



Universidade Federal do ABC

DENIS ARAUJO LUIZ

# **Teoremas limite para um modelo de passeio aleatório não-Markoviano: O elefante aleatório dinâmico**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da  
"CAPES"

**Santo André, 2020**





Universidade Federal do ABC

**Universidade Federal do ABC**

**Centro de Matemática, Computação e Cognição**

**Denis Araujo Luiz**

**Teoremas limite para um modelo de passeio  
aleatório não-Markoviano: O elefante aleatório  
dinâmico**

**Orientador: Prof. Dr. Cristian Favio Coletti**

**Coorientador: Prof. Dr. Alexei Magalhães Veneziani**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de  
Matemática, Computação e Cognição para  
obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELO ALUNO DENIS ARAUJO LUIZ,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. CRISTIAN FAVIO COLETTI.

**Santo André, 2020**

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Denis, Araujo Luiz

Teoremas limite para um modelo de passeio aleatório não Markoviano : O elefante dinâmico aleatório / Araujo Luiz Denis. — 2020.

75 fls. : il.

Orientador: Coletti Cristian Favio

Coorientador: Veneziani Alexei Magalhães

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2020.

1. Probabilidade. 2. Martingalas. 3. Teoria Ergódica. 4. Elephant Random Walk. 5. Dynamic Random Walk. I. Cristian Favio, Coletti. II. Alexei Magalhães, Veneziani. III. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020. IV. Título.

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) orientador(a).**

**Santo André/SP**



**04 de fevereiro de 2020**

**Assinatura do(a) autor(a):**

Denis Araújo Luiz

**Assinatura do(a) orientador(a):**

Coletti, Cristian Forio.



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**

**Fundação Universidade Federal do ABC**

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

**FOLHA DE ASSINATURAS**

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, DENIS ARAUJO LUIZ realizada em 28 de Janeiro de 2020:

**Prof.(a) DANIEL MIRANDA MACHADO**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

p/

**Prof.(a) RENATO JACOB GAVA**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

**Prof.(a) ERIKA ALEJANDRA RADA MORA**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

**Prof.(a) PABLO MARTIN RODRIGUEZ**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

**Prof.(a) CRISTIAN FAVIO COLETTI**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

\* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

# DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação à minha mãe e aos que têm perseverança.



## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, acima de tudo, por tudo.

Ao meu pai, que mesmo longe, está perto.

Ao Cristian, meu orientador, pela amizade, por acreditar em mim, pelas piadas e também pela orientação.

Ao Alexei, meu coorientador, pelos conselhos e orientação.

Ao Lucas, pelos cafés, conversas e dicas, os quais foram fundamentais para todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus professores, sobretudo o Daniel, pelas aulas, dicas e piadas.

A todos meus demais amigos, que de tantos, destaco os que estavam mais inteirados no processo, Diego, Michael e Tone.

A UFABC pela estrutura, pelo acolhimento, pelo ambiente. Ao IMPA pela idealização do programa PICME, que me concedeu bolsa de Mestrado durante o período.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



Eu não tenho graça, eu tenho horror à graça. Isto que digo é a verdade pura e última.  
Um dia, quando todos os livros forem queimados por inúteis, há de haver alguém,  
pode ser que tenor, e talvez italiano, que ensine esta verdade aos homens. Tudo é  
música, meu amigo. No princípio era o *dó*, e do *dó* fez-se *ré*, etc.  
— Dom Casmurro, Machado de Assis



## RESUMO

Estudamos um modelo de passeio aleatório não-Markoviano nos inteiros, o modelo *Dynamic Random Elephant*, ou Elefante Dinâmico Aleatório, onde a lei dos incrementos é dada por uma combinação linear convexa da lei dos incrementos do Passeio Aleatório do Elefante e da lei do Passeio Aleatório Dinâmico.

Verificamos a Lei Forte dos Grandes Números para o modelo misto definido acima, uma vez que esse teorema já foi provado para cada um dos modelos em que foi baseado.

Ainda, verificamos, sob algumas condições, que vale o Teorema Central do Limite e, no complementar dessas condições, vale um Teorema de Convergência Quase-Certa.

As técnicas utilizadas envolvem o uso da Teoria de Martingalas e da Teoria Ergódica.

**Palavras-chave:** Passeio Aleatório, Martingalas, Teoria Ergódica, Passeio Aleatório do Elefante, Passeio Aleatório Dinâmico



## ABSTRACT

We study a model of non-Markovian random walk in the integers, the dynamic random elephant, which its probability law of increments is given by a convex linear combination of the probability laws of increments of the elephant random walk and dynamic random walk.

We verify the Strong Law of Large Numbers for the given model, since this theorem was also proven in each of the cited models.

Under certain circumstances, we check the Central Limit Theorem. When those circumstances are not valid, we check an Almost Surely Convergence Theorem.

The tools used involve martingale theory and ergodic theory.

**Keywords:** Random Walk, Martingale, Ergodic Theory, Elephant Random Walk, Dynamic Random Walk



# CONTEÚDO

1	INTRODUÇÃO	1
2	PASSEIOS ALEATÓRIOS	5
2.1	Passeio Aleatório Simples	5
2.2	O Passeio Aleatório do Elefante	6
2.2.1	Aplicação: Modelo da urna de Pólya	9
2.3	O Passeio Aleatório Dinâmico	10
2.3.1	DRW: Dynamic Random Walk	10
2.3.2	Uma proposta de aplicação	11
2.4	O Elefante Aleatório Dinâmico	13
3	O MODELO DRE	15
3.1	Lei Forte dos Grandes Números	16
3.1.1	A função $\Gamma$	17
3.1.2	Martingalas	19
3.2	Algumas convergências	21
3.2.1	Convergência de $S_n/n$	22
3.2.2	Os termos $A_n$	23
3.3	Teorema Central do Limite	25
3.4	Teorema de Convergência Quase-Certa	26
4	APLICAÇÕES DO DRE	29
4.1	Variação de $g(\alpha, n)$	29
4.1.1	$g(\alpha, n) = \sqrt{\alpha + \frac{1}{n}} \pmod{1}$	30
4.1.2	$g(\alpha, n) = \alpha + \frac{1}{n} \pmod{1}$	31
4.1.3	$g(\alpha, n) = \frac{1}{2} \sin\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}$	32
4.2	Modelo Completo	34
5	CASOS APLICÁVEIS	37
5.1	Precificação	37
5.1.1	Simulação	38
5.2	Urnas	38
5.2.1	Simulação	39

5.3	Colônia de bactérias	40
5.3.1	Simulação	41
6	CONCLUSÕES	43
A	APÊNDICE A	45
A.1	Esperança Condicional	45
A.2	Martingalas	46
B	APÊNDICE B	49
B.1	Teoria Ergódica	49
B.2	Teorema de Stolz-Cesàro	50
C	APÊNDICE C	53
C.1	Teoremas Limite em Martingalas	53
	Referência Bibliográfica	54

# 1

## INTRODUÇÃO

A ideia de um passeio aleatório surge em 1905, com Pearson K. [Pear]. O problema por ele proposto consistia em um homem no plano partindo da origem  $O$  e andando uma quantidade  $l$  em linha reta. Após isso, viraria um certo ângulo e andaria a mesma quantidade  $l$ . E esse processo se repetiria  $n$  vezes. A pergunta é: qual a probabilidade de esse homem estar a uma distância entre  $r$  e  $r + \delta r$  da origem, após esses  $n$  passos?

Esse problema possuía características interessantes: fácil de enunciar e com aplicações em Física [Cara] e Economia [Mand].

Passeios aleatórios então passam a ter relevância desde suas aplicações até o desenvolvimento da Teoria de Probabilidades, mesmo do ponto de vista pedagógico [Bil, Dur, Rose].

Dentre os passeios aleatórios, destacamos o modelo **ERW**, *Elephant Random Walk*, que consiste num passeio aleatório em  $\mathbb{Z}$  cujo as leis de incrementos são não-markovianas, isto é, as probabilidades do passo  $X_n$ , com  $n \geq 2$ , levam em consideração os  $n - 1$  primeiros passos [Sch].

O nome do modelo, que faz menção a um elefante, se dá pela ideia popular de que elefantes podem se lembrar de fatos muito antigos. Assim, as leis de incremento de um passo são dadas pela escolha aleatória, com mesma chance, de um dos passos anteriores e então escolhe com uma probabilidade fixa se o seguirá ou se não o seguirá.

Foram demonstrados para esse modelo a Lei Forte dos Grandes Números, o Teorema Central do Limite e a Lei do Logaritmo Iterado, dentre outros resultados [CGS, CGS2].

Outro modelo imprescindível para o nosso trabalho é o **DRW**, *Dynamic Random Walk*, que tem uma característica fundamental diferente do anterior: é markoviano. Ou seja, cada passo independe dos passos que já ocorreram.

Para esse modelo, consideramos um sistema dinâmico, isto é, um espaço de medida  $X$  com uma transformação  $T$  que leva elementos de  $X$  em  $X$  e é invariante pela medida e uma função  $f$  que leva elementos de  $X$  no intervalo  $[0, 1]$ .

Construímos, então, um passeio aleatório em  $\mathbb{Z}$ , embora na literatura encontremos resultados para  $\mathbb{Z}^d$  [**DRW**], com  $d \in \mathbb{N}$  e  $d \geq 1$ , cujo os passos são dados pela órbita de um elemento  $x \in X$  por  $T$ , isto é, a probabilidade de ir para a direita no  $n$ -ésimo passo é dada por  $f(T^n x)$ .

Em [**DRW**], encontramos uma Lei Forte dos Grandes Números, assim como algumas considerações sobre o Teorema Central do Limite e aplicações desse modelo.

Uma pergunta válida é: e se quiséssemos combinar um modelo markoviano com um modelo não-markoviano?

Dada a aplicabilidade e os resultados na literatura, os dois modelos citados acima são um bom ponto de partida, assim como uma importante fonte de exemplos, no estudo de uma combinação desse tipo.

Neste trabalho nos propomos a investigar o que chamamos de modelo **DRE**, *Dynamic Random Elephant* (ou elefante aleatório dinâmico), um modelo de passeio aleatório cujo as leis de incrementos são dadas pela combinação linear convexa da lei de incrementos do modelo **ERW** com a lei do modelo **DRW**, ou seja, uma espécie de meio termo entre cada um desses modelos, daí o nome.

Inicialmente, gostaríamos que uma função qualquer com retorno em  $[0, 1]$  nos desse uma família de parâmetros para cada passo, podendo o modelo ora se comportar como **DRW**, ora como **ERW**, arbitrariamente. Entretanto, para encontrar resultados, nos especificamos quanto à função que fornece tais parâmetros e esta precisa ser convergente,

em algum sentido.

Os resultados encontrados são fortemente embasados em técnicas com martingalas, dadas em [HaHe]. Também destacamos o trabalho de [JJQ], assim como, é claro, a garantia de existência (da parte dinâmica) proveniente da teoria ergódica, em [DRW].

Para o modelo **DRE** foram encontrados a Lei Forte dos Grandes Números, o Teorema Central do Limite e um Teorema de Convergência Quase-Certa.

Fizemos alguns exemplos de aplicações do modelo, reforçando sua plausibilidade.



# 2

## PASSEIOS ALEATÓRIOS

A noção intuitiva de passeio aleatório é simples: é um movimento aleatório ocorrendo em um dado espaço. Entretanto, não há uma definição geral de passeio aleatório, mas cada modelo tem a sua.

Introduzimos a noção de um passeio aleatório por meio de um modelo extremamente simples, porém didático, que chamaremos de **passeio aleatório simples**.

### 2.1 PASSEIO ALEATÓRIO SIMPLES

Definimos o que para nós é um passeio aleatório, mas na literatura é encontrado como *passeio aleatório simples*.

**Definição 2.1.** *Sejam  $p \in [0, 1]$  e, para cada  $n \geq 1$ ,  $X_n$  variável aleatória assumindo valores 1 e  $-1$  com probabilidades  $P[X_n = 1] = p = 1 - P[X_n = -1]$ . Seja  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Diremos que a sequência  $(S_n)_{n \geq 1}$  é um passeio aleatório simples com parâmetro  $p$  e  $S_n$  denota a posição do passeio aleatório no passo  $n$ .*

Dessa definição, temos que o passeio aleatório simples  $(S_n)_{n \geq 1}$  é tal que as variáveis aleatórias  $X_n$  são independentes e igualmente distribuídas com esperança  $\mathbb{E}[X_n] = 2p - 1$ . Assim, é um simples exercício de reorganização que a variável aleatória  $S_n$  tem esperança  $\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = n \cdot (2p - 1)$ .

Embora pareça imediato, é um exercício ligeiramente trabalhoso demonstrar a lei forte dos grandes números, que enunciaremos abaixo, para esse passeio aleatório. Essa é, também, uma releitura do Teorema 2.4.1 em [Dur], onde também se encontra sua demonstração.

**Teorema 2.2** (Lei Forte dos Grandes Números). *Se  $(X_n)_{n \geq 1}$  é um passeio aleatório simples com parâmetro  $p$ , então:*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} 2p - 1 \quad (1)$$

Temos que  $\mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}^2[X_n] = 1 - (2p - 1)^2 = 4p(1 - p)$ . Assim, análogo ao caso anterior, fazemos uma releitura do Teorema 3.4.1 em [Dur], que culmina no Teorema Central do Limite, enunciado abaixo.

**Teorema 2.3** (Teorema Central do Limite). *Se  $(X_n)_{n \geq 1}$  é um passeio aleatório simples com parâmetro  $p$ , então:*

$$\frac{S_n - n(2p - 1)}{2\sqrt{p(1 - p)n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1), \quad (2)$$

onde  $\mathcal{N}(0, 1)$  denota a distribuição normal padrão.

Ainda, tomando  $Y_n = X_n - (2p - 1)$  e  $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$ , temos que  $\mathbb{E}[Y_n] = 0$  e  $\text{Var}[Y_n] = 1$ . Como  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  também é família de variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas, podemos tomar o seguinte resultado, com base no teorema 9.5 em [Bil].

**Teorema 2.4** (Lei do Logaritmo Iterado). *Se  $(X_n)_{n \geq 1}$  é um passeio aleatório simples com parâmetro  $p$ , então:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - n(2p - 1)}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1 \quad q.c. \quad (3)$$

A Lei do Logaritmo Iterado descreve a oscilação assintótica do passeio aleatório.

Uma aplicação imediata deste tipo de passeio aleatório é a contagem de caras e coroas em diversos lançamentos de moedas, onde uma assume valor 1 e a outra  $-1$ .

## 2.2 O PASSEIO ALEATÓRIO DO ELEFANTE

A partir desta seção, faz-se necessário padronizar que a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_n := \sigma\langle X_0, X_1, \dots, X_n \rangle$  e admitiremos esta notação a partir daqui. Definamos um dos modelos alvo deste trabalho.

**Definição 2.5** (ERW). *Seja  $(S_n)_{n \geq 0}$  sequência de variáveis aleatórias tais que  $S_0$  é um ponto fixo e vale a relação de recorrência:*

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1} \quad (4)$$

Onde  $X_{n+1} \in \{-1, 1\}$  é variável aleatória.

Definimos a lei de comportamento estocástico de  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  a partir de três regras:

1. (D1) Para  $X_{n+1}$ , é sorteado um elemento  $n'$  do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  com probabilidade  $\frac{1}{n'}$ .

2. (D2)  $X_{n+1}$  é tal que:

$$P(X_{n+1} = X_{n'}) = p \quad P(X_{n+1} = -X_{n'}) = 1 - p;$$

3. (D3) Para o primeiro,  $X_1$ , vale:

$$P(X_1 = 1) = q \quad P(X_1 = -1) = 1 - q.$$

A sequência  $(S_n)_{n \geq 0}$  é chamada ERW.

Da definição, temos que

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n X_k. \quad (5)$$

Tomamos, por convenção,  $S_0 = 0$ , isto é, trabalhamos com um passeio aleatório que começa na origem.

Em [Sch], os autores mostram que:

$$P(X_{n+1} = \eta | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n [1 + (2p - 1)X_k \eta] \quad \text{para } n \geq 1, \quad (6)$$

onde  $\eta \in -1, 1$ .

Ainda, que:

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = (2p - 1) \frac{S_n}{n}. \quad (7)$$

E para  $n$  suficientemente grande:

$$\mathbb{E}[S_n] = (2q - 1) \frac{\Gamma(n + (2p - 1))}{\Gamma(2p)\Gamma(n)} \sim \frac{2q - 1}{\Gamma(2p)} n^{2p-1} \quad (8)$$

Combinando as equações acima,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] \sim \frac{(2p - 1)(2q - 1)}{\Gamma(2p)} n^{2(p-1)} \quad (9)$$

Enunciamos os resultados que estão em [CGS], pela sua relevância ao contexto presente.

**Teorema 2.6** (Lei Forte dos Grandes Números). *Seja  $(S_n)_{n \geq 1}$  o ERW. Então:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} = 0 \quad q.c., \quad (10)$$

para quaisquer  $p, q \in [0, 1)$ .

**Observação 2.7.** *Note que o teorema não cobre o caso  $p = 1$ , entretanto temos um passeio aleatório trivial, uma vez que  $X_n = X_1$ , para todo  $n \geq 1$ , portanto,  $S_n/n = X_1$ , o que reduz o processo a uma única variável aleatória binária.*

**Teorema 2.8** (Teorema Central do Limite). *Seja  $(S_n)_{n \geq 1}$  o ERW e seja  $p \geq 3/4$ .*

1. *Se  $p < 3/4$ , então:*

$$\frac{S_n - \frac{2q-1}{\Gamma(2p)} n^{2p-1}}{\sqrt{\frac{n}{3-4p}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (11)$$

2. *Se  $p = 3/4$ , então:*

$$\frac{S_n - \frac{2q-1}{\Gamma(3/2)} n^{1/2}}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (12)$$

Para  $p > 3/4$  também se identifica uma convergência, mas não no sentido do Teorema Central do Limite.

**Teorema 2.9.** *Seja  $(S_n)_{n \geq 1}$  o ERW. Se  $p \in (3/4, 1]$ , então:*

$$\frac{S_n}{n^{2p-1} \Gamma(2p)^{-1}} - (2q-1) \xrightarrow{q.c.} M, \quad (13)$$

onde  $M$  é uma variável aleatória não-degenerada com  $\mathbb{E}[M] = 0$ , que não tem distribuição normal.

O seguinte teorema exhibe uma fórmula fechada sobre a correlação entre os incrementos.

**Teorema 2.10.** *Seja  $(S_n)_{n \geq 1}$  o ERW com  $q = 1/2$  e  $0 \leq p \leq 1$  e defina*

$$F(n) := \frac{2p-1}{3-4p} \left( \frac{2(1-p)}{n} - \frac{(2p-1)\Gamma(n+4p-3)}{\Gamma(4p-2)n!} \right). \quad (14)$$

Então  $\mathbb{E}[X_n] = 0$  e

$$\mathbb{E}[X_n X_{n+k}] = \frac{n! \Gamma(2p+n+k-2)}{(n+k-1)! \Gamma(2p-1+m)} F(n) \quad (15)$$

para todo  $n \geq 1$  e  $k \geq 1$ .

**Observação 2.11.** Para  $p = 3/4$ , tem-se:

$$F(n) = \frac{1}{2n} \left( 1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \right). \quad (16)$$

Para  $k, n \rightarrow \infty$ , com  $x := k/n$  fixado, a função de correlação tem a forma

$$\mathbb{E}[X_n X_{n+k}] \sim (1-x)^{-2(1-p)} F(n) \quad (17)$$

onde  $F(n)$  decai algébricamente exceto no ponto de transição  $p = 3/4$ . Em várias equivalências da fórmula de Stirling para a função Gamma, tem-se:

$$F(n) \sim \begin{cases} \frac{2(2p-1)(1-p)}{3-4p} n^{-1} & p < 3/4 \\ \frac{\ln n}{4n} & p = 3/4 \\ \frac{(2p-1)^2}{(4p-3)\Gamma(4p-2)} n^{-4(1-p)} & p > 3/4 \end{cases} \quad \text{Isso mostra que a transição em } p = 3/4 \text{ é condu-}$$

zida fortemente pelas correlações no passo  $n$ , dependendo pouco do decaimento a partir dos  $k$  incrementos.

### 2.2.1 Aplicação: Modelo da urna de Pólya

Aqui, mostramos uma aplicação do modelo ERW no caso de uma urna de Pólya, retirada de [BB].

Temos uma urna com bolas pretas e vermelhas. A composição da urna no instante  $n$  é o vetor  $X_n = (X_n^1, X_n^2)$ , onde a primeira componente  $X_n^1$  conta a quantidade de bolas pretas e a componente  $X_n^2$  conta a quantidade de bolas vermelhas.

Suponha que, inicialmente, temos na urna uma bola preta e uma vermelha. No primeiro instante, temos a composição  $X_1 = \xi$ , onde  $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ , com valores em  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  quase certamente.

A composição da urna evolui da seguinte forma: nos instantes  $2, 3, \dots$ , retira-se uma bola aleatoriamente, de maneira uniforme, observa-se sua cor, devolve-se a bola à urna e se adiciona outra bola na urna, cujo a cor será a mesma da bola retirada, com probabilidade  $p$ , ou será a outra cor, com probabilidade  $1 - p$ .

Então diremos que  $X_n$  denota a composição da urna após  $n - 1$  instantes. Se  $(S_n)_{n \geq 1}$  é o ERW que começa em  $S_0 = 0$  e  $S_1 = \xi^1 - \xi^2$ , então, a lei geral de  $S_n$  é dada por:

$$S_n = X_n^1 - X_n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (18)$$

A urna descrita acima encaixa-se no modelo de urna do tipo Pólya ou Friedman.

## 2.3 O PASSEIO ALEATÓRIO DINÂMICO

Para este modelo, que é, aparentemente, mais simples que o anterior, precisamos do ferramental da Teoria Ergódica. Os resultados aqui expostos são encontrados em [Dur, Shie].

Enunciamos as principais definições e resultados que utilizaremos.

**Definição 2.12.** *Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida tal que  $T : X \rightarrow X$  é  $\mu$ -invariante. Isto é, para todo  $B \in \Sigma$ , o conjunto  $T(B) := \{T(x) : x \in B\}$  é tal que  $\mu(T(B)) = \mu(B)$ . Diremos que  $(X, \Sigma, \mu, T)$  é um sistema dinâmico.*

Abaixo, a principal classe de conjuntos para esse ambiente.

**Definição 2.13.** *Um conjunto  $A \in \Sigma$  é dito  $T$ -invariante se  $T^{-1}(A) = A$ . Denotamos por  $\mathcal{I}$  a classe de conjuntos invariantes de um sistema dinâmico dado.*

Diremos que uma variável aleatória  $f \in L^1$  se  $\mathbb{E}[|f|] < \infty$ .

### 2.3.1 DRW: Dynamic Random Walk

Definamos, primeiramente, nosso modelo alvo.

**Definição 2.14 (DRW).** *Sejam  $\mathcal{S} = (X, \Sigma, \mu, T)$  um sistema dinâmico, uma função  $f : X \rightarrow [0, 1]$ ,  $f \in L^1$  e  $(X_i)_{i \geq 1}$  sequência de variáveis aleatórias independentes assumindo valores em  $\{-1, 1\}$ . Seja  $x \in X$  e defina a probabilidade:*

$$P(X_i = \eta) = \begin{cases} f(T^i x) & \text{se } \eta = 1 \\ 1 - f(T^i x) & \text{se } \eta = -1 \end{cases} \quad (19)$$

Escrevemos  $S_0 = 0$  e  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  para o passeio aleatório gerado pela família  $(X_i)_{i \geq 1}$ . Um tal passeio  $(S_n)_{n \geq 1}$  é chamado DRW.

Os resultados aqui apresentados encontram-se em [DRW]. Começemos com a Lei Forte dos Grandes Números de Kolmogorov (LFGNK).

**Lema 2.15** (LFGNK). *Sejam  $(X_n)_{n \geq 1}$  variáveis aleatórias num espaço de probabilidade qualquer com segundo momento  $\mathbb{E}[|X_n|^2]$  finito. Assuma que existe uma sequência de números positivos  $(b_n)_{n \geq 1}$  tal que  $b_n \rightarrow \infty$  e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}[X_n]}{b_n^2} < \infty.$$

Tome  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{b_n} = 0 \quad P - q.c., \quad (20)$$

onde  $P$  é a probabilidade associada ao espaço de probabilidade que o passeio aleatório.

Um corolário da LFGNK, que enunciamos como teorema, é a Lei Forte para o modelo DRW, que enunciamos abaixo.

**Teorema 2.16** (Lei Forte dos Grandes Números). *Seja  $(S_n)_{n \geq 1}$  o DRW. Então para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in X$ , vale:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = (2\mathbb{E}(f|T) - 1) \quad P - q.c. \quad (21)$$

### 2.3.2 Uma proposta de aplicação

Considere o círculo  $S^1 = \{e^{ix} : x \in [-\pi, \pi)\}$ ,  $\Sigma$  a  $\sigma$ -álgebra dos borelianos,  $\mu$  a medida de Lebesgue e  $T : S^1 \rightarrow S^1$  tal que  $Ty = e^i y$  a transformação que leva  $e^{ix}$  em  $e^{i(x+1)}$ .

Defina o semi-círculo esquerdo  $ES^1 \subset S^1$  como  $ES^1 := \{e^{ix} : |x| \geq \frac{\pi}{2}\}$ . Da mesma forma, o semi-círculo direito  $DS^1 := \{e^{ix} : |x| \leq \frac{\pi}{2}\}$ .

Suponha que colocamos uma partícula na esfera em um ponto  $y$  e observamos sua órbita dada por  $T$ ,  $(T^n y)_{n \in \mathbb{N}}$ , que define sua trajetória na esfera.

Suponha que esse tipo de partícula tem infinitos níveis discretos de energia e a exposição a um certo tipo de luz em um passo da órbita necessariamente faz a partícula aumentar ou diminuir em uma unidade o seu nível energético. Entretanto, quando não

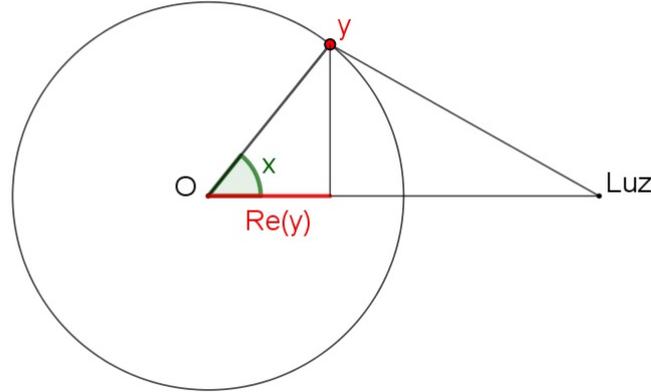


Figura 1: Esquema do modelo proposto, onde O denota o ponto central da esfera

é exposta a essa luz, diminui em uma unidade o seu nível energético.

Considere que tal esfera é posta em frente a um ponto que emite esse tipo de onda, sendo atingida apenas na esfera direita, de tal forma que a cada passo  $n$  da trajetória, a partícula tem probabilidade  $f(T^n y)$  de subir um nível e  $1 - f(T^n y)$  de descer um nível, onde  $f : S^1 \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(y) = \Re(y) \mathbb{1}_{\{DS^1\}}$ , onde  $\Re(y)$  denota a parte real do número complexo  $y$ .

Se supomos que a partícula começa no nível energético 0 e que  $X_n$  denota a subida ou descida de nível no instante  $n$ , temos que  $S_n := X_1 + \dots + X_n$  é o nível energético em que a partícula se encontra no instante  $n$ .

Se quisermos encontrar o nível energético médio,  $\frac{\mathbb{E}[S_n]}{n}$ , em que a partícula vai se encontrar no limite, podemos aplicar a lei forte dos grandes números, obtendo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} &= \mathbb{E}[2\mathbb{E}[f|\mathcal{I}] - 1] = 2\mathbb{E}[f] - 1 \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \mathbb{1}_{\{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}} \frac{dx}{2\pi} - 1 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx - 1 \\ &= \frac{1}{\pi} \sin(x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 1 = \frac{2}{\pi} - 1 \end{aligned}$$

De maneira bem intuitiva, isso nos mostra que a partícula terá nível energético médio negativo, independente de onde começar sua trajetória. Ou seja, mais vezes o nível energético da partícula decairá.

## 2.4 O ELEFANTE ALEATÓRIO DINÂMICO

Embora a ideia do modelo DRE seja passada de forma simples, como um tipo de combinação linear convexa dos modelos DRW e ERW, defini-la exige um número maior de linhas, já que sua definição se baseia em dois passeios aleatórios.

A princípio, a função  $g$  que faz a transição entre os modelos DRW e ERW só precisaria ter o domínio num espaço de parâmetros arbitrário cartesiano  $\mathbb{N}$ , mas, por simplicidade, diremos que seu domínio é  $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ .

**Definição 2.17.** *Sejam  $(X_n)_{n \geq 1}$  sequência de variáveis aleatórias em  $\{-1, 1\}$ ,  $p, q \in [0, 1]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ ,  $\mathcal{S} = (X, \Sigma, \mu, T)$  um sistema dinâmico,  $x \in X$  e a função  $f : X \rightarrow [0, 1]$ ,  $f \in L^1$ . Defina as leis de incrementos:*

$$\left\{ \begin{array}{l} P^e(X_1 = 1) = q \\ P^e(X_1 = -1) = 1 - q \\ P^e(X_{n+1} = \eta | X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n [1 + (2p - 1)X_k \eta] \quad \text{para } n \geq 1, \end{array} \right.$$

onde  $\eta \in \{-1, 1\}$ , como no modelo ERW, e

$$P^d(X_n = \eta) = \begin{cases} f(T^n x) & \text{se } \eta = 1 \\ 1 - f(T^n x) & \text{se } \eta = -1 \end{cases}, \quad \text{para } n \geq 1,$$

como no modelo DRW.

Diremos que a sequência  $(X_n)_{n \geq 1}$  é um DRE, elefante aleatório dinâmico ou dynamic random elephant, se sua lei de incrementos é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(X_1 = \eta) = g(\alpha, 1)P^e(X_1 = \eta) + (1 - g(\alpha, 1))P^d(X_1 = \eta) \\ P(X_{n+1} = \eta | X_1, \dots, X_n) \\ = g(\alpha, n + 1)P^e(X_{n+1} = \eta | X_1, \dots, X_n) + (1 - g(\alpha, n + 1))P^d(X_{n+1} = \eta) \end{array} \right.$$

Certamente, a definição 2.17 é extensa, porém intuitiva ao passo que se entende os modelos DRW e ERW.

Para não sobrecarregar com notações, diremos que  $g(\alpha, n) = \alpha_n$ . Admitimos daqui em diante a definição acima.

# 3

## O MODELO DRE

Neste capítulo, enunciamos e demonstramos os resultados para o modelo DRE.

Para conseguirmos tais resultados, fizemos uso extensivo da teoria de martingalas, sendo [HaHe] a referência principal. Os resultados em [JJQ] também foram fundamentais. E, é claro, tudo isso é baseado em [Sch, CGS, DRW].

Começamos com a esperança condicional do incremento.

**Proposição 3.1.**

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \frac{\alpha_{n+1}(2p-1)}{n}S_n + (1-\alpha_{n+1})(2f(T^{n+1}x) - 1) \quad (22)$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[1 \cdot \mathbb{1}_{\{X_{n+1}=1\}} + (-1) \cdot \mathbb{1}_{\{X_{n+1}=-1\}}|\mathcal{F}_n] \\ &= 1 \cdot \left[ \frac{\alpha_{n+1}}{2n} \sum_{k=1}^n [1 + (2p-1)X_k] + (1-\alpha_{n+1})f(T^{n+1}x) \right] \\ &\quad + (-1) \cdot \left[ \frac{\alpha_{n+1}}{2n} \sum_{k=1}^n [1 + (2p-1)X_k(-1)] + (1-\alpha_{n+1})(1-f(T^{n+1}x)) \right] \\ &= \frac{\alpha_{n+1}}{2n} \sum_{k=1}^n [(1 + (2p-1)X_k) - (1 - (2p-1)X_k)] \\ &\quad + (1-\alpha_{n+1})f(T^{n+1}x) - (1-\alpha_{n+1})(1-f(T^{n+1}x)) \\ &= \frac{\alpha_{n+1}}{2n} \sum_{k=1}^n [2(2p-1)X_k] + 2(1-\alpha_{n+1})f(T^{n+1}x) - (1-\alpha_{n+1}) \\ &= \frac{\alpha_{n+1}(2p-1)}{n}S_n + (1-\alpha_{n+1})(2f(T^{n+1}x) - 1) \end{aligned}$$

□

Defina:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha_{k+1}(2p-1)}{k}\right) = a_{n-1} \left(1 + \frac{\alpha_n(2p-1)}{n-1}\right), & n \geq 2 \\ \gamma_n = (\alpha_n - 1)(2f(T^n x) - 1) \end{cases}$$

**Proposição 3.2.** *Para o DRE vale:*

$$\mathbb{E}[S_n] = a_n \left( \alpha_1(2q - 1) - \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{a_k} \right) \quad (23)$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n] &= \mathbb{E}[S_{n-1}] + \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[S_{n-1}] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}]] \\ &= \mathbb{E}[S_{n-1}] + \left( \frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 \right) \mathbb{E}[S_{n-1}] - \gamma_n = \mathbb{E}[S_{n-1}] \frac{a_n}{a_{n-1}} - \gamma_n \\ &= \left( \mathbb{E}[S_{n-2}] \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} - \gamma_{n-1} \right) \frac{a_n}{a_{n-1}} - \frac{a_n}{a_n} \gamma_n \\ &= \mathbb{E}[S_{n-2}] \frac{a_n}{a_{n-2}} - a_n \frac{\gamma_{n-1}}{a_{n-1}} - a_n \frac{\gamma_n}{a_n} \end{aligned}$$

Repetindo o processo sucessivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n] &= a_n \left( \frac{1}{a_1} \mathbb{E}[S_1] - \sum_{k=2}^n \frac{\gamma_k}{a_k} \right) \\ &= a_n \left( \alpha_1(2q - 1) - \gamma_1 - \sum_{k=2}^n \frac{\gamma_k}{a_k} \right) = a_n \left( \alpha_1(2q - 1) - \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{a_k} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

□

### 3.1 LEI FORTE DOS GRANDES NÚMEROS

Enunciamos, então, a Lei Forte dos Grandes Números. Para tanto, nosso parâmetro  $p$  e nossa função devem satisfazer uma propriedade, que enunciamos abaixo.

**Definição 3.3** (Propriedade forte). *Diremos que o nosso problema satisfaz a **propriedade forte** se vale um dos itens abaixo:*

- $p = 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n) = \delta \in [0, 1]$ ;
- $p \neq 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n) = \delta \in [0, 1]$ .

**Teorema 3.4** (Lei Forte dos Grandes Números). *Se o DRE satisfaz a propriedade forte, vale:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} \right| = 0 \quad (25)$$

3.1.1 A função  $\Gamma$ 

Antes de começar as demonstrações envolvendo Martingalas, precisamos verificar a convergência de  $\frac{a_n}{n}$ . Aqui, usamos a função Gama, que é uma generalização do fatorial, onde  $n! = \Gamma(n + 1)$ . Foi imprescindível o uso de [Art] nesta parte.

Usamos duas fórmula encontradas na referência. Para todo  $x \in (0, 1]$ , vale:

$$\Gamma(x + n) = \Gamma(x) \prod_{j=0}^{n-1} (x + j) \quad (26)$$

Também temos que a função Gama, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , é o limite:

$$\Gamma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^x k!}{\prod_{j=1}^k (x + j)} \quad (27)$$

Temos uma propriedade importante para a função Gama dada pela proposição abaixo.

**Proposição 3.5.** Dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n + \varepsilon)}{\Gamma(n) n^\varepsilon} = 1 \quad (28)$$

**Demonstração:** Olhemos para as sequências  $x_n = \frac{\Gamma(n + \varepsilon)}{\Gamma(n) n^\varepsilon}$  e  $x_{n,k}$  dada por:

$$x_{n,k} = \frac{\left( \frac{k^{n+\varepsilon} k!}{\prod_{j=0}^k (n + \varepsilon + j)} \right)}{\left( \frac{k^n k!}{\prod_{j=0}^k (n + j)} n^\varepsilon \right)} = \frac{k^\varepsilon}{n^\varepsilon} \prod_{j=0}^k \frac{n + j}{n + \varepsilon + j} \quad (29)$$

Por (27), o limite em (28) é o mesmo limite da sequência  $x_{n,k}$  quando  $k, n \rightarrow \infty$ . Para isso, estudamos o limite da subsequência  $x_{k,k}$ .

$$x_{k,k} = \frac{k^\varepsilon}{k^\varepsilon} \prod_{j=0}^k \frac{k + j}{k + \varepsilon + j} = \prod_{j=0}^k \left( 1 + \frac{\varepsilon}{k + j} \right)^{-1} \quad (30)$$

Entretanto, é imediato que  $x_{k,k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$ , o que mostra a proposição.  $\square$

O lema abaixo é o que nos permite demonstrar a Lei Forte dos Grandes Números.

**Lema 3.6.** Se o DRE satisfaz a propriedade forte, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0 \quad (31)$$

e  $\frac{n}{a_n}$  é sequência não-decrescente.

**Demonstração:** Faremos a demonstração em três casos.

Note que:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n} &= \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 + (2p-1) \frac{g(\alpha, k+1)}{k} \right) \\ &= \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k + (2p-1)g(\alpha, k+1)}{k} \\ &= \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} k + (2p-1)g(\alpha, k+1) \end{aligned} \quad (32)$$

- $p = 1$

Temos que  $(2p-1) = 1$ , então reescrevemos (32) como:

$$\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} (k + g(\alpha, k+1)). \quad (33)$$

Como o DRE satisfaz a propriedade forte,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n) = \delta \in [0, 1)$ .

Tome  $\varepsilon = \frac{1-\delta}{2}$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0 \Rightarrow |g(\alpha, n) - \delta| < \varepsilon$ . Daqui, temos que, para  $n \geq n_0$ ,  $g(\alpha, n) < \frac{1+\delta}{2} = \eta < 1$ .

Seja  $\prod_{k=1}^{n_0-1} k + g(\alpha, k+1) = M < \infty$ . Temos que:

$$\prod_{k=n_0}^N (k + g(\alpha, k+1)) \leq \prod_{k=n_0}^N (k + \eta) \leq \prod_{k=1}^N (k + \eta) \stackrel{(26)}{=} \frac{\Gamma(N + \eta)}{\eta \Gamma(\eta)} \quad (34)$$

Portanto,

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{M \Gamma(n + \eta)}{\eta \Gamma(n + 1) \Gamma(\eta)} \quad (35)$$

Como queremos o limite, temos:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \stackrel{(28)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M \Gamma(n) n^\eta}{\eta \Gamma(n + 1) \Gamma(\eta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M n^\eta}{\eta n \Gamma(\eta)} \stackrel{\eta < 1}{=} 0$$

- $1/2 < p < 1$

A demonstração é totalmente análoga ao caso anterior.

Tomamos  $h(\alpha, n) := (2p - 1)g(\alpha, n)$ , que é tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\alpha, n) = (2p - 1)\delta \in [0, 1)$ , pois satisfaz a propriedade forte. Reescrevemos (32) como:

$$\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} (k + h(\alpha, k + 1)). \quad (36)$$

Daqui em diante, a demonstração é a mesma que no caso  $p = 1$ .

- $p \leq 1/2$

Este caso é mais simples, uma vez que  $-1 \leq (2p - 1)g(\alpha, n) \leq 0$ . Estimamos (32):

$$0 \leq \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} k + (2p - 1)g(\alpha, k + 1) \leq \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} k \leq \frac{1}{n}. \quad (37)$$

E fica imediato que  $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

Para mostrar que  $\frac{n}{a_n}$  é não-decrescente, usamos (32) e o fato de  $(2p - 1)g(\alpha, k) \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{a_{n+1}} - \frac{n}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{\prod_{k=1}^n k + (2p-1)g(\alpha, k+1)} - \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n-1} k + (2p-1)g(\alpha, k+1)} \\ &= \frac{n! [(n+1) - (n + (2p-1)g(\alpha, n+1))]}{\prod_{k=1}^n (k + (2p-1)g(\alpha, k+1))} \geq 0 \end{aligned}$$

□

### 3.1.2 Martingalas

Aqui, usamos técnicas de martingalas para obter o resultado.

Nossa martingala se apresenta de forma bem intuitiva, quando se pensa em termos das ferramentas que utilizamos, por ser a própria lei forte.

Considere  $M_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n}$ ,  $n \geq 1$ .

**Proposição 3.7.** *A sequência  $(M_n)_{n \geq 1}$  define uma martingala com média zero.*

**Demonstração:** Temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_{n+1}} + \frac{\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X_{n+1}]}{a_{n+1}} \\
&= \frac{1}{a_{n+1}} \left( S_n - \mathbb{E}[S_n] + \frac{\alpha_n(2p-1)}{n} S_n + (1-\alpha_n)(2f(T^{n+1}x) + 1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha_n(2p-1)}{n} \mathbb{E}[S_n] - (1-\alpha_n)(2f(T^{n+1}x) + 1) \right) \\
&= \frac{1}{a_{n+1}} \left( S_n \left( 1 + \frac{\alpha_n(2p-1)}{n} \right) - \left( 1 + \frac{\alpha_n(2p-1)}{n} \right) \mathbb{E}[S_n] \right) \\
&= \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n}
\end{aligned}$$

O fato de ter média zero é óbvio. □

Tão importantes quanto as propriedades observadas em Martingalas são as propriedades observadas nas diferenças de Martingalas.

Note que  $X_{n+1}^2 = 1$  e  $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]]$ .

Definimos  $Y_1 = M_1$  e  $Y_n = M_n - M_{n-1}$  para  $n \geq 2$ . Assim, vemos que:

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} &= \frac{S_{n+1} - \mathbb{E}[S_{n+1}]}{a_{n+1}} - \frac{S_n + \mathbb{E}[S_n]}{a_n} \\
&= \frac{\left( \frac{(1-2p)\alpha_{n+1}}{n} \right) S_n - \left( \frac{(1-2p)\alpha_{n+1}}{n} \right) \mathbb{E}[S_n] + X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1}]}{a_{n+1}} \\
&= \frac{\left( \frac{(1-2p)\alpha_{n+1}}{n} \right) S_n - \left( \frac{(1-2p)\alpha_{n+1}}{n} \right) \mathbb{E}[S_n] + X_{n+1} + \frac{\alpha_{n+1}(1-2p)}{n} \mathbb{E}[S_n] + \gamma_{n+1}}{a_{n+1}} \\
&= \left( \frac{1}{a_{n+1}} \right) \left( ((1-2p)\alpha_{n+1}) \frac{S_n}{n} + X_{n+1} + \gamma_{n+1} \right) \tag{38}
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
Y_{n+1}^2 &= \left( \frac{1}{a_{n+1}} \right)^2 \left( ((1-2p)\alpha_{n+1})^2 \left( \frac{S_n}{n} \right)^2 + X_{n+1}^2 + \gamma_{n+1}^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \left( X_{n+1} \left( (1-2p)\alpha_{n+1} \frac{S_n}{n} + \gamma_{n+1} \right) + (1-2p)\alpha_{n+1} \frac{S_n}{n} \gamma_{n+1} \right) \right)
\end{aligned}$$

Demonstramos, então, o teorema.

**Demonstração (Teorema 3.4):**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] &= \left( \frac{1}{a_{n+1}^2} \right) \left( ((1-2p)\alpha_{n+1})^2 \left( \frac{S_n}{n} \right)^2 + 1 + \gamma_{n+1}^2 \right. \\
&+ 2 \left( \left( \alpha_{n+1}(2p-1) \frac{S_n}{n} - \gamma_{n+1} \right) \left( (1-2p)\alpha_{n+1} \frac{S_n}{n} + \gamma_{n+1} \right) + (1-2p)\alpha_{n+1} \frac{S_n}{n} \gamma_{n+1} \right) \\
&= \left( \frac{1}{a_{n+1}^2} \right) \left( 1 - ((1-2p)\alpha_{n+1})^2 \left( \frac{S_n}{n} \right)^2 - \gamma_{n+1}^2 + 2(1-2p)\alpha_{n+1} \frac{S_n}{n} \gamma_{n+1} \right) \\
&= \left( \frac{1}{a_{n+1}^2} \right) (1 - \mathbb{E}^2[X_{n+1} | \mathcal{F}_n])
\end{aligned}$$

Como  $-1 \leq \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq 1$ ,  $\mathbb{E}[Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] \leq \frac{2}{a_{n+1}^2}$ .

Ainda,  $W_n := \frac{a_n}{n} Y_n$  é  $\mathcal{F}_n$ -mensurável e é tal que  $\mathbb{E}[W_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \frac{a_{n+1}}{n+1} \mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0$ , logo define uma sequência de diferenças de martingalas.

Também,  $\mathbb{E}[W_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \leq \frac{2}{n^2}$ , logo,  $\sum_{j=2}^{\infty} \mathbb{E}(W_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}) \leq 2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty$ .

Pelo Lema C.1.2,  $\sum_{j=1}^n \frac{a_j Y_j}{j} = \sum_{j=1}^n W_j$  converge quase certamente.

Agora observando que o DRE satisfaz a propriedade forte,  $n/a_n$  é não-decrescente que tende ao infinito. Agora, em vista do Lema de Kronecker (Lema C.0.1), concluímos o resultado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n M_n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{j=1}^n Y_j}{n/a_n} \right| \stackrel{\text{q.c.}}{=} 0 \quad (39)$$

□

## 3.2 ALGUMAS CONVERGÊNCIAS

Aqui, encontramos o limite da sequência  $S_n/n$ , mas também verificamos a convergência de uma série que será muito útil na próxima seção.

3.2.1 Convergência de  $S_n/n$ 

**Teorema 3.8.** *Se o DRE satisfaz a propriedade forte,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - g(\alpha, n)}{1 - (2p - 1)g(\alpha, n)} (2\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) - 1) \quad (40)$$

Para demonstrá-lo, precisamos antes verificar a convergência de  $f(T^n x)$  em  $n$ . Suponha que estamos num caso puramente dinâmico, isto é  $g(\alpha, n) \equiv 0$ .

Então, pela Lei Forte (Teorema 3.4), vale o limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} \right| = 0. \quad (41)$$

Ainda, pelo Teorema 2.16,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 2\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) - 1 \quad P - q.c. \quad (42)$$

É importante notar que a esperança condicional  $\mathbb{E}[f|\mathcal{I}]$  é tomada com respeito à medida  $\mu$ , ao passo que a esperança que tomamos no nosso passeio é tomada com respeito à medida  $P$ . Como o único momento em que a medida  $\mu$  aparece é em  $\mathbb{E}[f|\mathcal{I}]$ , não faremos tal distinção e admitiremos que em todos os demais casos, a medida associada é  $P$ .

Observemos que dadas três sequências de números reais  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(b_n)_{n \geq 1}$  e  $(c_n)_{n \geq 1}$  tais que  $\limsup a_n \leq \limsup b_n$ , então  $\limsup a_n - c_n \leq \limsup b_n - c_n$ . Assim, pelo Teorema de Stolz-Cesàro (Teorema B.2.1), temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} - \mathbb{E}[X_{n+1}] = 0, \quad (43)$$

onde  $\mathbb{E}[X_{n+1}] = 2\mathbb{E}[f(T^{n+1}x)] - 1$ .

Juntando os fatos acima, temos a proposição abaixo.

**Proposição 3.9.** *Vale o seguinte limite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(T^n x)] = \mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) \quad P - q.c. \quad (44)$$

**Demonstração:**

Admitindo que estamos no caso puramente dinâmico  $g(\alpha, n) \equiv 0$ , temos:

$$\begin{aligned} 2|\mathbb{E}[f(T^{n+1}x)] - \mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x)| &\leq \left| (2\mathbb{E}[f(T^{n+1}x)] - 1) - \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} \right| + \left| \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} - (2\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) - 1) \right| \\ &= \left| \mathbb{E}[X_{n+1}] - \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} \right| + \left| \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} - (2\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) - 1) \right| \\ &\leq \left| \mathbb{E}[X_{n+1}] - \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} \right| + \left| \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} - \frac{S_n}{n} \right| + \left| \frac{S_n}{n} - (2\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) - 1) \right|, \end{aligned}$$

o que conclui o resultado.  $\square$

Agora mostramos a convergência desejada.

**Demonstração (Teorema 3.8):** Note que, pelo teorema de Stolz-Cesàro (Teorema B.2.1),  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} - \mathbb{E}[X_{n+1}] = 0$ .

Pela Proposição 3.1,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = \frac{g(\alpha, n+1)(2p-1)}{n} \mathbb{E}[S_n] + (1-g(\alpha, n+1))(2\mathbb{E}[f(T^{n+1}x)] - 1). \quad (45)$$

Juntando os fatos acima,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} - \frac{g(\alpha, n+1)(2p-1)}{n} \mathbb{E}[S_n] + (1-g(\alpha, n+1))(2\mathbb{E}[f(T^{n+1}x)] - 1) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-g(\alpha, n+1)(2p-1)) \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} + (1-g(\alpha, n+1))(2\mathbb{E}[f(T^{n+1}x)] - 1) = 0. \end{aligned}$$

Pela propriedade forte, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} - \frac{1-g(\alpha, n+1)}{1-g(\alpha, n+1)(2p-1)} (2\mathbb{E}[f(T^{n+1}x)] - 1) = 0 \quad (46)$$

Como  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n+1)$  e da proposição 3.9:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-g(\alpha, n+1)}{1-g(\alpha, n+1)(2p-1)} (2\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) - 1) \quad q.c. \quad (47)$$

$\square$

### 3.2.2 Os termos $A_n$

Definimos agora  $A_n^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_n^2}$ .

Note que  $A_n$  é uma sequência de números reais, então é necessário e suficiente que  $A_n^2$  convirja para que  $A_n$  convirja.

Definindo os termos  $c_n = \frac{1}{a_n^2}$ , temos:

$$\begin{aligned} n \left( 1 - \frac{c_n}{c_{n+1}} \right) &= n \left( 1 - \left( 1 + \frac{(2p-1)g(\alpha, n+1)}{n} \right)^2 \right) \\ &= n \left( -\frac{2(2p-1)g(\alpha, n+1)}{n} - \frac{(2p-1)^2 g^2(\alpha, n+1)}{n^2} \right) \\ &= (2-4p)g(\alpha, n+1) - \frac{(2p-1)^2 g^2(\alpha, n+1)}{n} \end{aligned}$$

O critério de Raabe (encontrado em [Kno]) diz que se  $R := \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{c_n}{c_{n+1}} \right)$  é tal que  $R < 1$ , então  $\lim A_n = \infty$ . Se  $R > 1$ ,  $\lim A_n < \infty$ . Note que  $p = 1/2$  implica  $R = 0$ , logo diverge.

Também,  $p > 1/2$  implica  $(2-4p) \lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n) < 0$ , logo a série diverge.

Estudemos o caso  $p < 1/2$ , ou seja,  $2-4p > 0$ :

- Se queremos que a série divirja, temos  $R < 1$ . Logo,

$$(2-4p) \lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n) < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n) < \frac{1}{2-4p} \quad (48)$$

- Se queremos que a série convirja, temos  $R > 1$ . Portanto

$$(2-4p) \lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n) > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n) > \frac{1}{2-4p} \quad (49)$$

- Se não podemos usar o critério de Raabe, i.e.,  $R = 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n) = \frac{1}{2-4p}. \quad (50)$$

Usando a convergência de  $g(\alpha, n)$ , como na demonstração do Lema 3.6, existe  $0 < M < \infty$  tal que para algum  $k_0 \in \mathbb{N}$ ,  $c_n \sim (M \prod_{k=k_0}^n 1 - \frac{1}{2k})^{-2}$ .

Como para  $n$  suficientemente grande,  $(M \prod_{k=k_0}^n 1 - \frac{1}{2k}) < 1$ ,  $c_n > 1$ , portanto a série diverge.

Ou seja,  $A_n$  converge se, e somente se, valem:

(i)  $p < 1/2$

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n) > \frac{1}{2-4p}$

### 3.3 TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

Aqui enunciamos e provamos o Teorema Central do Limite.

**Teorema 3.10** (Teorema Central do Limite). *Suponha que vale a propriedade forte e que  $p \geq 1/2$  ou, se  $p < 1/2$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n) \leq \frac{1}{2-4p}$ . Então:*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n A_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \lambda), \tag{51}$$

onde  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1-g(\alpha, n)}{1-(2p-1)g(\alpha, n)} (2\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) - 1)^2$ .

Como admitimos a propriedade forte,  $a_n/n \rightarrow 0$  e vale a Lei Forte dos Grandes Números. Desta forma, basta rever a Proposição 3.1 e obtemos  $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \sim \mathbb{E}[X_{n+1}]$ .

Juntando o fato de  $\mathbb{E}[Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = \frac{1-\mathbb{E}^2[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n]}{a_n^2}$  e o Teorema 3.8, vale que:

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] \sim \left( \frac{1}{a_{n+1}^2} \right) \left( 1 - \frac{1 - \ell(\alpha)}{1 - (2p - 1)\ell(\alpha)} (2\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) - 1) \right), \tag{52}$$

onde  $\ell(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n)$ .

**Demonstração (Teorema 3.10):**

Faremos como no Lema C.1.3.

Nos termos do Lema, consideramos  $S_{n,i} = \frac{M_i}{A_n}$  e, portanto,  $X_{n,i} = \frac{Y_i}{A_n}$ .

O item (iii) é imediato e o item (ii) é uma consequência da equação (52), aqui, tomando  $k_n = n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{n,n}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( \frac{Y_k}{A_n} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{k-1} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}]}{A_n^2} \tag{53}$$

$$= 1 - \frac{1 - \ell(\alpha)}{1 - (2p - 1)\ell(\alpha)} (2\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) - 1) \quad q.c. \tag{54}$$

Para mostrar o item (i), precisamos primeiro observar alguns fatos.

Quando  $p \geq 1/2$ ,  $a_n \geq 1$ , o que implica, junto da equação (38), que a família de eventos  $\{|X_{n,i}| > \varepsilon\} \subset \left\{\left|\frac{4}{A_n}\right| > \varepsilon\right\}$ . E pela divergência de  $A_n$ , esse conjunto é vazio a partir de algum  $n$ .

Quando  $p < 1/2$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n) \leq \frac{1}{2-4p}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n A_n = \infty$  e, ainda, para todo  $j \leq n$ ,  $a_j^{-1} \leq a_n^{-1}$ . Assim  $\{|X_{n,i}| > \varepsilon\} \subset \left\{\left|\frac{4}{a_n A_n}\right| > \varepsilon\right\}$ , que, novamente, é vazio a partir de algum  $n$ .

Assim, vale para todo  $\varepsilon > 0$ :

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_{n,i}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,i}| > \varepsilon\}} | \mathcal{F}_{n,i-1}] \xrightarrow{P} 0, \quad (55)$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

### 3.4 TEOREMA DE CONVERGÊNCIA QUASE-CERTA

Nas condições em que  $p < 1/2$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n) > \frac{1}{2-4p}$ , garantimos uma convergência quase-certa.

**Teorema 3.11.** *Suponha que valem a propriedade forte,  $p < 1/2$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n) > \frac{1}{2-4p}$ . Então:*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n} \xrightarrow{q.c.} M, \quad (56)$$

onde  $M$  é variável aleatória não-degenerada com média zero.

**Demonstração:**

Por hipótese, estamos no caso em que  $A_n$  é convergente.

Como  $|Y_n| \leq \frac{3}{a_n}$ , o Teorema C.1.4 nos dá  $M_n = \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n} \rightarrow M$ , quase certamente e em  $\mathcal{L}^2$ . Como  $Y_n$  é uma diferença de martingalas,  $\mathbb{E}[Y_n] = 0$  para todo  $n$ . Assim:

$$|\mathbb{E}[M]| = |\mathbb{E}[M - M_n]| \leq \mathbb{E}[|M - M_n|] \leq \mathbb{E}[|M - M_n|^2]^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (57)$$

Ainda mais, como  $(M_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de martingalas limitadas em  $\mathcal{L}^2$  e ela converge quase certamente, temos:

$$\text{Var}[M] = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[M_n] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_k^2] > 0. \quad (58)$$

Concluimos que  $M$  tem média zero e é não-degenerada. □



# 4

## APLICAÇÕES DO DRE

Como encontramos resultados um pouco gerais sobre os parâmetros do modelo, analisamos alguns casos.

### 4.1 VARIAÇÃO DE $g(\alpha, n)$

A função de transição entre as leis do modelo ERW e do modelo DRW é fundamental no modelo, pois é ela que indica a quantidade de memória que o modelo tem no instante  $n$ .

Quando fixamos  $\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x)$ , podemos exibir mapas de fase sobre o modelo. Antes, outra observação.

**Observação 4.1.** O limite da média da posição,  $S_n/n$ , quando fixamos  $\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x)$  é uma função do tipo  $\frac{1-y}{1-cy}C$ , onde  $c, C \in [-1, 1]$  e  $y \in [0, 1]$ ,  $y = y(\alpha)$ .

Ao buscar pontos críticos de  $h(y) = \frac{1-y}{1-cy}C$ , exceto quando  $c = (2p - 1) = 1$  ou  $C = 0$ , que são funções constantes, vemos que:

$$\frac{d}{dy} \frac{1-y}{1-cy} C \tag{59}$$

$$= \frac{-1(1-cy) - (1-y)(-c)}{(1-cy)^2} C \tag{60}$$

$$= \frac{-(1-c)}{(1-cy)^2} C \tag{61}$$

$$= -\frac{1}{(1-cy)^2} C \neq 0 \tag{62}$$

Isto é, a função não tem pontos críticos e é decrescente em  $y$ .

O que notamos acima é que se a função limite  $\ell(\alpha) := \lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha, n)$  é decrescente em  $\alpha$ , então a média do passeio é crescente em  $\alpha$  e vice-versa.

Ao estudarmos  $p = 1/2$  temos duas consequências. A primeira é que o passeio limite torna-se proporcional ao caso dinâmico, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = (1 - \ell(\alpha))(2\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) - 1). \quad (63)$$

Ainda, o Teorema Central do Limite se apresenta da seguinte forma:

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, 1 - (1 - \ell(\alpha))^2(2\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) - 1)^2\right). \quad (64)$$

$$4.1.1 \quad g(\alpha, n) = \sqrt{\alpha + \frac{1}{n}(\text{ mod } 1)}$$

Restringimos o domínio agora em  $Dom(g) = [0, 1] \times \mathbb{N}$ .

No nosso caso,  $\text{ mod } 1$  indica que estamos tomando a parte não-inteira do número. Isto é,  $y(\text{ mod } 1) = y - \lfloor y \rfloor$ .

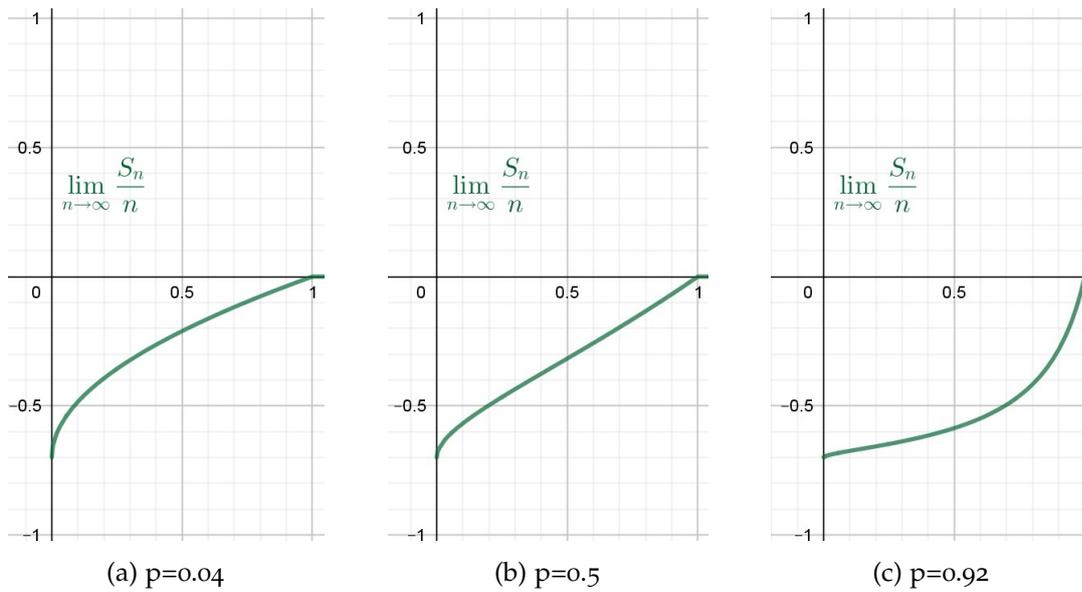
A função  $g$  toma a raiz quadrada de uma espécie de rotação racional no toro, o que por si só, já é um problema interessante [DRW].

Temos que  $\ell(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ . Assim, fazemos o mapa de fases para o DRE.

Supomos no nosso problema  $\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) = 0.15$ . Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{1 - (2p - 1)\sqrt{\alpha}}(-0.7) \quad q.c. \quad (65)$$

A figura 2 mostra alguns exemplos para  $p$  fixo.

Figura 2: Gráfico limite de  $S_n/n$ 

$$4.1.2 \quad g(\alpha, n) = \alpha + \frac{1}{n} (\text{mod } 1)$$

Como no exemplo anterior, tomamos  $\text{Dom}(g) = [0, 1] \times \mathbb{N}$ .

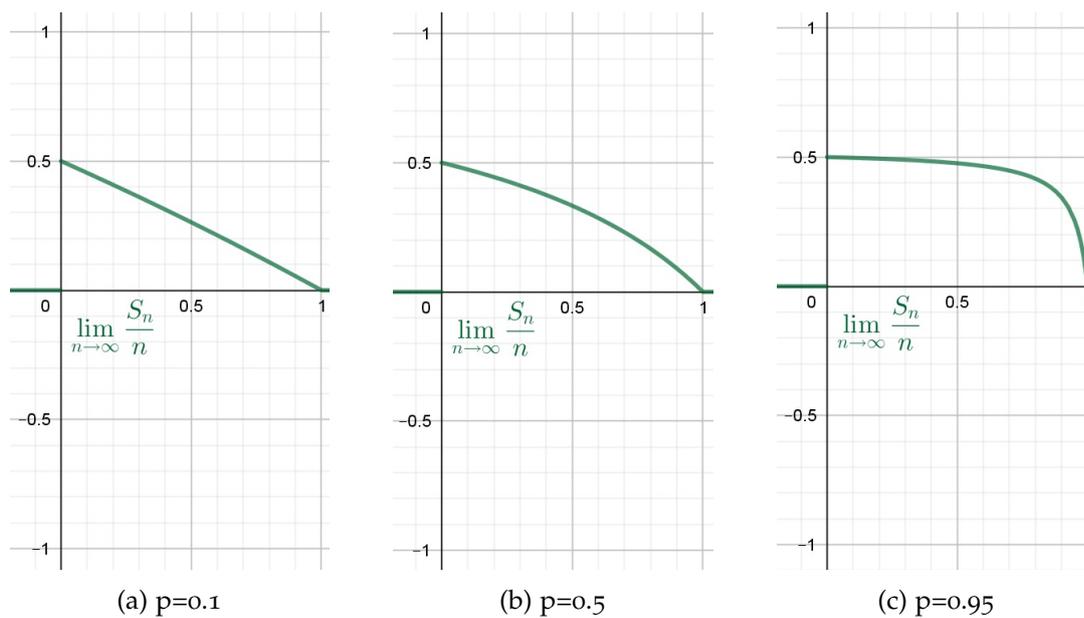
Novamente, estamos tomando uma espécie de rotação no toro, daí a relevância de exemplos desse tipo.

Sabemos que  $\ell$  atua como identidade, portanto, mostramos mapas de fase para  $\ell(\alpha) = \alpha$ .

Como temos linearidade em  $\ell(\alpha)$  neste caso, observamos que a concavidade do mapa de fases quando visto como função de  $\alpha$ , conforme mostra a figura 3, se difere do exemplo anterior por ser a mesma para  $0 < p < 1$ .

Consideramos  $\mathbb{E}[f|Z](x) = 0.75$ , portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1 - \alpha}{1 - (2p - 1)\alpha} 0.5 \quad q.c. \quad (66)$$

Figura 3: Gráfico limite de  $S_n/n$ 

$$4.1.3 \quad g(\alpha, n) = \frac{1}{2} \sin\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}$$

Tomamos como último exemplo o mapa de fases dessa função. A característica cíclica da função seno nos é interessante, pois podemos tomar passeios aleatórios indexados a parâmetros distintos de  $\alpha$ , tais que uma pequena variação acaba gerando um passeio completamente diferente.

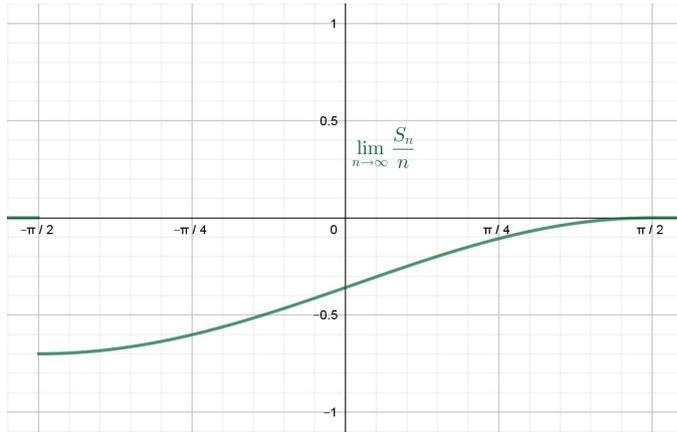
Note que poderíamos tomar toda a reta como domínio do parâmetro, mas toda a oscilação que queremos encontra-se compreendida no intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Dessa forma, consideramos  $Dom(g) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

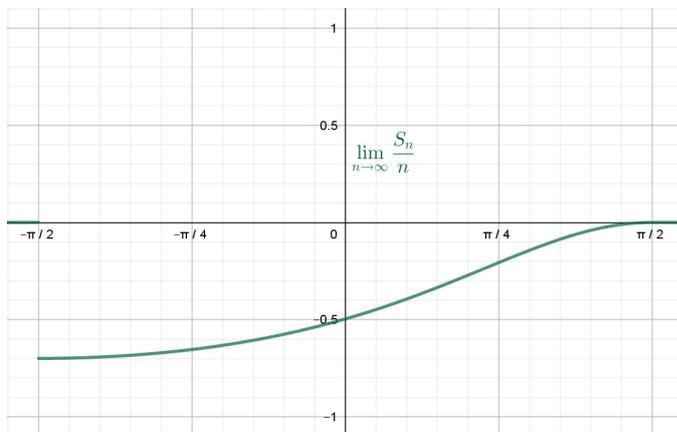
Note que  $\ell(\alpha) = \frac{\sin \alpha + 1}{2}$ . Aqui tomamos  $\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) = 0.15$ , portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1 - \frac{\sin \alpha + 1}{2}}{1 - (2p - 1) \frac{\sin \alpha + 1}{2}} (-0.7) \quad q.c.$$

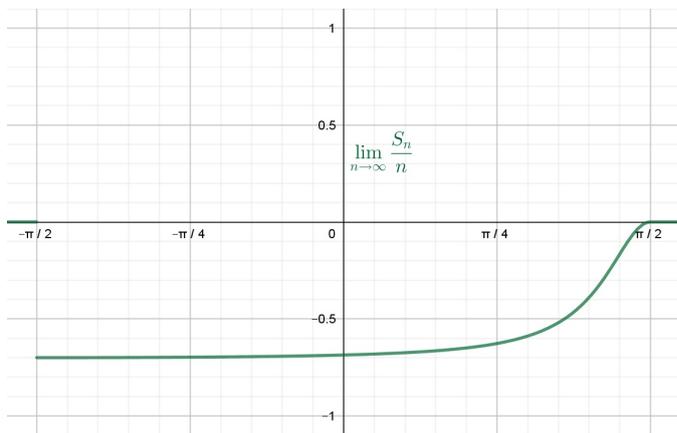
A figura 4 mostra alguns casos para  $p$  fixo.



(a)  $p=0.05$



(b)  $p=0.59$



(c)  $p=0.98$

Figura 4: Gráfico limite de  $S_n/n$

## 4.2 MODELO COMPLETO

Trabalhemos com um modelo simples.

Sejam  $X = \mathbb{R}^2$  e  $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  a  $\sigma$ -álgebra dos borelianos e  $\mu$  a medida de Lebesgue. Seja  $T$  a transformação linear com forma matricial  $T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ , onde  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Como  $T$  é rotação, é imediato que é invariante por  $\mu$ .

Seja  $f : X \rightarrow [0, 1]$  dada por  $f(x) = e^{-|x|^2}$ . Temos que  $f \circ T^n = f$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , portanto  $\mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) = f(x)$ .

Seja  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$  com  $g = \mathbb{1}_{\{[0,1]\}} \circ \pi_1$ , onde  $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  é a projeção canônica. Isto é,  $g$  é a identidade em  $[0, 1]$  e identicamente nula no complemento.

Sejam  $p, q \in [0, 1]$ .

Supomos  $\alpha \in (0, 1)$  para evitar trivialidades. Também, assim, estamos nas condições da propriedade forte

Primeiramente, temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1 - \alpha}{1 - (2p - 1)\alpha} (2f(x) - 1)$  quase certamente. Como  $f$  é função radial, a primeira observação que temos é que o passeio aleatório está dividido em três regiões, conforme a figura 5.

Na região  $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \ln 2\}$ , temos que o passeio em média vai mais para a esquerda, isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} < 0$ . Na região  $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = \ln 2\}$ , o passeio é estacionário, isto é, tende a ficar na origem. Por fim, na região  $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > \ln 2\}$ , o passeio vai mais para a direita.

Um caso interessante é quando  $p = 1/2$ , pois temos que  $a_n = 1$  e  $A_n = \sqrt{n}$ . Vale, então, o Teorema Central do Limite (Teorema 3.10):

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left( 0, 1 - (1 - \alpha)^2 e^{-2|x|^2} \right) \quad (67)$$

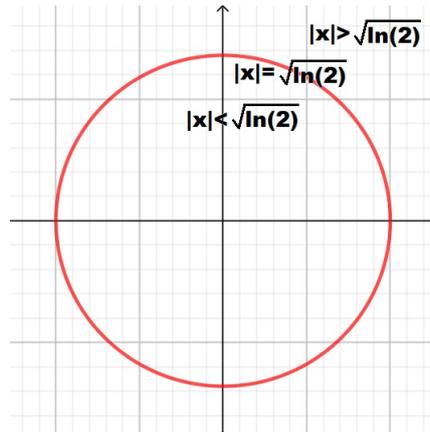


Figura 5: Regiões do passeio aleatório

Para  $p \neq 1/2$ , faz-se necessário o uso de técnicas numéricas para calcular  $a_n$  e  $A_n$ , o que foge ao escopo deste trabalho.



# 5

## CASOS APLICÁVEIS

Aqui são propostos três casos possíveis de se aplicar o modelo DRE. Nas nossas simulações, tomamos  $p = 1/2$ , pois é o caso em que conseguimos calcular as constantes  $a_n$  e  $A_n$ .

### 5.1 PRECIFICAÇÃO

Considere um item que está à venda numa loja  $L$  e denote por  $P_1^n$  seu preço no instante  $n$ . Considere ainda o índice  $I_1^n$  como a média do valor de venda desse produto em todas as lojas no instante  $n$ .

Diremos que a taxa de inflação atrelada a esse produto no instante  $n$ ,  $I_n$ , é dada por  $I_n = \frac{I_1^n}{I_1^{n-1}}$ . Analogamente, a taxa de inflação própria é definida como  $P_n = \frac{P_1^n}{P_1^{n-1}}$ .

Para cada instante  $n$ , considere a variável aleatória  $X_n$  que assume valores em  $\{-1, 1\}$ , onde  $X_n = 1$  se  $P_n > I_n$  e  $X_n = -1$  se  $P_n \leq I_n$ . Isto é,  $X_n$  é a variável aleatória que indica se a loja aumentou o preço de seu produto acima da inflação ou não.

A proposta de aplicação do modelo DRE a este caso é que o aumento de preço será dividido em dois processos de escolha.

O primeiro processo é olhar para o passado e escolher um instante aleatoriamente uniformemente e decidir com probabilidade  $p$  se o segue, como no modelo ERW.

O segundo processo é que a escolha de preços é regida por um sistema dinâmico em  $X$  que indica o tamanho do ciclo de venda daquele produto, com  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mu$  medida de Lebesgue,  $T$  transformação que leva um instante do ciclo de venda noutro

instante numa distância de tamanho  $t$ ,  $f$  a função que indica a capacidade de estoque (isto é, 0 é estoque vazio, 1 cheio). A função  $f(T^n x)$  dá a probabilidade de aumentar o preço acima da inflação no instante  $n$ , como no modelo DRW.

Como o segundo processo é mais técnico, consideramos o modelo DRE, com a função de transição de modelos,  $g(\alpha, n)$ , tendendo a 0.

Temos que  $S_n := X_1 + \dots + X_n$  denota o quanto o valor de venda do produto está balanceado com a inflação, sendo que  $\frac{S_n}{n}$  a média de aumento.

### 5.1.1 Simulação

Tomemos esse modelo com  $q = 1/4$ , pois num primeiro momento é melhor não aumentar o preço do produto acima da inflação,  $p = 1/2$  para que a lembrança da escolha não seja influente,  $g(\alpha) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{n}\right) + \frac{1}{2}$  para observar um processo mais cíclico,  $X = \mathbb{N}$ ,  $\Sigma = \mathcal{P}(X)$ ,  $\mu(\{n\}) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $T(n) = n + 1$  e  $f(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin(e^{-n})$ , pois o estoque oscila mais no começo.

Temos que o aumento em relação à inflação tende ao equilíbrio:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad q.c. \quad (68)$$

Também, segue uma distribuição normal padrão:

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (69)$$

## 5.2 URNA

A proposta apresentada aqui é uma variação da apresentada na seção 2.2.1, mas mantemos a mesma roupagem.

Considere uma urna com bolas vermelhas e pretas, sendo que num momento inicial a quantidade de ambas é igual a 1.

A princípio, a dinâmica do modelo era que num instante  $n$  fosse retirada uma bola, depois ela seria devolvida e outra bola de mesma cor seria posta na urna, com probabilidade  $p$  ou da outra cor, com probabilidade  $1 - p$ . Entretanto, nesta proposta, existe uma possibilidade de perda de memória imediata.

Neste modelo, quando a bola é devolvida para a urna, existe uma probabilidade de a cor da bola que foi retirada ser esquecida. A cada instante  $n$ , a probabilidade de não esquecer a bola é dada por  $g(\alpha, n)$ .

Dessa forma, caso seja esquecida a bola, há um critério para que seja colocada mais uma bola na urna. O critério diz que a probabilidade da bola colocada na urna no instante  $n$  ser preta é de  $f(T^n x)$  e de ser vermelha, é de  $1 - f(T^n x)$ .

Se  $X_n^1$  conta a quantidade de bolas pretas e  $X_n^2$  conta a quantidade de bolas vermelhas, então  $S_n = X_n^1 - X_n^2$  conta quantas bolas pretas a urna tem a mais que vermelhas.

E é imediato porque a proposta para este caso é um DRE, onde o sistema dinâmico considerado pode ser bem simples, inclusive tomando o espaço como  $\mathbb{N}$ .

### 5.2.1 Simulação

Considere esse problema com  $q = 1/2$ , isto é, a chance de escolher uma das bolas é a mesma,  $X = \mathbb{N}$ ,  $g(\alpha, n) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha(-1)^n}{n}\right) + \frac{1}{2}$ , a chance de esquecer a bola é cíclica,  $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $\mu(\{n\}) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T(n) = n + 1$  e  $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$ , ou seja, a probabilidade de colocar uma bola preta, uma vez que esqueceu a bola que retirou, vai diminuindo com o tempo.

Temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right)\right) \left(2\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{(1 - \sqrt{2})(2 - e)}{4e} = C \quad q.c. \quad (70)$$

Também, pelo Teorema Central do Limite:

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1 - C^2) \quad (71)$$

### 5.3 COLÔNIA DE BACTÉRIAS

Suponha que uma colônia de bactérias que está em observação é composta por duas espécies de bactérias, A e B, sendo que ambas sintetizam as proteínas C e D.

O fator de espécie é a seguinte característica: quando que se duplicam (essa é a forma como se reproduzem), bactérias da espécie A sintetizam a proteína C com probabilidade  $p$  e sintetizam a proteína D com probabilidade  $1 - p$ . O mesmo é válido para as bactérias da espécie B que sintetizam a proteína C com probabilidade  $1 - p$  e D com probabilidade  $p$ .

Na colônia, a reprodução das bactérias não é simultânea, isto é, duas bactérias não se duplicam ao mesmo tempo.

Considere  $(X, \Sigma, \mu, T)$  um sistema dinâmico, de preferência que se relacione ao tempo de observação da colônia de bactérias.

Diremos que o fator temporal é a característica de que essas bactérias, independente de sua espécie, ao se duplicarem, tenham probabilidade  $f(T^n x)$  de sintetizar a proteína C no instante  $n$  e  $1 - f(T^n x)$  de sintetizar a proteína D no instante  $n$ , onde  $f : X \rightarrow [0, 1]$  é alguma função razoável.

A função de transição espécie-tempo,  $g(\alpha, n)$ , é a função que modula o quanto é importante o fator de espécie ou o fator temporal na  $n$ -ésima reprodução (duplicação).

Seja  $X_n^1$  a quantidade de proteína C sintetizada até a reprodução  $n$  e  $X_n^2$  a quantidade de proteína D sintetizada até a reprodução  $n$ . Defina então  $S_n = X_n^1 - X_n^2$  a diferença na quantidade de proteínas.

Então  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  define um DRE.

### 5.3.1 Simulação

Se no experimento de observação, nota-se que a quantidade de proteínas tende a se equilibrar conforme o tempo, ou seja, observa-se que a quantidade de proteína C é arbitrariamente próxima da quantidade de proteína D, então podemos supor que fator temporal é uma função que tende a  $1/2$ . Desta forma, são imediatos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad q.c. \quad (72)$$

E também, sua distribuição tende a uma normal padrão:

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (73)$$



# 6

## CONCLUSÕES

O modelo DRE traz como corolários os passeios aleatórios dados pelos modelos ERW e DRW. É fato que para calcular a média dos passos é um exercício ligeiramente simples, uma vez que temos um teorema que dá sua convergência em termos da função  $\mathbb{E}[f|Z]$  e da convergência da função  $g(\alpha, n)$ .

Ainda, exhibe uma conexão particular com a teoria ergódica, mostrando que podemos encontrar resultados para modelos markovianos utilizando técnicas não-markovianas (quando tomamos  $g \equiv 0$ , por exemplo).

O Teorema de Stolz-Cesàro foi imprescindível para a segunda parte do trabalho, que era provar o Teorema Central do Limite. Sem ele, precisávamos supor hipóteses que vieram como resultado após seu uso.

Neste ponto, vale citar que mesmo com a ausência de sucesso numa demonstração sem hipóteses muito fortes, no primeiro momento, muitos caminhos alternativos foram tomados, o que só enriquece ainda mais a experiência deste trabalho.

O modelo é, também, uma fonte rica de exemplos, uma vez que, dadas os modelos ERW e DRW, não-markoviano e markoviano, respectivamente, podemos trabalhar com algo que a memória afeta pouco a decisão no começo e muito no fim, bem como o oposto.

Os casos apresentados como possíveis aplicações do modelo DRE são uma tentativa de mostrar a abrangência de áreas em que o modelo se encaixa.

Também é fruto deste trabalho a proposta de aplicação do modelo DRW, cujo os exemplos apresentados nas bibliografias requerem um ferramental teórico que foge ao

escopo deste trabalho.

Ao usarmos as técnicas de convergência de martingalas, pudemos verificar resultados de outras naturezas, como, por exemplo, a convergência de produtórios e séries.

# A

## APÊNDICE A

### A.1 ESPERANÇA CONDICIONAL

Admitimos familiaridade do leitor com conceitos básicos da Teoria da Probabilidade. Salvo quando mencionado, estamos admitindo um espaço amostral  $\Omega$ , uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  e uma medida  $P$ .

O conceito de independência entre variável aleatória e  $\sigma$ -álgebra é imprescindível para os desdobramentos da teoria, portanto este é o ponto de partida.

**Definição A.1.1.** *Sejam  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$   $\sigma$ -álgebras. Dizemos que  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$  são independentes se  $\forall A \in \mathcal{G}$  e  $\forall B \in \mathcal{H}$ ,  $A$  e  $B$  são independentes.*

**Definição A.1.2.** *Seja  $\xi$  variável aleatória e  $\mathcal{G}$  uma  $\sigma$ -álgebra. Dizemos que  $\xi$  é independente de  $\mathcal{G}$  se as  $\sigma$ -álgebras  $\sigma(\xi)$  e  $\mathcal{G}$  são independentes.*

**Definição A.1.3.** *Seja  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -álgebra e  $\xi$  variável aleatória. Dizemos que a esperança condicional de  $\xi$  dada a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}$  é a variável aleatória  $\eta$  tal que:*

- $\eta$  é  $\mathcal{G}$ -mensurável;
- $\forall A \in \mathcal{G}$ ,

$$\int_A \eta dP = \int_A \xi dP$$

Usamos a notação  $\eta = E(\xi|\mathcal{G})$ .

Dadas duas variáveis aleatórias  $\xi$  e  $\eta$ , denotamos por  $E(\xi|\eta) = E(\xi|\sigma(\eta))$ .

**Observação A.1.4.** *Seja  $A \in \mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$ . Definimos a probabilidade condicional do evento  $A$  dada  $\mathcal{G}$  por:*

$$P(A|\mathcal{G}) = E(1_A|\mathcal{G})$$

As principais propriedades da esperança condicional são enunciadas no seguinte teorema, cujo uma demonstração se encontra em [BRZ].

**Teorema A.1.5** (Propriedades da Esperança Condicional). *Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{H}, \mathcal{G}$   $\sigma$ -álgebras tais que  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$  e  $\xi, \zeta$  variáveis aleatórias. Então valem as seguintes propriedades:*

1.  $E(a\xi + b\zeta|\mathcal{G}) = aE(\xi|\mathcal{G}) + bE(\zeta|\mathcal{G})$ ;
2.  $E(E(\xi|\mathcal{G})) = E(\xi)$ ;
3.  $E(\xi\zeta|\mathcal{G}) = \xi E(\zeta|\mathcal{G})$  se  $\xi$  é  $\mathcal{G}$ -mensurável;
4.  $E(\xi|\mathcal{G}) = E(\xi)$  se  $\xi$  é independente de  $\mathcal{G}$ ;
5.  $E(E(\xi|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(\xi|\mathcal{H})$ ;
6. Se  $\xi \geq 0$ ,  $E(\xi|\mathcal{G}) \geq 0$

A partir daqui, podemos enunciar a segunda parte da teoria básica: martingalas.

## A.2 MARTINGALAS

A base da teoria de martingalas é a esperança condicional. Neste momento, faz-se necessário não olhar somente para as variáveis aleatórias de um dado processo estocástico, como também para as  $\sigma$ -álgebras.

**Definição A.2.1.** *Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade. Diremos que a sequência de  $\sigma$ -álgebras  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  é uma filtração em relação a  $\mathcal{F}$  se vale:*

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}$$

**Definição A.2.2.** *Dizemos que uma sequência de variáveis aleatórias  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  é adaptada a uma sequência de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$  se para cada  $n \geq 1$ ,  $X_n$  é  $\mathcal{F}_n$ -mensurável.*

Note que a sequência de variáveis aleatórias  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  é naturalmente adaptada à sequência de  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .

Definimos martingalas.

**Definição A.2.3.** *Uma sequência de variáveis aleatórias  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  é dita martingala com respeito à filtração  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$  se:*

1.  $X_n$  é integrável para todo  $n \geq 1$ ;
2.  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  é adaptada a  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ ;
3.  $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$  para todo  $n \geq 1$ .

Temos um conceito análogo, que goza das propriedades **1** e **2**, mas não necessariamente de **3**.

**Definição A.2.4.** Uma sequência de variáveis aleatórias  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  é dita submartingala (supermartingala) com respeito à filtração  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$  se:

1.  $X_n$  é integrável para todo  $n \geq 1$ ;
2.  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  é adaptada a  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ ;
3.  $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$  (respectivamente,  $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$ )  $\forall n \geq 1$ .

Defina  $X_n^+ := X_n \mathbb{1}_{\{X_n \geq 0\}}$ . O seguinte teorema e demonstração encontram-se em [Dur].

**Teorema A.2.5.** Se  $X_n$  é uma submartingala com  $\sup \mathbb{E}[X_n^+] < \infty$ , então quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $X_n$  converge quase certamente para uma variável aleatória  $X$  com  $\mathbb{E}[X] < \infty$ .



# B | APÊNDICE B

## B.1 TEORIA ERGÓDICA

A proposição abaixo é o exercício 7.1.1 em [Dur].

**Proposição B.1.1.**  $\mathcal{I}$  é uma  $\sigma$ -álgebra. Ainda, uma variável aleatória  $f$  é tal que  $f$  é  $\mathcal{I}$ -mensurável se e somente se  $f \circ T = f$ . Neste caso,  $f$  é dita  $T$ -invariante.

**Demonstração:**

1.  $\mathcal{I}$  é  $\sigma$ -álgebra;

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{I}$  trivialmente;
- $A \in \mathcal{I} \Rightarrow T^{-1}(A) = A$ ;

Temos:

$$\begin{cases} T^{-1}(A) = A \\ T^{-1}(A) \cap T^{-1}(A^c) = \emptyset \Rightarrow T^{-1}(A^c) = (T^{-1}(A))^c = A^c \\ \Omega = T^{-1}(A) \cup T^{-1}(A^c) \end{cases}$$

Logo  $A^c \in \mathcal{I}$ ;

- Tome  $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{I}$  disjuntos.

Vale que  $T^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \bigcup_{n \geq 1} T^{-1}(A_n)$ .

De fato,

- ◇  $y \in T^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} A_n) \Rightarrow \exists A_n$  tal que  $y \in T^{-1}(A_n)$ .  
Ou seja,  $T^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} A_n) \subset \bigcup_{n \geq 1} T^{-1}(A_n)$ .
- ◇  $y \in \bigcup_{n \geq 1} T^{-1}(A_n) \Rightarrow \exists A_n$  tal que  $y \in T^{-1}(A_n) \subset T^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} A_n)$ .  
Ou seja,  $\bigcup_{n \geq 1} T^{-1}(A_n) \subset T^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} A_n)$ .

Do fato de  $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{I}$ ,  $T^{-1}(A_n) = A_n$  para todo  $n \geq 1$ , logo

$$T^{-1} \left( \bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

$$2. f \in \mathcal{I} \iff f \circ T = f.$$

A prova é imediata, pois  $f$  ser  $\mathcal{I}$ -mensurável implica  $f \circ T = f$ . Entretanto, como  $\mathcal{I}$  é  $\sigma$ -álgebra e  $f$  variável aleatória,  $f \circ T = f \Rightarrow f$   $\mathcal{I}$ -mensurável.

□

Abaixo, o Teorema 2.3 em [Dur], na notação utilizada aqui.

**Teorema B.1.2** (Teorema Ergódico). *Seja  $(X, \Sigma, P, T)$  um sistema dinâmico em um espaço de probabilidade e  $f \in L^1$ . Então vale:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T^{k-1}(x)) = \mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) \quad P - q.c. \text{ e em } L^1 \quad (74)$$

Aqui, faremos um abuso de notação. Diremos, também, que  $\mathbb{E}[f|\mathcal{I}]$  é a variável aleatória tal que  $\int_A \mathbb{E}[f|\mathcal{I}] d\mu = \int_A f d\mu$  para todo  $A \in \mathcal{I}$  tal que  $\mu(A) < \infty$ . Enunciamos o Teorema 2.3 em [Kre], na notação utilizada aqui, que nos será bastante útil sempre que estivermos em espaços de medida  $\sigma$ -finita.

**Teorema B.1.3** (Teorema Ergódico). *Seja  $(X, \Sigma, \mu, T)$  um sistema dinâmico e  $f \in L^1$ . Então vale:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T^{k-1}(x)) = \mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) \quad \mu - q.c. \text{ e em } L^1 \quad (75)$$

## B.2 TEOREMA DE STOLZ-CESÀRO

Aqui enunciamos e demonstramos o Teorema de Stolz-Cesàro, em sua forma mais geral, já que em [CN], onde o encontramos, a hipótese é um pouco mais forte.

**Teorema B.2.1** (Stolz-Cesàro). *Sejam  $(x_n)_{n \geq 1}$  e  $(y_n)_{n \geq 1}$  seqüências de números reais tais que  $y_n$  é estritamente crescente e  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ . Vale a seguinte desigualdade:*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \quad (76)$$

**Demonstração:** Seguimos uma demonstração encontrada em [IMO].

Note que a primeira e a última desigualdades são equivalentes, ao passo que a segunda desigualdade é trivial. Mostremos a última.

Tome  $c$  qualquer número maior que  $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ . Dado que  $c$  não é o limite superior dessa seqüência, existe  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$ , vale  $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} < c$ . Tome  $n \in \mathbb{N}$  um inteiro qualquer maior que  $n_0$ .

De acordo com a desigualdade anterior,

$$\begin{aligned} x_{n_0+1} - x_{n_0} &< c(y_{n_0+1} - y_{n_0}) \\ x_{n_0+2} - x_{n_0+1} &< c(y_{n_0+2} - y_{n_0+1}) \\ &\vdots \\ x_m - x_{m-1} &< c(y_m - y_{m-1}) \end{aligned}$$

Adicionando termo a termo das desigualdades, obtemos:

$$x_m - x_{n_0} < c(y_m - y_{n_0}) \quad \Rightarrow \quad \frac{x_m}{y_m} - \frac{x_{n_0}}{y_m} < c - c \frac{y_{n_0}}{y_m} \quad (77)$$

Dado que  $y_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , temos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq c \quad (78)$$

Como isso é válido para todo  $c > \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ , então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \quad (79)$$

□



# C

## APÊNDICE C

Enunciamos o Lema de Kronecker, encontrado em [HaHe].

**Lema C.0.1** (Kronecker). *Seja  $(x_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de números reais tais que  $\sum_{n \geq 1} x_n$  converge e seja  $(b_n)_{n \geq 1}$  uma sequência monótona de reais positivos tais que  $b_n \nearrow \infty$ . Então  $b_n^{-1} \sum_{i=1}^n b_i x_i \rightarrow 0$*

### C.1 TEOREMAS LIMITE EM MARTINGALAS

Aqui, introduzimos o conceito de matriz de martingala, do inglês *martingale array*, encontrado em [HaHe].

**Definição C.1.1** (Matriz de Martingala). *Seja, para todo  $n \geq 1$   $\{S_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i}, 1 \leq i \leq k_n\}$  uma martingala de quadrado integrável e média zero, e considere  $X_{n,i} = S_{n,i} - S_{n,i-1}$ ,  $1 \leq i \leq k_n$  ( $S_{n,0} = 0$ ) as diferenças de martingalas. (Assume-se que  $k_n \nearrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .) Diremos que a sequência dupla  $\{S_{n,i}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$  é uma matriz de martingala.*

Abaixo, o Lema 3.3 encontrado em [JJQ].

**Lema C.1.2.** *Seja  $(Z_n, \mathcal{G}_n, n \geq 1)$  uma sequência de diferenças de martingalas. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Z_n^2 | \mathcal{G}_{n-1}] < \infty$  quase certamente, então  $\sum_{j=1}^n Z_j$  converge quase certamente.*

Abaixo, o Corolário 3.1 encontrado em [HaHe].

**Lema C.1.3.** *Seja  $\{S_{n,i}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$  uma matriz de martingala com diferenças  $X_{n,i}$  e seja  $\eta^2$  uma variável aleatória quase-certamente finita. Suponha que valem:*

- (i) *para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $\sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}[X_{n,i}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,i}| > \varepsilon\}} | \mathcal{F}_{n,i-1}] \xrightarrow{P} 0$ ;*
- (ii)  *$V_{n,k_n}^2 = \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}[X_{n,j}^2 | \mathcal{F}_{n,j-1}] \rightarrow \eta^2$ ;*
- (iii) *As  $\sigma$ -álgebras são encaixantes:  $\mathcal{F}_{n,i} \subset \mathcal{F}_{n,i+1}$ , para  $1 \leq i \leq k_n, n \geq 1$ .*

Então  $S_{n,k_n} = \sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \eta^2)$ .

Enunciamos o Teorema 12.1 de [Wil].

**Teorema C.1.4.** *Seja  $\{M_n\}_{n \geq 1}$  uma martingala tal que  $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty$  para todo  $n$ . Então, ela é limitada em  $\mathcal{L}^2$  se e somente se vale*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(M_{k+1} - M_k)^2] < \infty; \quad (80)$$

*E quando isso ocorre,  $M_n$  converge quase certamente e em  $\mathcal{L}^2$ .*

## BIBLIOGRAFIA

- [Art] ARTIN, E.; *The Gamma Function*, Holt Rinehart & Winston, 1931.
- [BB] BAUR, E.; BERTOIN, J.; *Elephant Random Walks and their connection to Pólya-type urns*, *Physical Review*, v. 94, 2016.
- [Bil] BILLINGSLEY, P.; *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, 2 ed., 1986.
- [Cara] CARAZZA, B.; *The history of the random-walk problem: considerations of the interdisciplinarity in modern physics*, *Nuovo Cimento*, v. 7, 1977.
- [CN] CHOUDARY, A. D. R.; NICULESCU, C.; *Real Analysis on Intervals*, Springer, 1 ed., 2014.
- [CGS] COLETTI, C. F.; GAVA, R.; SCHÜTZ, G.; *Central Limit Theorem for the Elephant Random Walk*, *Journal of Mathematical Physics*, v. 58, 2017.
- [CGS<sub>2</sub>] COLETTI, C. F.; GAVA, R.; SCHÜTZ, G.; *A strong invariance principle for the elephant random walk*, *Journal of Statistical Mechanics*, 2017.
- [Dur] DURRETT, R.; *Probability: Theory and Examples*, Cambridge University Press, 4 ed., 2010.
- [DRW] GUILLOTIN-PLANTARD, N.; SCHOTT, R.; *Dynamic Random Walks*, Elsevier Science, 2006.
- [HaHe] HALL, P.; HEYDE C. C.; *Martingale Limit Theory and Its Application*, Academic Press, 1980.
- [IMO] IMO Compendium; *IMOMath: L'Hopital's Theorem*; <<https://www.imomath.com/index.php?options=686>>; Acesso em: 28 de jan. de 2020.
- [JJQ] JAMES, B.; JAMES, K.; QI, Y.; *Limit theorems for Correlated Bernoulli random variables*, *Statistics & Probability Letters*, v. 78, 2008.

- [Kno] KNOPP, K.; *Theory and applications of infinite series*, Blackie & Son, 4 ed., 1954.
- [Kre] KRENGEL, U.; *Ergodic Theorems*, De Gruyter studies in mathematics, 1 ed., 1985.
- [Mand] MANDELBROT, B. B.; *Fractals and scaling in finance: Discontinuity, concentration, risk.*, Springer, Selecta v. E, 2013.
- [Pear] PEARSON, K.; *The problem of the random walk*, Nature, v. 72, 1905.
- [Rose] ROSENTHAL, J.S.; *A First Look at Rigorous Probability Theory*, World Scientific Publishing, 2 ed., 2006.
- [Sch] SCHÜTZ, G.; TRIMPER, S.; *Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk*, Physical Review, v. 70, 2004.
- [Shie] SHIELDS, P.C.; *The ergodic theory of discrete sample paths*, American Mathematical Society, v. 13, 1996.
- [Wil] WILLIAMS, D.; *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, 1 ed., 1991.
- [BRZ] BRZEZNIAK, Z. and ZASTAWNIAK, T.; *Basic stochastic processes: a course through exercises*, Springer Science & Business Media, 1 ed., 2000.