hermitianas de dimensão n (o argumento é totalmente análogo ao exemplo anterior).

Exemplo (6). Considere $SL(n) = \{A \in GL(n) \mid \det A = 1\}$ (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), grupo de Lie denominado *especial linear*. Então, $\mathfrak{sl}(n) := LSL(n)$ é o espaço das matrizes de traço nulo. De fato, se X tem traço nulo então $\det \alpha^X(s) = \det \exp(sX) = e^{s\,trX} = e^0 = 1$, logo α^X é grupo a 1-parâmetro em $SL(n)$. Reciprocamente, se α^X é grupo a 1-parâmetro de $SL(n)$, então dado $s \in \mathbb{R}$ não nulo, $\det \alpha^X(s) = \det \exp(sX) = e^{s\,trX} = 1$, o que implica $trX = 0$. Conclusão: $X \in \mathfrak{sl}(n)$ se, e somente se, X tem traço nulo.

Exemplo (7). $\mathfrak{su}(n) := LSU(n)$ é o espaço das matrizes anti-hermitianas de traço nulo (o argumento é totalmente análogo ao exemplo anterior).

Definição. *Dado G um grupo de Lie, definimos* $\exp : LG \longrightarrow G$, $\exp(X) := \alpha^X(1)$, $\forall X \in LG$, *a qual é chamada* aplicação exponencial.

Proposição. *Valem:*

(i) $\exp(tX) = \alpha^X(t)$, $\forall X \in LG$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(ii) Se $X \in LG$, então o fluxo de X satisfaz $\Phi(x, t) = x \exp(tX)$

Demonstração. O item (ii) é consequência imediata de (i) e da proposição 2.3. Para (i), considere $X \in LG$. As curvas $s \mapsto \alpha^X(ts)$ e $s \mapsto \alpha^{tX}(s)$ são grupos a 1-parâmetro cujas derivadas na origem coincidem e valem tX, ou seja, pela correspondência com LG, eles são o mesmo (ver proposição 2.4). Com isso temos que $\exp(tX) = \alpha^{tX}(1) = \alpha^X(t)$. □

Proposição. *A aplicação exponencial é diferenciável e sua diferencial na origem é a identidade (ou seja $d(\exp)(0) = id|_{LG}$) (daí pelo teorema da função inversa* exp *é localmente inversível ao redor da origem).*

Demonstração. Dado $X \in LG$, defina $F_X(t) := \exp(A_0 + tX)$. Então $F_X'(0) = \frac{\partial \exp}{\partial X}(A_0)$. Tomando $A_0 = 0 \in LG$ temos $F_X(t) = \exp(tX) = \alpha^X(t)$, cuja derivada na origem é $\alpha^{X\prime}(0) = X$. Logo a derivada parcial de exp na origem e na direção de X é X. Em particular, tomando $\{X_1, ..., X_n\}$ base de LG concluímos que a jacobiana de exp em $A_0 = 0$ é a identidade, ou seja, $d(\exp)(0) = id|_{LG}$ (lembremos aqui que para $V = LG$ espaço vetorial, o espaço tangente em cada ponto coincide com V).

Diferenciabilidade: primeiramente notamos que $(t, x, X) \mapsto (x\alpha^X(t), X)$ corresponde ao fluxo global do campo diferenciável $G \times LG \ni (x, X) \mapsto (X(x), 0) \in T_gG \times LG$ no fibrado tangente $G \times LG$ de G. Se restringimos este fluxo a $\{1\} \times \{e\} \times LG$, continuamos com a diferenciabilidade. Assim, $X \mapsto (1, e, X) \mapsto (\alpha^X(1), X) \mapsto \alpha^X(1) = \exp(X)$ determina uma composição que é diferenciável, conforme desejado. □

Proposição. *Seja $f : G \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos de Lie. Então vale a comutatividade do seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd} LG \arrow[r, "Lf"] \arrow[d, "\exp"'] & LH \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "f"] & H \end{tikzcd}$$

Demonstração. Relembrando: X_v é o campo em LG tal que $X_v(e) = v$, assim como $Lf(X_v) = X_{df(e).v}$ é o campo em LH tal que $Lf(X_v)(e) = df(e).(v)$. Logo, por um lado, dado $X = X_{X(e)} \in LG$ temos que $\exp(Lf(X)) = \alpha^{X_{df(e).X(e)}}(1)$.

Por outro lado, como f é homomorfismo de grupos de Lie então não é difícil verificar que $f \circ \alpha^X$ é grupo a 1-parâmetro em H tal que $f \circ \alpha^{X\prime}(0) = df(e).\alpha^{X\prime}(0) = df(e).X(e)$, ou seja, está associado ao campo $X_{df(e).X(e)} \in LH$. Com isso, temos $f \circ \alpha^X = \alpha^{X_{df(e).X(e)}}$ e daí $f \circ \exp(X) = f(\alpha^X(1)) = \alpha^{X_{df(e).X(e)}}(1)$. Portanto, vale a comutatividade do diagrama. □

Proposição 2.6. *Velm as seguintes propriedades:*

(i) $\exp(X)^{-1} = \exp(-X), \forall X \in LG$

(ii) Se $inv : G \longrightarrow G$ é a aplicação de inversão $x \mapsto x^{-1}$, então $L(inv) : LG \longrightarrow LG$ é a aplicação $X \mapsto -X$ (equivalentemente $d(inv)(e)$ é a aplicação $T_eG \ni v \mapsto -v \in T_eG$).

Demonstração. (i) Dado $X \in LG$, defina a curva $\beta(t) = \alpha^X(-t)$. Então:

$$\beta'(t) = -\alpha^{X'}(-t) = -X(\alpha^X(-t)) = -X(\beta(t)); \quad \beta(0) = \alpha^X(0) = e$$

Provamos que $\beta = \alpha^{-X}$ e, portanto, vale a identidade $\alpha^{-X}(t) = \alpha^X(-t), \forall t \in \mathbb{R}$. Usando a propriedade $\alpha^X(s+t) = \alpha^X(t)\alpha^X(s)$ obtida na demonstração da proposição 2.4, obtemos que $\alpha^{-X}(t)\alpha^X(t) = \alpha^X(-t)\alpha^X(t) = \alpha^X(0) = e$. Logo, $(\alpha^X(t))^{-1} = \alpha^{-X}(t)$ e, portanto, $\exp(tX)^{-1} = \exp(-tX), \forall t \in \mathbb{R}$.

(ii) Dado $X \in LG$ temos $\alpha^X(t) = \exp(tX)$ é uma a curva passando por e e com vetor tangente $v = X(0)$, em $t = 0$. Por um lado $d(inv)(e).X(0) = \frac{d}{dt} inv \circ \alpha^X(0)$ e, por outro, $inv \circ \alpha^X(t) = \exp(tX)^{-1} = \exp(-tX) = \alpha^{-X}(t)$, a qual derivando em $t = 0$ resulta em $-X(0)$, ou seja, $d(inv)(e).X(0) = -X(0)$, o que termina a prova. $\square$

Os teoremas a seguir possuem demonstrações mais técnicas e são fortes resultados da teoria de grupos de Lie. Eles se encontram presentes em [BD], capítulo 1, seção 3.

Teorema 2.7. *Seja H um subgrupo de um grupo de lie G. Então H é subvariedade (mergulhada) de G se, e somente se, H é fechado em G. (Logo H é um grupo de Lie mergulhado em G se e só se H é fechado em G).*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Assumindo que H é subvariedade de G então H é um subconjunto localmente fechado (dado $h \in H$, existe U aberto contendo h tal que $H \cap U$ é fechado em U). Seja $U \ni e$ aberto com $H \cap U$ fechado em U. Dado $y \in cl(H)$, podemos tomar $x \in yU^{-1} \cap H$ de modo que $y \in xU$. Logo $y \in cl(H) \cap xU$ e, portanto, temos que $x^{-1}y \in cl(H) \cap U = H \cap U$, implicando que $y \in H$, ou seja, provamos que H é fechado.

($\Leftarrow$) Assuma agora que H é subgrupo fechado em G. Já que podemos percorrer o grupo todo por translações, basta provarmos que existe uma vizinhança U de e tal que $H \cap U$ é subvariedade de U. A ideia é acharmos um subespaço W de LG que fará o papel de $L(H \cap U)$ e daí via aplicação exponencial teremos que $H \cap U$ será subvariedade. Considere então um aberto $U \ni e$ tal que possamos escrever a inversa da exponencial localmente $\log : U \longrightarrow U'$. Claro que $\log(e) = 0$. Daí, definindo $\log(H \cap U)$, temos que $0 \in \log(H \cap U)$.

Afirmação 1: Suponha $\log(H \cap U) \ni h_n \to 0$ com $(h_n/|h_n|) \to X \in LG$. Então para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que $\exp(tX) \in H$.

Afirmação 2: Defina $W = \{sX \mid X = lim(h_n/|h_n|); (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \log(H \cap U); s \in \mathbb{R}\}$. Então W é subespaço de LG.

Afirmação 3: $exp(W)$ é vizinhança do neutro e em H.

Pelas considerações feitas, as afirmações completam a demonstração. Resta então prová-las.

Prova de 1: Por hipótese temos $(t/|h_n|).h_n \to tX$ com $|h_n| \to 0$, daí tomamos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência real tal que $a_n.|h_n| \to 0$, logo:

$$H \ni (\exp(h_n))^{a_n} = \exp(a_n h_n) = \exp(a_n|h_n|.(h_n/|h_n|)) \to \exp(tX)$$

Como H é fechado segue que $\exp(tX) \in H$.

Prova de 2: Dados $X, Y \in W$ e $c \in \mathbb{R}$, defina $h(t) = \log(\exp(tX).\exp(tcY))$. Logo valem as convergências $\lim\limits_{t\to 0^+} h(t)/t = X + cY$ e $\lim\limits_{t\to 0^+} h(t)/|h(t)| = (X + cY)/|X + cY|$. Daí $X + cY \in W$.

Prova de 3: Temos que $LG = W \oplus W^{\perp}$. Definamos então $P : W \oplus W^{\perp} \longrightarrow G$ por $(X, Y) \mapsto \exp(X)\exp(Y)$ e suponha que afirmação é falsa. Então podemos tomar $(X_n, Y_n) \to 0$ sequência com $\exp(X_n)\exp(Y_n) \in H$, $Y_n \neq 0$. Além disso, $W^{\perp}$ é subespaço fechado, logo podemos supor, ao tomar uma subsequência, que existe $Y \in W^{\perp}$ tal que $Y_n/|Y_n| \to Y$ e, claramente, $|Y| = 1$, logo $Y \neq 0$. Mas temos que $\exp(X_n)$ e $\exp(X_n)\exp(Y_n)$ são elementos de H, o qual é subgrupo de G, daí $\exp(Y_n) \in H$ e $Y \in W$, absurdo. □

Teorema 2.8. *Seja $f : G \longrightarrow H$ é um homomorfismo (apenas de grupos), com G e H grupos de Lie. Se f é contínua então f é diferenciável sendo, portanto, um homomorfismo de grupos de Lie. Em particular, tomando o isomorfismo de grupos $id : G \longrightarrow G$, concluímos que cada grupo topológico G tem no máximo uma estrutura de grupo de Lie.*

Demonstração. o gráfico de f, dado por G_f, é subgrupo e é fechado com respeito a $G \times H$. Portanto, pelo teorema 2.7, G_f é um subgrupo de Lie, mergulhado, de $G \times H$. Além disso, a projeção em G dada por $P_G : G_f \longrightarrow G$ é um homeomorfismo diferenciável. Como $dP_G(e)$ é inversível temos que P_G é difeomorfismo. Logo, se $P_H : G \times H \longrightarrow H$ é a projeção em H, então $f = P_H \circ P_G^{-1}$ é diferenciável. □

3 REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS DE LIE COMPACTOS

Este capítulo apresenta o conteúdo base da teoria de representações que usaremos no capítulo 4, responsável pela temática central desta dissertação. Servirão de referências e estudos complementares [BD], [HRI], [HRII], [Ha] e [Gua].

G será sempre um grupo de Lie compacto e conexo até o final do capítulo e trabalharemos sempre com representações e espaços vetoriais sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, as quais se relacionam de um certo modo ($\mathbb{H}$ é, na verdade, um anel de divisão, mas não vamos precisar nos preocupar com esse tipo de tecnicismo). Como queremos estudar os autoespaços do laplaciano como representações reais, então o ambiente natural para estudarmos a teoria de representações é sobre os complexos, pois nele ganhamos a propriedade de termos um corpo algebricamente fechado, o que nos fornece várias ferramentas e resultados interessantes e nos permitem migrar para os reais, posteriormente.

A ideia do conceito de representação de uma estrutura algébrica é identificar, através de homomorfismos, as operações, a *priori* abstratas, como operações teoricamente mais conhecidas, como as que são fornecidas nos ambientes de matrizes. Por exemplo, um dos resultados que provaremos é que todo grupo de Lie compacto admite uma representação fiel que, dito de outra forma, significa que tal grupo é, a menos de isomorfismo, um subgrupo de $GL(n;\mathbb{K})$, o qual conhecemos bem e sabemos operar. Analogamente, existem também as representações de álgebras (por exemplo álgebras de Lie, as quais nos permitem vê-las como subálgebras de $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{K})$).

3.1 REPRESENTAÇÕES E G-MÓDULOS

Definição. *Um G-*módulo *é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V munido de uma ação linear do grupo G dada por $\phi : G \times V \longrightarrow V$, $(x, v) \mapsto x.v$ e é denotado por (V, ϕ) ou simplesmente V, quando não houver ambiguidades.*

Definição. *Uma representação de G é um $\mathbb{K}-$espaço vetorial V munido de um homomorfismo de grupos contínuo $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ e é denotada por (V, ρ) ou simplesmente V, quando não houver ambiguidades.*

Observação. V é um G-módulo se, e somente se, V é uma representação de G. De fato, podemos construir a ação contínua $(x, v) \mapsto \rho(x).v$ a partir da representação (V, ρ) e, reciprocamente, temos o homomorfismo contínuo ρ dado por $\rho(x).v = x.v$, para todos $x \in G$ e $v \in V$, a partir do G-módulo (V, ϕ). Em outras palavras, as duas definições acima são equivalentes. Por questão de preferência, trabalharemos mais com a perspectiva de G-módulos. Outro ponto a se notar é que, na verdade, a exigência da continuidade implica em suavidade, em decorrência do teorema 2.8.

Definição. *(V, ρ) é dita representação* fiel *se ρ for injetiva.*

Observação. Se (V, ρ) é fiel então $G \simeq \rho(G) \subset GL(V)$, ou seja, G pode ser visto como um subgrupo de matrizes.

Definição. *Seja $f : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear entre G-módulos que satisfaz a propriedade $f(x.v) = x.f(v)$, $\forall x \in G$, $\forall v \in V$. Então f é denominada um* morfismo de G-módulos *ou* aplicação linear G-equivariante. *Se, além disso, f for bijetiva, então f é dita um isomorfismo de G-módulos e, neste caso, dizemos que V e W são* isomorfas, *ou seja, $V \simeq W$. O conjunto dos morfismos de V em W é denotado por $Hom_G(V, W)$.*

Definição. *As seguintes representações sobre G são definidas:*

(i) Representação trivial*: (V, ρ) sobre G com $\rho(x) = id|_V$, $\forall x \in G$.*

(ii) Representação matricial*: considere (V, ρ) uma representação n-dimensional de G e fixe uma base β em V. Se para cada $x \in G$, denotamos $A(x)$ como sendo a matriz de $\rho(x)$ na base β, então $A : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$, $x \mapsto A(x)$ determina a representação V na base β do seguinte modo: $A(x).v := A(x)[v]$, onde $[v]$ é o vetor coluna que representa v na base β.*

(iii) Representação dual*: considere V um G-módulos e defina a ação em V^* dada por $(x.\eta)(v) = \eta(x^{-1}.v)$, $\forall \eta \in V^*, \forall x \in G, \forall v \in V$, então dizemos que V^* é a* representação dual *de V.*

(iv) Representação conjugada*: consideramos o espaço $\overline{V}$ que herda a estrutura da representação V e altera a multiplicação por escalar que passa a ser dada por $\alpha \odot v := \overline{\alpha}.v$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v \in V$ (note que no caso real a conjugação não interfere em nada).*

Observação 3.1. Se V é um G-módulo complexo então $\overline{V} \simeq V^*$

Demonstração. Considere $\{e_k\}_{k=1}^n$ base de V com base dual $\{e_k^*\}_{k=1}^n$. Construímos então a aplicação $T : V^* \longrightarrow \overline{V}$ via regra: $T(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k^*) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} e_k$. É de simples verificação que T determina um isomorfismo linear e equivariante. □

Definição. *Um subespaço vetorial W de um G-módulo (V, ϕ) é dito um G-*submódulo de V *(ou* sub-representação de V*) se ele for invariante pela ação de ϕ.*

Definição. *Se V é um G-módulo tal que $V \neq \{0\}$ e admitindo $\{0\}$ e V como seus únicos G-submódulos, então V é dito* simples *ou* irredutível. *Denotaremos o conjunto das classes de isomorfismos de G-módulos irredutíveis sobre $\mathbb{K}$ por $Irr(G, \mathbb{K})$.*

Definição. *Seja V um G-módulo real (respectivamente complexo) com produto interno real (respectivamente hermitiano) $\langle ., . \rangle$ que satisfaz $\langle x.u, x.v \rangle = \langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in V$, $\forall x \in G$. Neste caso, dizemos que $\langle ., . \rangle$ é G-*equivariante *e V é dito uma* representação ortogonal *(respectivamente* unitária*) de G ou um G-*módulo ortogonal *(respectivamente* unitário*).*

Introduziremos a *medida de Haar*, a qual poderíamos gastar mais uma seção provando sua existência e propriedades, mas apenas enunciaremos os principais fatos presentes em [BD] (capítulo 1, seção 5) e [HRI] (capítulo 4), que nos serão úteis.

1. A medida de Haar $\int_G (.)dh$ em G satisfaz $\int_G 1dh = 1$.

2. Fixados $v, w \in V$ temos, por linearidade da integral, $\langle v, w \rangle = \int_G \langle v, w \rangle dh$ e a equação $(\langle y, w \rangle = \int_G \langle v, w \rangle dh,\ \forall w \in W)$ tem solução única $y = v$, a qual também será denotada por $y = \int vdh$.

3. Usando a ideia do item anterior a equação $(\langle y, w \rangle = \int_G \langle h.v, w \rangle dh,\ \forall w \in W)$ tem solução única denotada por $y = \int h.v\, dh$.

4. Vale a regra $x. \int h.v\, dh = \int (xh).v\, dh = \int h.v\, dh$ (invariância à esquerda).

5. Considere $\tilde{V} = End(V)$ um G-módulo e $f \in \tilde{V}$. Então:

$$\int_G Tr(f)dh = Tr(f) \int_G 1dh = Tr(f) = Tr(\int fdh)$$

   Essa igualdade revela uma espécie de comutatividade entre o traço e a integral.

6. Seja $V^G := \{v \in V \mid x.v = v,\ \forall x \in G\}$, então a aplicação $p : V \longrightarrow V^G$ definida por $p(v) = \int h.v\, dh$ é a projeção de V em V^G (p é linear, $p^2 = p$ e $im(p) = V^G$).

Observação 3.2. Cada G-módulo real (complexo) V de um grupo de Lie compacto G admite um produto interno real (hermitiano) G-invariante e, portanto, pode ser tomado ortogonal (unitário).

Demonstração. Tomamos $\langle .,. \rangle$ qualquer e construímos $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ do seguinte modo:

$$\langle\langle v, u \rangle\rangle := \int_G \langle h.v, h.u \rangle dh,\ \forall v, u \in V,$$

onde $\int_G$ é a medida de Haar em G, cujas propriedades nos permitem concluir que $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ é G-invariante. □

Proposição. *Seja U um G-submódulo de V, com* $\dim_{\mathbb{K}} V < +\infty$ *($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Então existe um G-submódulo U' de V tal que $V = U \oplus U'$.*

Demonstração. Pela observação 3.2 podemos tomar $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ G-equivariante sobre V. Daí basta notar que fazendo $U' = U^{\perp}$, o complemento ortogonal de U em relação a este produto interno, obtemos o resultado. □

Observação. Na proposição acima, como V tem dimensão finita, podemos repetir esse resultado para U e U' e seguindo esse processo um número finito de vezes concluímos que V pode ser expresso como soma direta de submódulos irredutíveis da forma $V = \bigoplus_j U_j$ com U_j irredutível, a chamada *decomposição irredutível*. Neste caso, dizemos que V é *semi-simples*.

Acabamos de construir a noção de decomposição de uma representação. No final das contas, V pode ser escrito em termos de representações "menores", as chamadas irredutíveis, as quais não são decomponíveis e formam as componentes elementares da teoria de representações, similar ao papel desempenhado pelos números primos na decomposição fornecida pelo *teorema fundamental da aritmética* (ou mais geralmente decomposição de *domínios de fatoração única*).

3.2 COMPONENTES ISOTÍPICAS

Comentamos há pouco a analogia entre a decomposição de uma representação V em sub-representações irredutíveis com a decomposição em números primos do teorema fundamental da aritmética. O objetivo desta seção é organizarmos melhor esse tipo de decomposição. Por exemplo, dado um inteiro $n \geq 2$, podemos garantir que existem primos $q_1, ..., q_m$ tais que $n = \prod_{k=1}^{m} q_k$ sem exigir que os q_k's sejam distintos, ou então podemos encontrar $p_1, ..., p_l$ dois a dois distintos e inteiros $m_1, .., m_l$ tais que $n = \prod_{k=1}^{l} p_k^{m_k}$.

A noção de componente isotípica vem justamente da organização fornecida por este último formato. Na nossa analogia, os G-submódulos irredutíveis V_k dois a dois não isomorfos de V desempenharão o papel dos primos distintos p_k que aparecem em n, sendo que o número m_k será a quantidade de vezes que V_k se repete na decomposição de V, assim como o tanto de vezes que p_k se repete em n.

Nessa seção considere Ω um conjunto não vazio e $(M, +)$ um grupo abeliano.

Definição. *M é dito um Ω-módulo se para todo $\alpha \in \Omega$ existe um endomorfismo de grupos $T_\alpha : M \longrightarrow M$ (chamado ação de α).* Notação: $\alpha.x := T_\alpha(x)$.

Observação. A partir desta notação e identificações podemos definir de maneira completamente análoga e natural os conceitos de submódulos, Ω-homomorfismo (equivariante/morfismo de módulos) e submódulos simples/irredutíveis, como na seção anterior.

Definição. *Considere M_j como sendo Ω-módulos para $j \in J$. Podemos construir $M = \bigoplus_{j \in J} Mj$ no cartesiano dos M_j's com ação do módulo M, coordenada a coordenada, dada pela identidade: $\alpha.(x_j)_{j \in J} = (\alpha.x_j)_{j \in J}$. Quando um módulo M é uma soma direta desta forma com todos os M_j's simples, dizemos que M é* semi-simples.

Teorema. *Sejam $M = \sum_{j \in J} N_j$ (soma não necessariamente direta) com N_j simples, $\forall j \in J$ e considere também E um submódulo próprio qualquer de M. Então $M = E \oplus F$ para algum submódulo da forma $F = \bigoplus_{j \in I} N_j$ com $I \subset J$. Além disso, existe $I' \subset J$ com $I \cap I' = \varnothing$ tal que $E = \bigoplus_{j \in I'} N_j$. Em particular, todo submódulo de M é semi-simples.*

Demonstração. Dado $K \subset J$ defina $N(K) := \sum_{j \in K} N_j$ e $P_E = \{K \subset J \mid N(K)$ é soma direta e $N(K) \cap E = \{0\}\}$. Temos que $P_E \neq \varnothing$, pois $E \neq M$, assim existe N_i simples com $N_i \nsubseteq E$ e, portanto, satisfazendo $N_i \cap E = \{0\}$. Além disso, o conjunto P_E é parcialmente ordenado pela inclusão, sendo que J é limitante superior por construção. Logo pelo Lema de Zorn, P_E admite elemento maximal I. Daí, basta tomarmos $F = N(I)$ e mostrarmos que

$M = E \oplus F$. Se ocorresse $M \neq E \oplus F$, poderíamos tomar N_k com $N_k \not\subseteq E \oplus F$. Como N_k é simples então teríamos $N_k \cap E = N_k \cap F = \{0\}$, logo o conjunto $\tilde{I} = I \cup \{k\}$ contradiria a maximalidade de I. A obtenção de I' é feita da mesma forma que o processo anterior partindo deste F obtido ao invés de E ao trocarmos P_E por P_F.

Note que mesmo para o submódulo $E = M$ podemos adaptar a demonstração para o conjunto $P_M = \{K \subset J \,|N(K)$ é soma direta$\}$ e obter que M também é semi-simples. □

Definição. *Seja S um módulo simples. M é dito um módulo* S-isotípico *se* $M = \bigoplus_{j \in J} M_j$ *com M_j isomorfo a S, $\forall j \in J$. Além disso, se M é semi-simples, consideramos $M(S)$ o submódulo formado pela soma de todos os submódulos de M isomorfos a S. Diz-se que $M(S)$ é a* componente S-isotípica *de M.*

Observação. Se M é S-isotípico, então segue do teorema anterior que todo submódulo de M também é S-isotípico.

Teorema. *Sejam M semi-simples e S simples. Então $M(S)$ é S-isotípico e todo submódulo de M que é S-isotípico é submódulo de $M(S)$. Se $N \subset M$ é submódulo então $N(S) = N \cap M(S)$. Por fim, vale a decomposição $M = \bigoplus_{S \in \mathcal{A}} M(S)$ com $\mathcal{A}$ englobando um representante de cada classe de isomorfismos dos submódulos simples de M, ou seja, $\mathcal{A}$ só possui submódulos simples dois a dois não isomorfos e todo submódulo simples de M é isomorfo a um único elemento de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. $M(S) = \sum N_j$ com $N_j \simeq S$ simples. Pelo teorema anterior, conseguimos expressar $M(S)$ como soma direta, logo $M(S)$ é S-isotípico e contém todo submódulo S-isotípico por construção.

Para $N(S) \subset N$ temos que $N(S)$ é S-isotípico e, portanto, $N(S) \subset M(S)$. Logo $N(S) \subset N \cap M(S)$. Reciprocamente $M(S) \cap N$ é um submódulo de $M(S)$, daí como submódulos de módulos S-isotípicos é S-isotípico, segue que $M(S) \cap N$ é S-isotípico contido em N e, portanto, $M(S) \cap N \subset N(S)$.

Por fim a decomposição é obtida expressando o módulo semi-simples M como somando de todos os seus submódulos simples e identificando neste os submódulos simples isomorfos. A soma fica direta pois se S e S' são elementos distintos em $\mathcal{A}$ e definimos $U := M(S) \cap M(S')$ supondo que $U \neq \{0\}$, então U é S-isotípico e S′-isotípico por ser submódulo tanto de $M(S)$ e $M(S')$, mas isto viola a definição elaborada para módulos isotípicos. Logo a única opção é fazer $U = \{0\}$, completando a prova. □

Voltando para o nosso contexto de representações de grupos de Lie compactos, podemos trazer estes resultados atribuindo $M = V$ e $\Omega = G \cup \mathbb{K}$ (ação do grupo de lie e ação da multiplicação por escalar do espaço vetorial). Um dos objetivos ao longo do capítulo é justamente obter uma forma de identificar as componentes isotípicas de um G-módulo V.

3.3 REPRESENTAÇÕES COMPLEXAS

Introduziremos a seguir o *Lema de Schur*, um resultado fundamental na teoria de representações, mas que só vale em geral sobre $\mathbb{C}$. Atente para a a necessidade de garantir a existência de autovetor na demonstração a seguir. Ou seja, neste ponto estamos usando a propriedade de $\mathbb{C}$ ser um corpo algebricamente fechado. Veremos que o Lema de Schur é bastante aplicado ao longo da teoria e a ideia é aproveitar esses resultados acerca de representações complexas para depois migrarmos para $\mathbb{K}$-representações através do processo de extensão e restrição de escalares. Inclusive, no capítulo 4, olharemos para os autoespaços reais do laplaciano como representações e será importante incorporarmos esse maquinário de representações complexas e depois migrarmos para as reais.

Veremos ainda que as representações sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$ possuem certas correspondências e, no final, todas poderão ser descritas em termos das complexas.

Nesta seção, convencionaremos todos os G-módulos sobre $\mathbb{C}$ e de dimensão finita.

Lema 3.3 (Schur)**.** *Considere V e W representações irredutíveis de G. Então:*

(i) Se $f : V \longrightarrow W$ é um morfismo então $f \equiv 0$ ou f é um isomorfismo.

(ii) Se $f : V \longrightarrow V$ é um morfismo então $f = \lambda Id$.

(iii) $\dim Hom_G(V, W) = 1$ *se* $V \simeq W$ *e* $\dim Hom_G(V, W) = 0$ *caso* $V \not\simeq W$

Demonstração. (i) e (ii) são consequências do fato de $\ker V$, $im(f)$ e o autoespaço de um autovalor E_λ serem todos submódulos. No item (i) temos que $\ker V = \{0\}$ (neste caso, $imf \neq \{0\}$, ou seja, $imf = V$, então temos injetividade e sobrejetividade) ou $\ker V = V$ (neste caso $f \equiv 0$). No item (ii) que se λ é autovalor então $E_\lambda \neq \{0\}$ e, portanto, $E_\lambda = V$, o que demonstra $f = \lambda Id$. Por fim, o item (iii) é obtido a partir dos dois anteriores. □

Uma aplicação interessante do Lema de Schur é a seguinte:

Proposição 3.4. *Toda representação irredutível V de um grupo abeliano G tem dimensão* 1.

Demonstração. Dados $x, h \in G$ e $v \in V$ temos:

$$l_x(h.v) = l_x \circ l_h(v) = l_{xh}(v) = l_{hx}(v) = l_h \circ l_x(v) = h.l_x(v)$$

Logo l_x é um morfismo equivariante de V em V e daí pelo lema de Schur 3.3, temos que $l_x = \lambda_x Id$. Como consequência todo subespaço W de V é invariante por cada l_x, o que nos leva a concluir que W é uma sub-representação. Daí, a irredutibilidade da representação V só não é violada caso ela tenha dimensão 1. □

Considere agora $V(W)$ como a componente W-isotípica em V de uma representação irredutível $W \in Irr(G, \mathbb{C})$. O próximo passo será identificar $V(W)$.

Defina $m(W,V) := \dim_{\mathbb{C}} Hom_G(W,V)$ e suponha que a decomposição irredutível de V é dada por $V = \bigoplus_j V_j$ (ou seja, cada V_j é irredutível). É fácil verificar que $Hom_G(W,V) = \bigoplus_j Hom_G(W,V_j)$ (este somando pode ter subespaços nulos, mas por simplificação desconsideramo-nos e daí a soma fica, de fato, direta). Logo, pelo Lema de Schur 3.3, temos que $m(W,V) = \#\{V_j \mid V_j \simeq W\}$.

No viés desta colocação, teremos $m(W,V) \neq 0$ somente quando W for isomorfo a algum submódulo de V. Considere então $\mathcal{A}(V)$ o subconjunto de $Irr(G;\mathbb{C})$ formado pelas classes de isomorfismos dos submódulos irredutíveis W de V.

Podemos definir em $Hom_G(W,V) \otimes W$ a ação $g.(f \otimes w) = f \otimes (g.w)$ e uma aplicação linear da forma $d_W : Hom_G(W,V) \otimes W \longrightarrow V$ dada por $d_W(f \otimes w) = f(w)$. Daí definimos também $d : \bigoplus_{W \in \mathcal{A}(V)} (Hom_G(W,V) \otimes W) \longrightarrow V$ a aplicação construída via regra $d|_W = d_W$.

Observação. Note que, pelos comentários elaborados anteriormente, o espaço $Hom_G(W,V)$, cuja dimensão é $m(W,V)$, serve apenas para contar quantas cópias de W aparecem dentro de V, o que permitirá formar a componente $V(W)$.

Proposição 3.5. *d é um isomorfismo de G-módulos e a componente W-isotípica de V (com $W \in \mathcal{A}(V)$) é dada por $V(W) = im(d|_W)$. Em particular, $V = \bigoplus_{W \in \mathcal{A}(V)} im(d_W)$ é a decomposição de V em componentes isotípicas (*decomposição isotípica*).*

Demonstração. Seja $V = \bigoplus_j V_j$ a decomposição irredutível (semisimples) de V. Para $W \in \mathcal{A}(V)$ temos que, se W não é isomorfo a nenhum V_j, então o domínio de d_W é o subespaço nulo e daí poderemos descartar W do somando. Suponha então que $W \simeq V_k$, algum k. Temos pelo lema de Schur 3.3:

$$dom(d_W) = \bigoplus_j Hom_G(W, Vj) \otimes W = \bigoplus_{V_j \simeq V_k} Hom_G(W, V_j) \otimes W$$

Além disso, $Hom_G(W, V_j) \otimes W \simeq \mathbb{C} \otimes W \simeq \mathbb{C} \otimes V_j \simeq V_j$ para $V_j \simeq V_k$. Mas a menos desses isomorfismos, d_W se identifica em cada subespaço do somando como uma aplicação induzida da forma $\mathbb{C} \otimes V_j \ni (\lambda_f \otimes v) \mapsto \lambda_f v \in V_j$, que é justamente o isomorfismo tensorial entre $\mathbb{C} \otimes V_j$ e V_j. Ou seja, cada d_W é um isomorfismo do seu domínio na componente $V(W) = \bigoplus_{V_j \simeq W} V_j$. Colecionando as aplicações d_W com $W \in \mathcal{A}(V)$, temos que d é isomorfismo. □

Observação. Podemos escrever a decomposição isotípica de V como $\bigoplus_{W \in Irr(G,\mathbb{C})} V(W)$ ou $V = \bigoplus_k n_k V_k$ (ou ainda $V = \bigoplus_k V_k^{\oplus n_k}$), onde cada V_k é irredutível e tem exatamente n_k cópias isomorfas no somando, ou seja, se $j \neq k$ então $V_j \not\simeq V_k$.

Consideraremos agora a forma matricial $x \mapsto A(x, V) = [a_{ij}(x, V)]_{ij}$ das representações $V \in Irr(G, \mathbb{C})$ numa base dada e veremos que o espaço gerado pelas funções da forma $G \ni x \mapsto a_{ij}(x, V) \in \mathbb{C}$ satisfazem certas relações de ortogonalidade à medida que variamos posições das entradas matriciais (i, j) e migramos de uma representação irredutível para outra no conjunto $Irr(G, \mathbb{C})$.

Proposição. *Considere o G-módulo $Hom(V, W)$ com ação definida por $(x.f)(v) = x.(f(x^{-1}.v))$, então temos que $(Hom(V, W))^G = Hom_G(V, W)$.*

Demonstração. $x.f = f, \ \forall x \in G \iff x.(f(x^{-1}.v)) = f(v), \ \forall x \in G, \forall v \in V \iff f(x^{-1}.v) = x^{-1}.f(v), \ \forall x \in G, \forall v \in V$. Essas equivalências mostram, em suma, que $f \in (Hom(V, W))^G$ se, e somente se, $f \in Hom_G(V, W)$. □

Proposição. *Sejam $(V, \rho) \in Irr(G, \mathbb{C})$ e $f \in Hom(V, V)$, então: $\int (h.f) dh = \frac{Tr(f)}{|V|} id|_V$, onde $|V| = \dim_{\mathbb{C}} V$.*

Demonstração. Como $\int (h.f) dh \in (Hom(V, V))^G = Hom_G(V, V)$, então pelo lema de Schur temos que $\int (h.f) dh = \lambda_f id|_V$. Além disso, $h.f = \rho(h) \circ f \circ \rho(h)^{-1}$ e daí:

$$\begin{aligned}
\lambda_f|V| &= Tr(\lambda_f|V|) \\
&= Tr(\int(h.f)dh) \\
&= \int_G Tr(h.f)dh \\
&= \int_G Tr(\rho(h)\circ f\circ\rho(h)^{-1})dh \\
&= \int_G Tr(f)dh \\
&= Tr(f)\int_G 1dh \\
&= Tr(f)\,.
\end{aligned}$$

□

Corolário. *Sejam V representação irredutível de G, $f \in Hom(V,V)$, $v \in V$ e $\varphi \in V^*$ então: $\int_G \varphi(h.f(h^{-1}.v))dh = \frac{Tr(f)}{|V|}\varphi(v)$.*

Demonstração. Basta aplicar a proposição anterior tomando φ e aplicando v em ambos os lados da igualdade. □

Teorema 3.6. *Seja V irredutível sobre G, então:*

(i) $\forall f \in Hom(V,V), \forall v,w \in V$ vale $\int_G \langle h.f(h^{-1}.v),w\rangle dh = \frac{Tr(f)}{|V|}\langle v,w\rangle$.

(ii) $\forall v,w,\alpha,\beta \in V$ vale $\int_G \langle h^{-1}.v,\alpha\rangle\langle h^{-1}.v,w\rangle dh = \frac{1}{|V|}\langle\alpha,\beta\rangle\langle v,w\rangle$.

(iii) $\forall v,w,\alpha,\beta \in V$ vale $\int_G \overline{\langle h.\alpha,v\rangle}\langle h.\beta,w\rangle dh = \frac{1}{|V|}\overline{\langle\alpha,\beta\rangle}\langle v,w\rangle$.

Demonstração.

(i) Aplicar o corolário anterior a $\varphi = \langle v,.\rangle$.

(ii) Aplicar o item (i) a $f(u) = \langle u,\alpha\rangle\beta$.

(iii) É o item (ii) usando a G-equivariância e a propriedade hermitiana de $\langle .,.\rangle$. □

Teorema 3.7. *Consideremos V e W dois G-módulos irredutíveis não isomorfos. Então: $\forall v,\alpha \in V, \forall w,\beta \in W$ vale $\int_G \overline{\langle h.\alpha,v\rangle}\langle h.\beta,w\rangle dh = 0$.*

Demonstração. Fixados α e β defina a forma bilinear $b(v,w) = \int_G \overline{\langle h.\alpha,v\rangle}\langle h.\beta,w\rangle dh$ em $V \times \overline{W}$, a qual induz uma aplicação $b' : V \longrightarrow Hom(\overline{W},\mathbb{C}) = \overline{W}^*$ dada por $b'(v) = b(v,.)$. Mas $\overline{W}^* \simeq (W^*)^* \simeq W$, logo podemos ver b' como sendo uma aplicação de V em W. Mais ainda, como b' mapeia integrais então b' pode ser vista como uma função em $(Hom(V,W))^G = Hom_G(V,W)$. E daí pelo lema de Schur, temos $b' \equiv 0$, o que demonstra a igualdade. □

Os dois últimos teoremas são ditos *relações de ortogonalidade*. Vamos tentar entender o porquê desta terminologia.

Consideremos V e W irredutíveis sobre G com bases ortonormais fixadas $\{v_i\}$ e $\{w_j\}$, respectivamente. Podemos então Identificar, nestas bases, a representação matricial $[a_{ij}(x,V)]$, em V, e $[a_{ij}(x,W)]$, em W.

Se $V \simeq W$, podemos tomar, sem perda de generalidade, $V = W$ e daí por uma verificação simples temos $a_{ij}(h,V) = \langle h.v_j, v_i\rangle$. Usando então o item (iii) do teorema 3.6, obtemos a seguinte identidade:

$$\int_G a_{ij}(h,V)\overline{a_{kl}(h,V)}dh = \frac{1}{|V|}\delta_{ik}\delta_{jl}$$

Analogamente, se $V \not\simeq W$, então pelo teorema 3.7 chegamos a

$$\int_G a_{ij}(h,V)\overline{a_{kl}(h,W)}dh = 0$$

.

Ou seja, se enxergamos as entradas matriciais a_{ij} como funções contínuas $x \mapsto a_{ij}(x)$, então temos uma ortogonalidade destas funções com respeito ao produto interno dado por $\langle f,h\rangle = \int_G f\overline{h}$. Tais funções são ditas *representativas*, as quais generalizaremos e estudaremos mais para frente. Em suma, se a_{ij} e b_{kl} são funções representativas provenientes de duas representações distintas (não isomorfas), então elas são ortogonais, assim como dentro de uma mesma representação, temos a_{ij} e a_{kl} ortogonais a menos que $(i,j) = (k,l)$ (a menos que seja exatamente a mesma posição da entrada matricial).

Até o momento estudamos alguns objetos acerca das representações que envolviam bases e isomorfismos. Contudo, é interessante que determinadas propriedades não dependam desses conceitos, a fim de termos flexibilidade de escolha em nossos estudos. O traço de um operador linear, por exemplo, é invariante por bases e usaremos ele justamente para construir os *caracteres*, os quais também serão invariantes por isomorfismos de representações e nos auxiliarão na identificação dos G-módulos irredutíveis.

Definição. *O* caracter *de uma representação* (V,ρ) *é a função* $\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *dada por* $\chi_V(x) = Tr(\rho(x))$.

Observação. Devido à regularidade das representações, temos que χ_V é diferenciável. Além disso, vale a propriedade $\chi_V(hxh^{-1}) = \chi_V(x)$ bem como diversas propriedades oriundas da função traço (as quais usaremos nesta seção e são todas de fácil verificação). Desta última, temos que o caractere é constante nas classes de conjugação da forma

$[x] = \{hxh^{-1} \mid h \in G\}$. Qualquer função $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisfaz esta propriedade ($f|_{[x]} = cte, \forall x \in G$) é chamada de *função de classes de* G. Também temos que o caractere de representações isomorfas é o mesmo.

Proposição 3.8. *Considere o produto interno* $\langle \chi_W, \chi_V \rangle = \int_G \chi_W \overline{\chi_V} dh$. *Valem:*

(i) $\int_G \chi_V(h)dh = \dim V^G$

(ii) $\langle \chi_W, \chi_V \rangle = \dim Hom_G(V, W)$

Demonstração. (i) Considere a restrição do operador projeção $p : V^G \longrightarrow V^G$ dado por $p(v) = \int h.v\, dh$. Então: $\dim V^G = Tr(p) = Tr(\int \rho(h)dh) = \int_G Tr(\rho(h))dh = \int_G \chi_V(h)dh$.

(ii) Usando os isomorfismos $Hom(V, W) \simeq V^* \otimes W \simeq \overline{V} \otimes W$, bem como as propriedades $\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1}\chi_{V_2}$ e $\chi_{\overline{V}} = \overline{\chi_V}$ mais o item (i), obtemos:

$$\dim Hom_G(V, W) = \dim(Hom(V, W))^G = \int_G \chi_{Hom(V,W)} dh = \int_G \chi_{\overline{V}} \chi_W dh = \int_G \overline{\chi_V} \chi_W dh$$

. □

Corolário 3.9. *Suponha* V *e* W *irredutíveis sobre* G, *então:* $\langle \chi_W, \chi_V \rangle = \delta_{V,W}$ *onde* $\delta_{V,W}$ *vale* 1 *se* V *e* W *forem isomorfas e* 0, *caso contrário.*

Demonstração. É o lema de Schur 3.3 aplicado ao item (ii) da proposição anterior. □

Note que este resultado é também uma espécie de ortogonalidade entre caracteres, especialmente no conjunto $Irr(G, \mathbb{C})$.

Teorema 3.10. *Se* $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ *então* V *é irredutível.*

Demonstração. Suponha $V = \bigoplus_k n_k V_k$ denotando uma decomposição irredutível de V onde há n_k cópias de V_k, irredutível, no somando e, se $j \neq k$ então $V_j \ncong V_k$. Usando a propriedade $\chi_{U \oplus W} = \chi_U + \chi_W$, temos:

$$1 = \langle \chi_V, \chi_V \rangle = \langle \chi_{\bigoplus_k n_k V_k}, \chi_{\bigoplus_j n_j V_j} \rangle = \sum_{k,j} n_k n_j \langle \chi_{V_k}, \chi_{V_j} \rangle = \sum_{k,j} n_k n_j \delta_{V_k, V_j} = \sum_l n_l^2$$

Daí a igualdade acima vale apenas se o somando da decomposição inicial for formado por um único elemento $n_0 V_0$ com $n_0 = 1$, logo $V = V_0$ irredutível. □

Veremos agora como as representações complexas estão subdivididas em certos tipos de representações que, por sua vez, estarão relacionados a representações reais e também quaterniônicas. Após isso, veremos um resultado que mostra a passagem destas representações complexas para as representações reais, conforme mencionado na introdução deste capítulo.

Definição 3.11. *Um G-módulo complexo V é dito de* tipo real *(respectivamente* tipo quaterniônico*) se admitir um G-isomorfismo $J : V \longrightarrow \overline{V}$ tal que $J^2 = id$ (respectivamente $J^2 = -id$). Se V não for de nenhum dos tipos anteriores dizemos que ele é de* tipo complexo*. J é chamada* aplicação de estrutura*.*

Observação. Não confundir "tipo real", "tipo complexo"e "tipo quaterniônico"com representações sobre escalares $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$. As representações de tipo real, complexo e quaterniônico nada mais são do que um jeito de particionar o conjunto das representações complexas. As terminologias não são por acaso, pois é possível mostrar que as representações de tipo real e quaterniônico formam a mesma categoria das representações sobre escalares reais e quaterniônicos, respectivamente. Esse tipo de construção estará melhor explorado no apêndice deste trabalho [CITAR].

Teorema 3.12. *Dada $V \in Irr(G, \mathbb{C})$, valem:*

(i) $V \in Irr(G; \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow V \simeq V^*$ *e* $V = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$, *algum* $U \in Irr(G; \mathbb{R})$.

(ii) $V \in Irr(G; \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow$ *valem* $V \not\simeq V^*$ *e* $V \oplus V^* \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$, *algum* $U \in Irr(G; \mathbb{R})$.

(iii) $V \in Irr(G; \mathbb{C})_{\mathbb{H}} \Leftrightarrow$ *valem* $V \simeq V^*$ *e* $V \oplus V = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$, *algum* $U \in Irr(G; \mathbb{R})$.

A demonstração do teorema acima encontra-se detalhadamente no apêndice [CITAR], por envolver uma série de construções técnicas e formalismos sobre representações quaterniônicas, reais, extensões e restrições de escalares.

Neste capítulo passaremos a estudar representações de grupos de Lie compactos, agora também de dimensão infinita. Em especial, duas estruturas de G-módulos: as representações regulares à esquerda e à direita, cujas ações serão analisadas sobre espaços como $C^0(G, \mathbb{C})$ e $L^2(G, \mathbb{C})$.

Como estamos migrando para o ambiente de dimensão infinita, necessitaremos de ferramentas de análise funcional e topologia. Será o caso, por exemplo, do teorema de Peter-Weyl, o qual nos dirá como as componentes isotípicas e caracteres irredutíveis se comportam em relação aos espaços definidos por estas representações, fornecendo-nos fortes implicações como o fato de todo grupo de lie compacto admitir uma representação fiel e ser, portanto, subgrupo de Lie de matrizes em $GL(V)$, para algum espaço vetorial V de dimensão finita.

3.4 FUNÇÕES REPRESENTATIVAS

Nesta seção continuaremos a considerar G grupo de Lie compacto e conexo e continuaremos a trabalhar apenas com representações sobre $\mathbb{C}$.

Vimos que, se $G \ni x \mapsto A(g) = [a_{ij}(x)] \in GL_n(\mathbb{C})$ definia uma representação matricial irredutível V, então as funções $G \ni x \mapsto a_{ij}(x, V) \in \mathbb{C}$ admitiam certas relações de ortogonalidade e eram chamadas de *funções representativas*.

A ação induzida na forma matricial se dá por $x.v = A(x).[v]$, onde $[v]$ é o vetor coluna que contém as coordenadas de v na base mencionada. Assim, a regra $(xh).v = x.(h.v)$ se reescreve como $A(xh).[v] = A(x).A(h)[v]$, ou seja, as funções $x \mapsto A(x)$ mapeiam $xh \mapsto A(xh) = A(x)A(h)$, o que induz a seguinte propriedade nas funções representativas $a_{ij}(., V)$:

$$a_{ij}(xh) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)a_{kj}(h), \quad \forall x, h \in G, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Considere as translações $l_y, r_y : G \longrightarrow G$ à esquerda e à direita do grupo G. Então $a_{ij} \circ r_h(x) = a_{ij}(xh)$. Pela equação anterior temos que, fixado $h \in G$, cada função $a_{ij} \circ r_h$ satisfaz:

$$a_{ij} \circ r_h = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(h).a_{ik}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Logo $a_{ij} \circ r_h$ é combinação linear das funções a_{ik} com $1 \leq k \leq n$.

A construção é totalmente análoga para as funções $a_{ij} \circ l_h$ com $h \in G$ e $1 \leq i, j \leq n$.

Com estas observações temos a seguinte propriedade: o espaço $Z(V)$ (ou simplesmente Z se V estiver fixado e não houver ambiguidades) dado por $Span_{\mathbb{C}}\{a_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ é *invariante por translações (tanto à direita quanto à esquerda)*, ou seja, se $z \in Z$ então $\forall x \in G$, $z \circ r_x, z \circ l_x \in Z$.

Temos então que Z é um subespaço de $C^0(G; \mathbb{C})$, o qual pode ser munido da estrutura de G-módulo, com auxílio das translações, via ações dadas por:

$$L, R : G \times C^0(G;\mathbb{C}) \longrightarrow C^0(G;\mathbb{C})$$
$$x \bullet_L f := f \circ l_{x^{-1}}, \quad x \bullet_R f := f \circ r_x, \quad \forall x \in G,\ \forall f \in C^0(G;\mathbb{C})$$

L e R são ditas *representações regulares à direita e à esquerda*, respectivamente.

O leitor, neste ponto, deve estranhar as notações $x \bullet_L f$ e $x \bullet_R f$. Por que não usarmos simplesmente $x.f$? A justificativa é que, principalmente no capítulo 4, usaremos as duas simultaneamente e será importante distingui-las.

Definição. *Considere G agindo, via R, no espaço $C^0(G,\mathbb{C})$. Dada $f \in C^0(G,\mathbb{C})$, defina Z_f como sendo o menor G-submódulo de $(C^0(G,\mathbb{C}), R)$ contendo f. Se $\dim_{\mathbb{C}} Z_f < +\infty$, então f é dita uma função G-*representativa*.*

Observação 3.13. Se a_{ij} é uma função representativa então ela é G-representativa. De fato, $Z_{a_{ij}} \subset Span_{\mathbb{C}}\{a_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n} = Z$, o qual tem dimensão menor ou igual que n^2 e que, claramente, é G-submódulo de $(C^0(G,\mathbb{C}), R)$ pela invariância por translações. Mais adiante, veremos como funções G-representativas segundo a definição acima provêm de entradas de representações matriciais.

Seja V um G-módulo, $v \in V$ e $\eta \in V^*$. Definimos a seguinte aplicação em $C^0(G,\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} d_{\eta,v} :\ & G \longrightarrow \mathbb{C} \\ & x \mapsto \eta(x.v) \end{aligned}$$

Usando extensão linear, construímos também:

$$\begin{aligned} S_V : V^* \otimes_{\mathbb{C}} V &\longrightarrow C^0(G,\mathbb{C}) \\ \eta \otimes v &\mapsto d_{\eta.v} \end{aligned}$$

Proposição 3.14. *Seja V uma representação de G. Valem as seguintes propriedades:*

(i) $x \bullet_L d_{\eta,v} = d_{x.\eta,v}$ *e* $x \bullet_R d_{\eta,v} = d_{\eta,x.v}, \quad \forall x \in G,\ \forall \eta \in V^*,\ \forall v \in V.$

(ii) $S(V) := imS_V$ *é G-submódulo de dimensão finita de* $(C^0(G,\mathbb{C}), R)$ *(ou* $(C^0(G,\mathbb{C}), L)$*).*

(iii) Se $\beta = \{e_j\}_{j=1}^n$ é base de V com base dual $\beta^* = \{e_j^*\}_{j=1}^n$, então vale $a_{ij} = d_{e_i^*,e_j}$, onde as funções a_{ij} compõem as entradas matriciais da representação V associada à base β (ou seja, as funções que satisfazem $x.e_j = \sum_{k=1}^n a_{kj}(x)e_k$).

(iv) todo elemento de $S(V)$ é uma G-função representativa.

(v) $S(V) = Span_{\mathbb{C}}\{a_{ij}\}$

Demonstração. Item (i): Por um lado $x \bullet_L d_{\eta,v}(y) = d_{\eta,v} \circ \eta_{x^{-1}}(y) = d_{\eta,v}(x^{-1}y) = \eta(x^{-1}y.v)$. Por outro, $d_{x.\eta,v}(y) = (x.\eta)(y.v) = \eta(x^{-1}y.v)$, o que demonstra a igualdade (a outra propriedade é análoga).

Item (ii): Pelo item anterior $x \bullet_L S_V(\eta \otimes v) = x \bullet_L d_{\eta,v} = d_{x.\eta,v} = S_V(x.\eta \otimes v) \in S(V)$ e, portanto, $S(V)$ é G-submódulo de $(C^0(G,\mathbb{C}), L)$ (à direita é análogo).

Item (iii): $d_{e_i^*,e_j}(x) = e_i^*(x.e_j)$ corresponde a i-ésima coordenada da ação de $x.e_j$ expresso na base β. Além disso, a representação matricial $x \mapsto A(x)$ nesta base nos fornece a relação $A(x).e_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(x)e_k$, ou seja, $a_{ij}(x)$ também é a i-ésima coordenada da ação de $x.e_j$ expresso na base β.

Item (iv): Como elementos de $S(V)$ são combinações de funções do tipo $d_{f,v}$ que, por sua vez, são combinações em $Span_{\mathbb{C}}\{a_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$, então o resultado segue da observação anterior.

Item (v): A igualdade é consequência imediata do item (iii). □

Proposição. *Seja f uma G-função representativa. Valem:*

(i) f gera um G-submódulo da representação à esquerda L cuja dimensão é finita.

(ii) $f \in S(Z_f)$. Equivalentemente, f é uma combinação linear de funções representativas segundo a definição via entradas matriciais (o que completa a observação 3.13).

(iii) As G-funções representativas formam uma $\mathbb{C}$-subálgebra $A(G,\mathbb{C})$ de $C^0(G,\mathbb{C})$ fechada por conjugação complexa.

Demonstração. Itens (i) e (ii): Como f é representativa então gera o G-submódulo à direita $V = Z_f$, de dimensão finita. Seja $\beta = \{e_j\}_{j=1}^n$ base de Z_f com base dual $\beta^* = \{e_j^*\}_{j=1}^n$. Dado $x \in G$, temos que $x \bullet_R f = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)e_k$ com $b_k(x) \in \mathbb{C}$. Notemos que $b_k(x) = S_V(e_k^* \otimes f)(x)$. Daí temos que:

$$f(x) = x \bullet_R f(e) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)e_k(e) = \sum_{k=1}^{n} S_V(e_k^* \otimes f)(x)e_k(e) \Rightarrow f = \sum_{k=1}^{n} e_k(e)S_V(e_k^* \otimes f) \in S(V)$$

Como $S(V)$ é dimensão finita e, pela proposição anterior, pode ser visto tanto quanto módulo à direita quanto à esquerda, temos o resultado visto que o G-submódulo à esquerda gerado por f deve estar contido em $S(V)$.

Item (iii): Dada a_{ij} é uma função representativa (entrada matricial) associada à V, então $\overline{a_{ij}}$ é função representativa associada à $\overline{V} \simeq V^*$. Se além disso, se tomamos outra representação V' com funções de entrada matricial b_{kl} então $a_{ij} + b_{kl} \in Span\{a_{ij} + b_{kl}\}_{i,j,k,l}$ e $a_{ij}.b_{kl} \in Span\{a_{ij}.b_{kl}\}_{i,j,k,l}$, ambos de dimensão finita, o que completa a prova. □

Consideramos agora duas topologias sobre $C^0(G, \mathbb{C})$:

(A) A proveniente da norma do supremo.

(B) A proveniente do produto interno $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_G f_1 \overline{f_2}$.

Proposição 3.15. *Considere C um G-submódulo de $(A(G, \mathbb{C}), R)$ ou $(A(G, \mathbb{C}), L)$. Valem:*

(i) $C = \bigoplus_{W \in Irr(G;\mathbb{C})} C \cap S(W)$

(ii) $C \cap S(W)$ *é a parte W-isotípica de C.*

(iii) Tanto com a topologia em (A) quanto (B), temos que C é fechado em $(A(G, \mathbb{C}), R)$ *.*

Demonstração. Basta provar para $V = C = A(G, \mathbb{C})$ (o resto é consequência de tomar as intersecções). A ideia é mostrar que as funções S_W se comportam como as aplicações d_W vistas na proposição 3.5. Vamos recapitular algumas informações, primeiramente. Temos $d_W : Hom_G(W, V) \otimes W \longrightarrow V$ definida do seguinte modo: $d_W(f \otimes w) = f(w)$ onde a ação em $Hom_G(W, V) \otimes W$ é dada por $x.(f \otimes w) = f \otimes x.w$ e d_W determina o isomorfismo entre seu domínio e sua imagem imd_W a qual coincide com a componente W-isotípica $V(W)$ em V.

Considere $S_W : W^* \otimes W \longrightarrow V$. Afirmamos que S_W é injetiva e G-equivariante se consideramos $W^* \otimes W$ munido da ação $x.(\lambda \otimes w) = \lambda \otimes x.w$, logo $S(W) \simeq W^* \otimes W$. Resta então provar que $Hom_G(W, V) \otimes W \simeq W^* \otimes W$ e daí teremos $S(W) \simeq V(W)$.

Fixado $\lambda \in W^*$ defina $T_\lambda : W \longrightarrow V$ por $T_\lambda(w) = d_{\lambda,w}$. É um exercício fácil verificar que $T_\lambda \in Hom_G(W, V)$. Construímos $T : W^* \otimes W \longrightarrow Hom_G(W, V) \otimes W$ estendido linearmente via regra $T(\lambda \otimes w) = T_\lambda \otimes w$. Mostraremos que T é isomorfismo.

Injetividade de T: Se $T(\lambda \otimes w) = 0$ então $T_\lambda \otimes w = 0$. Se $w = 0$ então $\lambda \otimes w = 0$. Se $T_\lambda = 0$, então dado $w' \in W$ temos $T_\lambda(w') = 0$, ou seja, $d_{\lambda,w'} = 0$ o que implica $\lambda = 0$ e, portanto, $\lambda \otimes w = 0$. Provamos então que $\ker T = \{0\}$.

Sobrejetividade de T: Dado $f \otimes w' \in Hom_G(W, V) \otimes W$ defina $\lambda_f(.) = f(.)(e)$. Logo $T_{\lambda_f}(w)(x) = d_{\lambda,w}(x) = \lambda(x.w) = f(x.w)(e) = (x \bullet_R (f(w)))(e) = f(w) \circ r_x(e) = f(w)(x)$, $\forall w \in W$, $\forall x \in G$. Logo $T_{\lambda_f} = f$, ou seja, $T(\lambda_f \otimes w') = f \otimes w'$.

T é G-equivariante:

$$T(x.(\lambda \otimes w)) = T(\lambda \otimes x.w) = T_{\lambda_f} \otimes (x.w) = x.(T_{\lambda_f} \otimes w) = x.T(\lambda \otimes w).$$

Para o item (iii) considere $f \in A(G,\mathbb{C}) \cap cl(C)$ na topologia (B) e π_U a projeção em $C \cap S(U)$. Usando a propriedade $\langle \pi_U(f-c), \pi_U(f-c) \rangle \leq \langle f-c, f-c \rangle$ com $c \in C$, concluímos que $\pi_U(f) \in \pi_U(C)$. Logo $f \in \bigoplus_{U \in Irr(G,\mathbb{C})} \pi_U(C)$, o que prova que C é fechado em (B). Mais ainda, como $\langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} \leq ||f||_{sup}$, então vale o fecho na topologia (A). □

Observação 3.16. Como consequência da demonstração anterior temos que as componentes W-isotípicas de $A(G;\mathbb{C})$ são da forma $S(W) \simeq mW$, onde $m = \dim_{\mathbb{C}} W$ e mW denota m cópias de W, ou seja, $mW = \bigoplus_{k=1}^{m} W$ (outra notação seria escrevermos $mW = W^{\oplus m}$).

Na norma do supremo, topologia (A), o espaço $C^0(G,\mathbb{C})$ é completo , enquanto que, na topologia (B), o completamento de $C^0(G,\mathbb{C})$ é o espaço $L^2(G,\mathbb{C})$, o qual também pode ser munido das ações R e L.

Teorema 3.17 (Peter-Weyl)**.** *Valem:*

(i) O conjunto das G-funções representativas é denso tanto em $C^0(G,\mathbb{C})$ (topologia (A)) quanto em $L^2(G,\mathbb{C})$ (topologia (B)).

(ii) O subespaço gerado pelos caracteres irredutíveis é denso no espaço de funções de classe contínuas.

Demonstração. (i) ⇒ (ii) Seja $\gamma : G \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função de classes contínua, ou seja, dados $x, h \in G$, vale $\gamma(hxh^{-1}) = \gamma(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, então, pelo item (i), existe uma função representativa f tal que $|\gamma - f| < \varepsilon$. Considere então $s : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $s(x) = \int_G f(hxh^{-1})dh$. Tem-se então que s é função de classes contínua satisfazendo $|\gamma - s| < \varepsilon$ (de fato, dado $x \in G$, $|\gamma(x) - s(x)| = |\int_G h(x)d\gamma - \int_G f(hxh^{-1})dh| = |\int_G [\gamma(hxh^{-1})dh - f(hxh^{-1})]dh| \leq \int_G 1.|\gamma - f| < \varepsilon$). Pela densidade no item (i), basta então mostrar que s é combinação linear de caracteres irredutíveis.

Propriedade: se f é G-representativa, então $f(h) = \sum_l f_l(h.e_l)$, para certos $e_l \in E_l$, $f_l \in Hom(E_l, \mathbb{C})$ e certos espaços irredutíveis E_l.

Assumindo isto, temos $\int_G f(hxh^{-1})dh = \sum_l f_l \left(\int_G hxh^{-1} e_l dh \right)$.

Propriedade: se $\rho_l : G \longrightarrow GL(E_l)$ é a representação associada à E_l com caractere χ_l, então $\int_G \rho_l(hxh^{-1})dh = (\dim E_l)^{-1}\chi_l(x)id_{E_l}$. Logo, $f_l\left(\int_G hxh^{-1}e_l dh\right) = (\dim E_l)^{-1}f_l(e_l)\chi_l(x)$.

Combinando as afirmações acima temos que (i) implica em (ii).

Prova de (i): Sejam $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua e $\varepsilon > 0$ dado. Como f é contínua em G compacto então f é uniformemente contínua e daí existe uma vizinhança U de $e \in G$ tal que $U = U^{-1}$ e $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ sempre que ocorrer $x^{-1}y \in U$. Considere também $\delta : G \longrightarrow [0, \infty[$ uma *bump function* contínua com suporte em U, tal que $\delta(x) = \delta(x^{-1})$ e $\int_G \delta = 1$ (pode ser vista como uma aproximação da função delta de Dirac) e o operador $K : C^0(G, \mathbb{C}) \longrightarrow C^0(G, \mathbb{C})$ dado por $K(f) = K_f$, onde $K_f(x) = \int_G \delta(h)f(xh)dh = \int_G \delta(x^{-1}h)f(h)dh = \int_G f(h)\delta(h^{-1}x)dh = f * \delta(x)$. Como $|f(xh) - f(x)| \leq \varepsilon$ quando $\delta(h) \neq 0$, então chegamos à relação:

$$|K_f - f| = \sup\left|\int_G \delta(h)(f(xh) - f(x))dh\right| \leq \int_G \varepsilon\delta(h)dh = \varepsilon$$

.

De forma similar ao que fizemos anteriormente basta então aproximar K_f por funções representativas.

Observamos que K é operador simétrico compacto conforme subseção anterior e é fácil ver também que trata-se de uma função G-equivariante, permitindo-nos concluir que os autoespaços de K são G-invariantes.

Seja $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ os autovalores distintos de K com autoespaços $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\lambda_0 = 0$. Usando os resultados do apêndice 1, temos que $\bigoplus_{n\geq 0} H_n$ é denso em $H = C^0(G, \mathbb{C})$. Logo, $\bigoplus_{n\geq 0} KH_n$ é denso em KH . Além disso, $KH_0 = \{0\}$ e $KH_n = H_n$ é de dimensão finita para $n \geq 1$. Como K_f pertence ao fecho de $\bigoplus_{n\geq 1} KH_n = \bigoplus_{n\geq 1} H_n$, então K_f é de fato aproximada por funções representativas (as que compõe os autoespaços H_n para $n \geq 1$), conforme queríamos. □

Vamos agora enunciar algumas consequências do teorema de Peter-Weyl.

Teorema. *Todo grupo de Lie compacto G admite uma representação fiel.*

Demonstração. Afirmação: Se $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ é uma cadeia descendente de subgrupos fechados de G, então ela estaciona.

De fato, se a cadeia não estacionar, então podemos supor, sem perda de generalidad,e que $K_{l+1} \neq K_l$. Daí, teríamos que $\dim K_{l+1} < \dim K_l$ ou K_{l+1} teria menos componentes conexas do que K_l. Porém, estas quantias são finitas para G compacto e, portanto, esta propriedade não pode se estender indefinidamente.

Considere então $e \neq g \in G$ e uma função contínua $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(g) \neq f(e)$. Pelo Teorema de Peter-Weyl 3.17 é possível encontrar uma G-função representativa h próxima de f tal que $h(g) \neq h(e)$. Daí se $G \neq \{e\}$ existe uma representação ρ_1 associada à função h tal que $K_1 := \ker \rho_1 \subsetneq G$ com K_1 subgrupo de Lie de G (portanto fechado). Se $K_1 \neq \{e\}$, encontramos uma representação ρ_2 de G cujo núcleo K_2 é um subgrupo fechado próprio de G e satisfazendo $K_1 \cap K_2 \subset K_1$. Repetindo o processo e fazendo $K_1' = K_1$, $K_2' = K_1 \cap K_2$, ... , $K_l' = K_{l-1}' \cap K_l$ temos, pela afirmação anterior, que esse processo termina em $K_m' = \{e\}$, algum $m \in \mathbb{N}$. Daí a soma direta $\bigoplus_k \rho_k$ destas representações encontradas é fiel, visto que a intersecção dos núcleos é $\bigcap_l K_l = \{e\}$, fornecendo-nos a injetividade da representação. $\square$

Proposição 3.18. *Seja $(W, \rho) \in Irr(G; \mathbb{C})$ um G-submódulo de $V = (L^2(G; \mathbb{C}), R)$. Denote $I(W)$ a componente W-isotípica em $(L^2(G; \mathbb{C}), R)$ e a ação $x.v = \rho(x).v$. Temos:*

(i) $I(W) \subset C^\infty(G; \mathbb{C})$ *e* $\dim_{\mathbb{C}} I(W) = (\dim_{\mathbb{C}} W)^2$

(ii) *$I(W)$ é invariante não só por R como também por L*

(iii) $\bigoplus_{V \in Irr(G;\mathbb{C})} I(W)$ *é denso em $L^2(G; \mathbb{C})$ e também no espaço $C^0(G; \mathbb{C})$ munido da norma (A).*

(iv) *Dado $x \in G$ considere a aplicação tensorial $id \otimes \rho(x) : W^* \otimes W \longrightarrow W^* \otimes W$ dada por $id \otimes \rho(x)(\lambda \otimes W) = \lambda \otimes \rho(x).v$, então vale a identidade: $id \otimes \rho(x) = S_W^{-1} \circ R(x) \circ S_W$.*

(v) *Analogamente, vale a seguinte identidade: $(\rho(x)^{-1})^* \otimes id = S_W^{-1} \circ L(x) \circ S_W$.*

(vi) *$I(W)$ é a componente W^*-isotípica da representação regular à esquerda $(L^2(G, \mathbb{C}); L)$.*

Demonstração. Basicamente é uma aplicação da proposição 3.15.

O item (i) segue do fato que $I(W) = S(W) \simeq W^* \otimes W$ é formado por funções representativas contínuas, ou seja, são combinações de entradas matriciais de alguma representação associada e, portanto, tem regularidade $C^\infty(G, \mathbb{C})$ (mesmo argumento que fornecemos para a regularidade dos caracteres).

O item (ii) segue do fato de $S(W)$ ser G-invariante tanto por R quanto por L.

Para o (iii) temos $A(G; \mathbb{C}) = \bigoplus_{W \in Irr(G;\mathbb{C})} A(G; \mathbb{C}) \cap S(W) = \bigoplus_{W \in Irr(G;\mathbb{C})} S(W) = \bigoplus_{V \in Irr(G;\mathbb{C})} I(W)$ e, pelo Teorema de Peter-Weyl 3.17, $A(G; \mathbb{C})$ é denso em $L^2(G; \mathbb{C})$ e também no espaço $C^0(G; \mathbb{C})$ munido da norma do supremo.

Efetuando ambos os lados das igualdades, obtemos os itens (iv) e (v).

Item (vi): considere o isomorfismo de G-módulos $T : (S(W), R) \longrightarrow (S(W^*), L)$ dado por $d_{e_i^*, e_j} \mapsto d_{e_j, e_i^*}$, onde $\{e_k\}_{k=1}^n$ e $\{e_k^*\}_{k=1}^n$ são bases de $W \simeq (W^*)^*$ e W^*, respectivamente (uma dual da outra). A única propriedade que não é imediata de se verificar é que T é G-equivariante. Isso pode ser obtido junto ao item (i) da proposição 3.14:

$$\begin{aligned}
T(x \bullet_R d_{e_i^*, e_j}) &= T(d_{e_i^*, x.e_j}) \\
&= T\left(d_{e_i^*, \sum_{k=1}^n a_{kj}(x) e_k}\right) \\
&= d_{\sum_{k=1}^n a_{kj}(x) e_k, e_i^*} \\
&= d_{x.e_j, e_i^*} \\
&= x \bullet_L d_{e_j, e_i^*} \\
&= x \bullet_L T(d_{e_i^*, e_j})
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.19. *Seja $\rho : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ representação fiel dada por $g \mapsto (a_{ij}(g))$. Então as funções a_{ij} e $\overline{a_{ij}}$ geram $A(G, \mathbb{C})$.*

Demonstração. Seja B tal álgebra gerada. É fácil verificar que B satisfaz as hipóteses do Teorema de Stone-Weierstrass 1 (a injetividade da representação implica que B separa pontos), ou seja, B é denso em $A(G, \mathbb{C})$. Como B é G-submódulo de $A(G, \mathbb{C})$, segue então que B é fechado via proposição 3.15, ou seja, $B = cl(B) = A(G, \mathbb{C})$. □

Corolário 3.20. *$A(G, \mathbb{C})$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra finitamente gerada.*

Consideremos agora V uma representação fiel de G e definiremos o espaço seguinte: $V(k, l) := (V \otimes ... \otimes V) \otimes (\overline{V} \otimes ... \otimes \overline{V})$, contendo k fatores de V e l fatores de $\overline{V}$.

Teorema 3.21. *Toda representação irredutível de G está contida em algum $V(k, l)$.*

Demonstração. Suponha que U é irredutível e não está contido em nenhum $V(k, l)$. Dadas funções representativas u de U (ou seja o submódulo gerado por u fornece U) e v de $V(k, l)$, então temos, pelas relações de ortogonalidade, que $\langle u, v \rangle = 0$ (isto variando k e l). Mas as entradas matriciais das representações $V(k, l)$ são os monômios de grau k em a_{ij} e de grau l em $\overline{a_{ij}}$, onde $x \mapsto a_{ij}(x)$ são as entradas matriciais de V. Isto nos fornece que o conjunto $Span\{v \,|\, v$ é representativa em algum $V(k, l)\}$ é denso em $C^0(G, \mathbb{C})$ e, portanto, $u = 0$, implicando na contradição $U = \{0\}$. □

Corolário 3.22. *Seja G um grupo de Lie compacto. Valem:*

(i) Se $V \in Irr(G, \mathbb{C})$, então V tem dimensão finita e V é um G-submódulo de da representação regular à direita (ou à esquerda), a menos de isomorfismos.

(ii) $Irr(G, \mathbb{C})$ é enumerável.

Demonstração. Para o item (i) vemos que V está contido em algum $V(K, l)$, o qual tem dimensão finita. Além disso, o espaço gerado pelas entradas matriciais $Span_{\mathbb{C}} a_{ij}$ de V numa dada base forma um G-submódulo da representação à direita (ou à esquerda), pela observação 3.13.

Para o item (ii), considere $x \mapsto a_{ij}(x)$ as entradas matriciais, numa certa base, de uma representação fiel de G. Sabemos que a álgebra gerada pelas funções a_{ij} e $\overline{a_{kl}}$ nos fornece as funções representativas $A(G, \mathbb{C})$. Denomine por *função representativa elementar* qualquer produto da forma $\prod_{i=1}^{l} s_i$ com $s_i \in \{a_{ij}; \overline{a_{kl}}\}$. Então, se B é o conjunto das funções representativas elementares, segue que B é enumerável e podemos escrever $B = \{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Dado $b_k \in B$, então se Z_k é o G-submódulo da representação regular à direita R gerado por b_k, então Z_k é de dimensão finita e podemos escrever $Z_k = \bigoplus_{j=1}^{l_k} V_j^{(k)}$ para certas representações irredutíveis $V_j^{(k)}$.

Considere agora V representação irredutível arbitrária de G. Sabemos que o submódulo $(S(V), R)$ é justamente a componente V-isotípica com respeito à representação regular à direita. Além disso, $S(V)$ é composto apenas de funções representativas conforme o item (iv) da proposição 3.14. Mais ainda, conforme proposição 3.19, cada função representativa pode ser expressa como combinação finita em B, o que implica $S(V) \subset \bigoplus_{j,k} V_j^{(k)}$. Logo,

$$\bigoplus_{V \in Irr(G,\mathbb{C})} S(V) \subset \bigoplus_{j,k} V_j^{(k)},$$

o que só ocorre caso $Irr(G, \mathbb{C})$ seja enumerável. $\square$

3.5 REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS DE SU(2)

O objetivo desta seção é fornecer um exemplo de um grupo de Lie (no caso $SU(2)$) sobre o qual saibamos caracterizar todas as suas representações irredutíveis. Em outras palavras, iremos determinar o conjunto $Irr(SU(2);\mathbb{C})$. Estas informações serão primordiais para aplicarmos o critério de irredutibilidade dos autoespaços do operador laplaciano no capítulo seguinte.

Defina $V_n = span_{\mathbb{C}}\{p_j(z_1,z_2)\}_{j=0}^{n}$, em termos dos polinômios $p_j(z_1,z_2) = z_1^j z_2^{n-j}$, para $n \in \mathbb{N}$ fixado. Os elementos de V_n são ditos *polinômios homogêneos de grau n*. O espaço vetorial V_n tem dimensão $n+1$.

Dado $x = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{pmatrix} \in SU(2)$, podemos definir uma ação $(.) : SU(2) \times V_n \longrightarrow V_n$ da seguinte maneira:

$$(x.p)(z_1,z_2) := p\left((z_1\ z_2)\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{pmatrix}\right) = p(z_1a_x + z_2c_x\,,\, z_1b_x + z_2d_x)$$

.

Logo, para $n \in \mathbb{C}$, V_n determina uma representação de $SU(2)$. Note que V_0 nada mais é do que a representação trivial $V = \mathbb{C}$ de $SU(2)$.

Proposição. *Cada V_n é um $SU(2)$-módulo irredutível.*

Demonstração. Primeiramente assuma a seguinte afirmação: dado $A \in Hom_{SU(2)}(V_n,V_n)$ temos que $A = \lambda_A id$ algum $\lambda_A \in \mathbb{C}$.

Além disso, o espaço $Hom_{SU(2)}(V_n,V_n)$ é não nulo pois contém a identidade. Daí concluímos que $\dim_{\mathbb{C}} Hom_{SU(2)}(V_n,V_n) = 1$. Usando então a proposição 3.8 e o teorema 3.10, concluímos que $\langle \chi_n, \chi_n \rangle = \dim_{\mathbb{C}} Hom_{SU(2)}(V_n,V_n) = 1$ e que V_n é irredutível. Resta provarmos a afirmação.

Sejam $A \in Hom_{SU(2)}(V_n,V_n)$, $a \in U(1)$ e $g_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in SU(2)$. Valem as relações $g_a p_j = a^{2j-n}p_j$ e $g_a A p_j = A g_a p_j = A a^{2j-n} p_j = a^{2j-n} A p_j$. Tomamos então a tal que $a^{2.0-n}, a^{2.1-n}, \ldots, a^{2n-n}$ são todos distintos. Note que $Span_{\mathbb{C}}\{p_j\} = E(a_{2j-n})$, onde $E(a_{2j-n})$ é o autoespaço de a_{2j-n} com respeito a g_a. Daí $AP_j = c_jP_j$, algum $c_j \in \mathbb{C}$. Vamos mostrar que $A = c_n.id$. Para tal, resta ver que $c_j = c_n$ para $0 \leq j \leq n$. Considere $R_t = \begin{pmatrix} cost & -sent \\ sent & cost \end{pmatrix} \in SU(2)$. Daí a identidade $AR_tP_n = R_tAP_n$ nos fornece

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} cos^j t.sen^{n-j}t.c_j.P_j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} cos^j t.sen^{n-j}t.c_n.P_j \Rightarrow c_j = c_n,\ 0 \leq j \leq n,$$

conforme desejávamos. □

Como toda matriz $A \in SU(2)$ é similar a uma matriz da forma $E(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$, algum $t \in \mathbb{R}$, e o traço é invariante por similaridade, então os caracteres χ_n das representações V_n estão determinados pelas matrizes $E(t)$. Uma verificação fácil é que $E(s)$ e $E(t)$ são similares se, e somente se, $s \pm t$ for múltiplo de 2π.

Da similaridade mencionada notamos que, se $f : SU(2) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função de classes, então ela induz naturalmente uma aplicação $fE : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $fE(t) := f(E(t))$, a qual, pelas observações anteriores, deve ser 2π-periódica par.

Vamos enunciar algumas identidades:

(i) $\chi_n(E(t)) = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{i(2-2k)t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(ii) $\chi_n(E(t)) = \frac{sen(n+1)t}{sen(t)}$, se t não for múltiplo de π.

(iii) $\chi_n E(t) = \cos(nt) + \chi_{n-1}E(t)\cos(t)$, se t não for múltiplo de π.

(iii) $span_{\mathbb{C}}\{\chi_j E\}_{j=0}^{n} = span_{\mathbb{C}}\{\cos(jt)\}_{j=0}^{n}$

Das séries de Fourier, temos que $span_{\mathbb{C}}\{\cos(nt)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é denso no espaço das funções contínuas 2π-periódicas pares de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ (para um maior detalhamento, sugerimos consulta a *Fourier Series, Cap. 8* [Rud]). Concluímos então que $span_{\mathbb{C}}\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é denso no espaço das funções de classes contínuas de $SU(2)$.

Proposição. *Seja $f : SU(2) \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função de classes contínua então vale a identidade:*

$$\int_{SU(2)} f(h)dh = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} fE(t)sen^2(t)dt$$

Demonstração. Das relações anteriores não é difícil de se verificar que a identidade vale para os caracteres irredutíveis χ_n, juntando ao fato que $\int_{SU(2)} \chi_n(g)dg = \dim V_n^{SU(2)} = \delta_{0,n}$. O resultado vale então para f usando a densidade de $span_{\mathbb{C}}\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço das funções de classes contínuas de $SU(2)$, ou seja, aproximando f uniformemente por sequências de combinações das funções χ_n e tomando o limite em ambos os lados da igualdade nas integrais. $\square$

Proposição. *Toda representação irredutível de $SU(2)$ é isomorfa a algum V_n.*

Demonstração. Seja W irredutível e suponha por absurdo que W não é isomorfa a nenhum V_n. Pelo corolário 3.9, temos que $\langle \chi_W, \chi_n \rangle = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$. Mas χ_W é uma função de classes contínua e, portanto, pelo teorema de Peter-Weyl 3.17, admite uma sequência (a_k) em $span_{\mathbb{C}}\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_k \to \chi_W$. Logo $0 = \langle \chi_W, a_k \rangle \longrightarrow 0$, o que é uma contradição visto que $\langle \chi_W, a_k \rangle \longrightarrow \langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$. $\square$

4 LAPLACIANO E MÉTRICAS INVARIANTES À ESQUERDA EM GRUPOS DE LIE COMPACTOS

Neste capítulo, trabalharemos sempre com G grupo de Lie compacto, conexo e de dimensão m (ou seja, G é variedade m-dimensional). Os resultados principais são obtidos em [Sch].

Reforçando as notações dos capítulos 2 e 3, as quais servem como preliminares deste trabalho, tínhamos o seguinte:

(i) l_x e r_x denotam as translações à esquerda e à direita de $x \in G$, respectivamente.

(ii) (V, ρ) é o G-módulo (representação) associado ao homomorfismo $\rho : G \to GL(V)$.

(iii) As representações regulares à esquerda e à direita são dadas, respectivamente, pelas ações:

$$L, R : G \times C^0(G; \mathbb{C}) \longrightarrow C^0(G; \mathbb{C})$$
$$x \bullet_L f := f \circ l_{x^{-1}}, \quad x \bullet_R f := f \circ r_x, \quad \forall x \in G,\ \forall f \in C^0(G; \mathbb{C})$$

(iv) $Irr(G, \mathbb{C})$ é a classe de isomorfismos das representações irredutíveis de G.

(iv) $Irr(G, \mathbb{C})_{\mathbb{K}}$ é a classe de isomorfismos das representações irredutíveis complexas de G, de tipo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ conforme definição 3.11.

(v) Dado $V \in Irr(G, \mathbb{C})$, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, $I(V)$ é a componente V-isotípica da representação regular à direita $(C^\infty(G, \mathbb{C}), R)$, denotada também por $V^{\oplus n}$ (ver proposição 3.18).

(vi) Se V é um espaço vetorial complexo, então $r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)$ denota o espaço real V visto com escalares restritos a $\mathbb{R}$. Se U é espaço vetorial real então $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U)$ denota a complexificação $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$ de U (ver apêndice 4).

O objetivo é estudar métricas g, invariantes à esquerda (as que tornam as translações à esquerda em isometrias), em certos grupos de Lie compactos G, tais que o operador laplaciano Δ_g possui auto-espaços reais se comportando como representações irredutíveis com respeito à ação induzida pela representação regular à esquerda, a qual é responsável por organizar as isometrias fornecidas pelas translações à esquerda. Ou seja, no fim queremos que os autoespaços sejam os menores possíveis, não produzindo autofunções que não as consideradas por tais isometrias. Mais ainda, deseja-se verificar se as métricas invariantes à esquerda com esta propriedade formam um conjunto residual, ou seja, verificar se a propriedade é genérica (ver definição .1 do apêndice).

4.1 LAPLACIANO

A construção detalhada do laplaciano pode ser consultada no apêndice 3. O laplaciano Δ_g associado a uma métrica g em G pode ser considerado agindo em funções reais ou complexas. Convencionaremos, por mera tecnicalidade, sua definição com o uso do sinal negativo, isto é:

$$\Delta_g f = -div(\nabla f), \quad \forall f \in C^\infty(G),$$

Definição. *Uma métrica $g = \langle .,. \rangle$ em um grupo de Lie G é dita* invariante à esquerda *se cada translação à esquerda for uma isometria, ou seja:*

$$\forall x, y \in G, \forall v, w \in T_y G \quad \langle dl_x(y).v, dl_x(y).w \rangle_y = \langle v, w \rangle_{xy}$$

Denotaremos $\mathcal{L}_G$ como sendo o conjunto das métricas invariantes à esquerda de G.

Observação 4.1. Seja (G, g) grupo de Lie compacto com métrica invariante à esquerda $g \in \mathcal{L}_G$. Considere $\{Y_k^{(e)}\}_{k=1}^m$ uma base ortonormal de $T_eG \simeq \mathfrak{g}$, onde $\mathfrak{g} = LG$ denota a álgebra de Lie de G vista a partir dos campos invariantes à esquerda. Temos então que o isomorfismo natural $T_eG \ni v \mapsto X_v \in LG$ com $X_v(x) = dl_x(e).v$ induz uma base $\{Y_k\}_{k=1}^m$ em LG, onde $Y_k = X_{Y_k^{(e)}}$ (relembrar capítulo 2). Além disso, $\{Y_k(x)\}_{k=1}^m$ forma uma base g-ortonormal de T_xG, pois:

$$\langle Y_i(x), Y_j(x) \rangle_x = \langle dl_x(e).Y_i^{(e)}, dl_x(e).Y_j^{(e)} \rangle_x = \langle Y_i^{(e)}, Y_j^{(e)} \rangle_e = \delta_{ij}.$$

Assim, $\{Y_k\}_{k=1}^m$ forma um referencial ortonormal global, cuja expressão matricial de g é da forma $g_{ij} = \delta_{ij}$, com as funções g_{ij} constantes. Pela equação 1 do apêndice 3, vemos que os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k se anulam e daí $\{Y_k\}_{k=1}^m$ é geodésico em todo ponto. Logo pela proposição .3, deste mesmo apêndice, temos que:

$$\Delta_g f = -\sum_{k=1}^{m} Y_k^2 f$$

Proposição 4.2. *Nas identificações da observação 4.1, vale a seguinte identidade:*

$$\Delta_g f = -\sum_{k=1}^{m} (R_*(Y_k))^2 f,$$

onde R_* é um pull back *da representação regular a direita definido como sendo a derivada de R no elemento neutro $e \in G$.*

Demonstração. Para o item (i) temos, por definição, $Y_k(x) = dl_x(e).Y_k^{(e)}$. Como $g \in \mathcal{L}_G$ é métrica invariante à esquerda, concluímos que:

$$\langle Y_i(x), Y_j(x)\rangle_x = \langle dl_x(e).Y_i^{(e)}, dl_x(e).Y_j^{(e)}\rangle_x = \langle Y_i^{(e)}, Y_j^{(e)}\rangle_e = \delta_{ij}$$

Para (ii), temos que $R : G \longrightarrow GL(C^\infty(G, \mathbb{C}))$ satisfaz $R(x).f = f \circ r_x$. Daí, o *pullback* de R pode ser visto como:

$$R_* = dR(e) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(C^\infty(G, \mathbb{C})), \quad R_*(X) = dR(e).X^{(e)}.$$

Tomando Φ o fluxo associado a um campo invariante à esquerda $X \in \mathfrak{g}$, temos que $\Phi_e(t)$ é a solução da equação diferencial ordinária $X'(t) = Y_k(X(t))$ com condição inicial $X(0) = e$, levando-nos à propriedade:

$$dR(e).X(e) = \frac{d}{dt} R \circ \Phi_e(0).$$

Além disso, $R(\Phi_e(t))(f)(x) = f(x \exp(tX)) = f(\Phi_x(t))$. Logo:

$$\frac{d}{dt} R \circ \Phi_e(t)(f)(x)|_{t=0} = \frac{d}{dt} f \circ \Phi_x(t)|_{t=0} = df(x).X(x) = X(f)(x), \ \forall x \in G, \forall f \in C^\infty(G, \mathbb{C}).$$

Ou seja, combinando as informações, concluímos que $R_*(X)$ é justamente o derivador

$$\begin{aligned} X(.) : C^\infty(G, \mathbb{C}) &\longrightarrow C^\infty(G, \mathbb{C}) \\ f &\mapsto X(f), \end{aligned}$$

onde $X(f)(x) = df(x).Y_k(x)$. Portanto,

$$\Delta_g f = -\sum_{k=1}^{m} Y_k^2 f = -\sum_{k=1}^{m} (R_*(Y_k))^2 f.$$

$\square$

Observação 4.3. Note que estamos na verdade trabalhando com $f \in C^\infty(G;\mathbb{C})$. Além disso, se denotamos $\mathcal{R} = (C^\infty(G;\mathbb{C}), R)$, então pelo item (ii) da proposição acima faz sentido definirmos $\Delta_g^{\mathcal{R}} = \Delta_g$, ou seja, o laplaciano construído a partir da representação regular à direita. Além disso, pelo corolário 3.22, sabemos que dado $V \in Irr(G,\mathbb{C})$, então V é, a menos de isomorfismos, um G-submódulo de $\mathcal{R}$, ou seja, sempre que considerarmos a ação de Δ_g em V, esta correspondência estará implícita.

Proposição 4.4. *Dado $V \in Irr(G,\mathbb{C})$, $I(V)$ e V são invariantes pelo operador Δ_g, ou seja, $\Delta_g(I(V)) \subset I(V)$ e $\Delta_g(V) \subset V$.*

Demonstração. Como $I(V)$ é uma componente isotípica da representação regular à direita então a representação $R : G \longrightarrow GL(I(V))$ está bem definida e possui derivada no neutro da forma $R_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(I(V))$. Considere então $f \in I(V)$. Nas mesmas condições da proposição 4.2, temos $\Delta_g f = -\sum_{k=1}^{m}(R_*(Y_k))^2 f$. Como $R_*(Y_k) : I(V) \longrightarrow I(V)$ é um operador linear em $\mathfrak{gl}(I(V))$, segue que $\Delta_g f \in I(V)$. A invariância com respeito a V é completamente análoga. $\square$

Observação 4.5. Em virtude da observação 4.3 e da proposição 4.4, dado $V \in Irr(G,\mathbb{C})$, podemos considerar a restrição do laplaciano Δ_g a V, do seguinte modo:

$$\Delta_g^V : V \longrightarrow V, \quad \Delta_g^V = -\sum_{k=1}^{m}(\rho_*(Y_k))^2,$$

onde $\{Y_k\}_{k=1}^m$ é uma base g-ortonormal de $\mathfrak{g}$ e $\rho_* = d\rho(e)$. Note também que Δ_g^V tem o papel de representar o laplaciano Δ_g, que age em espaço de funções, no espaço algébrico abstrato V, o qual define uma representação.

Proposição 4.6. *Seja $(V,\rho) \in Irr(G;\mathbb{C})$ e considere a aplicação $id \otimes \Delta_g^V : V^* \otimes V \longrightarrow V^* \otimes V$ dada por $id \otimes \Delta_g^V(\lambda \otimes W) = \lambda \otimes \Delta_g^V.v$. Então vale a seguinte identidade:*

$$id \otimes \Delta_g^V = S_V^{-1} \circ \Delta_g|_{I(V)} \circ S_V,$$

onde $S_V : V^* \otimes V \longrightarrow S(V)$ é o isomorfismo apresentado na seção 3.4.

Demonstração. Pelo item (iv) da proposição 3.18 temos $id \otimes \rho(x) = S_V^{-1} \circ R(x) \circ S_V$, $\forall x \in G$. Logo as funções $x \mapsto id \otimes \rho(x)$ e $x \mapsto S_V^{-1} \circ R(x) \circ S_V$ são, na verdade, a mesma. Denotemos por h esta função. Por um lado, $dh(e).(Y_k) = id \otimes d\rho(e)(Y_k) = id \otimes \rho_*(Y_k)$ e, por outro lado, $dh(e).(Y_k) = S_V^{-1} \circ dR(e)(Y_k) \circ S_V = S_V^{-1} \circ R_*(Y_k) \circ S_V$. Logo:

$$S_V^{-1} \circ R_*(Y_k) \circ S_V = id \otimes \rho_*(Y_k)$$

Desta identidade extraímos que:

$$
\begin{aligned}
S_V^{-1} \circ -(R_*(Y_k))^2 \circ S_V &= S_V^{-1} \circ R_*(Y_k) \circ S_V \circ S_V^{-1} \circ -R_*(Y_k) \circ S_V \\
&= id \otimes \rho_*(Y_k) \circ id \otimes -\rho_*(Y_k) \\
&= id \otimes -(\rho_*(Y_k))^2
\end{aligned}
$$

Tomando $\{Y_k\}_{k=1}^n$ uma base g-ortonormal e a somatória $\sum\limits_{k=1}^{m}$ em ambos os membros da igualdade acima, obtemos o resultado desejado. $\square$

Se relembrarmos a construção do isomorfismo $S_V : V^* \otimes V \longrightarrow S(V)$, tínhamos que V^* fazia o papel de contar as $n = \dim_{\mathbb{C}} V$ cópias de V na componente V-isotípica de da representação regular à direita. Neste sentido, a aplicação $id \otimes \Delta_g^V$ funciona como se fosse a contagem de n blocos de Δ_g^V que aparecem na restrição do laplaciano à componente $I(V)$. No final das contas o $\Delta|_{I(V)}$ é, a menos da conjugação pelo isomorfismo S_V, o operador formado por n blocos iguais, cada um deles dado por Δ_g^V. Exploraremos esta ideia mais adiante, na seção seguinte.

4.2 CRITÉRIO DE IRREDUTIBILIDADE

Conforme mencionado no início do capítulo, consideraremos métricas invariantes à esquerda $g \in \mathcal{L}_G$ tais que os autoespaços reais de Δ_g determinam G-submódulos reais irredutíveis da representação regular à esquerda.

Como queremos a aproveitar a teoria de representações sobre os complexos apresentada no capítulo 3, então veremos condições para que os autoespaços do laplaciano sobre funções complexas sejam os menores possíveis, ou como representações irredutíveis globalmente ou pelo menos como representações irredutíveis nas restrições a cada componente isotípica. Com isto, bastará adaptar o nosso problema para o estudo do operador $\Delta_g|_{I(V)}$, o qual também poderá ser diretamente relacionado a Δ_g^V, a partir da identidade fornecida pela proposição 4.6. Após estas considerações, utilizaremos o teorema 3.12 para fazer a passagem para os autoespaços reais.

No fim, a estratégia central será tentar confinar as multiplicidades dos autovalores do operador Δ_g^V como sendo as menores possíveis, ou seja, diminuir ao máximo a dimensão dos seus autoespaços correspondentes, para que globalmente o laplaciano também tenha os menores autoespaços possíveis, permitindo-nos identificá-los como G-submódulos irredutíveis da representação regular à esquerda.

Denotaremos agora V^λ, E^λ e $\Delta(\lambda)$ como sendo os autoespaços de Δ_g^V, $\Delta_g|_{I(V)}$ e Δ_g respectivamente, referentes a um dado autovalor λ.

Definição. *Dado $g \in \mathcal{L}_G$, dizemos que Δ_g é* irredutível *ou* G-simples *se possuir autoespaços $\Delta(\lambda)$ se comportando como $G-$submódulos irredutíveis da representação regular à esquerda. Além disso, se o mesmo vale para $\Delta_g|_{C^\infty(G;\mathbb{R})}$, então Δ_g é dito* irredutível real *ou* G-simples real*.*

Em decorrência da definição acima, nosso problema pode ser relido como o estudo das métricas $g \in \mathcal{L}_G$ que tornam Δ_g G-simples real.

Relembremos que o Teorema de Peter-Weyl 3.17 nos dava uma espécie de decomposição isotípica (a menos de densidade) da representação regular à direita, ou seja:

$$\bigoplus_{Irr(G,\mathbb{C})} I(V) \text{ é denso em } L^2(G,\mathbb{C})$$

Além disso, vimos na proposição 4.2 que Δ_g é construído em termos da representação regular à direita e, pela proposição 4.4, o laplaciano pode, de fato, ser estudado em cada componente isotípica desta decomposição. Vimos que as componentes isotípicas também são invariantes pela ação da representação regular à esquerda L. Logo, a fim de que os autoespaços sejam irredutíveis com respeito a L, então cada um deles estará contido em alguma $I(V)$ desta decomposição. Logo, se cada autovalor de Δ_g possui autoespaço contido em uma única componente $I(V)$ de tal modo que $\Delta_g|_{I(V)}$ seja G-simples, então na verdade o operador Δ_g será G-simples, já que o autoespaço global no fim será o mesmo autoespaço de $\Delta_g|_{I(V)}$. Em verdade, isto não acontecerá com as representações complexas, de um modo geral. Por exemplo, as representações V e V^* podem não ser isomorfas e elas produzirão os mesmos autovalores (será o caso das representações de tipo complexo, ver definição 3.11). Contudo, na passagem para os reais, dada pelo teorema 3.12, veremos que, na verdade, os autoespaços associados a $I(V)$ e $I(V^*)$ "colapsarão"numa mesma componente isotípica real. As representações complexas de tipo quaterniônico terão um efeito bem parecido e as de tipo real não possuirão esta dificuldade, sendo as mais fáceis de lidar.

Exploraremos as ideias e comentários à respeito da estratégia acima à medida que formos obtendo os resultados.

Veremos na proposição seguinte que a identidade fornecida pela proposição 4.6 nos revelará que mostrar que $\Delta_g|_{I(V)}$ é G-simples será equivalente a que mostrar que Δ_g^V é simples, ou seja, no fundo a organização das isometrias em representações irredutíveis faz com que o problema recaia na abordagem feita por [Uhl], a qual determinava a simplicidade do espectro do laplaciano em uma variedade riemanniana, só que agora para cada operador Δ_g^V com $V \in Irr(G, \mathbb{C})$.

Proposição 4.7. *Seja $V \in Irr(G; \mathbb{C})$ n-dimensional com componente isotípica $I(V)$.*

(i) Se λ é autovalor de $\Delta_g|_{I(V)}$ com multiplicidade $m(\lambda)$ então $m(\lambda) \geq \dim_{\mathbb{C}} V = n$.

(ii) $\Delta_g|_{I(V)}$ é G-simples se, e somente se, seus autovalores possuem multiplicidades exatamente iguais a n.

(iii) $\Delta_g|_{I(V)}$ é G-simples se, e somente se, Δ_g^V tem espectro simples.

Demonstração. Para o item (i), identifiquemos $I(V) = V^{\oplus n}$. Como V é invariante por Δ_g, então Δ_g^V nada mais é do que o operador $\Delta|_{I(V)}$ restrito a este bloco. Dito de outra forma, se $(v_1, \ldots, v_n)$ é um vetor arbitrário em $V^{\oplus n}$ com $v_i \in V$, $1 \leq i \leq n$, então

$$\Delta_g|_{I(V)}(v_1, \ldots, v_n) = (\Delta_g^V v_1, \ldots, \Delta_g^V v_n)$$

Se $(v_1, \ldots, v_n)$ é um autovetor em E^λ (portanto não nulo), então podemos supor sem perda de generalidade que $v_1 \neq 0$. Daí, pela igualdade acima, os n vetores linearmente independentes $(v_1, 0, \ldots, 0)$, $(0, v_1, \ldots, 0)$,..., e $(0, \ldots, 0, v_1)$ pertencem ao auto-espaço E^λ. Logo, $m(\lambda) \geq n$. Mais precisamente, a identidade acima revela que $m(\lambda) = l(\lambda).n$, onde $l(\lambda)$ é a multiplicidade do autovalor λ referente ao operador Δ_g^V.

Vejamos agora os itens (ii) e (iii). Pelas observações efetuadas no item anterior, segue de forma imediata que Δ_g^V tem espectro simples se, e somente se, cada autovalor de $\Delta_g|_{I(V)}$ tem multiplicidade n. Resta então escolhermos apenas um dos itens para provar. Consideremos o item (iii) por exemplo.

($\Leftarrow$): Assuma Δ_g^V simples. Suponha por absurdo que existe μ autovalor tal que $E^\lambda = A \oplus B$ é um autoespaço redutível de $\Delta_g|_{I(V)}$. Temos que $S_V^{-1} \circ \Delta_g|_{I(V)} = id \otimes \Delta_g^V \circ S_V^{-1}$. Como $S_V^{-1}(A) \simeq A$, então a imagem por A desta igualdade induz um um subespaço não trivial $\tilde{A}$ contido em V^λ. Do mesmo modo, B induz um subespaço $\tilde{B}$, ortogonal a $\tilde{A}$ e contido em V^λ, contradizendo que V^λ é unidimensional.

($\Rightarrow$): Suponha por absurdo que existe autovalor λ tal que $V^\lambda = A \oplus B$, com $\dim A \geq 1$ e $\dim B \geq 1$. Analogamente, a igualdade $id \otimes \Delta_g^V = S_V^{-1} \circ \Delta_g|_{I(V)} \circ S_V$ induz submódulos não triviais do autoespaço E^λ. $\square$

Proposição 4.8. *Considere $(V, \rho) \in Irr(G, \mathbb{C})$ n-dimensional com representação dual (V^*, ρ^*). Então:*

(i) $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall \mu \in V^*$, $(\rho^*)_*(X)\mu = -\mu \circ \rho_*(X)$

(ii) $\forall \mu \in V^*$, $(\Delta_g^{V^*})(\mu) = \mu \circ \Delta_g^V$

(iii) A base dual de uma autobase de Δ_g^V é também autobase de $\Delta_g^{V^*}$ com os mesmos autovalores correspondentes.

Demonstração. Primeiramente, assumamos que o item (i) seja verdadeiro. Tomemos $\{Y_k\}_{k=1}^m \subset LG$, g-ortonormal. Obtemos então:

$$\begin{aligned}
((\rho^*)_*(Y_k))^2\mu &= (\rho^*)_*(Y_k)((\rho^*)_*(Y_k).\mu) \\
&= -(\rho^*)_*(Y_k).\mu \circ \rho_*(Y_k) \\
&= \mu \circ \rho_*(Y_K) \circ \rho_*(Y_K) \\
&= \mu \circ (\rho_*(Y_K))^2, \quad \forall \mu \in V^*
\end{aligned}$$

Tomando a somatória $-\sum_{k=1}^{m}$ em ambos os lados da igualdade acima, provamos (ii).

Para o item (iii) suponha $\{e_j\}_{j=1}^n$ autobase de V satisfazendo $\Delta_g^V e_j = \lambda_j e_j$ e com base dual $\{e_j^*\}_{j=1}^n$. Então, $(\Delta_g^{V^*})(e_i^*)(e_j) = e_i^* \circ \Delta_g^V(e_j) = e_i^*(\lambda_j e_j) = \lambda_j e_i^*(e_j)$, o que implica em $\Delta_g^{V^*}(e_i^*) = \lambda_i e_i^*$, para $1 \leq i \leq n$, conforme desejado.

Resta verificar (i). Para tal, lembremos que $\rho^*(x)\mu = \mu \circ \rho \circ inv(x)$, o onde inv denota a aplicação de inversão $x \mapsto x^{-1}$, cuja derivada no elemento neutro e é a inversão $w \mapsto -w$ em T_eG associada à inversão $X \mapsto -X$ em $\mathfrak{g}$ (proposição 2.6). Derivando a igualdade acima com respeito a x, no elemento neutro e e na direção de um $X \in \mathfrak{g}$ qualquer, obtemos:

$$d\rho^*(e).(X)\mu = d(\mu \circ \rho \circ inv)(e) = -\mu \circ d\rho(e).(X)$$

Ou seja, $(\rho^*)_*(X)\mu = -\mu \circ \rho_*(X)$, completando a demonstração. $\square$

Observação. O item (iii) da proposição 4.8 evidencia o que já tínhamos comentado na estratégia de resolução do problema, ou seja, uma representação e sua dual fornecem os mesmos autovalores. Logo, se V é irredutível de tipo complexo, então $V \ncong V^*$ e daí não se pode esperar que Δ_g seja G-simples. Os G-módulos de tipo quaterniônico sofrem uma dificuldade similar, conforme proposição a seguir.

Proposição 4.9. *Considere $V \in Irr(G, \mathbb{C})$. Então:*

(i) Se V é submódulo da representação regular à direita de tipo complexo, então os autoespaços de Δ_g em geral não são irredutíveis com respeito a ação à esquerda L.

(ii) Se V é de tipo quaterniônico com aplicação de estrutura J, então os autoespaços de Δ_g^V são invariantes por J e possuem dimensão par.

(iii) Se V é submódulo da representação regular à direita de tipo quaterniônico, então os autoespaços de $\Delta_g|_{I(V)}$ em geral não são irredutíveis com respeito a L.

Demonstração. (i) Como $I(V)$ e $I(V^*)$ são ortogonais para V de tipo complexo, se λ é autovalor de Δ_g^V, segue da proposição 4.8 que as componentes $I(V)$ e $I(V^*)$ admitem autoespaços E_λ e E_λ^*, respectivamente, deste mesmo autovalor. Logo $E_\lambda \oplus E_\lambda^* \subset \Delta_\lambda$.

(ii) Temos $J : V \longrightarrow \overline{V}$ isomorfismo satisfazendo $J^2 = -id$, ou seja, J admite autovalores $\pm i$ e podemos decompor V como $V(+i) \oplus V(-i)$ com respeito a J. Temos $V_\lambda = [V_\lambda \cap V(+i)] \oplus [V_\lambda \cap V(-i)]$. Se $v \in V_\lambda \cap V(+i)$, então $\Delta_g^V(Jv) = \Delta_g^V(v) = \lambda v = \lambda Jv$. Se $v \in V_\lambda \cap V(-i)$, então $\Delta_g^V(Jv) = -\Delta_g^V(v) = -\lambda v = \lambda Jv$. Temos também $V(+i) \simeq V(-i)$ e isto nos fornece cada autoespaço V_λ, de dimensão par.

(iii) Consequência imediata do item (ii) deste enunciado e da proposição 4.7. □

Dado $V \in Irr(G, \mathbb{C})$, definamos $C_V \subset C^\infty(G, \mathbb{C})$ por:

$$C_V := \begin{cases} I(V) & \leftrightarrow \quad V \in Irr(G; \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \\ I(V) & \leftrightarrow \quad V \in Irr(G; \mathbb{C})_{\mathbb{H}} \\ I(V) \oplus I(V^*) & \leftrightarrow \quad V \in Irr(G; \mathbb{C})_{\mathbb{C}}. \end{cases}$$

Definimos também $\mathcal{E}_V := C_V \cap C^\infty(G, \mathbb{R})$.

Em qualquer dos casos, vale que $C_V = I(V) + I(V^*)$. Quando V é de tipo real ou quaterniônico, então há auto-conjugação e daí $I(V) = I(V^*)$, enquanto que para V de tipo complexo $I(V)$ e $I(V^*)$ formam componentes ortogonais justamente pelo fato de que $V \ncong V^*$. Por enquanto, estudamos a irredutibilidade dos autoespaços como representações complexas. A transição do espaço de funções complexas C_V para o espaço de funções reais $\mathcal{E}_V$ é justamente a que permitirá uma análise acerca da irredutibilidade real de Δ_g, conforme faremos mais adiante.

Lema. *Seja $V \in Irr(G, \mathbb{C})$ e V^λ auto-espaço do autovalor λ de Δ_g^V, cuja multiplicidade é l. O G-módulo $V^* \otimes V^\lambda$, em que V^λ está munido da ação L, é isomorfo ao G-módulo $V^\lambda \otimes V^* \simeq (V^*)^{\oplus l}$, em que V^* está munido da ação induzida por R.*

Demonstração. Sabemos que $V^* \otimes V^\lambda$ é isomorfo ao G-módulo $A := S_V(V^* \otimes V^\lambda)$, munido da ação L (via isomorfismo S_V). Analogamente, temos que $V^\lambda \otimes V^*$ é isomorfo ao G-módulo $B := S_V(V^\lambda \otimes V^*)$, munido da ação R. Basta então exibir um isomorfismo $T : (A, L) \longrightarrow (B, R)$. Seja $\{e_k\}_{k=1}^l$ base de V^λ e complete-a a uma base $\{e_k\}_{k=1}^n$ de V com base dual $\{e_k^*\}_{k=1}^n$. Definimos então, por extensão linear, $T(d_{e_i^*, e_j}) = d_{e_j, e_i^*}$. A aplicação T é um isomorfismo, pois é completamente análoga àquela que foi construída no item (vi) da demonstração da proposição 3.18. □

Proposição 4.10. *Dado $V \in Irr(G, \mathbb{C})$ temos:*

(i) C_V *é a complexificação de* $\mathcal{E}_V$.

(ii) C_V *e* $\mathcal{E}_V$ *são invariantes por L e R.*

(iii) Se $g \in \mathcal{L}_G$ então são equivalentes:

(A) Cada autoespaço de $\Delta_g|_{\mathcal{E}_V}$ munido da ação à esquerda L está em $Irr(G, \mathbb{R})$.

(B) Cada autovalor de Δ_g^V tem multiplicidade $\begin{cases} 1, & V \in Irr(G, \mathbb{C})_\mathbb{R} \cup Irr(G, \mathbb{C})_\mathbb{C} \\ 2, & V \in Irr(G, \mathbb{C})_\mathbb{H} \end{cases}$.

Demonstração. Dada $f \in C^\infty(G, \mathbb{C})$ defina $Re(f)$ e $Im(f)$ como sendo as partes real e imaginária da função f em $C^\infty(G, \mathbb{R})$, respectivamente. Ou seja temos a seguinte decomposição: $f = Re(f) + iIm(f)$. Defina:

$$\begin{aligned} c : C^\infty(G, \mathbb{C}) &\longrightarrow C^\infty(G, \mathbb{C}) \\ f &\mapsto \overline{f}. \end{aligned}$$

Pela observação 3.1 temos que $c(I(V)) = I(\overline{V}) = I(V^*)$. Assim, concluímos que $c(I(V) + I(V^*)) = I(V) + I(V^*)$, ou seja, o espaço $I(V) + I(V^*)$ é invariante por c. Além disso, $I(V) + I(V^*)$ é invariante pelas aplicações $Re(.)$ e $Im(.)$. Logo:

$$C^\infty(G, \mathbb{C}) = Re(C^\infty(G, \mathbb{C})) \oplus iIm(C^\infty(G, \mathbb{C})) = C^\infty(G, \mathbb{R}) \oplus iC^\infty(G, \mathbb{R}).$$

Além disso, seja qual for o tipo de V, $C_V := I(V) + I(V^*)$. Com isto:

$$C_V = Re(C_V) \oplus iIm(C_V) = (C_V \cap C^\infty(G,\mathbb{R})) \oplus i(C_V \cap C^\infty(G,\mathbb{R})),$$

ou seja, $C_V = \mathcal{E}_V \oplus i\mathcal{E}_V$, provando (i).

O item (ii) segue da seção 3.4, visto que C_V é da forma $(S(V) + S(V^*))$, invariante por L e R. Note que $A(G,\mathbb{C}) \cap C^\infty(G,\mathbb{R})$ pode ser visto como submódulo de $A(G,\mathbb{C})$, tanto em L quanto em R, pois a composição de uma função real com uma translação qualquer continua sendo uma função real. Segue da proposição 3.15 que $\mathcal{E}_V$ é uma soma de componentes isotípicas da forma $(S(V) + S(V^*)) \cap C^\infty(G,\mathbb{R})$ em $A(G,\mathbb{C}) \cap C^\infty(G,\mathbb{R})$, logo invariante por L e R.

Resta mostrar (iii). Considere λ um autovalor arbitrário de Δ_g^V com multiplicidade l e autoespaço associado V^λ. Pelo item (iii) da proposição 4.8, podemos considerar também o autoespaço $(V^*)^\lambda$ de λ com respeito ao operador $\Delta_g^{V^*}$, o qual satisfaz a relação $\dim_{\mathbb{C}}(V^*)^\lambda = \dim_{\mathbb{C}} V^\lambda = l$. Defina também os autoespaços de λ com respeito a $\Delta_g|_{C_V}$ e $\Delta_g|_{\mathcal{E}_V}$ como sendo C_V^λ e $\mathcal{E}_V^\lambda$, respectivamente.

Como estamos considerando métricas invariantes à esquerda $g \in \mathcal{L}_G$, então V^λ e C_V^λ são invariantes pela ação de L, visto que dada uma autofunção f de λ então para todo $x \in G$, $f \circ l_{x^{-1}}$ também é autofunção do autovalor λ, uma vez que $l_{x^{-1}}$ é isometria.

Se V é de tipo real ou quaterniônico, então $C_V = I(V) \simeq V^{\oplus n} \simeq V^* \otimes V$, logo $C_V^\lambda \simeq V^* \otimes V^\lambda \simeq (V^*)^{\oplus l} \simeq V^{\oplus l}$. Se V é de tipo complexo então $C_V = I(V) \oplus I(V^*)$ e, de forma análoga, obtemos $C_V^\lambda \simeq (V^* \otimes V^\lambda) \oplus (V \otimes (V^*)^\lambda) \simeq (V^*)^{\oplus l} \oplus V^{\oplus l} \simeq (V^* \oplus V)^{\oplus l}$.

Sumarizando,

$$C_V^\lambda \simeq \begin{cases} V^{\oplus l}, & V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \\ V^{\oplus l}, & V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{H}} \\ (V^* \oplus V)^{\oplus l}, & V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{C}} \end{cases}$$

Pelo teorema 3.12 existe $U \in Irr(G,\mathbb{R})$ tal que

$$C_V^\lambda \simeq \begin{cases} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U)^{\oplus l} \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U^{\oplus l}, & V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \\ (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U)^{\oplus l/2} \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U^{\oplus l/2}, & V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{H}} \\ (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U)^{\oplus l} \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U^{\oplus l}, & V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{C}} \end{cases}$$

Note que, conforme a proposição 4.9, l é um número par se consideramos V de tipo quaterniônico e, portanto, $l/2$ é um número inteiro na construção acima.

Além disso,

$$r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(C_V^\lambda) \simeq \begin{cases} U^{\oplus l} \oplus iU^{\oplus l}, & V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \\ U^{\oplus l/2} \oplus iU^{\oplus l/2}, & V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{H}} \\ U^{\oplus l} \oplus iU^{\oplus l}, & V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{C}} \end{cases}$$

Sabemos que $C_V = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_V$ e $\mathcal{E}_V$ é invariante por Δ_g. Vale também $C_V^\lambda = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_V^\lambda$ e $r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(C_V^\lambda) \simeq \mathcal{E}_V^\lambda \oplus i\mathcal{E}_V^\lambda$. Logo, concluímos que:

$$\mathcal{E}_V^\lambda \simeq \begin{cases} U^{\oplus l}, & V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \\ U^{\oplus l/2}, & V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{H}} \\ U^{\oplus l}, & V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{C}} \end{cases}$$

Em particular para V de tipo real ou complexo temos que $\mathcal{E}_V^\lambda$ é irredutível se, e somente se, $l = 1$. No caso do tipo quaterniônico, $\mathcal{E}_V^\lambda$ é irredutível se, e somente se, $l = 2$, o que termina a prova. □

Corolário 4.11. *Seja $g \in \mathcal{L}_G$. Δ_g é irredutível real se, e somente se, valem todos os itens a seguir:*

(i) Dados $V, W \in Irr(G,\mathbb{C})$ tais que $V, V^* \ncong W$ então Δ_g^V e Δ_g^W não possuem autovalor em comum.

(ii) Dado $V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \cup Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{C}}$ então Δ_g^V só possui autovalores simples.

(iii) Dado $V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{H}}$ então Δ_g^V só possui autovalores de multiplicidade 2.

Demonstração. ($\Rightarrow$) (i) Se Δ_g^V e Δ_g^W tivessem autovalor em comum λ então Δ_g teria o autoespaço $\Delta(\lambda)$ contendo $V_\lambda \oplus W_\lambda$, contradizendo a irredutibilidade de Δ_g. Os itens (ii) e (iii) são imediatos da proposição anterior.

($\Leftarrow$) Por (ii) e (iii) podemos usar novamente a equivalência da proposição anterior para concluir que cada operador $\Delta_g|_{I(V)\cap C^\infty(G,\mathbb{R})}$ é irredutível. Além disso, pela ortogonalidade fornecida por (i) cada autoespaço $\Delta(\lambda)$ está contido em uma única componente $I(V) \cap C^\infty(G,\mathbb{R})$. Logo Δ_g é irredutível real. □

Observação. Lembramos que para as representações de tipo complexo davam problema em configurar Δ_g como operador G-simples, já que os autoespaços, estavam divididos em duas componentes isotípicas distintas (a original e sua dual). Contudo, o lema 3.12, nos mostra que a soma dessas representações está associada a uma única representação real, ou seja, essas componentes que davam problema antes, viram uma componente só quando passamos para os reais. Da mesma forma, pelo mesmo lema, o dobro dos autoespaços das representações de tipo quaterniônico se transformam em um só no processo de passagem para os reais. Essencialmente, esta é a ideia dos resultados acima.

O corolário 4.11 nos fornece um critério para determinar quando Δ_g é G-simples real para uma determinada métrica invariante à esquerda $g \in \mathcal{L}_G$. Resta apenas expandirmos esse critério para verificar se as métricas do conjunto $\mathcal{L}_G$ satisfazem genericamente esta propriedade, ou seja, a existência de um conjunto residual $B \subset \mathcal{L}_G$ tal que para toda métrica $g \in B$, vale que Δ_g é G-simples real.

A fim de obter este aprimoramento, reescrevemos tal critério usando correspondências com certos espaços de matrizes simétricas e identificando os autovalores a partir dos polinômios característicos dos operadores Δ_g^V, permitindo-nos enxergar melhor a questão da genericidade neste novo ambiente.

Daqui para o final da seção, vamos fazer apenas uma releitura do corolário 4.11 e ver como essa releitura nos permitirá acrescentar a questão da genericidade ao nosso critério.

Inicialmente, definimos $Sym^2(\mathfrak{g}) := Span_{\mathbb{R}}\{Y.Z := \frac{1}{2}(Y \otimes Z + Z \otimes Y) \mid Y, Z \in \mathfrak{g}\}$ (note que $Y^2 := Y.Y = Y \otimes Y$) e o subconjunto $Sym^2_+(\mathfrak{g}) := \{Y_1^2 + \ldots + Y_m^2 \mid \{Y_k\}_{k=1}^m \text{ é base de } \mathfrak{g}\}$.

Proposição 4.12. *O conjunto $Sym^2(\mathfrak{g})$ pode ser visto como o espaço de matrizes simétricas $S_m(\mathbb{R}) := \{A \in M_m(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$, onde $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$.*

Demonstração. Notemos então que, dados $Y, Z \in \mathfrak{g}$, o produto $Y.Z$ corresponde à parte simétrica da forma bilinear $Y \otimes Z : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $Y \otimes Z(\mu, \eta) = \mu(Y).\eta(Z)$. De fato:

$$Y \otimes Z = \frac{1}{2}(Y \otimes Z + Z \otimes Y) + \frac{1}{2}(Y \otimes Z - Z \otimes Y) = S(Y \otimes Z) + A(Y \otimes Z),$$

onde $S(Y \otimes Z) = \frac{1}{2}(Y \otimes Z + Z \otimes Y) = Y.Z$ é a parte simétrica de $Y \otimes Z$, enquanto que $A(Y \otimes Z) = \frac{1}{2}(Y \otimes Z - Z \otimes Y) = Y.Z$ é a parte anti-simétrica de $Y \otimes Z$. Logo, o conjunto gerado pelos elementos $Y.Z$ pode ser visto como o espaço de formas bilineares simétricas sobre $\mathfrak{g}^*$, o qual por sua vez é identificado matricialmente como $S_m(\mathbb{R})$, se fixada uma determinada base. $\square$

Proposição 4.13. *Seja $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$. Dado $S = \sum_{k=1}^{m} Y_k^2 \in Sym^2_+(\mathfrak{g})$, existe uma métrica invariante à esquerda $g_S = \langle ., . \rangle_S$ que torna a base de campos $\{Y_k\}_{k=1}^m$ g_S-ortonormal.*

Demonstração. Construímos a métrica com auxílio dos elementos da base de $\mathfrak{g}$, primeiramente na fibra $T_eG \simeq \mathfrak{g}$ usando a identificação $Y_j^{(e)} = Y_j(e) \sim Y_j$:

$$\langle Y_i^{(e)}, Y_j^{(e)} \rangle_S := \sum_{k=1}^{m} Y_k \otimes Y_k(Y_i^*, Y_j^*),\ 1 \leq i, j \leq m,$$

onde $\{Y_k^*\}_{k=1}^m$ é base dual de $\{Y_k\}_{k=1}^m$.

Para definirmos $\langle ., . \rangle_S$ numa fibra arbitrária T_xG de modo a termos a invariância à esquerda desejada, basta fazermos:

$$\langle dl_x(e).Y_i^{(e)}, dl_x(e).Y_j^{(e)} \rangle_S := \langle Y_i^{(e)}, Y_j^{(e)} \rangle_S,\ 1 \leq i, j \leq m,$$

esta definição está bem posta pois $dl_x(e)$ é um isomorfismo linear de T_eG em T_xG, ou seja, garantimos a definição em toda a fibra T_xG e mais, pela própria construção, $\langle ., . \rangle_S$ deve ser invariante à esquerda (note também que as propriedades de produto interno são satisfeitas trivialmente). A ortonormalidade é obtida a partir do fato que $Y_k \otimes Y_k(Y_i^*, Y_j^*) = Y_i^*(Y_k).Y_j^*(Y_k) = \delta_{ik}\delta_{jk}$, implicando $\langle Y_i^{(e)}, Y_j^{(e)} \rangle_S = \delta_{ij}$. □

Proposição 4.14. *$Sym_+^2(\mathfrak{g})$ é aberto em $Sym^2(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Inicialmente fazemos a identificação $Sym^2(\mathfrak{g}) \sim S_m(\mathbb{R})$ presente na proposição 4.12. Basta mostrarmos que, nesta correspondência, o conjunto $Sym_+^2(\mathfrak{g})$ equivale ao subconjunto $S_m^+(\mathbb{R}) := \{A \in S_m(\mathbb{R}) \mid A \text{ é positiva definida}\}$, onde $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$.

As construções na demonstração da proposição 4.13 mostram que dado um elemento $S = \sum\limits_{k=1}^{m} Y_k^2 \in Sym_+^2(\mathfrak{g})$, então S pode ser visto, além de uma forma bilinear simétrica, como um produto interno $\langle ., . \rangle$ sobre $\mathfrak{g}^*$ via regra:

$$\langle Y_i^*, Y_j^* \rangle = S(Y_i^*, Y_j^*) = \sum_{k=1}^{m} Y_k \otimes Y_k(Y_i^*, Y_j^*),\ 1 \leq i, j \leq m$$

Reciprocamente, cada forma bilinear simétrica positiva-definida $B(., .)$ sobre $\mathfrak{g}^*$ pode ser identificada como $\sum\limits_{k=1}^{n} Z_k^2$ para alguma base $\{Z_k\}_{k=1}^m$ de $\mathfrak{g}$. Portanto, $Sym_+^2(\mathfrak{g})$, visto em $S_m(\mathbb{R})$, é o espaço das matrizes simétricas que estão associadas a uma forma bilinear positiva-definida numa dada base fixa, coincidindo justamente com o conjunto $S_m^+(\mathbb{R})$, o qual é aberto em $S_m(\mathbb{R})$. □

Proposição 4.15. *$\mathcal{L}_G$ está em correspondência biunívoca com $Sym_+^2(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Basta provar a correspondência com $S_m^+(\mathbb{R})$, o qual, por sua vez, é isomorfo ao espaço dos produtos internos sobre $\mathfrak{g}$ (que nada mais é que um espaço de formas bilineares simétricas positivas-definidas).

Dada uma métrica $g = \langle .,. \rangle \in \mathcal{L}_G$. Temos:

$$\langle X(x), Y(x) \rangle = \langle dl_x(e)X(e), dl_x(e).Y(e) \rangle = \langle X(e), Y(e) \rangle, \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \ \forall x \in G,$$

o que induz naturalmente o produto interno $\langle X, Y \rangle = \langle X(e), Y(e) \rangle$, na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Reciprocamente se definimos $\langle X(x), Y(x) \rangle := \langle X, Y \rangle$ para todos $x \in G$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$ a partir do produto interno $\langle .,. \rangle$ sobre $\mathfrak{g}$, então obtemos:

$$\langle dl_y(x).X(x), dl_y(x).Y(x) \rangle = \langle X(yx), Y(yx) \rangle = \langle X, Y \rangle = \langle X(x), Y(x) \rangle,$$

o que demonstra que construímos uma métrica invariante à esquerda em G, induzida naturalmente pelo produto interno dado sobre $\mathfrak{g}$. □

Observação. Como $Sym^2(\mathfrak{g})$ é identificado com o espaço de matrizes simétricas $S_m(\mathbb{R})$ e $Sym^2_+(\mathfrak{g})$ é um de seus abertos pela proposição 4.14, então ambos são variedades de dimensão $m(m+1)/2$. Logo, a proposição anterior nos permite munir $\mathcal{L}_G$ também com a estrutura de uma variedade de dimensão $m(m+1)/2$. Além disso, pela demonstração anterior temos que uma métrica invariante à esquerda é completamente caracterizada pela sua restrição à fibra T_eG (fornecendo um produto interno associado em $\mathfrak{g}$), logo concluímos que a métrica construída na proposição 4.13 é única (isto também fica claro ao analisar a demonstração da mesma).

Dado $(V, \rho) \in Irr(G, \mathbb{C})$ defina agora a aplicação linear

$$D_V : Sym^2(\mathfrak{g}) \longrightarrow End(V), \ D_V(Y.Z) = -\frac{1}{2}(\rho_*(Y) \circ \rho_*(Z) + \rho_*(Z) \circ \rho_*(Y))$$

Proposição. *Cada elemento na imagem de D_V é auto-adjunto com respeito a um produto interno G-equivariante (portanto diagonalizável com autovalores reais).*

Demonstração. Seja $\langle .,. \rangle$ produto interno G-equivariante. Dados $Y, Z \in Sym^2(\mathfrak{g})$, é suficiente provar que $A := \rho_*(Y) \circ \rho_*(Z) + \rho_*(Z) \circ \rho_*(Y)$ é auto-adjunto. Identificando $x.v := \rho(x).v$, obtemos a seguinte identidade:

$$\langle x.v, w \rangle = \langle x.v, x.(x^{-1}.w) \rangle = \langle v, x^{-1}.w \rangle, \ \forall x \in G, \forall v, w \in V$$

Derivando a igualdade acima em $x = e$ na direção de Y, obtemos:

$$\langle \rho_*(Y).v, w\rangle = -\langle v, \rho_*(Y).w\rangle, \ \forall v, w \in V$$

e, com isto,

$$\langle x.\rho_*(Y).v, w\rangle = \langle \rho_*(Y).v, x^{-1}.w\rangle = -\langle v, \rho_*(Y).(x^{-1}.w)\rangle, \ \forall x \in G, \forall v, w \in V.$$

Novamente derivando em $x = e$, mas desta vez na direção de Z, chegamos a:

$$\langle \rho_*(Z) \circ \rho_*(Y).v, w\rangle = \langle v, \rho_*(Y) \circ \rho_*(Z).w\rangle, \ \forall v, w \in V,$$

daí, por esta igualdade, concluímos que $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$, conforme queríamos. □

Observação. Dado $\{Y_k\}_{k=1}^m$ uma base ortonormal com respeito à métrica $g \in \mathcal{L}_G$, então:

$$D_V(Y_1^2 + \ldots + Y_m^2) = -\sum_{k=1}^{m}(\rho_*(Y_k))^2 = \Delta_g^V.$$

Defina agora:

$$\begin{aligned} P_V : Sym^2(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \mathbb{C}[x] \\ S &\mapsto \det(D_V(S) - x\, id) \end{aligned}$$

Basicamente, P_V leva um elemento $S \in Sym^2(\mathfrak{g})$ no polinômio característico $P_V(S)$ do endomorfismo $D_V(S)$.

É possível construir também uma aplicação $res : \mathbb{C}[x] \times \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisfaz:

(i) Dados polinômios $p = \sum_j a_j x^j$ e $q = \sum_k b_k x^k$ então $res(p, q) = \sum_{j,l,k,m} c_{j,l,k,m} a_j^l b_k^m$ para um número finito de coeficientes $c_{j,l,k,m}$.

(ii) $res(p, q) \neq 0 \Leftrightarrow p$ e q não possuem raízes em comum.

A aplicação *res* é chamada *resultante* (para maior detalhamento acerca da existência desse tipo de construção, consultar [GKZ]).

Definimos também o *discriminante*

$$dis : \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}, \ dis(p) = res(p, p'),$$

o qual mede a multiplicidade das raízes de p do seguinte modo: $dis(p) = 0$ se, e somente se, p admite alguma raiz de multiplicidade ≥ 2 (equivalentemente $dis(p) \neq 0$ se, e somente se, toda raiz de p tem multiplicidade 1).

Sejam $V, W \in Irr(G, \mathbb{C})$, consideramos então as seguintes funções:

$$a_{V,W}, b_V, c_V : Sym^2(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

(i) $a_{V,W}(S) = res(P_V(S), P_W(S)),\ \forall S \in Sym^2(\mathfrak{g})$

(ii) $b_V(S) = res(P_V(S), P'_V(S)) = dis(P_V(S)),\ \forall S \in Sym^2(\mathfrak{g})$

(ii) $c_V(S) = res(P_V(S), P''_V(S)),\ \forall S \in Sym^2(\mathfrak{g})$

Proposição 4.16. *Dados $V, W \in Irr(G, \mathbb{C})$, valem as seguintes afirmações:*

(i) $a_{V,W} \neq 0 \Leftrightarrow a_{V,W}|_{Sym^2_+(\mathfrak{g})} \neq 0 \Leftrightarrow \exists S \in Sym^2_+(\mathfrak{g}),\ P_V(S)$ *e* $P_W(S)$ *não possuem raízes em comum* $\Leftrightarrow$ *existe* $g \in \mathcal{L}_G$ *tal que* Δ^V_g *e* Δ^W_g *não tem autovalores em comum.*

(ii) $b_V \neq 0 \Leftrightarrow b_V|_{Sym^2_+(\mathfrak{g})} \neq 0 \Leftrightarrow \exists S \in Sym^2_+(\mathfrak{g}),\ P_V(S)$ *só possui raízes simples* $\Leftrightarrow$ *existe* $g \in \mathcal{L}_G$ *tal que* Δ^V_g *só tem autovalores simples.*

(iii) Considere V de tipo quaterniônico. Então $c_V \neq 0$ equivale a $c_V|_{Sym^2_+} \neq 0$ e também equivale a existência de $g \in \mathcal{L}_G$ tal que Δ^V_g possui todos os autovalores com multiplicidade 2.

Demonstração. Vamos mostrar apenas o item (i) em vista de que os demais são similares. O item (i) é composto de quatro afirmações equivalentes as quais chamaremos, em ordem, de (A), (B), (C) e (D).

(A) $\Rightarrow$ (B) Consideraremos as identificações feitas na proposição 4.14, as quais são dadas por $Sym^2(\mathfrak{g}) \sim S_m(\mathbb{R})$ e $Sym^2_+(\mathfrak{g}) \sim S^+_m(\mathbb{R})$. A aplicação $a_{V,W}$ pode ser vista como um polinômio nas variáveis com respeito às entradas das matrizes simétricas de seu argumento e, portanto, $a_{V,W}$ não se anula se, e somente se, ele não se anular em cada um de seus abertos, devido à sua analiticidade. Em particular, se $a_{V,W}$ não se anula em $S_m(\mathbb{R})$ então também não se anula no aberto $S^+_m(\mathbb{R})$.

(B) $\Rightarrow$ (C) Imediato.

(C) $\Rightarrow$ (D) Tomando $S \in Sym^2_+(\mathfrak{g})$ tal que $P_V(S)$ e $P_W(S)$ não possuem raízes em comum, então existe uma base $\beta = \{Y_k\}_{k=1}^m \subset \mathfrak{g}$ tal que $S = \sum_{k=1}^m Y_k^2$. Construindo $g \in \mathcal{L}_G$ tal que β é base g-ortonormal obtemos que $\Delta^V_g = D_V(S)$ e $\Delta^W_g = D_W(S)$. Logo, os autovalores de Δ^V_g e Δ^W_g são dados, respectivamente, pelas raízes de $P_V(S)$ e $P_W(S)$, pois são os polinômios característicos de $D_V(S)$ e $D_W(S)$. Portanto, não compartilham autovalor em comum.

(D) $\Rightarrow$ (A) Tome $g \in \mathcal{L}_G$ tal que Δ^V_g e Δ^W_g não têm autovalor em comum. Considere também $\beta = \{Y_k\}_{k=1}^n \subset \mathfrak{g}$ base g-ortonormal de $\mathfrak{g}$ e $S = \sum_{k=1}^n Y_k^2$. Então $\Delta^V_g = D_V(S)$ e $\Delta^W_g = D_W(S)$, ou seja, os polinômios característicos $P_V(S)$ e $P_W(S)$ não possuem raiz em comum, logo $a_{V,W}(S) \neq 0$. $\square$

Chegamos, enfim, ao resultado principal desta dissertação:

Proposição 4.17. *G admite métrica $g \in \mathcal{L}_G$ tal que Δ_g é irredutível real se, e somente se, as condições abaixo são simultaneamente satisfeitas:*

(i) $a_{V,W} \neq 0$, $\forall V, W \in Irr(G, \mathbb{C})$ *com* $V, V^* \neq W$.

(ii) $b_V \neq 0$, $\forall V \in Irr(G, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \cup Irr(G, \mathbb{C})_{\mathbb{C}}$.

(iii) $c_V \neq 0$, $\forall V \in Irr(G, \mathbb{C})_{\mathbb{H}}$.

Mais ainda, no caso da existência temos que o conjunto de bases ortonormais referentes a métricas em $\mathcal{L}_G$, que tornam Δ_g irredutível real, é residual em $\mathfrak{g}^{\oplus m}$, onde $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam $g \in \mathcal{L}_G$ tal que Δ_g é irredutível real e $S = Y_1^2 + \ldots + Y_n^2 \in Sym_+^2(\mathfrak{g})$ com $\{Y_k\}_{k=1}^m$ base g-ortonormal de $\mathfrak{g}$. Temos $D_V(S) = \Delta_g^V$ com polinômio característico $P_V(S)$, para cada $V \in Irr(G, \mathbb{C})$. Logo, aplicando $a_{V,W}$, b_V e c_W a S, temos exatamente uma releitura da ida do corolário 4.11.

($\Leftarrow$) Pela proposição 4.16, as aplicações $a_{V,W}$, b_V e c_V não se anulam em $Sym_+^2(\mathfrak{g})$. Construa a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathfrak{g}^{\oplus m} &\longrightarrow Sym^2(\mathfrak{g}) \\ (Y_1, \ldots, Y_m) &\mapsto Y_1^2 + \ldots + Y_m^2. \end{aligned}$$

Então vale que $Sym_+^2(\mathfrak{g}) \subset F(\mathfrak{g}^{\oplus m})$. Sabemos também que $Sym_+^2(\mathfrak{g})$ é aberto em $Sym^2(\mathfrak{g})$, conforme proposição 4.14. Definimos agora

$$\tilde{a}_{V,W} := a_{V,W} \circ F, \quad \tilde{b}_V := b_V \circ F \quad \text{e} \quad \tilde{c}_V := c_V \circ F.$$

Podemos então trocar $a_{V,W}$, b_V e c_V por $\tilde{a}_{V,W}$, $\tilde{b}_V$ e $\tilde{c}_V$ nos itens (i), (ii) e (iii) do enunciado, a fim de efetuar a prova.

Considere

$$N := \left(\bigcup_{(I)} \tilde{a}_{V,W}^{-1}\{0\} \right) \cup \left(\bigcup_{(II)} \tilde{b}_V^{-1}\{0\} \right) \cup \left(\bigcup_{(III)} \tilde{c}_V^{-1}\{0\} \right) \subset \mathfrak{g}^{\oplus n},$$

onde (I) percorre as representações $V, W \in Irr(G; \mathbb{C})$ com $V, V^* \ncong W$, (II) percorre as representações $V \in Irr(G, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \cup Irr(G, \mathbb{C})_{\mathbb{C}}$ e (III) percorre as representações $V \in Irr(G, \mathbb{C})_{\mathbb{H}}$.

Afirmação: N é uma união enumerável de conjuntos magros. Consequentemente, $\mathfrak{g}^{\oplus m}\setminus N$ é uma intersecção enumerável de residuais e, portanto, intersecção enumerável de abertos e densos. Logo, também residual.

Além disso, o conjunto $U = \{(Y_1,..,Y_m) \mid \{Y_k\}_{k=1}^m \text{ é L.I.}\}$ é aberto e denso em $\mathfrak{g}^{\oplus m}$, pois $\mathfrak{g}^{\oplus m}$ pode ser identificado como o espaço de matrizes $M_m(\mathbb{R})$, onde a k-ésima coluna de um elemento $A \in M_m(\mathbb{R})$ corresponde a k-ésima coordenada Y_k^A de um elemento $Y^A = (Y_1^A, ..., Y_m^A)$ em $\mathfrak{g}^{\oplus m}$, sendo a correspondência de U em $M_m(\mathbb{R})$ dada por $\tilde{U} = \{A \in M_m(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$, o qual é aberto e denso em $M_m(\mathbb{R})$.

Com isto temos que $B = (\mathfrak{g}^{\oplus m}\setminus N) \cap U$ é ainda residual em $\mathfrak{g}^{\oplus m}$ e dado $(Y_1, ..., Y_m) \in B$, a métrica g que torna $\{Y_k\}_{k=1}^m$ uma base g-ortonormal, construída na proposição 4.13, satisfaz Δ_g G-simples real. De fato, $S = \sum_{k=1}^{m} Y_k^2$ satisfaz:

(a) $a_{V,W}(S) \neq 0$, para $V, W \in Irr(G,\mathbb{C})$ com $V, V^* \neq W$

(b) $b_V \neq 0$, para $V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \cup Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{C}}$

(c) $c_V(S) \neq 0$, para $V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{H}}$,

Estes itens compõem exatamente uma releitura da recíproca do corolário 4.11 aplicada à métrica g.

Prova da afirmação: basta verificarmos que $\tilde{a}_{V,W}^{-1}\{0\}$, $\tilde{b}_V^{-1}\{0\}$ e $\tilde{c}_V^{-1}\{0\}$ são conjuntos magros, pois segue do corolário 3.22 que N é uma união enumerável. Podemos enxergar $a_{V,W}$ como um polinômio de $m(m+1)$ variáveis, em que cada elemento do domínio identifica algum $S \in Sym(\mathfrak{g})$ e, portanto, o conjunto de raízes de $a_{V,W}$ é um subconjunto magro de $Sym^2(\mathfrak{g})$, o que implica que $\tilde{a}_{V,W}^{-1}\{0\}$ é de fato magro em $\mathfrak{g}^{\oplus m}$. Analogamente, $\tilde{b}_V^{-1}\{0\}$ e $\tilde{c}_V^{-1}\{0\}$ também o são, terminando a prova. $\square$

A ideia deste final de seção foi resumidamente termos readaptado o corolário 4.11 para uma nova linguagem com auxílio de polinômios, os quais forneciam uma quantidade enumerável de raízes e nos permitiam concluir a generecidade.

4.3 EXEMPLO: SU(2)

Vamos, por fim, aplicar o critério apresentado na proposição 4.17 ao grupo $SU(2)$. Para isso, usaremos os resultados obtidos na seção 3.5.

Lembremos que construímos o espaço vetorial $V_m = span_{\mathbb{C}}\{p_{m,j}(z_1, z_2)\}_{j=0}^{m}$ em termos dos polinômios $p_{m,j}(z_1, z_2) = z_1^j z_2^{m-j}$ para $m \in \mathbb{N}$ cujos elementos de V_m eram ditos *polinômios homogêneos de grau m* e a dimensão de V_m sendo $m+1$ (sobre $\mathbb{C}$).

Dado $x = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{pmatrix} \in SU(2)$, a ação munida sobre V_m, $(.) : SU(2) \times V_m \longrightarrow V_m$, era dada da seguinte maneira:

$$(x.p)(z_1, z_2) := p\left((z_1\ z_2)\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{pmatrix}\right) = p(z_1 a_x + z_2 c_x\ ,\ z_1 b_x + z_2 d_x).$$

Vimos que (V_m, ρ_m) para $m \in \mathbb{N}$ caracterizavam todas as representações irredutíveis de $SU(2)$, ou seja, temos um conjunto de representantes de $Irr(SU(2), \mathbb{C})$.

Teorema. *$SU(2)$ satisfaz os itens (i), (ii) e (iii) da proposição 4.17.*

Demonstração. Dado $m+1 \in \mathbb{N}$, a única representação irredutível de dimensão $m+1$ é justamente V_m, ou seja, $SU(2)$ não admite representações de tipo complexo.

Afirmação: Se m é par então V_m é de tipo real e se m é ímpar então V_m é de tipo quaterniônico (verificar detalhes em [BD], capítulo 6).

Seja $\beta = \{H, A, B\}$ base da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ dada por:

$$H = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Efetuando os cálculos, obtemos a igualdade

$$D_{V_m}(H^2 + A^2 + B^2) = m(m+2)Id_{V_m}.$$

Com isto, $m(m+2)$ é a única raiz do polinômio característico $P_{V_m}(H^2 + A^2 + B^2)$ do endomorfismo $D_{V_m}(H^2 + A^2 + B^2)$. Logo, para $k \neq m$ temos $P_{V_k}(H^2 + A^2 + B^2)$ e $P_{V_m}(H^2 + A^2 + B^2)$ com raízes distintas. Ou seja, $a_{V_k,V_m}(H^2 + A^2 + B^2) \neq 0$ sempre que $k \neq m$, provando (i).

Para o item (iii) temos que a matriz de $(\rho_m)_*(H)$ na base $\{p_{m,j}\}_{j=0}^{m} \subset V_m$ é dada por:

$$diag(im, i(m-2), i(m-4), ..., -i(m-2), -im).$$

Daí, para V_m de tipo quaterniônico temos m ímpar e cada um dos autovalores

$$m^2,\ (m-2)^2,\ ...,\ 3^2,\ 1$$

do endomorfismo $D_{V_m}(H^2) = -((\rho_m)_*(H))^2$ tem multiplicidade 2, ou seja, $c_{V_m}(H^2) \neq 0$ para cada V_m de tipo quaterniônico.

Para o item (ii), resta considerar V_m de tipo real, ou seja, com m par. Para $m = 0$ não há nada a fazer. Considere então $m > 0$. A ideia é mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $b_{V_m}(H^2 + \varepsilon A^2) \neq 0$.

Temos que $(\rho_m)_*(A)$ é a aplicação

$$p_{m,j} \mapsto i(m-j)p_{m,j+1} + ijp_{m,j-1},$$

enquanto que $-((\rho_m)_*(A))^2$ é a aplicação

$$p_{m,j} \mapsto (m-j)(m-j-1)p_{m,j+2} + j(j-1)p_{m,j-2} + k_{m,j}p_{m,j},$$

algum $k_{m,j} \in \mathbb{R}$, em que convencionamos $p_{m,j} = 0$ se $j < 0$ ou $j > m$.

Logo $W_0 := Span\{p_{m,2j}\}_{j=0}^{m/2}$ e $W_1 := Span\{p_{m,2j-1}\}_{j=1}^{m/2}$ são invariantes por $-((\rho_m)_*(A))^2$.

Além disso, efetuando mais alguns cálculos, vemos que $-((\rho_m)_*(A))^2|_{W_0}$ é tri-diagonal (possui três diagonais centrais) com subdiagonal (diagonal abaixo da principal) formada por $m(m-1)$, $(m-2).(m-3)$, ..., 2.1 e super-diagonal (diagonal acima da principal) formada por 2.1, 4.3, ..., $m.(m-1)$. Para $-((\rho_m)_*(A))^2|_{W_1}$, é bastante análogo.

Dado $\varepsilon > 0$, temos $-((\rho_m)_*(H))^2$ diagonal e podemos construir matrizes ainda tri-diagonais associadas a $T_0(\varepsilon) := (D_{V_m}(H^2 + \varepsilon A^2))|_{W_0}$ e $T_1(\varepsilon) := (D_{V_m}(H^2 + \varepsilon A^2))|_{W_1}$. Daí, $T_0(\varepsilon)$ e $T_1(\varepsilon)$ têm sempre autovalores simples e no limite $\varepsilon \to 0$, temos que $T_0(0)$ e $T_1(0)$ não compartilham autovalores em comum, o que implica na existência de $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $D_{V_m}(H^2 + \varepsilon A^2)$ tem espectro simples, ou seja, $b_{V_m}(H^2 + \varepsilon A^2) \neq 0$, provando (ii). $\square$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos concluir que o artigo elaborado por D. Schueth [Sch] é um problema adaptado do trabalho de K. Uhlenbeck [Uhl], considerando a presença de certas simetrias bem comportadas. Aproveitamos a gama de estruturas que se relacionam em um grupo de Lie com métricas invariantes à esquerda para transformar um problema de equações diferenciais, sobre calcular o espectro do laplaciano, em um problema puramente algébrico. Passamos a enxergar o operador em subestruturas algébricas puras — as representações irredutíveis da representação regular à esquerda, responsável por empacotar e organizar as simetrias consideradas e, que no final das contas, nos evidencia que esta organização recai novamente em [Uhl], visto que as condições do critério principal obtido passam justamente pelo fato do operador laplaciano ter espectro simples em cada sub-representação irredutível da representação regular à direita que, dentre outras coisas, é responsável por transformar o laplaciano em operadores lineares de dimensão finita sobre cada uma destas sub-representações.

APÊNDICE

1 ANÁLISE FUNCIONAL

H_A será o espaço $C^0(G,\mathbb{C})$ munido da norma do supremo $|f|_A = \sup\{|f(g)| g \in G\}$, enquanto que H_B será o espaço $C^0(G,\mathbb{C})$ munido do produto interno $\langle u, v\rangle = \int_G u\overline{v}$ com norma $|.|_B$ usual proveniente deste produto interno. Denotaremos $H = C^0(G,\mathbb{C})$ sempre que a topologia não tiver influência.

Os resultados desta seção são tratados em [BD] e [Rud].

Proposição. *(i) $id : H_A \longrightarrow H_B$ é contínua e $|f|_B \leq |f|_A$.*

(ii) Uma aplicação linear entre espaços lineares normados $K : X \longrightarrow Y$ é contínua se, e somente se, existe uma constante a tal que $|K(x)|_X \leq a.|x|_Y$, para todo $x \in X$.

(iii) Dada $f \in H$ e uma aplicação contínua $k : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$, então a aplicação $K_f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $K_f(g) = \int_G k(g,h)f(h)dh$ é contínua.

(iv) Se definimos $K : H_B \longrightarrow H_A$ por $K(f) = K_f$ então K é contínua.

Demonstração. Trata-se de um exercício usual de análise deixado para verificação. $\square$

Definição. *considere L um subconjunto de um espaço vetorial normado Y. Se toda sequência em L possui subsequência convergente em Y, então L é dito* pré-compacto. *$K : X \longrightarrow Y$ é dito* compacto *se mapeia conjuntos limitados $B \subset X$ em conjuntos pré-compactos $K(B) \subset Y$.*

Definição. *$L \subset H$ é equicontínuo em x_0 se dado $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança U de x_0 tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in U, \forall f \in L$. L é equicontínuo se o for em todo ponto de G.*

Teorema (Ascoli). *$L \subset H_A$ é pré-compacto se, e somente se, L é equicontínuo e limitado.*

A prova deste teorema pode ser obtida em [Die].

Proposição. *$K : H_B \longrightarrow H_A$ e $K : H_B \longrightarrow H_B$ são compactas.*

Demonstração. Seja $L \subset H_B$ limitado via $|L|_A \leq C$ com $C > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $U \ni e$ vizinhança do elemento neutro $e \in G$ tal que se $xx_0^{-1} \in V$ então para todo $h \in G$ temos $|k(x,h) - k(x_0,h)| < \varepsilon C^{-1}$ (pela continuidade de k). Logo:

$$|Kf(x) - Kf(x_0)| = |\int_G (k(x,h) - k(x_0,h) f(h) dh| \leq \varepsilon C^{-1} \int_G |f(h)| dh \leq \varepsilon C^{-1} |f|_B < \varepsilon$$

.

Com isto, $K(L)$ é equicontínuo. Daí $K(L)$ é pré-compacto em H_A, o que completa a prova via Teorema de Ascoli. O caso $K(L)$ pré-compacto em H_B segue via continuidade da aplicação $id : H_A \longrightarrow H_B$. □

Proposição. *Se $k : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ for uma função real e simétrica então K é simétrico, ou seja, satisfaz $\langle K_{f_1}, f_2 \rangle = \langle f_1, K_{f_2} \rangle$, $\forall f_1, f_2 \in H_B$.*

Demonstração. Como a função K_f e o produto interno são integrais então basta calcular ambos os lados da igualdade, aplicando o Teorema de Fubini. □

Considerando K um dado operador, munido da norma $||K|| = \sup\{|Kf|_B \ ; \ |f|_B = 1\}$ temos o seguinte resultado:

Proposição. *Se K é simétrico então $||K|| = \sup\{|\langle K_f, f \rangle| \ ; \ |f|_B = 1\}$.*

Demonstração. Como estamos considerando funções f de norma unitária, então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|\langle K_f, f \rangle| \leq |K_f|_B |f|_B \leq ||K||.|f|_B = ||K||$, logo temos uma quota superior para o supremo do enunciado $M := \sup\{|\langle K_f, f \rangle| \ ; \ |f|_B = 1\}$ e vale também que $M \leq K$. Só falta agora mostrar que $||K|| \leq M$, ou seja, mostrar que $|K_f|_B \leq M$ para $|f|_B = 1$. Se $K_f = 0$, a desigualdade vale. Suponha então $K_f \neq 0$ e tome $h = K_f / |K_f|_B$. Daí, $\langle K_f, h \rangle = |K_f|_B = \langle f, K_h \rangle$ (via simetria de K). Isto nos leva às seguintes identidades:

(I) $\langle K_{f+h}, f + h \rangle = \langle K_f, f \rangle + 2|K_f|_B + \langle K_h, h \rangle$

(II) $\langle K_{f-h}, f - h \rangle = \langle K_f, f \rangle - 2|K_f|_B + \langle K_h, h \rangle$

Fazendo a subtração (I)-(II), obtemos:

$$4|K_f|_B = \langle K_{f+h}, f + h \rangle - \langle K_{f-h}, f - h \rangle \leq M.|f + h|_B^2 + M.|f - h|_B^2 = 4M$$

. □

Proposição. *Se K é um operador simétrico compacto, $||K||$ ou $-||K||$ é autovalor de K.*

Demonstração. Pelo resultado anterior é possível tomar uma sequência $f_n \in H_B$ tal que $|f_n|_B = 1$ e $|\langle K_{f_n}, f_n \rangle| \to ||K||$. Tomando uma subsequência, caso necessário, podemos então assumir que $\langle K_{f_n}, f_n \rangle$ converge para $\delta = \pm||K||$ (um destes dois valores). Obtemos, assim:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |K_{f_n} - \delta f_n|_B^2 = \langle K_{f_n} - \delta f_n, K_{f_n} - \delta f_n \rangle = |K_{f_n}|_B^2 - 2\delta \langle K_{f_n}, f_n \rangle + \delta^2 |f_n|_B^2 \\ &\leq \delta^2 - 2\delta \langle K_{f_n}, f_n \rangle + \delta^2 \end{aligned}$$

Com isto temos $0 \leq |K_{f_n} - \delta f_n|_B^2 \leq \delta^2 - 2\delta\langle K_{f_n}, f_n \rangle + \delta^2 \to 0$. Como K é uma aplicação compacta, podemos, se necessário, tomar subsequência e considerar que (K_{f_n}) converge para algum limite h, o qual pela desigualdade acima é o mesmo limite de (δf_n). Se $\delta = 0$ então $||K|| = 0$, ou seja, K é o operador nulo e vale o enunciado. Se $\delta \neq 0$ então $f_n \to \delta^{-1}h$ (não nulo pois f_n foi tomado sempre com norma 1). Logo $K_{(\delta^{-1}h)} = \delta.(\delta^{-1}h)$, mostrando que $\delta = \pm||K||$ é autovalor de K. □

Proposição. *Se K é simétrico e compacto então cada autovalor de K é real. Além disso, se H_λ e H_μ são autoespaços de autovalores distintos $\lambda \neq \mu$, então eles são ortogonais.*

Demonstração. Seja λ autovalor de K com autovetor $0 \neq f \in H_\lambda$. Vale então que $\lambda\langle f, f\rangle = \langle \lambda f, f\rangle = \langle K_f, f\rangle = \langle f, K_f\rangle = \langle f, \lambda f\rangle = \overline{\lambda}\langle f, f\rangle$, logo $\lambda = \overline{\lambda}$, o que mostra a primeira parte.

Para a segunda parte considere $f \in H_\lambda$ e $h \in H_\mu$ não nulos. Vale então a relação $\lambda\langle f, h\rangle = \langle K_f, h\rangle = \langle f, K_h\rangle = \mu\langle f, h\rangle$. Como $\lambda\langle f, h\rangle = \mu\langle f, h\rangle$, segue que $\langle f, h\rangle = 0$, completando a prova. □

Proposição. *Seja $K : H_B \longrightarrow H_B$ operador simétrico e compacto. Dado $\varepsilon > 0$ temos que $V = \bigoplus_{|\lambda|>0} H_\lambda$ é de dimensão finita e $W = \bigoplus_{\lambda} H_\lambda$ é denso em H_B.*

Demonstração. Suponha que V não tem dimensão finita. Então podemos tomar uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de autovetores ortonormais referentes a autovalores $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tal sequência forma um conjunto limitado e, além disso, a imagem via K induz o conjunto $\{K_{f_n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\lambda_n f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo $|\lambda_n f_n + \lambda_m f_m|_B^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \geq 2\varepsilon^2 \geq 0$ para $n \neq m$, logo não há como admitir subsequência convergente em H_B, contradizendo que K é compacto.

Para a parte restante temos $K(cl(W)) \subset cl(W)$. Tome F como sendo o complemento ortogonal de $cl(W)$ em H_B. Para $w \in cl(W)$ e $f \in F$ temos $0 = \langle K_w, f\rangle = \langle w, K_f\rangle$, o que nos leva a concluir que K_f é ortogonal a $cl(W)$. Logo a restrição $K_F = K : F \longrightarrow F$ está bem definida, permanece compacta simétrica e tem autovalor da forma $\pm||K_F||$, daí se $F \neq \{0\}$ isto seria uma contradição em relação à construção de $cl(W)$. □

Definição. *Seja X um espaço compacto e $A_{\mathbb{K}} = C^0(X, \mathbb{K})$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) munido da norma do supremo. Então $A_{\mathbb{K}}$ é uma álgebra com a multiplicação de funções ponto a ponto e diz-se que um subconjunto $B \subset A_{\mathbb{K}}$* separa os pontos $x, y \in X$ *se existir $f \in B$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Um resultado importante para álgebras deste tipo é o *Teorema de Stone-Weierstrass*, enunciado a seguir e cuja prova pode ser obtida em [Rud]

Teorema (Stone-Weierstrass). *Valem:*

(i) Seja $B \subset C^0(X, \mathbb{R})$ uma subálgebra que contém as funções constantes reais e que separa quaisquer dois pontos, então B é denso em $C^0(X, \mathbb{R})$.

(ii) Seja $B \subset C^0(X, \mathbb{C})$ uma subálgebra que contém as funções constantes complexas, separa quaisquer dois pontos e é fechada por conjugação complexa, então B é denso em $C^0(X, \mathbb{C})$.

2 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

A menos de menção, consideraremos o termo *diferenciável* como sendo *suave* ou *classe* C^∞. Um maior detalhamento estará apresentado em [War], [Lee] e [BD].

Definição. *M (ou M^m) é dita uma* variedade diferenciável m-dimensional *se M for um espaço topológico Hausdorff com base enumerável que admite um atlas maximal diferenciável $\mathcal{A} = \{h_j : U \subset M \longrightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m \mid h_j$ é homeomorfismo entre abertos$\}_{j \in I}$, ou seja, os abertos $U \subset M$ cobrem M, as transições $h_j \circ h_i^{-1} : h_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow h_j(U_i \cap U_j)$ são diferenciáveis pra todas $h_i, h_j \in \mathcal{A}$ e, se h é uma carta tal que pra toda carta $h_k \in \mathcal{A}$ vale que $h_k \circ h^{-1}$ e $h \circ h_k^{-1}$ são diferenciáveis, então $h \in \mathcal{A}$.*

Definição. *Uma* aplicação diferenciável *é uma função entre variedades $f : M^m \longrightarrow N^n$ tal que dado $x \in M$, existem cartas $h_x \in \mathcal{A}_M$ e $h_{f(x)} \in \mathcal{A}_N$ em torno de x e $f(x)$ respectivamente, com $f(U_x) \subset U_{f(x)}$ e a função $\tilde{f} = h_{f(x)} \circ f \circ h_x^{-1}$ é diferenciável. A função $\tilde{f}$ é dita uma* representação de f *nas cartas h_x e $h_{f(x)}$.*

Definição. *$f : M_1^n \longrightarrow M_2^m$ é dita um* difeomorfismo *se for inversível satisfazendo f e f^{-1} diferenciáveis.*

Definição. *$f : M_1^n \longrightarrow M_2^m$ é dita* difeomorfismo local em $p \in M_1$ *se existirem vizinhanças U de p e V de $f(p)$ tais que $f : U \longrightarrow V$ seja um difeomorfismo.*

Uma ideia bastante padrão em variedades diferenciáveis é identificar vetores tangentes como derivadores que agem sobre funções reais diferenciáveis. Por exemplo, se $v \in T_pM$ e $f \in C^\infty(M) = \{h : M \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, h \text{ é diferenciável}\}$, então a ação de v em f é dada pela derivada direcional $v(f) = df(p).v$. Esta identificação nos permite construir derivadas na direção de campos e o colchete de Lie, elementos estes que serão explorados mais adiante.

A ideia será aplicar este viés com auxílio do conceito de *germe* que será enunciado logo a seguir. Como a diferencial (ou derivada) em cada ponto é um conceito local, os germes nos auxiliarão basicamente lidando com esta localidade e eliminando possíveis ambiguidades.

Definição. *Sejam $f : U_p \subset M \longrightarrow N$ e $g : V_p \subset M \longrightarrow N$ aplicações diferenciáveis definidas em vizinhanças abertas de $p \in M$. Dizemos que f e g possuem mesmo* germe em p *se existir um aberto $U \subset U_p \cap V_p$ tal que $f|_U = g|_U$ e $p \in U$.*

A relação R, dada por $fRg \leftrightarrow f$ e g possuem mesmo germe em p, é de equivalência no conjunto $\bigcup\limits_{U \text{ aberto em } M} C^\infty(U, N)$ e denotamos por $f : (M, p) \longrightarrow (N, f(p))$ a classe de equivalência de f. Se $N = \mathbb{R}^n$, escrevemos simplesmente $(N, p) = \mathbb{R}^n$.

Definição. *Definimos $\mathcal{G}_p := \{f : (M, p) \longrightarrow \mathbb{R}\}$ como sendo o conjunto dos germes de funções reais na variedade M.*

$\mathcal{G}_p$ pode ser visto como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$ com adição e multiplicação definidas naturalmente.

Definição. *Considere uma derivação $X : \mathcal{G}_p \longrightarrow \mathbb{R}$, ou seja, uma aplicação linear que satisfaz a regra de Leibniz $X(\varphi.\psi) = X(\varphi).\psi(p) + \varphi(p).X(\psi)$. Neste caso, X é dito um* vetor tangente *em $p \in M$.*

A definição acima pode ser vista como a propriedade da derivada do produto aplicada ao ponto $p \in M$. Além disso, tal derivação está completamente determinada pelos funcionais lineares em $\mathcal{G}_p$.

Definição. *Denotamos por T_pM o espaço vetorial real formado por todos os vetores tangentes em p.*

Definição. *Considere um germe $f : (M, p) \longrightarrow (N, f(p))$, em p, e defina $f^* : \mathcal{G}_{f(p)} \longrightarrow \mathcal{G}_p$ por $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$. Definimos então por* diferencial *ou* aplicação entre espaços tangentes *o mapa $T_pf : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ dado por $T_pf(X) = X \circ f^*$.*

Temos que f^* determina um homomorfismo entre as $\mathbb{R}$-álgebras $\mathcal{G}_{f(p)}$ e $\mathcal{G}_p$. Além disso, T_pf é uma aplicação linear. Cada $X \in T_pM$ é um derivador definido em $\mathcal{G}_p$, daí a função f^* nos auxilia a migrar para os derivadores $X \circ f^*$ na imagem. Com isto em mente, a diferencial T_pf nada mais é do que a correspondência natural de derivadores sobre $\mathcal{G}_p$ e sobre $\mathcal{G}_{f(p)}$, via f.

Vale a regra da cadeia, ou seja, dados germes entre variedades $f : (M, p) \longrightarrow (N, f(p))$ e $g : (N, f(p)) \longrightarrow (L, g(f(p)))$, então $T_p(g \circ f) = T_{f(p)}(g) \circ T_p(f)$.

Seja $h : (M, p) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ o germe de uma carta. Então T_ph estabelece um isomorfismo linear entre $\mathbb{R}^m$ e T_pU (e também T_pM). Uma consequência direta é que se V é um espaço vetorial real de dimensão finita então $T_pV \simeq V$, $\forall p \in V$.

Dado o germe $f : (M, p) \longrightarrow (N, f(p))$ de uma aplicação diferenciável f, então podemos identificá-lo com um germe da forma $\tilde{f} : (\mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, onde $\tilde{f}$ é uma representação de f em cartas h_p em M (com $h_p(0) = p$) e $h_{f(p)}$ em N (com $h_{f(p)}(0) = f(p)$).

Seja $\{e_i\}_{i=1}^m$ base de $\mathbb{R}^m$. Podemos então identificar esta base com elementos $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial e_i}\right)_0\right\}_{i=1}^m$, via isomorfismo com $T_0(\mathbb{R}^m)$, definindo $\left(\frac{\partial}{\partial e_i}\right)_0 : \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \left(\frac{\partial \varphi}{\partial e_i}\right)(0)$ (a rigor, na imagem desta aplicação consideramos um representante qualquer do germe φ para efetuar a derivada $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial e_i}\right)(0)$ e, com isto, trabalharemos com representantes de germes ao aplicar vetores tangentes, nesta linha de raciocínio).

Se a base tomada no domínio em $\mathbb{R}^m$ for canônica, então escrevemos $\left(\frac{\partial}{\partial e_i}\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$.

Escrevemos simplesmente $\frac{\partial}{\partial e_i}$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}$ quando estiver implícito o ponto do espaço tangente associado.

Analogamente, definimos os vetores $\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_0$, $i = 1, ..., n$ referentes à base canônica do contradomínio $\mathbb{R}^n$. Com estas identificações e fazendo $\tilde{f} = (f_1, ..., f_n)$ chegamos a:

$$\left(T_0\tilde{f}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_0\right)(\varphi) = \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_j}(0) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0).\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_0(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{G}_{\tilde{f}(0)}$$

.

Daí temos a matriz Jacobiana $D\tilde{f}(0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\right]_{ij}$ nas bases $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_0\right\}_{j=1}^m$ e $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_0\right\}_{j=1}^n$, a qual é a identificação da transformação linear $Df(p)$ em coordenadas.

A abordagem, com o uso de germes, até aqui utilizada está presente em [BD] e [Mch]. Contudo, estabelecidas as devidas correspondências, quando for conveniente podemos trabalhar com a noção $T_p f$ introduzida há pouco ou simplesmente usarmos $df(p)$, esta última numa noção mais próxima a do cálculo e apresentada em [Lee] e [War]. Em outras palavras, podemos alternar daqui em diante como enxergamos o conceito de vetor tangente e diferencial.

Definição. *Uma aplicação entre variedades $f : M \longrightarrow N$ é dita uma* imersão *se $T_p f$ (ou $df(p)$) for injetiva para todo $p \in M$.*

Definição. *Seja $f : M \longrightarrow N$ uma imersão tal que f é um homeomorfismo sobre sua imagem, onde $f(M)$ está munida da topologia induzida por N, então f é dita um* mergulho*.*

Definição. *Sejam $M \subset N$ e $i : M \longrightarrow N$ a aplicação de inclusão. Se i for um mergulho, dizemos que M é* subvariedade *de N (ou* subvariedade mergulhada *de N).*

Muitos autores costumam adotar definições diferentes do termo *subvariedade*. No desenvolvimento deste trabalho estamos interessados em subestruturas mergulhadas, então para nós a definição de *subvariedade* já incorpora esta noção, mas conforme alertado há outras referências em que a noção de *subvariedade* se apresenta como *subvariedade imersa*, não necessariamente mergulhada.

Defina a união disjunta $TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$. TM tem estrutura de variedade $2m$-dimensional e cada carta $h : U \longrightarrow \tilde{U}$ determina uma carta do fibrado $T(h) : TU \longrightarrow \tilde{U} \times \mathbb{R}^m$ por $T(h)|_{T_p U} = T_p h$, ou seja, o atlas maximal de TM é induzido pelo atlas maximal de M.

A variedade TM é chamada de *fibrado tangente de M* e dado $p \in M$, $T_p M$ é dita *fibra em p*. A construção de TM vem, na verdade, de estruturas mais gerais, o estudo de fibrados em variedades, o qual se encontrará melhor detalhado em [Lee] e [Mch].

A aplicação $\pi : TM \longrightarrow M$ tal que para $v \in T_p M$, tem-se $\pi(v) = p$ é dita *projeção* e ela determina a topologia de TM (através da topologia quociente). Além disso, $\pi|_U$ induz uma projeção $\tilde{\pi}|_{\tilde{U} \times \mathbb{R}^m}$ natural sobre o aberto $\tilde{U}$. Isto determina a relação $h \circ \pi = \tilde{\pi} \circ T(h) : TU \longrightarrow \tilde{U}$ (isto quer dizer que projetar TU em U e depois passar para uma identificação de coordenadas é o mesmo que identificar TU em coordenadas e tomar a projeção induzida no espaço euclidiano). Dito de outra forma, vale a comutatividade do diagrama a seguir:

Definição (campo vetorial)**.** *$X : M \longrightarrow TM$ é dito* campo vetorial de *M se para cada $p \in M$ tivermos $X(p) \in T_p M$, ou seja, $\pi \circ X = id$.*

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{T(h)} & \tilde{U} \times \mathbb{R}^m \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} \\ U & \xrightarrow{h} & \tilde{U} \end{array}$$

Observação. Suponha X diferenciável e considere $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável (a qual pode ser enxergada como uma coleção de germes de uma mesma função em todos os pontos de M). Definimos $X(f) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por $X(f)(p) = (X(p))(f_p)$, onde $f_p : (M, p) \longrightarrow \mathbb{R}$ é o germe de f em $\mathcal{G}_p$ (como, em particular f é representante de cada f_p, então podemos simplesmente omitir o índice p em f_p e considerar o próprio representante f). Note que para cada $p \in M$, $X(f)_p$ também é um germe em $\mathcal{G}_p$ com representante $X(f)$.

Em geral trabalharemos com X diferenciável, o que ocorre se, e somente se, cada expressão de X em coordenadas locais $x = (x_1, ..., x_m) \mapsto \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$ satisfaz as funções a_i diferenciáveis, $1 \leq i \leq m$.

Definição. *Considere X um campo e $\alpha :]a, b[\longrightarrow M$ diferenciáveis com a propriedade $\alpha'(t) := \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t \alpha = X(\alpha(t)), \ \forall t \in]a, b[$. Então α é dita uma* curva integral do campo *X.*

Em coordenadas locais, se $X(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$ e $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é a representação de α na carta local associada, então a definição acima é o mesmo que exigir $\alpha_i'(t) = a_i(\alpha(t))$.

Podemos pensar numa curva integral de um campo X como uma construção que determina uma curva ou subestrutura unidimensional $X(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ no fibrado TM. Além disso, α é na verdade uma solução y da EDO $y' = X(y)$ e, se impomos uma condição inicial $y(0) = p$, então existe uma única curva maximal (no sentido de estar definida no maior aberto possível) que resolve tal EDO. Isto nos motiva a definir na sequência o conceito de *fluxo*, o qual considera a família de todas as curvas maximais soluções, com todas as condições iniciais da forma $y(0) = p, \ p \in M$.

Definição. *Sejam X campo diferenciável e $\Phi^X : A \subset \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ definida num aberto A tal que $\Phi^X(t, p) = \alpha_p(t)$, onde $\alpha_p(t)$ é a curva maximal solução de X que satisfaz $\alpha_p(0) = p$ (note que A deve estar definido localmente na primeira variável). Então Φ^X é dito* fluxo local *de X. Caso $A = \mathbb{R} \times M$, o fluxo é dito* global.

Caso X esteja fixado e não haja ambiguidades, escrevemos simplesmente $\Phi = \Phi^X$.

Proposição. *Dado um campo diferenciável X com fluxo Φ, então valem as seguintes propriedades onde Φ estiver bem definido:*

(i) $\Phi(0, p) = p$

(ii) $\Phi(s, \Phi(t, p)) = \Phi(s + t, p)$

(iii) *Se definimos* $\Phi_t(p) := \Phi(t, p)$ *então* $\Phi_0 = id_M$ *e* $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$

(iv) $X(p) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0 \Phi(t, p) = \alpha'_p(0)$

Demonstração. Os itens (i) e (iv) são imediatos. O item (ii) é obtido notando que tanto o lado esquerdo da igualdade quanto o direito formam curvas na variável s com a mesma condição inicial em $s = 0$. Por fim, o item (iii) é consequência de (ii). □

Reciprocamente se Φ é definido de modo a satisfazer as três primeiras propriedades então a função X construída a partir da regra em (iv) define um campo (ou seja é possível recuperar o campo só conhecendo um fluxo, sabendo que satisfaz (i),(ii) e (iii)).

Podemos definir o colchete de campos vetoriais $[X, Y]$ como sendo o campo tal que $[X, Y](p)(f) = X(p)(Y(f)_p) - Y(p)(X(f)_p)$. Notamos que $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ e daí usamos a notação $[X, Y] = X(Y) - Y(X)$ ou simplesmente $[X, Y] = XY - YX$. Chama-se $[.,.]$ de *colchete de Lie*, o qual é uma aplicação bilinear no espaço vetorial dos campos diferenciáveis $\mathfrak{X}(M)$ da variedade M.

Proposição. *Sejam X, Y e Z campos diferenciáveis sobre M; f, g diferenciáveis reais; e $a, b \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:*

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$ *(anticomutatividade)*

(ii) $[.,.]$ *é bilinear.*

(iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(identidade de Jacobi)*

A identidade de Jacobi é apenas trabalhosa e para obtê-la basta expandir a expressão usando a definição dos campos em coordenadas locais. No mais, é um resultado simples e é deixado para verificação.

Definição .1. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $B \subset X$ é dito* residual *se B puder ser expresso como uma intersecção enumerável de conjuntos simultaneamente abertos e densos. O complementar de um subconjunto residual é dito um subconjunto* magro *de X. Uma propriedade em X é dita* genérica *se ela for válida em um conjunto residual (ou seja, só pode falhar em um subconjunto magro).*

Exemplos

(A) Ser irracional é uma propriedade genérica em $\mathbb{R}$.

(B) Ser contínua e não diferenciável é uma propriedade genérica em $C^0(M)$.

3 GEOMETRIA RIEMANNIANA

Para os resultados e definições desta seção, aproveitaremos todas as construções da seção anterior. Basicamente, tomaremos o objeto *variedade diferenciável* e introduziremos uma nova estrutura ao mesmo — as *métricas riemannianas*. Para complementação do estudo, sugerimos [Car], [Mun] e [Cha].

Conexões Afim

Definição. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma* métrica riemanniana *é uma aplicação g que associa cada ponto $p \in M$ a um produto interno $g(p) = \langle ., . \rangle_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ sendo que cada função $g_{ij} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, construída a partir de uma parametrização $x : \tilde{U} \longrightarrow U$, dada por $g_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$ é diferenciável. As funções g_{ij} são ditas* a expressão da métrica riemanniana na parametrização *x.*

Definição. *Uma* variedade riemanniana *é uma variedade diferenciável M que admite uma métrica riemanniana g e é denotada por (M, g).*

Doravante, a menos de menção, as variedades tomadas serão sempre riemannianas e serão denotadas simplesmente por M quando não houver confusão em relação à métrica previamente fixada.

Definição. *Se $f : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo entre variedades riemannianas tal que*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p.(u), df_p.(v) \rangle_{f(p)}, \ \forall p \in M; \ \forall u, v \in T_pM,$$

então M e N são ditas isométricas *e f é uma* isometria. *Se as condições acima forem satisfeitas apenas para a aplicação $f : U \longrightarrow f(U)$, onde U é vizinhança de p, dizemos que f é* isometria local em *p. Se todo ponto $p \in M$ admitir isometria local, então M e N são ditas* localmente isométricas.

Isometria é uma noção natural de equivalência entre variedades riemannianas.

Exemplo (espaços euclidianos). $M = \mathbb{R}^n$ com $T_pM = \mathbb{R}^n$ para todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$ e com base canônica $\{e_1, ..., e_n\}$ define uma variedade riemanniana n-dimensional com a métrica dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Exemplo (variedades imersas). Seja $f : M^m \longrightarrow N^{m+k}$ uma imersão. Se, a princípio, apenas N for riemanniana então f induz uma estrutura riemanniana em M dada por:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p.(u), df_p.(v) \rangle_{f(p)}$$

Além disso, df_p injetiva implica $\langle ., . \rangle_p$ positivo definido. A métrica de M é dita *métrica induzida por f*, sendo que a função f leva o nome de *imersão isométrica*.

Exemplo (métrica produto). O produto de variedades riemannianas $M_1 \times M_2$ é também uma variedade riemanniana. Sejam $\pi_i : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$, $i = 1, 2$, as projeções naturais e defina:

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1.u, d\pi_1.v \rangle_p + \langle d\pi_2.u, d\pi_2.v \rangle_q$$

Tal relação determina uma estrutura riemanniana para o produto $M_1 \times M_2$.

Exemplo (Grupos de Lie). Um grupo $(G, .)$ é dito um *grupo de lie* se G é uma variedade tal que $h : G \times G \longrightarrow G$, dada por $h(x, y) = xy^{-1}$ é uma aplicação diferenciável. Dado $x \in G$, as aplicações $l_x, r_x : G \longrightarrow G$ dadas por $l_x(y) = xy$ e $r_x(y) = yx$ são ditas *translações à esquerda* e *à direita*, respectivamente e definem difeomorfismos.

Se $\langle u, v \rangle_y = \langle d(l_x)_y u, d(l_x)_y v \rangle_{l_x(y)}$, $\forall x, y \in G$, $\forall u, v \in T_y G$, ou seja l_x é isometria, então a métrica riemanniana é dita *invariante à esquerda* (à direita é análogo). Se ela for invariante à esquerda e à direita, ela é dita *bi-invariante*.

Por exemplo, se definimos $\langle u, v \rangle_x = \langle (dl_{x^{-1}})_x(u), (dl_{x^{-1}})_x(v) \rangle_e$ para cada $x \in G$ e vetores tangentes $u, v \in T_x G$, então esta relação nos fornece uma métrica riemanniana invariante à esquerda. Para construir uma métrica invariante à direita sobre um grupo de Lie G o processo é totalmente análogo. Um resultado interessante é que, se G é compacto, então G admite métrica bi-invariante.

Definição. *Um* campo vetorial ao longo de uma curva $c : I \longrightarrow M$ sobre M *é uma aplicação da forma $V : I \longrightarrow TM$ que satisfaz $V(t) \in T_{c(t)}M$, $\forall t \in I$. Em geral,trabalhamos com V diferenciável.*

O campo $dc\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, indicado por $\frac{dc}{dt}$ é chamado *campo velocidade de c*.

Observação. Sempre é possível munir uma variedade M de uma métrica riemanniana. Ou seja, sempre existe g tal que (M, g) é variedade riemanniana (ver [Mch] ou [Car]).

Conexões Afim

Definição. *Uma* conexão afim *é uma aplicação* $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$*, da forma* $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$*, em que* $\mathfrak{X}(M) = \{X \mid X$ *é campo de vetores diferenciável sobre* $M\}$ *e tal que* $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $\forall f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciáveis, valem as seguintes condições:*

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

Observação. A definição acima torna uma conexão afim como sendo um conceito local. Em outras palavras, para expressarmos o campo $\nabla_X Y$ localmente, basta identificarmos X e Y localmente. De fato, suponha que numa vizinhança local U da variedade M (suficientemente pequena) identificada a partir de uma parametrização $z : \tilde{U} \longrightarrow U$, tenhamos campos coordenados $Z_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$, $1 \leq j \leq m$, que nos fornecem expressões locais $X = \sum_{i=1}^{m} x_i Z_i$ e $Y = \sum_{j=1}^{m} y_j Z_j$, em U, para os campos X e Y respectivamente. Daí, sobre U, temos $\nabla_X Y = \nabla_{\sum_i x_i Z_i} \sum_j y_j Z_j$. Usando as propriedades de ∇, chegamos à seguinte expressão:

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^{m} x_i y_j \nabla_{Z_i} Z_j + \sum_{i,j=1}^{m} x_i Z_i(y_j) Z_j$$

Ajustando U, se necessário, também podemos expressar os campos $\nabla_{Z_i} Z_j$ localmente como $\nabla_{Z_i} Z_j = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k Z_k$ para certas funções diferenciáveis Γ_{ij}^k (também conhecidas como *símbolos de Christoffel*). Com isso, obtemos:

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i,j=1}^{m} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) Z_k$$

A expressão acima nos revela que calcular $\nabla_X Y$ num dado ponto p só depende de $x_i(p)$, $y_k(p)$ e das derivadas das funções y_k na direção de X no ponto p dadas por $X(y_k)(p)$, com $1 \leq i, k \leq m$.

O campo $\nabla_X Y$ pode ser interpretado como a derivada de Y na direção X, ou seja, uma conexão afim nos auxilia a definir o conceito de diferenciação vetorial (de fato, a terceira condição é que nos mostra a noção do campo X derivando fY como uma espécie de regra do produto, as demais são linearidades típicas de um derivador). Daí se considerarmos uma curva com seu campo velocidade correspondente será possível a partir desta noção de derivada vetorial apresentar o conceito de aceleração.

Proposição. *Seja M munida de uma conexão afim ∇. Existe uma única aplicação $V \mapsto \frac{DV}{dt}$ onde V e $\frac{DV}{dt}$ são campos sobre uma mesma curva $c : I \longrightarrow M$, fixada, satisfazendo:*

(i) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$

(ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *com f função real diferenciável em I*

(iii) Se $V(t) = Y(c(t))$, algum $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$

Nas condições acima, $\frac{DV}{dt}$ é chamada *derivada covariante de V ao longo de c*. Além disso, dizemos que V é um *campo paralelo* quando $\frac{DV}{dt} \equiv 0$. A condição (iii) revela que se o campo V sobre uma curva c provém de um campo Y definido sobre toda a variedade M, então sua derivada $\frac{DV}{dt}$ é a derivada de Y ao longo da direção fornecida por c, via noção da conexão.

Demonstração. Primeiramente, assumamos a existência e provemos a unicidade. Dado um sistema de coordenadas $x : \tilde{U} \longrightarrow U$ interceptando a curva c e fornecendo $(x_1(t), ..., x_m(t))$ como a expressão local de $c(t)$, podemos identificar a noção de campos coordenados locais sobre c, escrevendo $X_j(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{c(t)}$, $1 \leq j \leq m$. Desta maneira, expressamos um dado campo V sobre a curva c, localmente, por $V = \sum_{j=1}^{m} v_j X_j$ para certas funções reais v_j diferenciáveis. Por (i) e (ii), obtemos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^{m} \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{j=1}^{m} v_j \frac{DX_j}{dt}.$$

Além disso, usando (iii), para $1 \leq j \leq m$, temos:

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{dc/dt} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\sum_i \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{dx_i}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Deste modo, chegamos à expressão:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^{m} \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i,j=1}^{m} v_j \frac{dx_i}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Logo, $\frac{DV}{dt}$ só depende do campo V, mostrando a unicidade. A existência vem do fato que, se definimos $\frac{DV}{dt}$ a partir da expressão anterior, usando cada sistema de coordenadas e notando que para sistemas de coordenadas distintos, a expressão coincide na intersecção, então temos as propriedades (i), (ii) e (iii) satisfeitas. □

Proposição. *Seja M munida de ∇. Considere uma curva $c : I \longrightarrow M$ e um vetor tangente $V_o \in T_{c(t_o)}M$. Então existe um único campo paralelo V (sobre c) tal que $V(t_o) = V_o$.*

O campo V mencionado acima é dito *transporte paralelo de V_o ao longo de c*.

Demonstração. Assuma que o resultado vale para o caso em que a curva esteja contida numa vizinhança coordenada. Dado $t_1 \in I$ (S.P.G assuma $t_1 > t_0$), temos por compacidade que $c([t_0, t_1])$ pode ser coberto por um número finito de vizinhanças coordenadas. Como em cada uma dessas V pode ser definido de forma única e V coincide nas intersecções não vazias, então podemos definir V ao longo de $[t_0, t_1]$ e, por fim, garantir a construção única em I.

Vamos provar então que a proposição é válida se $c(I) \subset U$, alguma vizinhança U parametrizada por $x : \tilde{U} \longrightarrow U$. Podemos identificar a c em coordenadas por $x^{-1} \circ c(t) = (x_1(t), ..., x_m(t))$, os campos coordenados X_j e um dado campo sobre c, $V = \sum_{j=1}^{m} v_j X_j$, assim como fizemos na proposição anterior. Em suma, basta garantirmos que existem funções v_j, $1 \leq j \leq m$, unicamente determinadas, tais que $\frac{DV}{dt} = 0$ e $V(t_0) = V_0$. Se escrevemos $V_0 = \sum_{j=1}^{m} v_j^0 \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{c(t_0)}$, então teríamos que ter $v_j(t_0) = v_j^0$ e

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^{m} \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i,j=1}^{m} v_j \frac{dx_i}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{m} v_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) X_k,$$

onde Γ_{ij}^k satisfazem $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Com isso, os v_k são soluções y_k, $1 \leq k \leq m$, do sistema de m equações diferenciais dado por:

$$\frac{dy_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{m} y_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0, \quad 1 \leq k \leq m,$$

tendo como condições iniciais $y_k(t_0) = v_j^0$. Logo temos existência e unicidade garantidas. □

Definição. *Seja M munida de uma métrica riemanniana $\langle .,. \rangle$ e uma conexão afim ∇. Se dada uma curva c em M, qualquer par de campos paralelos (P, P') satisfizer $\langle P, P' \rangle = cte$ então ∇ é dita compatível com $\langle .,. \rangle$.*

Proposição. *∇ é compatível com $g = \langle .,. \rangle$ se, e só se, dada uma curva c sobre M e um par de campos arbitrário (V, W) sobre esta curva valer a relação $\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Dados P e P' campos paralelos sobre uma curva c fixada temos $\frac{DP}{dt} = \frac{DP'}{dt} = 0$. Logo, usando a hipótese, temos $\frac{d}{dt}\langle P, P' \rangle = 0$, ou seja, $\langle P, P' \rangle = cte$.

($\Rightarrow$) Dada uma curva $c : I \longrightarrow M$ e fixado $t_0 \in I$, tome $\{P_i(t_0)\}_{i=1}^m$ uma base g-ortonormal de $T_{c(t_0)}M$. Segue da proposição anterior que, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, o vetor $P_i(t_0)$ admite transporte paralelo ao longo de c, digamos via campo paralelo P_i. Assim, pela hipótese, dado $t \in I$, temos $\{P_i(t)\}_{i=1}^m$ uma base g-ortonormal de $T_{c(t)}M$.

Se V e W são campos arbitrários sobre c, podemos expressá-los por $V = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i P_i$ e $W = \sum\limits_{i=1}^{m} w_i P_i$, com $v_i, w_i \in C^\infty(I)$. Usando a propriedade (ii) da proposição 3 junto ao fato que os campos P_i são paralelos, temos que $\frac{DV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{dv_i}{dt} P_i$ e $\frac{DW}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{dw_i}{dt} P_i$. Logo:

$$
\begin{aligned}
\langle \tfrac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \tfrac{DW}{dt} \rangle &= \sum_{i,j=1}^{m} \tfrac{dv_i}{dt} w_j \langle P_i, P_j \rangle + \sum_{i,j=1}^{m} v_i \tfrac{dw_j}{dt} \langle P_i, P_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \tfrac{d}{dt}(v_i w_j)\delta_{ij} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \tfrac{d}{dt}(v_k w_k) \\
&= \tfrac{d}{dt}\langle V, W \rangle
\end{aligned}
$$

□

Corolário. *Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica $g = \langle .,. \rangle$ se, e somente se, $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Dada uma curva c com campos V e W arbitrários, tome X como sendo o campo velocidade de c. Daí construa Y e Z campos em M que induzem V e W respectivamente (ou seja, $Y(c(t)) = V(t)$ e $Z(c(t)) = W(t)$, para todo t). Usando a propriedade (iii) da proposição 3 temos que a identidade $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ é justamente a identidade $\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle$ e daí segue do resultado anterior que ∇ é compatível com g.

($\Rightarrow$) Dado $p \in M$, construa $c : I \longrightarrow M$ uma curva com $c(t_0) = p$ e $c'(t_0) = X(p)$. Temos que c induz naturalmente em Y e W campos definidos em I sobre esta mesma curva. Novamente usando os mesmos resultados e propriedades da ida, temos que $X(p)\langle Y, Z\rangle = \frac{d}{dt}\langle Y, Z\rangle|_{t=t_0} = \langle \nabla_{X(p)}Y, Z\rangle_p + \langle Y, \nabla_{X(p)}Z\rangle_p$. $\square$

Note que, em vista dos dois resultados anteriores, a compatibilidade com a métrica nada mais é do que permite a regra de derivação para produtos internos (no caso fornecido pela métrica).

Definição. *∇ é dita simétrica se* $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

Observe que, se $x : \tilde{U} \longrightarrow U$ é um sistema de coordenadas em M com campos coordenados $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, então $[X_i, X_j] = 0$ (simples verificação). Logo vale a identidade $\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_j} X_i$ sempre que ∇ for simétrica. Como $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k X_k$, segue então Γ_{ij}^k é simétrico nos índices inferiores, isto é, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Teorema. *Toda variedade riemanniana admite uma única conexão afim simétrica e compatível com a métrica dada, a qual é chamada de* conexão de Levi-Civita.

Demonstração. Assuma a existência de tal conexão ∇. Do corolário anterior, valem as identidades:

$$(A) \qquad X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

$$(B) \qquad Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

$$(C) \qquad Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

Efetuando (A)+(B)-(C) temos:

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

Isolando o termo $\langle Z, \nabla_Y X\rangle$ na equação acima, vemos que ∇ é unicamente determinado pela métrica dada. Mais ainda, tal expressão nos fornece uma regra para a construção da conexão (ela é construída de tal forma a satisfazer a equação acima, não é difícil verificar que esta construção é bem posta e que a conexão obtida é simétrica e compatível com a métrica). $\square$

Resumidamente, se localmente consideramos campos coordenados X_1,..., X_m então podemos identificar $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, $[g^{ij}]$ a matriz inversa de $[g_{ij}]$ e os símbolos de Christoffel como os valores Γ_{ij}^l que fornecem a combinação linear $\nabla_{X_i} X_j = \sum\limits_{l=1}^{m} \Gamma_{ij}^l X_l$. Com isto, a última equação que obtivemos no final da demonstração anterior, aplicada a X_i, X_j e X_k nos fornece a seguinte expressão:

$$\sum_{l=1}^{m} \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right),$$

que, por sua vez, fornece:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) g^{lk} \tag{1}$$

Nos permitindo expressar explicitamente os símbolos de Christoffel e, portanto, permitindo-nos efetuar os cálculos que envolvem a conexão (no caso, a de Levi-Civita).

Observe que, da expressão acima, facilmente concluímos que os símbolos de Christoffel se anulam nos espaços euclidianos. Também tínhamos a derivada covariante de um campo $V = \sum\limits_{k=1}^{m} v_k X_k$ sobre uma curva c com representação $(x_1, ..., x_m)$ satisfazendo $\frac{DV}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\frac{dv_k}{dt} + \sum\limits_{i,j=1}^{m} v_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) X_k$. Com isto notamos que a derivada covariante em espaços euclidianos de fato coincide com a derivada usual, visto que todos os Γ_{ij}^k são nulos.

Gradiente

Seja (M, g) uma variedade riemanniana com $g = \langle .,. \rangle$ e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Definimos $\nabla f(x)$ como o vetor que satisfaz $\langle \nabla f(x), X(x) \rangle = X(f)(x) = df(x).X(x)$ para quaisquer campos diferenciáveis X e pontos $x \in M$.

A função ∇f dada por $x \mapsto \nabla f(x)$ é um campo vetorial em M chamado de *gradiente de f* e que satisfaz $\langle \nabla f, X \rangle = X(f)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$. Vamos mostrar a existência e unicidade no resultado seguinte.

Proposição. *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e $\{E_j(.)\}_{j=1}^m$ um referencial ortonormal definido numa vizinhança aberta local $U \subset M$. Então $\forall p \in U$ vale $\nabla f(p) = \sum\limits_{k=1}^{m} E_k(f)(p) E_k(p)$, onde*

$E_k(f)(p) = df(p).E_k(p)$. De modo simplificado, temos $\nabla f = \sum\limits_{k=1}^{m} E_k(f)E_k \in \mathfrak{X}(M)$ e a igualdade é invariante pelo referencial ortonormal escolhido.

Demonstração. Seja $X = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i E_i$ um campo diferenciável arbitrário em U, então:

$$X(f) = \sum_{=1}^{m} a_i E_i(f) = \langle \sum_{i=1}^{m} a_i E_i, \sum_{j=1}^{m} E_j(f)E_j \rangle = \langle X, \sum_{j=1}^{m} E_j(f)E_j \rangle$$

Aplicando a igualdade acima num ponto arbitrário p temos que:

$$df(p)X(p) = X(f)(p) = \langle X(p), \sum_{j=1}^{m} E_j(f)(p)E_j(p) \rangle_p$$

Como o campo X foi tomado arbitrariamente, podemos aplicar o lema de Riesz e notar que $\nabla f(p) = \sum\limits_{k=1}^{m} E_k(f)(p)E_k(p)$ é o único vetor a satisfazer $df(p) = \langle \nabla f(p), . \rangle_p$ (daí também a invariância em $U \cap V$ para qualquer outro referencial ortonormal definido num aberto V que intercepta U). Logo $\nabla f = \sum\limits_{k=1}^{m} E_k(f)E_k$ (mais que isso, vale a diferenciabilidade do campo gradiente, ou seja, $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$). □

Note que a definição concorda com a que tínhamos em $M = \mathbb{R}^n$.

Corolário. *Sejam $f, h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis então ∇ é um operador linear em $C^\infty(M)$ e vale a regra de Leibniz $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.*

Demonstração. O resultado é imediato do fato que cada campo diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfaz tais propriedades. □

Proposição. *Sejam $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, $p \in M$, $v \in T_pM$ e $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$ satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(t) = v$. Então $\langle \nabla f(p), v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0}$. Daí, se p é ponto de máximo ou mínimo local então $\nabla f(p) = 0$.*

Demonstração. Considere X um campo em M estendido a partir de γ, ou seja, satisfazendo $X(\gamma(t)) = \gamma'(t)$. Assim:
$\langle \nabla f(p), v \rangle_p = \langle \nabla f(p), X(\gamma(0)) \rangle_p = X(f)(\gamma(0)) = df(\gamma(0)).X(\gamma(0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0}$. □

Corolário. *Sejam $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicações diferenciáveis, então vale que $\nabla(h \circ f)(p) = h'(f(p))\nabla f(p)$, $\forall p \in M$.*

Demonstração. Basta usar o resultado anterior aplicando a regra da cadeia. □

Proposição. *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada com $\partial_1, ..., \partial_m$ campos coordenados. Então, em U, vale $\nabla f = \sum_{k,l=1}^{m} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \partial_k$, onde $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ define a matriz da métrica g em cada ponto de U (na base determinada pelos campos coordenados) com matriz inversa $[g^{ij}]$.*

Demonstração. Em U, suponha $\nabla f = \sum_{k=1}^{m} a_k \partial_k$. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x_l} = \partial_l(f) = \langle \nabla f, \partial_l \rangle = \sum_j a_j \langle \partial_j, \partial_l \rangle = \sum_j a_j g_{jl}$$

Com isto, $\sum_l g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} = \sum_{l,j} a_j g^{kl} g_{jl} = \sum_j a_j \delta_{jk} = a_k$, o que demonstra o resultado. □

Corolário. *Nas condições da proposição anterior, $|\nabla f|^2 = \sum_{k,l=1}^{m} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_l}$.*

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior à igualdade $|\nabla f|^2 = \langle \nabla f, \nabla f \rangle$. □

Divergência

Assumamos, doravante, (M, g) variedade m-dimensional com métrica riemanniana $g = \langle .,. \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇.

Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos a *divergência de* X, a função $divX : M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo para cada $p \in M$, $(divX)(p) = tr\{T(X, p)\}$, onde $T(X, p)$ é o operador $v \mapsto (\nabla_v X)(p)$ sobre o espaço vetorial T_pM (a grosso modo, $T(X, p)$ pode ser interpretado como a "diferencial de X em p", uma espécie de "$dX(p)$"e é justamente a conexão ∇ que dá cabo de fornecer essa noção de forma técnica).

$divX$ é uma função real suave. Além disso, se $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ é um referencial ortonormal, é um exercício simples de álgebra linear verificar a seguinte expressão:

$$divX = \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle$$

Definição. *Um referencial $\{E_k\}_{k=1}^{m}$ em um aberto $U \subset M$ é dito* geodésico em $p \in U$ *se satisfizer $(\nabla_{E_j} E_i)(p) = 0$, para $1 \leq i, j \leq m$.*

É possível construir um referencial geodésico em p associada a uma vizinhança no qual ele seja ortonormal (ver exercício 7 do capítulo 3 apresentado em [Car]).

Proposição .2. *Seja* $X|_U = \sum_i a_i E_i$ *a expressão local de um campo suave* X *em* M*, onde* $\{E_k\}_{k=1}^m$ *é um referencial ortonormal na vizinhança* $U \subset M$*. Então, sobre* U*, é válida a expressão* $divX = \sum_{i=1}^m (E_i(a_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle)$ *e, caso o referencial seja geodésico, então* $divX = \sum_{i=1}^m E_i(a_i)$*.*

Demonstração. Basta provar a primeira igualdade, visto que a segunda é consequência imediata da definição de referencial geodésico. De fato:

$$divX = \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle = \sum_{i=1}^m (E_i \langle X, E_i \rangle - \langle X, \nabla_{E_i} E_i \rangle) = \sum_{i=1}^m (E_i(a_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle).$$

A segunda igualdade é obtida pela propriedade da compatibilidade com a métrica.

□

Proposição. *Sejam* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciável. Então valem as identidades* $div(X+Y) = divX + divY$ *e* $div(fX) = fdivX + \langle \nabla f, X \rangle$

Demonstração. A primeira delas é imediata da linearidade da conexão e do traço.

Para a segunda tome $\{E_i\}_{i=1}^m$ referencial ortonormal e daí temos:

$$\begin{array}{rcl} div(fX) & = & \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{E_i}(fX), E_i \rangle \\ & = & \sum_{i=1}^m \langle E_i(f)X + f\nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ & = & \sum_{i=1}^m \langle E_i(f)X, E_i \rangle + \sum_{i=1}^m f \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ & = & \langle \nabla f, X \rangle + fdivX \end{array}.$$

□

Vamos enunciar a expressão da divergência em coordenadas locais:

Proposição. *Seja* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *com expressão local* $X = \sum_{i=1}^m a_i \partial_i$ *para campos coordenados* $\partial_1, ..., \partial_m$ *numa vizinhança* U*. Então, para* $p \in U$*, obtemos*

$$div(X)(p) = \frac{1}{\sqrt{|\det\langle ., . \rangle_p|}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(\, a_i . |\det\langle ., . \rangle|\,)(p)$$

Demonstração. Não faremos todos os detalhes devido às contas e expressões extensas, mas o resultado é obtido combinando expressões já obtidas anteriormente. Primeiramente, temos que

$$\nabla_{\partial_i} X = \nabla_{\partial_i} \sum_{k=1}^{m} \nabla_{\partial_i}(a_k \partial_k) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} \partial_k + a_k \nabla_{\partial_i} \partial_k \right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} \partial_k + a_k \sum_{l=1}^{m} \Gamma_{ik}^{l} \partial_l \right)$$

Organizando a expressão temos:

$$\nabla_{\partial_i} X = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} + a_k \sum_{l=1}^{m} a_l \Gamma_{il}^{k} \right) \partial_k$$

A expressão acima, num dado ponto p, determina os coeficientes da matriz do operador $T(X,p)$ na base $\{\partial_k(p)\}_{k=1}^{m}$. Tomando o traço, temos:

$$(A) \quad divX = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_i \sum_{l=1}^{m} a_l \Gamma_{il}^{i} \right)$$

Por fim, lembramos que na identificação matricial da métrica através de $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ tínhamos a seguinte expressão para os símbolos de Christoffel:

$$(B) \quad \Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) g^{lk}$$

O resultado seguirá da combinação e organização das identidades (A) e (B). □

Laplaciano

Dada $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável definimos $\Delta f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\Delta f := div(\nabla f)$. A aplicação $f \mapsto \Delta f$ define um operador em $C^{\infty}(M)$, o qual depende da métrica da e é denominado *Laplaciano* e escrevemos $\Delta = div(grad)$.

Dependendo da bibliografia ou do propósito do autor, o operador Δ pode ser definido por $\Delta = \pm div(grad)$. Por exemplo, se definido com o sinal negativo pode-se provar que os autovalores de Δ sobre uma variedade compacta M são positivos e da forma $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n \leq ... \to \infty$ (ver [Cha]).

Proposição. *Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis então temos a igualdade $\Delta(h \circ f) = (h'' \circ f)|\nabla f|^2 + (h' \circ f)\Delta f$.*

Demonstração. Basta usar as propriedades de divergência e gradiente vistas há pouco e efetuar alguns cálculos:

$$\begin{aligned}\Delta(h\circ f) &= div(\nabla(h\circ f)) = div((h'\circ f)\nabla f)\\ &= \langle \nabla(h'\circ f), \nabla f\rangle + (h'\circ f)div(\nabla f)\\ &= \langle (h''\circ f)\nabla f, \nabla f\rangle + (h'\circ f)\Delta f\end{aligned}$$

□

Proposição .3. *Sejam $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e $\{E_i\}_{i=1}^m$ um referencial ortonormal em um aberto $U \subset M$. Então, sobre U, $\Delta f = \sum_{i=1}^{m}(E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i}E_i)f)$. Se, além disso, o referencial tomado for geodésico então temos $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(f))$.*

Demonstração. Basta usar a proposição .2 aplicada ao campo $X = \nabla f$, o qual satisfaz $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i$ em U (pois o referencial é ortonormal). A segunda igualdade é óbvia a partir da primeira, já que o referencial é ortonormal geodésico. □

Note que este resultado concorda com o laplaciano em $M = \mathbb{R}^n$.

Proposição. *Sejam $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Então vale $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle\nabla f, \nabla g\rangle$.*

Demonstração. Aplicando as propriedades obtidas até o presente momento, obtemos: $\Delta(fg) = div(\nabla(fg)) = div(g\nabla f + f\nabla g) = g\Delta f + \langle\nabla g, \nabla f\rangle + f\Delta g + \langle\nabla f, \nabla g\rangle$. □

Proposição. *Sejam $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $U \subset M$ uma vizinhança com campos coordenados $\partial_1, ..., \partial_m$. Então Δf, sobre U, satisfaz: $\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|\det\langle.,.\rangle|}} \sum_{j,i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(g^{ij}.|\det\langle.,.\rangle| . \frac{\partial f}{\partial x_j})$*

Demonstração. Basta aplicar a forma das coordenadas locais do gradiente e da divergência na definição do laplaciano. □

Espectro de uma Variedade Riemanniana

Definição. *O conjunto definido por $Spec(M, g) := \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists f : M \longrightarrow \mathbb{R}, \Delta f = \lambda f\}$ é dito* espectro da variedade (M, g).

Teorema. *Seja M uma variedade riemanniana com métrica g e suponha que para cada $i \in \mathbb{N}$ existam subespaços vetoriais V_i de $C^\infty(M)$ tais que:*

(i) $\forall i \in \mathbb{N}, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}$, tal que $\forall f \in V_i, \Delta f = \lambda_i f$.

(ii) $S := \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} V_i$ *é densa em* $C^\infty(M)$ *na topologia induzida por* $L^2(M)$.
Então $Spec(M,g) = \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ *e os* V_i *são os auto-espaços correspondentes aos* λ_i.

Demonstração. Pode-se supor sem perda de generalidade que $V_i \neq \{0\}, \forall i \in \mathbb{N}$. Suponha que exista algum $\lambda \in Spec(M,g)$ distinto de todos os λ_i. Logo o auto-espaço E_λ é ortogonal aos subespaços V_i e isso contradiz a densidade de S (este é um argumento de análise funcional). Com isto, tem-se $Spec(M,g) = \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Pelo item (i) da hipótese é imediato que cada V_i está contido em E_{λ_i}. Suponha que haja $f \in E_{\lambda_i}/V_i$. Daí f é ortogonal a V_i. Por outro lado, f também é ortogonal a V_j para $j \neq i$, pois $V_j \subset E_{\lambda_j}$. Em suma, f é não nula e ortogonal a todos os V_j, pelo mesmo argumento usado antes, isso contradiz a densidade de S. Portanto $V_i = E_{\lambda i}$. □

Hessiano

Dada $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, definimos $(Hess\, f)_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ a aplicação $v \mapsto \nabla_v \nabla f(p)$. Em termos da linguagem introduzida na subseção sobre divergência, temos que $(Hess\, f)_p$ é o operador linear $T(\nabla f, p)$. Além disso, estes operadores induzem a aplicação $Hess\, f : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por $Hess\, f(X) = \nabla_X \nabla f$.

Proposição. *Dado* $p \in M$, $(Hess\, f)_p$ *é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração. É suficiente verificar que $\langle Hess\, f(X), Y\rangle = \langle X, Hess\, f(Y)\rangle$ para campos diferenciais arbitrários X e Y, sobre M. De fato:

$$\begin{aligned}
\langle Hess\, f(X), Y\rangle &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle \\
&= X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle \\
&= X(Y(f)) - \langle \nabla f, \nabla_Y X + [X,Y]\rangle \\
&= Y(X(f)) + [X,Y](f) - \langle \nabla f, \nabla_Y X + [X,Y]\rangle \\
&= Y(X(f)) - \langle \nabla f, \nabla_Y X\rangle \\
&= \langle Hess\, f(Y), X\rangle
\end{aligned}$$

□

Proposição. *Dada* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciável,* $\Delta f = tr(Hess\, f)$.

Demonstração. Como $(Hess\, f)_p$ é o operador linear $T(\nabla f, p)$ então ao tomar o traço temos justamente a definição da divergência do campo $X = \nabla f$, o que nos permite concluir $\Delta f = div(\nabla f) = tr(Hess\, f)$. □

Proposição. *Considere $U \subset M$ uma vizinhança coordenada com campos coordenados ∂_i e $f \in C^\infty(M)$. Então, sobre U, temos que:*

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{m}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \sum_{i,j=1}^{m}\langle Hess\, f(\partial_i), \partial_j\rangle g^{ji}$$

Demonstração. Se $Hess\, f = \sum\limits_{l=1}^{m} a_{li}\partial_l$, então segue da proposição anterior que $\Delta f = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ii}$. Além disso,

$$\sum_{i,j=1}^{m}\langle Hess\, f(\partial_i), \partial_j\rangle g^{ji} = \sum_{i,j,l=1}^{m} a_{li}\langle \partial_l, \partial_j\rangle g^{ji} = \sum_{i,j,l=1}^{m} a_{li} g_{lj} g^{ji} = \sum_{i,l=1}^{m} a_{li}\sum_{j=1}^{m}\left(g_{lj}g^{ji}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii} = \Delta f$$

Daí resta provar que $\langle Hess\, f(\partial_i), \partial_j\rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum\limits_{k=1}^{m}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_k}$. De fato:

$$\begin{aligned}
\langle Hess\, f(\partial_i), \partial_j\rangle &= \langle \nabla_{\partial_i}\nabla f, \partial_j\rangle \\
&= \partial_i\langle \nabla f, \partial_j\rangle - \langle \nabla f, \nabla_{\partial_i}\partial_j\rangle \\
&= \partial_i(\partial_j f) - \sum_{k=1}^{m}\Gamma_{ij}^{k}\langle \nabla f, \partial_k\rangle \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{m}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

□

Se Se $M = \mathbb{R}^m$ então $\langle Hess\, f(\partial_i), \partial_j\rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Daí, tomando os campos coordenados ∂_i como sendo os usuais que definem a base canônica, então concluímos a mesma tem como matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{ij}$ (é um exercício simples de álgebra linear verificar que, se $T : V \longrightarrow V$ é um operador linear sobre um espaço vetorial com produto interno V e base ortonormal $\beta = \{e_i\}_{i=1}^{n}$ então $\langle e_i, Te_j\rangle = t_{ij}$, onde $[t_{ij}]$ é a matriz de T na base β), o que vai de encontro aos resultados presentes no cálculo e análise em variáveis reais.

As considerações acima nos motivam a construir uma forma bilinear simétrica $Hess\, f(.,.) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $Hess\, f(X, Y) = \langle Hess\, f(X), Y\rangle$. Daí, vale também:

$$Hess\, f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f(X), Y\rangle = X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f$$

$Hess\, f(.,.)$ é dita *forma hessiana de f*. Observe também que tal aplicação induz naturalmente formas bilineares $(Hess\, f)_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $(Hess\, f)_p(v, w) = \langle (Hess\, f)_p(v), w\rangle$.

4 REPRESENTAÇÕES REAIS E QUATERNIÔNICAS

A fim de simplificar a redação do texto, usaremos V e V_i para denotar representações complexas, U e U_i para representações reais e, finalmente, W e W_i para as representações quaterniônicas, onde i é um índice inteiro. O conjunto das representações de G sobre $\mathbb{K}$ é denotado por $Rep(G;\mathbb{K})$. Veja [BD] para mais detalhes.

Definição. *Um G-módulo complexo V é dito de* tipo real *(resp.* tipo quaterniônico*) se admitir uma G-aplicação anti-linear* $J : V \longrightarrow V$ *tal que* $J^2 = id$ *(resp.* $J^2 = -id$*) e denotamos* $V \in Rep_+(G,\mathbb{C})$ *(resp.* $V \in Rep_-(G,\mathbb{C})$*). Se V não for de nenhum dos tipos anteriores dizemos que ele é de* tipo complexo*. J é chamada* aplicação de estrutura*.*

Podemos construir a noção de morfismo nos conjuntos $Rep_\pm(G;\mathbb{C})$. Por exemplo, se V_1 e V_2 são ambas de tipo real (ou ambas de tipo quaterniônico) com aplicações de estrutura J_1 e J_2, então um morfismo de V_1 em V_2 é uma função $f \in Hom_G(V_1, V_2)$ tal que $f \circ J_1 = J_2 \circ f$. Se, além disso, f for bijetiva, então temos a noção de isomorfismo.

A grosso modo, qualquer conjunto ou estrutura que se possa empregar a noção de morfismos (e isomorfismos) sobre seus elementos é chamado de *categoria*.

Construímos $e_+ : Rep(G,\mathbb{R}) \longrightarrow Rep_+(G,\mathbb{C})$ por $e_+(U) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$ (extensão de U a $\mathbb{C}$ com multiplicação escalar complexa $\mathbb{C} \times e_+(U) \ni (z, \lambda \otimes u) \mapsto (z\lambda) \otimes u \in e_+(U)$) munido da aplicação de estrutura $J_U(z \otimes u) = \overline{z} \otimes u$ e, também, $e_- : Rep(G,\mathbb{H}) \longrightarrow Rep_-(G,\mathbb{C})$ por $e_-(W) = W_{\mathbb{C}}$ (o qual é o espaço W porém com os escalares restritos a $\mathbb{C}$) com aplicação de estrutura $J_W(w) = j.w$, onde $j \in \mathbb{H}$ é o elemento da decomposição usual $a + bi + cj + dk$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, de um elemento qualquer do anel $\mathbb{H}$.

Se não mencionarmos nada a respeito da ação de G sobre um produto tensorial de G-módulos $A \otimes B$ então consideramos a ação $g.(a \otimes b) = (g.a) \otimes (g.b)$. Em geral também tomamos a ação de G sobre $\mathbb{C}$ como sendo a trivial. Logo, no caso acima, a ação sobre $e_+(U)$ é dada por $g.(z \otimes u) = (z \otimes g.u)$.

Observação .4. Considere $(V, J) \in Rep_+(G,\mathbb{C})$ e $V_{\mathbb{R}}$ sendo a restrição de V aos escalares reais. Tal restrição também induz uma aplicação linear $J_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \longrightarrow V_{\mathbb{R}}$ que se comporta como J, ou seja, $\forall v \in V_{\mathbb{R}}$, $J_{\mathbb{R}}(v) = J(v)$. Como $J^2 = id$, então temos $J_{\mathbb{R}}^2 = id$ e daí segue que $P(J_{\mathbb{R}}) = (J_{\mathbb{R}} - 1id)(J_{\mathbb{R}} + 1id) = 0$. Assim, o polinômio minimal de $J_{\mathbb{R}}$ divide $P(x) = (x-1)(x+1)$, implicando que seus autovalores estão contidos no conjunto $\{\pm 1\}$ e garantindo a existência de autovetor. Note que, dado um autovetor $v \in V_{\mathbb{R}}$ de determinado autovalor, então iv será necessariamente autovetor do autovalor oposto, o que nos leva a concluir que $Spec_{\mathbb{R}} J_{\mathbb{R}} = \{\pm 1\}$. Logo $V_{\mathbb{R}} = V_+ \oplus V_-$, onde $V_\pm$ são os autoespaços dos autovalores ± 1 com respeito à aplicação $J_{\mathbb{R}}$.

Vale também que a multiplicação por i determina um isomorfismo entre V_+ e V_-.

Em suma, a observação acima nos leva ao seguinte resultado.

Proposição. *Para $(V, J) \in Rep_+(G, \mathbb{C})$ temos:*

(i) $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$.

(ii) $V_{\mathbb{R}} = V_+ \oplus V_-$, *onde* $V_\pm$ *são os autoespaços dos autovalores* ± 1 *com respeito à aplicação* $J_{\mathbb{R}}$ *e vale o isomorfismo* $V_+ \simeq V_-$.

(iii) $\dim_{\mathbb{R}} V_\pm = \dim_{\mathbb{C}} V$.

Demonstração. O item (i) é consequência imediata do processo de restrição dos escalares. O item (ii) é a observação .4 e, por fim, o item (iii) é a combinação dos demais. □

Definimos agora as aplicações $s_+ : Rep_+(G, \mathbb{C}) \longrightarrow Rep(G, \mathbb{R})$ dada por $s_+(V, J) = V_+$ e $s_- : Rep_-(G, \mathbb{C}) \longrightarrow Rep(G, \mathbb{H})$ dada por $s_-(V, J) = V_{\mathbb{H}}$, o qual é o espaço V visto como módulo sobre $\mathbb{H}$ a partir da multiplicação $j.v := J(v)$, estendida naturalmente aos demais escalares quaterniônicos.

Proposição. *As categorias $Rep(G, \mathbb{R})$ e $Rep_+(G, \mathbb{C})$ equivalem, bem como as categorias $Rep(G, \mathbb{H})$ e $Rep_-(G, \mathbb{C})$.*

Demonstração. Dado $U \in Rep(G; \mathbb{R})$ temos seu correspondente natural em $Rep_+(G, \mathbb{C})$ como sendo $e_+(U)$. Por outro lado, dado $(V, J) \in Rep_+(G, \mathbb{C})$, temos $s_+(V, J)$ como o seu correspondente em $Rep(G; \mathbb{C})$. A fim de que estas correspondências sejam compatíveis deve-se verificar que $e_+ \circ s_+$ e $s_+ \circ e_+$ se comportam como a identidade, ou seja:

(i) $e_+ \circ s_+(V, J) \simeq (V, J)$

(ii) $s_+ \circ e_+(U) \simeq U$

Para o item (i) note que $e_+ \circ s_+(V, J)$ é o conjunto $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_+$ com multiplicação por escalar complexa $(z\,,\, \lambda \otimes_{\mathbb{R}} v_+) \mapsto (z\lambda) \otimes_{\mathbb{R}} v_+$ e aplicação de estrutura $J_{V_+}(z \otimes_{\mathbb{R}} v_+) = \overline{z} \otimes_{\mathbb{R}} v_+$. Daí o isomorfismo (na categoria $Rep_+(G, \mathbb{C})$) se dá por meio da aplicação $z \otimes_{\mathbb{R}} v_+ \mapsto z.v_+$ (os detalhes são deixados para verificação).

Para o item (ii) pode-se considerar o isomorfismo $U \ni u \mapsto 1 \otimes u \in (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U)_{+}$ (verifique que de fato é um isomorfismo na categoria $Rep(G, \mathbb{R})$).

Analogamente e_{-} e s_{-} determinam as correspondências entre $Rep(G, \mathbb{C})_{-}$ e $Rep(G, \mathbb{H})$. $\square$

Definição. *Considere $\mathbb{K}_1 \subsetneq \mathbb{K}_2$ com $\mathbb{K}_i \in \{\mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H}\}$ e exclua o caso $(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2) = (\mathbb{R}, \mathbb{H})$. Definimos $e_{\mathbb{K}_1}^{\mathbb{K}_2} : Rep(G, \mathbb{K}_1) \longrightarrow Rep(G, \mathbb{K}_2)$ como a aplicação que leva uma representação S sobre $\mathbb{K}_1$ na representação $e_{\mathbb{K}_1}^{\mathbb{K}_2}(S) = \mathbb{K}_2 \otimes_{\mathbb{K}_1} S$ correspondente a extensão do conjunto de escalares a $\mathbb{K}_2$, com a multiplicação escalar dada por $\mathbb{K}_2 \times e_{\mathbb{K}_1}^{\mathbb{K}_2}(S) \ni (k, \lambda \otimes s) \mapsto (k\lambda) \otimes s \in e_{\mathbb{K}_1}^{\mathbb{K}_2}(S)$.*

No caso $e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}$, podemos ter problemas de comutatividade entre os elementos de $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$. Assim, veremos então $\mathbb{H}$ como um $\mathbb{C}$-módulo à direita. Para o caso excluído, definimos $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{H}} = e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}} \circ e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}$.

Definição. *Considere $\mathbb{K}_1 \subsetneq \mathbb{K}_2$ com $\mathbb{K}_i \in \{\mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H}\}$. Definimos $r_{\mathbb{K}_1}^{\mathbb{K}_2} : Rep(G, \mathbb{K}_2) \longrightarrow Rep(G, \mathbb{K}_1)$ como a aplicação que leva uma representação S sobre $\mathbb{K}_2$ na representação $r_{\mathbb{K}_1}^{\mathbb{K}_2}(S) = S_{\mathbb{K}_1}$ agora com o conjunto dos escalares restringido a $\mathbb{K}_1$. Também podemos definir $r_{\pm} : Rep_{\pm}(G, \mathbb{C}) \longrightarrow Rep(G, \mathbb{C})$ a aplicação que leva um elemento (V, J) em V sem considerar a aplicação de estrutura anti-linear J.*

A aplicação $c : Rep(G, \mathbb{C}) \longrightarrow Rep(G, \mathbb{C})$ dada por $c(V) = \overline{V}$ é dita *conjugação*.

Proposição .5 (Identidades)**.** *Valem as seguintes relações:*

(i) $r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} \circ e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U) = U \oplus U$ *e* $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} \circ r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V) = V \oplus \overline{V}$

(ii) $r_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}} \circ e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(V) = V \oplus \overline{V}$ *e* $e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}} \circ r_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(W) = W \oplus W$

(iii) $c \circ e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}$ *e* $c \circ r_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}} = r_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}$

(iv) $e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}} \circ c = e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}$ *e* $r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} \circ c = r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}$

(v) $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} = r_{+} \circ e_{+}$ *e* $r_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}} = r_{-} \circ e_{-}$

(vi) $r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{H}} = r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} \circ r_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}$ *e* $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{H}} = e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}} \circ e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}$

(vii) $c^2 = c$

(as igualdades acima são a menos de isomorfismos)

Demonstração. Item (i): temos que $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U)$ é a complexificação de U da forma $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$ com multiplicação escalar complexa $(z\ ,\ \lambda \otimes_{\mathbb{R}} u) \mapsto (z\lambda) \otimes_{\mathbb{R}} u$. Se $\{u_j\}_{j=1}^{n}$ é base de U então

$\{1 \otimes u_j\}_{j=1}^n$ é base de $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U)$ sobre $\mathbb{C}$. Daí quando restringimos os escalares de $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U)$ a $\mathbb{R}$ temos o espaço $r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} \circ e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U)$ sobre $\mathbb{R}$, cuja base é duplicada gerando uma decomposição da forma: $r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} \circ e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U) = Span_{\mathbb{R}}\{1 \otimes u_j\}_{j=1}^n \oplus Span_{\mathbb{R}}\{i \otimes u_j\}_{j=1}^n \simeq U \oplus U$.

Vamos exibir um isomorfismo entre $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)$ e $V \oplus \overline{V}$. Consideremos então a aplicação $S : V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)$, $S(v, w) = \frac{1}{2}(1 \otimes v - i \otimes iv) + \frac{1}{2}(1 \otimes w + i \otimes iw)$. Temos então que S é $\mathbb{R}$-linear e satisfaz $S(iv, -iw) = iS(v, w)$, ou seja, enxergando os espaços envolvidos sobre o corpo $\mathbb{C}$, S induz uma aplicação $\mathbb{C}$-linear $\tilde{S} : V \oplus \overline{V} \longrightarrow e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)$ que admite inversa dada por $\tilde{S}^{-1}(z \otimes v) = (zv, \overline{z}v)$. Ou seja, $\tilde{S}$ é o isomorfismo que queríamos.

O item (ii) é bastante similar ao anterior.

Para os itens (iii) e (iv) vamos provar apenas a identidade $c \circ e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}$ (pois as demais são similares). Seja $V = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U)$, então $c \circ e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U) = \overline{V}$, daí a aplicação linear $J : V \longrightarrow \overline{V}$ definida por $J(z \otimes v) = \overline{z} \otimes v$ define um isomorfismo entre os espaços V e $\overline{V}$ (note que, o fato de um deles ser conjugado e o outro não, torna J linear).

Os três últimos itens são basicamente aplicações das definições. □

Definição (Conjuntos irredutíveis)**.** *Defina:*

(i) $Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ *é o subconjunto das representações de tipo real em* $Irr(G;\mathbb{C})$*.*

(ii) $Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{H}}$ *é o subconjunto das representações de tipo quaterniônico em* $Irr(G;\mathbb{C})$*.*

(iii) $Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{C}}$ *é o subconjunto das representações* V *tais que* $V \ncong \overline{V}$ *em* $Irr(G;\mathbb{C})$ *(são as de tipo complexo conforme veremos mais adiante).*

(iv) $Irr(G;\mathbb{R})_{\mathbb{R}}$ *é o subconjunto das representações* $U \in Irr(G;\mathbb{R})$ *que satisfazem a propriedade* $V = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U) \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$*.*

(v) $Irr(G;\mathbb{R})_{\mathbb{H}}$ *é o subconjunto das representações* $U \in Irr(G;\mathbb{R})$ *tais que* $U = r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)$ *para alguma* $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{H}}$ *.*

(vi) $Irr(G;\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ *é o subconjunto das representações* $U \in Irr(G;\mathbb{R})$ *tais que* $U = r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)$ *para alguma* $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{C}}$ *.*

(vii) $Irr(G;\mathbb{H})_{\mathbb{R}}$ *é o subconjunto das representações* $W \in Irr(G;\mathbb{H})$ *tais que* $W = e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(V)$ *para alguma* $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ *.*

(viii) $Irr(G;\mathbb{H})_{\mathbb{H}}$ *é o subconjunto das representações* $W \in Irr(G;\mathbb{H})$ *que satisfazem a propriedade* $V = r_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(W) \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{H}}$*.*

(ix) $Irr(G;\mathbb{H})_{\mathbb{C}}$ *é o subconjunto das representações* $W \in Irr(G;\mathbb{H})$ *tais que* $W = e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(V)$ *para alguma* $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{C}}$ *.*

(x) Uma representação complexa V *é dita auto-conjugada se* $V \simeq \overline{V}$ *(equivalentemente* $V \simeq V^*$*).*

Os itens (i) e (ii) são noções que já tínhamos e elas estão associadas a uma conjugação via aplicação de estrutura J, sendo (iii) as representações irredutíveis que não possuem tal conjugação, chamadas de tipo complexo. Os itens (iv)-(ix) generalizam a noção de tipo real, quaterniônico e complexo para as representações irredutíveis sobre $\mathbb{R}$ e sobre $\mathbb{H}$. Para nosso propósito iremos focar mais nas representações complexas de (i) a (iii), mas boa parte dos resultados seguintes possuem análogos que podem ser adaptados para representações sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}$.

Proposição. *Seja* V *uma representação complexa de* G*. Então* V *é de tipo real (resp. tipo quaterniônico) se, e somente se,* V *admite uma forma bilinear* G*-equivariante não-degenerada* $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ *simétrica (resp. anti-simétrica).*

Demonstração. Como esta prova é extensa os detalhes são deixados para verificação.

($\Leftarrow$) Assuma a existência de tal aplicação bilinear B com $B(u,v) = \sigma B(v,u)$, $\sigma \in \{\pm 1\}$. Como estamos trabalhando sempre com G grupo de lie compacto então podemos tomar um produto interno $\langle .,. \rangle$ G-equivariante sobre V. Pelas propriedades de B podemos construir um isomorfismo anti-linear G-equivariante $T : V \longrightarrow V$ com a propriedade $\langle u, Tv \rangle = B(u,v)$, $\forall u, v \in V$. Note que $\langle u, T^2 v \rangle = \langle T^2 u, v \rangle$, $\forall u, v \in V$. Com isso temos que σT^2 tem autovalores reais positivos λ_1, ..., λ_k. Seja V_j o autoespaço do autovalor λ_j, então $T(V_j) \subset V_j$, V_j é invariante por G e $V = \bigoplus_{j=1}^{k} V_j$. Definimos então $S : V \longrightarrow V$ por $S|_{V_j} = \sqrt{\lambda_j} id$. Daí $S \circ T = T \circ S$ e $\sigma T^2 = S^2$. Logo a aplicação anti-linear $J = S \circ T^{-1}$ satisfaz $J^2 = \sigma id$, ou seja, se $\sigma = 1$ então (V, J) é de tipo real enquanto que para $\sigma = -1$ temos (V, J) de tipo quaterniônico.

($\Rightarrow$) Se V é tipo real, então admite aplicação de estrutura J, anti-linear e satisfazendo $J^2 = id$. Além disso, $V \simeq e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V_+)$ e daí qualquer $\mathbb{R}$-forma bilinear simétrica G-equivariante não degenerada pode ter seu corpo de escalar estendido, tornando-se $\mathbb{C}$-bilinear com as mesmas propriedades. Suponha agora que (V, J) é de tipo quaterniônico (i.e. $J^2 = -id$) com extensão de escalares $V_{\mathbb{H}}$ a $\mathbb{H}$ via regra de multiplicação escalar $j.v = J(v)$, $\forall v \in V$. Então $V_{\mathbb{H}}$ admite produto interno $\langle .,. \rangle$ simplético, o qual pode ser escrito na forma $\langle u, v\rangle = H(u,v) + B(u,v)j$ com H e B bilineares. Basta então verificar que B satisfaz as condições do enunciado. $\square$

Proposição. *$V \in Irr(G;\mathbb{C})$ é auto-conjugada se, e somente se, V for de tipo real ou quaterniônico (não ambas).*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Vale a seguinte identificação: $Hom(V \otimes V, \mathbb{C}) \simeq V^* \otimes V^*$ o qual pode ser visto como espaço das formas bilineares em V. Logo temos o isomorfismo $V^* \otimes V^* \simeq S(V) \oplus A(V)$, onde $S(V)$ e $A(V)$ é o espaço das formas biliares simétricas e anti-simétricas, respectivamente. Relembremos agora a definição de um espaço Z^G a qual é dada por $Z^G = \{v \in Z \mid g.v = v, \ \forall g \in G\}$. Note que vale a igualdade $(S(V) \oplus A(V))^G = S(V)^G \oplus A(V)^G$, o qual contém as formas bilineares G-equivariantes. Temos também $Hom(V \otimes V, \mathbb{C})^G \simeq (Hom(V, V^*))^G = Hom_G(V, V^*)$. Como $V \simeq \overline{V} \simeq V^*$ temos que $Hom_G(V, V^*)$ é unidimensional via lema de Schur. Se ocorrer $\dim_{\mathbb{C}} S^G = 1$ e $\dim_{\mathbb{C}} A^G = 0$ (resp. $\dim_{\mathbb{C}} S^G = 0$ e $\dim_{\mathbb{C}} A^G = 1$) então V admite apenas forma bilinear simétrica (resp. anti-simétrica) nas condições do teorema anterior.

($\Leftarrow$) Se $V \in Irr(G;\mathbb{C})$ é de tipo real ou quaterniônico então a aplicação de estrutura anti-linear $J : V \longrightarrow V$ passa a ser um isomorfismo linear $J : V \longrightarrow \overline{V}$ se alteramos por exemplo o contradomínio por seu conjugado (já usamos esse argumento na demonstração da proposição .5). $\square$

Teorema. *$Irr(G;\mathbb{K})$ é a união disjunta dos conjuntos $Irr(G;\mathbb{K})_{\mathbb{R}}$, $Irr(G;\mathbb{K})_{\mathbb{C}}$ e $Irr(G;\mathbb{K})_{\mathbb{H}}$.*

Demonstração. O caso principal de interesse $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ é corolário da proposição anterior. Os demais possuem algumas adaptações técnicas dos argumentos das proposições anteriores. $\square$

Teorema. *Valem:*

(i) $U \in Irr(G;\mathbb{R})_{\mathbb{R}} \Rightarrow V = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$.

(ii) $U \in Irr(G;\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \Rightarrow e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U = V \oplus \overline{V}$, *algum* $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{C}}$.

(iii) $U \in Irr(G;\mathbb{R})_{\mathbb{H}} \Rightarrow e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U = V \oplus V$, *algum* $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{H}}$.

(iv) $W \in Irr(G;\mathbb{H})_{\mathbb{R}} \Rightarrow r_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(W) = W_{\mathbb{C}} = V \oplus V$, *algum* $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$.

(v) $W \in Irr(G;\mathbb{H})_{\mathbb{C}} \Rightarrow r_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(W) = W_{\mathbb{C}} = V \oplus \overline{V}$, *algum* $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{C}}$.

(vi) $W \in Irr(G;\mathbb{H})_{\mathbb{H}} \Rightarrow V = r_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(W) = W_{\mathbb{C}} \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{H}}$.

(vii) $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \Rightarrow r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V) = V_{\mathbb{R}} = U \oplus U$, *algum* $U \in Irr(G;\mathbb{R})_{\mathbb{R}}$ *e também que* $W = e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(V) = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V \in Irr(G;\mathbb{H})_{\mathbb{R}}$.

(viii) $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{C}} \Rightarrow r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V) = r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(\overline{V}) \in Irr(G;\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ *e* $e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(V) = e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(\overline{V}) \in Irr(G;\mathbb{H})_{\mathbb{C}}$.

(ix) $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{H}} \Rightarrow U = r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V) = V_{\mathbb{R}} \in Irr(G;\mathbb{R})_{\mathbb{H}}$ *e* $e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(V) = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V = W \oplus W$, *algum* $W \in Irr(G;\mathbb{H})_{\mathbb{H}}$.

Demonstração. As demonstrações basicamente são aplicações das definições dos conjuntos da forma $Irr(G;\mathbb{K})_{\mathbb{F}}$ juntamente às identidades da proposição .5 .

Item (i): é a definição de $Irr(G;\mathbb{R})_{\mathbb{R}}$.

Item (ii): temos que existe $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{C}}$ tal que $U = r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)$. Logo vale a relação $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U) = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)) = V \oplus \overline{V}$.

Item (iii): temos que $U = r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)$, alguma $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{H}}$. Como V é auto-conjugada temos $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U) = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)) = V \oplus \overline{V} = V \oplus V$.

Itens (iv) a (vi): são demonstrações análogas às anteriores.

Item (vii): a parte do W é imediata da definição de $Irr(G,\mathbb{H})_{\mathbb{R}}$. Vamos mostrar a parte referente a U. Temos que $r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V) = U \oplus iU \simeq U \oplus U$ para alguma representação real U. Além disso $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U = Span_{\mathbb{R}}\{1 \otimes u\}_{u \in U} \oplus Span_{\mathbb{R}}\{i \otimes u\}_{u \in U}$ munido de uma operação complexa natural. Assim, como o tensor real $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$ pode ser munido de uma multiplicação escalar complexa natural, o mesmo vale para o espaço real $U \oplus iU$ e neste último caso recuperamos a representação V. Daí basta notarmos que tanto sobre $\mathbb{R}$ quanto sobre $\mathbb{C}$, os espaços $U \oplus iU$ e $Span_{\mathbb{R}}\{1 \otimes u\}_{u \in U} \oplus Span_{\mathbb{R}}\{i \otimes u\}_{u \in U}$ desempenham o mesmo papel, ou seja, concluímos que $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U) \simeq V \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$. Logo $U \in Irr(G,\mathbb{R})_{\mathbb{R}}$.

Item (viii): por definição de $Irr(G,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$, tanto $r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)$ quanto $r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(\overline{V})$ estão em $Irr(G,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$, visto que $V, \overline{V} \in Irr(G,\mathbb{C})_{\mathbb{C}}$. Basta mostrar que tais restrições são isomorfas, mas isto é fácil de ver visto que o processo de restrição anula a ação de escalares complexos que é justamente o que diferencia V de $\overline{V}$. Para $W = e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(V) \simeq e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(\overline{V}) \in Irr(G;\mathbb{H})_{\mathbb{C}}$ é um argumento bem similar.

Item (ix): a parte referente a U segue da definição de $Irr(G,\mathbb{R})_{\mathbb{H}}$. Para a parte restante basta mostrar que $V = r_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(W)$, alguma $W \in Irr(G,\mathbb{H})_{\mathbb{H}}$, visto que vale a identidade $e_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(r_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(W)) = W \oplus W$. Fazemos então $W = V_{\mathbb{H}}$, que é o espaço V identificado naturalmente com uma multiplicação escalar quaterniônica a partir da regra $j.v = J(v)$, $\forall v \in V$. Daí temos então $r_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(W)$ justamente sendo V, ou seja, $W \in Irr(G,\mathbb{H})_{\mathbb{H}}$. $\square$

Teorema .6. *Dada $V \in Irr(G, \mathbb{C})$, valem:*

(i) $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow V = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U)$, *algum* $U \in Irr(G;\mathbb{R})_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow V \simeq V^*$ *e* $V = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$, *algum* $U \in Irr(G;\mathbb{R})$.

(ii) $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow V \oplus \overline{V} = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U)$, *algum* $U \in Irr(G;\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow$ *valem* $V \not\simeq V^*$ *e* $V \oplus V^* \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$, *algum* $U \in Irr(G;\mathbb{R})$.

(iii) $V \in Irr(G;\mathbb{C})_{\mathbb{H}} \Leftrightarrow V \oplus V = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U)$, *algum* $U \in Irr(G;\mathbb{R})_{\mathbb{H}} \Leftrightarrow$ *valem* $V \simeq V^*$ *e* $V \oplus V = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$, *algum* $U \in Irr(G;\mathbb{R})$.

Demonstração. Item (i): a segunda afirmação implica na terceira trivialmente. A terceira implica na primeira do seguinte modo: como V é auto-conjugada então não é de tipo complexo e se fosse de tipo quaterniônico então $r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)$ seria irredutível de tipo quaterniônico. Mas $V = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U)$, logo $r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V) = r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U)) = U \oplus U$ que nem sequer é irredutível. Por fim, basta que a segunda implique na primeira. Note que se (V, J) é de tipo real então $V_{\mathbb{R}} = V_+ \oplus V_-$. Fazendo $U = V_+$, temos $iU = V_-$ e daí a complexificação de U é justamente V (a qual é de tipo real), ou seja, $U \in Irr(G, R)_{\mathbb{R}}$.

Item (ii): A segunda implica a terceira pela proposição anterior (item (ii)) já que V deve ser de tipo $\mathbb{C}$, logo não é auto-conjugada. Já para a primeira implicando a segunda tomamos $U = r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)$. Como V é de tipo complexo, segue da definição que U é de tipo complexo e daí temos $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U) = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)) = V \oplus \overline{V}$. A terceira implica a primeira trivialmente visto que V não é auto-conjugada.

Item (iii): A segunda implica a terceira também pela proposição anterior (item (iii)), mostrando que V é tipo $\mathbb{H}$, logo auto-conjugada. Considere a implicação da primeira para a segunda. Tomamos $U = r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)$, daí como V é de tipo quaterniônico (logo $V \simeq \overline{V}$), segue da definição que U é de tipo quaterniônico o que nos leva a $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U) = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)) = V \oplus \overline{V} = V \oplus V$. Para a terceira implicando a primeira, resta mostrar que V não pode ser de tipo real (já que V é auto-conjugada). Suponha então que V é de tipo real. Pela proposição anterior (item (vii)) temos que $r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V) \simeq U \oplus U$. Além disso, $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(r_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(V)) \simeq V \oplus \overline{V} \simeq V \oplus V = e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U)$, o que nos leva a contradição $e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U \oplus U) \simeq e_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(U)$. $\square$

BIBLIOGRAFIA

[BD] BRÖCKER, T. ; DIECK, T. tom; *Representations of Compact Lie Groups,* Springer Verlag, New York, 1985.

[Sch] SCHUETH, D., *Generic Irreducibilty of Laplace Eigenspaces on Certain Compact Lie Groups,* Annals of Global Analysis and Geometry, First published 2017.

[Uhl] UHLENBECK, K., *Generic Properties of Eigenfunctions,* American Journal of Mathematics, First published 1976.

[Car] CARMO, M. do., *Riemannian Geometry,* english version, Birkhäuser, Boston, 1993.

[Cha] CHAVEL, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry,* Academic Press, 1984.

[Ros] ROSENBERG, S., *The Laplacian on a Riemannian Manifold,* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Gua] GUARIE, D., *Symmetries and Laplacians - Introduction to Harmonic Analysis, Group Representations and Applications,* Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1992.

[Arr] ARRIETA, C.A.J., *O laplaciano em variedades e isoespectralidade,* Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 1993 (Dissertação de Mestrado).

[Mun] MUNIZ NETO, A.C., *Tópicos de Geometria Diferencial,* SBM , 2014.

[HRI] HEWITT, E.; ROSS, K.A.; *Abstract Harmonic Analysis vol.1,* Springer Verlag, New York, 1963.

[HRII] HEWITT, E.; ROSS, K.A.; *Abstract Harmonic Analysis vol.2,* Springer Verlag, New York, 1969.

[Ha] HALL, B.C.; *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations - An Elementary Introduction,* Springer Verlag, New York, 2003.

[Rud] RUDIN, W., *Principles of Mathematical Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, 3th edition, 1976.

[Die] DIEUDONNÉ, J., *Foundations of Modern Analysis*, New York: Academic Press, 1960.

[GKZ] GELFAND, I.M. ; KAPRANOV, M.M.; ZELEVINSKY, A.V., *Discriminants, resultants, and multidimensional determinantes,* Birkhäuser, Boston 1994.

[War] WARNER, F.W. ; *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups,* Springer Verlag, New York, 1983.

[Lee] LEE, J.M. ; *Introduction to Smooth Manifolds,* Springer Science+Business Media, New York, 2006.

[Mch] MICHOR, P.W. ; *Topics in Differential Geometry,* American Mathematical Society, 2008.

[Lan] LANG, S. ; $SL_2(\mathbb{R})$, Springer Verlag, New York, 1985.

[Mar] SAN MARTIN, L.A.B.; *Álgebras de Lie,* Editora Unicamp, Campinas, 2010.