



LUCAS RAPHAEL

TEORIA DE MORSE-NOVIKOV E SEUS ASPECTOS DINÂMICOS

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
CAPES

Santo André, 2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

LUCAS RAPHAEL

**TEORIA DE MORSE-NOVIKOV E SEUS ASPECTOS
DINÂMICOS**

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Mariana Rodrigues da Silveira

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro
de Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO LUCAS RAPHAEL,
E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. MARIANA RODRIGUES DA SILVEIRA.

SANTO ANDRÉ, 2018

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Raphael, Lucas

Teoria de Morse-Novikov e seus aspectos dinâmicos / Lucas
Raphael. — 2018.

100 fls. : il.

Orientadora: Mariana Rodrigues da Silveira

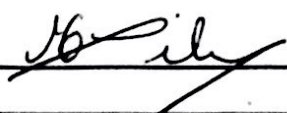
Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa
de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2018.

1. Variedades Diferenciáveis. 2. Topologia Algébrica. 3. Teoria
de Morse. 4. Cobordismos. I. Silveira, Mariana Rodrigues da. II.
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 19 de março de 2018.

Assinatura do autor: 

Assinatura do orientador: 



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 Fone: (11) 4996-0017
ppg.matematica@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Lucas Raphael, realizada em 12 de janeiro de 2018:

Prof.(a) Dr.(a) **Mariana Rodrigues da Silveira** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Dahisy Valadão de Souza Lima** (Universidade Estadual de Campinas) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Ewerton Rocha Vieira** (Universidade Federal de Goiás) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Daniel Miranda Machado** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Ricardo Miranda Martins** (Universidade Estadual de Campinas) – Membro Suplente



Universidade Federal do ABC

Agradeço primeiramente ao meu Deus Jeová, que me deu a vida e permite que eu usufrua todos os dias deste presente maravilhoso. Agradeço também ao meu pai, que me patrocinou e apoiou nesse empreendimento do meu mestrado. Agradeço à minha mãe e irmão, que estiveram presentes comigo, me dando suporte durante este processo importante da minha vida. Agradeço à agência de fomento CAPES e ao governo brasileiro pelo apoio financeiro oferecido durante o processo de elaboração desta dissertação. Agradeço à minha orientadora Mari, pelo suporte emocional que ofereceu nos momentos em que pensei em desistir e pela insistência em "perfeição" que possibilitou que o trabalho adquirisse uma estrutura sólida, num nível muito acima do que eu imaginava ser capaz de escrever. E por último, mas não menos importante, agradeço ao meu amor, Virginia, que vem me dando a oportunidade de compartilhar com ela minhas alegrias e tristezas, fracassos e conquistas, tornando a vida mais linda a cada dia.

Tudo o que você precisa saber nessa vida
está em "O Poderoso Chefão".
- Michael Kyle

A Teoria de Morse é baseada na obtenção de informações topológicas de uma variedade M diferenciável por meio de uma função real $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ com apenas pontos críticos não degenerados. Nesta dissertação estudamos uma adaptação desta teoria para funções com imagem no círculo S^1 . Este estudo é realizado considerando o recobrimento cíclico infinito de M induzido pelo recobrimento universal $\mathbb{R}$ sobre S^1 . Mostramos que, assim como no caso Morse, informações topológicas de M podem ser recuperadas através de um complexo de cadeias construído a partir dos pontos críticos de f .

Palavras-chave: Teoria de Morse-Novikov, Teoria de Morse-circular, complexo de cadeias, pontos críticos, fluxos.

Morse theory is based on recovering topological information about a smooth manifold M using a real valued function $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ with a finite number of non-degenerate critical points. In this work we study an adaptation of this theory for circle valued maps. This study is done considering the infinite cyclic covering of M induced by the universal covering $\mathbb{R}$ of S^1 . We prove that, as in the Morse case, topological information of M can be recovered using a chain complex generated by the critical points of f .

Keywords: Morse-Novikov theory, circle-valued Morse theory, chain complex, critical points, flows.

1	Variedades Diferenciáveis	3
1.1	Definição	3
1.2	Espaço tangente e diferenciabilidade em variedades	5
1.3	Subvariedades transversais e número de intersecção	8
1.4	Fibrados tangentes, campos de vetores e orientação	11
2	Topologia Algébrica	15
2.1	Teoria de Módulos	15
2.1.1	Módulos livres	15
2.1.2	Produto tensorial de módulos sobre um anel	15
2.1.3	Torção	17
2.2	Homologia	18
2.2.1	Complexos de cadeias	18
2.2.2	Sequências exatas	20
2.2.3	Homologia singular	21
2.3	Espaços celulares	24
2.3.1	Filtrações de complexos de cadeias	25
2.3.2	Homotopia de cadeias	26
2.4	Espaços de recobrimento	28
3	Teoria de Morse	33
3.1	Lema de Morse	33
3.2	Fluxos, variedades estáveis e instáveis	36
3.3	Variedades de conexão	38
3.4	Compacidade	40
3.5	Orientação	41
3.6	Homologia de Morse	44
3.6.1	Desigualdades de Morse	47

Conteúdo

4	Teoria de Morse em Cobordismos	49
4.1	Cobordismos	49
4.2	Teorema da variedade estável para cobordismos	52
4.2.1	Teoria local	52
4.2.2	Teoria global	55
4.3	Complexo de Morse em cobordismos	61
5	Teoria de Novikov	79
5.1	Aplicações de Novikov	79
5.2	Complexo de Novikov	83
5.3	Homologia de Novikov	86
5.4	Coeficientes de Novikov	93
5.5	Desigualdades de Novikov	94
5.6	Aplicações em teoria de nós	95

Considere M uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse em M , ou seja, uma função diferenciável com um número finito de pontos críticos não degenerados. É possível construir um complexo de cadeias gerado pelos pontos críticos de f e graduado pelo índice de Morse dos mesmos. Os operadores bordo são definidos levando-se em conta o fluxo gerado pelo campo gradiente negativo de f , carregando consigo informação dinâmica e topológica sobre M . Este complexo é chamado **complexo de Morse-Witten** e sua homologia coincide com a homologia singular de M . O complexo de Morse-Witten se torna, desta maneira, uma ferramenta importante na abordagem topológica dos sistemas dinâmicos.

Esta dissertação propõe o estudo da teoria de Morse sob um ponto de vista diferente, levando em conta aplicações circulares do tipo $f : M \rightarrow S^1$. A estratégia utilizada é considerar o levantamento $F : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$ induzido pelo recobrimento universal de $\mathbb{R}$ sobre S^1 . Apesar da teoria de Morse também ser aplicável nesse caso, surgem dificuldades que precisam ser contornadas, como por exemplo o fato de a variedade $\bar{M}$ não ser compacta, sem bordo. Levando-se em conta, entretanto, que $\bar{M}$ é uma variedade invariante sob a ação de $\mathbb{Z}$, é possível restringir seu estudo a um cobordismo particular. Desta forma, estudamos nesta dissertação a teoria de Morse para cobordismos e a utilizamos para construir o **complexo de Novikov**, um análogo ao complexo de Morse-Witten para funções com imagem em S^1 . Em seguida, mostramos como o complexo de Novikov pode ser utilizado para recuperar informações sobre a dinâmica e topologia de M .

Para atingir os objetivos propostos, a dissertação faz uso de diversos conceitos preliminares de diferentes áreas da matemática. Desta forma, os capítulos iniciais destinam-se principalmente à introdução desses conceitos. O Capítulo 1 aborda tópicos de topologia diferencial que são utilizados ao longo do trabalho, com destaque para o conceito de transversalidade. No Capítulo 2, apresentamos os tópicos de Álgebra e Topologia Algébrica necessários. Introduzimos homologia singular, espaços celulares, homotopia em cadeias e espaços de recobrimento. No Capítulo 3,

Conteúdo

apresentamos as funções de Morse, estudamos fluxos gradientes Riemannianos em uma variedade compacta sem bordo e introduzimos o complexo de Morse. No capítulo 4 a teoria é estendida para funções de Morse em cobordismos. A abordagem deste capítulo é baseada em [15] e é mais algébrica, diferentemente da abordagem do Capítulo 3, baseada em [24] e que utiliza ferramentas de sistemas dinâmicos. No Capítulo 5 usamos as ferramentas desenvolvidas ao longo do trabalho para construir o complexo de Novikov e mostramos aplicações na teoria de nós e links.

Neste capítulo apresentamos os conceitos e resultados de variedades que utilizamos neste trabalho.

1.1 Definição

Nesta seção definimos as variedades diferenciáveis e estudamos os conceitos de transversalidade e orientação. As principais referências utilizadas foram [9], [17], [21] e [14]. Para estabelecermos o conceito de variedades diferenciáveis é necessário introduzirmos o conceito de **cartas coordenadas**.

Definição 1.1 Uma **carta coordenada** em um conjunto X é um par (U, ϕ) onde U é subconjunto e

$$\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

é uma bijeção sobre um aberto $\phi(U)$ em $\mathbb{R}^n$.

A bijeção ϕ permite a parametrização dos pontos $x \in U$ em n coordenadas $\phi(x) = (x_1, \dots, x_n)$. Consideraremos a situação em que X é coberto por cartas coordenadas satisfazendo algumas condições.

Definição 1.2 Um **atlas n -dimensional** sobre um conjunto X é uma coleção de cartas coordenadas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ satisfazendo as seguintes condições:

1. X é coberto por $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$
2. Para cada $\alpha, \beta \in I$, $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$
3. A aplicação $\phi_\beta \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é C^∞ com inversa C^∞ .

Dados dois atlas sobre o mesmo espaço, definimos entre eles uma relação de compatibilidade.

Definição 1.3 Dois atlas n -dimensionais $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}, \{V_i, \psi_i\}$ sobre um conjunto X são **compatíveis** se a sua união formar um atlas n -dimensional sobre X .

A relação de compatibilidade é uma relação de equivalência no espaço dos atlas n -dimensionais sobre um conjunto X . Definimos uma **estrutura diferenciável n -dimensional** como sendo uma classe de equivalência de atlas. Usando esses conceitos, definimos variedades diferenciáveis a seguir.

Definição 1.4 Uma **variedade diferenciável n -dimensional** é um conjunto M munido de uma estrutura diferenciável n -dimensional.

Para verificar se um conjunto é variedade, basta provarmos a existência de um atlas. Se M é uma variedade, o atlas existente em M define uma topologia sobre este conjunto. Diremos que um conjunto $V \subset M$ é aberto se, e somente se, para cada α , $\phi_\alpha(V \cap U_\alpha)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Com essa topologia a aplicação $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha)$ se torna um homeomorfismo. Impomos ainda sobre as variedades diferenciáveis as seguintes condições:

1. A variedade M com a topologia induzida pelo atlas deve ser Hausdorff.
2. A topologia induzida pelo atlas deve possuir uma base enumerável de abertos.

Sem essas condições as variedades não seriam sequer espaços métricos, o que inviabilizaria qualquer tipo de uso de análise em seu estudo.

Exemplo 1.5 Todo espaço vetorial V de dimensão n sobre os reais é uma variedade diferenciável. Tomando uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ e a aplicação $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(v) = \phi(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = (a_1, \dots, a_n)$, observa-se que (V, ϕ) constitui uma carta coordenada para V . De fato $\phi(V) = \mathbb{R}^n$, que é aberto e ϕ admite inversa ϕ^{-1} . Como a carta cobre todo o espaço, satisfaz a condição de atlas. A topologia induzida por esse atlas coincide com a topologia usual proveniente do homeomorfismo entre V e $\mathbb{R}^n$, satisfazendo portanto as condições de ser Hausdorff e possuir base enumerável de abertos.

Podemos generalizar a noção de variedade definindo cartas coordenadas como bijeções de M para o espaço $\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}$, com a topologia de subespaço induzida por $\mathbb{R}^n$. Nessas condições dizemos que o conjunto M é uma **variedade com bordo**. O conjunto de pontos de M que são levados por alguma carta coordenada no conjunto $\partial\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n = 0\}$ é chamado de **bordo** de M e será denotado por ∂M . Pode-se mostrar que o bordo é disjunto dos demais pontos da variedade. Como toda bola aberta em $\mathbb{R}^n$ admite um difeomorfismo para um aberto em $\mathbb{H}^n$, uma variedade diferenciável é uma variedade com bordo (cujo bordo ∂M é vazio). A recíproca, entretanto nem sempre é verdadeira.

O resultado a seguir nos dá um meio de identificar variedades (sem bordo) em $\mathbb{R}^n$ sem precisar explicitar um atlas. Sua demonstração pode ser vista em [14].

Teorema 1.6 *Sejam $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função C^∞ definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ e $c \in \mathbb{R}^m$. Assuma que para cada $a \in F^{-1}(c)$, a derivada*

$$DF_a : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é sobrejetora. Então $F^{-1}(c)$ tem estrutura de variedade diferenciável n -dimensional.

Um ponto $c \in \mathbb{R}^m$ satisfazendo a condição do Teorema 1.6 é chamado de **valor regular** da função F . Um ponto de $\mathbb{R}^m$ que não é valor regular é chamado de **valor crítico** de F . O Teorema 1.6 estabelece deste modo que a imagem inversa de valores regulares de funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ possui estrutura de variedade diferenciável. Em geral é mais simples identificar variedades em $\mathbb{R}^n$ dessa forma do que encontrar um sistema de cartas coordenadas que formem um atlas sobre o conjunto em questão. Observamos que a imagem inversa de valores críticos podem não ter estrutura de variedade.

Exemplo 1.7 Definindo $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = |x|^2 - 1$, segue do Teorema 1.6 que $S^n = g^{-1}(0)$ é variedade de dimensão n .

Dados uma carta coordenada (U, ϕ) em uma variedade n -dimensional M e um ponto $p \in U$, diremos que ϕ é uma **carta coordenada ao redor de p** e que a função $\phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U$ é um **sistema local de coordenadas** ao redor de p . Como ϕ é homeomorfismo, faremos um abuso de notação e denotaremos o ponto p por sua imagem $(x_1, \dots, x_n)$ pela função ϕ .

1.2 Espaço tangente e diferenciabilidade em variedades

Introduzimos nesta seção as noções de diferenciabilidade e vetores tangentes em variedades diferenciáveis.

Definição 1.8 Dadas M, N variedades diferenciáveis n -dimensionais, dizemos que uma aplicação $F : M \rightarrow N$ é **diferenciável** se dados $x \in M$, (U, ϕ) carta em M com $x \in U$ e (V, ψ) carta em N com $F(x) \in V$, o conjunto $F^{-1}(V)$ é aberto e a função

composta

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}$$

em $\phi(F^{-1}(V) \cap U)$ é uma função C^∞ . Dizemos que F é um **difeomorfismo** se for uma aplicação diferenciável com inversa diferenciável.

Denotando o espaço vetorial das funções diferenciáveis da forma $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $C^\infty(M)$, definimos a noção de vetores tangentes em variedades a seguir.

Definição 1.9 Sejam M uma variedade n -dimensional e $p \in M$. Uma aplicação linear $v_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **vetor tangente a p** se satisfaz

$$v_p(fg) = f(p)v_p g + g(p)v_p f,$$

para quaisquer $f, g \in C^\infty(M)$.

O conjunto de todos os vetores tangentes a p de $C^\infty(M)$ é um espaço vetorial n -dimensional chamado de **espaço tangente a M em p** e é denotado por $T_p M$ (a demonstração pode ser vista em [9]).

Exemplo 1.10 Como consequência da regra da cadeia, a aplicação derivada $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

é um vetor tangente a $\mathbb{R}^n$ em p .

Munidos do espaço tangente, introduzimos a noção de derivada para aplicações diferenciáveis entre variedades. Suponha $F : M \rightarrow N$ diferenciável e $f \in C^\infty(N)$. Então $f \circ F \in C^\infty(M)$.

Definição 1.11 A **derivada** em $p \in M$ de uma aplicação $F : M \rightarrow N$ é o homomorfismo entre os espaços tangentes

$$DF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

definido por

$$DF_p(v_p)(f) = v_p(f \circ F).$$

Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades. Um ponto $p \in M$ é chamado **ponto regular** de F se $DF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ for sobrejetora. Nesse caso dizemos também que F é **regular** em p . Se DF_p não for sobrejetora, diremos que p é

ponto crítico.

Seja (U, ϕ) carta coordenada de M . A função ϕ é, em particular, um difeomorfismo entre U e $\phi(U)$. Concluimos, portanto, que a derivada $D\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. É possível demonstrar que os vetores tangentes

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_{\phi(p)}, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_{\phi(p)}$$

como definidos no Exemplo 1.10 formam uma base para $T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$. Assim sua imagem inversa sob a aplicação derivada forma uma base para $T_p M$. Utilizando a notação

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = D\phi_p^{-1} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\phi(p)} \right)$$

temos que

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

é base para $T_p M$. Observe que $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ age em uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p f = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1}) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(\tilde{p}),$$

onde $\tilde{f}$ é a representação em coordenadas de f e $\tilde{p} = (p^1, \dots, p^n) = \phi(p)$ é a representação em coordenadas de p . Em outras palavras, $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ é simplesmente a aplicação que toma a i -ésima derivada parcial (na representação coordenada) de f em (a representação coordenada de) p .

Observe que em variedades sempre é possível parametrizar as aplicações em seus respectivos sistemas de coordenadas em $\mathbb{R}^n$. Assim, é de se esperar que os principais resultados de análise se traduzam para variedades. Os próximos três teoremas atestam esse fato. As demonstrações são análogas ao caso de $\mathbb{R}^n$ e podem ser encontradas em [14], [17] e [9] respectivamente.

Teorema 1.12 (Valor regular) *Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $c \in N$ tal que para cada ponto $a \in F^{-1}(c)$ a derivada DF_a seja sobrejetora. Então $F^{-1}(c)$ é variedade diferenciável de dimensão $\dim M - \dim N$.*

Teorema 1.13 (Regra da cadeia) *Sejam $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ aplicações diferenciáveis.*

veis entre variedades. Então $g \circ f : M \rightarrow P$ é diferenciável e vale

$$D(g \circ f)_p = Dg_{f(p)} \circ Df_p.$$

Teorema 1.14 (Função inversa) *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades tal que Df_p é isomorfismo em um ponto $p \in M$. Então f é um difeomorfismo local em p .*

1.3 Subvariedades transversais e número de intersecção

Dadas M e N variedades e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável, definimos o **posto da aplicação F no ponto p** como sendo o posto da aplicação derivada $DF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, ou seja, a dimensão de $\text{Im} DF_p \subset T_{F(p)} N$. Se F tem o mesmo posto k para todo ponto $p \in M$ dizemos que F é uma aplicação de **posto constante** e escrevemos $\text{posto } F = k$. Uma **imersão** é uma aplicação diferenciável de posto constante cuja derivada é injetora em cada ponto, ou seja, $\text{posto } F = \dim M$. Uma submersão é uma aplicação diferenciável de posto constante cuja derivada é sobrejetora em cada ponto, ou seja, $\text{posto } F = \dim N$. Uma imersão é chamada de **mergulho** quando é também um homeomorfismo sobre sua imagem.

Definição 1.15 Sejam M uma variedade n -dimensional e k um inteiro tal que $0 \leq k \leq n$. Uma **subvariedade mergulhada k -dimensional** de M é um subconjunto $S \subset M$ tal que para todo ponto $p \in S$ existe uma carta coordenada (U, ϕ) de M , com $p \in U$, tal que $\phi(S \cap U)$ é a intersecção de um plano k -dimensional com $\phi(U)$.

Quando S é uma subvariedade mergulhada de M , definimos sua codimensão como sendo

$$\text{codim } S = \dim M - \dim S.$$

Para subvariedades mergulhadas temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser vista em [9].

Proposição 1.16 *Seja $S \subset M$ uma subvariedade mergulhada k -dimensional de M . Os pares $\{S \cap U, \phi|_{S \cap U}\}$ constituem um atlas sobre S , munindo o conjunto de uma estrutura diferenciável. Além disso, essa é a única estrutura diferenciável que torna a aplicação de inclusão $S \hookrightarrow M$ um mergulho.*

Note que a topologia induzida por esse atlas é a própria topologia de subespaço induzida em S por M . Temos ainda o seguinte resultado sobre mergulhos, cuja demonstração pode ser vista em [9].

Proposição 1.17 *A imagem de um mergulho é uma subvariedade mergulhada.*

Juntando Proposição 1.16 e Proposição 1.17, temos o próximo teorema.

Teorema 1.18 *Toda subvariedade mergulhada é imagem de um mergulho.*

A partir deste momento faremos uso do termo **subvariedades** ao nos referirmos a subvariedades mergulhadas.

Dada S uma subvariedade de M , a Proposição 1.16 implica que a aplicação de inclusão $i : S \hookrightarrow M$ é uma imersão e, portanto, para cada ponto $p \in S$ a derivada $Di : T_p S \rightarrow T_p M$ é injetora. Logo, podemos identificar $T_p S$ com sua imagem sob a aplicação derivada e desta forma $T_p S$ pode ser visto como um subespaço linear de $T_p M$. Identificamos dessa forma um vetor $v_p \in T_p S$ com o vetor $Di(v_p) \in T_p M$ e definimos sua ação em funções $f \in C^\infty M$ como a seguir:

$$v_p f = (Di(v_p))f = v_p(f \circ i) = v_p(f|_S).$$

Sejam S_1 e S_2 subvariedades de M . Dizemos que S_1 e S_2 se intersectam **transversalmente**, e utilizamos a notação $S_1 \pitchfork S_2$, se para cada ponto $p \in S_1 \cap S_2$ o espaço tangente $T_p M$ pode ser escrito como a soma $T_p M = T_p S_1 + T_p S_2$. Subvariedades que não se intersectam são transversais por vacuidade. Quando a intersecção é transversal, a própria intersecção $S_1 \cap S_2$ é também uma subvariedade, cuja codimensão será igual a soma das codimensões de S_1 e S_2 . A demonstração para este fato pode ser vista em [17].

Definição 1.19 [Aplicação Transversal] Sejam M, N variedades e $S \subset N$ uma subvariedade. Uma aplicação diferenciável $F : M \rightarrow N$ é dita ser **transversal** a S , se para cada $p \in F^{-1}(S)$ temos

$$DF_p(T_p M) + T_{F(p)} S = T_{F(p)} N.$$

Exemplo 1.20 Considere aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (0, t)$ e sejam S_x e S_y as subvariedades orientadas dadas pelos eixos x e y respectivamente em $\mathbb{R}^2$. Temos que f é transversal a S_x pois, para todo $p \in f^{-1}(S)$, $T_p \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$, $Df_p(T_p \mathbb{R}) = S_y$, $T_{F(p)} S = S_x$ e $S_x + S_y = \mathbb{R}^2 = T_{f(p)} N$. Já a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(t) = (t, t^2)$ não é transversal a S_x pois no ponto $p = (0, 0)$ a imagem do espaço tangente pela

aplicação derivada $Dg_p(T_p\mathbb{R}) = S_x$, que somado com $T_{f(p)}S = S_x$, não resulta em $\mathbb{R}^2 = T_{f(p)}N$.

Dados $S \subset N$ subvariedade e $q \in S$, definimos o **espaço normal a q** $\nu_q S$ como o quociente

$$\nu_q S = \frac{T_q N}{T_q S}.$$

Observe que a decomposição que uma aplicação transversal gera no espaço tangente a $F(p)$, estabelece uma bijeção ϕ entre o espaço vetorial $T_p M$ e $\nu_{F(p)} S$. Fixando orientações para esses espaços, definimos o **signal** de p e denotamos por $\epsilon(p)$, como sendo $\epsilon(p) = 1$, caso ϕ preserve orientação e $\epsilon(p) = -1$, caso ϕ reverta a orientação. Quando o conjunto $F^{-1}(S)$ é finito, o número

$$n(F(M), S) = \sum_{p \in M \cap F^{-1}(S)} \epsilon(p)$$

fica bem definido e é chamado de **número de intersecção** entre $F(M)$ e S .

Exemplo 1.21 Sejam $N = \mathbb{R}^3$, $S = S^2$ e M uma reta que intersecta a esfera nos polos p e q como na Figura 1.1. A aplicação de inclusão $i : M \rightarrow N$ é transversal a S , pois $i^{-1}(S) = \{p, q\}$ e a imagem dos espaços tangentes ao pontos de p e q em M sob as aplicações Di_p e Di_q , respectivamente, podem ser somadas com os espaço tangentes a p e q em S de modo a obter $Ti_{(p \text{ ou } q)} N = \mathbb{R}^3$. Observe que os espaços normais a $T_p S$ e $T_q S$ tem dimensão 1 e são identificados naturalmente com $T_p M$. Adotando para $\nu_p S$ a mesma orientação mostrada Figura 1.1 e para $\nu_q S$ a orientação contrária, temos que $\epsilon(p) = 1$ e $\epsilon(q) = -1$ e o número de intersecção $n(M, S) = 0$.

A transversalidade entre uma aplicação e uma subvariedade está intimamente relacionada com o conceito de subvariedades transversais. De fato, dadas $S_1, S_2 \subset M$ subvariedades, considere a aplicação inclusão $i : S_1 \rightarrow M$. Nesse caso, p pertencer à pré-imagem $i^{-1}(S_2)$ significa simplesmente que $p \in S_1 \cap S_2$. Dado $p \in S_1$, $Di_p : T_p S_1 \rightarrow T_p M$ será a simples inclusão de $T_p S_1$ em $T_p M$. Assim i é transversal a S_2 se, e somente se,

$$T_p S_1 + T_p S_2 = T_p M$$

e concluímos que $S_1 \pitchfork S_2$ se, e somente se, a aplicação de inclusão for transversal para todo $p \in S_1 \cap S_2$.

Observamos, por fim, que a transversalidade entre S_1 e S_2 depende do espaço ambiente M . Por exemplo, os eixos coordenados x e y são transversais vistos como

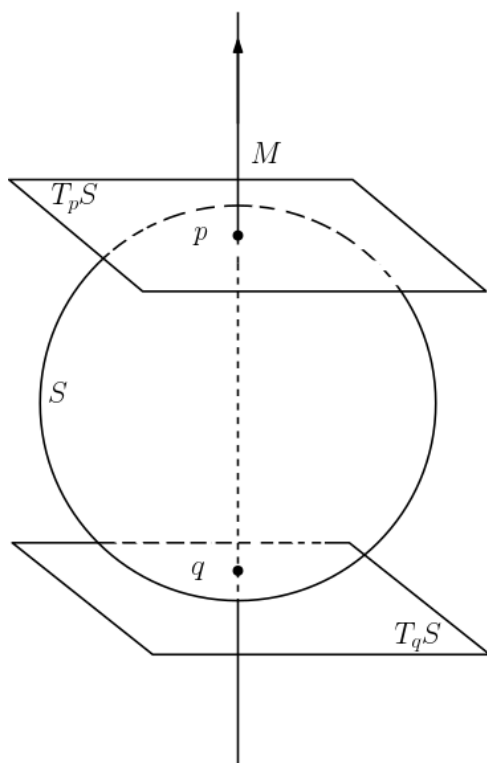


Figura 1.1: Interseção da S^2 com a reta.

subespaços de $\mathbb{R}^2$, mas não como subespaços de $\mathbb{R}^3$.

1.4 Fibrados tangentes, campos de vetores e orientação

Definição 1.22 Sejam M uma variedade e S subvariedade de M . O **fibrado tangente a S em M** é

$$TS = \bigcup_{p \in S} T_p S,$$

a união disjunta de todos os espaços tangentes a S . Similarmente, definimos o **fibrado normal a S em M** como sendo

$$\nu S = \bigcup_{q \in S} \nu_q S,$$

a união disjunta de todos os espaços normais.

Pode-se mostrar que os espaços TS e νS são variedades e que, se S é variedade

n -dimensional, então TS é variedade $2n$ -dimensional. Fixando uma orientação para cada $T_p M \in TM$, diremos que o fibrado tangente (ou normal) é **orientável** se para cada $p \in M$ existe uma carta coordenada $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de tal modo que $D\phi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ preserva orientação, sendo que a base usual de $\mathbb{R}^n$ é escolhida com orientação positiva. Dizemos que a variedade M é **orientável** se o seu fibrado tangente for orientável. Quando o fibrado normal for orientável, dizemos que a variedade M é **coorientável**.

Um elemento do fibrado TS pode ser pensado como um par (p, v_p) , onde $p \in S$ e $v_p \in T_p S$. Observe que existe uma aplicação natural de projeção $\pi : TS \rightarrow S$ definida por $\pi(p, v_p) = p$. Para um ponto $p \in S$ o conjunto $\pi^{-1}(\{p\})$ é chamado **fibra** de p .

Definição 1.23 [Campos de vetores] Um campo vetorial definido em M é uma aplicação diferenciável

$$v : M \rightarrow TM$$

que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $v_p \in T_p M$ satisfazendo

$$\pi \circ v = id_M.$$

Denotaremos o espaço dos campos vetoriais em M por $\mathcal{X}(M)$. Dados $v \in \mathcal{X}(M)$ um campo de vetores e $f \in C^\infty(M)$ uma função, fica definido o campo $fv \in \mathcal{X}(M)$, que assume em um ponto p o vetor $(fv)_p = f(p)v_p$.

Considere $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e v um campo de vetores em M . Então para cada $p \in M$, obtemos o vetor $DF_p(v_p) \in T_{F(p)}N$. Isso, em geral não define um campo de vetores em N , pois F pode não ser sequer sobrejetora e o campo não estaria definido para todo ponto de N . Caso F não seja injetora, também teremos pontos de N com mais de um vetor associado, o que também contradiz a nossa definição de campo de vetores. Quando F é um difeomorfismo, entretanto, é possível provar que, dado um campo de vetores $v \in \mathcal{X}(M)$, existe um único campo de vetores $w \in \mathcal{X}(N)$ tal que para todo $p \in M$, $DF_p(v_p) = w_{F(p)}$. Esse campo de vetores (que denotaremos por F_*v) é definido em um ponto $q \in N$ pela fórmula

$$w_q = (F_*v)_q = DF_{F^{-1}(q)}(v_{F^{-1}(q)}).$$

Chamamos o campo F_*v de **pushforward** do campo de vetores v por F .

Consideremos agora v, w campos de vetores diferenciáveis em M . Definindo para

todo $p \in M$ um produto interno

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

de tal forma que a aplicação $g : M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$p \rightarrow g_p(v_p, w_p) := \langle v_p, w_p \rangle$$

seja uma aplicação diferenciável, diremos que a família $g = \{g_p\}$ é uma **Métrica Riemanniana**. Nesse caso o par (M, g) constitui uma **Variedade Riemanniana**.

Definição 1.24 Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real diferenciável, $p \in M$, $v_p \in T_p M$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno induzido pela métrica Riemanniana em $T_p M$. Definimos o campo vetorial ∇f pela fórmula

$$\langle \nabla f_p, v_p \rangle = Df_p(v_p)$$

e o chamamos de **gradiente Riemanniano** de f .

Neste capítulo, introduzimos os conceitos e resultados de topologia algébrica que foram utilizados nesta dissertação. As referências utilizadas são explicitadas no início da cada seção.

2.1 Teoria de Módulos

Nesta seção apresentamos conceitos e resultados algébricos que usaremos na construção do complexo de Morse e Novikov, introduzidos nos Capítulos 3 e 5, respectivamente. As referências adotadas foram [11], [15], [12], [4] e [5].

2.1.1 Módulos livres

Uma **base** para um módulo M sobre um anel A é um conjunto $\mathcal{B} \subset M$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Todo elemento de M é uma soma finita da forma $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$, onde $a_i \in A$ e $e_i \in \mathcal{B}$, $i = \{1, 2, \dots, n\}$.
2. $\mathcal{B}$ é linearmente independente, ou seja, $a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n = 0_M$ se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0_A$.

Um módulo que possui base é chamado de módulo **livre**. Dado um conjunto $\mathcal{B} \subset M$, sempre é possível construir um A -módulo livre contido em M que possui $\mathcal{B}$ como base. Esse módulo é chamado de **módulo das combinações lineares formais** de (elementos de) $\mathcal{B}$, ou **módulo livre gerado por $\mathcal{B}$** .

2.1.2 Produto tensorial de módulos sobre um anel

Sejam A um anel e M, N módulos sobre A . Dado um grupo abeliano G , uma aplicação $\gamma : M \times N \rightarrow G$ é dita ser **A -balanceada** se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\gamma(m, n + n') = \gamma(m, n) + \gamma(m, n')$

$$2. \gamma(m + m', n) = \gamma(m, n) + \gamma(m, n')$$

$$3. \gamma(m \cdot a, n) = \gamma(m, a \cdot n)$$

para quaisquer $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $a \in A$.

Definição 2.1 O **produto tensorial** de M, N sobre o anel A , denotado por $M \otimes_A N$ é um grupo abeliano juntamente com uma aplicação A -balanceada

$$\otimes : M \times N \rightarrow M \otimes_A N,$$

que é universal no seguinte sentido: para todo grupo abeliano G e aplicação A -balanceada $\gamma : M \times N \rightarrow G$ existe um único homomorfismo $\bar{\gamma} : M \otimes_A N \rightarrow G$ tal que $\bar{\gamma} \circ \otimes = \gamma$.

Dessa forma o produto tensorial fica definido unicamente a menos de isomorfismo, ou seja, qualquer outro grupo G com uma aplicação A -balanceada δ satisfazendo as mesmas propriedades de $\otimes$ é isomorfo à $M \otimes_A N$. Por causa disso a aplicação $\otimes$ é dita ser **canônica**. Essa definição não prova a existência de $M \otimes_A N$. A ideia da prova é mostrar que o produto tensorial é um grupo abeliano livre com elementos do tipo $m * n$, $m \in M$ e $n \in N$, quocientado pelo subgrupo gerado por elementos da forma:

$$1. -m * (n + n') + m * n + m * n'$$

$$2. -(m + m') * n + m * n + m' * n$$

$$3. (m \cdot a) * n - m * (a \cdot n).$$

A aplicação $\otimes : M \times N \rightarrow M \otimes_A N$ leva o par (m, n) na classe $[m * n]$ e a propriedade universal segue da propriedade universal do grupo abeliano livre. A demonstração pode ser vista com detalhes em [12].

A imagem de (m, n) sob a aplicação canônica $\otimes$ é denotada por $m \otimes n$, omitindo o anel A , por conveniência. Ela é chamada de **tensor puro**. Segue da definição de produto tensorial que valem:

$$1. m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'$$

$$2. (m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$$

$$3. (m \cdot a) \otimes n = m \otimes (a \cdot n).$$

Utilizando essa notação, todo elemento de $M \otimes_A N$ pode ser escrito como uma soma $\sum_i m_i \otimes n_i$, onde $m_i \in M$ e $n_i \in N$. Assim, se o anel A for comutativo, munimos o grupo $M \otimes_A N$ com uma estrutura natural de módulo, bastando definir:

$$a \cdot (m \otimes n) := a \cdot m \otimes n = m \otimes a \cdot n.$$

2.1.3 Torção

Um elemento m de um módulo M sobre um anel A é um **elemento de torção** se existe um elemento $a \in A$ que não é divisor de zero e que aniquila m , ou seja, $a \cdot m = 0$. Quando o anel A é comutativo sem divisores de zero, um elemento de torção é simplesmente um elemento aniquilado por um a não nulo.

Um módulo é um **módulo de torção** se todos os seus elementos forem de torção, e é um **módulo livre de torção** quando o único elemento de torção é o próprio zero. Se o anel é comutativo, sem divisores de zero, o conjunto de todos os elementos de torção de M formam um submódulo, chamado **submódulo de torção**.

Sejam A um domínio de ideais principais, ou seja, um anel comutativo, sem divisores de zero e M um módulo finitamente gerado sobre A . O **Teorema Estrutural**, cuja prova pode ser vista em [4], afirma que existe uma sequência de elementos de $a_1, \dots, a_\beta$ de A não nulos, não inversíveis, tais que $a_i | a_{i+1}$, os ideais gerados pelos a_i 's são ideais próprios de A e M pode ser decomposto como

$$M \simeq F^\alpha \bigoplus_{1 \leq i \leq \beta} A/a_i A,$$

onde F^α é um módulo livre finitamente gerado com um número α de geradores. É possível demonstrar que o submódulo de torção de M é isomorfo a $\bigoplus_{1 \leq i \leq \beta} A/a_i A$. Obtemos dessa forma uma decomposição de M como uma soma de um módulo livre com um módulo de torção. Temos como corolário que todo módulo M finitamente gerado e livre de torção é um módulo livre. O número α será denotado por $rk M$ e o chamamos de chamado **posto de M** . O número β será denotado por $t.n.M$ e o chamamos **número de torsão de M** . Relacionando esses conceitos com complexos de cadeias, assunto da seção a seguir, temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser vista em [15].

Teorema 2.2 *Seja $\mathcal{C}_* = (C_k, \partial_k)$ um complexo de cadeias de módulos livres finitamente gerados sobre um domínio de ideais principais A . Então*

$$rk C_k \geq rk H_k(\mathcal{C}_*) + t.n.H_k(\mathcal{C}_*) + t.n.H_{k-1}(\mathcal{C}_*).$$

2.2 Homologia

Nesta seção, apresentamos os conceitos e resultados de homologia que usamos ao longo desta dissertação. As referências adotadas foram [11], [22], [5] e [3].

2.2.1 Complexos de cadeias

Seja A um anel comutativo com unidade. Um **complexo de cadeias** com coeficientes em A é uma sequência $\mathcal{C} = (M_r, \partial_r)$ de A -módulos M_r ($r \geq 0$, inteiro) e homomorfismos $\partial_r : M_r \rightarrow M_{r-1}$ tais que $\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0$. Escreve-se

$$\mathcal{C} : \cdots \rightarrow M_{r+1} \xrightarrow{\partial_{r+1}} M_r \xrightarrow{\partial_r} M_{r-1} \xrightarrow{\partial_{r-1}} \cdots \rightarrow M_1 \xrightarrow{\partial_1} M_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Um complexo de cadeias de A -módulos é chamado **A -complexo**. Um A -complexo é **livre** se todos os módulos M_r são livres. Um A -complexo é **finito** se existem finitos módulos M_r diferentes de zero. Um A -complexo finito de módulos finitamente gerados é chamado **livre-finito**.

Cada elemento $x \in M_r$ é chamado de **r -cadeia**. Se $\partial_r x = 0$, dizemos que x é um **r -ciclo** ou simplesmente **ciclo**. O conjunto Z_r dos r -ciclos é o núcleo do homomorfismo $\partial_r : M_r \rightarrow M_{r-1}$ e é um submódulo de M_r . Se $y = \partial_{r+1} x$, dizemos que y é o **bordo** de x . O conjunto B_r das cadeias que são bordos é um submódulo de M_r pois é a imagem do homomorfismo $\partial_{r+1} : M_{r+1} \rightarrow M_r$. Cada homomorfismo $\partial_r : M_r \rightarrow M_{r-1}$ é chamado de **operador bordo**. A menos que seja necessário omitiremos o subscrito r escrevendo apenas ∂ no lugar de ∂_r . Note que a relação $\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0$ implica que todo bordo é um ciclo, ou seja, $B_r \subset Z_r$.

O A -módulo quociente $H_r = H_r(\mathcal{C}) = Z_r/B_r$ chama-se **módulo de homologia** de dimensão r do complexo $\mathcal{C}$. Seus elementos são as **classes de homologia**

$$[z] = z + B_r$$

dos ciclos $z \in Z_r$. Quando $[z] = [z']$, dizemos que os ciclos z e $z' \in Z_r$ são **ciclos ho-**

mólogos.

Se, para cada $r \geq 0$, tivermos um submódulo $M'_r \subset M_r$ tal que $\partial M'_{r+1} \subset M'_r$ então, definindo $\partial'_r = \partial_r|_{M'_r}$, a sequência $\mathcal{C}' = (M'_r, \partial'_r)$ também é um complexo de cadeias que chamamos de **subcomplexo** de $\mathcal{C}$.

Considerando, para cada $r \geq 0$, o A -módulo quociente $\overline{M}_r = M_r/M'_r$, o homomorfismo $\overline{\partial}_r : \overline{M}_r \rightarrow \overline{M}_{r-1}$ definido por $\overline{\partial}(jx) = j(\partial x)$, onde j é a aplicação quociente, é o único que torna comutativo o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} M_r & \xrightarrow{\partial_r} & M_{r-1} \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ \overline{M}_r & \xrightarrow{\overline{\partial}_r} & \overline{M}_{r-1}. \end{array}$$

Claramente $\overline{\partial}_r \circ \overline{\partial}_{r+1} = 0$, ou seja, $\overline{\mathcal{C}} = (\overline{M}_r, \overline{\partial}_r)$ é um complexo de cadeias denominado **quociente** de $\mathcal{C}$ por $\mathcal{C}'$ e é denotado também por $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$.

Sejam $\mathcal{X} = (X_r, \partial_r)$ e $\mathcal{Y} = (Y_r, \partial_r)$ complexos de cadeias. Um **morfismo** $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é uma sequência de homomorfismos $f_r : X_r \rightarrow Y_r$ tais que $f_r(\partial x) = \partial f_{r+1}(x)$ para todo $x \in X_{r+1}$. Note que f_r transforma r -ciclos em r -ciclos e r -bordos em r -bordos, ou seja, $f_r(Z_r(\mathcal{X})) \subset Z_r(\mathcal{Y})$ e $f_r(B_r(\mathcal{X})) \subset B_r(\mathcal{Y})$. Logo, f_r induz um homomorfismo $(f_r)_* : H_r(\mathcal{X}) \rightarrow H_r(\mathcal{Y})$ definido por $(f_r)_*[z] = [f_r(z)]$ para toda classe $[z] \in H_r(\mathcal{X})$ de um ciclo $z \in Z_r(\mathcal{X})$. Omitiremos o subscrito r , escrevendo apenas $f_* : H(\mathcal{X}) \rightarrow H(\mathcal{Y})$. Se f induz um isomorfismo entre os grupos de homologia, dizemos que o morfismo f é uma **equivalência homológica**.

Exemplo 2.3 Dado $\mathcal{C}'$ subcomplexo de um complexo de cadeias $\mathcal{C}$ a aplicação de inclusão $i : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ e a de projeção $j : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ são morfismos entre complexos de cadeias.

Observação 2.4 Embora a aplicação de inclusão $i_r : M'_r \rightarrow M_r$ seja injetiva e a aplicação de projeção $j_r : M_r \rightarrow \overline{M}_r$ seja sobrejetiva, isso não implica que os homomorfismos induzidos $i_* : H_r(\mathcal{C}') \rightarrow H_r(\mathcal{C})$ e $j_* : H_r(\mathcal{C}) \rightarrow H_r(\overline{\mathcal{C}})$ também o sejam.

2.2.2 Sequências exatas

Dizemos que uma sequência de homomorfismos de módulos

$$\cdots \xrightarrow{f_{r+1}} M_{r+1} \xrightarrow{f_r} M_r \xrightarrow{f_{r-1}} M_{r-1} \rightarrow \cdots$$

é **exata** quando o núcleo de cada homomorfismo f_r é igual à imagem do homomorfismo f_{r+1} . Uma sequência exata do tipo $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{j} P \rightarrow 0$ chama-se **sequência exata curta**. Note que, nesse caso, i é necessariamente injetivo, j necessariamente sobrejetivo e $j^{-1}(0) = i(M)$. É possível definir sequências exatas para qualquer classe de objetos algébricos, em particular, para morfismos entre complexos de cadeias.

Teorema 2.5 *Seja $0 \rightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{j} \mathcal{C}'' \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de morfismos entre complexos de cadeias. Existe para cada $r > 0$, um homomorfismo $\partial_* : H_r(\mathcal{C}'') \rightarrow H_{r-1}(\mathcal{C}')$ tal que a sequência*

$$\cdots \rightarrow H_r(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_*} H_r(\mathcal{C}) \xrightarrow{j_*} H_r(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\partial_*} H_{r-1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_*} H_{r-1}(\mathcal{C}) \rightarrow \cdots \quad (1)$$

é exata.

Ideia: Dado $[x''] \in H_r(\mathcal{C}'')$, a sobrejetividade de j_r nos dá um $x \in M_r$ tal que $j_r(x) = x''$. Esse x é tal que $\partial x \in \ker(j_{r-1})$. Mas $\ker(j_{r-1}) = \text{Im}(i_{r-1})$, pois a sequência entre os complexos de cadeia é exata e, portanto, existe $x' \in M'_{r-1}$ tal que $i_{r-1}(x') = \partial x$. Definimos $\partial_*([x'']) = [x']$. Pode-se verificar que a aplicação ∂_* está bem definida e como a sequência de morfismos entre os complexos de cadeias é exata curta, verifica-se que a sequência (1) é exata. $\square$

O homomorfismo ∂_* do Teorema 2.5 é chamado de **homomorfismo de conexão** e a sequência (1) é chamada de **sequência exata induzida em homologia**.

Exemplo 2.6 Suponha que no enunciado do Teorema 2.5, $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}/\mathcal{C}'$, a aplicação i seja a inclusão e j seja a aplicação quociente. A sequência exata induzida em homologia associada a essa sequência curta entre complexos de cadeias chama-se **sequência exata do par** $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ e os grupos de homologia de $\mathcal{C}''$ chamam-se **grupos de homologia relativa** do par $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$.

Exemplo 2.7 (Sequência de Mayer-Vietoris). Considere os complexos $\mathcal{C}', \mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}$ de tal modo que $\mathcal{C} = \mathcal{C}' + \mathcal{C}''$, ou seja, $M'_r + M''_r = M_r$, para todo $r \geq 0$. Os A -módulos gra-

duados $M'_r \cap M''_r$, munidos com o mesmo operador bordo ∂ de $\mathcal{C}$, formam o complexo $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}''$. Denotando os elementos de $M'_r \oplus M''_r$ por (x', x'') , com $x' \in M'_r$ e $x'' \in M''_r$, definimos o operador bordo $\partial : M'_r \oplus M''_r \rightarrow M'_{r-1} \oplus M''_{r-1}$ por $\partial(x, x'') = (\partial x', \partial x'')$. Os módulos graduados $M'_r \oplus M''_r$ munidos com esse operador bordo, formam o complexo $\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}''$. Considere a seguinte sequência entre complexos de cadeias

$$0 \rightarrow \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' \xrightarrow{i} \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' \xrightarrow{j} \mathcal{C} \rightarrow 0$$

onde $i(x) = (x, x)$ e $j(x, y) = x - y$. É mostrado em [11] que esta sequência constitui uma sequência exata curta. A sequência exata induzida em homologia correspondente é chamada **Sequência de Mayer-Vietoris** do terno $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}'')$.

Acrescentamos a seguir um resultado útil ao se trabalhar com sequências exatas em homologia. Sua prova pode ser vista em [5].

Teorema 2.8 (Lema dos cinco) *Considere o diagrama comutativo de módulos a seguir em que as duas sequências nas linhas são exatas.*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

Se α, β, δ e ϵ são isomorfismos, então γ também é isomorfismo.

O próximo resultado envolve uma sequência exata curta de fibrados tangentes.

Proposição 2.9 *Seja $0 \rightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{j} \mathcal{C}'' \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de morfismos entre fibrados tangentes. Dois dos fibrados $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ são orientáveis se, e somente se, o terceiro for orientável.*

Faremos uso desse resultado juntamente com o Exemplo 2.7 para induzir uma orientação nas variedades de conexão, definidas no Capítulo 3. Os fibrados tangentes, nesse caso, constituirão uma sequência de Mayer-Vietoris e usaremos a Proposição 2.9 para induzir uma orientação nas variedades de conexão. A demonstração da Proposição 2.9 pode ser vista em [7].

2.2.3 Homologia singular

Nesta subseção definimos a homologia singular de um espaço topológico. As principais referências adotadas foram [11], [22] e [5].

Considere o conjunto $\Delta_r \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$\Delta_r = \{(t_0, t_1, \dots, t_r); t_i \geq 0, \sum_{i=0}^r t_i = 1\}.$$

Uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_r \rightarrow X$ em um espaço topológico X é chamada de **r-simplexo singular**.

Seja $S_r(X; A)$ o A -módulo livre gerado pelos r -simplexos singulares de X . Os elementos de $S_r(X; A)$, chamados de **r-cadeias singulares** de X com coeficientes em A , são combinações lineares finitas da forma $x = \sum_{\sigma} x_{\sigma} \cdot \sigma$, onde $x_{\sigma} \in A$. Quando não houver necessidade de explicitar o anel A , escreveremos apenas $S_r(X)$.

Para $i = 0, 1, \dots, r$, definimos a **i-ésima face** do r -simplexo $\sigma : \Delta_r \rightarrow X$ como sendo o $(r-1)$ -simplexo $\partial_i \sigma : \Delta_{r-1} \rightarrow X$ dado por

$$\partial_i \sigma(t_0, \dots, t_{r-1}) = \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_r),$$

ou seja, a aplicação leva $(t_0, \dots, t_{r-1})$ na imagem de $(t_0, \dots, t_r)$ por σ , considerando a componente i zerada.

Definimos o **operador bordo** $\partial : S_r(X) \rightarrow S_{r-1}(X)$ por

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^r (-1)^i \partial_i \sigma$$

para todo r -simplexo $\sigma : \Delta_r \rightarrow X$.

Teorema 2.10 *Sejam X um espaço topológico, $S_r(X)$ o conjunto de r -simplexos singulares de X e o operador bordo $\partial : S_r(X) \rightarrow S_{r-1}(X)$ definido acima. O par $(S_*(X), \partial_*)$*

$$S_*(X) : \dots \rightarrow S_r(X) \xrightarrow{\partial} S_{r-1}(X) \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow S_0(X) \rightarrow 0$$

é um complexo de cadeias.

Uma demonstração para o Teorema 2.10 pode ser vista em [22].

O complexo de cadeias $S_*(X)$ é associado de forma única a X e é chamado **com-**

plexo singular de X . Os módulos de homologia $H_r(X)$ estão associados ao espaço, e não apenas ao complexo de cadeias. Eles são chamados de **módulos de homologia singular** do espaço X .

Dado A um subespaço de X , dizemos que o complexo $S_*(A)$ é **subcomplexo** de $S_*(X)$. Definimos a **homologia singular relativa** $S_r(X, A)$ como sendo o módulo quociente $\frac{S_r(X)}{S_r(A)}$. Temos o operador quociente $\partial : S_r(X, A) \rightarrow S_{r-1}(X, A)$ e, deixando n variar, temos uma sequência de operadores. A relação $\partial \circ \partial = 0$ é válida, se mantendo na passagem ao quociente. Os módulos de homologia do complexo de cadeias resultante são chamados de **módulos de homologia singular relativa** e são denotados por $H_r(X, A)$. Uma propriedade fundamental dos módulos de homologia relativa é que eles não são afetados ao excluirmos subconjuntos de A cujo fecho está contido no interior de A , conforme mostra o teorema a seguir.

Teorema 2.11 (Teorema da excisão) *Dados subespaços $Z \subset A \subset X$ tais que o fecho de Z está contido no interior de A , então a inclusão de pares $(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow (X, A)$ induz isomorfismos $H_r(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow H_r(X, A)$, para todo r .*

A prova pode ser vista em [5].

Dados dois espaços topológicos X, Y , seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre eles. Seja σ um r -simplexo singular em X . Temos que a aplicação

$$f_{\#}(\sigma) = f \circ \sigma : \Delta_r \rightarrow Y$$

é um r -simplexo singular em Y . Logo $f_{\#}$ pode ser vista como uma aplicação que leva r -simplexos de X em r -simplexos de Y . A aplicação $f_{\#}$ pode ser estendida de forma única para $S_r(X)$ de modo a obter o homomorfismo

$$(f_r)_{\#} : S_r(X) \rightarrow S_r(Y).$$

Como visto na subseção anterior, esse homomorfismo induz um homomorfismo

$$(f_r)_* : H_r(X) \rightarrow H_r(Y)$$

entre os grupos de homologia singular de X e Y . O próximo resultado, cuja prova pode ser encontrada em [16], mostra que os grupos de homologia singular são invariantes topológicos, carregando informações sobre o tipo de homotopia de X .

Teorema 2.12 *Sejam X, Y espaços topológicos homotopicamente equivalentes e $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ as equivalências de homotopia tais que $f \circ g \simeq Id_Y$ e $g \circ f \simeq Id_X$. Então $(f_r)_* : H_r(X) \rightarrow H_r(Y)$ é um isomorfismo.*

2.3 Espaços celulares

Acrescentamos nesta subseção um breve tratado sobre homologia de espaços celulares, teoria que foi utilizada nos capítulos 4 e 5 desta dissertação. As referências utilizadas foram [3] e [15].

Definição 2.13 Uma **filtração** de um espaço topológico X é uma sequência de subespaços $X^k \subset X$, $k \in \mathbb{Z}$, tal que $X^k \subset X^{k+1}$ para todo k . Uma filtração é **celular** se:

- i) $H_i(X^k, X^{k-1}) = 0$ para $i \neq k$
- ii) $S_*(X) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} S_*(X^k)$.

Um espaço X munido de uma filtração é um **espaço filtrado**. Caso a filtração seja celular dizemos X que é um **espaço celular**. Dado um espaço celular X , associamos a ele um complexo de cadeias como a seguir: definimos $C_k(X) = H_k(X^k, X^{k-1})$ e o operador bordo

$$\partial_k : C_k(X) \rightarrow C_{k-1}(X)$$

igual a composição

$$H_k(X^k, X^{k-1}) \rightarrow H_k(X^{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(X^{k-1}, X^{k-2}),$$

onde o primeiro homomorfismo é o operador bordo na sequência exata do par (X^k, X^{k-1}) e o segundo é a projeção natural. O complexo de cadeias $C_*(X)$ resultante é chamado de **complexo celular** de X .

Teorema 2.14 *Dado um espaço celular X , há um isomorfismo natural entre a homologia do complexo celular $H_k(C_*(X))$ e a homologia singular relativa $H_k(X, X^{-1})$ do par (X, X^{-1}) .*

A prova do teorema pode ser vista em [3].

2.3.1 Filtrações de complexos de cadeias

Definição 2.15 Uma filtração de um complexo de cadeias $\mathcal{C}$ é uma sequência de subcomplexos $\mathcal{C}^k$ tal que

$$\mathcal{C}^0 \subset \mathcal{C}^1 \subset \dots \subset \mathcal{C}^k \subset \dots \quad \text{e} \quad \bigcup_k \mathcal{C}^k = \mathcal{C}.$$

Qualquer complexo de cadeias pode ser munido de uma filtração, bastando considerar a sequência de subcomplexos $\mathcal{C}^k$ definida por

$$\mathcal{C}^k = \{0 \rightarrow M_k \rightarrow \dots \rightarrow M_0 \rightarrow 0\}.$$

Esta filtração é chamada **filtração trivial**.

Para toda filtração $\{\mathcal{C}^k\}$ de complexos de cadeias associamos um **complexo adjunto** $\mathcal{C}^{adj}$ como a seguir. Definimos

$$\mathcal{C}_k^{adj} = H_k(\mathcal{C}^k / \mathcal{C}^{k-1})$$

e o operador bordo $\partial_k : \mathcal{C}_k^{adj} \rightarrow \mathcal{C}_{k-1}^{adj}$ como a composição

$$H_k(\mathcal{C}^k / \mathcal{C}^{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{C}^{k-1}) \rightarrow H_k(\mathcal{C}^{k-1} / \mathcal{C}^{k-2})$$

onde a primeira flecha é homomorfismo de conexão induzido pela sequência exata do par $(\mathcal{C}^k, \mathcal{C}^{k-1})$ e a segunda é aplicação induzida pela inclusão. Uma filtração

$$\mathcal{C}^0 \subset \mathcal{C}^1 \subset \dots \subset \mathcal{C}^k \subset \dots$$

é chamada **celular** se

$$H_i(\mathcal{C}^k / \mathcal{C}^{k-1}) = 0 \quad \text{para} \quad i \neq k.$$

Uma filtração celular é **livre** se todo módulo $H_k(\mathcal{C}^k / \mathcal{C}^{k-1})$ é um A -módulo livre à esquerda. Dadas duas filtrações $\mathcal{C}^k$ e $\mathcal{D}^k$ de complexos de cadeias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ respectivamente, dizemos que um morfismo $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ **preserva filtrações** se $\text{Im } f|_{\mathcal{D}_i^{(i)}} \subset \mathcal{C}_i^{(i)}$. Temos o seguinte resultado relacionado a filtrações celulares de complexos de cadeias.

Teorema 2.16 *Sejam $\mathcal{C}^k$ uma filtração celular de um complexo de cadeias $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ um complexo de cadeias livre de A -módulos à esquerda e $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^{adj}$ um morfismo. Munindo*

$\mathcal{D}$ com a filtração trivial, existe um morfismo $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ que preserva filtrações e induz ϕ nos complexos adjuntos. A aplicação f é única a menos de homotopia de cadeias que preservam filtrações.

E como corolário temos o resultado:

Corolário 2.17 *Dada uma filtração celular livre $\mathcal{C}^k$ de um complexo de cadeias livre $\mathcal{C}$ de A -módulos a esquerda, existe uma equivalência homotópica de cadeias $\chi : \mathcal{C}^{adj} \rightarrow \mathcal{C}$ que preserva filtrações e induz a aplicação identidade nos complexos adjuntos.*

A prova dos dois últimos resultados pode ser vista em [15].

2.3.2 Homotopia de cadeias

Definição 2.18 Dois morfismos $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $\beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre complexos de cadeias de A -módulos M e N , respectivamente, são **homotópicos em cadeias** e denotamos por $\alpha \sim \beta$, se existe uma sequência de aplicações

$$\delta_r : M_r \rightarrow N_{r-1}$$

tal que

$$\partial_{\mathcal{D}} \circ \delta + \delta \circ \partial_{\mathcal{C}} = \alpha - \beta,$$

onde $\partial_{\mathcal{C}}$ e $\partial_{\mathcal{D}}$ denotam os operadores bordo correspondentes aos complexos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente.

Definição 2.19 Um morfismo entre cadeias $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma **equivalência homotópica de cadeias** se existe um morfismo $\gamma : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\phi \circ \gamma$ é homotópica em cadeias à aplicação identidade em $\mathcal{D}$ e $\gamma \circ \phi$ é homotópica em cadeias à aplicação identidade em $\mathcal{C}$. Nesse caso os complexos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são **equivalentes em cadeias**.

Apresentamos a seguir resultados da teoria de homotopia em cadeias para complexos sobre o anel dos polinômios $A[t]$ e sobre o anel das séries de potências $A[[t]]$. Esses resultados são utilizados na parte final desta dissertação.

Seja $\mathcal{C}$ complexo de cadeias sobre $A[[t]]$. O complexo $t^k \mathcal{C}$ é subcomplexo de $\mathcal{C}$. Seja $\mathcal{C}^{(k)} = \mathcal{C} / t^k \mathcal{C}$ o complexo quociente. Diremos que o complexo $\mathcal{C}^{(k)}$ é um **complexo truncado**. Sejam $f, g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ morfismos entre $A[[t]]$ -complexos. Eles induzem, portanto, morfismos $f_k, g_k : \mathcal{C}^{(k)} \rightarrow \mathcal{D}^{(k)}$ entre os complexos truncados. Sejam $j_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{(k)}$ e $j_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^{(k)}$ as respectivas projeções. Então temos o seguinte resultado.

Proposição 2.20 *São equivalentes as propriedades:*

1. $f \sim g$.
2. $f_k \sim g_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.
3. $j_2 \circ f \sim j_2 \circ g$, para todo $k \in \mathbb{N}$.
4. $f_k \circ j_1 \sim g_k \circ j_1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definição 2.21 Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ complexos de cadeias sobre $A[[t]]$. Uma **aplicação virtual** $\mathcal{H} : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathcal{D}$ é uma coleção de $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de morfismos

$$h_k : \mathcal{C}/t^k \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}/t^k \mathcal{D}$$

entre $A[t]$ -complexos que tornam, para todo k , o seguinte diagrama de cadeias **homotopicamente comutativo**, ou seja, $h_k \circ p_k$ é homotópico a $p'_k \circ h_{k+1}$, onde p_k e p'_k são as projeções.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}/t^k \mathcal{C} & \xleftarrow{p_k} & \mathcal{C}/t^{k+1} \mathcal{C} \\ \downarrow h_k & & \downarrow h_{k+1} \\ \mathcal{D}/t^k \mathcal{D} & \xleftarrow{p'_k} & \mathcal{D}/t^{k+1} \mathcal{D}. \end{array}$$

A aplicação virtual $\mathcal{H}$ é chamada **equivalência homológica virtual** se h_k é uma equivalência homológica, para todo k .

Definição 2.22 Uma **realização** de uma aplicação virtual $\mathcal{H}$ é um morfismo $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, tal que para todo k o diagrama de cadeias a seguir é homotopicamente comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}/t^k \mathcal{C} & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{C} \\ \downarrow h_k & & \downarrow F \\ \mathcal{D}/t^k \mathcal{D} & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{D}, \end{array}$$

onde as flechas horizontais são as projeções naturais.

Dizemos que um A -complexo é **homotopicamente livre finito** se ele é equivalente em cadeias a um A -complexo livre finito. Para estes, temos o seguinte resultado, cuja prova pode ser vista em [15].

Teorema 2.23 *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ $A[[t]]$ -complexos homotopicamente livre-finitos e seja $\mathcal{H} : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathcal{D}$ uma aplicação virtual. Então $\mathcal{H}$ tem uma única realização (a menos de homotopia em cadeias), denotada por $|\mathcal{H}| : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Além disso, $|\mathcal{H}|$ é equivalência homotópica de cadeias se, e somente se $\mathcal{H}$ é uma equivalência homológica virtual.*

2.4 Espaços de recobrimento

Nesta seção, introduzimos os Espaços de Recobrimento e alguns resultados relacionados. As referências utilizadas foram [5], [9], [12], [19] e [20].

Definição 2.24 Seja X um espaço topológico. Um **espaço de recobrimento** de X é um par $(\bar{X}, p)$ composto de um espaço topológico $\bar{X}$ e uma aplicação contínua $p : \bar{X} \rightarrow X$ satisfazendo a seguinte propriedade: para cada ponto $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U_x de x tal que $p^{-1}(U_x) = \bigcup V_\alpha$, sendo $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ uma família de abertos dois a dois disjuntos tal que a restrição de p a cada V_α é um homeomorfismo entre V_α e U_x .

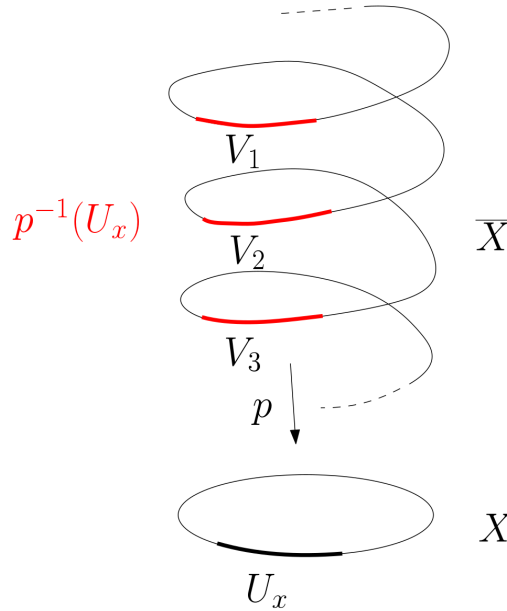


Figura 2.1: Espaço de recobrimento.

Estabeleçamos algumas terminologias úteis aqui. Nos referiremos à função p como **aplicação de recobrimento** ou simplesmente **recobrimento** de X ; o espaço $\bar{X}$ como **espaço total**; o espaço X como **espaço base**; a vizinhança U_x como **vizinhança elementar** de x ; os conjuntos V_α de **folhas** de U_x e o conjunto $p^{-1}(x)$ como **fibra (de recobrimento)** do ponto $x \in X$. Uma representação de um espaço de recobrimento pode ser visto na Figura 2.1.

Como aplicações de recobrimento são homeomorfismos locais, um recobrimento $(\bar{M}, p)$ de uma variedade M confere ao espaço total $\bar{M}$ uma estrutura diferenciável. Pode-se provar que $\bar{M}$ possui base enumerável de abertos, usando o fato de o grupo fundamental de uma variedade M ser sempre enumerável (veja prova em [12]). Entretanto, nem sempre a topologia de $\bar{M}$ será Hausdorff. Para garantirmos que $\bar{M}$ satisfaça esta condição, precisamos assumir adicionalmente que $\bar{M}$ seja simplesmente conexo. Quando isso acontece dizemos que $(\bar{M}, p)$ é um **recobrimento universal** de M . Temos assim o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser vista em [9].

Teorema 2.25 *Sejam M uma variedade diferenciável e $\bar{\pi} : \bar{M} \rightarrow M$ uma aplicação de recobrimento sobre M . Então existe uma única estrutura diferenciável sobre $\bar{M}$ que torna π uma aplicação diferenciável. Se o recobrimento for universal então $\bar{M}$ é variedade diferenciável.*

É mostrado em [19] que todo espaço X conexo, localmente conexo por caminhos e semi-localmente simplesmente conexo possui recobrimento universal. Também é mostrado que o grupo dos homeomorfismos $f : \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ que preservam a relação $p \circ f = p$, com a operação de composição, é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(X)$.

Definimos a seguir uma ferramenta que usamos na construção da teoria de Novikov.

Definição 2.26 *Sejam X, Y espaços topológicos, $(\bar{X}, p)$ espaço de recobrimento de X e $f : Y \rightarrow X$ uma aplicação contínua. O **pullback** de p com base em f é definido como sendo o espaço*

$$f^*\bar{X} = \{(a, y) \in Y \times \bar{X} \mid f(a) = p(y)\}$$

de modo que tenhamos o seguinte digrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} f^* \bar{X} & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{X} \\ \downarrow f^* p & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

no qual $\bar{f}$ e $f^* p$ são as projeções canônicas.

Munimos o pullback $f^* \bar{X}$ com a topologia de subespaço herdada de $Y \times \bar{X}$, este último munido da topologia produto. Relativo a pullbacks de aplicações de recobrimento universais, temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser vista em [20].

Teorema 2.27 *Sejam X espaço topológico, $p : \bar{X} \rightarrow X$ recobrimento universal de X e $f : Y \rightarrow X$ uma aplicação contínua, onde Y é espaço topológico conexo por caminhos. Seja $\bar{Y}$ uma componente conexa por caminhos do pullback $f^* \bar{X}$. Então $f^* p|_{\bar{Y}} : \bar{Y} \rightarrow Y$ é aplicação de recobrimento universal de Y .*

Observe que a fibra $f^* p^{-1}(a)$ do pulback é homeomorfa a fibra $p^{-1}(f(a))$ do recobrimento. Quando um recobrimento $(\bar{X}, p)$ for conexo por caminhos e com fibra $\mathbb{Z}$ diremos que é um **recobrimento cíclico infinito**.

Uma importante classe de recobrimentos cíclicos infinitos é encontrada tomando o pulback da aplicação de recobrimento universal $Exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ de $\mathbb{R}$ sobre o S^1 com base em uma aplicação contínua $f : M \rightarrow S^1$, conforme o diagrama a seguir.

$$\begin{array}{ccc} f^* \mathbb{R} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R} \\ \downarrow f^* p & & \downarrow Exp \\ M & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Um exemplo de recobrimento deste tipo é mostrado na Figura 2.2. O recobrimento $f^* \mathbb{R}$ tem a mesma fibra em M do que $\mathbb{R}$ têm sobre S^1 , ou seja, $\mathbb{Z}$. Essa construção servirá de base para a teoria de Novikov, no capítulo 5. Nessas circunstâncias denotaremos o pulback $f^* \mathbb{R}$ por $\bar{M}$ e a aplicação de recobrimento $f^* p$ por F . Observe que

está definida uma ação de grupo de $\mathbb{Z}$ sobre $\overline{M}$, a saber $z \bullet (x, i) := (x, z+i)$, onde $z \in \mathbb{Z}$, e a função F é equivariante com relação à esta ação, ou seja, $F(t \bullet (x, i)) = F(x, i) - 1$, onde t é o gerador do grupo $(\mathbb{Z}, \bullet) = \langle t \rangle$.

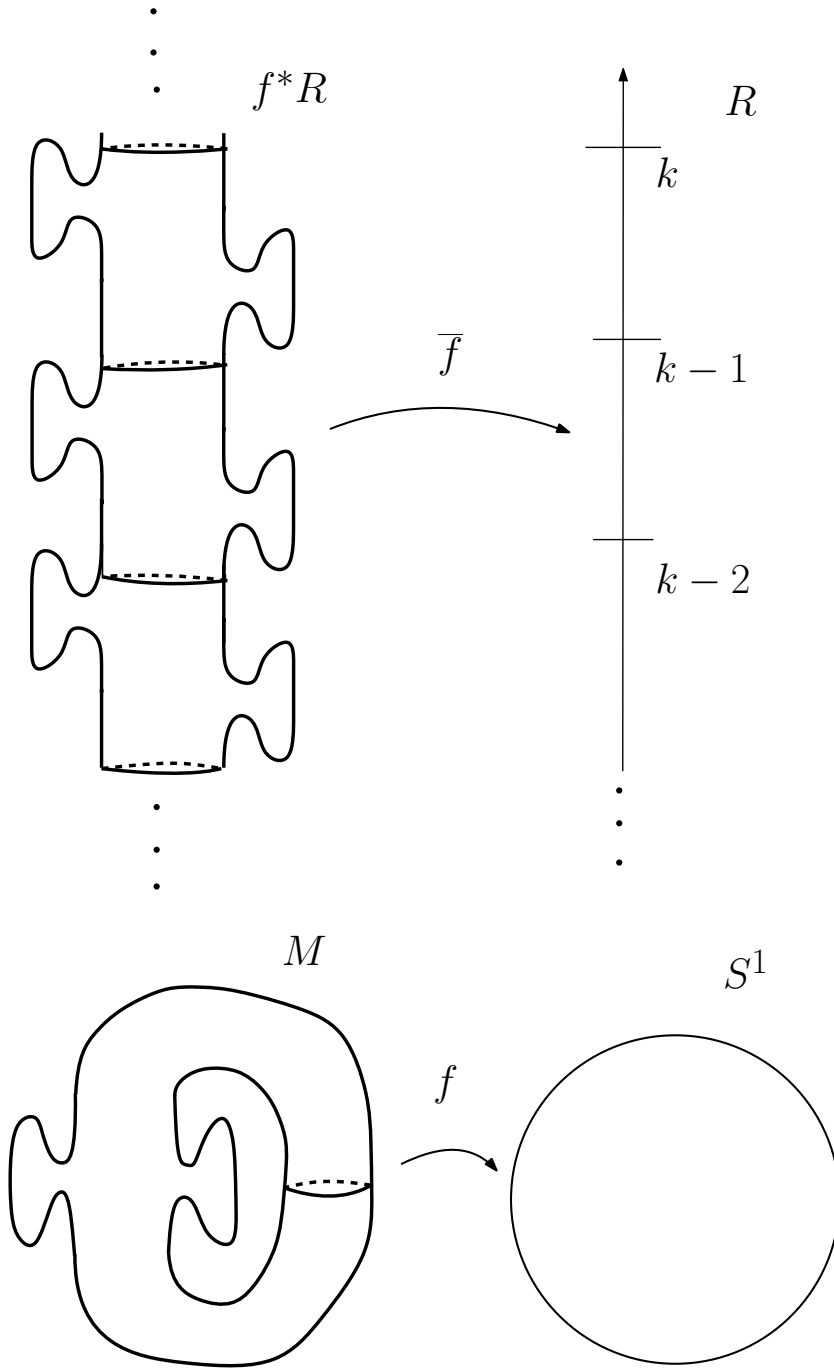


Figura 2.2: Recobrimento cíclico infinito.

A ideia central da teoria clássica de Morse é uma coleção de teoremas que, de forma elegante, relacionam a topologia de uma variedade M e a estrutura dos pontos críticos de uma função de Morse f . Neste capítulo estudamos a homologia de Morse, que explora o aspecto dinâmico do campo gradiente ∇f , o qual carrega informação não recuperada completamente na abordagem clássica da teoria de Morse. As referências adotadas foram [13], [16] e [24].

Começamos introduzindo o Lema de Morse e logo partimos para o estudo das propriedades do fluxo gerado pelo campo gradiente negativo de uma função de Morse em uma variedade Riemanniana suave, compacta sem bordo. Construimos assim o complexo de Morse-Witten que recupera a homologia singular da variedade. Os conceitos deste capítulo servirão de base para a generalização desta teoria para variedades com bordo, assunto abordado no Capítulo 4, e para a construção da Teoria de Novikov no Capítulo 5.

3.1 Lema de Morse

Considere uma variedade Riemanniana M de dimensão n , com uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Seja p um ponto crítico de M , ou seja, $Df_p = 0$. Escolhendo um sistema local de coordenadas $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ ao redor de p , podemos definir o funcional bilinear simétrico $H_p^f : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$:

$$H_p^f(v_p, w_p) := \sum_{i,j=1}^n H_{ij} v_p^i w_p^j, \text{ onde } H_{ij} = H_{ij}(f, p, \phi) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p).$$

A matriz simétrica H_{ij} é chamada de **matriz hessiana** de f no ponto p . Definimos o **índice de Morse** do ponto p (com relação a função f) como sendo a dimensão máxima de um subespaço em que H_{ij} é negativa definida e denotamos por $\text{ind}_f(p)$. Caso H_{ij} seja inversível, dizemos que p é um **ponto crítico não degenerado**. Pode-se provar que a matriz hessiana, o índice de um ponto p e sua não degeneracidade

não dependem do sistema de coordenadas escolhido, isto é, é uma característica intrínseca da variedade. O conjunto dos pontos críticos de f é denotado por $S(f)$ e o conjunto dos pontos críticos de f de índice de Morse k é denotado por $S_k(f)$.

Exemplo 3.1 Considere M um toro perpendicular a um plano V e f uma função altura em relação a este plano, como mostrado na Figura 3.1. Podemos escolher sistemas de coordenadas (x, y) para M tais que $f = x^2 + y^2$ em uma vizinhança de p , $f = x^2 - y^2$ em uma vizinhança de q , $f = -x^2 + y^2$ em uma vizinhança de r e $f = -x^2 - y^2$ em uma vizinhança de s . Em todos os casos as derivadas se anulam e a matriz Hessiana é inversível e, portanto, p, q, r, s são pontos críticos não degenerados de f . Observe também que o número de sinais negativos na expressão de f caracterizam o índice destes pontos.

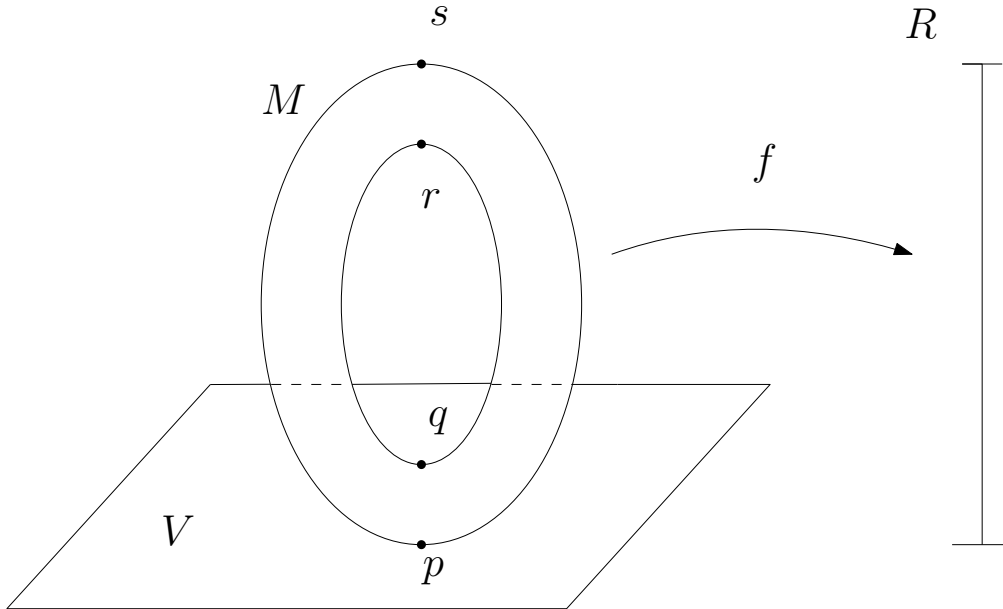


Figura 3.1: Pontos críticos de uma função altura f num toro M .

Um dos principais resultados relacionados a pontos críticos não degenerados é o Lema de Morse. Ele caracteriza completamente uma função f em uma vizinhança de um ponto crítico não degenerado p de acordo com o índice de Morse de p . Sua demonstração pode ser encontrada em [13].

Teorema 3.2 (Lema de Morse) *Sejam M uma variedade Riemanniana, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e p um ponto crítico não degenerado de f . Então existe um sistema local de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ em uma vizinhança U ao redor de p que satisfaz $x_i(p) = 0$ para*

todo i e, além disso,

$$f = f(p) - (x_1)^2 - \cdots - (x_k)^2 + (x_{k+1})^2 + \cdots + (x_n)^2$$

em todo ponto de U , sendo $k = \text{ind}_f(p)$.

Definição 3.3 Uma carta ao redor de p que satisfaz as condições do Lema de Morse é chamada de **Carta de Morse para f em p** .

O Lema da Morse afirma, em outras palavras, que ao redor de pontos críticos não degenerados as funções diferenciáveis se comportam como polinômios. Ele nos garante o próximo resultado.

Corolário 3.4 *Pontos críticos não degenerados são isolados.*

Prova: Seja p um ponto crítico não degenerado de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas ao redor de p tal que $\phi(p) = 0$. Considere o campo gerado pela aplicação derivada $Df : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que neste sistema de coordenadas é dado por

$$Df_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(f \circ \phi^{-1})(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(f \circ \phi^{-1})(x) \right).$$

Temos que $Df_p = 0$ e que a matriz Hessiana H_p^f é não singular. Pelo Teorema 1.14, Df é difeomorfismo de uma vizinhança U_0 de 0 para outra vizinhança U'_0 de 0. Em particular, Df é injetiva em U_0 , ou seja, para todo $x \in U_0 \setminus \{0\}$, $Df_x \neq Df_p = 0$. Portanto, p é ponto crítico isolado de f . $\square$

Definição 3.5 Uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida numa variedade M é uma **função de Morse** se todos os seus pontos críticos forem não degenerados.

Corolário 3.6 *Sejam M uma variedade compacta, sem bordo e f um função de Morse. Então f possui um número finito de pontos críticos.*

Prova: Suponha que f tenha infinitos pontos críticos e tome uma sequência $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de pontos críticos distintos de f . Como M é compacta, existe uma subsequência convergente, com limite $p \in M$. Como df é contínua, p também é ponto crítico, o que é absurdo, pois pontos críticos são isolados. $\square$

Pode-se mostrar que funções de Morse são em certo sentido "comuns" no espaço das funções diferenciáveis de uma variedade em $\mathbb{R}$. De fato, o Teorema de Sard afirma que "quase toda função" diferenciável é uma função de Morse. Mais especificamente,

se M é uma variedade compacta, sem bordo, então o conjunto das funções de Morse é aberto e denso no espaço $C^\infty(M, \mathbb{R})$. A demonstração deste resultado pode ser vista em [16].

3.2 Fluxos, variedades estáveis e instáveis

Nesta seção, a menos por menção contrária, trabalharemos com variedades Riemannianas compactas, sem bordo.

Um **fluxo** em uma variedade M é uma aplicação diferenciável

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

tal que

1. Para cada $t \in \mathbb{R}$ a aplicação $\varphi_t : M \rightarrow M$ definida por $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ é um difeomorfismo em M ,
2. Para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$ têm-se $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

Seja v um campo de vetores diferenciável em M . Então está associado a v um único fluxo de M . De fato, para cada $x \in M$, considere o problema de valor inicial para uma curva diferenciável $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ dado por

$$\gamma'(t) = v(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = x.$$

Sabemos que existe uma vizinhança U contendo x e um $\epsilon > 0$ em que essa equação admite solução única em U para $|t| < \epsilon$. Além disso, sabemos que a dependência da condição inicial também é diferenciável. Mostra-se em [13] que essa solução $\gamma = \gamma_x$ pode ser expandida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Chamamos a função $\gamma_x : \mathbb{R} \rightarrow M$ de **linha de fluxo através de x** . Definimos o **fluxo gerado pelo campo v** como sendo a aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, $(t, x) \rightarrow \gamma_x(t)$. Note que fixando t , fica definido um difeomorfismo $\varphi_t : M \rightarrow M$, dado por $x \rightarrow \varphi(t, x)$ e, portanto, o fluxo gerado por v satisfaz a definição de fluxo em M .

Definimos a **órbita** $\mathcal{O}(x)$ de $x \in M$ como sendo o conjunto $\{\varphi_t(x) | t \in \mathbb{R}\}$. É importante fazer distinção entre a linha de fluxo de x e órbita de x . O primeiro é uma

função de $\mathbb{R}$ na variedade, o segundo é um conjunto de pontos coincidente com a imagem dessa função. As órbitas podem ser **singulares**, isto é, compostas apenas por um ponto; **periódicas**, ou seja, existe $T \neq 0$ tal que $\varphi_T(x) = x$ e $\varphi_T(x) \neq x$ sempre que $t \in (0, T)$; ou **regulares**, caso não se encaixem em nenhuma das outras definições. Nesse último caso a órbita admite pontos limites, o que nos leva a próxima definição.

Definição 3.7 Um ponto p é ponto ω -limite de x se existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tendendo ao infinito tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = \lim_{t_n \rightarrow \infty} \gamma_x(t_n) = p$. Um ponto p é ponto α -limite de x se existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tendendo a menos infinito tal que $\lim_{t_n \rightarrow -\infty} \varphi(t_n, x) = \lim_{t_n \rightarrow -\infty} \gamma_x(t_n) = p$.

Denominaremos o conjunto dos pontos ω -limite de x por $\omega(x)$ e o conjunto dos pontos α -limite por $\alpha(x)$. Note que se dois pontos de M estão na mesma órbita, seus conjuntos α e ω -limites são os mesmos. Assim faz sentido definir os conjuntos α e ω -limites da órbita $\mathcal{O}(x)$.

Proposição 3.8 Os conjuntos $\omega(\mathcal{O}(x))$ e $\alpha(\mathcal{O}(x))$ são fechados, não vazios, compactos, conexos e invariantes, ou seja, para todo $p \in \omega(\mathcal{O}(x))$, $\varphi(\mathbb{R}, p) \subset \omega(\mathcal{O}(x))$.

A demonstração desta proposição é simples e pode ser vista em [16]. Consideraremos o caso particular dos **fluxos gradientes**, isto é, fluxos gerados pelo campo gradiente negativo de uma função de Morse $v = -\nabla f$. Se γ é uma linha de fluxo do campo, então

$$\frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = -\|\nabla f(\gamma(t))\|^2 \leq 0.$$

Isso mostra que f é estritamente decrescente ao longo de órbitas não singulares. Assim, órbitas periódicas não podem existir e qualquer órbita regular intersecta a superfície de nível $f^{-1}(f(x))$ no máximo uma vez, sendo essa intersecção ortogonal. Com essas propriedades prova-se que $\alpha(x) \cup \omega(x) \subset S(f)$. A demonstração é pormenorizada em [16]. Uma consequência dessa demonstração e do Corolário 3.6 é o próximo resultado.

Teorema 3.9 Sejam M variedade Riemanniana compacta, sem bordo e $v = -\nabla f$, sendo f função de Morse. Então, para todo $x \in M$, cada um dos conjuntos $\alpha(x)$ e $\omega(x)$ consiste de apenas um ponto crítico de f .

Consideremos p um ponto crítico não degenerado de f . Definimos as variedades **estável** e **instável** de p como sendo os conjuntos

$$W^s(p) := \{x \in M \mid \omega(x) = p\} \quad e \quad W^u(p) := \{x \in M \mid \alpha(x) = p\}$$

respectivamente. O próximo teorema mostra que $W^s(p)$ e $W^u(p)$ são, de fato, variedades.

Teorema 3.10 (Teorema da variedade estável) *Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ função de Morse e $p \in S(f)$. Então $W^s(p)$ e $W^u(p)$ são subvariedades de M sem bordo. Além disso, a dimensão de $W^u(p)$ é igual a $\text{ind}_f(p)$ e a dimensão de $W^s(p)$ é igual a $n - \text{ind}_f(p)$, onde n é a dimensão da variedade M .*

A demonstração pode ser encontrada em [24]. Além de serem subvariedades, as variedades instáveis e estáveis são discos abertos, como mostra o resultado seguinte.

Proposição 3.11 *Sejam M variedade compacta, sem bordo, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e φ o fluxo associado ao campo vetorial ∇f . Seja $p \in M$ um ponto crítico de f de índice de Morse k . Então $W^u(p)$ é imagem de uma imersão de um disco aberto k -dimensional em M .*

A demonstração deste resultado utiliza de conceitos não abordados nesta dissertação. Sua demonstração pode ser vista em [15].

3.3 Variedades de conexão

Nesta seção considere M variedade Riemanniana compacta, sem bordo, com uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e φ o fluxo gradiente negativo de f .

Sejam p, q pontos críticos de f . Definimos a **variedade de conexão de p e q** por

$$\mathcal{M}_{pq} = \mathcal{M}_{pq}(f) := W^u(p) \cap W^s(q).$$

Seja $a \in (f(q), f(p))$ um valor regular. O **espaço moduli de p e q** é definido por

$$\mathcal{M}_p^q = \mathcal{M}_p^p(f, a) := \mathcal{M}_{pq} \cap f^{-1}(a).$$

Para mostrar que o espaço Moduli independe do valor regular escolhido a , precisamos assegurar que não existam valores críticos entre $f(q)$ e $f(p)$. Provaremos

no próximo capítulo que, quando os índices de p e q são consecutivos, é possível "reorganizar" uma função de Morse para que ela satisfaça essa condição. Por enquanto, assumiremos que ela seja válida. Chamamos uma linha de fluxo através de um ponto $x \in M$, gerada pelo campo gradiente negativo de **link** de p para q se $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_x(t) = p$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_x(t) = q$. Observe que podemos identificar o espaço moduli com o conjunto dos links de p para q , pois todo link intersecta a superfície de nível exatamente uma vez.

Estamos interessados no caso em que as variedades instáveis e estáveis dos pontos críticos de f se intersectam transversalmente. Nesse caso tanto $\mathcal{M}_{pq}$ como $\mathcal{M}_p^q$ são subvariedades sem bordo e suas dimensões são dadas por

$$\dim \mathcal{M}_{pq} = \text{ind}_f(p) - \text{ind}_f(q) \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{M}_p^q = \text{ind}_f(p) - \text{ind}_f(q) - 1.$$

Quando tal condição de transversalidade é válida para quaisquer pontos críticos de f , dizemos que o fluxo gradiente de f satisfaz a **condição de Morse-Smale**. O próximo resultado garante que é possível construir fluxos satisfazendo a condição de Morse-Smale bastando apenas uma pequena perturbação do campo gradiente.

Teorema 3.12 *Sejam f uma função de Morse diferenciável e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica Riemanniana diferenciável em uma variedade compacta, sem bordo M . Então o campo ∇f pode ser aproximado diferencialmente por um campo gradiente $\tilde{\nabla} \tilde{f}$ tal que o fluxo gradiente de $\tilde{f}$ satisfaz a condição de Morse-Smale.*

A demonstração deste teorema é extensa e usa ferramentas da Teoria de Sistemas Dinâmicos que não fazem parte da proposta deste trabalho. Ela pode ser encontrada em [1].

Teorema 3.13 *Se $W^u(p)$ e $W^s(q)$ se intersectam transversalmente, valem as seguintes propriedades:*

1. Se $\text{ind}_f(p) \leq \text{ind}_f(q)$, então $\mathcal{M}_{pq} = \emptyset$.
2. $\mathcal{M}_{pp} = \{p\}$.
3. Se $\text{ind}_f(p) = \text{ind}_f(q)$ e $p \neq q$, então $\mathcal{M}_{pq} = \emptyset$.
4. Se $\mathcal{M}_{pq} \neq \emptyset$ e $p \neq q$, então $\text{ind}_f(p) > \text{ind}_f(q)$.

Prova: (1) Segue diretamente da transversalidade.

(2) Suponha que haja outro ponto em $\mathcal{M}_{pp}$. Como tal ponto não pode ser um ponto crítico, então a órbita de p deve ser uma órbita periódica, o que não pode ocorrer em fluxos gradientes.

(3) Suponha que $\mathcal{M}_{pq}$ é não vazia. Então contém uma subvariedade unidimensional da forma $\varphi_{\mathbb{R}}x$, o que é absurdo pois $\dim \mathcal{M}_{pq} = 0$.

(4) Assuma o contrário e aplique (1) e (3). □

3.4 Compacidade

Consideremos M uma variedade Riemanniana compacta, n -dimensional, sem bordo, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e φ o fluxo gradiente de f . Apesar de o Teorema 3.12 nos garantir que o fluxo gradiente de uma função de Morse pode ser perturbado de tal forma que $\mathcal{M}_{pq}$ e $\mathcal{M}_p^q$ se tornem variedades sem bordo, não temos nenhum resultado que nos garanta a sua compacidade. Tais variedades nem sempre são compactas mas, no caso em que o fluxo gradiente satisfaz a condição de Morse-Smale e $\text{ind}_f(p) - \text{ind}_f(q) = 1$, teremos a compacidade de $\mathcal{M}_p^q$. Nessas circunstâncias o espaço moduli será um conjunto finito de pontos.

Este resultado é caso particular do Teorema 3.15 seguinte mas, antes de enunciá-lo, acrescentamos a seguinte definição.

Definição 3.14 Um subconjunto $K \subset \mathcal{M}_p^q$ é dito ser **compacto a menos de órbitas quebradas** se, para toda sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$, existirem pontos críticos $p = p_0, p_1, \dots, p_l = q$, e links $u^j \in \mathcal{M}_{p_{j-1}}^{p_j}$ tais que $x_k \rightarrow (u^1, \dots, u^l)$ quando $k \rightarrow \infty$.

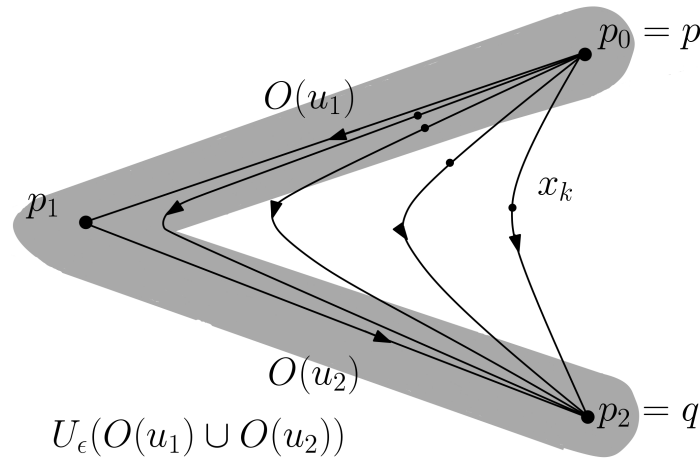


Figura 3.2: Compacidade por órbitas quebradas.

A convergência nessa definição tem o seguinte sentido: Para todo $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k_0$, $\mathcal{O}(x_k) \subset U_\epsilon(\mathcal{O}(u^1) \cup \dots \cup \mathcal{O}(u^l))$, onde $U_\epsilon(A)$ denota uma ϵ -vizinhança de um subconjunto $A \subset M$. Nesse caso dizemos que x_k **converge para a órbita quebrada** $(u^1, \dots, u^l)$ **de ordem 1**, conforme ilustrado na Figura 3.2. Munidos dessa definição, enunciamos o teorema a seguir.

Teorema 3.15 *Seja M variedade Riemanniana compacta, sem bordo, de dimensão finita e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ função de Morse tal que seu fluxo gradiente satisfaz a condição de Morse-Smale. Então, dados dois pontos críticos p e q de f , $\mathcal{M}_p^q$ é compacto e menos de órbitas quebradas de ordem no máximo $\text{ind}_f(p) - \text{ind}_f(q)$.*

Os detalhes da demonstração são omitidos, pois outra demonstração para a cardinalidade finita do espaço moduli é apresentada no próximo capítulo em um contexto mais geral. A ideia da prova do Teorema 3.15, entretanto, envolve o uso de ferramentas de sistemas dinâmicos, mais especificamente o **Teorema de Grobman-Hartman**. Dada uma sequência $\{x_k\}$ em $\mathcal{M}_p^q$, o teorema é usado juntamente com o Teorema 3.13 para construir uma sequência finita de pontos críticos $\{p_0, \dots, p_l\}$ e links $u^j \in \mathcal{M}_{p_{j-1}}^{p_j}$ tais que $x_k \rightarrow (u^1, \dots, u^l)$ quando $k \rightarrow \infty$. Esta demonstração pode ser vista com pormenores em [24].

3.5 Orientação

Nesta seção apresentamos uma maneira de orientar variedades de conexão e espaços moduli. Usaremos essa orientação para obter o número de intersecção desses espaços, conforme definido no Capítulo 1. Consideraremos M variedade Riemanniana compacta, sem bordo, n -dimensional e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ função de Morse tal que o fluxo gradiente de f satisfaça a condição de Morse-Smale.

Dados $p \in S(f)$ e $v = -\nabla f$, temos pela Proposição 3.11, que $W^s(p)$ é contrátil, logo, simplesmente conexa. Analogamente, a variedade instável $W^u(p)$ também é simplesmente conexa. Temos que toda variedade simplesmente conexa é orientável (resultado que pode ser encontrado em [7]). A demonstração do Teorema 3.16, a seguir, mostra como essas orientações induzem uma orientação nas variedades de conexão e espaços moduli.

Teorema 3.16 *Fixe uma orientação em $W^u(p)$ para todo $p \in S(f)$ de índice de Morse maior do que zero. Então, para quaisquer $p, q \in S(f)$, as variedades de conexão $\mathcal{M}_{pq}$ e os espaços moduli $\mathcal{M}_p^q$ herdam orientações induzidas $[\mathcal{M}_{pq}]_{\text{ind}}$ e $[\mathcal{M}_p^q]_{\text{ind}}$.*

Prova: Sabemos que $W^u(p)$ é orientável. A transversalidade da intersecção com $W^s(q)$ implica que o fibrado tangente $TW^u(p)$ pode ser decomposto ao longo de $\mathcal{M}_{pq}$ da seguinte maneira

$$T_{\mathcal{M}_{pq}} W^u(p) \simeq T\mathcal{M}_{pq} \oplus \mathcal{V}_{\mathcal{M}_{pq}} W^s(q), \quad (3.1)$$

onde o último termo representa o fibrado normal de $W^s(q)$ restrito a $\mathcal{M}_{pq}$. Sabemos que restrição do fibrado tangente orientado $TW^u(p)$ a qualquer subvariedade, em particular a $\mathcal{M}_{pq}$, é orientável. Vamos provar que $\mathcal{V}W^s(q)$ é orientável. Para obtermos a orientação de $\mathcal{V}W^s(q)$ basta orientar uma única fibra. Considerando

$$T_q W^u(q) \oplus T_q W^s(q) \simeq T_q M \simeq \mathcal{V}_y W^s(q) \oplus T_y W^s(q),$$

vemos que $\mathcal{V}_y W^s(q)$ é isomorfo a $T_q W^u(q)$, o que nos garante a orientação de $\mathcal{V}W^s(q)$ e também de sua restrição a $\mathcal{M}_{pq}$. Pela Proposição 2.9, temos que $T\mathcal{M}_{pq}$ é orientável. A orientação de $\mathcal{M}_p^q$ segue da decomposição $T\mathcal{M}_{pq} \simeq \mathbb{R} \oplus T\mathcal{M}_p^q$ e da Proposição 2.9. $\square$

Exemplo 3.17 [Esfera 2-dimensional deformada] Considere a variedade S^2 e o fluxo gradiente da função altura $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, conforme a Figura 3.3. Temos que f é uma função de Morse com 6 pontos críticos: três pontos repulsores p_1, p_2 e p_3 , dois pontos de sela q_1 e q_2 um ponto atrator r . Considerando as orientações das variedades instáveis fixadas na Figura 3.3, desejamos encontrar orientações dadas pelo Teorema 3.16 para as variedades de conexão. Como r têm índice de Morse nulo, a orientação de $\mathcal{M}_{q_1 r}$ é induzida pela orientação de $T_{q_1} W^u(q_1)$.

Para obter as orientações $[\mathcal{M}_{p_1 q_1}]_{ind}$ e $[\mathcal{M}_{p_2 q_1}]_{ind}$ consideramos a representação planar do fluxo, como na Figura 3.4 e o isomorfismo da Equação 3.1. Nesta representação, o vetor $2'$ é escolhido compatível com a orientação de $W^u(y)$ e o vetor $1'$ é escolhido de tal forma que a orientação dada pela base $\{1', 2'\}$ seja compatível com a orientação de $W^u(p_1)$, ou seja, a orientação dada pela base $\{1, 2\}$. O vetor $1'$ determina a orientação $[\mathcal{M}_{p_1 q_1}]_{ind}$, que é oposta a orientação dada pelo fluxo em $\mathcal{M}_{p_1 q_1}$, como mostra a Figura 3.5. Analogamente, obtêm-se os vetores $1''$ e $2''$ e a orientação $[\mathcal{M}_{p_2 q_1}]_{ind}$. Para obter as orientações de $\mathcal{M}_{p_2 q_2}$, $\mathcal{M}_{p_3 q_2}$ e $\mathcal{M}_{q_2 r}$ o processo é o mesmo e as orientações são análogas.

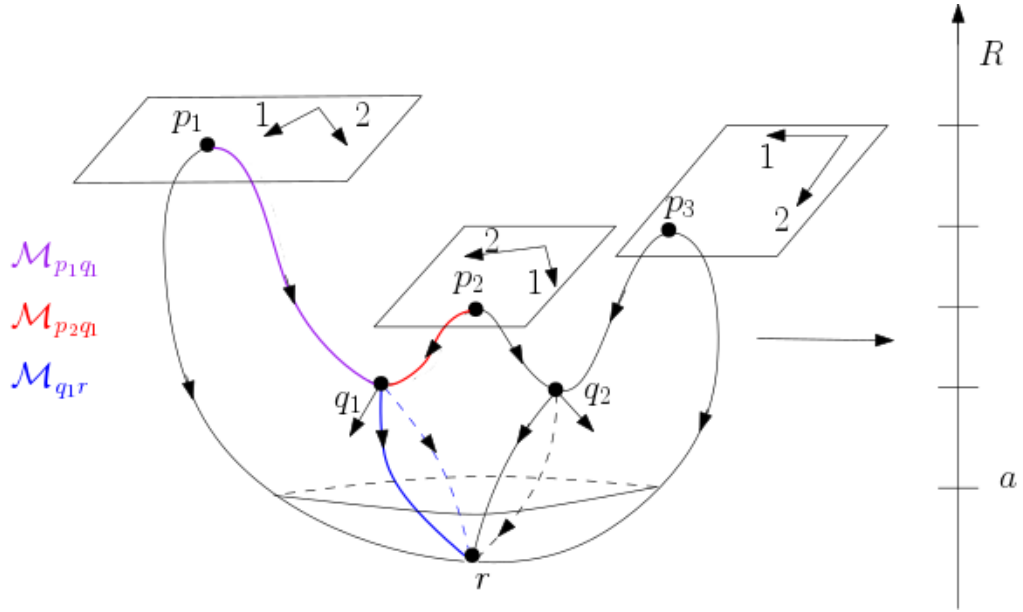


Figura 3.3: Função altura em S^2 .

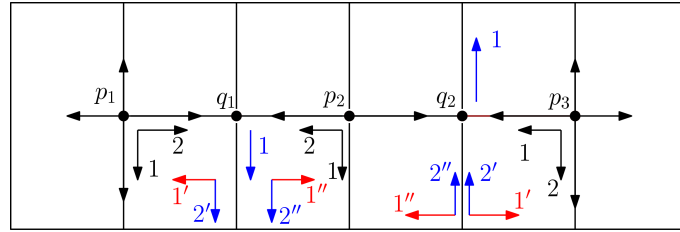


Figura 3.4: Representação planar do fluxo em S^2 .

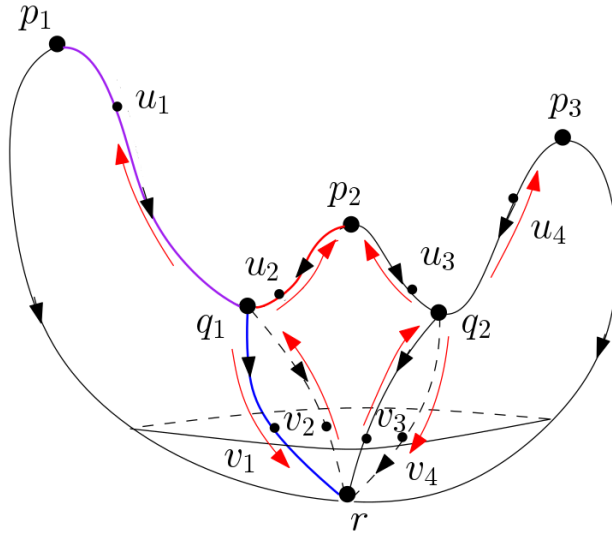


Figura 3.5: Orientações induzidas nas variedades de conexão.

3.6 Homologia de Morse

Nesta seção definimos o complexo de Morse-Witten, um complexo de cadeias gerado pelos pontos críticos de f , graduado por seus índices de Morse e cuja diferencial conta as órbitas conectantes entre pontos críticos de índices consecutivos levando em conta a orientação.

Considere M uma variedade Riemanniana compacta sem bordo, n -dimensional, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e $v = -\nabla f$ tal que o fluxo φ gerado por v satisfaça a condição de Morse-Smale.

Definição 3.18 O grupo graduado de Morse associado a M e f é o conjunto $\mathcal{M}(f, v) = \{\mathcal{M}_k(f, v) : k \in \mathbb{Z}\}$, onde cada $\mathcal{M}_k(f, v)$ é um grupo abeliano livre gerado pelo conjunto de pontos críticos de f de índice de Morse k , ou seja,

$$\mathcal{M}_k(f, v) := \bigoplus_{p \in S_k(f)} \mathbb{Z}\langle p \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e a soma sobre o conjunto vazio é entendida como zero.

Sejam p e q pontos críticos de f tais que $\text{ind}_f(p) - \text{ind}_f(q) = 1$ e seja $u \in \mathcal{M}_p^q$. A órbita $\mathcal{O}(u)$ é uma componente conexa de $\mathcal{M}_{pq}$ e, portanto, carrega a orientação $[\mathcal{O}(u)]_{\text{ind}}$ do Teorema 3.16. A órbita $\mathcal{O}(u)$ carrega também a orientação fixada da variedade instável $W^u(p)$, que denotamos por $[\mathcal{O}(u)]_{\text{grad}}$. Definimos o **signal** de u e denotamos por $\epsilon(u)$ como sendo $\epsilon(u) = 1$ se essas orientações coincidirem e $\epsilon(u) = -1$ caso elas sejam opostas.

Definição 3.19 O operador bordo de Morse-Witten $\partial = \{\partial_k\}$ onde

$$\partial_k = \partial_k(M, f) : \mathcal{M}_k(f, v) \rightarrow \mathcal{M}_{k-1}(f, v)$$

é definido em um elemento gerador p de $\mathcal{M}_k(f, v)$ por

$$\partial_k p := \sum_{q \in S_{k-1}(f)} n(p, q) q,$$

onde $n(p, q) := \sum_{u \in \mathcal{M}_p^q} \epsilon(u)$ é o **número de intersecção** entre p e q . A soma é estendida para as demais cadeias por lineariidade.

Observe que o operador bordo de Morse-Witten depende da orientação fixada para as variedades instáveis dos pontos críticos. Dados a valor regular entre $f(q)$ e $f(p)$

e $u \in \mathcal{M}_p^q$, o sinal $\epsilon(u)$ e o número de intersecção $n(p, q)$ coincidem com o sinal $\epsilon(u)$ e número de intersecção $n(W^u(p) \cap f^{-1}(a), W^s(q) \cap f^{-1}(a))$ definidos no Capítulo 1, bastando apenas que orientemos o fibrado $T\mathcal{V}W^s(q)$ como na demonstração do Teorema 3.16.

O par $(\mathcal{M}(f, v), \partial)$ é um complexo de cadeias chamado **complexo de Morse-Witten** associado a f e v . O teorema seguinte mostra que ∂ é realmente um operador bordo.

Teorema 3.20 *O operador bordo de Morse-Witten satisfaz $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Ideia: Para esta prova é definida uma aplicação $\#$ que chamamos de **colagem**. Pode-se provar que existe um número real positivo ρ_0 e um mergulho

$$\# : \mathcal{M}_p^q \times [\rho_0, \infty) \times \mathcal{M}_q^r \rightarrow \mathcal{M}_p^r, \quad (u, \rho, v) \mapsto u\#_\rho v,$$

tal que

$$u\#_\rho v \rightarrow (u, v) \quad \text{quando} \quad \rho \rightarrow \infty,$$

no sentido da Definição 3.14. Além disso, tal aplicação é compatível com a orientação no seguinte sentido:

$$\rho\#([\mathcal{M}_{pq}^u]_{ind}, [\mathcal{M}_{pq}^u]_{ind}) = [\mathcal{M}_{pr}^{u\#_\rho v}]_{ind}.$$

Esta propriedade é usada para provar (i) e (ii) a seguir. Sejam $p \in S_k(f)$ e $r \in S_{k-2}(f)$

(i) O conjunto de órbitas quebradas de ordem 2 entre p e r

$$\mathcal{B}_{pr}^1 := \{(u, v) | u \in \mathcal{M}_p^q, v \in \mathcal{M}_q^r, \text{ para algum } q \in S_{k-1}(f)\}$$

corresponde precisamente aos extremos de componentes conexas não compactas de $\mathcal{M}_p^r$.

(ii) Dadas duas órbitas quebradas (u, v) e $(\tilde{u}, \tilde{v})$ correspondentes a uma mesma componente conexa $\mathcal{M}_p^r$, seus sinais característicos satisfazem

$$n_u n_v + n_{\tilde{u}} n_{\tilde{v}} = 0.$$

Assim temos que

$$\begin{aligned}
 \partial_{k-1} \partial_k p &= \sum_{r \in S_{k-2}(f)} \left(\sum_{q \in S_{k-1}(f)} \sum_{u \in \mathcal{M}_p^q} \sum_{v \in \mathcal{M}_q^r} n_u n_v \right) r \\
 &= \sum_{r \in S_{k-2}(f)} \left(\sum_{(u,v) \in \mathcal{B}_{pr}^1} n_u n_v \right) r \\
 &= \sum_{r \in S_{k-2}(f)} \left(\sum_i n_{u_i} n_{v_i} + n_{\tilde{u}_i} n_{\tilde{v}_i} \right) r = 0,
 \end{aligned}$$

onde o índice i varia sobre as componentes conexas $(\mathcal{M}_p^r)^i$ de $\mathcal{M}_p^r$ difeomorfas a $(0,1)$. □

Os grupos de homologia do Complexo de Morse-Witten são chamados **grupos de homologia de Morse** de M .

Exemplo 3.21 (Esfera 2-dimensional deformada) Retornemos ao Exemplo 3.17. Temos um fluxo Morse-Smale, e o operador bordo de Morse-Witten está bem definido. Temos que $\mathcal{M}_2(f, v) = \mathbb{Z}\langle p_1 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle p_2 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle p_3 \rangle$, $\mathcal{M}_1(f, v) = \mathbb{Z}\langle q_1 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle q_2 \rangle$, $\mathcal{M}_0(f, v) = \mathbb{Z}\langle r \rangle$ e $\mathcal{M}_k(f, v) = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z} - \{0, 1, 2\}$. Da Figura 3.5, temos que $n_{u_1} = -1$, $n_{u_2} = -1$, $n_{v_1} = 1$, $n_{v_2} = -1$, $n_{u_3} = -1$, $n_{u_4} = -1$, $n_{v_3} = 1$, $n_{v_4} = -1$. Logo, os operadores bordo $\partial_2 : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_1$, $\partial_1 : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_0$ e $\partial_0 : \mathcal{M}_0 \rightarrow 0$ são definidos por $\partial_2\langle p_1 \rangle = -\langle q_1 \rangle$, $\partial_2\langle p_2 \rangle = -\langle q_1 \rangle - \langle q_2 \rangle$, $\partial_2\langle p_3 \rangle = -\langle q_2 \rangle$, $\partial_1\langle q_1 \rangle = \langle r \rangle - \langle r \rangle = 0$, $\partial_1\langle q_2 \rangle = \langle r \rangle - \langle r \rangle = 0$ e $\partial_0\langle r \rangle = 0$, respectivamente. Portanto, os grupos de homologia de Morse são $H_0(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}\langle r \rangle \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(\mathcal{M}) = 0$ e $H_2(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}\langle p_2 - (p_1 + p_3) \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Note que, neste exemplo particular, os grupos de homologia de Morse coincidem com os grupos de homologia singular da variedade S^2 . O teorema seguinte mostra que este fato vale em geral.

Teorema 3.22 (Teorema da homologia de Morse) *A homologia do complexo de Morse $(\mathcal{M}, \partial)$ é isomorfa a homologia singular da variedade M , ou seja,*

$$H_k(M) \simeq H_k(\mathcal{M}),$$

para todo inteiro k .

A vantagem da homologia de Morse sobre a homologia singular é sua visão geomé-

trica e a facilidade no cálculo dos coeficientes. A demonstração do Teorema 3.22 será apresentada no próximo capítulo para campos gradientes mais gerais e variedades com bordo. Existem outras demonstrações para esse resultado. Uma demonstração alternativa para variedades compactas sem bordo, utilizando ferramentas da Teoria de Conley, pode ser encontrada em [10].

3.6.1 Desigualdades de Morse

Uma das principais consequências do Teorema 3.22, são as **desigualdades de Morse**. Sejam M variedade de dimensão n , compacta, sem bordo e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ função de Morse tal que seu fluxo gradiente satisfaça a condição de Morse-Smale. Seja c_k o número total de pontos críticos de índice de Morse k e $b_k(M, \mathbb{Z})$ o k -ésimo número de Betti de M , ou seja, o posto do grupo de homologia singular $H_k(M)$. Temos então o seguinte resultado.

Teorema 3.23

$$c_k - c_{k-1} + \cdots + (-1)^m c_0 \geq b_k - b_{k-1} + \cdots + (-1)^m b_0$$

para todo $m = 0, \dots, n$ sendo a igualdade válida para $m = n$.

Desta forma, o Teorema 3.23 estabelece uma informação sobre a topologia da variedade, determinando um limite inferior para o número de pontos críticos. Utilizando o complexo de Morse-Witten, sua demonstração segue sem dificuldades, como a seguir.

Prova do Teorema 3.23: Suponhamos primeiramente que a homologia singular de M sobre $\mathbb{Z}$ é livre de torção. Como a dimensão de $\mathcal{M}_k(f, v)$ é igual a c_k e o bordo ∂_k do complexo de Morse-Witten é um homomorfismo de módulos, $\mathcal{M}_k(f, v)$ se divide em uma soma direta de $\ker \partial_k \oplus \text{Im} \partial_k$ o que implica que

$$c_k = \gamma_k + \beta_k,$$

onde $\gamma_k = \dim \ker \partial_k$ e $\beta_k = \dim \text{Im} \partial_k$. Pelo Teorema 3.22, temos

$$b_k = \text{rk } H_k(M) = \text{rk } H_k(\mathcal{M}_k(f, v)) = \dim \left(\frac{\ker \partial_k}{\text{Im} \partial_{k+1}} \right) = \gamma_k - \beta_k,$$

onde a hipótese da homologia ser livre de torção é usada na última igualdade. Logo temos, por indução, que vale a igualdade

$$c_k - c_{k-1} + \cdots + c_0(-1)^n = \beta_{k+1} + b_k - b_{k-1} + \cdots + b_0(-1)^n,$$

que demonstra o teorema para o caso em que a homologia de M é livre de torção. Quando a homologia singular de M possui módulo de torção, consideramos o complexo $\mathcal{M}'_* = \mathcal{M}_*(f, v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, onde $\mathcal{M}'_*$ é um complexo de cadeias de espaços vetoriais finitamente gerados sobre o corpo $\mathbb{Q}$ e sua homologia $H_*(\mathcal{M}'_*) \simeq H_*(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Observe que existe um isomorfismo entre $\mathcal{M}'_*$ e o complexo singular com coeficientes no corpo $\mathbb{Q}$, cuja homologia é livre de torção. Logo, os cálculos acima permanecem válidos, considerando o complexo $\mathcal{M}'_*$ e os números de Betti $b_k(M, \mathbb{Q})$ da homologia singular correspondente. Observando que $b_k(M, \mathbb{Z}) = b_k(M, \mathbb{Q})$, completamos a demonstração. □

4 TEORIA DE MORSE EM COBORDISMOS

Neste capítulo desenvolvemos a Teoria de Morse em cobordismos, um passo intermediário para a construção da Teoria de Novikov. As referências utilizadas foram [2], [15] e [18].

4.1 Cobordismos

Definição 4.1 Um **cobordismo** é uma tripla $(W; \partial_0 W, \partial_1 W)$, onde W é uma variedade compacta com bordo e o bordo ∂W é a união disjunta de duas subvariedades compactas sem bordo:

$$\partial W = \partial_0 W \sqcup \partial_1 W$$

com $\dim \partial_0 W = \dim \partial_1 W = \dim W - 1$.

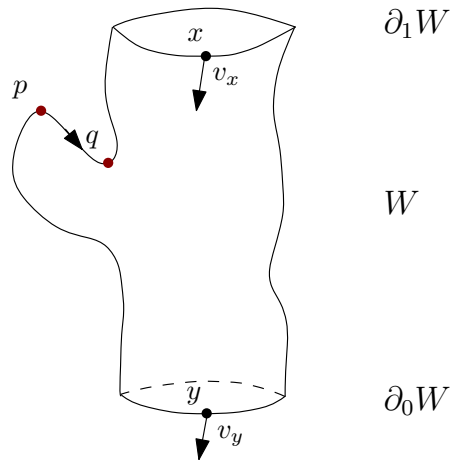


Figura 4.1: Cobordismo com campo vetorial normal.

O conjunto $W \setminus \partial W$ será denotado por W^0 . Cobordismos apresentam diferenças significativas em relação às variedades sem bordo, que consideramos a seguir.

Dado um ponto $x \in \partial W$, é possível considerar dois espaços tangentes $T_x W$ e $T_x \partial W$, onde o último é um espaço vetorial com uma dimensão a menos e contido no pri-

meiro. Dado $\phi : U \rightarrow W$ um sistema local de coordenadas tal que $\phi(0) = x$, definimos o **semi-espço superior** $H_x^+(W)$ como sendo a imagem de $\mathbb{H}^n$ sob a aplicação derivada $D\phi_x$. É possível demonstrar que $H_x^+(W)$ não depende do sistema de coordenadas. Similarmente definimos o **semi-espço inferior** $H_x^-(W)$, como a imagem de $-\mathbb{H}^n$ sob $D\phi_x$. Podemos pensar no espaço $H_x^+(W)$ como o espaço de vetores tangentes a curvas que "se iniciam" em x e o espaço $H_x^-(W)$ como o espaço de vetores tangentes a curvas que "terminam" em x . Observe que

$$T_x W = H_x^+(W) \cup H_x^-(W) \quad \text{e} \quad T_x \partial W = H_x^+(W) \cap H_x^-(W).$$

Dizemos que os vetores pertencentes a $H_x^+(W) \setminus T_x \partial W$ **apontam para dentro** de W e os vetores pertencentes a $H_x^-(W) \setminus T_x \partial W$ **apontam para fora** de W . Um campo vetorial v em um cobordismo é **normal** se para todo ponto x de $\partial_0 W$ o vetor v_x aponta para fora, e para todo ponto y de $\partial_1 W$ o vetor v_y aponta para dentro. Isso implica que toda linha de fluxo de um campo vetorial normal intersecta $\partial_0 W$ (ou $\partial_1 W$) apenas uma vez. No caso de cobordismos, existem quatro possibilidades para os domínios das linhas de fluxo de um campo normal:

- 1) $\mathbb{R}$.
- 2) $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.
- 3) $[b, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$.
- 4) $[a, b]$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

No primeiro caso, a linha de fluxo permanece sempre em W^0 . No segundo, a linha "termina" em $\partial_0 W$. No terceiro a linha "começa" em $\partial_1 W$ e no quarto caso ela começa em $\partial_1 W$ e termina em $\partial_0 W$.

A Figura 4.2 ilustra um fluxo em um cobordismo em que γ_0 tem domínio $\mathbb{R}$, γ_1 tem domínio $(-\infty, b]$, γ_2 tem domínio $[a, \infty)$ e γ_3 domínio $[a, b]$. Definimos a seguir funções de Morse em cobordismos.

Definição 4.2 Sejam W um cobordismo e $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ . Dizemos que f é **função de Morse no cobordismo** W se existirem números reais $a < b$ de tal maneira que:

- (1) $f(W) = [a, b]$, $f^{-1}(b) = \partial_1 W$, $f^{-1}(a) = \partial_0 W$
- (2) $Df_x \neq 0$ sempre que $x \in \partial W$
- (3) Todos os pontos críticos de $f|_{W^0}$ são não degenerados.

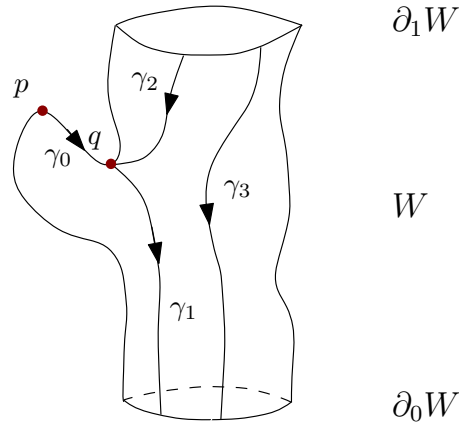


Figura 4.2: Linhas de fluxo de um campo vetorial normal num cobordismo.

Definição 4.3 Seja M uma variedade compacta sem bordo ou um cobordismo e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Um campo vetorial diferenciável v é chamado **f -gradiente** se satisfaz:

$$Df_x(v_x) < 0 \text{ sempre que } x \notin S(f)$$

e todo $p \in S(f)$ é um máximo não-degenerado da função $\phi(x) = Df_x(v_x)$.

Campos f -gradientes constituem uma generalização de gradientes Riemannianos, ou seja, todo gradiente Riemanniano é um f -gradiente. Deste modo, a teoria desenvolvida neste capítulo constitui de uma generalização da teoria desenvolvida no capítulo anterior, focada em variedades compactas, sem bordo (bordo nulo) e gradientes Riemannianos de uma função de Morse.

Observe que um campo f -gradiente é normal pois mantém como característica principal o decrescimento da função f e ao longo das linhas de fluxo (embora este possa ser um fluxo diferente do gerado pelo gradiente Riemanniano da função f). Mostraremos adiante que, para funções de Morse em cobordismos, as linhas de fluxo geradas por um campo f -gradiente v ou "terminam" em $\partial_0 M$ ou convergem para um ponto crítico de f .

Assim, a Proposição 3.8 e o Teorema 3.9 não se aplicam, pois os conjuntos α -limites e ω -limite podem apresentar comportamentos irregulares ou sequer existir em determinados pontos. Acrescentamos a seguir uma definição de variedades estáveis e instáveis que também é válida para cobordismos. Denotaremos por $\varphi(*, t; v)$ o fluxo associado ao campo f -gradiente v .

Definição 4.4 Sejam $f : W \rightarrow [a, b]$ função de Morse em um cobordismo W e v um campo f -gradiente. Seja p um ponto crítico de f . Definimos a **variedade estável** e a **variedade instável** de p (com respeito a v) por

$$W^s(p, v) = \{x \in W \mid \varphi(x, t; v) \rightarrow p \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$$

$$W^u(p, v) = \{x \in W \mid \varphi(x, t; v) \rightarrow p \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

respectivamente.

O próximo resultado estabelece que $W^s(p; v)$ é de fato variedade, que pode ser com ou sem bordo. Além disso, quando há bordo, ele está contido em $\partial_1 W$.

Teorema 4.5 (Variedade estável para cobordismos) *Sejam $f : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse num cobordismo, v um campo f -gradiente e p um ponto crítico de f . Então $W^s(p, v)$ é subvariedade de W , que pode ser com ou sem bordo. Caso haja bordo temos que $\partial W^s(p, v) = W^s(p, v) \cap \partial_1 W$.*

As ideias principais da demonstração do Teorema 4.5 são apresentadas na próxima seção.

4.2 Teorema da variedade estável para cobordismos

4.2.1 Teoria local

Nesta seção desenvolvemos uma teoria local para funções de Morse em cobordismos. Os resultados apresentados são utilizados na prova do Teorema 4.5. Começamos estabelecendo uma relação essencial dos campos f -gradientes com os pontos críticos de uma função de Morse.

Teorema 4.6 *Seja M uma variedade n -dimensional, compacta, sem bordo ou um cobordismo. Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse, v um campo f -gradiente e $p \in S(f)$. Então $v_p = 0$.*

Prova: Sejam $U \subset M$ aberto, $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ uma carta de Morse para f em p e $w = \phi_* v$ o pushforward de v . O Lema 3.2, nos diz que a função $f \circ \phi^{-1} - f(p)$ é igual a função $\mathcal{L}_k(x, y) = -\|x\|^2 + \|y\|^2$; $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^{n-k}$, onde $k = \text{ind}_f p$. Como v é campo f -gradiente temos que $D\mathcal{L}_k(x, y)(w(x, y)) < 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Precisamos

provar que $w(0,0) = 0$. Seja $w(0,0) = (\xi, \eta)$, e escreva para $x \in \mathbb{R}^k$

$$w(x,0) = (\xi + \mathcal{O}_1(x), \eta + \mathcal{O}_2(x)),$$

onde $\|\mathcal{O}_i(x)\| \leq C \|x\|$ ao redor de zero. Temos portanto

$$D\mathcal{L}_k(x,0)(w(x,0)) = -\langle 2x, \xi + \mathcal{O}_1(x) \rangle \geq 0,$$

para todo x . Em particular, para o caso $x = t\xi$, com $t \rightarrow 0$, vemos que a equação acima só será válida caso $\xi = 0$. A prova que $\eta = 0$ é análoga. $\square$

Dados um campo vetorial v e $p \in M$, seja $\phi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ uma carta de Morse ao redor de p . Se $w = \phi_*v$ é o pushforward de v por ϕ , é possível definir uma aplicação linear $Dv_p : T_pW \rightarrow T_pW$ tal que para todo $h \in T_pW$:

$$D\phi_p(Dv_p(h)) = Dw_{\phi(p)}(D\phi_p(h)),$$

onde $Dw_{\phi(p)}$ é a derivada do campo de vetores w em $\mathbb{R}^n$ no ponto $\phi(p)$. Podemos pensar na aplicação Dv_p como uma generalização da derivada do campo de vetores, definida agora no contexto de variedades diferenciáveis. Chamaremos a aplicação Dv_p de **diferencial** do campo de vetores v no ponto p . Note que a aplicação diferencial está bem definida e não depende de sistema de coordenadas.

Munidos da aplicação diferencial, consideramos a seguinte útil caracterização de campos f -gradientes.

Proposição 4.7 *Seja M uma variedade compacta sem bordo ou um cobordismo e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Um campo vetorial diferenciável v é f -gradiente se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. *Para todo $x \notin S(f)$ temos $Df_x(v_x) < 0$;*
2. *Para todo $p \in S(f)$ temos $H_p^f(Dv_p(w_p), w_p) < 0$ para todo $w_p \in T_pM$, $w_p \neq 0$, onde H_p^f é o funcional bilinear simétrico definido no capítulo anterior.*

Usamos a aplicação diferencial a seguir para definir o conceito de **zero elementar**.

Um operador linear é **elementar** se não possuir autovalores com parte real nula, ou seja, seu espectro de autovalores é disjunto do eixo imaginário. É chamado de

elementar negativo (respectivamente **elementar positivo**) se a parte real de todo autovalor é estritamente negativa (respectivamente estritamente positiva). Um operador linear é **hiperbólico** se não possuir autovalores de norma igual a 1, ou seja, seu espectro de autovalores é disjunto do círculo S^1 . Note que um campo de vetores linear é elementar se, e somente se, o fluxo que gera é hiperbólico. Um zero p de um campo vetorial v em uma variedade M é chamado **elementar** (respectivamente **hiperbólico**) se a diferencial Dv_p é uma aplicação linear elementar (respectivamente hiperbólica) em T_pM .

Seja $L : E \rightarrow E$ uma aplicação linear elementar ou hiperbólica em um espaço vetorial E . Pode-se demonstrar nos dois casos que o espaço E se decompõe de forma única como $E = E^- \oplus E^+$ em espaços vetoriais L -invariantes, tais que $L|_{E^-} : E^- \rightarrow E^-$ é elementar negativa e $L|_{E^+} : E^+ \rightarrow E^+$ é elementar positiva (veja demonstração em [16]). O espaço E^- (respectivamente E^+) é chamado de **subespaço negativo** (respectivamente **subespaço positivo**) com respeito a L .

Dado v um campo vetorial em uma variedade M e p um zero elementar de v , os subespaços negativo e positivo de T_pM com respeito a Dv_p serão denotados por $T_p^-(M, v)$ e $T_p^+(M, v)$, respectivamente. O teorema a seguir caracteriza os subespaços positivos e negativos de T_pM em vizinhanças de zeros elementares de M .

Teorema 4.8 (Hadamard-Perron) *Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ um função de Morse em uma variedade n -dimensional M (com ou sem bordo), v um campo vetorial f -gradiente e p um zero elementar de v tal que $\text{ind}_f p = k$. Então existe uma vizinhança U de p , tal que*

- 1) $W^s(p, v|U)$ e $W^u(p, v|U)$ são subvariedades (com ou sem bordo) de U de dimensões $n - k$ e k , respectivamente.
- 2) $W^s(p, v|U) \cap W^u(p, v|U) = \{p\}$.
- 3) $T_p W^s(p, v|U) = T_p^+(M, v)$ e $T_p W^u(p, v|U) = T_p^-(M, v)$.

O Teorema de Hadamard-Perron é assim uma versão local do Teorema 3.10. A demonstração é omitida pois utiliza ferramentas de análise funcional que não fazem parte da proposta desta dissertação. Sua demonstração pode ser vista em [8]. Como o Teorema de Hadamard-Perron garante a existência de variedades instáveis e estáveis locais em todos os zeros elementares de um campo vetorial v , usaremos este fato para concluir a demonstração do Teorema 4.5.

Sejam M um variedade sem bordo ou cobordismo, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e v um campo f -gradiente. O próximo resultado, aliado ao Teorema 4.6, garante que podemos aplicar o Teorema de Hadamard-Perron nos pontos críticos de f .

Teorema 4.9 *Todo ponto crítico de f é elementar.*

Ideia: Seja $p \in S(f)$. Assumindo que a complexificação de Dv_p possui autovetor w_p com autovalor puramente imaginário da forma $i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos $\alpha = w_p + \overline{w_p}$ e $\beta = i(w_p - \overline{w_p})$. Teremos então $Dv_p(\alpha) = \lambda\beta$, $Dv_p(\beta) = -\lambda\alpha$ e $H_p^f(Dv_p(\alpha), \alpha) = -H_p^f(Dv_p(\beta), \beta)$. Utilizando a condição $H_p^f(Dv_p(w_p), w_p) < 0$, dada pela Proposição 4.7, é possível concluir que $\alpha = \beta = 0$, o que nos leva a uma contradição, provando que a aplicação Dv_p é elementar. $\square$

Deste modo, o Teorema 4.9 garante a existência das variedades estáveis e instáveis locais para todo ponto crítico $p \in S(f)$. Munidos do resultado local, prosseguimos em direção à prova do Teorema 4.5, o resultado global.

4.2.2 Teoria global

Esta seção é dedicada ao estudo das variedades estáveis e instáveis num cobordismo. Usamos o Teorema de Hadamard-Perron para provar o Teorema 4.5, o qual garante que as variedades instáveis e estáveis num cobordismo são, de fato, variedades com bordo e mostramos adicionalmente uma caracterização delas como discos, que podem ser abertos ou fechados, dependendo do fluxo ao redor dos pontos críticos. Definimos a seguir uma ferramenta que desempenhará um papel importante em nosso estudo.

Definição 4.10 Seja $f : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse num cobordismo W e v um campo f -gradiente. Seja p um ponto crítico de f . Uma vizinhança compacta K de p é chamada **locker para (f, v) em p** , se a seguinte propriedade for satisfeita: se $x \in \text{Int } K$ e para algum $t \geq 0$ tivermos $\varphi(x, t; v) \notin K$, então existe $t_0 \in [0, t]$ tal que $\varphi(x, t_0; v) \in K$ e $f(\varphi(x, t_0; v)) < f(p)$.

Em algumas referências o locker é também conhecidos como **vizinhança isolante**. Não é difícil construir lockers para pares do tipo $(\mathcal{L}_k, \mathcal{A}_k)$, onde $\mathcal{L}_k$ é definida em $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ pela fórmula

$$\mathcal{L}_k(x, y) = -\|x\|^2 + \|y\|^2, \quad \text{onde } x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^{n-k}$$

e $\mathcal{A}_k(x, y) = (x, -y)$. Nesse caso a fórmula explícita do fluxo é $(x(t), y(t)) = (e^{-t}x(0), e^t y(0))$, e verifica-se que o quadrado fechado $Q(r) = D^k(0, r) \times D^{n-k}(0, r)$ é um locker para $(\mathcal{L}_k, \mathcal{A}_k)$ em $(0, 0)$, conforme pode ser observado na Figura 4.3.

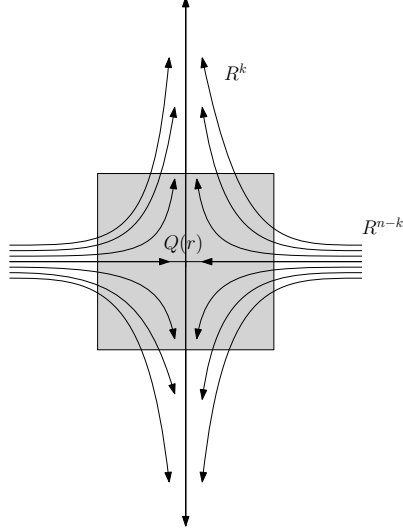


Figura 4.3: Locker para $(\mathcal{L}_k, \mathcal{A}_k)$ em $(0, 0)$.

É possível adaptar este exemplo para garantir que dada uma função f de Morse num cobordismo W e v um f -gradiente, para todo ponto crítico p de índice de Morse k e toda vizinhança aberta V de p existe um locker $K \subset V$ para (f, v) em p . Uma aplicação interessante de locker é dada pela proposição a seguir.

Proposição 4.11 *Seja $f : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse em um cobordismo W e v um campo f -gradiente. Então toda linha de fluxo $\varphi(*, t; v)$ do fluxo gerado por v ou atinge $\partial_0 W$ ou converge para um ponto crítico de f .*

Prova: Suponha que alguma linha de fluxo $\varphi(t; v)$ não atinja $\partial_0 W$. Então seu domínio de definição não é limitado superiormente e isso implica que o conjunto dos pontos críticos $S(f)$ é não vazio. De fato, se f não possuísse pontos críticos, então a função $\phi(x) = Df_x(v_x)$ não tem zeros e é limitada superiormente por alguma constante estritamente negativa $-C$. Logo, $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))v_{\varphi(t)} \leq -C < 0$ para todo t e $f(\varphi(t)) \rightarrow -\infty$ quanto $t \rightarrow \infty$, o que é impossível.

Tomemos, portanto, um ponto crítico $p \in S(f)$. Usando um argumento similar ao que acabamos de usar, é possível mostrar que para cada vizinhança U de p existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(T) \in U$. Logo, existe uma sequência t_n (não constante) tal que $\varphi(t_n) \rightarrow p$ quando $t_n \rightarrow \infty$ e isso implica que $f(\varphi(t))$ é função estritamente decrescente de t e $f(p) < f(\varphi(t))$, para todo t . Seja agora K um locker para (f, v) em p . Para

algum n o ponto $\varphi(t_n)$ está no interior de K e, portanto $\varphi(t) \in K$, para todo $t \geq t_n$ (de outro modo $f(\varphi(t)) < f(p)$ para algum $t \in \mathbb{R}$, pela definição de locker). Escolhendo lockers arbitrariamente pequenos, concluímos que $\varphi(t; v) \rightarrow p$. $\square$

Os lockers nos garantem adicionalmente que, dados f uma função de Morse num cobordismo W n -dimensional e v um campo vetorial f -gradiente, para todo ponto crítico p de índice de Morse k existe uma vizinhança V de p tal que $W^s(p, v) \cap V$ é subvariedade de V de dimensão $n - k$. Para isso basta tomarmos V como sendo o interior de um locker $K \subset U$ para (f, v) em p , onde U é uma vizinhança satisfazendo as condições do Teorema de Hadarmard-Perron. Dessa forma $W^s(p, v|U)$ será variedade e teremos a validade da igualdade

$$W^s(p, v|U) \cap \text{Int } K = W^s(p, v) \cap \text{Int } K.$$

A inclusão da esquerda para direita é óbvia e a inclusão inversa segue das propriedades do locker. De fato, dado $x \in W^s(p, v) \cap \text{Int } K$, a trajetória $\varphi(x, \cdot; v)$ converge para p e em nenhum momento pode sair de K (pois como K é locker, se a trajetória de x sai de K , em algum momento t_0 teríamos $f(\varphi(x, t_0; v)) < f(p)$, o que é absurdo, pois f decresce ao longo das linhas de fluxo). Logo $\varphi(x, t; v)$ permanece sempre em K e converge para p quando $t \rightarrow \infty$, o que significa que $x \in W^s(p, v|U) \cap \text{Int } K$. Usamos este fato para demonstrar o Teorema da Variedade Estável para o interior do cobordismo na proposição a seguir.

Proposição 4.12 *O conjunto $W^s(p, v) \cap W^0$ é subvariedade de W^0 de dimensão $n - k$, onde $k = \text{ind}_f p$.*

Prova: Sejam $x \in W^s(p, v) \cap W^0$, $x \neq p$ e V vizinhança de p como nas considerações anteriores. Escolha T suficientemente grande de tal modo que $\varphi(x, T; v) \in V$. A aplicação $y \mapsto \varphi(y, T; v)$ é um difeomorfismo de uma vizinhança Q de x para uma vizinhança $Q' \subset V$ de $x' = \varphi(x, T; v)$ que mapeia $Q \cap W^s(p, v)$ em $Q' \cap W^s(p, v)$. Como $Q' \cap W^s(p, v)$ é subvariedade de Q' , o resultado está provado. $\square$

Para finalizar a prova do Teorema 4.5, resta considerar a estrutura local de $W^s(p, v)$ ao redor do bordo $\partial_1 M$. Para isso, faremos uso do seguinte lema.

Lema 4.13 *Seja $D_1 = W^s(p, v) \cap \partial_1 W$. Seja $W' = f^{-1}([c, b])$ onde o intervalo $[c, b]$ não*

contém valores críticos de f . Então existe um difeomorfismo

$$G : \partial_1 W \times [c, b] \rightarrow W'$$

tal que:

1. $G(D_1 \times [c, b]) = W' \cap W^s(p, v)$
2. $f \circ G$ é igual a projeção $\partial_1 W \times [c, b] \rightarrow [c, b]$.

Prova: Considere o caso em que $Df_x(v_x) = -1$ para todo $x \in W'$. Essa condição garante que a função f decresce de forma constante ao longo das linhas de fluxo de v . Nesse caso a aplicação $G : \partial_1 W \times [c, b] \rightarrow W'$ definida por $G(x, t) = \varphi(x, b - t; v)$ satisfaz as condições do enunciado. Sua inversa é definida do seguinte modo: dado um ponto $y \in W'$, temos que $f(y) = t_0$ para algum $t_0 \in [c, b]$. Podemos "retornar" através do fluxo $\varphi(y, t; v)$ até o "ponto de origem" $x \in \partial_1 W$. Usando o fato do decrescimento de f ao longo das linhas de fluxo se dar em velocidade constante e sabendo que $f(x) - f(y) = b - t_0$, identificamos ponto y como sendo $\varphi(x, b - t_0; v)$. Desta forma fica bem definida a função inversa $y \rightarrow (x, t_0)$. Todos os outros casos se resumem a este, pois dado um campo f -gradiente v , é possível encontrar um campo f -gradiente w tal que $W^s(p, v) = W^s(p, w)$ e $Df_x(w_x) = -1$ para todo $x \in W'$. Para isto basta tomarmos $w = h \cdot v$ onde $h : W \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função estritamente positiva com

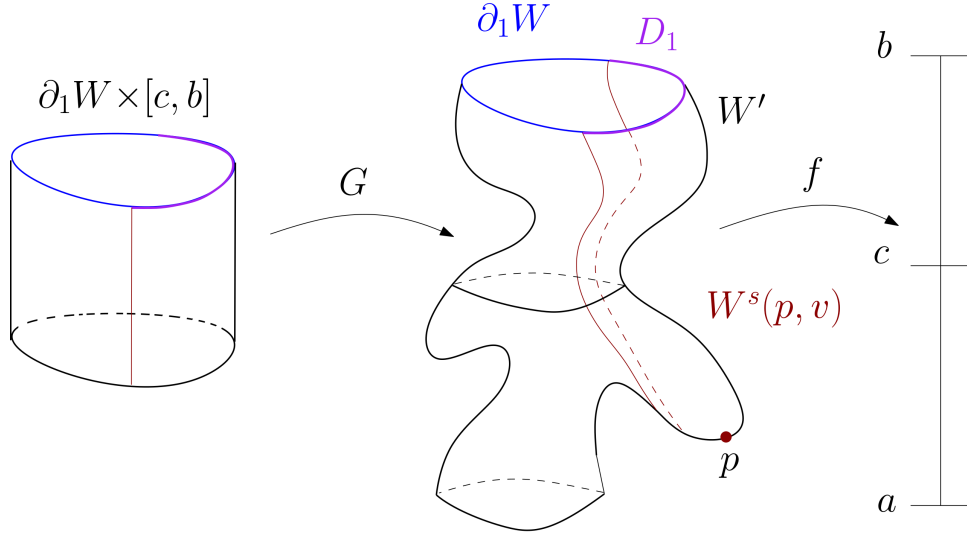
$$h(x) = (Df_x(v_x))^{-1} \text{ para } x \text{ numa vizinhança de } W'$$

e $h(x) = -1$ para x em uma vizinhança de $S(f)$. □

Munidos do Lema 4.13, completamos a demonstração do Teorema da Variedade Estável para cobordismos.

Prova do Teorema 4.5 (conclusão): Seja $D_1 = W^s(p, v) \cap \partial_1 M$. Escolha $c \in (a, b)$ de tal forma que o intervalo $[c, b]$ não contem valores críticos, e seja $U = f^{-1}((c, b])$. Note que U é variedade com bordo, $\partial U = \partial_1 W$. Considere o difeomorfismo G do lema anterior. Temos que G restrito a $D_1 \times (c, b]$ é difeomorfismo de $D_1 \times (c, b]$ em $W^s(p, v) \cap U$. Como $D_1 \times (c, b]$ é subvariedade com bordo de $\partial_1 W \times (c, b]$, concluímos que $W^s(p, v) \cap U$ é uma subvariedade com o mesmo bordo de U . □

Mostramos na proposição a seguir que a variedade estável $W^s(p, v)$ é, adicionalmente, localmente difeomorfa a um disco fechado.


 Figura 4.4: Difeomorfismo $G : \partial_1 W \times [c, b] \rightarrow W'$.

Proposição 4.14 *Sejam $f : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse no cobordismo W , v um f -gradiente e p um ponto crítico de f de índice k . Seja $c = f(p)$. Então, para ϵ suficientemente pequeno, o conjunto $\Delta_\epsilon = W^s(p, v) \cap f^{-1}([c, c + \epsilon])$ é variedade com bordo difeomorfa ao disco fechado $(n - k)$ -dimensional D^{n-k} .*

Prova: Denote a restrição de f a $W^s(p, v) \cap W^0$ por g . Para todo $x \in W^s(p, v)$ a função f é estritamente decrescente ao longo da linha de fluxo $\varphi(x, t; v)$, que se aproxima de p conforme $t \rightarrow \infty$. Logo g possui um mínimo não degenerado em p . Segue do Lema 3.2 que Δ_ϵ é variedade com bordo difeomorfa a D^{n-k} . $\square$

Considerando-se o fluxo invertido gerado por $-v$ mostra-se que o mesmo resultado é válido para a variedade estável $W^u(p, v)$, que é localmente difeomorfa ao disco fechado k -dimensional D^k .

Corolário 4.15 $W^s(p, v)$ é contrátil.

Prova: Vamos demonstrar que Δ_ϵ e $W^s(p, v)$ são homotopicamente equivalentes. Para todo $x \in W^s(p, v) \setminus \Delta_\epsilon$, seja $\tau(x, v)$ o momento em que a linha de fluxo $\varphi(x, v)$ intersecta Δ_ϵ . A função τ é contínua, conforme será mostrado no Teorema 4.16. Defina agora o retrato de deformação forte

$$H : W^s(p, v) \times [0, 1] \rightarrow \Delta_\epsilon$$

pela fórmula $H(x, \theta) = \varphi(x, \theta \cdot \tau(x, v); v)$ para $x \notin \Delta_\epsilon$ e $H(x, \theta) = x$ para $x \in \Delta_\epsilon$. $\square$

Seja v um campo vetorial normal. Dado $x \in W$, definimos por $\tau(x, v)$ o momento em que a linha de fluxo $\varphi(x, \cdot; v)$ intersecta $\partial_0 W$. Denote por $\mathcal{F} \subset W$ o conjunto dos pontos $x \in W$ para os quais a função $\tau(x, v)$ está definida. Para $x \in \mathcal{F}$ seja $E(x)$ o ponto de intersecção de $\varphi(x, t; v)$ com $\partial_0 W$, ou seja,

$$E(x) = \varphi(x, \tau(x, v); v) \in \partial_0 W.$$

Chamamos a função $E : \mathcal{F} \rightarrow \partial_0 W$ de **função de fechamento**.

Teorema 4.16 *$\mathcal{F}$ é aberto em W e as funções $\tau : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ e $E : \mathcal{F} \rightarrow W$ são contínuas.*

Prova: Provemos primeiramente que $\mathcal{F}$ é aberto. Dado $x \in \mathcal{F}$ mostramos que existe um aberto U contendo x tal que $U \subset \mathcal{F}$. Denote por $\mathcal{D}$ o conjunto dos pares (x, t) tais que o domínio de definição de $\varphi(x, \cdot; v)$ contém o intervalo $[0, t]$. Se $x \in \mathcal{F}$ então o domínio de definição de $\varphi(x, \cdot; v)$ é limitado superiormente por $\tau(x, v)$. Tomando $t_0 > \tau(x, v)$ o domínio de definição de $\varphi(x, \cdot; v)$ não contém $[0, t_0]$ e $(x, t_0) \notin \mathcal{D}$. Para mostrar que $\mathcal{F}$ é aberto, basta mostrar que $\mathcal{D}$ é fechado. De fato, supondo que $\mathcal{D}$ seja fechado em $W \times \mathbb{R}$, munido da topologia produto, existem abertos $U_W \subset W$ e $U_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$ tais que $x \in U_W$, $t_0 \in U_{\mathbb{R}}$ e $U_W \times U_{\mathbb{R}} \subset W \times \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}$. Segue que $U_W \subset \mathcal{F}$ pois dado $(y, t_0) \in U_W \times U_{\mathbb{R}}$ o domínio de $\varphi(y, \cdot; v)$ não contém $[0, t_0]$ e portanto existe $t_1 < t_0$ tal que t_1 é limite superior do domínio de definição de $\varphi(y, \cdot; v)$, logo $\varphi(y, \cdot; v)$ alcança $\partial_0 W$ em algum momento e $y \in \mathcal{F}$. Mostremos agora que $\mathcal{D}$ é fechado.

Definindo $\mathcal{D}_0(W) = \{(x, t) \in \mathcal{D} : t \geq 0\}$ e $\mathcal{D}_1(W) = \{(x, t) \in \mathcal{D} : t \leq 0\}$, temos que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0(W) \cup \mathcal{D}_1(W)$ e é suficiente provar que $\mathcal{D}_0(W)$ e $\mathcal{D}_1(W)$ são fechados. Seja (x_n, t_n) sequência em $\mathcal{D}_0(W)$ convergindo ao ponto (x, t) . Mostremos que $(x, t) \in \mathcal{D}_0(W)$ e portanto $\mathcal{D}_0(W)$ é fechado. Suponha que $(x, t) \notin \mathcal{D}_0(W)$. Como $(x_n, t_n) \in \mathcal{D}_0(W)$, dado ϵ , existe N_1 tal que para todo $n > N_1$ o domínio de definição das linhas de fluxo $\varphi(x_n, \cdot; v)$ contém $[0, t_n]$. Como $t_n \rightarrow t$, dado $\epsilon > 0$, existe N_1 tal que para todo $n > N_1$ o domínio de definição de $\varphi(x_n, \cdot; v)$ contém o intervalo $[0, t - \epsilon]$. Por outro lado temos que $(x, t) \notin \mathcal{D}$ e, portanto, $\tau(x, v) < t$. Como $\varphi(x_n, t; v) \rightarrow \varphi(x, t; v)$, por propriedades de soluções aproximadas de equações diferenciais, a partir de algum momento N_2 teremos $|\tau(x, v) - \tau(x_n, v)| < t_n - \tau(x, v)$, para todo n . Tomando $N > N_1, N_2$, temos então que $\tau(x_N, v) < t_N$, o que é absurdo pois o domínio de definição de $\varphi(x_N, \cdot; v)$ contém $[0, t_N]$. Para o caso de $\mathcal{D}_1(W)$, basta notar que o homeomorfismo $(x, t) \rightarrow (x, -t)$ manda $\mathcal{D}_0(W)$ em $\mathcal{D}_1(W)$. Segue que $\mathcal{D}$ é fechado, logo $\mathcal{F}$ é aberto.

Com respeito a continuidade de τ , seja $x_n \in \mathcal{F}$ uma sequência convergindo a $x \in \mathcal{F}$.

Mostraremos que qualquer subsequência $\tau_{n_k} = \tau(x_{n_k}, v)$ converge necessariamente para $\tau(x, v)$.

A) Se $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{n_k} = \theta < \tau(x, v)$, então a sequência $(x_{n_k}, \tau_{n_k}) \in \mathcal{D}$ converge para $(x, \theta) \in \mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ é fechado, temos $\varphi(x, \theta; v) \in \partial_0 W$, o que é uma contradição, visto que $\theta < \tau(x, v)$.

B) Se $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{n_k} = \theta > \tau(x, v)$, então existe um $\alpha > \tau(x, v)$ tal que para todo n suficientemente grande os pontos (x_n, α) estão em $\mathcal{D}$ e, portanto, o ponto (x, α) está em $\mathcal{D}$, o que contradiz a condição $\varphi(x, \tau(x, v); v) \in \partial_0 W$. $\square$

4.3 Complexo de Morse em cobordismos

Tendo estabelecido que as variedades estáveis e instáveis em cobordismos são variedades com bordo (possivelmente vazio), estudamos nesta seção o caso em que essas variedades são transversais no sentido da definição a seguir.

Definição 4.17 Sejam $f : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse num cobordismo W e v um campo vetorial f -gradiente em M . Dizemos que v satisfaz a **condição de transversalidade** se $W^s(p, v) \pitchfork W^u(q, v)$ para quaisquer $p, q \in S(f)$.

Dizemos que o campo vetorial v é **transversal** se v satisfaz a condição de transversalidade. Não podemos afirmar que todo campo f -gradiente v é transversal, pois não temos nenhum resultado que estabeleça relações entre variedades estáveis e instáveis de diferentes pontos.

É possível demonstrar, entretanto, que a transversalidade é uma característica bastante "comum", ou seja, que o conjunto dos campos de vetores transversais é aberto e denso no conjunto dos campos de vetores em uma variedade. Logo, mesmo que o campo vetorial f -gradiente não seja transversal, arbitrariamente próximo a ele existe um outro campo que é. Assim, pode-se restringir a teoria de Morse em cobordismos para campos f -gradientes transversais sem grandes perdas de informação. Este fato é estabelecido pelo teorema a seguir, válido para uma função de Morse $f : W \rightarrow [a, b]$ num cobordismo W e munindo o conjunto $\mathcal{X}(W)$, dos campos de vetores diferenciáveis em W , com a topologia C^∞ .

Teorema 4.18 *O conjunto dos campos de vetores f -gradientes transversais é aberto e denso no conjunto dos campos de vetores f -gradientes em W .*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [15] e não será demonstrada porque utiliza ferramentas que fogem a proposta desta dissertação.

Seja $f : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse num cobordismo e v um campo f -gradiente satisfazendo a condição de transversalidade. Dados p e q em $S(f)$ tais que $\text{ind}_f(p) = k + 1$ e $\text{ind}_f(q) = k$, sejam

$$S^u(p, v) = W^u(p, v) \cap f^{-1}(a) \quad \text{e} \quad S^s(q, v) = W^s(q, v) \cap f^{-1}(a),$$

onde a é um valor regular de f entre $f(p)$ e $f(q)$. O espaço Moduli $\mathcal{M}_p^q$ é dado por $\mathcal{M}_p^q = S^u(p, v) \cap S^s(q, v)$.

Assumindo que não exista nenhum valor crítico entre $f(p)$ e $f(q)$, $\mathcal{M}_p^q$ fica definido sem ambiguidade e como consequência da transversalidade da intersecção segue que $\mathcal{M}_p^q$ é variedade de dimensão 0 e segue da compacidade que $\mathcal{M}_p^q$ que é um conjunto finito de pontos.

Nem sempre a função f satisfaz essas condições, entretanto. O que faremos a seguir, é alterar a função f ao redor de seus pontos críticos, aumentando ou diminuindo a sua velocidade de decrescimento, de modo a substituí-la por uma função de Morse $\phi : W \rightarrow [a, b]$ de tal que forma que o campo obtido seja ϕ -gradiente e o espaço moduli fique definido sem ambiguidade para ϕ . Feito isso, estará provado o seguinte teorema.

Teorema 4.19 *Se $\text{ind}_f p = \text{ind}_f q + 1$, então $\mathcal{M}_p^q$ não depende do valor regular escolhido e é um conjunto finito de pontos.*

Definição 4.20 [Função de Morse separada] Uma função de Morse $f : W \rightarrow [a, b]$ em um cobordismo W é **separada** se para quaisquer pontos distintos $p, q \in S(f)$, tivermos $f(p) \neq f(q)$.

Definição 4.21 [Função de Morse ajustada] Sejam $f : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse num cobordismo e v um campo f -gradiente. Uma função de Morse $g : W \rightarrow [\alpha, \beta]$ é **ajustada para** (f, v) se:

1. $S(g) = S(f)$
2. A função $f - g$ é constante em vizinhanças de $\partial_0 M$, $\partial_1 M$ e de cada ponto de $S(f)$.

3. v é g -gradiente.

Proposição 4.22 *Sejam $f : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse num cobordismo e v um campo f -gradiente. Então existe uma função de Morse separada $g : W \rightarrow [a, b]$ ajustada a (f, v) .*

O resultado segue como consequência do seguinte lema.

Lema 4.23 *Sejam $f : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse num cobordismo, $p \in S(f)$ e U uma vizinhança de p . Então para todo λ suficientemente pequeno existe uma função de Morse $g : W \rightarrow [a, b]$ tal que*

1. $\text{supp}(g - f) \subset U$.
2. $g(x) = f(x) + \lambda$, para x em uma vizinhança de p .
3. v é g -gradiente.

Prova: Sem perda de generalidade, podemos assumir que p é o único ponto crítico de f em $\overline{U}$. Escolha uma função diferenciável $h : W \rightarrow [a, b]$ tal que $\text{supp } h(x) \subset U$ e $h(x) = 1$ para x em uma vizinhança $U_0 \subset U$ de p . Seja $g(x) = f(x) + \lambda h(x)$. Fica claro que as condições 1 e 2 serão válidas, restando provar que g é função de Morse juntamente com a condição 3. Observe que

$$\text{supp } (Df_x - Dg_x) = \text{supp } Dh_x \subset U - U_0,$$

ou seja, os únicos pontos de g com derivada diferente de f pertencem ao conjunto $U - U_0$. Assim, se provarmos que g não possui pontos críticos nesse conjunto quando λ é suficientemente pequeno, g será função de Morse. Mas observe que existe $C > 0$ tal que

$$Df_x(v_x) < -C \quad \text{para } x \in \overline{U} - U_0.$$

Assim caso

$$|\lambda| \cdot \left(\sup_{x \in M} |D_x h(v_x)| \right) < \frac{C}{2}$$

teremos

$$Dg_x(v_x) < -\frac{C}{2} \quad \text{para } x \in \overline{U} - U_0.$$

Para esses valores de λ a derivada Dg_x não possui zeros em $\overline{U} - U_0$, provando a parte 3 do enunciado e completando a demonstração deste lema e da Proposição 4.22. $\square$

Para a próxima definição, denotaremos o disco Euclidiano fechado n -dimensional em W com centro em a e raio δ por $D_\delta(a)$, e o disco aberto por $B_\delta(a)$.

Definição 4.24 Para $p \in S(f)$ definimos

$$D_\delta(p, v) = \{x \in W \mid \exists t \geq 0 : \varphi(x, t; v) \in D_\delta(p)\}$$

$$B_\delta(p, v) = \{x \in W \mid \exists t \geq 0 : \varphi(x, t; v) \in B_\delta(p)\}$$

$$B_\delta(v) = \bigcup_{p \in S(f)} B_\delta(p, v)$$

$$D_\delta(v) = \bigcup_{p \in S(f)} D_\delta(p, v)$$

$$W^s(v) = \bigcup_{p \in S(f)} W^s(p, v)$$

$$W^u(v) = \bigcup_{p \in S(f)} W^u(p, v)$$

Podemos pensar nos conjuntos $B_\delta(p, v)$ e $D_\delta(p, v)$ como uma espécie de "alargamento" da variedade estável ou uma "variedade estável das bolas euclidianas" $B_\delta(p)$ e $D_\delta(p)$. Também faremos uso da seguinte notação

$$D_\delta(p, \pm v) = D_\delta(p, v) \cup D_\delta(p, -v) \quad \text{e} \quad W^{us}(p, v) = W^s(p, v) \cup W^u(p, v).$$

Para exemplificar esses conjuntos, considere o cobordismo W como na Figura 4.5, $f : W \rightarrow [a, b]$ a função altura e o campo v dado pelo gradiente negativo de f . A Figura 4.6 mostra o fluxo visto "por cima". As setas verticais representam $W^u(p, v)$ e as setas horizontais representam $W^s(p, v)$. O conjunto $B_\delta(p, \pm v)$ é representado pela área mais escura e o conjunto $D_\delta(p, \pm v)$ a mesma região incluindo a região pontilhada.

O que faremos no lema a seguir é mostrar que, quando a "região sombreada" $D(p, \pm v)$ não intersecta as variedades estáveis e instáveis de nenhum outro ponto crítico $q \in S(f)$, é possível aumentar ou diminuir a velocidade de decrescimento de f em $D(p, \pm v)$ de modo a construir uma função $g : W \rightarrow [a, b]$ que assuma no ponto crítico p o valor que quisermos. Esta alteração será realizada de modo que fora da "região sombreada" $f = g$.

Lema 4.25 *Sejam $f : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse num cobordismo e v um campo*

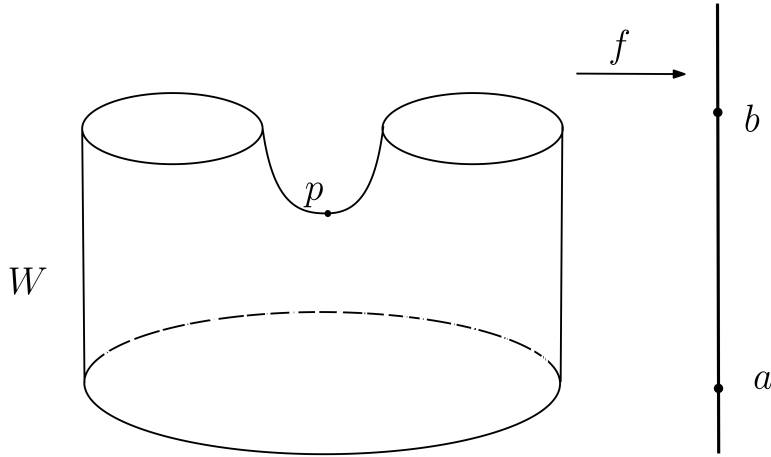


Figura 4.5: Função altura num cobordismo.

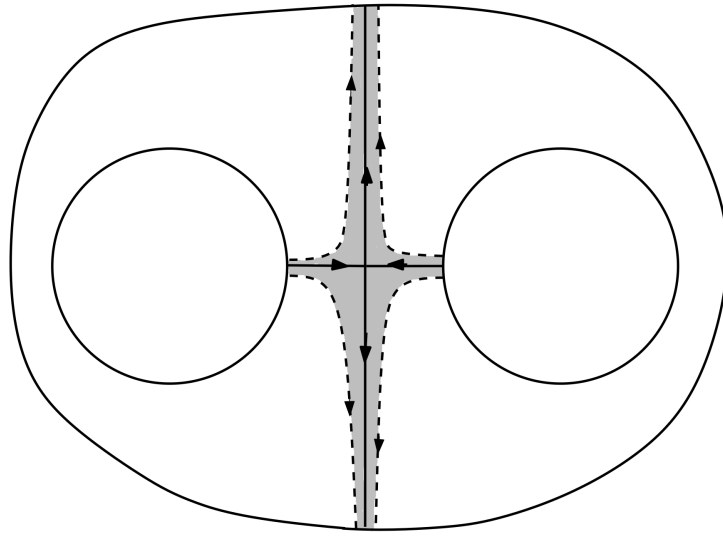


Figura 4.6: Visão de W "por cima".

f -gradiente. Sejam $p \in S(f)$ e $\delta > 0$. Suponha que

$$D_\delta(p, \pm v) \cap W^{us}(q, v) = \emptyset \quad \text{para todo } q \neq p.$$

Seja $0 < \nu < \delta$. Seja $[\mu, \xi] \subset [a, b]$ um intervalo e seja $c \in (\mu, \xi)$. Então existe uma função de Morse $g : M \rightarrow [a, b]$, ajustada a (f, ν) tal que

A) $f(x) = g(x)$ para $x \notin D_\delta(p, \pm \nu)$.

B) $g(p) = c$ e $g(D_\nu(p)) \subset (\mu, \xi)$.

Prova: A prova é construtiva. Vamos definir a função g em três conjuntos, cuja união é igual a W . Primeiramente considere o conjunto $W \setminus D_\delta(p, \pm \nu)$. Nesse con-

junto definimos $g(x) = f(x)$.

Para o conjunto $B_v(p, \pm v)$ escolha qualquer intervalo $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ tal que $f(D_\delta(p)) \subset (\alpha, \beta)$. Escolha um difeomorfismo $\lambda : [a, b] \rightarrow [a, b]$ com as seguintes propriedades:

1. $\lambda(t) = t$ para t em uma vizinhança de a e b ;
2. $\lambda([\alpha, \beta]) \subset (\mu, \xi)$;
3. $\lambda(f(p)) = c$ e $\lambda'(t) = 1$ em uma vizinhança de $f(p)$.

Um exemplo de difeomorfismo satisfazendo essas condições é mostrado na Figura 4.7.

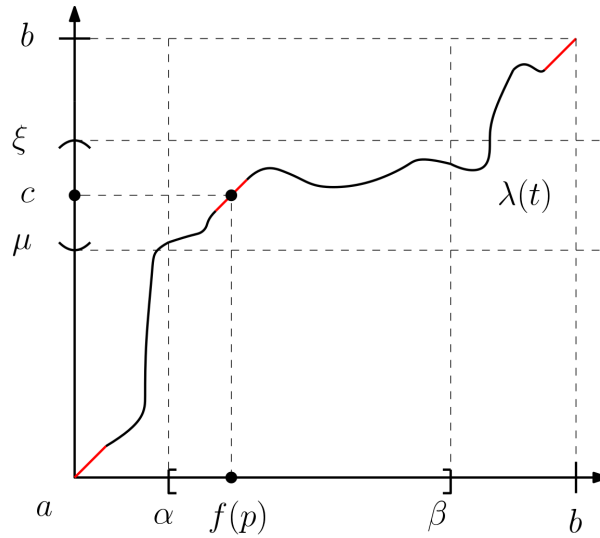
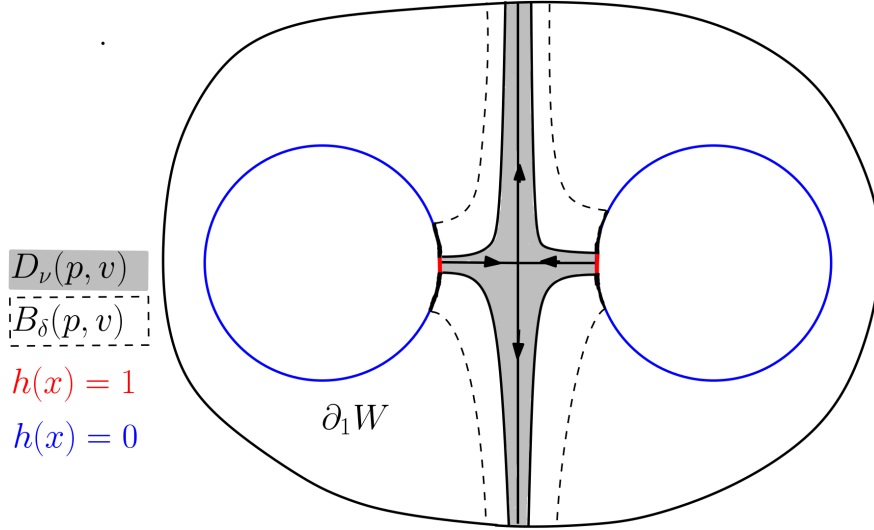


Figura 4.7: Difeomorfismo λ .

Definimos $g(x) = \lambda(f(x))$ em $B_v(p, \pm v)$, o que nos garante a segunda condição do lema.

Resta apenas definir a função g para o conjunto $X = D_\delta(p, \pm v) \setminus B_v(p, \pm v)$ de uma forma que ela seja compatível com a definição já estabelecida para os conjuntos anteriores, seja diferenciável e ajustada a (f, v) . Para isso, escolha uma função $h : \partial_1 W \rightarrow [0, 1]$ que satisfaça:

1. $h(x) = 1$, para $x \in D_v(p, v) \cap \partial_1 W$
2. $h(x) = 0$, para $x \notin B_\delta(p, v) \cap \partial_1 W$


 Figura 4.8: Função de extensão $h(x)$.

Ilustramos uma função desse tipo na Figura 4.8 para o cobordismo da Figura 4.5.

Definimos uma função $E_{-v} : W \rightarrow \partial_1 W$ da seguinte forma: dado $x \in W$, caso o intervalo de definição da linha de fluxo $\varphi(x, \cdot; -v)$ seja limitado superiormente, ela intersecta $\partial_1 W$ em algum momento $\tau(x, -v)$. Considerando o conjunto de pontos onde a função $x \rightarrow \tau(x, -v)$ é bem definida, denotamos por $E_{-v}(x)$ o ponto de intersecção com $\partial_1 W$, ou seja $E_{-v}(x) = \varphi(x, \tau(x, -v); -v) \in \partial_1 W$. Utilizando os mesmos argumentos da prova do Teorema 4.16, demonstra-se que, no conjunto onde está definida, a função $x \rightarrow E_{-v}(x)$ é contínua e diferenciável. Utilizamos esta função para estender a função h para W como a seguir:

1. $h(x) = 1$, para $x \in W^{us}(p, v)$;
2. $h(x) = 0$, para $x \in W^u(q, v)$ com $q \in S(f)$, $q \neq p$;
3. $h(x) = h(E_{-v}(x))$, para $x \notin W^u(v)$.

A última condição implica que a restrição de h a uma linha de fluxo φ é constante e seu valor na linha de fluxo é igual ao valor no ponto de intersecção de φ com $\partial_1 W$. Observe que no caso ilustrado na Figura 4.8, a condição 2 não se aplica, de modo que sobre as variedades estáveis e instáveis de p a função h assume valor 1 e será o mesmo caso para toda a área cinza. Entre a área cinza e a linha pontilhada, a função h decresce diferenciavelmente de 1 para 0, e fora da linha pontilhada ela se anula.

A função h é diferenciável pela diferenciabilidade da função $x \rightarrow E_{-v}(x)$ e a função g pode ser definida no conjunto W pela fórmula

$$g(x) = h(x) \cdot \lambda(f(x)) + (1 - h(x)) \cdot f(x).$$

Observe que esta fórmula é compatível com a definição já estabelecida para os conjuntos $W \setminus D(p, \pm v)$ e $B_v(p, \pm v)$. Além disso, h é constante em toda linha de fluxo com domínio $[\alpha, \beta]$. Como f e $\lambda(f(x))$ são estritamente decrescentes, então g também é estritamente decrescente e satisfaz

$$Dg_x(v_x) < 0, \quad \text{para todo } x \notin S(f),$$

sendo um g gradiente. A função g é diferenciável, é função de Morse e $f - g$ é constante numa vizinhança do bordo ∂W e de cada ponto crítico. Assim ficam satisfeitas as condições que garantem que g é uma função ajustada para (f, v) , completando a demonstração. □

Antes de enunciar o próximo resultado, adicionamos uma definição.

Definição 4.26 Sejam $f : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse num cobordismo e v um f -gradiente. Se não existem links entre os pontos críticos de f , então o par (f, v) é chamado de **elementar**, e o cobordismo W de **cobordismo elementar**.

Em cobordismos elementares é possível encontrar um $\delta > 0$ tal que, para todo $\theta < \delta$, os conjuntos $D_\theta(p, v)$ onde $p \in S(f)$ são subconjuntos de W compactos e disjuntos dois a dois. Logo, temos o seguinte corolário do Lema 4.25.

Teorema 4.27 (Lema do Rearranjamento) Sejam $f : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse num cobordismo e v um campo f -gradiente. Assuma que (f, v) é elementar. Seja $S(f) = \{p_1, \dots, p_k\}$ e sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ números reais arbitrários em (a, b) . Então existe uma função de Morse $g : M \rightarrow [a, b]$ ajustada a (f, v) tal que para todo i tenhamos $g(p_i) = \alpha_i$.

Prova: Indução no Lema 4.25. □

O Teorema 4.27 nos garante que, em cobordismos elementares, podemos escolher qualquer número real como imagem de pontos críticos. Faremos extenso uso desse resultado para provar o rearranjamento de funções em campos gradientes transversais. Queremos também ordenar esses valores e por isso será útil acrescentar a seguinte definição.

Definição 4.28 [Função de Morse ordenada] Uma **função de Morse ordenada** é uma função de Morse $\phi : W \rightarrow [a, b]$ num cobordismo juntamente com uma sequência $a_0, \dots, a_{n+1}$ de valores regulares (onde $n = \dim W$), tais que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$ e

$$S_i(f) \subset \phi^{-1}(]a_i, a_{i+1}[)$$

para todo i .

A sequência $a_0, \dots, a_{n+1}$ é chamada **sequência de ordenamento** para ϕ . O resultado seguinte servirá de base para a prova do Teorema 4.19.

Lema 4.29 *Sejam $f : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse num cobordismo e v um campo f -gradiente. Se v é transversal então existe uma função de Morse ordenada $\phi : W \rightarrow [a, b]$, que seja ajustada para (f, v) e, para todo k , o valor de ϕ em todos os seus pontos críticos de índice k seja o mesmo.*

Prova: A prova desse resultado é construtiva. Primeiramente, aplicamos a Proposição 4.22 para obter uma função de Morse g separada e ajustada a (f, v) . Dois pontos críticos de g serão chamados **vizinhos** se não houver valor crítico entre $g(p)$ e $g(q)$. Diremos que o par (p, q) é uma **inversão** quando $g(p) < g(q)$ e $\text{ind}_g p > \text{ind}_g q$. Para uma inversão (p, q) defina

$$W' = g^{-1}([g(p) - \epsilon, g(q) + \epsilon])$$

onde ϵ é suficientemente pequeno para que $g(p)$ e $g(q)$ sejam os únicos valores críticos de $g|_{W'}$. O par $(g|_{W'}, v|_{W'})$ é elementar, visto que v satisfaz a condição de transversalidade. Aplicando o Lema do Rearranjamento ao cobordismo W' , removemos esta inversão. Aplicando o mesmo procedimento várias vezes, terminamos com uma função de Morse h , ajustada a (f, v) e sem inversões. Logo a função h é ordenada e aplicando novamente o Lema do Rearranjamento podemos colocar todos os ponto críticos de índice i na mesma superfície de nível de f . $\square$

Finalmente temos as ferramentas necessárias para a prova do Teorema 4.19.

Prova do Teorema 4.19: Como o campo v satisfaz a condição de transversalidade, segue do Lema 4.29 que existe uma função de Morse ordenada ϕ ajustada a (f, v) para a qual v é um campo ϕ -gradiente. Seja $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$ a sequência ordenada de ϕ , onde $n = \dim W$. Sejam $k = \text{ind}_f(p)$ e $V = \phi^{-1}(a_k)$. Seja $S^u(p, v) = W^u(p, v) \cap V$ e $S^s(q, v) = W^s(q, v) \cap V$. $S^u(p, v)$ e $S^s(q, v)$ são subvariedades

compactas de V , difeomorfas às esferas de dimensões $k-1$ e $n-k-1$, respectivamente. Cada linha de fluxo ligando p a q intersecta V em exatamente um ponto e, logo, obtemos uma bijeção entre $\mathcal{M}_p^q$ e $S^u(p, v) \cap S^s(q, v)$. Como $S^u(p, v) \pitchfork S^s(q, v)$, concluímos que $\dim S^u(p, v) \cap S^s(q, v) = 0$ e como W^0 é compacto, $\mathcal{M}_p^q$ é um conjunto finito de pontos. $\square$

A orientação de $W^u(p, v)$ induz uma orientação em $S^u(p, v)$, a orientação de $W^s(q, v)$ induz uma orientação no fibrado normal de $W^s(q, v)$ e em $S^s(q, v)$. Assim, cada ponto de $\mathcal{M}_p^q$ adquire um sinal. Para uma linha de fluxo $\gamma \in \mathcal{M}_p^q$ denotaremos o sinal correspondente por $\epsilon(\gamma)$. É possível mostrar que o sinal de uma linha de fluxo não depende da escolha da função de Morse ordenada ϕ ajustada a (f, v) .

Definição 4.30 O inteiro

$$n(p, q; v) = \sum_{\gamma \in \mathcal{M}_p^q} \epsilon(\gamma)$$

é chamado de **número de intersecção entre p e q** com respeito a v .

Dados os grupos graduados $\mathcal{M}_k(f, v) := \bigoplus_{p \in S_k(f)} \mathbb{Z}\langle p \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, defina o homomorfismo $\partial_k : \mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{M}_{k-1}$ por

$$\partial_k p = \sum_{q \in S_{k-1}(f)} n(p, q; v) \cdot q.$$

Mostraremos agora que, analogamente ao caso de variedades fechadas e fluxos gradientes, temos um complexo de cadeias cuja homologia, agora relativa ao bordo $\partial_0 W$, é isomorfa à homologia singular do cobordismo W .

Teorema 4.31 Para todo k , a composição $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ e a homologia do complexo de cadeias correspondente é isomorfa a $H_*(W, \partial_0 W)$.

O complexo de cadeias resultante é denotado por $\mathcal{M}_*(f, v)$ e é chamado de **Complexo de Morse no cobordismo** do par (f, v) . Os pontos críticos de f definem uma base natural para $\mathcal{M}_*(f)$.

Observe que o complexo de Morse no cobordismo não depende da escolha da função f para qual v é f -gradiente. De fato, o operador bordo depende apenas das linhas de fluxo de v . Para provar o Teorema 4.31, construiremos uma filtração sobre o cobordismo W por meio de uma função de Morse ordenada e mostraremos que a filtração é celular. O Teorema 2.14 garante que o complexo celular resultante

possuirá homologia isomorfa a homologia singular relativa de $(W, \partial_0 W)$. Feito isso, estabeleceremos um isomorfismo entre este complexo celular e o complexo de Morse no cobordismo.

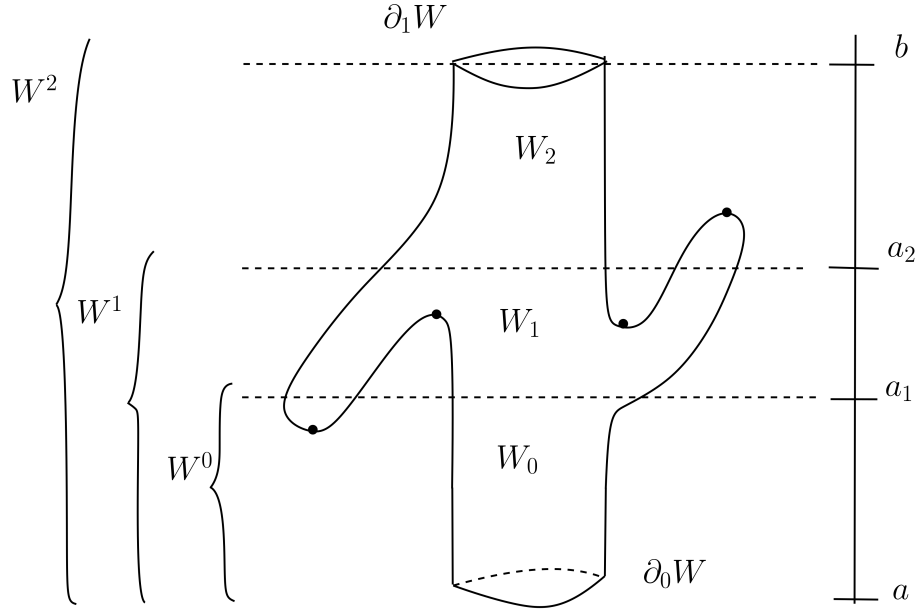


Figura 4.9: Filtração Morse-Smale de um cobordismo.

Sejam $\phi : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse ordenada e $(a_0, \dots, a_{n+1})$ sua sequência de ordenamento. Considere a filtração

$$\partial_0 W \subset W^0 \subset \dots \subset W^n$$

onde $W^k = \phi^{-1}([a, a_{k+1}])$. Chamaremos esta filtração de **filtração Morse-Smale**. Um exemplo de filtração Morse-Smale para $k \in \{0, 1, 2\}$ é exibido na Figura 4.9. O complexo celular associado será denotado por $C_*(\phi)$. Temos, por definição

$$C_k(\phi) = H_k(W^k, W^{k-1}).$$

Lema 4.32 *A filtração Morse-Smale é celular e $C_k(\phi)$ é um grupo abeliano livre gerado pelos pontos críticos de índice k de ϕ .*

Prova: Pelo Teorema da Excisão, temos

$$H_*(W^k, W^{k-1}) \simeq H_*(W_k, \partial_0 W_k),$$

onde $W_k = \phi^{-1}([a_k, a_{k+1}])$. Observe que W_k é um cobordismo elementar e o índice de

todo ponto crítico de $\phi|_{W_k}$ é igual a k . Considerando as variedades instáveis restritas ao cobordismo W_k , escrevemos

$$X = \partial_0 W_k \cup \bigcup_{p \in S_k(\phi)} W^u(p, v).$$

Sabendo que os conjuntos $W^u(p, v)$ são homeomorfos a discos nessas condições, temos que X é homeomorfo ao espaço obtido a partir de $\partial_0 W_k$ colando nele um número $|S_k(\phi)|$ de discos de dimensão k , um para cada ponto crítico de W_k . Temos que a inclusão $i : X \hookrightarrow W_k$ é uma equivalência homotópica.

De fato, defina a aplicação

$$L_t(x) = L(x, t) = \begin{cases} \varphi(x, t; v), & \text{se } t \leq \tau(x, v); \\ \varphi(x, \tau(x, v); v), & \text{se } t \geq \tau(x, v). \end{cases}$$

Provaremos que existe $T > 0$ tal que $L_t(W) \subset X$ para todo $t \geq T$ e que a aplicação $L_T : W_k \rightarrow X$ é a inversa homotópica da aplicação de inclusão i . Seja $U \subset W^s(v)$ aberto e tome $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $B_\delta(v) \subset U$. Assuma que não exista $t \geq 0$ tal que $L(x, t) \in \partial_0 W_k \cup B_\delta(v)$. Então para algum $x \in W_k \setminus B_\delta(v)$ a sua órbita não atinge $\partial_0 W_k$ e nem converge a um ponto crítico de ϕ , o que é impossível pela Proposição 4.11. Assim, $L_t(W) \subset X$ para todo $t \geq T$. A aplicação $L_T : W_k \rightarrow X$ é a inversa homotópica da aplicação de inclusão i pois $L_T \circ i : X \rightarrow X$ é igual a $L_T|_X$, que é homotópica a identidade em X pela homotopia $L_t|_X$ e a composição $i \circ L_T : W_k \rightarrow W_k$ é homotópica a identidade em W_k , pela homotopia L_t .

Assim, os grupos de homotopia de X e W_k , e por consequência seus grupos de homologia, são isomorfos. Por uma aplicação simples do Lema dos cinco, temos que a inclusão de pares $(X, \partial_0 W_k) \hookrightarrow (W_k, \partial_0 W_k)$ é uma equivalência homológica, isto é, induz um isomorfismo nos grupos de homologia dos pares. Logo $H_k(W_k, \partial_0 W_k) \simeq H_k(X, \partial_0 W_k)$ e concluímos que $H_k(W_k, \partial_0 W_k)$ é um grupo abeliano livre gerado pelo conjunto de pontos críticos de índice de Morse k . Vamos provar que a filtração Morse-Smale é celular.

Como para cada ponto crítico $p \in W_k$ temos o difeomorfismo de pares

$$(W^u(p, v), \partial W^u(p, v)) \simeq (D^k, S^{k-1}),$$

a orientação escolhida de $W^u(p, v)$ determina um gerador no grupo

$$H_k(W^u(p, v), \partial W^u(p, v)) \simeq \mathbb{Z}$$

e a imagem desse gerador com respeito ao homomorfismo induzido pela inclusão

$$H_k(W^u(p, v), \partial W^u(p, v)) \rightarrow H_k(W_k, \partial_0 W_k),$$

será denotada por d_p . A família $\{d_p : p \in S_k(f)\}$ constitui uma base para o grupo. Portanto, quando $i = k$, o grupo de homologia $H_i(W_k, \partial_0 W_k)$ é um grupo abeliano livre gerado pelas classes de homologia das variedades instáveis e quando $i \neq k$ $H_i(W_k, \partial_0 W_k) = 0$, completando a demonstração. □

Como filtrações celulares preservam a homologia singular do par $(W, \partial_0 W)$, temos como corolário o próximo teorema.

Teorema 4.33 *A homologia do complexo celular associado a filtração Morse-Smale $C_*(\phi)$ é isomorfa a $H_*(W, \partial_0 W)$.*

Podemos utilizar a base $\{d_p : p \in S_k(f)\}$ de $H_k(W_k, \partial_0 W_k)$, construída na prova do Lema 4.32, para associar um número inteiro a cada par (ω, p) , onde $\omega \in H_k(W_k, \partial_0 W_k)$ e $p \in S_k(f)$. Dados $f : W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse ordenada, v um campo f -gradiente orientado e $\omega \in H_k(W_k, \partial_0 W_k)$, podemos escrever

$$\omega = \sum_{p \in S_k(f)} m(\omega, p) d_p \text{ onde } m(\omega, p) \in \mathbb{Z}.$$

O inteiro $m(\omega, p)$ é chamado de **multiplicidade de ω em p** . Estamos interessados no cálculo da multiplicidade de uma classe particular em $H_k(W_k, \partial_0 W_k)$, que definimos a seguir.

Definição 4.34 Dadas M uma variedade orientada, sem bordo, n -dimensional e $U \subset M$, $\omega \in H_n(M, U)$ é **classe fundamental para (M, U)** se para todo $p \in M \setminus U$ a imagem de ω em $H_n(M, M \setminus p)$ é o gerador da orientação induzida nesse grupo (lembrando que $H_n(M, M \setminus p)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$).

Quando $M \setminus U$ é compacta, a classe fundamental existe e é única (veja [5]). Seja $f : (M, U) \rightarrow (A, B)$ uma aplicação contínua de pares. Caso $M \setminus U$ seja compacta, haverá classe fundamental em $H_n(M, U)$. Denotaremos a imagem desta classe fundamental

em $H_n(A, B)$ por $f_*([M])$ (ou simplesmente $[M]$, quando não houver necessidade de explicitar a função f).

O lema a seguir estabelece a possibilidade do cálculo da classe fundamental de uma variedade M a partir da restrição de f a uma subvariedade de M . Sua prova é simples e é omitida.

Lema 4.35 *Nas condições estabelecidas acima, sejam $N \subset M$, $\dim M = \dim N$ e $M \setminus U \subset N$. Então $f_*([M]) = (f|N)_*([N]) \in H_n(A, B)$.*

Seja $f : W \rightarrow [a, b]$ um função de Morse no cobordismo W e v um campo f -gradiente. Assuma que (f, v) é elementar e que todos os pontos críticos tem o mesmo índice k . Seja $N \subset \partial_1 W$ uma subvariedade compacta, sem bordo, k -dimensional, orientada e transversal a $S^s(p, v) = W^s(p, v) \cap \partial_1 W$, para todo p . Considere $(\partial_1 W, N) \rightarrow (W, \partial_1 W)$ a aplicação de pares dada pela inclusão de conjuntos. O lema a seguir relaciona a multiplicidade de $[N]$ em p com o número de intersecção entre N e $S^s(p, v)$, nos dando uma caracterização da classe fundamental $[N]$.

Lema 4.36 *Para todo p temos*

$$n(N, S^s(p, v)) = m([N], p) \quad e \quad [N] = \sum_{p \in S_k(f)} n(N, S^s(p, v)) d_p$$

Prova: Provaremos que $n(N, W^s(p, v)) = m([N], p)$ para uma subvariedade $N \subset W$ compacta, sem bordo, k -dimensional e transversal a $W^s(p, v)$ para todo ponto $p \in S_k(f)$. O caso $N \subset \partial_1 W$ segue observando que o número de intersecção $n(N, S^s(p, v))$ em $\partial_1 W$ é igual ao número de intersecção $n(N, W^s(p, v))$ em W . Sabemos que

$$N \cap W^s(v) \quad \text{onde } W^s(v) = \bigcup_{p \in S(f)} W^s(p, v)$$

e vamos supor que $N \cap W^s(v)$ é finito. Assim, o número de intersecção $n(N, W^s(p, v))$ está definido para todo p e a classe fundamental $[N] \in H_k(W, W \setminus W^s(v))$. Como a aplicação de inclusão $i : (W, \partial_1 W) \rightarrow (W, W \setminus W^s(v))$ é equivalência homotópica (por argumentos semelhantes aos da prova do Lema 4.32), os grupos de homologia $H_*(W, W \setminus W^s(v))$ são gerado pelos d_p 's (fazendo um abuso de notação). Provaremos que

$$[N] = \sum_{p \in S_k(f)} n(N, W^s(p, v)) d_p,$$

implicando no resultado.

Seja $a \in N \cap W^s(v)$. Como $N \pitchfork W^s(v)$ temos, por definição, que $T_a N \oplus T_a W^s(v) = T_a W$. Sabendo que $T_a W^s(v)$ é subespaço $(n-k)$ -dimensional, concluímos que a dimensão de $T_a N$ é igual a k . Logo, a diferencial Di_a da aplicação de inclusão $i : N \hookrightarrow W$ no ponto a é injetiva. Segue, pelo Teorema do Posto em variedades, que restrita a uma vizinhança pequena de a a inclusão i é um mergulho. Seja $B^k(0, r)$ o disco euclidiano aberto de dimensão k , de raio r e centrado em 0 em $\mathbb{R}^n$. Para cada $a \in N \cap W^s(v)$, escolha um mergulho $\phi_a : B^k(0, r) \rightarrow N$ tal que $\phi_a(0) = a$. Podemos assumir (diminuindo o raio r , se necessário) que ϕ_a é um mergulho que satisfaz

$$\phi_a(B^k(0, r)) \cap W^s(v) = \{a\}.$$

Podemos assumir adicionalmente que $a \in W^s(p, v)$ e que os fechos das imagens $Im \phi_a$ são disjuntos dois a dois, para diferentes pontos de $N \cap W^s(v)$. Segue do Lema 4.35 que a classe fundamental $[N]$ satisfaz

$$[N] = \sum_{a \in N \cap W^s(v)} (\phi_a)_*([B^k(0, r)]),$$

onde $[B^k(0, r)]$ representa a classe fundamental de $B^k(0, r)$ em $H_*(B^k(0, r), B^k(0, r) \setminus \{0\})$. Portanto, calculando a classe fundamental da imagem dos mergulhos ϕ_a 's, obtemos o resultado por linearidade. Faremos isso descendo $\phi_a(B^k(0, r))$ ao longo das linhas de fluxo de v para uma vizinhança de p , onde o cálculo da homologia será imediato.

Escolha um difeomorfismo $\psi : B^k(0, r_1) \times B^{n-k}(0, r_2) \rightarrow U$, onde U é uma vizinhança de p tal que $\psi(0, 0) = p$, $\psi(B^k(0, r_1)) = W^u(p, v) \cap U$, $\psi(B^{n-k}(0, r_2)) = W^s(p, v) \cap U$ e $\psi|_{B^k(0, r_1)}$ preserva orientação (identificando os conjuntos $B^k(0, r_1)$ e $B^{n-k}(0, r_2)$ com os subconjuntos $B^k(0, r_1) \times \{0\}$ e $\{0\} \times B^{n-k}(0, r_2)$ de $B^k(0, r_1) \times B^{n-k}(0, r_2)$, respectivamente). Observe que dado um subconjunto $N_1 \subset U$ transversal a $U \cap W^s(p, v)$, tomando a imagem do gerador de $H_k(B^k(0, r_1), B^k(0, r_1) \setminus \{0\})$ em $H_k(U, U \setminus W^s(p, v) \cap U)$ como base d_p (fazendo aqui um novo abuso de notação), a multiplicidade $m([N_1], p)$ da classe $[N_1] \in H_k(U, U \setminus W^s(p, v) \cap U)$ será igual ao número de intersecção $n(N_1, W^s(p, v) \cap U)$. Escolhendo $T > 0$ suficientemente grande tal que $\varphi(a, T; v) \in U$ e restringindo o raio r , caso necessário, podemos assumir que o conjunto $\varphi(\phi_a(B^k(0, r)), T; v) \in U$.

Definindo uma função $g : B^k(0, r) \rightarrow U$ pela seguinte fórmula

$$g(z) = \varphi(\phi_a(z), T; v),$$

teremos o seguinte diagrama de mergulhos

$$\begin{array}{ccc} (B^k(0, r), B^k(0, r) \setminus \{0\}) & & (B^k(0, r_1), B^k(0, r_1) \setminus \{0\}) \\ \downarrow g & & \downarrow \alpha \\ (U, U \setminus \psi(B^{n-k}(0, r_2))) & \xleftarrow[\psi]{\cong} & (B^k(0, r_1), B^k(0, r_1) \setminus \{0\}) \times B^{n-k}(0, r_2) \\ \downarrow J & & \\ (W, W \setminus W^s(v)), & & \end{array}$$

onde J é a aplicação de inclusão e α é o mergulho

$$\alpha(x, y) = (x \times 0, y \times 0).$$

Como a classe fundamental da variedade instável $W^u(p, v)$ em $H_*(W, W \setminus W^s(v))$ é igual a imagem da classe fundamental do par $(B^k(0, r_1), B^k(0, r_1) \setminus \{0\})$ sob a aplicação induzida por $(J \circ \psi \circ \alpha)$, a prova fica reduzida a demonstrar a seguinte igualdade

$$(\psi^{-1} \circ g)_*([B^k(0, r), B^k(0, r) \setminus \{0\}]) = \alpha_*([B^k(0, r_1), B^k(0, r_1) \setminus \{0\}]).$$

A aplicação $h = \psi^{-1} \circ g$ é um mergulho de $B^k(0, r)$ em $B^k(0, r_1) \times B^{n-k}(0, r_2)$ que intersecta $B^{n-k}(0, r_2)$ transversalmente em um ponto e o sinal da intersecção é positivo. Seja $\pi : B^k(0, r_1) \times B^{n-k}(0, r_2) \rightarrow B^k(0, r_1)$ a aplicação projeção. Como $h \pitchfork B^{n-k}(0, r_2)$ a composição $\pi \circ h$ é um difeomorfismo local em uma vizinhança de 0 que preserva orientação. Restringindo ψ ao produto $B^k(0, \rho_1) \times B^{n-k}(0, \rho_2)$ com apropriados $\rho_1 < r_1$ e $\rho_2 < r_2$ podemos assumir que $\pi \circ h$ também preserva orientação. Logo, temos

$$(\pi \circ h)_*([B^k(0, r), B^k(0, r) \setminus \{0\}]) = [B^k(0, r_1), B^k(0, r_1) \setminus \{0\}] = (\pi \circ \alpha)_*([B^k(0, r_1), B^k(0, r_1) \setminus \{0\}])$$

e como a aplicação

$$\pi : (B^k(0, r_1), B^k(0, r_1) \setminus \{0\}) \times B^{n-k}(0, r_2) \rightarrow (B^k(0, r_1), B^k(0, r_1) \setminus \{0\})$$

é uma equivalência homotópica de pares, a igualdade segue, completando a demonstração. $\square$

Munidos do Lema 4.36, provamos o Teorema 4.31 definindo um isomorfismo entre

o complexo de Morse e o complexo celular no resultado a seguir.

Teorema 4.37 *Seja o homomorfismo $I : \mathcal{M}_*(f, v) \rightarrow C_*(\phi, v)$ definido em cada ponto crítico por $I(p) = d_p(v)$. Então I é isomorfismo que comuta com os operadores bordos, ou seja, $I \circ \partial_k = \tilde{\partial}_k \circ I$. Em particular, $\mathcal{M}_*(f, v)$ é um complexo de cadeias e I é um isomorfismo de complexo de cadeias.*

Prova: Para $p \in S_k(f)$, escreva

$$\partial(p) = \sum_{q \in S_{k-1}(f)} n(p, q)q \quad e \quad \tilde{\partial}(d_p) = \sum_{q \in S_{k-1}(f)} v(p, q)d_q.$$

Provaremos que $n(p, q) = v(p, q)$. Sejam

$$V = \phi^{-1}(a_k), \quad S^u(p, v) = V \cap W^u(p, v) \quad e \quad S^s(q, v) = V \cap W^s(q, v).$$

Temos que $S^u(p, v)$ é uma subvariedade orientada de V $(k-1)$ -dimensional e sua classe fundamental $[S^u(p, v)] \in H_*(W^k, W^{k-1})$ é igual a $\tilde{\partial}(d_p)$, por definição. Mas sabemos pelo Lema 4.36 que

$$[S^u(p, v)] = \sum_{q \in S_{k-1}(f)} n(S^u(p, v), S^s(q, v))d_q,$$

o que completa a demonstração. □

Neste capítulo introduzimos a Teoria de Novikov, uma visão alternativa da Teoria de Morse para funções com imagem no círculo S^1 . Desenvolvemos a teoria à partir do pullback do recobrimento universal de $\mathbb{R}$ sobre S^1 com base em uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow S^1$ com finitos pontos críticos não degenerados. Obtemos assim uma função de Morse $F : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ no recobrimento cíclico infinito $\overline{M}$. Como a função F é equivariante com relação à ação de $\mathbb{Z}$ em $\overline{M}$, ou seja, $F(tx) = F(x) - 1$, onde t é o gerador de $\mathbb{Z}$, podemos restringir o estudo de F a um cobordismo particular e utilizar os resultados obtidos no capítulo anterior. Desta maneira constituímos o **Complexo de Novikov**, um análogo ao complexo de Morse para funções circulares e mostramos algumas de suas aplicações. As referências adotadas para este capítulo foram [15], [18] e [2].

5.1 Aplicações de Novikov

Sejam M uma variedade Riemanniana, compacta sem bordo, n -dimensional e $f : M \rightarrow S^1$ uma função diferenciável. Para qualquer ponto $x \in M$ é possível escolher uma vizinhança V de $f(x)$ difeomorfa a um intervalo em $\mathbb{R}$. Seja $U = f^{-1}(V)$. A aplicação f restrita a U é uma aplicação de U em $\mathbb{R}$. Logo, todas as noções locais da teoria de Morse, como pontos críticos não degenerados, matriz Hessiana e índices de pontos críticos, são estendidas naturalmente para aplicações de M em S^1 . Sem perda de generalidade, assumiremos que M é conexa por caminhos. Quando não for o caso, basta aplicamos os resultados deste capítulo para cada componente conexa por caminhos de M .

Definição 5.1 Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow S^1$ é chamada de **Aplicação de Novikov** se todos os seus pontos críticos forem não degenerados.

Continuaremos a denotar por $S(f)$ o conjunto dos pontos críticos de f e por $S_k(f)$ o conjunto dos pontos críticos de índice k , considerando esses conceitos agora no contexto de funções $f : M \rightarrow S^1$. Como M é compacta, tanto $S(f)$ como $S_k(f)$ são

conjuntos finitos de pontos.

Queremos aplicar os métodos da Teoria de Morse desenvolvidos no capítulo anterior para funções desse tipo. A abordagem que usaremos será considerar o recobrimento cíclico infinito $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ induzido pelo pullback do recobrimento universal de $\mathbb{R}$ sobre S^1 , dado por $Exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $Exp(t) = e^{2\pi it}$, com base em uma aplicação de Novikov $f : M \rightarrow S^1$. A função f levanta então para uma função F em $\overline{M} = f^*M$ de tal forma que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{M} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow Exp \\ M & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

comute. A função F é equivariante com relação à ação de $\mathbb{Z}$ em $\overline{M}$, ou seja, $F(tx) = F(x) - 1$, onde t é o gerador de $\mathbb{Z}$.

Sabemos que $\overline{M}$ possui estrutura diferenciável pelos Teoremas 2.25 e 2.27. Observe também que a função F será de Morse se, e somente se, f for de Novikov. Cada $p \in S(f)$ é levantado para uma coleção de infinita de pontos $t^i p \in S(F)$, $i \in \mathbb{Z}$, sendo que é definida uma ação de grupo natural de $\mathbb{Z}$ em $S(F)$ por $t^z(t^i p) = t^{i+z} p$. Definimos a seguir condições sobre o campo vetorial gerador da dinâmica que estudaremos.

Definição 5.2 Seja M uma variedade compacta, sem bordo e $f : M \rightarrow S^1$ uma aplicação de Novikov. Um campo vetorial C^∞ v é chamado de **f -gradiente** se:

- (A) Para todo $x \notin S(f)$ temos $Df_x(v_x) < 0$.
- (B) Para todo $p \in S(f)$ a função real $\phi(x) = Df_x(v_x)$ possui um ponto de máximo local não degenerado em p .

Embora observemos que, dado um campo f -gradiente v , o levantamento de v para $\overline{M}$, denotado por $\overline{v}$, é um campo F -gradiente, não é possível usar a teoria de Morse desenvolvida nos capítulos anteriores de forma direta, pois $\overline{M}$ é variedade não compacta e $S(F)$ é sempre infinito caso não seja vazio. Temos, entretanto, que o recobrimento cíclico infinito é equivariante, e portanto, composto por infinitos pedaços (cobordismos) localmente homeomorfos a M . Logo, nossa estratégia será restringir a função F a um cobordismo particular e "transportar" suas propriedades para a função f através do recobrimento cíclico infinito. Desta maneira construímos uma

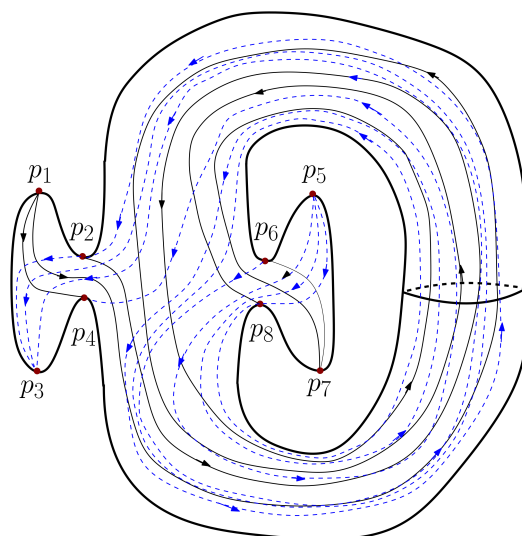


Figura 5.1: Linhas de fluxo de M com 2 voltas ou menos.

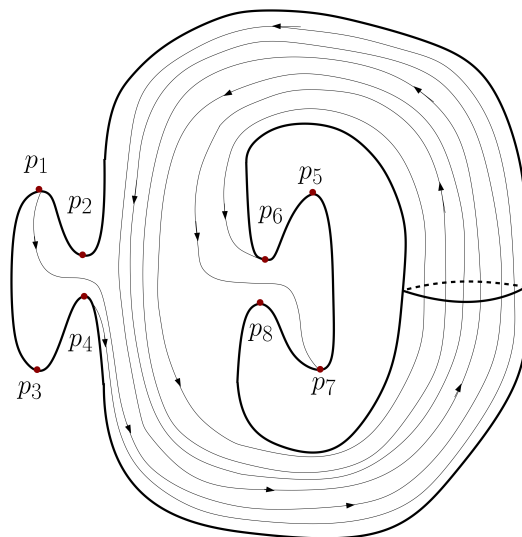


Figura 5.2: Linhas de fluxo de M com 3 voltas.

estrutura algébrica de complexo de cadeias que carrega consigo informações sobre a dinâmica e topologia de M .

Exemplo 5.3 Considere o toro deformado M com o fluxo representado nas Figuras 5.1 e 5.2. Assumimos que o fluxo seja gerado por um campo vetorial normal v , f -gradiente, para uma determinada aplicação de Novikov f . Nesse caso, o campo vetorial levantado $\bar{v}$ em $\bar{M}$ é F -gradiente, e a função F desce ao longo das linhas de fluxo. A Figura 5.3 representa o recobrimento cíclico infinito de M , onde representamos F como sendo a função altura.

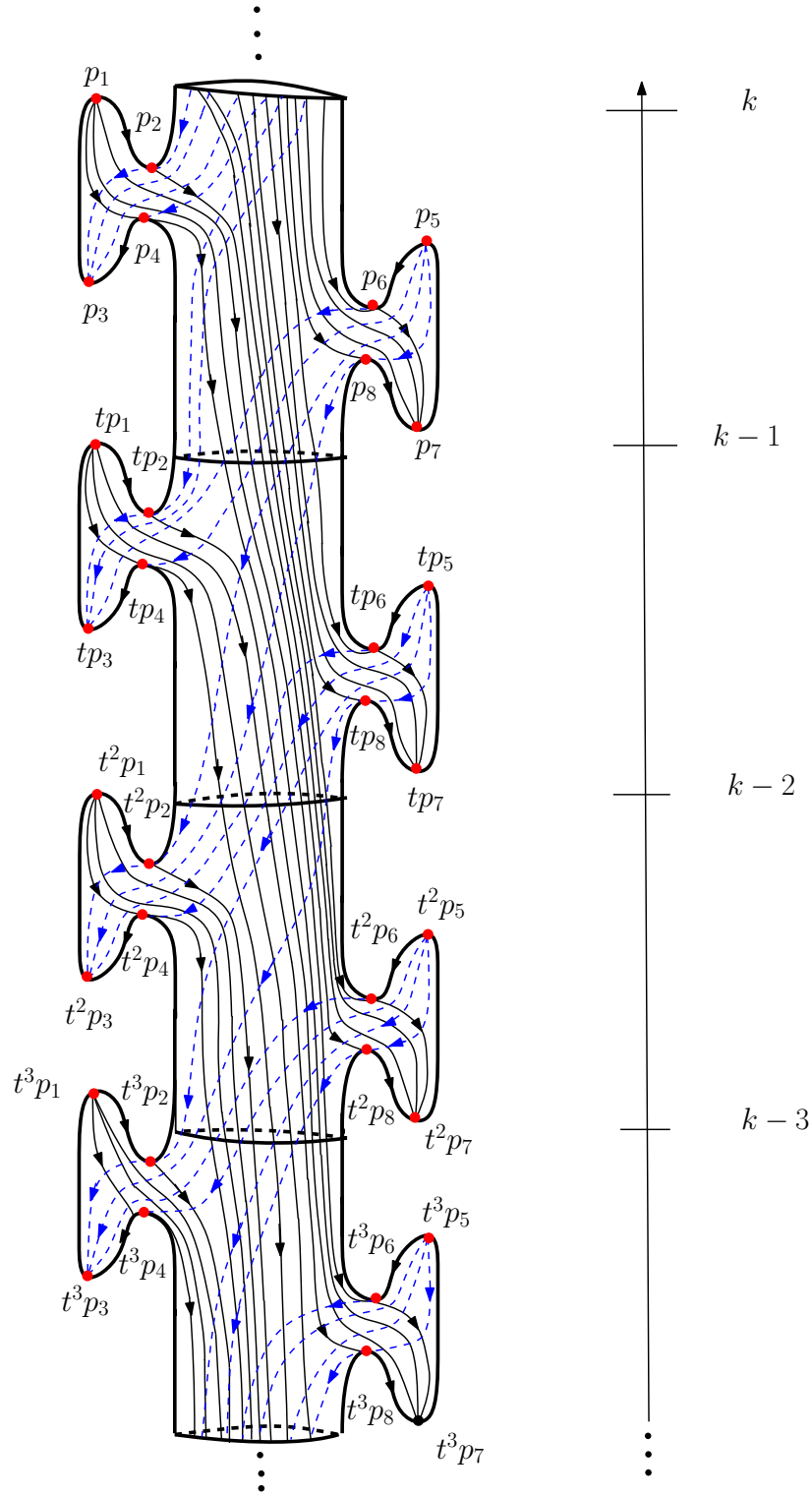


Figura 5.3: Recobrimento cíclico infinito de M .

5.2 Complexo de Novikov

Nesta seção construímos o complexo de Novikov. Adotamos a notação $L = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ para os polinômios de Laurent e $\bar{L} = \mathbb{Z}[[t]]$ para as séries de Laurent na variável t . Definimos a seguir um anel que desempenhará um papel importante para a teoria de Novikov.

Definição 5.4 O Anel de Novikov $\mathbb{Z}((t))$ é o anel de todas as séries de Laurent

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} z_i t^i$$

em uma variável com coeficientes em $\mathbb{Z}$ que possuem um número finito de parcelas com expoente " i " negativo.

Seja $f : M \rightarrow S^1$ uma função de Novikov, sendo M variedade compacta, sem bordo. Seja $F : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$ o levantamento definido na seção anterior. O grupo abeliano livre $\mathcal{M}_k$ em $\bar{M}$ é gerado por pontos críticos de F do tipo $t^i p$, onde $i \in \mathbb{Z}$, que são os levantamentos dos pontos $p \in S_k(f)$. Cada elemento de $\mathcal{M}_k$ pode ser escrito como a soma $\sum_i \sum_j \alpha_j^i t^i p_j$ e utilizando a ação de $\mathbb{Z}$ sobre $\bar{M}$ para reescrever a soma como $\sum_i (\sum_j \alpha_j^i t^j) t^{i-j} p_j$, podemos pensar em $\mathcal{M}_k$ como um módulo livre sobre L , qualquer levantamento de $S_k(f)$ em $\bar{M}$ servindo de base para $\mathcal{M}_k$. Considere o produto tensorial

$$\mathcal{N}_k = \mathcal{M}_k \otimes_L \bar{L}.$$

Construiremos uma aplicação $\partial_k : \mathcal{N}_k \rightarrow \mathcal{N}_{k-1}$ que dará aos módulos graduados uma estrutura de complexo de cadeias. Provaremos na seção seguinte que este complexo recupera a homologia de $H_*(\bar{M}) \otimes_L \bar{L}$ e veremos porquê esta abordagem é utilizada ao invés da abordagem clássica de Morse em alguns casos. Seguindo o padrão estabelecido nos dois capítulos anteriores, nosso primeiro resultado é uma versão do Teorema 3.10, para o caso Novikov.

Lema 5.5 *Para cada ponto crítico $t^i p$ de índice de Morse k de F , a variedade instável $W^u(t^i p, \bar{v})$ é uma subvariedade de dimensão k de $\bar{M}$.*

Prova: Dados λ e μ valores regulares tais que $\lambda < F(t^i p) < \mu$, considere o cobordismo $W = F^{-1}([\lambda, \mu])$. É suficiente provar que a intersecção $W^u(t^i p, \bar{v}) \cap W^0$ é uma subvariedade k -dimensional de $\bar{M}$, pois $W^u(t^i p, \bar{v})$ é uma união infinita de subvariedades

desse tipo. Observando que

$$W^u(t^i p, \bar{v}) \cap W^0 = W^u(t^i p, \bar{v}|W) \cap W^0,$$

como $F|W$ é função de Morse em W e $\bar{v}|W$ é seu gradiente, basta aplicarmos o Teorema 4.12. $\square$

O Lema 5.5 também implica que a variedade estável $W^s(t^i p, \bar{v})$ é subvariedade $(n-k)$ -dimensional de $\bar{M}$. Desta forma, a noção de transversalidade do campo vetorial $\bar{v}$ em $\bar{M}$ é definida de forma análoga ao capítulo anterior. Como para qualquer ponto crítico $t^i p$ de F , a restrição da projeção $\pi : \bar{M} \rightarrow M$ a $W^u(t^i p, \bar{v})$ é uma imersão injetiva deste conjunto em M e tem como imagem a variedade instável $W^u(p, v)$ em M , concluímos que v é transversal se, e somente se, $\bar{v}$ é transversal. O Teorema 4.18 se aplica para a variedade compacta sem bordo M , de forma que podemos restringir nosso estudo a variedades munidas de campos f -gradientes satisfazendo a condição de transversalidade.

Sejam $f : M \rightarrow S^1$ uma aplicação de Novikov e v um campo em f -gradiente. Fixemos orientações para as variedades instáveis $W^u(v, p)$, para todo p em $S(f)$. Queremos definir o **número de intersecção** $n(t^i p, t^j q; \bar{v})$ para todo par de pontos críticos $t^i p, t^j q$ de F com índices de Morse consecutivos. A definição é análoga às anteriores. Escolha λ, μ valores regulares de F com $\lambda < F(t^j q) < F(t^i p) < \mu$. A restrição de F ao cobordismo $W = F^{-1}([\lambda, \mu])$, é uma função de Morse e $\bar{v}|W$ é um $F|W$ -gradiente transversal. A orientação de v induz uma ($\mathbb{Z}$ -invariante) orientação de $\bar{v}$ e $\bar{v}|W$. Temos portanto o número de intersecção $n(t^i p, t^j q; \bar{v}|W)$ obtido pela contagem de linhas de fluxo de $t^j q$ para $t^i p$ no cobordismo W . Claramente $n(t^i p, t^j q; \bar{v}|W)$ não depende da escolha de valores regulares λ, μ e podemos denotá-lo por $n(t^i p, t^j q; \bar{v})$. Observamos, entretanto, que este número de intersecção está agora associado a pontos críticos em uma variedade não compacta $\bar{M}$.

Teorema 5.6 *Existe um único $\bar{L}$ -homomorfismo $\partial_k : \mathcal{N}_k \rightarrow \mathcal{N}_{k-1}$ satisfazendo*

$$\partial_k(t^i p) = \sum_{t^j q \in S_{k-1}(F)} n(t^i p, t^j q; \bar{v}) t^j q$$

de tal forma que para todo $t^i p \in S_k(F)$ e para todo k tenhamos $\partial_k \circ \partial_{k-1} = 0$.

Definição 5.7 O grupo graduado $\mathcal{N}_*$ munido do operador bordo ∂_* do Teorema

5.6 forma um complexo de cadeias de $\bar{L}$ -módulos. Este complexo, denotado por $\mathcal{N}_*(f, v)$, é chamado de **Complexo de Novikov** do par (f, v) .

Prova do Teorema 5.6 (parte 1): A soma formal no lado direito da igualdade é, de fato, um elemento de $\mathcal{N}_{k-1}$, visto que para $F(t^i p) < F(t^j q)$, $n(t^i p, t^j q; \bar{v}|W) = 0$ e, portanto, existe apenas um número finito de parcelas com expoente negativo. Escolha qualquer levantamento $\mathcal{B}$ de $S(f)$ para $\bar{M}$. Então a família $\mathcal{B}$ é uma $\bar{L}$ -base para $\mathcal{N}_*$. Para cada $t^i p \in \mathcal{B}$ defina $\partial_k(t^i p)$ pela fórmula acima e estenda por linearidade para um $\bar{L}$ -homomorfismo $\mathcal{N}_k \rightarrow \mathcal{N}_{k-1}$. Observe que a definição é válida para todo $t^i p \in S_k(F)$, pois o campo vetorial $\bar{v}$ é $\mathbb{Z}$ -invariante, e portanto, $n(t^i p, t^j q; v) = n(t^{i+m} p, t^{j+m} q; v)$, para todo $l \in \mathbb{Z}$.

Para provar que a aplicação ∂_k é realmente uma aplicação bordo, definimos o seguinte conjunto

Definição 5.8 Seja λ valor regular de F . $\mathcal{N}_*^\lambda$ é o subgrupo abeliando de $\mathcal{N}_*$ definido por

$$\mathcal{N}_*^\lambda = \left\{ \sum_i \sum_j \alpha_i^j t^i p_j \in S(F) \quad \text{tal que} \quad \alpha_i^j = 0 \text{ se } F(t^i p_j) > \lambda \right\}.$$

Como $\mathcal{N}_*^\lambda$ é um $\mathbb{Z}[[t]]$ -submódulo ∂_* -invariante de $\mathcal{N}_*$, fica definida a aplicação quociente induzida

$$\partial_*/t^l : \mathcal{N}_*^\lambda / t^l \mathcal{N}_*^\lambda \rightarrow \mathcal{N}_*^\lambda / t^l \mathcal{N}_*^\lambda.$$

Para concluir a demonstração é suficiente verificar que $\partial/t^l \circ \partial/t^l = 0$, tendo em vista a equivariância de $\bar{M}$.

Observamos primeiramente que $t^l \mathcal{N}_*^\lambda = \mathcal{N}_*^{\lambda-l}$; O módulo $\mathcal{N}_*^\lambda / \mathcal{N}_*^{\lambda-l}$ é o grupo abeliano livre gerado pelos pontos críticos da função F no cobordismo

$$W_l = F^{-1}([\lambda - l, \lambda]).$$

Temos portanto um isomorfismo entre os grupos graduados

$$\mathcal{N}_*^\lambda / \mathcal{N}_*^{\lambda-l} \simeq \mathcal{M}_*(F|W_l, \bar{v}|W_l)$$

e o homomorfismo induzido ∂_*/t^l corresponde ao operador bordo de Morse em $\mathcal{M}_*(F|W_l, \bar{v}|W_l)$. Utilizando o Teorema 4.31, completamos a demonstração. $\square$

Os complexos quocientes $\mathcal{N}_*^\lambda / t^l \mathcal{N}_*^\lambda = \mathcal{N}_*(\lambda, l)$ são chamados de **Complexos de Novikov truncados** e desempenharão um papel importante na próxima seção.

5.3 Homologia de Novikov

Nesta seção estudamos a homologia do complexo de Novikov e apresentamos o Teorema da homologia de Novikov. Este teorema mostra como o complexo de Novikov recupera informações topológicas da variedade. Enquanto no caso Morse a homologia do complexo recupera a homologia singular da variedade e em um cobordismo a homologia relativa é recuperada, no caso Novikov recuperamos a homologia $H_k(\overline{M}) \otimes_L \overline{L}$. Enunciamos o teorema a seguir.

Teorema 5.9 *Sejam M uma variedade compacta, sem bordo, $f : M \rightarrow S^1$ uma aplicação de Novikov e v um campo vetorial f -gradiente transversal. Então para todo k*

$$H_k(\mathcal{N}_*(f, v)) \simeq H_k(\overline{M}) \otimes_L \overline{L}.$$

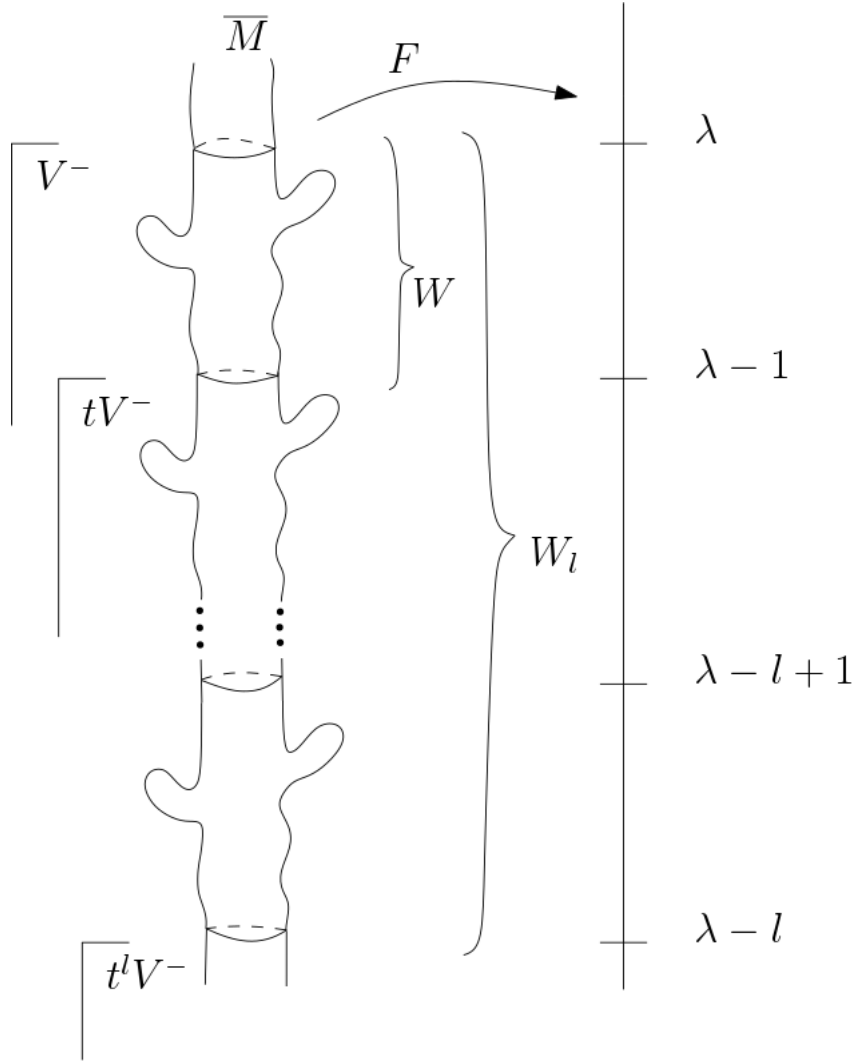
Sejam $f : M \rightarrow S^1$ aplicação de Novikov, $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ o recobrimento cíclico infinito, S_* o complexo singular de $\overline{M}$ e $A \subset S_*$ um simplexo singular. Sejam $F : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ o levantamento de f , λ um valor regular de F e $V^- = F^{-1}((-\infty, \lambda])$. Definindo o suporte de um simplexo $A : \Delta_* \rightarrow \overline{M}$ como sendo o fecho do conjunto de pontos $x \in \overline{M}$ tais que $(F \circ A)(x) \neq 0$, seja

$$S_*^\lambda = \{A \in S_* \mid \text{supp } A \subset V^-\}.$$

O L -módulo graduado S_*^λ é subcomplexo de S_* . Temos adicionalmente o seguinte resultado:

Teorema 5.10 *S_*^λ é um complexo de cadeias de L -módulos livres e é homotopicamente livre-finito.*

Ideia: A ideia da prova envolve a construção de uma filtração $\{V_{\langle k \rangle}^-\}$ de V^- tal que o par $(V_{\langle k \rangle}^-, V_{\langle k-1 \rangle}^-)$ seja invariante com respeito a ação de t . Assim, os grupos de homologia singular relativa adquirem uma estrutura de módulo sobre o anel $\mathbb{Z}[t]$. O módulo $H_k(V_{\langle k \rangle}^-, V_{\langle k-1 \rangle}^-)$ é um $\mathbb{Z}[t]$ -módulo livre e $H_i(V_{\langle k \rangle}^-, V_{\langle k-1 \rangle}^-) = 0$ para $i \neq k$. Logo, a filtração $\{V_{\langle k \rangle}^-\}$ é celular e induz uma filtração no complexo singular S_*^λ , os $\mathbb{Z}[t]$ -módulos $H_k(V_{\langle k \rangle}^-, V_{\langle k-1 \rangle}^-)$ formando o complexo adjunto. Pelo Corolário 2.17 existe uma equivalência homotópica de cadeias entre S_*^λ e o complexo associado a filtra-


 Figura 5.4: Visualização de W^l e $t^l V^-$.

ção, que é livre finito. □

E como consequência do Teorema 5.10, temos o seguinte corolário.

Corolário 5.11 *O $\bar{L}$ -complexo*

$$S_*^\lambda \otimes_L \bar{L}$$

é homotopicamente livre finito.

Desta forma, escrevendo $\bar{S}_* = S_* \otimes_L \bar{L}$ e $\bar{S}_*^\lambda = \{A \in \bar{S}_* | \text{supp } A \subset F^{-1}(V^-)\}$ temos que a inclusão $S_*^\lambda \hookrightarrow \bar{S}_*^\lambda$ induz o isomorfismo

$$S_*^\lambda \otimes_L \bar{L} \simeq \bar{S}_*^\lambda$$

e os isomorfismos de complexos de cadeias

$$S_*^\lambda/t^l S_*^\lambda \simeq \bar{S}_*^\lambda/t^l \bar{S}_*^\lambda \simeq S_*(V^-, t^l V^-),$$

para todo l . Essas equivalências nos serão úteis nas considerações adiante.

Temos, pela definição de complexo de Novikov truncado, um isomorfismo $\mathcal{N}_*(\lambda, l) \approx \mathcal{M}_*(F|W_l, \bar{v}|W_l)$, onde $W_l = F^{-1}([\lambda - l, \lambda])$, conforme representado na Figura 5.4. Pelo Teorema 4.31, temos as seguintes equivalências homológicas:

$$\mathcal{N}_*(\lambda, l) \approx \mathcal{M}_*(F|W_l, \bar{v}|W_l) \rightarrow S_*(W_l, \partial_0 W_l) \hookrightarrow S_*(V^-, t^l V^-).$$

Fazendo a composição, obtemos a aplicação entre complexos

$$\mathcal{E}' : \mathcal{N}_*(\lambda, n) \rightarrow S_*(V^-, t^l V^-)$$

Observe que os dois complexos, $\mathcal{N}_*(\lambda, l)$ e $S_*(V^-, t^l V^-)$ são complexos de módulos sobre o anel $L_l = L/t^l L \simeq \bar{L}/t^l \bar{L}$.

Gostaríamos de obter uma equivalência $\mathcal{E}$ que possua propriedades algébricas adicionais em relação a $\mathcal{E}'$, em particular, que seja uma equivalência homotópica de cadeias de L_l -complexos e estável em relação a pequenas perturbações do campo gradiente. Para obter essa equivalência, construiremos a seguir uma filtração do complexo singular relativo $S_*(V^-, t^l V^-)$ de tal maneira que o complexo adjunto associado seja isomorfo e preserve base em relação ao complexo de Novikov truncado. Mostraremos que este complexo é celular, obtendo assim por meio do Corolário 2.17 a equivalência $\mathcal{E}$ com as propriedades desejadas.

Considere o cobordismo $W_l = F^{-1}[\lambda - l, \lambda]$ e seja $\psi : W_l \rightarrow [\lambda - l, \lambda]$ uma função de Morse ordenada. Denotando por $\{Y_k\}$ a filtração Morse-Smale correspondente a ψ , seja $X_k = t^l V^- \cup Y_k$. Assumindo que a filtração satisfaz $tX_k \subset X_k$, para todo k , é possível construir uma filtração $S_*^{(k)} = S_*(X_k, t^l V^-) \subset S_*(V^-, t^l V^-)$ do complexo singular $S_*(V^-, t^l V^-)$, formada pelos subcomplexos de L_l -módulos $S_*^{(k)}$. Observe que para todo ponto crítico $p \in W_l$ de índice k , a classe fundamental

$$d_p = [W^u(p, \bar{v})] \in H_k(X_k, X_{k-1}).$$

Temos, portanto, o seguinte resultado:

Proposição 5.12 A filtração $\{S_*^{(k)}\}$ é uma filtração celular de L^l -complexos e a família $\{d_p\}_{p \in S_k(F|W^l)}$ é uma L_l -base para o módulo $H_k(X_k, X_{k-1})$.

Prova: Observe que

$$\begin{aligned} H_*(S_*^{(k)}, S_*^{(k-1)}) &=^{def} H_*(S_*^{(k)}/S_*^{(k-1)}) = H_*(S_*(X_k, t^l V^-)/S_*(X_{k-1}, t^l V^-)) = \\ &= H_*\left(\frac{S_*(X_k)/S_*(t^l V^-)}{S_*(X_{k-1})/S_*(t^l V^-)}\right) \simeq H_*(S_*(Y_k)/S_*(Y_{k-1})) =^{def} H_*(Y_k, Y_{k-1}), \end{aligned}$$

de modo que $H_*(S_*^{(k)}, S_*^{(k-1)})$ se anula em todos os índices, com exceção de k e a filtração é celular. Observando que $H_*(X_k, X_{k-1}) \simeq H_*(Y_k, Y_{k-1})$ concluímos que a família $\{d_p\}$ quando p é ponto crítico de F em W_l é uma base sobre $\mathbb{Z}$ para o módulo $H_k(X_k, X_{k-1})$. Mas como $d_{t^r p} = t^r d_p$, para todo r , tomando a família $\{d_p\}$ apenas para pontos críticos de F índice de Morse k em W_l , concluímos que $\{d_p\}$ é uma L_l -base para $H_k(X_k, X_{k-1})$. □

Observe que existe um isomorfismo que preserva base entre o complexo adjunto associado ao filtro $\{S_*^{(k)}\}$ e complexo de Novikov truncado $\mathcal{N}_*(\lambda, l) = \mathcal{N}_*^\lambda / t^l \mathcal{N}_*^\lambda$. Se- gue do Teorema 2.17 que existe uma equivalência de L_l -complexos

$$h(\psi) : \mathcal{N}_*(\lambda, l) \rightarrow S_*(V^-, t^l V^-).$$

que é homotópica sobre $\mathbb{Z}$ à equivalência de cadeias $\mathcal{E}'$.

Definição 5.13 A equivalência de cadeias $h(\psi)$ é denotada por

$$\mathcal{E}(\lambda, n) : \mathcal{N}_*(\lambda, l) \rightarrow S_*(V^-, t^l V^-)$$

e é chamada **equivalência equivariante de Morse**.

Faremos aqui algumas observações. A primeira é que a equivalência equivariante de Morse $\mathcal{E}$ não depende da função de Morse ordenada ψ escolhida em sua construção. A demonstração se baseia na teoria de filtrações de complexos celulares e é omitida. A segunda é a estabilidade de $\mathcal{E}$ em relação a pequenas perturbações do campo gradiente, ou seja, existe $\delta > 0$ tal que, para todo campo vetorial f -gradiente w satisfazendo $\|v - w\| < \delta$, existe um isomorfismo I que preserva base entre os L_l -complexos de módulos $\mathcal{N}_*(\lambda, l; v)$ e $\mathcal{N}_*(\lambda, l; w)$ tal que $\mathcal{E}(\lambda, l; w) = \mathcal{E}(\lambda, l; v) \circ I$. A ideia da prova é a verificação que toda função de Morse ordenada $\psi : W_l \rightarrow [a, b]$ ajustada para $(F, \bar{v})$ é também ajustada para $(F, \bar{w})$ caso $\|v - w\|$ seja pequeno o su-

ficiente. A preservação da base pode ser obtida por meio da aplicação do Lema do rearranjo, caso necessário. Por fim, observamos que existe uma relação entre as equivalências equivariantes de Morse $\mathcal{E}$ para diferentes valores de λ e l .

Sejam $\lambda \leq \mu$ dois valores regulares de F e sejam $m \leq l$ inteiros positivos. Seja $V_1^- = F^{-1}((-\infty, \lambda])$ e $V_2^- = F^{-1}((-\infty, \mu])$. A inclusão $V_1^- \subset V_2^-$ induz uma aplicação entre os complexos de cadeias

$$J : S_*(V_1^-, t^l V_1^-) \rightarrow S_*(V_2^-, t^m V_2^-)$$

que podem ser pensados como complexos de $\bar{L}$ -módulos e J respeita esta estrutura. Temos similarmente uma aplicação

$$I : \mathcal{N}(\lambda, l) \rightarrow \mathcal{N}(\mu, m)$$

de complexos de cadeias de módulos que podem ser pensados tomando seus coeficientes em $\bar{L}$. Nessas condições, temos o seguinte resultado.

Proposição 5.14 *O seguinte diagrama de aplicações entre complexos de $\bar{L}$ -módulos é homotopicamente comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_*(\lambda, l) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\lambda, l)} & S_*(V_1^-, t^l V_1^-) \\ \downarrow I & & \downarrow J \\ \mathcal{N}_*(\mu, m) & \xrightarrow{\mathcal{E}(\mu, m)} & S_*(V_2^-, t^m V_2^-) \end{array}$$

Prova: Escolha uma função de Morse ordenada

$$\phi : F^{-1}([\mu - m, \mu]) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\bar{v}$ seja ϕ -gradiente e seja X_i a filtração correspondente de V_2^- . Então, existe uma função de Morse ordenada

$$\psi : F^{-1}([\lambda - 1, \lambda]) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que os termos $\tilde{X}_k$ da filtração de V_1^- correspondendo a ψ satisfazem $\tilde{X}^k \subset X^k$.

Deste modo, a aplicação de inclusão

$$(V_1^-, t^l V_1^-) \subset (V_2^-, t^m V_2^-)$$

preserva filtrações. Observando agora o diagrama, as aplicações entre cadeias $J \circ \mathcal{E}(\lambda, l)$ e $\mathcal{E}(\mu, m) \circ I$ preservam filtrações e induzem o mesmo mapa nos complexos adjuntos. Logo, eles são homotópicos por cadeias pelo Teorema 2.16. $\square$

Definição 5.15 Uma aplicação $\Phi : \mathcal{N}_* \rightarrow \bar{S}_*$ entre complexos de cadeias é compatível com a equivalência equivariante de Morse se existe um valor regular λ de F tal que

$$\Phi(\mathcal{N}_*^\lambda) \subset \bar{S}_*^\lambda$$

e para todo inteiro positivo $l \in \mathbb{N}$ a aplicação quociente entre complexos L_l

$$\mathcal{N}_*^\lambda / t^l \mathcal{N}_*^\lambda \rightarrow \bar{S}_*^\lambda / t^l \bar{S}_*^\lambda$$

é homotópica à equivalência equivariante de Morse $\mathcal{E}(\lambda, l)$.

O resultado a seguir completa a demonstração do Teorema 5.9.

Teorema 5.16 *Existe uma única equivalência homotópica entre os complexos de cadeias $\mathcal{N}_*(f, v)$ e $\bar{S}_* = S_*(\bar{M}) \otimes_L \bar{L}$ compatível com a equivalência equivariante de Morse.*

Existência: Seja λ um valor regular de F . Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{N}_*^\lambda / t \mathcal{N}_*^\lambda & \longleftarrow & \mathcal{N}_*^\lambda / t^2 \mathcal{N}_*^\lambda & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & \mathcal{N}_*^\lambda / t^l \mathcal{N}_*^\lambda \longleftarrow \mathcal{N}_*^\lambda / t^{l+1} \mathcal{N}_*^\lambda \longleftarrow \dots \\ \downarrow \mathcal{E}_1 & & \downarrow \mathcal{E}_2 & & & & \downarrow \mathcal{E}_l & & \downarrow \mathcal{E}_{l+1} \\ S_*^\lambda / t S_*^\lambda & \longleftarrow & S_*^\lambda / t^2 S_*^\lambda & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & S_*^\lambda / t^l S_*^\lambda & \longleftarrow & S_*^\lambda / t^{l+1} S_*^\lambda \longleftarrow \dots \end{array}$$

Cada quadrado é homotopicamente comutativo pela Proposição 5.14. Logo, temos uma equivalência homológica virtual

$$\mathcal{N}_*^\lambda \dashrightarrow S_*^\lambda \otimes_L \bar{L}.$$

Como os dois complexos $\mathcal{N}_*^\lambda$ e S_*^λ são $\bar{L}$ -complexos homotopicamente livre finitos, a aplicação tem uma única realização

$$\Psi : \mathcal{N}_*^\lambda \rightarrow S_*^\lambda \otimes_L \bar{L}$$

pelo Teorema 2.23. Como

$$\mathcal{N}_* = \mathcal{N}_*^\lambda \otimes_L \bar{L} \quad \text{e} \quad \bar{S}_* = (S_*^\lambda \otimes_L \bar{L}) \otimes_L \bar{L},$$

obtemos a equivalência de cadeias

$$\Phi = \Psi \otimes Id : \mathcal{N}_* \rightarrow \bar{S}_*,$$

compatível com a equivalência equivariante de Morse. □

Unicidade: Seja $\Phi' : \mathcal{N}_* \rightarrow \bar{S}_*$ uma outra aplicação entre complexos compatível com equivalências de Morse e seja μ o valor regular correspondente de F . Seja $\Psi = \Phi|_{\mathcal{N}_*^\lambda}$, $\Psi' = \Phi'|_{\mathcal{N}_*^\mu}$. Assumindo que $\lambda \leq \mu$, considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_*^\lambda / t^l \mathcal{N}_*^\lambda & \xrightarrow{\Psi/t^l} & S_*^\lambda / t^l S_*^\lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{N}_*^\mu / t^l \mathcal{N}_*^\mu & \xrightarrow{\Psi'/t^l} & S_*^\mu / t^l S_*^\mu, \end{array}$$

onde ambas as flechas verticais são induzidas pela inclusão

$$F^{-1}((-\infty, \lambda]) \rightarrow F^{-1}((-\infty, \mu]).$$

Por nossa hipótese as flechas horizontais são homotópicas às equivalências equivariantes de Morse, e o diagrama se torna idêntico ao diagrama da Proposição 5.14 e é portanto homotopicamente comutativo. Logo, as composições

$$\mathcal{N}_*^\lambda \rightarrow \bar{S}_*^\lambda \hookrightarrow \bar{S}_*^\mu$$

e

$$\mathcal{N}_*^\lambda \hookrightarrow \mathcal{N}_*^\mu \rightarrow \bar{S}_*^\mu$$

possuem a propriedade de seus t^l -quocientes serem homotópicos, para todo l . Tanto $\mathcal{N}_*^\lambda$ como $\bar{S}_*^\mu$ são homotopicamente livres finitos e a Proposição 2.20 implica que essas composições são homotópicas. Fazendo o produto tensorial sobre $\bar{L}$, concluímos que $\Phi \sim \Phi'$, completando a demonstração. □

5.4 Coeficientes de Novikov

Assim como o complexo de Morse recupera informação acerca do fluxo na variedade, o mesmo se dá com o complexo de Novikov e mostramos em um exemplo como isso ocorre.

Qualquer levantamento para $\overline{M}$ de $S(f)$ determina uma base livre sobre L do complexo de Novikov $\mathcal{N}_*(f, v)$. Essa base será chamada **base geométrica**. Dados p, q elementos da base geométrica, a entrada da matriz dos coeficientes do operador bordo correspondente a p e q é

$$N(p, q; v) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} n(p, t^k q; \overline{v}) t^k \in \overline{L}.$$

Definição 5.17 A série de Laurent $N(p, q; v)$ é chamada **coeficiente de Novikov** correspondente a p, q .

O exemplo a seguir mostra como os coeficientes de Novikov descrevem o comportamento do fluxo na variedade.

Exemplo 5.18 Considere a variedade M com o fluxo representado nas Figuras 5.1 e 5.2 e o recobrimento cíclico infinito de M da Figura 5.3. Observe que, como para todo $p, q \in S(F)$ não há mais de uma órbita em $\mathcal{M}_p^q$ ligando os mesmos pontos, as únicas opções de número de interseção são

$$n(p, t^k q; \overline{v}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{M}_p^{t^k q}} \epsilon(\gamma) = 1 \quad \text{ou} \quad n(p, t^k q; \overline{v}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{M}_p^{t^k q}} \epsilon(\gamma) = -1,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Desta forma, escolhemos as orientações das variedades instáveis dos pontos críticos de forma que tenhamos os seguintes valores para os coeficientes de Novikov. Para a fonte p_1 : $N(p_1, p_2) = N(p_1, p_4) = 1$, $N(p_1, p_6) = t^3$ e $N(p_1, p_8) = t^2$. Para a sela p_2 : $N(p_2, p_3) = 1$ e $N(p_2, p_7) = -t^2$. Para os poços p_3 e p_7 : $N(p_3, *) = N(p_7, *) = 0$. Para a fonte p_5 : $N(p_5, p_8) = 1$, $N(p_5, p_6) = 1$, $N(p_5, p_2) = t^2$ e $N(p_5, p_4) = t$. Para as selas p_4, p_6 e p_8 : $N(p_4, p_3) = 1$, $N(p_4, p_7) = -t^3$, $N(p_6, p_3) = -t$, $N(p_6, p_7) = 1$, $N(p_8, p_7) = 1$ e $N(p_8, p_3) = -t^2$.

Observe que os coeficientes de Novikov descrevem o número de voltas que uma

órbita dá para ligar os pontos críticos em M . Por meio deles obtemos os operadores bordo do complexo de Novikov $\partial_2 : \mathcal{N}_2 \rightarrow \mathcal{N}_1$, $\partial_1 : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_0$ e $\partial_0 : \mathcal{N}_0 \rightarrow 0$, definidos nos pontos geradores por

1. $\partial_2 p_1 = p_2 \otimes 1 + p_4 \otimes 1 + p_6 \otimes t^3 + p_8 \otimes t^2$;
2. $\partial_2 p_5 = p_2 \otimes t^2 + p_4 \otimes t + p_6 \otimes 1 + p_8 \otimes 1$;
3. $\partial_1 p_2 = p_3 \otimes 1 + p_7 \otimes (-t^2)$;
4. $\partial_1 p_4 = p_3 \otimes 1 + p_7 \otimes (-t^3)$;
5. $\partial_1 p_6 = p_3 \otimes (-t) + p_7 \otimes 1$;
6. $\partial_1 p_8 = p_3 \otimes (-t^2) + p_7 \otimes 1$;
7. $\partial_0 p_3 = \partial_0 p_7 = 0$.

Desta maneira, é possível calcular a homologia do complexo de Novikov e recuperamos por meio dela a homologia singular $H_k(\overline{M}) \otimes_L \overline{L}$, conforme o Teorema 5.9.

5.5 Desigualdades de Novikov

Uma das principais aplicações da teoria de Novikov são as **desigualdades de Novikov**, que estabelecemos a seguir. As desigualdades nos dão um limitante inferior para o número de pontos críticos de uma função de Novikov, uma informação importante em áreas da Matemática em que funções desse tipo são estudadas. Um caso clássico é a teoria de nós e links. Usaremos as desigualdades de Novikov para definir um invariante nodal, chamado **número de Morse-Novikov** do nó e veremos como é utilizado.

Sejam X um espaço topológico e $f : X \rightarrow S^1$ uma aplicação de Novikov contínua. Seja ξ a classe de homotopia da função f . Denote por X_ξ o recobrimento cíclico infinito de X induzido pelo recobrimento universal $exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$. O módulo graduado

$$H_*(X, \xi) = H_*(X_\xi, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[-t, t]} \mathbb{Z}((t))$$

é chamado de **Homologia de Novikov** de X correspondente a classe de homotopia ξ . No caso de $H_*(X, \xi)$ ser finitamente gerado ficam definidos os números

$$b_k(X, \xi) = rk H_k(X, \xi) \quad e \quad q_k(X, \xi) = t.n. H_k(X, \xi)$$

denominados respectivamente de **número de Betty de Novikov** e **número de torção de Novikov**.

O anel $\mathbb{Z}((t))$ é um $\mathbb{Z}[-t, t]$ -módulo flat (veja prova em [15]), logo temos o isomorfismo

$$H_*(S_*(X_\xi) \otimes_L \bar{L}) \simeq H_*(X_\xi) \otimes_L \bar{L}.$$

Quando o complexo singular $S_*(X_\xi)$ é homotopicamente livre finito sobre $\mathbb{Z}[-t, t]$, a homologia de Novikov $H_*(X, \xi)$ é um módulo sobre $\bar{L}$ finitamente gerado e os números de Betty e torção de Novikov ficam definidos. Esse é o caso quando X possui o mesmo tipo de homotopia de um CW complexo finito, em particular, quando X é uma variedade compacta, sem bordo. Temos também uma identificação natural do espaço $[X, S^1]$, das classes de homotopia entre X e S^1 , com a classe de cohomologia $H^1(X, \mathbb{Z})$. Dadas essas condições, temos o teorema a seguir.

Teorema 5.19 (Desigualdades de Novikov) *Sejam M variedade compacta sem bordo e $f : M \rightarrow S^1$ uma função de Novikov pertencendo a uma classe $\xi \in H^1(M, \mathbb{Z}) \simeq [M, S^1]$. Então*

$$m_k(f) \geq b_k(M, \xi) + q_k(X, \xi) + q_{k-1}(M, \xi).$$

Prova: Escolha um campo f -gradiente transversal v em S^1 . A homologia do complexo de Novikov $\mathcal{N}_*(f, v)$ associado é isomorfa a $H_*(M_\xi) \otimes_L \bar{L}$ pelo Teorema 5.9. Deduzimos a conclusão por meio do Teorema 2.2. $\square$

5.6 Aplicações em teoria de nós

Introduziremos brevemente a seguir a teoria de nós e links e mostramos uma aplicação das desigualdades de Novikov. As referências utilizadas foram [15], [25] e [26].

Seja $\mathcal{L} \subset S^3$ um **link** orientado, isto é, uma subvariedade compacta, diferenciável, unidimensional de S^3 . Seja $\Phi : \mathcal{L} \times B^2(0, \rho) \rightarrow U$ um difeomorfismo que preserva orientação onde U é uma vizinhança de $\mathcal{L}$ em S^3 e $B^2(0, \rho)$ uma bola fechada de raio ρ , para algum $\rho > 0$. O conjunto $S^3 \setminus \mathcal{L}$ têm sua cohomologia uni-

dimensional $H^1(S^3 \setminus \mathcal{L})$ caracterizada pela seguinte propriedade: para cada $x \in \mathcal{L}$, $r < \rho$ e $\xi \in H^1(S^3 \setminus \mathcal{L})$ a restrição de ξ à $\Phi(x, S^1(0, r))$ é o gerador positivo do grupo $H^1(\Phi(x, S^1(0, r))) \simeq \mathbb{Z}$. Podemos considerar funções de Novikov $f : S^3 \setminus \mathcal{L} \rightarrow S^1$ tais que sua classe de homotopia seja isomorfa a ξ , pelo isomorfismo $[S^3 \setminus \mathcal{L}, S^1] \simeq H^1(S^3 \setminus \mathcal{L})$. Visto que $S^3 \setminus \mathcal{L}$ não é necessariamente um conjunto compacto, precisamos impor certas condições sobre f , a fim de que seja possível o uso da teoria de Novikov.

Definição 5.20 [Regularidade] Seja $\mathcal{L} \subset S^3$ um link. Uma função de Novikov $f : S^3 \setminus \mathcal{L} \rightarrow S^1$ é dita ser **regular** se existe um difeomorfismo que preserva orientação

$$\Phi : \mathcal{L} \times B^2(0, \rho) \rightarrow U$$

tal que

$$f \circ \Phi : \mathcal{L} \times (B(0, \rho) \setminus \{0\}) \rightarrow S^1; \quad f \circ \Phi(x, z) = \frac{z}{|z|}.$$

É possível demonstrar que a condição de regularidade assegura a finitude dos pontos críticos de f .

Definição 5.21 O número mínimo de pontos críticos de uma função de Novikov regular $f : S^3 \setminus \mathcal{L} \rightarrow S^1$ é chamado de **número de Morse-Novikov** do link $\mathcal{L}$ e é denotado por $\mathcal{MN}(\mathcal{L})$.

Temos que $\mathcal{MN}(\mathcal{L})$ é um invariante na teoria de nós e, apesar de $S^3 \setminus \mathcal{L}$ nem sempre ser compacta, podemos usar a condição de regularidade de f e fazer algumas modificações na prova do Teorema 5.19 para mostrar que este permanece válido neste novo contexto. Logo, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 5.22 *Seja $f : S^3 \setminus \mathcal{L} \rightarrow S^1$ for uma função de Novikov regular. Então*

$$m_i(f) \geq b_i(S^3 \setminus \mathcal{L}, \xi) + q_i(S^3 \setminus \mathcal{L}, \xi) + q_{i-1}(S^3 \setminus \mathcal{L}, \xi).$$

Nem sempre este teorema nos dá um limite inferior otimizado, entretanto. É mostrado em [23], por exemplo, um nó cujos grupos de homologia se anulam mas o número de Morse-Novikov não. Logo, limites inferiores puramente homológicos, como este, não são suficientes para obter o número de Morse-Novikov. É possível demonstrar, entretanto, que para funções de Novikov com pontos críticos de índices 1 e 2 apenas, o número de Morse-Novikov é igual ao número mínimo de pontos críticos estabelecido pela desigualdade de Novikov. No artigo [16] a teoria de Novikov

é utilizada para encontrar uma estimativa para o limite inferior de pontos críticos de um link por meio de uma estratégia semelhante.

Também é possível usar as desigualdades de Novikov para demonstrar que existem nós com um número de Morse-Novikov arbitrariamente alto. No artigo [6] obtêm-se também estimativas para o limite superior do Número de Morse-Novikov. Outra característica que torna o número de Morse-Novikov um invariante relevante na teoria de nós, provada com o auxílio da teoria de Novikov, é sua subaditividade em relação à soma conexa de nós, ou seja,

$$\mathcal{MN}(K_1 \# K_2) \leq \mathcal{MN}(K_1) + \mathcal{MN}(K_2),$$

também demonstrada em [23]. Um grande problema ainda em aberto nesta área é provar se a igualdade também é válida.

Observamos neste breve tratado sobre teoria de nós e links que as ferramentas da teoria de Novikov se tornam essenciais na obtenção de informação matemática. E será o mesmo caso em qualquer área em que haja necessidade do estudo funções com imagem no círculo S^1 . Esta dissertação se conclui pontuando que a teoria de Novikov é bela e versátil, com um vasto campo de resultados ainda a serem explorados. Além disso, suas aplicações se estendem potencialmente a todas as áreas da matemática, podendo auxiliar na resolução de diversos problemas com de uma abordagem criativa e inovadora.

- [1] BANYAGA, A. and HURTUBISE, D. Lectures on Morse Homology. Kluwer Academic Publishers, EUA, 2004.
- [2] CORNEA, O. and RANICKI, A.A. Rigidity and glueing for the Morse and Novikov complexes, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 5 343?394, MR201785, 2003.
- [3] DOLD, A. Lectures on Algebraic Topology, Springer, 1972.
- [4] DUMMIT, D. S. and FOOTE, R. M. (2004), Abstract algebra (3rd ed.). Wiley, New York, 2004.
- [5] HATCHER, A. Algebraic Topology. Cambridge univervity press, 2002.
- [6] HIRASAWA, M. and RUDOLPH, L. Constructions of Morse maps for knots and links, and upper bounds on the Morse?Novikov number, to appear in J. Knot Theory Ramifications, preprint, 2003.
- [7] HIRSCH, M.W. Differential Topology. Springer, 1976.
- [8] IRWIN, M. On the Stable Manifold Theorem, Bull. London Math. Soc. 2, 1970.
- [9] LEE, J. Introduction to smooth manifolds (2nd. ed.). Springer, 2006.
- [10] LIMA, D. V. de S. Dissertação de mestrado: Matrizes de Conexão via Complexo de Morse-Witten. Campinas, SP.
- [11] LIMA, E. L. Homologia Básica. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1998.
- [12] MASSEY, W. S. Algebraic Topology: An Introduction. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [13] MILNOR, J. Morse theory. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1968.

Bibliografia

- [14] NIGEL, H. Differentiable Manifolds, 2012. Disponível em: <www.maths.ox.ac.uk/hitchin/>. Acesso em: 27 dezembro 2017.
- [15] PAJITNOV, A. V. Circle-valued Morse Theory. Walter de Gruyter, Berlin, 2006.
- [16] PAJITNOV, A. V. On the tunnel number and the Morse-Novikov number of knots, *Algebr. Geom. Topol.* 10, 2010.
- [16] PALIS, J. MELO, W. Geometric theory of dynamical systems An Introduction. New York, Springer-Verlag, 1982.
- [17] POLLACK, A. and GUILLEMIN, V. Differential topology. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [18] RANICKI, A. The algebraic construction of the Novikov complex of a circle-valued Morse function. *Math. Ann.* 322, 745-785 (2002).
- [19] RAPHAEL. L. Trabalho de conclusão de curso: Grupo fundamental, espaços de recobrimento e aplicações em teoria de nós, Santo André, 2015.
- [20] SPANIER, E. H. Algebraic topology. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [21] SPIVACK, M. Calculus on Manifolds, W. A. Benjamin, 1965.
- [22] VICK, J. W. Homology Theory, an introduction to Algebraic Topology (2nd. ed.). Springer-Verlag, 1994.
- [23] WEBER, C. PAJITNOV, A. and RUDOLPH L. Morse-Novikov number for knots and links, *Algebra i Analiz* 13 no. 3, 2001(in Russian), English translation: *Sankt- Petersburg Mathematical Journal* 13 no. 3, 2002.
- [24] WEBER, J. The Morse-Witten complex via dynamical systems. *Expositiones Mathematicae* n. 24, 127-159, 2006.
- [25] ROLFSEN, D. Knots and Links, AMS Chelsea Publishing, EUA, 2003.
- [26] MANZOLI NETO, O. Teoria de nós, 2^o Colóquio da Região Sudeste, 2013.