Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Programa de Pós-graduação em Matemática

Tiago Henrique dos Reis

# Sobre álgebras de evolução de dimensão finita

Santo André, 2022

**Universidade Federal do ABC**

**Centro de Matemática, Computação e Cognição**

**Tiago Henrique dos Reis**

# Sobre álgebras de evolução de dimensão finita

**Orientador: Prof. Dr. Roldão da Rocha Junior**

**Coorientadora: Profa. Dra. Paula Andrea Cadavid Salazar**

Tese de doutorado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Doutor em Matemática

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Tiago Henrique dos Reis, e orientada pelo Prof. Dr. Roldão da Rocha Junior.

**Santo André, 2022**

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

dos Reis, Tiago Henrique
Sobre álgebras de evolução de dimensão finita / Tiago Henrique dos Reis. — 2022.

98 fls.

Orientador: Roldão da Rocha Junior
Coorientadora: Paula Andrea Cadavid Salazar

Tese (Doutorado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2022.

1. álgebra de evolução. 2. álgebra. 3. grafo. 4. derivações. I. da Rocha Junior, Roldão. II. Salazar, Paula Andrea Cadavid. III. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2022. IV. Título.

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).**

**Santo André, 03 de Junho de 2022 .**

Tiago Henrique dos Reis Tiago Henrique dos Reis

**Nome completo e Assinatura do(a) autor(a)**

Paula Cadavid .

**Nome completo e Assinatura do(a) (co)orientador(a)**

Paula Andrea Cadavid Salazar

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**
**Fundação Universidade Federal do ABC**
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

## FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato, TIAGO HENRIQUE DOS REIS realizada em 30 de Maio de 2022:

p/ Paula Cadavid
**Prof.(a) IRENE PANIELLO ALASTRUEY**
UNIVERSIDAD PUBLICA DE NAVARRA

p/ Paula Cadavid
**Prof.(a) MARY LUZ RODIÑO MONTOYA**

p/ Paula Cadavid
**Prof.(a) RAÚL MANUEL FALCÓN GANFORNINA**

p/ Paula Cadavid
**Prof.(a) SANDRA MARIA ZAPATA YEPES**
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

**Prof.(a) MARIA INEZ CARDOSO GONÇALVES**
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

**Prof.(a) SEBASTIAN JAVIER VIDAL**

Paula Cadavid
**Prof.(a) PAULA ANDREA CADAVID SALAZAR**
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

# DEDICATÓRIA

Dedico essa tese ao Seu Antônio e a Dona Maria.

# AGRADECIMENTOS

A todos integrantes dos grupos de trabalho que participei durante o doutorado. Em especial a Professora Yolanda Cabrera, com quem tive a prazer de colaborar. Seus trabalhos foram uma importante fonte de inspiração para esta tese.

À Professora Paula Cadavid pelo apoio e dedicação a este trabalho. Obrigado pela paciência com meus telegramas.

Aos Professores Pablo M. Rodriguez, Mary Luz Rodiño Montoya e Sandra Z. Yepes pela ajuda na revisão do texto.

Ao Professor Roldão Rocha pela ajuda.

Aos meus amigos Bruno, José Flavio, Zetti, Débora, Douglas, Debarba, Michele, Pinguelo e Ícaro. À minha querida amiga geômetra Adriana, por toda uma vida de dedicação a matemática compartilhada.

À Ana, por sempre estar ao meu lado e me ajudar a enfrentar um doutorado em meio a uma pandemia.

À minha querida família, que é grande demais para eu nomear aqui.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

# RESUMO

As álgebras de evolução são álgebras não associativas inspiradas em fenômenos biológicos com aplicações e conexões com vários campos da matemática. Propõe-se o estudo das álgebras de evolução de dimensão finita usando como principal ferramenta a teoria de grafos. Mostra-se como o radical de absorção deste tipo de álgebra pode ser obtido a partir das propriedades do seu grafo associado. Define-se o conceito de laço de uma álgebra de evolução e apresentam-se condições suficientes e necessárias para que a quantidade de laços seja preservada pela troca de base natural. Estuda-se o espaço de derivações de álgebras de evolução não degeneradas e, em especial, das álgebras de evolução de Volterra. Além disso, apresenta-se uma caracterização completa do espaço de derivações das álgebras de evolução associadas a grafos não orientados quando consideradas álgebras sobre corpos de característica positiva.

**Palavras-chave**: álgebra de evolução, derivação, grafo, álgebra não associativa

# ABSTRACT

Evolution algebras are non-associative algebras inspired by biological phenomena with applications and connections to several fields of mathematics. We propose to study finite-dimensional evolution algebras using graph theory as the main tool. We show how the absorption radical of these algebras can be obtained from the properties of its associated graph. The concept of loop of an evolution algebra is defined and sufficient and necessary conditions are presented so that the number of loops is preserved by changing the natural base. The space of derivations of non-degenerate evolution algebras and, in particular, of Volterra evolution algebras are studied. Furthermore, a complete characterization of the space of derivations of evolution algebras associated with undirected graphs is presented when considering algebras over fields with non-zero characteristics.

**Keywords**: evolution algebra, derivation, graph, non-associative algebra

# CONTEÚDO

# INTRODUÇÃO

O conceito de Álgebra de Evolução foi introduzido por Tian e Vojetchovsky no trabalho [20], publicado em 2006. Estas álgebras representam a auto-reprodução de alelos em modelos de genética não-Mendeliana. Em 2008, Tian publicou o livro [19], onde apresenta a teoria das álgebras de evolução e estabelece conexões desta com áreas tais como teoria de grafos, biologia, física, topologia e probabilidade. Nesta tese focamos nosso interesse em aspectos puramente algébricos desta teoria e sua relação com a teoria de grafos.

Uma importante característica das álgebras de evolução é que a sua definição depende da existência de uma base com uma certa propriedade, a chamada base natural. Em [2] os autores apresentam condições para que um elemento de uma álgebra de evolução pertença a uma base natural. Além disso, exploram as relações entre diferentes bases naturais.

Um ideal que será foco do nosso trabalho é o radical de absorção. Definido em [5], este radical é obtido a partir da intersecção de ideais com a propriedade de absorção e tem como principal característica que o quociente de uma álgebra de evolução pelo seu radical de absorção é uma álgebra não degenerada. Em [7] os autores apresentam uma série de propriedades do radical de absorção e utilizam tal radical para classificar álgebras de evolução de dimensão três.

A relação das álgebras de evolução com a teoria de grafos tem papel fundamental nesta tese. Já em [19], Tian apresenta uma forma de, a partir de um grafo não orientado, construir uma álgebra de evolução. O Capítulo 4 utiliza tal construção. Mais recentemente, em [12], os autores propõem outra abordagem: dada uma álgebra de evolução com uma base natural fixada, constrói-se um grafo orientado associado a essa álgebra. Ainda em [12], provam que a redutibilidade de uma álgebra de evolução não degenerada pode ser totalmente determinada a partir de propriedades do grafo associado. Diversos trabalhos como [4–6, 8, 13, 17] utilizam tal abordagem e utilizaremos amplamente tal construção nos Capítulos 2 e 3.

Outro tópico bastante discutido acerca das álgebras de evolução é a caracterização do espaço das derivações. Diversos trabalhos recentes, como [1, 8–10, 13, 15, 17], se dedicam a isso e a total caracterização ainda é um problema em aberto. Destacamos aqui [13] e [10], que mostram que o espaço de derivações de álgebras de evolução perfeitas é trivial e [8], onde os autores utilizam o grafo associado a álgebra para caracterizar o espaço das derivações.

A fim de explorar as relações entre bases naturais distintas de uma álgebra de evolução, podemos estudar os invariantes por troca de base natural, ou seja, propriedades que são obtidas a partir de uma base natural mas são preservadas pela troca desta base, como por exemplo a dimensão do anulador, que é a quantidade de elementos de uma base natural cujo quadrado é nulo. Nesse sentido, definimos o conceito de laço de uma álgebra de evolução (relativo a uma base natural) e mostramos condições necessárias e suficientes para que a quantidade de laços seja preservado pela troca de base.

Outra contribuição desta tese é a caracterização do radical de absorção a partir do grafo associado. Além disso, apresentamos uma aplicação para tal caracterização, onde discutimos o problema de determinar se uma álgebra de evolução não degenerada é redutível (ou seja, se pode ser escrita como soma direta de ideais) a partir de propriedades do grafo associado e, sobre certas hipóteses, apresentamos condições para redutibilidade que dependem do radical de absorção.

Apresentamos resultados que caracterizam o espaço das derivações, primeiro de álgebras de evolução não degeneradas e posteriormente de álgebras de evolução de Volterra não degeneradas. Esses resultados aprimoram alguns resultados recentes e avançam na descrição do espaço das derivações de álgebras de evolução. Em especial, destacamos a Proposição 3.2.3 que, como discute a Observação 3.2.4, generaliza dois importantes teoremas. Ainda a fim de compreender o espaço das derivações, descrevemos este espaço de uma classe de álgebras de evolução construída a partir de grafos não orientados sobre corpos de qualquer característica, generalizando os resultados de [9], que se restringe a álgebras de evolução sobre corpos de característica zero.

No Capítulo 1 trataremos de conceitos preliminares das álgebras de evolução e fixamos a notação que empregaremos na tese. Também, apresentamos uma série de resultados que serão utilizados nos capítulos posteriores.

Esta tese foi construída fundamentada em três trabalhos. O primeiro, que será discutido no Capítulo 2, esta ainda em elaboração e tem como tema principal o radical de absorção. No fim deste capítulo também apresentamos uma discussão sobre a relação da associatividade de uma álgebra de evolução com o grafo associado.

O Capítulo 3 será dedicado a apresentar os principais resultados do artigo *Derivations and loops of some evolutions algebras* [6]. Este trabalho foi feito em parceria com a Professora Dra. Yolanda Cabrera Casado da Universidade de Málaga (Espanha) e submetido para publicação em 2022. Nele, estudamos o espaço das derivações de álgebra de evolução não degenerada e o conceito de laços em álgebras de evolução.

Por fim, o último trabalho, intitulado *Derivations of evolution algebras associated to graphs over a field of any characteristic* [18] será apresentado no Capítulo 4. Ele foi aceito e publicado online na revista *Linear and Multilinear Algebra* em 2020 e tem como objeto de interesse o espaço das derivações de álgebras de evolução associadas a grafos não orientados sobre corpos de característica positiva.

# 1 PRELIMINARES

Em todo este capítulo consideraremos álgebras sobre corpos de característica qualquer, salvo menção contrário. Neste capítulo, vamos introduzir alguns dos conceitos básicos acerca das álgebras de evolução. Na Seção 1.1, apresentaremos a definição de álgebra de evolução e fixaremos certas notações que utilizaremos no trabalho.

Na Seção 1.2, apresentaremos uma forma de associar uma álgebra de evolução com uma base natural fixada a um grafo orientado. Essa construção foi proposta em [12] e terá papel fundamental neste trabalho.

Na Seção 1.3, examinaremos o comportamento de subálgebras e ideais em álgebras de evolução. Em especial, discutiremos o fato de que, em geral, ideais de álgebras de evolução não são álgebras de evolução, o que fundamenta a introdução dos conceitos de ideal de evolução e propriedade de extensão. Por último, faremos um breve resumo de alguns resultados sobre propriedades de bases naturais em álgebra de evolução, todos provenientes de [2].

Na Seção 1.4, trataremos do espaço das derivações de uma álgebra de evolução.

## 1.1 CONCEITOS E PROPRIEDADES BÁSICAS.

Diferentemente do que acontece com outros tipos de álgebras não associativas, tais como as de Lie, as de Jordan e as alternativas, as álgebras de evolução não são definidas a partir de identidades que seus elementos respeitam, mas sim pela existência de uma base com uma certa propriedade. Vejamos a definição.

**Definição 1.1.1.** *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, $\Lambda$ um conjunto e $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução se admite uma base $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ tal que*

$$\begin{aligned} e_ie_i &= \sum_{k\in\Lambda} w_{ik}e_k, \ \textit{para } i \in \Lambda, \\ e_ie_j &= 0, \ \textit{para } i,j \in \Lambda \textit{ com } i \neq j. \end{aligned} \tag{1}$$

Uma base $B$ de $\mathcal{A}$ que satisfaz (1) é chamada de **natural**. Os escalares $w_{ik} \in \mathbb{K}$, para $i, k \in \Lambda$, são chamados de **constantes de estrutura** de $\mathcal{A}$ relativas a $B$ e $M_B = (w_{ik})$ é chamada de **matriz de estrutura** de $\mathcal{A}$ relativa a $B$. Denotaremos por $\Lambda_0(B)$ o conjunto $\Lambda_0(B) = \{i \in \Lambda;\ e_i^2 = 0\}$. Para simplificar a notação, quando conveniente, omitiremos o corpo na qual a álgebra foi construída. Neste tese, sempre consideraremos $\Lambda$ um conjunto finito e consequentemente, álgebras de dimensão finita. Note que se $M_B$ é a matriz de estrutura de uma álgebra $\mathcal{A}$ relativa a uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$, então a representação de $e_i^2$ na base $B$ é a $i$-ésima linha de $M_B$. Como veremos no próximo exemplo, uma álgebra de evolução pode ter diversas bases naturais e nem toda base é natural.

**Exemplo 1.1.2.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução e $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base natural de $\mathcal{A}$ tal que*

$$e_1^2 = e_1 + e_2, \quad e_2^2 = e_1, \quad e_3^2 = e_4 \quad e \quad e_4^2 = e_4.$$

*Note que esta base natural não é única. Por exemplo, se considerarmos o conjunto $B' = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ onde $f_1 = e_1$, $f_2 = e_2$, $f_3 = e_3 + e_4$ e $f_4 = e_3 - e_4$ temos que $f_i f_j = 0$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ e ainda*

$$f_1^2 = f_1 + f_2, \quad f_2^2 = f_1,$$
$$f_3^2 = (e_3 + e_4)^2 = 2e_4 = (e_3 + e_4) - (e_3 - e_4) = f_3 - f_4 \quad e$$
$$f_4^2 = (e_3 - e_4)^2 = 2e_4 = f_3 - f_4.$$

*Não é difícil verificar que $B'$ é uma base de $\mathcal{A}$, o que nos diz que $B'$ é uma base natural de $\mathcal{A}$. Por outro lado, não é verdade que qualquer base de $\mathcal{A}$ seja natural. De fato, tomando*

$$g_1 = e_1, \quad g_2 = e_2, \quad g_3 = e_3 \quad e \quad g_4 = e_1 + e_4,$$

*temos que $B'' = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ é uma base de $\mathcal{A}$ e $g_1 g_4 = g_1 + g_2$.* □

Segue, diretamente da definição, que as álgebras de evolução são comutativas.

**Definição 1.1.3.** *Uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ é dita **trivial nula** se $e_i^2 = 0$ para todo $e_i \in B$, onde $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ é uma base natural de $\mathcal{A}$. Note que isto é equivalente a dizer que $xy = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Se uma $\mathbb{K}$-álgebra de evolução tem uma base natural $B' = \{e_i;\ i \in \Lambda'\}$ tal que $e_i^2 = z_i e_i$ para todo $i \in \Lambda'$, onde $z_i \in \mathbb{K}^*$, então dizemos que $\mathcal{A}$ é **trivial não nula**.*

A propriedade que define a álgebra de evolução trivial não nula é respeitada por toda base natural dessa álgebra. Esse fato é uma consequência de [19, Proposição 1], que veremos a seguir.

**Proposição 1.1.4.** *[19, Proposição 1] Uma álgebra de evolução tem unidade se, e somente se, é uma álgebra de evolução trivial não nula.*

Em geral, álgebras de evolução são não associativas. De fato, se $\mathcal{A}$ é como no Exemplo 1.1.2, tomando $x = e_1$, $y = e_1 + e_2$ e $z = e_2$, temos que

$$x(yz) = e_1((e_1 + e_2)e_2) = e_1e_1 = e_1 + e_2;$$

$$(xy)z = (e_1(e_1 + e_2))e_2 = (e_1 + e_2)e_2 = e_1.$$

No entanto existem casos em que uma álgebra de evolução é associativa, como mostra o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.1.5.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução e $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base natural de $\mathcal{A}$ tal que*

$$e_1^2 = e_1, \qquad e_2^2 = e_2 \qquad e \qquad e_3^2 = 0.$$

*Tomando elementos $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ e $z = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$ de $\mathcal{A}$ temos que*

$$\begin{aligned} x(yz) &= x((y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3)(z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3)) \\ &= (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)(y_1z_1e_1 + y_2z_2e_2) \\ &= x_1y_1z_1e_1 + x_2y_2z_2e_2. \end{aligned}$$

*Por outro lado, temos que*

$$\begin{aligned} (xy)z &= ((x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)(y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3))z \\ &= (x_1y_1e_1 + x_2y_2e_2)(z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3) \\ &= x_1y_1z_1e_1 + x_2y_2z_2e_2. \end{aligned}$$

*Portanto $\mathcal{A}$ é associativa.* □

Na Seção 2.4, iremos apresentar um critério para determinar quando uma álgebra de evolução é associativa. Um subespaço que será de especial interesse no nosso trabalho é o anulador. Vejamos a definição.

**Definição 1.1.6.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa. O anulador de $\mathcal{A}$, denotado por $\operatorname{ann}(\mathcal{A})$, é dado por*

$$\operatorname{ann}(\mathcal{A}) = \left\{ x \in \mathcal{A};\ x\mathcal{A} = \{0\} \right\}.$$

**Definição 1.1.7.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução. As potências de $\mathcal{A}$, definidos por recursão, são dadas por*

$$\mathcal{A}^1 = \mathcal{A} \qquad e \qquad \mathcal{A}^k = \sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{A}^i \mathcal{A}^{k-i} \text{ se } k > 1.$$

*Dizemos que $\mathcal{A}$ é* ***nilpotente*** *se existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathcal{A}^m = 0$. O menor número natural que respeita tal propriedade é chamado de* ***índice de nilpotência*** *de $\mathcal{A}$.*

**Definição 1.1.8.** *Uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ é dita perfeita se $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.*

Note que se $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ é uma base natural de uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ então, visto que $\mathcal{A}^2 = \text{span}\{e_i^2;\ i \in \Lambda\}$, $\mathcal{A}$ é perfeita se $\{e_i^2;\ i \in \Lambda\}$ é linearmente independente. Ou equivalentemente, $\mathcal{A}$ é perfeita se, e somente se, $\det(M_B) \neq 0$.

## 1.2 GRAFO ORIENTADO ASSOCIADO A UMA ÁLGEBRA DE EVOLUÇÃO

Desde o surgimento das álgebras de evolução, diversos trabalhos apresentaram formas de relacioná-las a grafos. Já em [19, Capítulo 6.1], Tian apresenta uma forma de construir uma álgebra de evolução a partir de um grafo não orientado. Depois, em [12], Elduque e Labra introduziram uma forma de associar um grafo orientado a uma álgebra de evolução, que depois foi usada em [3–5, 8, 17] para estudar diversos aspectos tais como sua indecomponibilidade, o espaço das derivações, o grupo de automorfismos, nilpotência, entre outros.

Primeiro, vejamos algumas definições básicas e notações. Um **grafo orientado** $G$ é um par de conjuntos $(V, E)$ onde $E \subseteq V \times V$. Os elementos de $V$ são chamados de **vértices** e os de $E$ são chamados de **arestas** (ou flechas). Se $(v, w) \in E$ dizemos que $v$ é a **origem** de $(v, w)$ e $w$ é o **destino** de $(v, w)$. Dizemos que $w \in V$ é um **poço** se não é destino de nenhuma aresta, isto é, se não existe $u \in V$ tal que $(u, w) \in E$. O grafo $G$ é dito **finito** se $V$ e $E$ são conjuntos finitos. Dizemos que $H = (V', E')$ é um **subgrafo** de $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Se $E' = \{(v, w) \in E;\ v, w \in V'\}$ então dizemos $H$ é um subgrafo **pleno** de $G$.

Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $u, v \in V$. Um **caminho** $\mu$ de $u$ para $v$ é uma sequência finita de vértices $\mu = v_0 v_1 \ldots v_{n-1} v_n$ tal que $v_0 = u$, $v_n = v$ e $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Neste caso, dizemos que $\mu$ tem **comprimento** $n$, o que denotaremos por $|\mu|= n$, e que os seus vértices são o conjunto $\mu^0 = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$. Se existe um caminho de $u$ para $v$, então a **distância** entre $u$ e $v$ é dada por $\delta(i,j) = \min\{|\mu|, \mu$ é um caminho de $u$ para $v\}$. Um caminho $\mu$ é chamado de **ciclo** se $u = v$ e $(v_i, v_j) \neq (v_\ell, v_k)$ sempre que $(i,j) \neq (\ell, k)$. Se $\mu$ é um ciclo tal que $|\mu|= 1$ dizemos que é um **laço**. Se $\theta$ é um ciclo e existe um caminho de $w \in V$ para $z \in \theta^0$, dizemos que **existe um caminho de** $w$ **para o cíclo** $\theta$ e que $w$ é um **vértice cíclico**. Se $v \in V$ chamaremos **descendentes de primeira geração** de $v$ o conjunto $D^1(v) = \{u \in V;\ (v,u) \in E\}$. Se $V' \subseteq V$ denotaremos os descendentes de primeira geração dos elementos de $V'$ por $D^1(V') = \{w \in V; w \in D^1(u)$ para algum $u \in V'\}$. Recursivamente, definimos os **descendentes de** $m$**-ésima geração** de $v$ como $D^m(v) = D^1(D^{m-1}(v))$, para $m \in \mathbb{N}^*$. Por fim, o conjunto dos **descendentes** de $v$, denotado por $D(v)$, é dado por

$$D(v) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} D^m(v).$$

Se dois vetores $u, v \in V$ são tais que $D^1(v) = D^1(u)$ dizemos que são **gêmeos**. Por outro lado, se $G$ não possui vértices gêmeos é dito **livre de gêmeos**. Denotaremos por $\zeta(i)$ o conjunto $\zeta(i) = \{j \in V;\ D^1(i) = D^1(j)\}$. Se $V = \{1, \ldots, n\}$, a matriz $A_G = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, onde $b_{ij} = 1$ se $(i,j) \in E$ e $b_{ij} = 0$ se $(i,j) \notin E$, é chamada de **matriz de adjacência** de $G$. Um grafo $G = (V, E)$ é dito **desconexo** se existe uma partição de $V = V_1 \cup V_2$ tal que se $(x,y) \in E$ então $x, y \in V_1$ ou $x, y \in V_2$. Se não existe tal partição, o grafo é dito **conexo**. Equivalentemente, um grafo é conexo se não existe uma partição $V = V_1 \cup V_2$ tal que $D(k) \subseteq V_1$ e $D(t) \subseteq V_2$ para todo $k \in V_1$ e $t \in V_2$. Outra forma de definir um grafo conexo é utilizando grafos não orientados. Um grafo não orientado $\mathcal{G} = (V, E)$ é dito conexo se dados dois vértices $i, j \in V$ sempre existe um caminho de $i$ para $j$. Com essa definição, dizemos que um grafo orientado $G$, com matriz de adjacência $A_G$, é conexo se o grafo não orientado $\mathcal{G}$, com matriz de estrutura $A_{\mathcal{G}} = A_G$, é conexo. No Capítulo 4 trataremos de grafos não orientados com mais detalhes.

Embora a definição de grafo associado a uma álgebra de evolução foi apresentada em [12], por conveniência, utilizaremos uma definição equivalente que foi apresentada em [5].

**Definição 1.2.1.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução, $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$, com $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$, uma base natural de $\mathcal{A}$ e $M_B = (w_{ij})$ a matriz de estrutura de $\mathcal{A}$ relativa à base $B$. O grafo* *orientado associado a $\mathcal{A}$ (relativo à base $B$), denotado por $\Gamma(\mathcal{A}, B)$, é o grafo cujo conjunto de vértices é $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$ e cuja matriz de adjacência é $P = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, onde*

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & se\ w_{ij} = 0, \\ 1, & se\ w_{ij} \neq 0. \end{cases}$$

*Logo $\Gamma(\mathcal{A}, B) = (\Lambda, E)$, onde $E = \{(i, j) \in V \times V;\ w_{ij} \neq 0\}$.*

Se uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ possui uma base natural $B$ tal que $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ é livre de gêmeos, diremos simplesmente que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução livre de gêmeos. É importante ressaltar que o grafo obtido na definição anterior depende da base natural escolhida, logo não é único em geral, como mostra o exemplo a seguir. Além disso, o Exemplo 1.4.2 mostra que álgebras de evolução não isomorfas podem ter o mesmo grafo associado.

**Exemplo 1.2.2.** *Sejam $\mathcal{A}$, $B$ e $B'$ como no Exemplo 1.1.2. Para cada uma das bases, apresentamos o grafo associado na Figura 1.* □


(a) $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ (b) $\Gamma(\mathcal{A}, B')$

Figura 1: Grafos orientados associados à álgebra $\mathcal{A}$, relativos as bases naturais $B$ e $B'$, respectivamente

**Observação 1.2.3.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução, $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ uma base natural de $\mathcal{A}$ e $M_B = (w_{ij})$ a matriz de estrutura de $\mathcal{A}$ relativa a base $B$. Se $i \in \Lambda$ então $w_{ik} \neq 0$ para todo $k \in D^1(i)$ e ainda $w_{ik} = 0$ para todo $k \in \Lambda \setminus D^1(i)$. Logo a Equação (1) pode ser reescrita como*

$$e_i^2 = \sum_{k \in D^1(i)} w_{ik} e_k. \tag{2}$$

**Observação 1.2.4.** *Seja $G = (V, E)$ um grafo com subgrafos conexos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ tais que $V = V_1 \cup V_2$. Suponha ainda que $E \cap (V_1 \times V_2) \neq \varnothing$ ou $E \cap (V_2 \times V_1) \neq \varnothing$. Afirmamos que $G$ é conexo. De fato, se supormos o contrário, teríamos que existe uma partição $V = U_1 \cup U_2$ tal que se $(x, y) \in E$ então $x, y \in U_1$ ou $x, y \in U_2$. Pela conexidade de $G_1$ e $G_2$, temos que $V_1 \subseteq U_1$ e $V_2 \subseteq U_2$ (ou $V_2 \subseteq U_1$ e $V_1 \subseteq U_2$). Como $E \cap (V_1 \times V_2) \neq \varnothing$ ou $E \cap (V_2 \times V_1) \neq \varnothing$, obtemos uma contradição.*

## 1.3 IDEAIS EM ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO E VETORES NATURAIS

Iniciaremos esta seção discutindo os conceitos de ideal de evolução e subálgebra de evolução. As definições apresentadas nesta seção foram introduzidas em [5] e diferem das definições de subálgebra e ideal de evolução apresentadas por Tian em [19, Capítulo 3.1.2]. Optamos por utilizar tais definições por serem mais gerais, visto que a definição de subálgebra de evolução presente em [19] é precisamente a definição de subálgebra de evolução com propriedade de extensão presente em [5]. Começaremos com a definição usual de ideal para uma álgebra comutativa.

**Definição 1.3.1.** *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra comutativa. Diz-se que um subespaço vetorial $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ é uma **subálgebra** de $\mathcal{A}$ se $xy \in \mathcal{A}'$ para todo $x, y \in \mathcal{A}'$. Diz-se que um subespaço vetorial $I \subseteq \mathcal{A}$ é um **ideal** de $\mathcal{A}$ se $xy \in I$ para todo $x \in I$ e $y \in \mathcal{A}$.*

Note que, por definição, todo ideal é uma subálgebra. No entanto, nem todo ideal de uma álgebra de evolução é também uma álgebra de evolução, como mostra o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.3.2.** *[5, Exemplo 2.7] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ tal que $e_1^2 = e_2 + e_3, e_2^2 = e_1 + e_2$ e $e_3^2 = -(e_1 + e_2)$. Considere o ideal $I = \operatorname{span}\{e_2 + e_3, e_1 + e_2\}$ de $\mathcal{A}$. Em [5, Exemplo 2.7], provou-se que tal ideal não é uma álgebra de evolução, ou seja, não possui uma base natural.* □

A discussão anterior justifica a seguinte definição.

**Definição 1.3.3.** *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra de evolução. Se $\mathcal{A}'$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ que tem uma base natural, dizemos que $\mathcal{A}'$ é uma **subálgebra de evolução** de $\mathcal{A}$. Analogamente, se $I$ é um ideal de $\mathcal{A}$ que também é uma álgebra de evolução, dizemos que $I$ é um **ideal de evolução** de $\mathcal{A}$.*

Uma pergunta que aparece de forma natural é se a base natural de um ideal de evolução pode sempre ser completada para uma base natural da álgebra de evolução. Em [5, Exemplo 2.11], apresenta-se um exemplo de uma álgebra de evolução com um ideal de evolução que não possui uma base natural que possa ser completada para uma base natural da álgebra. Devido a este fato, se faz necessária a seguinte definição.

**Definição 1.3.4.** *Dada uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$, dizemos que uma subálgebra de evolução de $\mathcal{A}$ tem a* ***propriedade de extensão*** *se ela possui uma base natural que pode ser estendida para uma base natural de $\mathcal{A}$.*

Neste trabalho, vamos nos focar principalmente em ideais de evolução com propriedade de extensão. Por simplicidade, diremos que um ideal tem a propriedade de extensão, ficando subentendido que se trata de um ideal de evolução.

**Definição 1.3.5.** *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$. Se $x = \sum_{i\in\Lambda} x_i e_i \in \mathcal{A}$, onde $x_i \in \mathbb{K}$, o* ***suporte*** *de $x$ (relativa a base $B$) é dado por*

$$\operatorname{supp}_B(x) = \{i \in \Lambda;\ x_i \neq 0\}.$$

*Se $X \subseteq \mathcal{A}$ então o suporte de $X$ (relativa a base $B$) é dado por*

$$\operatorname{supp}_B X = \bigcup_{x\in X} \operatorname{supp}_B(x).$$

Em especial, note que $\operatorname{supp}_B(e_i^2) = D^1(i)$, para todo $i \in \Lambda$.

**Observação 1.3.6.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B$ e $I$ um ideal de $\mathcal{A}$. Se $x \in \mathcal{A}$, denotaremos, como feito usualmente, por $\overline{x}$ a sua classe no quociente $\mathcal{A}/I$. Desta forma, o conjunto $\overline{B} = \{\overline{e};\ e \in B\}$ gera o espaço vetorial $\mathcal{A}/I$ e, portanto, existe $B' \subseteq \overline{B}$ tal que $B'$ é uma base de $\mathcal{A}/I$. Note que $\overline{e}\overline{f} = \overline{ef} = \overline{0}$ para todo $\overline{e}, \overline{f} \in B'$ com $e \neq f$. Logo $\mathcal{A}/I$ é uma álgebra de evolução.*

**Exemplo 1.3.7.** *Sejam $\mathcal{A}$ e $I$ como no Exemplo 1.3.2. Se considerarmos o quociente $\mathcal{A}/I$, o conjunto $\overline{B} = \{\overline{e_i};\ e_i \in B \text{ e } e_i \notin I\} = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ gera $\mathcal{A}/I$, mas não é uma base, visto que* $\dim \mathcal{A}/I = 1$. □

O anulador de uma álgebra de evolução, apresentado na Definição 1.1.6, resulta ser também um ideal que pode ser facilmente obtido usando uma base natural, como diz o seguinte resultado.

**Lema 1.3.8.** *[12, Lema 2.17] Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução e $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ uma base natural. Então*

$$\operatorname{ann}(\mathcal{A}) = \operatorname{span}\{e_i;\ e_i^2 = 0\}.$$

**Definição 1.3.9.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução e $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ uma base natural de $\mathcal{A}$. Se $e_i^2 \neq 0$, para todo $i \in \Lambda$, então $\mathcal{A}$ é dita* ***não degenerada****. Caso contrário, $\mathcal{A}$ é dita* ***degenerada****.*

Observe que o Lema 1.3.8 nos garante que a definição de álgebra de evolução degenerada não depende da escolha da base natural. Em geral, quando passamos o quociente pelo anulador, a álgebra obtida pode ser degenerada, como mostra o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.3.10.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ tal que $e_1^2 = e_3$, $e_2^2 = e_2$ e $e_3^2 = 0$. Pelo Lema 1.3.8, temos que $\operatorname{ann}(\mathcal{A}) = \operatorname{span}\{e_3\}$. Logo $\overline{B} = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ gera $\mathcal{A}/\operatorname{ann}(\mathcal{A})$. Note que $\overline{e_1}^2 = \overline{e_1^2} = \overline{e_3} = \overline{0}$. Portanto $\mathcal{A}/\operatorname{ann}(\mathcal{A})$ é degenerada.* □

No Exemplo 1.3.7 vimos que $\overline{B} = \{\overline{e_i};\ e_i \in B \text{ e } e_i \notin I\}$ gera $\mathcal{A}/I$, mas não é uma base em geral. Vejamos agora que se $I$ é um ideal de evolução com a propriedade de extensão, então $\overline{B}$ é uma base de $\mathcal{A}/I$.

**Observação 1.3.11.** *Dada uma $\mathbb{K}$-álgebra de evolução $\mathcal{A}$ com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e $I = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in \Lambda'\}$ um ideal com a propriedade de extensão de $\mathcal{A}$. Primeiro, note que $\overline{B} = \{\overline{e_i};\ e_i \in B \text{ e } e_i \notin I\} = \{\overline{e_i};\ i \in \Lambda \setminus \Lambda'\}$. Sejam $x_i \in \mathbb{K}$, $i \in \Lambda \setminus \Lambda'$, tais que $\sum_{i \in \Lambda \setminus \Lambda'} x_i \overline{e_i} = \overline{0}$. Então $\sum_{i \in \Lambda \setminus \Lambda'} x_i e_i \in I$ e consequentemente $x_i = 0$ para todo $i \in \Lambda \setminus \Lambda'$. Portanto $\overline{B}$ é um conjunto linearmente independente que gera $\mathcal{A}/I$.*

Recentemente, em [2], os autores apresentam condições para que um vetor de uma álgebra de evolução pertença a uma base natural. A seguir, mostraremos alguns desses resultados que serão de interesse no nosso trabalho.

**Definição 1.3.12.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução. Um conjunto $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq \mathcal{A}$ é chamado de **família natural extensível** se existe uma base natural $B$ de $\mathcal{A}$ tal que $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq B$. Se $u \in \mathcal{A}$ é tal que $\{u\}$ é uma família natural extensível então dizemos que $u$ é um **vetor natural**.*

O próximo exemplo mostra que nem todo vetor de uma álgebra de evolução é natural.

**Exemplo 1.3.13.** *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_1, e_2\}$ tal que $e_1^2 = e_1$ e $e_2^2 = e_2$. Afirmamos que $x = e_1 + e_2$ não é um vetor natural. De fato, suponha por redução ao absurdo, que existe $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 \in \mathcal{A}$, $y_i \in \mathbb{K}$, tal que $B' = \{x, y\}$ é uma base natural de $\mathcal{A}$. Então*

$$xy = (e_1 + e_2)(y_1 e_1 + y_2 e_2) = y_1 e_1^2 + y_2 e_2^2 = y_1 e_1 + y_2 e_2.$$

*Logo $xy = 0$ se, e somente se, $y_1 = y_2 = 0$, o que é um absurdo.* □

**Definição 1.3.14.** *Seja $V$ um espaço vetorial e $X \subseteq V$. Chamaremos a dimensão de* $\operatorname{span}(X)$ *de* ***posto*** *de $X$, e denotaremos por* $\operatorname{rank} X$.

**Teorema 1.3.15.** *[2, Teorema 2.4] Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e $u \in \mathcal{A}$ tal que $\operatorname{supp}_B(u) = \{i_1, \ldots, i_r\}$. Então*

*(i) Se $u^2 \neq 0$, então $u$ é um vetor natural se, e somente se,* $\operatorname{rank}(\{e_{i_1}^2, \ldots e_{i_r}^2\}) = 1$.

*(ii) Se $u^2 = 0$, então $u$ é um vetor natural se, e somente se, $e_{i_1}^2 = \cdots = e_{i_r}^2 = 0$.*

Vejamos uma consequência deste teorema.

**Observação 1.3.16.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural e $e$ um vetor natural. Se considerarmos uma base natural $B' = \{f_i;\ i \in \Lambda\}$ temos que existe $\Lambda' \subseteq \Lambda \setminus \Lambda_0(B')$ e coeficientes $\alpha_j$ tais que*

$$e = \sum_{k \in \Lambda'} \alpha_k f_k + \sum_{k \in \Lambda_0(B')} \alpha_k f_k,$$

*e ainda* $\operatorname{rank}(\{f_\ell^2, f_t^2\}) = 1$ *para todo $\ell, t \in \Lambda'$, com $\ell \neq t$.*

Outro resultado de [2] que terá grande importância no Capítulo 3 é o teorema que apresentaremos a seguir. Vejamos algumas notações e uma definição. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $U$ e $V$ subespaços vetoriais de $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ é soma direta de $U$ e $V$ como espaço vetorial, então escreveremos $\mathcal{A} = U \dot{\oplus} V$. Neste caso, utilizaremos a notação $U^C = V$ e $V^C = U$. Se além disso, $U$ e $V$ são ideais de $\mathcal{A}$, escreveremos $\mathcal{A} = U \oplus V$.

**Definição 1.3.17.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução e $E \subseteq \mathcal{A}$ um subespaço vetorial. Se $E$ possui uma base $\{u_1, \ldots, u_t\}$ que é uma família natural extensível de $\mathcal{A}$ dizemos que $E$ é um* ***subespaço de evolução extensível*** *e que o* ***posto de evolução*** *de $E$, denotado por* $\operatorname{erk}(E)$, *é*

$$\operatorname{erk}(E) = \operatorname{rank}(\{u_1^2, \ldots, u_t^2\}),$$

*onde $\{u_1, \ldots, u_t\}$ é um base de $E$ que é uma família natural extensível.*

Note que $\operatorname{erk}(E) = \dim(E^2)$, logo $\operatorname{erk}(E)$ está bem definido para qualquer base de $E$ que é uma família natural extensível. Observe que um ideal com a propriedade de extensão é um ideal que também é um subespaço de evolução extensível.

**Teorema 1.3.18.** *[2, Teorema 2.11] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução. Então*

$$\mathcal{A} = \operatorname{ann}(\mathcal{A}) \dot{\oplus} E_1 \dot{\oplus} \ldots \dot{\oplus} E_r,$$

*onde $E_1, \ldots, E_r$ são subespaços de evolução extensíveis de $\mathcal{A}$ que satisfazem as seguintes condições:*

- $\text{erk}(E_i) = 1$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, r\}$*;*
- $E_iE_j = 0$ *para todo* $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ *com* $i \neq j$*;*
- $\dim(E_i^2 + E_j^2) = 2$ *para todo* $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ *com* $i \neq j$*.*

*Além disso, se $\mathcal{A}$ é não degenerada, então esta decomposição é única.*

Os subespaços de evolução extensíveis $E_i$, $i \in \{1, \ldots, r\}$, apresentados no Teorema 1.3.18, são obtidos a partir de uma partição de $B$. Considere uma partição de $B = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_r$ tal que:

- $B_0 = \{e_i \in B;\ e_i^2 = 0\}$,
- $\text{rank}\{e^2;\ e \in B_j\} = 1$, para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$,
- $\text{rank}\{e^2, f^2\} = 2$ se $e \in B_j$ e $f \in B_\ell$, com $j, \ell \in \{1, \ldots, r\}$ e $j \neq \ell$.

Observe que, a menos de ordenação, essa partição é única. De fato, essa partição pode ser obtida a partir da seguinte relação de equivalência em $B$: $e \equiv f$ se, e somente se, $e^2 = f^2 = 0$ ou $0 \notin \{e^2, f^2\}$ e $\text{rank}(\{e^2, f^2\}) = 1$.

**Corolário 1.3.19.** *[2, Corolário 2.13] Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução e $B = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_r$ e $B' = B'_0 \cup B'_1 \cup \ldots \cup B'_r$ bases naturais particionadas conforme o Teorema 1.3.18. Então, podemos reordenar os elementos de $B$ e $B'$ de tal forma que a matriz de troca de base tem a seguinte forma em blocos:*

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \ldots & * \\ 0 & * & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & * & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & * \end{pmatrix}$$

**Observação 1.3.20.** *[2, Observação 2.14] Nas hipóteses do corolário anterior, com ordenações convenientes de $B = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_r$ e $B' = B'_0 \cup B'_1 \cup \ldots \cup B'_r$, um elemento de $B_i$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $B'_0 \cup B'_i$.*

Como vimos no Exemplo 1.1.5, uma álgebra de evolução pode ter mais que uma base natural. Dada uma $\mathbb{K}$-álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$, observamos que qualquer reordenação deste base, ainda é uma base natural de $\mathcal{A}$. Além disso, se multiplicarmos cada $e_i$ por uma constante não nula, o conjunto obtido ainda é uma base natural. Ou seja, considerando $S_\Lambda$ o grupo de simetrias de $\Lambda$, então $B' = \{\beta_i e_{\theta(i)};\ \beta_i \in \mathbb{K}^*, \theta \in S_\Lambda \text{ e } i \in \Lambda\}$ é uma base natural de $\mathcal{A}$. Álgebras de evolução que admitem somente trocas de base deste tipo serão de interesse futuro. Vejamos uma definição.

**Definição 1.3.21.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ tal que $|\Lambda| = n$. Se toda base natural $B' = \{f_i;\ i \in \Lambda\}$ de $\mathcal{A}$ for tal que $f_i = \beta_i e_{\theta(i)}$, para $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in (\mathbb{K}^*)^n$ e $\theta \in S_\Lambda$, então dizemos que $\mathcal{A}$* ***tem base natural única****.*

Em [2, Definição 2.1] foi apresentado uma definição de álgebra de evolução com base natural única em termos da caracterização do subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ (grupo de automorfismos da álgebra $\mathcal{A}$) que leva bases naturais em bases naturais. Optamos aqui por apresentar a definição acima, que é equivalente e mais consistente com o nosso trabalho. Vejamos agora outra definição.

**Definição 1.3.22.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ tem a* ***Propriedade*** (2LI) *se* $\mathrm{rank}(\{e_i^2, e_j^2\}) = 2$ *para todo $i, j \in \Lambda$ tais que $i \neq j$.*

**Observação 1.3.23.** *Afirmamos que as álgebras de evolução perfeitas e livre de gêmeos ambas tem a Propriedade* (2LI)*. De fato, seja $\mathcal{A}_1$ uma álgebra de evolução perfeita com uma base natural $B_1 = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$. Como $\{e_i^2;\ i \in \Lambda\}$ é linearmente independente, segue diretamente que $\mathcal{A}_1$ tem a Propriedade* (2LI)*. Se considerarmos uma outra álgebra de evolução $\mathcal{A}_2$ com uma base natural $B_2 = \{f_i;\ i \in \Lambda\}$ que é livre de gêmeos, então para todo $i, j \in \Lambda$, $i \neq j$, vale que $D^1(i) \neq D^1(j)$. Portanto $\mathcal{A}_2$ também é uma álgebra de evolução com a Propriedade* (2LI)*.*

Uma consequência do Teorema 1.3.15, é que a definição acima não depende da base natural. Como veremos a seguir, a unicidade da base e a Propriedade (2LI) são equivalentes.

**Corolário 1.3.24.** *[2, Corolário 2.7] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não degenerada. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) $\mathcal{A}$ tem base natural única.*

*(ii) Existe uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\{e_i^2, e_j^2\}$ é linearmente independente para todo $i, j \in \Lambda$, com $i \neq j$.*

## 1.4 DERIVAÇÕES DE ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO

Seja $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ o espaço dos operadores lineares da $\mathbb{K}$-álgebra de evolução $\mathcal{A}$. Estamos interessados em estudar um subespaço de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ conhecido como o espaço das derivações. No contexto das álgebras de evolução, diversos trabalhos recentes se dedicam a caracterizar tal espaço, como por exemplo [1, 9, 10, 17, 18].

**Definição 1.4.1.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra (de evolução) e $d \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Dizemos que $d$ é uma derivação de $\mathcal{A}$ se*

$$d(u \cdot v) = d(u) \cdot v + u \cdot d(v),$$

*para quaisquer $u, v \in \mathcal{A}$. O espaço das derivações de $\mathcal{A}$ é denotado por* $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$.

Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra de evolução com uma base natural $B$ e matriz de estrutura $M_B = (w_{ij})$. Em [19] foi provado que $d = (d_{ij}) \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ é uma derivação se, e somente se, respeita as seguintes condições:

$$w_{jk}d_{ij} + w_{ik}d_{ji} = 0, \quad \text{para } i, j, k \in \{1, \ldots, n\} \text{ tal que } i \neq j, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} w_{ik}d_{kj} = 2w_{ij}d_{ii}, \quad \text{para } i, j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4}$$

Em [19], o autor considera somente o caso em que $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$. Porém o resultado é válido para corpos de qualquer característica, e a mesma prova funciona. Em particular, se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$ então (4) pode ser reescrita como

$$\sum_{k=1}^{n} w_{ik}d_{kj} = 0, \quad \text{para } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Em [8], algumas propriedades do espaço das derivações de uma álgebra de evolução não degenerada são obtidas a partir do seu grafo associado. Abordagem similar, para diferentes classes de álgebras de evolução foi utilizada em [9, 17, 18]. Este último é um trabalho de nossa autoria que iremos discutir com mais detalhes no Capítulo 4. O próximo exemplo, evidencia que o espaço das derivações, em geral, não pode ser totalmente caracterizado utilizando somente o grafo associado.

**Exemplo 1.4.2.** *Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ $\mathbb{Q}$-álgebras de evolução com bases naturais $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $B_2 = \{f_1, f_2, f_3\}$, respectivamente, e produtos dados por*

$$e_1^2 = e_3^2 = e_2; \quad e_2^2 = e_1 + e_3; \quad f_1^2 = -f_2; \quad f_2^2 = f_1 + f_3; \quad e \quad f_3^2 = f_2.$$

*Essas álgebras tem o mesmo grafo associado.*

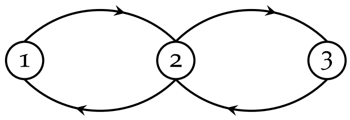


Figura 2: Grafo associado as álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, relativo às bases $B_1$ e $B_2$, respectivamente.

*Utilizando as Equações* (3) *e* (4)*, podemos calcular o espaço das derivações para essas duas álgebras e obtemos que* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}_1) = \{0\}$ *e* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}_2) = \mathrm{span}\{d\}$*, onde*

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Em [10] os autores apresentaram um importante teorema para a caracterização do espaço das derivações de $\mathbb{K}$-álgebras de evolução, com $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$. Vejamos este teorema.

**Teorema 1.4.3.** *[10, Teorema 2.1] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B$ tal que* $\det(M_B) \neq 0$*. Então* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \{0\}$.

Como já discutido, uma álgebra de evolução ter uma base natural $B$ tal que $\det(M_B) \neq 0$ é equivalente a dizer que a álgebra de evolução é perfeita. Em 2019, [13, Teorema 4.1] apresenta resultado equivalente e também estuda o caso em que o corpo tem característica diferente de zero. Em 2020, utilizando grafos associados, [8, Teorema 1] discute outra classe de álgebra de evolução com espaço de derivações nulo. Vejamos tal teorema.

**Teorema 1.4.4.** *[8, Teorema 1] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não degenerada com uma base natural $B$. Se $\mathcal{A}$ é livre de gêmeos, então* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \{0\}$.

**Observação 1.4.5.** *Considere as álgebras de evolução $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ com bases naturais $B_1$, $B_2$ e $B_3$, respectivamente, e matrizes de estruturas apresentadas abaixo:*

$$M_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Note que $\mathcal{A}_2$ é $\mathcal{A}_3$ são álgebras de evolução perfeitas enquanto $\mathcal{A}_1$ não é. Por outro lado, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_3$ são livre de gêmeos e $\mathcal{A}_2$ não. Logo essas classes de álgebras tem elementos em comum, mas nenhuma é contida na outra.*

A Proposição 3.2.3 generaliza esses dois teoremas supracitados. Outro trabalho que se dedica ao espaço das derivações de álgebras de evolução é [17], que define e estuda as álgebras de evolução de Volterra. Vejamos a definição.

**Definição 1.4.6.** *Uma álgebra $\mathcal{A}$ é chamada de álgebra de evolução de Volterra se possui uma base natural $B$ tal que $M_B$ é antissimétrica.*

Em [17] os autores provam que uma certa classe de álgebras de evolução de Volterra tem o espaço de derivações nulo. Na Seção 3.2 desta tese apresentamos uma série de resultados que caracterizam o espaço das derivações das álgebras de evolução de Volterra.

# 2 RADICAL DE ABSORÇÃO E ASSOCIATIVIDADE

Na Seção 1.3 vimos que o quociente de uma álgebra de evolução pelo seu anulador, em geral, não é uma álgebra de evolução não degenerada. Podemos considerar a pergunta: dada uma álgebra de evolução degenerada $\mathcal{A}$, existe algum ideal $I$ tal que o quociente $\mathcal{A}/I$ é uma álgebra de evolução não degenerada? Em [5], as autoras apresentaram uma família de ideais que tem precisamente esta propriedade, os chamados ideais de evolução com propriedade de absorção. Em especial, consideram um ideal obtido pela interseção de tais ideais, chamado de radical de absorção. Na Seção 2.1, apresentaremos a definição do radical de absorção, assim como alguns resultados preliminares provenientes de [5].

Na Seção 2.2 apresentaremos uma caracterização para o radical de absorção. Fixada uma base natural de uma álgebra de evolução, mostraremos que o radical de absorção desta álgebra pode ser obtido a partir do grafo associado a álgebra relativo à base em questão. Destacamos os Exemplos 2.1.7 e 2.2.18, que mostram a importância do Teorema 2.2.17. Os resultados da Seção 2.2 e da Seção 2.3 fazem parte de um artigo que está em elaboração.

Dada uma álgebra de evolução degenerada, determinar se tal álgebra é redutível (ou seja, se pode ser escrita como soma direta de ideais) ainda é um problema em aberto. Na Seção 2.3, apresentamos uma abordagem para a solução deste problema, utilizando a caracterização do radical de absorção da Seção 2.2.

A última seção deste capítulo será dedicado a uma discussão sobre associatividade de álgebras de evolução. Apresentamos condições, que dependem do grafo associado a álgebra, necessárias e suficientes para que uma álgebra de evolução seja associativa. Em todo este capítulo, são consideradas álgebras de evolução sobre um corpo $\mathbb{K}$ qualquer.

## 2.1 CONCEITOS PRELIMINARES

O conceito de radical de absorção foi introduzido em [5]. Veremos como tal ideal é definido e algumas de suas propriedades básicas.

**Definição 2.1.1.** *Seja $I$ um ideal de uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$. Diz-se que $I$ tem a* ***propriedade de absorção*** *se para qualquer $x \in \mathcal{A}$ tal que $x\mathcal{A} \subseteq I$, então $x \in I$.*

**Exemplo 2.1.2.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ tal que $e_1^2 = 0$, $e_2^2 = e_1$ e $e_3^2 = e_1 + e_3$. Considere os espaços vetoriais $I = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ e $J = \operatorname{span}\{e_1, e_3\}$. Vejamos que tais espaços vetoriais são ideais. De fato, sejam $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathcal{A}$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 \in I$ e $z = z_1e_1 + z_3e_3 \in J$, onde $x_i, y_i$ e $z_i$ são escalares. Então*

$$\begin{aligned} xy &= (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)(y_1e_1 + y_2e_2) = x_1y_1e_1^2 + x_2y_2e_2^2 = x_2y_2e_1 \in I; \\ xz &= (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)(z_1e_1 + z_3e_3) = x_1z_1e_1^2 + x_3z_3e_3^2 = x_3z_3(e_1 + e_3) \in J. \end{aligned}$$

*Afirmamos que $J$ não tem a propriedade de absorção. Para verificar isto, basta observar que $e_2\mathcal{A} \subseteq \operatorname{span}\{e_1\} \subseteq J$ e $e_2 \notin J$. Por outro lado, $I$ tem a propriedade de absorção. De fato, se $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 \in \mathcal{A}$ é tal que $v\mathcal{A} \subseteq I$, então*

$$vx = v_1x_1e_1^2 + v_2x_2e_2^2 + v_3x_3e_3^2 = v_2x_2e_1 + v_3x_3(e_1 + e_3) \in I,$$

*para qualquer $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathcal{A}$. Portanto, $v_3 = 0$ e consequentemente $v \in I$.* □

Note que no exemplo anterior $\operatorname{ann}(\mathcal{A}) \subseteq I$. Tal propriedade é sempre válida, como veremos a seguir.

**Observação 2.1.3.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução e $I$ um ideal com a propriedade de absorção, então $\operatorname{ann}(\mathcal{A}) \subseteq I$. De fato, se $x \in \operatorname{ann}(\mathcal{A})$ então $x\mathcal{A} = \{0\} \subseteq I$. Como $I$ tem a propriedade de absorção, temos que $x \in I$. Concluímos que $\operatorname{ann}(\mathcal{A}) \subseteq I$.*

Os próximos resultados que apresentaremos são os Lemas 2.24 e 2.25 de [5]. O primeiro discute o fato de que o quociente de uma álgebra de evolução por um ideal com a propriedade de absorção é uma álgebra de evolução não degenerada. O segundo, mostra que dada uma base natural $B$ de uma álgebra de evolução, se $I$ é um ideal de $\mathcal{A}$ que tem a propriedade de absorção, então ele possui uma base natural que é um subconjunto de $B$. Como veremos, este resultado será de grande importância na caracterização do radical de absorção.

**Lema 2.1.4.** *[5, Lema 2.24] Um ideal $I$ de uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ tem a propriedade de absorção se, e somente se,* $\operatorname{ann}(\mathcal{A}/I) = \{\overline{0}\}$.

**Lema 2.1.5.** *[5, Lema 2.25] Sejam $I$ um ideal não nulo de uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ e $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ uma base natural de $\mathcal{A}$. Se $I$ tem a propriedade de absorção, então existe $\Lambda' \subseteq \Lambda$ tal que $B' = \{e_i;\ i \in \Lambda'\}$ é uma base natural de $I$.*

Podemos então definir o radical de absorção.

**Definição 2.1.6.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução e $\Psi(\mathcal{A})$ o conjunto de todos os ideais de $\mathcal{A}$ com a propriedade de absorção. O* ***radical de absorção*** *de $\mathcal{A}$, denotado por $\operatorname{rad}(\mathcal{A})$ é dado por*

$$\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = \bigcap_{I \in \Psi(\mathcal{A})} I.$$

Dada uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$, como $\operatorname{rad}(\mathcal{A})$ tem a propriedade de absorção, segue pelo Lema 2.1.5 que existe $\Lambda' \subseteq \Lambda$ tal que $\operatorname{rad}(A) = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in \Lambda'\}$. Note que esta propriedade é mais geral do que ter a propriedade de extensão, visto que $B$ é uma base qualquer de $\mathcal{A}$.

**Exemplo 2.1.7.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ tal que $e_1^2 = 0$, $e_2^2 = e_1$ e $e_3^2 = e_2 + e_3$. Para obter o radical de absorção de $\mathcal{A}$ temos que determinar todos os seus ideais com a propriedade de absorção. Pelo Lema 2.1.5, estes ideais também tem a propriedade de extensão. Segue direto da definição que $\mathcal{A}$ é um ideal com a propriedade de absorção. Então devemos verificar quais os espaços vetoriais do tipo $\operatorname{span} B'$, onde $B' \subsetneq B$, são ideais com a propriedade de absorção. Considere tais espaços vetoriais:*

$$\begin{gathered} V_1 = \operatorname{span}\{e_1\}, \qquad V_2 = \operatorname{span}\{e_2\}, \qquad V_3 = \operatorname{span}\{e_3\}, \\ V_4 = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}, \quad V_5 = \operatorname{span}\{e_1, e_3\}, \quad V_6 = \operatorname{span}\{e_2, e_3\}. \end{gathered}$$

*Note que $V_2$, $V_3$, $V_5$ e $V_6$ não são ideais, pois não são fechados para o produto. Observe também que $V_1$ é de fato um ideal, afinal $\operatorname{ann}(\mathcal{A}) = V_1$, porém não tem a propriedade de absorção visto que $e_2\mathcal{A} = \operatorname{span}\{e_1\} \subseteq V_1$ e $e_2 \notin V_1$. Vejamos agora que $V_4$ tem a propriedade de absorção. Seja $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathcal{A}$, com $x_i$ coeficientes, tal que $x\mathcal{A} \subseteq V_4$. Então*

$$xy = (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)(y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) = x_2y_2e_2^2 + x_3y_3e_3^2 \in V_4,$$

*para todo $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 \in \mathcal{A}$, onde $y_i$ são coeficientes. Logo $x_3 = 0$ e portanto $x \in V_4$. Logo $\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cap V_4 = V_4$.* □

**Proposição 2.1.8.** *[5, Proposição 2.28] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução. As seguintes condições são equivalentes:*

*(i)* $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$.

*(ii)* $\mathrm{ann}(\mathcal{A}) = \{0\}$.

*(iii)* *$\mathcal{A}$ é não degenerada.*

**Corolário 2.1.9.** *[5, Proposição 2.29] Seja $I$ um ideal de uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$. Então $I$ tem a propriedade de absorção se, e somente se,* $\mathrm{rad}(\mathcal{A}/I) = \{\overline{0}\}$ . *Em particular* $\mathrm{rad}(\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})) = \{\overline{0}\}$.

Vejamos agora dois resultados auxiliares que utilizaremos na próxima seção.

**Lema 2.1.10.** *Sejam $G = (V, E)$ um grafo orientado e $i \in V$. Então $D^k(i) \neq \varnothing$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$ se, e somente se, existe um caminho de $i$ para um ciclo $\theta$ de $G$.*

*Demonstração.* Suponha $D^k(i) \neq \varnothing$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Como $D^k(i) \subseteq V$ e $V$ é finito, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ distintos tais que $D^{k_1}(i) \cap D^{k_2}(i) \neq \varnothing$. Sem perda de generalidade, tome $k_1 < k_2$. Seja $j \in D^{k_1}(i) \cap D^{k_2}(i)$. Como $j \in D^{k_1}(i)$, então existe um caminho $\mu$ de $i$ para $j$. Considerando que $j \in D^{k_2}(i) = D^{k_2-k_1}(D^{k_1}(i))$ e $j \in D^{k_1}(i)$, existe um caminho de $j$ para $j$, equivalentemente, existe um ciclo $\theta$ tal que $j \in \theta^0$.

No outro sentido, sejam $\theta = v_0v_1v_2 \ldots v_{n-1}v_n$ um ciclo de $G$ (ou seja, $v_0 = v_n$) tal que existe um caminho $\mu = u_0u_1u_2 \ldots u_t$, com $u_0 = i$, e $u_t \in \theta^0$. Tome $k \in \mathbb{N}^*$. Se $k \leq t$, então $u_k \in D^k(i) \neq \varnothing$. Se $k > t$ então $v_j \in D^k(i)$ para algum $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Logo $D^k(i) \neq \varnothing$. □

**Exemplo 2.1.11.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra de evolução e $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base natural de $\mathcal{A}$ tal que*

$$e_1^2 = e_2 + e_3, \quad e_2^2 = e_4, \quad e_3^2 = -e_4 \quad e \quad e_4^2 = 0.$$

*Vejamos que o espaço vetorial $I =$ $\mathrm{span}\{e_1, e_2 + e_3, e_4\}$ é um ideal de $\mathcal{A}$. Sejam $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in \mathcal{A}$ e $y = y_1e_1 + y_2(e_2 + e_3) + y_3e_4 \in I$, onde $x_i, y_i \in \mathbb{K}$. Então*

$$\begin{aligned} xy &= (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4)(y_1e_1 + y_2(e_2 + e_3) + y_3e_4) = x_1y_1e_1^2 + x_2y_2e_2^2 + x_3y_2e_3^2 + x_4y_3e_4^2 \\ &= x_1y_1(e_2 + e_3) + (x_2y_2 - x_3y_2)e_4 \in I. \end{aligned}$$

*Logo $I$ é um ideal de $\mathcal{A}$. Note que $3 \in \mathrm{supp}_B I$ mas $e_3 \notin I$.* □

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e $I \subseteq \mathcal{A}$ um ideal. Observe que o exemplo anterior nos mostra que, em geral, não é válido que se $j \in \mathrm{supp}_B(I)$ então $e_j \in I$. Porém, vejamos que o resultado é válido se $I$ tem a propriedade de extensão.

**Proposição 2.1.12.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra de evolução, $I$ um ideal com a propriedade de extensão e $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ uma base natural de $\mathcal{A}$ tal que $I = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in \Lambda'\}$, com $\Lambda' \subseteq \Lambda$. Então*

*(i)* $\operatorname{supp}_B I = \Lambda'$,

*(ii) se $j \in \Lambda'$, então $D(j) \subseteq \Lambda'$.*

*Demonstração.* O item (i) segue diretamente da definição. Para provar o item (ii), iremos utilizar indução. Seja $j \in \Lambda'$. Note que

$$D^1(j) = \operatorname{supp}_B(e_j^2) \subseteq \operatorname{supp}_B I \subseteq \Lambda'.$$

Suponha agora que $D^k(j) \subseteq \Lambda'$ para algum $k \geq 1$. Logo se $\ell \in D^k(j) \subseteq \Lambda'$ então $D^1(\ell) \subseteq \Lambda'$ e portanto $D^{k+1}(j) = D^1(D^k(j)) \subseteq \Lambda'$. Concluímos que $D^t(j) \subseteq \Lambda'$ para todo $t \geq 1$ e portanto $D(j) \subseteq \Lambda'$. □

## 2.2 CARACTERIZAÇÃO DO RADICAL DE ABSORÇÃO

O principal objetivo desta seção é a demonstração do Teorema 2.2.17. Este teorema permite determinar o radical de absorção de uma álgebra a partir do grafo associado (independentemente da base natural usada). Para começar, vamos explorar a relação entre a propriedade de absorção e a propriedade de extensão de um ideal.

O Lema 2.1.5 mostra que ideais que tem a propriedade de absorção também tem a propriedade de extensão, mas como mostra o próximo exemplo, a recíproca não é verdadeira.

**Exemplo 2.2.1.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ tal que $e_1^2 = e_1 + e_2$, $e_2^2 = 0$ e $e_3^2 = e_1$. Então $I = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ é um ideal de $\mathcal{A}$ com propriedade de extensão. No entanto, $e_3\mathcal{A} = \operatorname{span}\{e_1\} \subseteq I$ e $e_3 \notin I$. Logo $I$ não tem a propriedade de absorção.* □

O seguinte resultado nos mostra um critério para determinar quando um ideal que tem a propriedade de extensão também tem a propriedade de absorção.

**Proposição 2.2.2.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução, $I$ um ideal com a propriedade de extensão e $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ uma base natural tal que $I = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in \Lambda'\}$ e $\Lambda' \subseteq \Lambda$. Então $I$ tem a propriedade de absorção se, e somente se,*

$$\textit{para todo } j \in \Lambda \setminus \Lambda', \textit{ vale que } D^1(j) \not\subseteq \Lambda'. \tag{5}$$

*Demonstração.* Seja $M_B = (w_{ij})$ a matriz de estrutura de $\mathcal{A}$ relativa à base $B$. Suponha que $I$ tem a propriedade de absorção. Por redução ao absurdo, assuma que existe $j \in \Lambda \setminus \Lambda'$ tal que $D^1(j) \subseteq \Lambda'$. Seja $x = \sum\limits_{k \in \Lambda} x_k e_k \in \mathcal{A}$, com $x_k \in \mathbb{K}$. Então, utilizando a Equação (2), temos que

$$e_j x = e_j \left( \sum_{k \in \Lambda} x_k e_k \right) = x_j e_j^2 = x_j \left( \sum_{k \in D^1(j)} w_{jk} e_k \right).$$

Como $D^1(j) \subseteq \Lambda'$ então $e_j x \in I$. Logo $e_j \mathcal{A} \subseteq I$. Por hipótese $I$ tem a propriedade de absorção e consequentemente $e_j \in I$, o que é um absurdo, visto que $j \in \Lambda \setminus \Lambda'$.

Para a recíproca, suponha que $I$ respeita a Equação (5) e vejamos que $I$ tem a propriedade de absorção. Seja $x = \sum\limits_{k \in \Lambda} x_k e_k \in \mathcal{A}$, com $x_k \in \mathbb{K}$, tal que $x\mathcal{A} \subseteq I$. Suponha que $x \notin I$, então existe $j \in \Lambda \setminus \Lambda'$ tal que $x_j \neq 0$. Portanto

$$x e_j = x_j e_j^2 = x_j \left( \sum_{k \in \Lambda} w_{jk} e_k \right) = x_j \left( \sum_{k \in D^1(j)} w_{jk} e_k \right) \in I.$$

Pela Proposição 2.1.12 (ii), temos que $\operatorname{supp}_B(x e_j) = D^1(j) \subseteq \Lambda'$, o que é um absurdo visto que por hipótese $I$ respeita a Equação (5). Logo $x \in I$, o que significa que $I$ tem a propriedade de absorção. $\square$

**Observação 2.2.3.** *Dada uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$, denotamos por $\Psi(\mathcal{A})$ o conjunto de todos os ideais de $\mathcal{A}$ com a propriedade de absorção. Na Observação 2.1.3, discutimos o fato de que* $\operatorname{ann}(\mathcal{A}) \subseteq I$*, para todo $I \in \Psi(\mathcal{A})$. Portanto*

$$\operatorname{ann}(\mathcal{A}) \subseteq \bigcap_{I \in \Psi(\mathcal{A})} I = \operatorname{rad}(\mathcal{A}).$$

*Assim, para que* $\operatorname{ann}(\mathcal{A}) = \operatorname{rad}(\mathcal{A})$ *basta que* $\operatorname{ann}(\mathcal{A}) \in \Psi(\mathcal{A})$*. Pelo Lema 1.3.8, temos que* $\operatorname{ann}(\mathcal{A}) = \{e_i;\ i \in \Lambda_0(B)\}$ *e pela Proposição 2.2.2 temos que* $\operatorname{ann}(\mathcal{A})$ *tem a propriedade de absorção se, e somente se, $D^1(j) \not\subseteq \Lambda_0(B)$ para todo $j \in \Lambda \setminus \Lambda_0(B)$.*

**Corolário 2.2.4.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e* $\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in \Lambda'\}$*. Então, se $j \in \Lambda$ valem as seguintes propriedades:*

*(i) Se $D^1(j) \subseteq \Lambda'$ então $j \in \Lambda'$.*

*(ii) Se $D^n(j) \subseteq \Lambda'$, para algum $n > 1$, então $D^{n-1}(j) \subseteq \Lambda'$.*

*(iii) Se $D^n(j) \subseteq \Lambda'$, para algum $n > 0$, então $j \in \Lambda'$.*

*Demonstração.* Para verificar o item (i), suponha que existe $j \in \Lambda$ tal que $D^1(j) \subseteq \Lambda'$ e $j \notin \Lambda'$. Pela Proposição 2.2.2, isto implicaria que $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ não tem a propriedade de absorção, o que é um absurdo. Para provar o item (ii), Seja $j \in \Lambda$ tal que $D^n(j) \subseteq \Lambda'$. Por definição, $D^n(j) = D^1(D^{n-1}(j)) \subseteq \Lambda'$. Logo, para todo $k \in D^{n-1}(j)$ vale que $D^1(k) \subseteq \Lambda'$. Consequentemente, pelo item (i), $k \in \Lambda'$. Portanto $D^{n-1}(j) \subseteq \Lambda'$. O item (iii) segue de (i) e (ii). □

**Definição 2.2.5.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Dizemos que o conjunto $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de ideais de $\mathcal{A}$ respeita a **condição de cadeia ascendente** se $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_k \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{A}$ e existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $I_m = I_{m+t}$, para todo $t \in \mathbb{N}$.*

**Observação 2.2.6.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$. Considere a seguinte família de subconjuntos de $\Lambda$,*

$$\lambda_0(B) = \{i \in \Lambda;\ e_i^2 = 0\} \quad e \quad \lambda_k(B) = \{i \in \Lambda;\ D^1(i) \subseteq \lambda_{k-1}(B)\},$$

*para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Se $i \in \lambda_0(B)$, então $D^1(i) = \varnothing$ e, consequentemente, $D^1(i) \subseteq \lambda_0(B)$. Logo $\lambda_0(B) \subseteq \lambda_1(B)$. Suponha que $\lambda_{t-1}(B) \subseteq \lambda_t(B)$ para algum $t > 0$. Seja $j \in \lambda_t(B)$. Então $D^1(j) \subseteq \lambda_{t-1}(B) \subseteq \lambda_t(B)$. Pela definição de $\lambda_{t+1}(B)$, temos que $j \in \lambda_{t+1}(B)$. Logo $\lambda_t(B) \subseteq \lambda_{t+1}(B)$ e portanto temos a seguinte cadeia de subconjuntos de $\Lambda$*

$$\lambda_0(B) \subseteq \lambda_1(B) \subseteq \ldots \subseteq \lambda_k(B) \subseteq \ldots \subseteq \Lambda. \tag{6}$$

*Observe que $\lambda_0(B) = \Lambda_0(B)$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina $\mathrm{ann}_i^B(\mathcal{A}) = \mathrm{span}\{e_j;\ j \in \lambda_i(B)\}$. Como veremos na próxima proposição, estes espaços vetoriais são ideais.*

**Proposição 2.2.7.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$. Então os espaços vetoriais $\mathrm{ann}_i^B(\mathcal{A})$, com $i \in \mathbb{N}$, são ideais de $\mathcal{A}$.*

*Demonstração.* Primeiro, note que $\mathrm{ann}_0^B(\mathcal{A}) = \mathrm{ann}(\mathcal{A})$, que já sabemos que é um ideal. Sejam $x = \sum_{k\in\Lambda} x_k e_k \in \mathcal{A}$ e $y = \sum_{k\in\lambda_i(B)} y_k e_k \in \mathrm{ann}_i^B(\mathcal{A})$, com $i > 0$. Então

$$xy = \sum_{k\in\lambda_i(B)} x_k y_k e_k^2 = \sum_{k\in\lambda_i(B)} x_k y_k \left(\sum_{t\in\Lambda} w_{kt} e_t\right) = \sum_{k\in\lambda_i(B)} x_k y_k \left(\sum_{t\in D^1(k)} w_{kt} e_t\right).$$

Se $k \in \lambda_i(B)$ então $t \in D^1(k) \subseteq \lambda_{i-1}(B) \subseteq \lambda_i(B)$. Desta forma $e_t \in \mathrm{ann}_i^B(\mathcal{A})$ para todo $t \in D^1(k)$ e consequentemente $xy \in \mathrm{ann}_i^B(\mathcal{A})$. Logo $\mathrm{ann}_i^B(\mathcal{A})$ é um ideal. □

**Exemplo 2.2.8.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tal que $e_1^2 = e_1 + e_2 + e_3$, $e_2^2 = e_3^2 = e_4$ e $e_4^2 = 0$. Considere $\Gamma(\mathcal{A}, B)$, apresentado na Figura 3, e denote por $D_B^1(i)$ o conjunto de descendentes de primeira geração de $i$ neste grafo. Tomando $\Lambda = \{1, 2, 3, 4\}$, temos que $\lambda_0(B) = \{i \in \Lambda;\ e_i^2 = 0\} = \{4\}$ e $\lambda_1(B) = \{i \in \Lambda;\ D_B^1(i) \subseteq \lambda_0\} = \{2, 3, 4\}$. Continuando, temos que $\lambda_i(B) = \lambda_1(B) = \{2, 3, 4\}$, para todo $i > 1$. Assim $\operatorname{ann}_0^B(\mathcal{A}) = \operatorname{span}\{e_4\}$, $\operatorname{ann}_1^B(\mathcal{A}) = \operatorname{span}\{e_2, e_3, e_4\}$ e $\operatorname{ann}_i^B(\mathcal{A}) = \operatorname{ann}_1^B(\mathcal{A})$, para todo $i > 1$.*

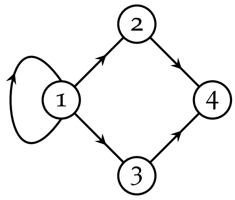


Figura 3: $\Gamma(\mathcal{A}, B)$.

*Considere agora $B' = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, onde $f_1 = e_4$, $f_2 = e_2 + e_3$, $f_3 = e_2 - e_3$ e $f_4 = e_1$. Pode-se verificar que $B'$ é uma base natural de $\mathcal{A}$ com o produto dado por $f_1^2 = 0$, $f_2^2 = f_3^2 = 2f_1$ e $f_4^2 = f_2 + f_4$. O grafo associado a $\mathcal{A}$ relativo a base $B'$ é apresentado na Figura 4.*

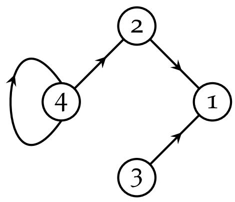


Figura 4: $\Gamma(\mathcal{A}, B')$.

*Utilizando $B'$ temos que $\lambda_0(B') = \{1\}$ e $\lambda_i(B') = \{1, 2, 3\}$, para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Note ainda que $\operatorname{ann}_0^{B'}(\mathcal{A}) = \operatorname{span}\{f_1\}$, $\operatorname{ann}_1^{B'}(\mathcal{A}) = \operatorname{span}\{f_1, f_2, f_3\}$ e que $\operatorname{ann}_i^{B'}(\mathcal{A}) = \operatorname{ann}_1^{B'}(\mathcal{A})$, para todo $i > 1$. Observe que $\lambda_0(B) \neq \lambda_0(B')$ e $\lambda_1(B) \neq \lambda_1(B')$, porém $\operatorname{ann}_i^B(\mathcal{A}) = \operatorname{ann}_i^{B'}(\mathcal{A})$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Na próxima proposição mostraremos que tal propriedade vale em geral.* □

**Proposição 2.2.9.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com bases naturais $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e $B' = \{f_i;\ i \in \Lambda\}$. Então $\operatorname{ann}_i^B(\mathcal{A}) = \operatorname{ann}_i^{B'}(\mathcal{A})$, para todo $i \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* Para $i = 0$, temos que $\operatorname{ann}_0^B(\mathcal{A}) = \operatorname{ann}(\mathcal{A}) = \operatorname{ann}_0^{B'}(\mathcal{A})$. Seja $M_{B'} = (w'_{ij})$ a matriz de estrutura de $\mathcal{A}$ relativa à base $B'$. Suponha por indução que $\operatorname{ann}_i^B(\mathcal{A}) = \operatorname{ann}_i^{B'}(\mathcal{A})$ para $i \in \mathbb{N}^*$. Afirmamos que $\operatorname{ann}_{i+1}^B(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{ann}_{i+1}^{B'}(\mathcal{A})$. Seja $j \in \lambda_{i+1}(B)$. Por definição, temos que $D^1_B(j) \subseteq \lambda_i(B)$ e portanto $e_j^2 \in \text{ann}_i^B(A) = \text{ann}_i^{B'}(A)$. Se $e_j = \sum_{k\in\Lambda} x_k f_k$, onde $x_k$ são coeficientes, então pela Observação 1.3.16 existe $\Lambda' \subseteq \Lambda \setminus \lambda_0(B')$ tal que

$$e_j = \sum_{k\in\Lambda'} x_k f_k + \sum_{k\in\lambda_0(B')} x_k f_k,$$

onde $x_{k_0} \neq 0$ para algum $k_0 \in \Lambda'$ e ainda $\text{rank}(\{f_\ell^2, f_t^2\}) = 1$ para todo $\ell, t \in \Lambda'$. Observe que como $\text{rank}(\{f_\ell^2, f_t^2\}) = 1$, então existem $\alpha_k \in \mathbb{K}^*$ tais que $f_k^2 = \alpha_k f_{k_0}^2$ e consequentemente $D^1_{B'}(k) = D^1_{B'}(k_0)$ para todo $k \in \Lambda'$. Assim

$$\begin{aligned} e_j^2 &= \sum_{k\in\Lambda'} x_k^2 f_k^2 + \sum_{k\in\lambda_0(B')} x_k^2 f_k^2 = \sum_{k\in\Lambda'} x_k^2 f_k^2 = \sum_{k\in\Lambda'} x_k^2 \left(\alpha_k f_{k_0}^2\right) \\ &= \left(\sum_{k\in\Lambda'} x_k^2 \alpha_k\right)\left(\sum_{t\in D^1_{B'}(k_0)} \omega_{k_0 t} f_t\right). \end{aligned}$$

Como $e_j^2 \in \text{ann}_i^{B'}(\mathcal{A})$ então $D^1_{B'}(k_0) \subseteq \lambda_i(B')$. Logo $\Lambda' \subseteq \lambda_{i+1}(B')$ e consequentemente $e_j \in \text{span}\{f_t;\ t \in \lambda_{i+1}(B')\} = \text{ann}_{i+1}^{B'}(\mathcal{A})$. Segue que $\text{ann}_{i+1}^{B'}(\mathcal{A}) = \text{span}\{e_k;\ k \in \lambda_{i+1}(B)\} \subseteq \text{ann}_{i+1}^{B'}(\mathcal{A})$. De forma análoga, temos que $\text{ann}_{i+1}^{B'}(\mathcal{A}) \subseteq \text{ann}_{i+1}^{B}(\mathcal{A})$. □

A proposição anterior prova que $\text{ann}_i^B(\mathcal{A})$ é invariante pela base natural $B$, desta forma podemos omitir a base e escrever $\text{ann}_i(\mathcal{A})$.

**Proposição 2.2.10.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$. Então $\{\text{ann}_i(\mathcal{A})\ ;\ i \in \mathbb{N}\}$ respeita a condição de cadeia ascendente.*

*Demonstração.* Pela Proposição 2.2.9 temos que $\text{ann}_i(\mathcal{A})$ é um ideal para todo $i \in \mathbb{N}$. De (6) segue que

$$\text{ann}_0(\mathcal{A}) \subseteq \text{ann}_1(\mathcal{A}) \subseteq \ldots \subseteq \text{ann}_i(\mathcal{A}) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{A}.$$

Seja $i \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_i(B) = \lambda_{i+1}(B)$. Então

$$\lambda_{i+2}(B) = \{j \in \Lambda;\ D^1(j) \subseteq \lambda_{i+1}(B)\} = \{j \in \Lambda;\ D^1(j) \subseteq \lambda_i(B)\} = \lambda_{i+1}(B).$$

Segue por indução que se $\lambda_i(B) = \lambda_{i+1}(B)$ então $\lambda_i(B) = \lambda_{i+t}(B)$, para todo $t \in \mathbb{N}$. Concluímos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{ann}_0(\mathcal{A}) \subseteq \text{ann}_1(\mathcal{A}) \subseteq \ldots \subseteq \text{ann}_m(\mathcal{A}) = \text{ann}_{m+1}(\mathcal{A}) = \text{ann}_{m+2}(\mathcal{A}) = \ldots.$$

Por fim, note que como $\mathcal{A}$ tem dimensão finita existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\text{ann}_m(\mathcal{A}) = \text{ann}_{m+1}(\mathcal{A})$. □

**Teorema 2.2.11.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e $\mathfrak{m} \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m} = \min\{k \in \mathbb{N};\ \lambda_k(B) = \lambda_{k+1}(B)\}$. Então $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{ann}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{A})$.*

*Demonstração.* Note que, por definição, $\mathrm{ann}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{A})$ tem a propriedade de extensão. Vejamos agora que $\mathrm{ann}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{A}) \in \Psi(\mathcal{A})$ . Suponha que $\mathrm{ann}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{A})$ não tem a propriedade de absorção. Pela Proposição 2.2.2, existe $j \in \Lambda \setminus \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$ tal que $D^1(j) \subseteq \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$. Pela definição de $\lambda_{\mathfrak{m}+1}(B)$ temos que $j \in \lambda_{\mathfrak{m}+1}(B) = \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$, o que é absurdo. Logo $\mathrm{ann}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{A})$ tem a propriedade de absorção.

Por último, demonstraremos que $\mathrm{ann}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{A}) \subseteq I$ para todo $I \in \Psi(\mathcal{A})$. Suponha, por redução ao absurdo, que existe $I \in \Psi(\mathcal{A})$ tal que $\mathrm{ann}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{A}) \nsubseteq I$. Como $I$ tem a propriedade de absorção, então pelo Lema 2.1.5 existe $\Lambda' \subseteq \Lambda$ tal que $I = \mathrm{span}\{e_i;\ i \in \Lambda'\}$. Como $\mathrm{ann}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{A}) \nsubseteq I$ então $\lambda_{\mathfrak{m}}(B) \nsubseteq \Lambda'$. Por outro lado, pela Observação 2.1.3, $\lambda_0(B) \subseteq \Lambda'$. Seja $r = \min\{k \in \mathbb{N};\ \lambda_k(B) \nsubseteq \Lambda'\}$. Portanto $\lambda_{r-1}(B) \subseteq \Lambda'$ e $\lambda_r(B) \nsubseteq \Lambda'$. Seja $k \in \lambda_r(B)$ tal que $k \in \Lambda \setminus \Lambda'$. Pela definição de $\lambda_r(B)$, temos que $D^1(k) \subseteq \lambda_{r-1}(B) \subseteq \Lambda'$. Desta forma, pela Proposição 2.2.2, temos que $I$ não tem a propriedade de absorção, o que é uma absurdo. Logo $\lambda_{\mathfrak{m}}(B) \subseteq \Lambda'$ e $\mathrm{ann}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{A}) \subseteq I$.

Como $\mathrm{ann}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{A})$ tem a propriedade de absorção, então $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{ann}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{A})$. Por outro lado, como $\mathrm{ann}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{A})$ está contido em todo ideal com a propriedade de absorção, temos que $\mathrm{ann}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathcal{A})$. □

**Definição 2.2.12.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B$. O **índice de absorção de** $\mathcal{A}$, que denotaremos por $\mathfrak{m}$, é dado por $\mathfrak{m} = \min\{k \in \mathbb{N}^*;\ \lambda_k(B) = \lambda_{k+1}(B)\}$*

**Corolário 2.2.13.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$, $\mathfrak{m}$ o índice de absorção e $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{span}\{e_i \in B;\ i \in \lambda_{\mathfrak{m}}(B)\}$. Então valem as seguintes propriedades:*

*(i) Se $\mu$ é um ciclo de $\Gamma(\mathcal{A}, B)$, então $\mu^0 \cap \lambda_{\mathfrak{m}}(B) = \varnothing$.*

*(ii) Se $i \in \Lambda$ é cíclico, então $i \notin \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$.*

*(iii) Se $i \in \lambda_{\mathfrak{m}}(B) \setminus \lambda_0(B)$, então existe um caminho de $i$ para algum $j \in \lambda_0(B)$.*

*Demonstração.* (i) Seja $\mu$ um ciclo de $\Gamma(\mathcal{A}, B)$. Como cada vértice de $\mu^0$ é origem de uma aresta, então $\mu^0 \cap \lambda_0(B) = \varnothing$. Suponha por redução ao absurdo que $\mu^0 \cap \lambda_{\mathfrak{m}}(B) \neq \varnothing$. Seja $k = \min\{t \in \mathbb{N}^*;\ \lambda_t(B) \cap \mu^0 \neq \varnothing\}$. Então existe $v \in \mu^0 \cap \lambda_k(B)$. Portanto $D^1(v) \subseteq \lambda_{k-1}(B)$ e $\mu^0 \cap \lambda_{k-1}(B) \neq \varnothing$. O que é absurdo pela minimalidade de $k$. Logo $\mu^0 \cap \lambda_{\mathfrak{m}}(B) = \varnothing$.

(ii) Sejam $i, j \in \Lambda$, $\theta$ um caminho de $i$ para $j$ e $\mu$ um ciclo tal que $j \in \mu^0$. Pelo item (i) $j \notin \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$. Suponha por redução ao absurdo que $i \in \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$. Como $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ tem a propriedade de extensão, pela Proposição 2.1.12 (ii) temos que $D(i) \subseteq \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$. Logo $j \in D(i) \subseteq \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$, o que é absurdo.

(iii) Se $i \in \lambda_{\mathfrak{m}}(B) \setminus \lambda_0(B)$, por (ii), não existe um caminho de $i$ para um ciclo de $\Gamma(\mathcal{A}, B)$. Pelo Lema 2.1.10, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $D^k(i) = \varnothing$. Seja $t = \min\{k \in \mathbb{N}^*;\ D^k(i) = \varnothing\}$. Como $D^{t-1}(i) \neq \varnothing$, tome $j \in D^{t-1}(i)$. Assim existe um caminho de $i$ para $j$ e $D^1(j) = \varnothing$, ou seja, $j \in \lambda_0(B)$. □

Recentemente, em [7], os autores apresentaram uma caracterização para o radical de absorção similar a que apresentamos aqui, porém mais geral, para álgebras não associativas. Uma diferença na abordagem que utilizamos neste capítulo é que aqui o radical de absorção pode ser obtido a partir do grafo associado a álgebra de evolução relativo a uma base qualquer. Vamos mostrar que a cadeia que apresentamos na Proposição 2.2.10 é a mesma cadeia apresentada em [11, Definição 3.3] (e utilizada em [7]), chamada de série anuladora superior. Primeiro, vejamos a definição.

**Definição 2.2.14.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Definimos $\mathrm{ann}^{(0)}(\mathcal{A}) = \{0\}$ e $\mathrm{ann}^{(i)}(\mathcal{A})$ da seguinte forma:*

$$\mathrm{ann}^{(i)}(\mathcal{A})/\mathrm{ann}^{(i-1)}(\mathcal{A}) = \mathrm{ann}(\mathcal{A}/\mathrm{ann}^{(i-1)}(\mathcal{A})) \text{ para todo } i \in \mathbb{N}^*.$$

*A cadeia de ideais*

$$\{0\} \subseteq \mathrm{ann}^{(0)}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{ann}^{(1)}(\mathcal{A}) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{ann}^{(i)}(\mathcal{A}) \subseteq \ldots$$

*é chamada de **série anuladora superior**.*

Em [7, Lema 3.5 i)], os autores provaram que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra então

$$\mathrm{ann}^{(i)}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A};\ x\mathcal{A} \cup \mathcal{A}x \subseteq \mathrm{ann}^{(i-1)}(\mathcal{A})\},$$

para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Vamos mostrar que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução então $\mathrm{ann}^{(i+1)}(\mathcal{A}) = \mathrm{ann}_i(\mathcal{A})$, para todo $i \in \mathbb{N}$, e consequentemente as construções são equivalentes para álgebras de evolução.

**Proposição 2.2.15.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução. Então $\mathrm{ann}^{(i+1)}(\mathcal{A}) = \mathrm{ann}_i(\mathcal{A})$, para todo $i \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* Seja $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ uma base natural de $\mathcal{A}$. Para $i = 0$ temos que $\operatorname{ann}^{(1)}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A};\ x\mathcal{A} \subseteq \{0\}\} = \operatorname{ann}(\mathcal{A}) = \operatorname{ann}_0(\mathcal{A})$. Suponha que $\operatorname{ann}^{(k+1)}(\mathcal{A}) = \operatorname{ann}_k(\mathcal{A})$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$. Primeiro vamos provar que $\operatorname{ann}^{(k+2)}(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{ann}_{k+1}(\mathcal{A})$. Sejam $x = \sum_{t\in\Lambda} x_t e_t \in \operatorname{ann}^{(k+2)}(\mathcal{A})$, com $x_t$ coeficientes, e $\Lambda' = \operatorname{supp}_B(x)$. Se $j \in \Lambda'$ temos que

$$xe_j = \left(\sum_{t\in\Lambda'} x_t e_t\right) e_j = x_j e_j^2 = x_j \left(\sum_{\ell\in D^1(j)} w_{j\ell} e_\ell\right) \in \operatorname{ann}^{(k+1)}(\mathcal{A}) = \operatorname{ann}_k(\mathcal{A}).$$

Logo $D^1(j) \subseteq \lambda_k(B)$ e portanto $j \in \lambda_{k+1}(B)$. Concluímos que $x \in \operatorname{ann}_{k+1}(\mathcal{A})$. Provaremos agora que $\operatorname{ann}_{k+1}(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{ann}^{(k+2)}(\mathcal{A})$. Sejam $x = \sum_{t\in\lambda_{k+1}(B)} x_t e_t \in \operatorname{ann}_{k+1}(\mathcal{A})$ e $y = \sum_{t\in\Lambda} y_t e_t \in \mathcal{A}$. Então

$$xy = \left(\sum_{t\in\lambda_{k+1}(B)} x_t e_t\right)\left(\sum_{t\in\Lambda} y_t e_t\right) = \sum_{t\in\lambda_{k+1}(B)} x_t y_t e_t^2 = \sum_{t\in\lambda_{k+1}(B)} x_t y_t \left(\sum_{\ell\in D^1(t)} w_{t\ell} e_\ell\right).$$

Como $t \in \lambda_{k+1}(B)$ então $D^1(t) \subseteq \lambda_k(B)$. Logo $xy \in \operatorname{span}\{e_t;\ t \in \lambda_k\} = \operatorname{ann}_k(\mathcal{A}) = \operatorname{ann}^{(k+1)}(\mathcal{A})$. Portanto $x\mathcal{A} \subseteq \operatorname{ann}^{(k+1)}(\mathcal{A})$ e consequentemente $x \in \operatorname{ann}^{(k+2)}(\mathcal{A})$. □

Um resultado equivalente ao Teorema 2.2.11, porém mais geral, para álgebras não associativas, foi apresentado em [7]. Primeiro, vejamos uma definição.

**Definição 2.2.16.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Se existe $k$ tal que*

$$k = \min\{q;\ \operatorname{ann}^{(q)}(\mathcal{A}) = \operatorname{ann}^{(q+1)}(\mathcal{A})\},$$

*chamaremos $k$ de **índice de estabilização do aniquilador** de $\mathcal{A}$, e denotaremos por* $\operatorname{asi}(\mathcal{A})$.

Em [7, Proposição 3.7 iii) ] os autores mostram que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra então $\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = \operatorname{ann}^{(\operatorname{asi}(\mathcal{A}))}(\mathcal{A})$, o que é equivalente ao Teorema 2.2.11 se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução. Observe que a proposição anterior mostra que se $\mathcal{A}$ tem índice de absorção $\mathfrak{m}$, então $\operatorname{asi}(\mathcal{A}) = \mathfrak{m} - 1$.

Uma vantagem da abordagem que propomos aqui nesta seção é o teorema que apresentaremos a seguir, que permite determinar o radical de absorção a partir de propriedades do grafo associado a álgebra relativo a uma base fixada.

**Teorema 2.2.17.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$, $\mathfrak{m}$ o índice de absorção e* $\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = \operatorname{span}\{e_i \in B;\ i \in \lambda_{\mathfrak{m}}(B)\}$. *Então $i \in \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$ se, e somente se, $i$ não é cíclico.*

*Demonstração.* A ida segue direto do Corolário 2.2.13 (ii). No outro sentido, tome $i \in \Lambda$ tal que não existe caminho de $i$ para um ciclo de $\Gamma(\mathcal{A}, B)$. Pelo Lema 2.1.10, temos que existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $D^k(i) = \emptyset$. Seja $r = \min\{k \in \mathbb{N}^*;\ D^k(i) = \emptyset\}$. Assim $D^{r-1}(i) \neq \emptyset$ e $D^1(D^{r-1}(i)) = \emptyset$. Portanto $D^{r-1}(i) \subseteq \lambda_0(B) \subseteq \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$. Pelo Corolário 2.2.4 (iii) temos que $i \in \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$. □

Observe que com o teorema anterior, fixada uma base natural $B$ de uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$, pode-se encontrar uma base para o radical de absorção simplesmente determinando quais vértices não são cíclicos em $\Gamma(\mathcal{A}, B)$. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 2.2.18.** *Considere novamente o álgebra $\mathcal{A}$ do Exemplo 2.1.7. O grafo de $\mathcal{A}$ associado a base $B$ é apresentado na Figura 5.*

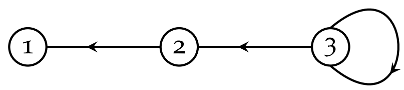


Figura 5: $\Gamma(\mathcal{A}, B)$.

*Note que os vértices* $1$ *e* $2$ *não são cíclicos. Pelo Teorema 2.2.17 temos que* $\lambda_{\mathfrak{m}}(B) = \{1, 2\}$. *Logo* $\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$. □

**Corolário 2.2.19.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

*(i)* $\mathcal{A} = \operatorname{rad}(\mathcal{A})$.

*(ii)* $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ *não possui ciclos.*

*(iii)* $\mathcal{A}$ *é nilpotente.*

*Demonstração.* A equivalência entre os itens (i) e (ii) segue do Teorema 2.2.17 e a equivalência entre os itens (ii) e (iii) segue de [12, Teorema 3.4]. □

**Corolário 2.2.20.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$. Então* $\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = \operatorname{ann}(\mathcal{A})$ *se, e somente se, todo vértice $i \notin \lambda_0(B)$ é cíclico.*

## 2.3 REDUTIBILIDADE DE ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO DEGENERADAS

O principal objetivo desta seção é apresentar o Teorema 2.3.10, que mostra, sob certas condições, uma relação entre a redutibilidade de uma álgebra de evolução com a redutibilidade do seu radical de absorção. Começaremos com a definição de álgebra irredutível.

**Definição 2.3.1.** *Uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ é dita redutível se existem ideais $I$ e $J$ não nulos de $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{A} = I \oplus J$. Caso contrário, $\mathcal{A}$ é dita irredutível.*

Dada uma álgebra de evolução não degenerada é possível determinar sua redutibilidade usando o grafo associado relativo a uma base natural fixada, como diz a seguinte proposição.

**Proposição 2.3.2.** *[12, Proposição 2.8] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não degenerada com uma base natural $B$. Então $\mathcal{A}$ é irredutível se, e somente se, $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ é conexo.*

No entanto, para as álgebras de evolução degeneradas a redutibilidade é mais difícil de determinar, como mostra o seguinte critério.

**Proposição 2.3.3.** *[12, Proposição 2.10] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução. Então $\mathcal{A}$ é irredutível se, e somente se, o grafo associado a $\mathcal{A}$ relativo a qualquer base natural é conexo.*

Como veremos no próximo exemplo, a conexidade do grafo associado a uma álgebra de evolução degenerada não é preservado pela troca de base natural.

**Exemplo 2.3.4.** *Considere a álgebra de evolução $\mathcal{A}$ com base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ tal que $e_1^2 = e_2 + e_3$ e $e_3^2 = e_2^2 = 0$. Definindo $f_1 = e_1$, $f_2 = e_2 + e_3$ e $f_3 = e_3$, note que $B' = \{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base natural de $\mathcal{A}$. Os grafos associados a $\mathcal{A}$ relativos as bases $B$ e $B'$ são apresentados na Figura 6.* □

O principal objetivo desta seção é estudar critérios para determinar se uma álgebra de evolução degenerada é redutível ou irredutível. Se uma álgebra de evolução possui uma base natural tal que o grafo associado é desconexo, então a Proposição 2.3.3 nos garante que tal álgebra é redutível. Então vamos focar nosso trabalho em álgebras de evolução degeneradas com uma base natural tal que o grafo associado relativo a tal base seja conexo.

(a) $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ (b) $\Gamma(\mathcal{A}, B')$

Figura 6: Grafos associados a $\mathcal{A}$ relativos as bases $B$ e $B'$.

**Exemplo 2.3.5.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ tal que $e_1^2 = 0$, $e_2^2 = e_1$, $e_3^2 = e_2 + e_4$, $e_4^2 = e_5$ e $e_5^2 = e_3$. A matriz de estrutura de $\mathcal{A}$ relativa à $B$ é dada por*

$$M_B = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

*O grafo associado a $\mathcal{A}$ relativo à base natural $B$ é apresentado na Figura 7.*

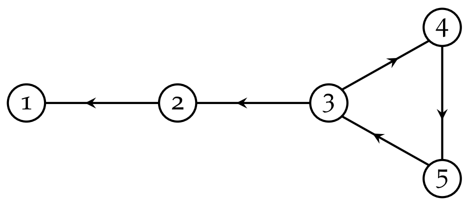

Figura 7: $\Gamma(\mathcal{A}, B)$.

*Como $1$ e $2$ não são vértices cíclicos e $3$, $4$ e $5$ são vértices cíclicos, pelo Teorema 2.2.17, temos que $\lambda_{\mathfrak{m}}(B) = \{1, 2\}$. Assim $\operatorname{rad}(\mathcal{A}) = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ e a matriz de estrutura de $\operatorname{rad}(\mathcal{A})$ relativa à base $B' = \{e_1, e_2\}$ é dada por*

$$M_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

*e o grafo de $\operatorname{rad}(\mathcal{A})$ relativo à base natural $B'$ é apresentado na Figura 8. Por outro lado,*

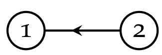

Figura 8: $\Gamma(\operatorname{rad}(\mathcal{A}), B')$.

$\overline{B} = \{\overline{e_3}, \overline{e_4}, \overline{e_5}\}$ *é uma base para* $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ *e ainda* $\overline{e_3}^2 = \overline{e_4}$, $\overline{e_4}^2 = \overline{e_5}$, $\overline{e_5}^2 = \overline{e_3}$. *Assim, a matriz de estrutura de* $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ *relativa à base* $\overline{B}$ *é dada por*

$$M_{\overline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Portanto, o grafo associado a* $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ *com relação a base* $\overline{B}$ *é o grafo da Figura 9.*

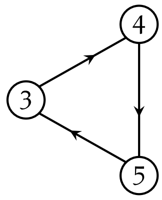


Figura 9: $\Gamma(\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}), \overline{B})$.

*Por fim, observe que se definirmos*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*então podemos escrever* $M_B$ *como uma matriz de bloco, com a seguinte forma*

$$M_B = \begin{pmatrix} M_{B'} & 0 \\ X & M_{\overline{B}} \end{pmatrix}.$$

□

No exemplo anterior a matriz de estrutura de uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ pode ser escrita como uma matriz em blocos, cujos blocos diagonais são a matriz de estrutura de $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ e a matriz de estrutura de $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$. Como veremos a seguir, esta propriedade é válida em geral.

**Proposição 2.3.6.** *Sejam* $\mathcal{A}$ *uma álgebra de evolução,* $I$ *um ideal com a propriedade de extensão e* $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ *uma base natural de* $\mathcal{A}$ *tal que* $I = \mathrm{span}\{e_i;\ i \in \Lambda'\}$ *e* $\Lambda' \subseteq \Lambda$. *Se os elementos de* $B$ *estão enumerados de tal que* $i < j$ *para quaisquer* $i \in \Lambda'$ *e* $j \in \Lambda \setminus \Lambda'$, *então existem bases naturais* $B'$ *e* $\overline{B}$ *de* $I$ *e* $\mathcal{A}/I$, *respectivamente, tais que* $M_B$ *tem a seguinte forma de blocos:*

$$M_B = \begin{pmatrix} M_{B'} & 0 \\ X & M_{\overline{B}} \end{pmatrix};$$

*onde $M_{B'}$ é a matriz de estrutura de $I$ relativa à base $B'$ e $M_{\overline{B}}$ é a matriz de estrutura de $\mathcal{A}/I$ relativa à base $\overline{B}$.*

*Demonstração.* Seja $B$ uma base natural de $\mathcal{A}$ nas condições da hipótese e $M_B = (w_{ij})_{i,j\in\Lambda}$ a matriz de estrutura de $\mathcal{A}$ relativa à $B$. Sabemos que $B' = \{e_i;\ i \in \Lambda'\}$ é uma base natural de $I$.

Como $I$ é um ideal de $\mathcal{A}$ então $e_i^2 = \sum_{k\in\Lambda'} w_{ik}e_k$ para todo $i \in \Lambda'$. Logo as $|\Lambda'|$ primeiras linhas de $M_B$ tem a forma desejada. Pela Observação 1.3.11, sabemos que $\overline{B} = \{\overline{e_i};\ i \in \Lambda \setminus \Lambda'\}$ é uma base para $\mathcal{A}/I$. Note que

$$\overline{e_i}^2 = \overline{\sum_{k\in\Lambda} w_{ik}e_k} = \sum_{k\in\Lambda} w_{ik}\overline{e_k} = \sum_{k\in\Lambda\setminus\Lambda'} w_{ik}\overline{e_k} \text{ para todo } i \in \Lambda \setminus \Lambda'. \tag{7}$$

Se $M_{\overline{B}} = (z_{ij})_{i,j\in\Lambda\setminus\Lambda'}$ é a matriz de estrutura de $\mathcal{A}/I$ relativa à base $\overline{B}$, então temos que

$$\overline{e_i}^2 = \sum_{k\in\Lambda\setminus\Lambda'} z_{ik}\overline{e_k} \text{ para todo } i \in \Lambda \setminus \Lambda'.$$

Pela Equação (7) temos que $z_{ij} = w_{ij}$ para todo $i, j \in \Lambda \setminus \Lambda'$ e segue a afirmação. □

**Proposição 2.3.7.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B$. Então existem bases naturais $B'$ e $\overline{B}$ de* $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ *e* $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$*, respectivamente, tais que* $\Gamma(\mathrm{rad}(\mathcal{A}), B')$ *e* $\Gamma(\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}), \overline{B})$ *são subgrafos plenos de* $\Gamma(\mathcal{A}, B)$.

*Demonstração.* Considere a base natural $B' = \{e_i;\ i \in \lambda_{\mathfrak{m}}(B)\}$ de $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$. Como $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ tem a propriedade de extensão, podemos aplicar a Proposição 2.3.6 e considerando a base $\overline{B} = \{\overline{e_i};\ i \in \Lambda \setminus \Lambda'\}$ de $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ temos que

$$M_B = \begin{pmatrix} M_{B'} & 0 \\ X & M_{\overline{B}} \end{pmatrix};$$

com a ordenação da base $B$ apresentada na Proposição 2.3.6. Pela Definição 1.2.1, obtemos a tese.

□

**Lema 2.3.8.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução degenerada com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$. Suponha que $\mathcal{A} \neq \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ e $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ seja conexo. Então $V = \mathrm{rad}(\mathcal{A})^C$ não é um ideal de $\mathcal{A}$.*

*Demonstração.* Primeiro, pelo Teorema 2.2.11 temos que $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \{e_i \in B;\ i \in \lambda_{\mathfrak{m}}(B)\}$, então $V = \mathrm{span}\{e_i \in B;\ i \in \Lambda \setminus \lambda_{\mathfrak{m}}(B)\}$. Como $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ é conexo, então existe $j \in$

$\Lambda \setminus \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$ tal que $D^1(j) \cap \lambda_{\mathfrak{m}}(B) \neq \emptyset$. Se $D^1(j) \subseteq \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$ então teríamos que $j$ não é cíclico e portanto $j \in \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$, o que é um absurdo. Logo $D^1(j) \not\subseteq \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$ e consequentemente $D^1(j) \cap (\Lambda \setminus \lambda_{\mathfrak{m}}(B)) \neq \emptyset$. Assim podemos escrever $e_j^2 = u_1 + u_2$, onde $u_1 \in \mathrm{rad}(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ e $u_2 \in V \setminus \{0\}$.

Suponha por absurdo que $V$ é um ideal. Então $e_j^2 \in V$, o que é impossível, pois teríamos que $\mathcal{A} = \mathrm{rad}(\mathcal{A}) \oplus V$ e $u_1 = e_j^2 - u_2 \in \mathrm{rad}(\mathcal{A}) \cap V$, com $u_1 \neq 0$. □

**Proposição 2.3.9.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução nilpotente com $\dim(\mathrm{ann}(\mathcal{A})) = 1$ e $\mathfrak{m}$ seu índice de absorção. Então $\mathcal{A}$ é irredutível.*

*Demonstração.* Seja $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ uma base natural de $\mathcal{A}$ e $\lambda_0(B) = \{\ell\}$. Como $\mathcal{A}$ é nilpotente, pelo Corolário 2.2.19 temos que $\Lambda = \lambda_{\mathfrak{m}}(B)$. Se $j \in \Lambda \setminus \lambda_0(B)$, considerando o Corolário 2.2.13 (iii), existe um caminho de $j$ para $\ell$. Suponha por absurdo que $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ seja desconexo. Então existe uma partição de $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$ tal que $D(k) \subseteq \Lambda'$ para todo $k \in \Lambda'$ e $D(k) \subseteq \Lambda''$ para todo $k \in \Lambda''$. Sem perda de generalidade suponha que $\ell \in \Lambda'$. Tomando $t \in \Lambda''$, temos que não existe caminho de $t$ para $\ell$, o que é um absurdo. Logo $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ é conexo e pela Proposição 2.3.3 temos que $\mathcal{A}$ é irredutível. □

**Teorema 2.3.10.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução degenerada, $B$ e $C$ bases naturais de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$, respectivamente, tais que $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ e $\Gamma(\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}), C)$ são conexos. Se $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ é irredutível então $\mathcal{A}$ é irredutível.*

*Demonstração.* Seja $\mathcal{A}$ nas condições da hipótese. Se $\mathcal{A} = \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ então o resultado é trivial. Caso contrário, pela Proposição 2.3.3, basta provar que $\Gamma(\mathcal{A}, B')$ é conexo para uma base natural $B' = \{f_i;\ i \in \Lambda\}$ qualquer. Primeiro, note que como $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ é uma álgebra de evolução não degenerada, então o grafo associado a $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ relativo a qualquer base natural é conexo. Em particular, se considerarmos a base $\overline{B'} = \{f_i;\ i \in \Lambda \setminus \lambda_{\mathfrak{m}}(B')\}$, temos que $\Gamma(\mathcal{A}/rad(\mathcal{A}), \overline{B'})$ é conexo.

Por outro lado, como $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ é irredutível, então, pelo Teorema 2.3.2, o grafo associado a $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ relativo a qualquer base é conexo. Em particular, se considerarmos a base $B'' = \{f_i;\ i \in \lambda_{\mathfrak{m}}(B')\}$ de $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$, então $\Gamma(\mathrm{rad}(\mathcal{A}), B'')$ é conexo.

Seja $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$. Pelo Lema 2.3.8 $V = \mathrm{rad}(\mathcal{A})^C = \mathrm{span}\{e_i;\ i \in \Lambda \setminus \lambda_{\mathfrak{m}}(B)\} = \mathrm{span}\{f_i;\ i \in \Lambda \setminus \lambda_{\mathfrak{m}}(B')\}$ não é um ideal de $\mathcal{A}$. Como $V \cdot \mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$, então $V$ não é fechado para o produto, ou seja, existe $i \in \Lambda \setminus \lambda_{\mathfrak{m}}(B')$ tal que $e_i^2 \notin V$. Equivalentemente, existem $i \in \Lambda \setminus \lambda_{\mathfrak{m}}(B')$ e $j \in \lambda_{\mathfrak{m}}(B')$ tais que $j \in D^1(i)$.

Portanto $\Gamma(\mathcal{A}, B') = (\Lambda, E)$ é um grafo que possui subgrafos conexos $\Gamma(\text{rad}(\mathcal{A}), B'') = (\lambda_{\mathfrak{m}}(B'), E_1)$ e $\Gamma(\mathcal{A}/\text{rad}(\mathcal{A}), \overline{B'}) = (\Lambda \setminus \lambda_{\mathfrak{m}}(B'), E_2)$ tais que $E \cap (\Lambda \setminus \lambda_{\mathfrak{m}}(B')) \times (\lambda_{\mathfrak{m}}(B')) \neq \varnothing$. Pela Observação 1.2.4 concluímos que $\Gamma(\mathcal{A}, B')$ é conexo. $\square$

**Corolário 2.3.11.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução degenerada, $B$ e $C$ bases naturais de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}/\text{rad}(\mathcal{A})$, respectivamente, tais que $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ e $\Gamma(\mathcal{A}/\text{rad}(\mathcal{A}), C)$ são conexos. Se $\dim(\text{ann}(\mathcal{A})) = 1$ então $\mathcal{A}$ é irredutível.*

## 2.4 ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO ASSOCIATIVAS

Como já discutido, álgebras de evolução, em geral são não associativas. Em [14, Proposição 1] se apresenta um critério para determinar quando uma $\mathbb{K}$-álgebra é associativa. Vejamos.

**Proposição 2.4.1.** *[14, Proposição 1] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com uma base $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$. Então $\mathcal{A}$ é associativa se, e somente se, $(e_ie_j)e_k = e_i(e_je_k)$ para todo $i, j, k \in \Lambda$.*

Isso significa que é suficiente ver o que acontece numa base fixada. Vejamos o que isso representa em relação ao grafo associado a uma álgebra de evolução. O próximo resultado segue da proposição anterior e foi enunciado em [16].

**Proposição 2.4.2.** *[16, Proposição 3.2.1] Uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ é associativa se, e somente se, $e_i^2e_j = 0$, para todo $i, j \in \Lambda$ com $i \neq j$.*

As proposições a seguir apresentarão critérios para determinar se uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ é associativa a partir do grafo associado a $\mathcal{A}$ relativo a uma base natural $B$, considerando casos sobre a dimensão do anulador de $\mathcal{A}$. Primeiro, note que se $\mathcal{A} = \text{ann}(\mathcal{A})$ então $\mathcal{A}$ é trivial nula e portanto é associativa e o grafo associado a $\mathcal{A}$, relativo a uma base natural qualquer, possui o conjunto de arestas vazio.

**Proposição 2.4.3.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não degenerada de dimensão $n$. Então $\mathcal{A}$ é associativa se, e somente se, $\mathcal{A}$ é trivial não nula. Equivalentemente, se o grafo associado a $\mathcal{A}$, relativo a uma base natural qualquer, é um grafo com $n$ vértices onde o conjunto de arestas é dado por um laço em cada um dos vértices.*

*Demonstração.* Seja $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ uma base natural de $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ é não degenerada então $e_i^2 \neq 0$, para todo $e_i \in B$. Assim $e_i^2e_j = 0$ para todo $e_j \in B \setminus \{e_i\}$ se, e somente se,

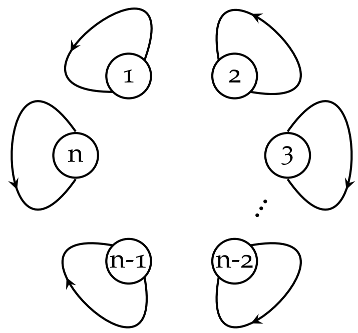


Figura 10: Grafo associado uma álgebra de evolução não degenerada associativa.

$e_i^2 = w_{ii}e_i$, onde $w_{ii} \neq 0$. Portanto, $\mathcal{A}$ é associativa se, e somente se, é uma álgebra de evolução trivial não nula. □

**Proposição 2.4.4.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução de dimensão $n$ tal que* $\dim(\operatorname{ann}(\mathcal{A})) = r$ *e* $0 < r < n$. *Então $\mathcal{A}$ é associativa se, e somente se, o grafo associado a $\mathcal{A}$ relativo a uma base natural qualquer é um subgrafo do grafo G da Figura 11, com exatamente r poços.*

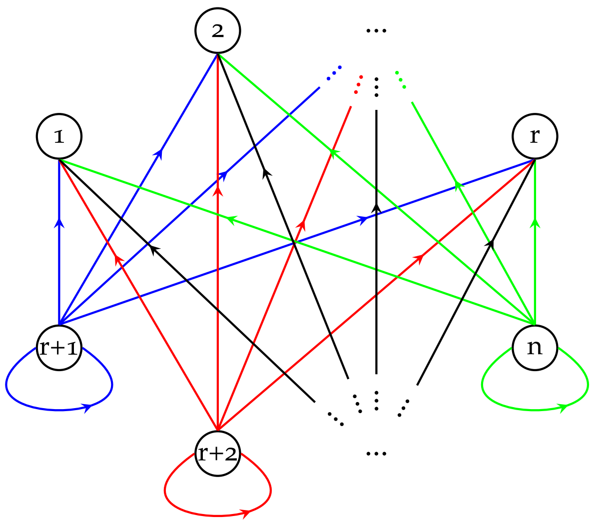


Figura 11: Grafo G.

*Demonstração.* Seja $B$ uma base natural de $\mathcal{A}$. Primeiro, vamos ordenar os elementos de $B$ de tal forma que $B = \{e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ e $\operatorname{ann}(\mathcal{A}) = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_r\}$. Considere $M_B = (w_{ij})$ a matriz de estrutura de $\mathcal{A}$ relativa a base $B$. Fixe $e_k \in B$. Se $e_k \in \operatorname{ann}(\mathcal{A})$, então $e_k^2 e_j = 0$ para todo $e_j \in B$. Se $e_k \notin \mathrm{ann}(\mathcal{A})$, então $e_k^2 e_j = 0$ para todo $j \in \Lambda \setminus \{k\}$ se, e somente, se

$$e_k^2 = w_{kk} e_k + \sum_{i=1}^{r} w_{ki} e_i,$$

onde os coeficientes $w_{kk}$ e $w_{ki}$, $1 \leq i \leq r$, não são todos nulos. Logo a matriz de estrutura de $\mathcal{A}$ com relação a base natural $B$ é composta por blocos com a seguinte forma:

$$M_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

onde

$$C = \begin{pmatrix} w_{r+1,1} & w_{r+1,2} & \dots & w_{r+1,r} \\ w_{r+2,1} & w_{r+2,2} & \dots & w_{r+2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,1} & w_{n,2} & \dots & w_{n,r} \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} w_{r+1,r+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_{r+2,r+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & w_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Portanto $\mathcal{A}$ é associativa se, e somente se, o seu grafo associado é um subgrafo do grafo da Figura 10, cujos vértices $r+1, r+2, \dots n$ são a origem de pelo menos uma aresta.

□

Uma consequência do Lema 1.3.8, é que o número de elementos de uma base natural cujo quadrado é nulo, é o mesmo para todas as bases naturais de uma álgebra de evolução. Logo $r$ não depende da escolha da base natural.

# 3 DERIVAÇÕES E LAÇOS DE ALGUMAS ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos alguns dos resultados de [6]. Este trabalho é dividido em três partes. Primeiro, nos dedicamos a caracterizar o espaço das derivações de álgebras de evolução não degeneradas e depois focamos nosso interesse nas derivações de álgebras de evolução de Volterra não degeneradas. Por fim, dada uma álgebra de evolução e uma base natural, definimos o conceito de laço e apresentamos quais condições necessárias para que a quantidade de laços seja invariante pela troca de base natural.

Na Seção 3.1 apresentamos algumas definições e notações que serão utilizadas neste capítulo. Na Seção 3.2 discutimos alguns resultados que caracterizam o espaço das derivações de uma álgebra de evolução não degenerada. Destacamos a Proposição 3.2.3 que, como aponta a Observação 3.2.4, generaliza alguns resultados já conhecidos.

Na Seção 3.3 focamos nosso interesse no caso das álgebras de evolução de Volterra. A Proposição 3.3.1 é uma aplicação da Proposição 3.2.1 para as restrições consideradas. Aqui, destacamos o Teorema 3.3.3, que mostra que dada uma álgebra de evolução de Volterra não degenerada, sob certas condições, podemos construir uma outra álgebra de evolução de Volterra, com grafo associado mais simples, de tal forma que essas duas álgebra tenham o mesmo espaço de derivações. As Proposições 3.3.8 e 3.3.11 apresentam condições para que uma álgebra de evolução de Volterra tenha uma derivação com entradas não nulas na diagonal.

Na última seção, fixada uma base natural de uma álgebra de evolução, motivados pela teoria de grafos, definimos o conjunto de laços da álgebra relativos a esta base e nos dedicamos a estudar quando a quantidade de laços é preservada pela troca de base natural. O Teorema 3.4.3 mostra que, apesar do conjunto de laços ser definido a partir de uma base natural, os laços de uma álgebra associados a bases distintas estão relacionados de alguma forma. Este teorema é fundamental para todos os outros resultados desta seção. Concluímos esta seção com o Corolário 3.4.9, que nos permite dizer precisamente quando a quantidade de laços é preservada pela troca de bases naturais. Salvo menção contrária, todo este capítulo considera álgebras de evolução sobre corpos de característica zero.

## 3.1 PRELIMINARES

Em [2], as autores apresentaram uma forma de decompor uma álgebra de evolução, que discutimos no Teorema 1.3.18. Fixada uma base natural $B$ de uma álgebra de evolução, esta decomposição pode ser obtida a partir de uma partição de $B$.

**Observação 3.1.1.** *[6, Observação 2.2] Pelo Teorema 1.3.18, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$, então podemos particionar $B$ da seguinte forma:*

$$B = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_r, \tag{8}$$

*onde* $\operatorname{ann}(\mathcal{A}) = \operatorname{span}(B_0)$, $\operatorname{rank}(\{e_i^2, e_j^2\}) = 1$ *se $e_i, e_j \in B_t$, para $1 \leq t \leq r$ e ainda* $\operatorname{rank}(\{u^2, v^2\}) = 2$ *se $u \in B_t$ e $v \in B_s$, com $t \neq s$. Portanto, se definirmos $\Lambda_t = \{k \in \Lambda :\ e_k \in B_t\}$, (8) implica que $\Lambda$ pode ser particionada da seguinte forma:*

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_r, \tag{9}$$

*onde* $\operatorname{rank}(\{e_i^2, e_j^2\}) = 2$ *se $i \in \Lambda_t, j \in \Lambda_s$ e $t \neq s$ e* $\operatorname{rank}(\{e_i^2, e_j^2\}) = 1$*, se $i, j \in \Lambda_t$, para algum $t \in \{1, \ldots, r\}$. Neste caso,*

$$e_i^2 = \alpha_{ji} e_j^2 \tag{10}$$

*para algum $\alpha_{ji} \in \mathbb{K}^*$.*

**Definição 3.1.2.** *Nas condições da Observação 3.1.1, as partições $B = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_r$ e $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_r$ serão chamadas de* ***decomposição natural de*** *$B$ e* ***decomposição natural de $\Lambda$ relativa à*** *$B$.*

**Definição 3.1.3.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução. Definimos*

$$\Lambda(j) = \{k \in \Lambda \setminus \Lambda_0;\ e_k^2 \text{ e } e_j^2 \text{ são linearmente dependentes } \}.$$

*Assim, podemos escrever $e_k^2 = \alpha_{jk} e_j^2$, para algum $\alpha_{jk} \in \mathbb{K}^*$ e $j, k \in \Lambda(j)$.*

**Observação 3.1.4.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com bases naturais $B$ e $B'$. Considere $B = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_r$ e $B' = B'_0 \cup B'_1 \cup \ldots \cup B'_s$ decomposições naturais dessas bases. Vamos provar que $r = s$. Suponha o contrário, e sem perda de generalidade tome $r > s$. Pela Observação 1.3.20 sabemos que existe uma função $\eta : \{0, 1, \ldots, s\} \to \{0, 1, \ldots, r\}$ tal que $B'_i \subseteq \operatorname{span}\{B_0 \cup B_{\eta(i)}\}$. Como $\eta$ não é sobrejetora então existe $j \in \{0, 1, \ldots, r\}$ tal que $j \notin \operatorname{Im}(\eta)$. Logo $B'_0 \cup B'_1 \cup \ldots \cup B'_s \subseteq \operatorname{span}(B \setminus B_j)$ e consequentemente $\mathcal{A} \subseteq \operatorname{span}(B \setminus B_j)$, o que é um absurdo. Assim, é possível reordenar a decomposição natural de $B'$ de tal forma que $\operatorname{span}(B_0) = \operatorname{span}(B'_0)$ e $B'_t \subseteq \operatorname{span}(B_0 \cup B_t)$. Observe que com esta reordenação, temos que $|B_t| = |B'_t|$ para todo $t \in \{0, 1, \ldots, r\}$. Neste capítulo, sempre que considerarmos decomposições naturais de duas bases naturais $B$ e $B'$ vamos tomá-las ordenadas desta forma.*

**Exemplo 3.1.5.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ e produto dado por*

$$e_1^2 = 0, \quad e_2^2 = e_3^2 = e_2 + e_4, \quad e_4^2 = e_5^2 = e_6 \quad e \quad e_6^2 = e_6.$$

*Então a seguinte partição é uma decomposição natural de $B$:*

$$B_0 = \{e_1\}, \quad B_1 = \{e_2, e_3\}, \quad B_2 = \{e_4, e_5\} \quad e \quad B_3 = \{e_6\}.$$

*Considere agora a base natural $B' = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, onde $f_1 = e_1$, $f_2 = e_2 - e_3 + e_1$, $f_3 = e_2 + e_3 + e_1$, $f_4 = e_4 - e_5$, $f_5 = e_4 + e_5$ e $f_6 = e_6$. Os produtos desta base natural são dados por*

$$f_1^2 = 0, \quad f_2^2 = f_3^2 = 2(e_2 + e_4), \quad f_4^2 = f_5^2 = 2e_6 \quad e \quad f_6^2 = e_6.$$

*Se considerarmos a decomposição natural $B' = B'_0 \cup B'_1 \cup B'_2 \cup B'_3$, onde*

$$B'_0 = \{f_1\}, \quad B'_1 = \{f_2, f_3\}, \quad B'_2 = \{f_4, f_5\} \quad e \quad B'_3 = \{f_6\},$$

*então temos que $\operatorname{span}(B_0) = \operatorname{span}(B'_0)$ e $B'_i \subseteq \operatorname{span}(B_0 \cup B_i)$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.* □

## 3.2 DERIVAÇÕES DE ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO NÃO DEGENERADAS

Começaremos com a Proposição 3.2.1, que é uma versão de [8, Proposição 1], e terá papel fundamental nesta seção. Destacamos aqui que a principal diferença entre essas duas proposições, é que a Proposição 3.2.1 apresenta condições necessárias e suficientes para que um operador linear de uma álgebra de evolução seja uma derivação.

**Proposição 3.2.1.** *[6, Proposição 3.1] Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não degenerada com uma base natural $B = \{e_i; \in \Lambda\}$, a matriz de estrutura $M_B = (w_{ij})$ e $d = (d_{ij}) \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Então $d \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ se, e somente se, $d$ satisfaz as seguintes condições:*

*(i) Se $i, j \in \Lambda, i \neq j$, e $i \sim_{t_B} j$ então $d_{ji} = -\frac{w_{jk}}{w_{ik}} d_{ij}$, para todo $k \in D^1(i)$.*

*(ii) Se $i, j \in \Lambda$ e $i \not\sim_{t_B} j$ então $d_{ji} = d_{ij} = 0$.*

*(iii) Para todo $i \in \Lambda$*

$$\sum_{k \in D^1(i)} w_{ik} d_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \notin D^1(i), \\ 2w_{ij} d_{ii}, & \text{se } j \in D^1(i). \end{cases}$$

*Demonstração.* Se $d \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ então $d$ satisfaz as condições (i)-(iii) por [8, Proposição 1]. No outro sentido, seja $d : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ um operar linear que satisfaz as condições (i)-(iii). Para provar que $d \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$, é necessário verificar que $d$ satisfaz as Equações (3) e (4). Sejam $i, j, k \in \Lambda$, $i \neq j$. Se $i \sim_{t_B} j$, por (i), temos que

$$w_{jk} d_{ij} + w_{ik} d_{ji} = w_{jk} d_{ij} + w_{ik} \Big( -\frac{w_{jk}}{w_{ik}} d_{ij} \Big) = 0, \quad \text{para todo } k \in D^1(i).$$

Além disso, se $k \notin D^1(i)$ então $w_{jk} = w_{ik} = 0$, o que implica que $w_{jk} d_{ij} + w_{ik} d_{ji} = 0$. Por outro lado, se $i \not\sim_{t_B} j$, por (ii), temos que $d_{ij} = d_{ji} = 0$. Portanto $d$ satisfaz (3).

Agora, note que para todo $i, j \in \Lambda$ temos que

$$\sum_{k=1}^{n} w_{ik} d_{kj} = \sum_{k \in D^1(i)} w_{ik} d_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \notin D^1(i), \\ 2w_{ij} d_{ii}, & \text{se } j \in D^1(i). \end{cases} = 2w_{ij} d_{ii}.$$

Logo $d$ satisfaz (4). □

**Corolário 3.2.2.** *[6, Corolário 3.3] Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não degenerada com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e matriz de estrutura $M_B = (w_{ij})$. Se $d = (d_{ij}) \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ então:*

*(i) Se $i, j \in \Lambda$, $i \neq j$ e $d_{ij} \neq 0$ então $e_j^2 = \alpha e_i^2$, para algum $\alpha \in \mathbb{K}^*$.*

*(ii) Se $i, j \in \Lambda$ e $j \in D^1(i)$ então*

$$\sum_{k \in \zeta(j)} w_{ik} d_{kj} = 2w_{ij} d_{ii}.$$

*Demonstração.* Para provar (i) considere $i, j \in \Lambda$ tais que $i \neq j$ e $d_{ij} \neq 0$. Por [8, Lema 2] temos que $i \sim_{t_B} j$. Se $|D^1(i)| = 1$ o resultado é direto. Em outro caso, pela Proposição 3.2.1 (i), temos que

$$d_{ji} = -\frac{w_{jk}}{w_{ik}} d_{ij} = -\frac{w_{j\ell}}{w_{i\ell}} d_{ij}, \text{ para todo } k, \ell \in D^1(i).$$

Portanto $\frac{w_{jk}}{w_{ik}} = \frac{w_{j\ell}}{w_{i\ell}}$. Fixe $\ell \in D^1(i)$. Então

$$e_j^2 = \sum_{k \in D^1(i)} w_{jk} e_k = \sum_{k \in D^1(i)} \frac{w_{j\ell}}{w_{i\ell}} w_{ik} e_k = \frac{w_{j\ell}}{w_{i\ell}} \sum_{k \in D^1(i)} w_{ik} e_k = \frac{w_{j\ell}}{w_{i\ell}} e_i^2.$$

Tomando $\alpha_{ij} = \frac{w_{j\ell}}{w_{i\ell}}$, temos que $e_j^2 = \alpha_{ij} e_i^2$, como desejado. Para o item (ii), temos que $d_{kj} = 0$ para todo $k \notin \zeta(j)$, pela Proposição 3.2.1 (ii). Assim, usando a Proposição 3.2.1 (iii), obtemos

$$2w_{ij} d_{ii} = \sum_{k \in D^1(i)} w_{ik} d_{kj} = \sum_{k \in \zeta(j)} w_{ik} d_{kj}.$$

□

**Proposição 3.2.3.** *[6, Proposição 3.5] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não degenerada tal que* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) \neq \{0\}$. *Então $\mathcal{A}$ não tem base natural única.*

*Demonstração.* Sejam $B$ uma base natural de $\mathcal{A}$ e $d \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$, com $d \neq 0$. Por [8, Lema 1] existe $i, j \in \Lambda$ tais que $i \neq j$ e $d_{ij} \neq 0$. Portanto, pelo Corolário 3.2.2 (i) temos que $e_j^2 = \alpha_{ij} e_i^2$, para algum $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}^*$. Assim $\mathcal{A}$ não tem a Propriedade (2LI) e pelo Corolário 1.3.24 temos que $\mathcal{A}$ não tem base única. □

**Observação 3.2.4.** *Observe que a Proposição 3.2.3 é equivalente a dizer que se $\mathcal{A}$ tem a Propriedade* (2LI) *então* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = 0$. *Visto que, como destaca a Observação 1.3.23, toda álgebra de evolução perfeita e toda álgebra de evolução que é livre de gêmeos tem a Propriedade* (2LI), *então a Proposição 3.2.3 é uma generalização do Teorema 1.4.3 e também do Teorema 1.4.4. Além disso, considere a álgebra de evolução $\mathcal{A}$ com base natural $B$ tal que*

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Note que $\mathcal{A}$ tem a Propriedade* (2LI) *e consequentemente base natural única, logo a Proposição 3.2.3 nos garante que* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \{0\}$. *Observe ainda que $\mathcal{A}$ não é perfeita (pois* $\det(M_B) = 0$*) e tampouco livre de gêmeos.*

**Exemplo 3.2.5.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não degenerada de dimensão dois com produto dado por $e_1^2 = e_2^2 = e_1 + e_2$. Como $\mathcal{A}$ não tem a Propriedade* (2LI), *então não tem uma única base natural. No entanto, é fácil verificar que* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = 0$. *Logo não vale a recíproca da Proposição 3.2.3.* □

O próximo resultado apresenta condições para que uma derivação de uma álgebra de evolução não degenerada tenha a diagonal nula.

**Teorema 3.2.6.** *[6, Teorema 3.13] Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não degenerada com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e $d = (d_{ij}) \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$. Se $\{e_1^2, \ldots, e_\ell^2\}$ é uma base de $\mathcal{A}^2$ com $e_i^2 e_i^2 \neq 0$ para todo $i \in \Omega = \{1, \ldots, \ell\}$ então $d_{ii} = 0$ para todo $i \in \Lambda$.*

*Demonstração.* Primeiro, observe que se $i \in \Lambda$ então podemos escrever $e_i^2 e_i^2 = \sum_{k=1}^{\ell} \beta_{ik} e_k^2$, onde $\beta_{ik}$ são coeficientes. Seja $j \in \Lambda$ então podemos aplicar a derivação em ambos os lados de $e_j^2 e_j^2 = \sum_{k=1}^{\ell} \beta_{jk} e_k^2$ e obtemos $2e_j^2 d(e_j^2) = 2\sum_{k=1}^{\ell} \beta_{ji} e_k d(e_k)$. Assim

$$2e_j^2 e_j^2 d_{jj} = \sum_{k=1}^{\ell} \beta_{jk} e_k^2 d_{kk}.$$

Portanto $2\sum_{k=1}^{\ell} \beta_{jk} e_k^2 d_{jj} = \sum_{k=1}^{\ell} \beta_{jk} e_k^2 d_{kk}$, o que implica que $\sum_{k=1}^{\ell} \beta_{jk}(2d_{jj} - d_{kk}) e_k^2 = 0$. Visto que $\{e_k^2\}_{k=1}^{\ell}$ é uma base de $\mathcal{A}^2$ então $\beta_{jk}(2d_{jj} - d_{kk}) = 0$ para todo $k \in \Omega$. Como $e_j^2 e_j^2 \neq 0$ e $\mathcal{A}$ é não degenerada então existe $j_1 \in \Omega$ tal que $\beta_{jj_1} \neq 0$ e assim $2d_{jj} - d_{j_1 j_1} = 0$. Agora, considere o conjunto $R = \{j \in \Omega \colon 2d_{jj} - d_{jj} = 0\}$, então $d_{jj} = 0$ para todo $j \in R$. Seja $j_0 \in \Gamma_1$ tal que $j_0 \notin R$. Podemos escrever as seguintes equações:

$$\begin{aligned} 2d_{j_0 j_0} &= d_{j_1 j_1}, \\ 2d_{j_1 j_1} &= d_{j_2 j_2}, \\ &\vdots \\ 2d_{j_{s-1} j_{s-1}} &= d_{j_s j_s}, \end{aligned}$$

com $j_1, \ldots, j_s \in \Omega$. Além disso $j_s \in R$ ou $j_s \notin R$, mas como $\Omega$ is finito, $j_s = j_m$ para algum $j_m \in \{j_0, j_1, \ldots, j_{s-2}\}$. Se $j_0 \in \Omega$ temos que $d_{j_0 j_0} = d_{j_1 j_1} = \ldots = d_{j_s j_s} = 0$. Se $j_0 \notin \Omega$ então podemos escrever $s = m + t$ para $t > 1$. É simples verificar que $2^t d_{j_m j_m} = d_{j_{m+t} j_{m+t}}$, ou seja, $2^t d_{j_m j_m} = d_{j_m j_m}$. Então $d_{j_m j_m} = d_{j_0 j_0} = \cdots = d_{j_{s-1} j_{s-1}} = 0$. Portanto se $j \in \Omega$ concluímos que $d_{jj} = 0$. Se $j \notin \Omega$, sabemos que $2d_{jj} - d_{j_1 j_1} = 0$ para algum $j_1 \in \Omega$, então $d_{jj} = 0$. □

A volta do Teorema 3.2.6 não é válida em geral, como mostra o seguinte exemplo.

**Exemplo 3.2.7.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ ($\Lambda = \{1, \ldots, 5\}$) e multiplicação dada por $e_1^2 = e_1 + e_2 + e_4 + e_5$, $e_2^2 = e_1 + e_2$, $e_3^2 = e_4 + e_5$, $e_4^2 = -e_5^2 = e_3$ e $d = (d_{ij}) \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$. Considerando que $\{e_1^2, e_2^2, e_4^2\}$ é uma base de $\mathcal{A}^2$ e $e_i^2 e_i^2 \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, 4\}$ então $d_{ii} = 0$ para todo $i \in \Lambda$. Porém, se considerarmos a base $\{e_1^2, e_3^2, e_4^2\}$ de $\mathcal{A}^2$ então $e_3^2 e_3^2 = 0$ e claramente $d_{ii} = 0$ para todo $i \in \Lambda$.* □

## 3.3 DERIVAÇÕES DE ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO DE VOLTERRA

Começaremos esta seção com uma proposição que é uma versão da Proposição 3.2.1, considerando álgebras de evolução de Volterra não degeneradas. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra de evolução com uma base $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \ldots \cup \Lambda_r$ uma decomposição natural de $\Lambda$ relativa à $B$. Lembramos que se $i, j \in \Lambda_k$, para algum $k \in \{1, \ldots, r\}$, então existe $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}^*$ tal que $e_j^2 = \alpha_{ij} e_i^2$. Utilizaremos esses coeficientes $\alpha_{ij}$ nos próximos resultados.

**Proposição 3.3.1.** *[6, Proposição 4.2] Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução de Volterra não degenerada com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$, matriz de estrutura $M_B = (w_{ij})$ e $d = (d_{ij}) \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Considere a decomposição natural $\Lambda = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_r$ relativa à $B$. Então $d \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ se, e somente se, $d$ satisfaz as seguintes condições:*

*(i) Se $i, j \in \Lambda$, $i \neq j$ e $\{i, j\} \not\subseteq \Lambda_\ell$ para todo $\ell \in \{1, \ldots, r\}$ então $d_{ij} = d_{ji} = 0$.*
*(ii) Se $i, j \in \Lambda$, $i \neq j$ e $\{i, j\} \subseteq \Lambda_\ell$ para algum $\ell \in \{1, \ldots, r\}$ então $d_{ij} = -\alpha_{ji} d_{ji}$.*
*(iii) Se $i, j \in \Lambda$ e $i \in D^1(j)$ então $2d_{ii} = \sum_{k \in \Lambda(j)} \alpha_{jk} d_{kj}$.*

*Demonstração.* Se $i \neq j$ e $\{i, j\} \not\subseteq \Lambda_t$ para algum $t \in \{1, \ldots, r\}$, então $e_i^2$ e $e_j^2$ são linearmente independentes. Pelo Corolário 3.2.2 (i) temos que $d_{ij} = d_{ji} = 0$, o que prova o item (i). Observe agora que se $i \neq j$ e $\{i, j\} \subseteq \Lambda_t$ para algum $t \in \{1, \ldots, r\}$, então $e_i^2 = \alpha_{ji} e_j^2$ e $w_{ik} = \alpha_{ji} w_{jk}$ para todo $k \in D^1(j)$. Pela Proposição 3.2.1 (i) temos que

$$d_{ij} = -\frac{w_{ik}}{w_{jk}} d_{ji} = -\alpha_{ji} d_{ji},$$

o que prova o item (ii). Sejam $i, j \in \Lambda$. Pelo item (i), se $k \notin \Lambda(j)$ então $d_{kj} = 0$. Assim

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \Lambda} w_{ik} d_{kj} &= \sum_{k \in \Lambda(j)} w_{ik} d_{kj} = \sum_{k \in \Lambda(j)} -w_{ki} d_{kj} = \sum_{k \in \Lambda(j)} -\alpha_{jk} w_{ji} d_{kj} \\ &= -w_{ji} \sum_{k \in \Lambda(j)} \alpha_{jk} d_{kj} = w_{ij} \sum_{k \in \Lambda(j)} \alpha_{jk} d_{kj} \end{aligned} \tag{11}$$

para algum $i, j \in \Lambda$. Por outro lado, usando a Equação (4) obtemos que

$$2 w_{ij} d_{ii} = \sum_{k=1}^{n} w_{ik} d_{kj}$$

então $2w_{ij}d_{ii} = w_{ij} \sum_{k \in \Lambda(j)} \alpha_{jk}d_{kj}$. Se $i \in D^1(j)$ então $2d_{ii} = \sum_{k \in \Lambda(j)} \alpha_{jk}d_{kj}$, o que prova o item (iii). No outro sentido, seja $d = (d_{ij})$ satisfazendo as condições (i)-(iii). Provaremos que $d$ satisfaz as condições (i)-(iii) da Proposição 3.2.1. Sejam $i, j \in \Lambda$, $i \neq j$ e $i \sim_t j$.

**Caso 1.** Se $\{i, j\} \not\subseteq \Lambda_t$ para algum $t \in \{1, \ldots, r\}$. Então pelo item (i) $d_{ij} = d_{ji} = 0$.

**Caso 2.** Se $\{i, j\} \subseteq \Lambda_t$ para algum $t \in \{1, \ldots, r\}$. Então pelo item (ii) $d_{ij} = -\alpha_{ji}d_{ji}$. Note que $\alpha_{ji} = \frac{w_{ik}}{w_{jk}}$ para todo $k \in D^1(i)$.

Portanto, para ambos os casos temos que $d_{ji} = -\frac{w_{jk}}{w_{ik}}d_{ij}$ para todo $k \in D^1(i)$.

Sejam $i, j \in \Lambda$, $i \neq j$ e $i \not\sim_t j$. Então $e_i^2$ e $e_j^2$ são linearmente independentes e pelo Corolário 3.2.2 (i) obtemos que $d_{ij} = d_{ji} = 0$.

Seja $i \in \Lambda$, pela Equação (11) e pelo item (iii) concluímos que

$$\sum_{k \in \Lambda} w_{ik}d_{kj} = w_{ij} \sum_{k \in \Lambda(j)} \alpha_{jk}d_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \notin D^1(i) \\ 2w_{ij}d_{ii} & \text{se } j \in D^1(i). \end{cases}$$

□

**Corolário 3.3.2.** *[6, Corolário 4.3] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução de Volterra não degenerada e $d = (d_{ij}) \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$. Se $i, \ell \in D^1(j)$, para algum $j \in \Lambda$, então $d_{ii} = d_{\ell\ell}$.*

O próximo teorema mostra que, sob certas condições, o espaço de derivações de uma álgebra de evolução de Volterra, pode ser obtida a partir do espaço da derivações de um outra álgebra de evolução de Volterra, com uma estrutura mais simples.

**Teorema 3.3.3.** *[6, Teorema 4.4] Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução de Volterra com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e matriz de estrutura $M_B = (w_{ij})$. Sejam $\Lambda = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_r$ a decomposição natural relativa à base $B$ e $v_i = |\Lambda_i|$ para $i \in \{1, \ldots, r\}$. Se $e_i^2 e_i^2 \neq 0$ para todo $i \in \Lambda$ então existe uma álgebra de evolução de Volterra $\mathcal{A}'$ com uma base natural $B'$ tal que $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \mathrm{Der}(\mathcal{A}')$. Além disso, a matriz de estrutura $M_{B'}$ tem a seguinte forma de blocos:*

$$M_{B'} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & H_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & H_c \end{pmatrix}, \tag{12}$$

*onde $r = 2s + q$ e $q \in \{0, 1\}$ e*

*(i) se $q = 0$ então para $i \in \{1, \ldots, c\}$ temos que*

$$H_i = \begin{pmatrix} 0 & F_i \\ -F_i^T & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

*onde* $F_i \in M_{\nu_i,\nu_{i+s}}(\mathbb{K})$ *é uma matriz sem entradas nulas,*

*(ii) se* $q = 1$ *então para* $i \in \{1, \ldots, c-1\}$ *a matriz* $H_i$ *satisfaz* (13) *e*

$$H_s = \begin{pmatrix} 0 & F_c & F_{c+1} \\ -F_c^T & 0 & 0 \\ -F_{c+1}^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$F_c \in M_{\nu_{r-2},\nu_{r-1}}(\mathbb{K})$ *e* $F_{c+1} \in M_{\nu_{r-2},\nu_r}(\mathbb{K})$ *são matrizes sem entradas nulas.*

*Demonstração.* Começaremos definindo $s_0 = 0$ e $s_h = \sum_{k=1}^{h} \nu_k$ com $h \in \{1, \ldots, r\}$. Note que podemos reordenar $\Lambda$ de tal forma que $\Lambda_h = \{s_{h-1}+1, \ldots, s_h\}$ para $h \in \{1, \ldots, r\}$.

Assuma que $r$ é par. Vamos agora construir uma álgebra de evolução $\mathcal{A}'$ com uma base natural $B' = \{f_j;\ j \in \Lambda\}$. Para descrever o produto dos elementos de $\mathcal{A}$, considere $t \in \{1, \ldots, c\}$ e denote $p = s_{2t-2}+1$ e $q = s_{2t-1}+1$. Defina

$$f_p^2 = \sum_{k \in \Lambda_{2t}} \alpha_{qk} f_k, \tag{15}$$

$$f_j^2 = \alpha_{pj} f_p^2, \text{ para todo } j \in \Lambda_{2t-1} \setminus \{p\}, \tag{16}$$

$$f_q^2 = -\sum_{k \in \Lambda_{2t-1}} \alpha_{pk} f_k, \tag{17}$$

$$f_j^2 = \alpha_{qj} f_q^2, \text{ para todo j} \in \Lambda_{2t} \setminus \{q\}. \tag{18}$$

Note que $D^1(\Lambda_{2t-1}) = \Lambda_{2t}$ e $D^1(\Lambda_{2t}) = \Lambda_{2t-1}$ para $t \in \{1, \ldots, c\}$. Assim, a matriz de estrutura de $\mathcal{A}'$ relativa à esta base é a matriz diagonal $\operatorname{diag}(H_1, \ldots, H_c)$ com

$$H_t = \begin{pmatrix} 0 & F_t \\ -F_t^T & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$F_t = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{qq+1} & \ldots & \alpha_{qs_{2t}} \\ \alpha_{pp+1} & \alpha_{pp+1}\alpha_{qq+1} & \ldots & \alpha_{pp+1}\alpha_{qs_{2t}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{ps_{2t-1}} & \alpha_{ps_{2t-1}}\alpha_{qq+1} & \ldots & \alpha_{ps_{2t-1}}\alpha_{qs_{2t}} \end{pmatrix} \tag{19}$$

para todo $t \in \{1, \ldots, c\}$. Consequentemente $\mathcal{A}'$ é uma álgebra de evolução de Volterra. Observe que para todo $i, j \in \Lambda(j)$ temos que $e_i^2 = \alpha_{ji} e_j^2$ e $f_i^2 = \alpha_{ji} f_j^2$. Como $e_i^2 e_i^2 \neq 0$ para todo $i \in \Lambda$, então pelo Teorema 3.2.6 obtemos que $d_{ii} = 0$ para todo $i \in \Lambda$. Assim, pela Proposição 3.3.1 segue que $\operatorname{Der}(\mathcal{A}) = \operatorname{Der}(\mathcal{A}')$.

Assuma agora que $r$ é ímpar. Novamente vamos construir uma álgebra de evolução $\mathcal{A}'$ com base natural $B' = \{f_j;\ j \in \Lambda\}$. Considere $t \in \{1, \ldots, c-1\}$ e defina $f_j$ como nas Equações (15-18) para $j \in \Lambda_{2t-1} \cup \Lambda_{2t}$. Denotaremos por $p = s_{r-3}+1$, $q = s_{r-2}+1$ e $\ell = s_{r-1}+1$ e definimos

$$
\begin{aligned}
f_p^2 &= \sum_{k\in\Lambda_{r-1}} \alpha_{qk} f_k + \sum_{k\in\Lambda_r} \alpha_{\ell k} f_k,\\
f_j^2 &= \alpha_{pj} f_p^2, \text{ para todo } j \in \Lambda_{r-2} \setminus \{p\},\\
f_q^2 &= -\sum_{k\in\Lambda_{r-2}} \alpha_{pk} f_k,\\
f_j^2 &= \alpha_{qj} f_q^2, \text{ para todo } j \in \Lambda_{r-1} \setminus \{q\},\\
f_\ell^2 &= -\sum_{k\in\Lambda_{r-2}} \alpha_{pk} f_k;\\
f_j^2 &= \alpha_{\ell j} f_\ell^2, \text{ para todo } j \in \Lambda_r \setminus \{\ell\}.
\end{aligned}
$$

Temos que $D^1(\Lambda_{2t-1}) = \Lambda_{2t}$ e $D^1(\Lambda_{2t}) = \Lambda_{2t-1}$ para $t \in \{1, \ldots, c-1\}$, $D^1(\Lambda_{r-2}) = \Lambda_{r-1} \cup \Lambda_r$ e $D^1(\Lambda_{r-1}) = D^1(\Lambda_r) = \Lambda_{r-2}$. Além disso, como no caso anterior, podemos reordenar $B'$ de tal forma que a matriz de estrutura de $\mathcal{A}'$ relativa à base $B'$ é uma matriz de blocos diagonal $\operatorname{diag}(H_1, \ldots, H_c)$ onde $H_t$ tem a forma de (13), $F_t$ tem a forma de (19) para $t \in \{1, \ldots, c-1\}$, $H_c$ tem a forma de (14) e

$$
F_c = \begin{pmatrix}
1 & \alpha_{qq+1} & \cdots & \alpha_{qs_{r-1}}\\
\alpha_{pp+1} & \alpha_{pp+1}\alpha_{qq+1} & \cdots & \alpha_{pp+1}\alpha_{qs_{r-1}}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\alpha_{ps_{r-2}} & \alpha_{ps_{r-2}}\alpha_{qq+1} & \cdots & \alpha_{ps_{r-2}}\alpha_{qs_{r-1}}
\end{pmatrix},
$$

$$
F_{c+1} = \begin{pmatrix}
1 & \alpha_{\ell\ell+1} & \cdots & \alpha_{\ell s_r}\\
\alpha_{pp+1} & \alpha_{pp+1}\alpha_{\ell\ell+1} & \cdots & \alpha_{pp+1}\alpha_{\ell s_r}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\alpha_{ps_{r-2}} & \alpha_{ps_{r-2}}\alpha_{\ell\ell+1} & \cdots & \alpha_{ps_{r-2}}\alpha_{\ell s_r}
\end{pmatrix}.
$$

Analogamente ao caso anterior, se $i, j \in \Lambda(j)$, temos que $e_i^2 = \alpha_{ji} e_j^2$ e $f_i^2 = \alpha_{ji} f_j^2$ e $d_{ii} = 0$ para todo $i \in \Lambda$. Consequentemente, $\operatorname{Der}(\mathcal{A}) = \operatorname{Der}(\mathcal{A}')$. $\square$

**Exemplo 3.3.4.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução de Volterra com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$, $\Lambda = \{1, 2, \ldots, 8\}$, matriz de estrutura*

$$M_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Então $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ é apresentado na Figura 12.*

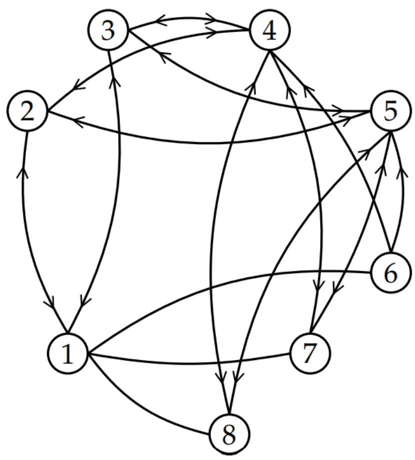


Figura 12: $\Gamma(\mathcal{A}, B)$

*Então $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4$, onde $\Lambda_1 = \{1\}$, $\Lambda_2 = \{2, 3\}$, $\Lambda_3 = \{4, 5\}$ e $\Lambda_4 = \{6, 7, 8\}$ é uma decomposição natural de $\Lambda$ relativa à $B$. Primeiro, note que $(e_i^2)^2 \neq 0$ para todo $i \in \Lambda$ e*

*$\alpha_{ij} = 1$ para todo $i, j \in \Lambda_k$, $k \in \{1,2,3,4\}$. Então, pelo Teorema 3.3.3, temos que a álgebra de evolução de Volterra $\mathcal{A}'$ com base natural $B' = \{f_i;\ i \in \Lambda\}$ e matriz de estrutura $M_{B'}$ dado por*

$$M_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*tem a propriedade* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}') = \mathrm{Der}(\mathcal{A})$. *Podemos ainda determinar o grafo $\Gamma(\mathcal{A}', B')$, apresentado na Figura 13.*

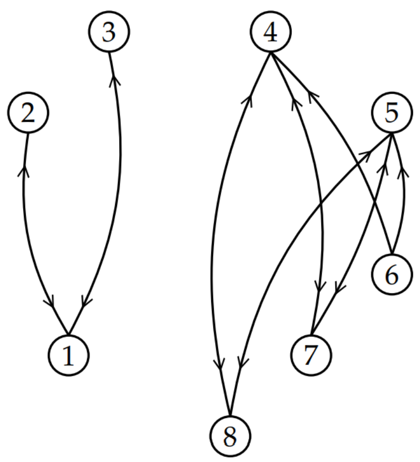


Figura 13: $\Gamma(\mathcal{A}', B')$

$\square$

**Proposição 3.3.5.** *[6, Proposição 4.6] Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução de Volterra não degenerada com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e $\Lambda = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_r$ a decomposição natural relativa à $B$. Para $i \in \Lambda$, se para todo $j \in D^1(i)$ vale que $\sum_{k \in \Lambda(j)} \alpha^3_{jk} = 0$, então $e_i^2 e_i^2 = 0$.*

*Demonstração.* Sejam $M_B = (w_{ij})$ a matriz de estrutura de $\mathcal{A}$ relativa à base $B$ e $i \in \Lambda$ tais que para todo $j \in D^1(i)$ temos que $\sum_{k \in \Lambda(j)} \alpha^3_{jk} = 0$. Existe $\{\ell_1, \ldots, \ell_t\} \subseteq D^1(i)$ tal que $D^1(i) = \Lambda(\ell_1) \cup \ldots \cup \Lambda(\ell_t)$ com $\Lambda(\ell_h) \cap \Lambda(\ell_g) = \varnothing$ para $h \neq g$. Então

$$
\begin{aligned}
e_i^2 e_i^2 &= \sum_{k\in\Lambda(\ell_1)} w_{ik}^2 e_k^2 + \ldots + \sum_{k\in\Lambda(\ell_t)} w_{ik}^2 e_k^2 \\
&= \sum_{k\in\Lambda(\ell_1)} w_{ki}^2 \alpha_{\ell_1 k} e_{\ell_1}^2 + \ldots + \sum_{k\in\Lambda(\ell_t)} w_{ki}^2 \alpha_{\ell_t k} e_{\ell_t}^2 \\
&= w_{\ell_1 i}^2 e_{\ell_1}^2 \sum_{k\in\Lambda(\ell_1)} \alpha_{\ell_1 k}^3 + \ldots + w_{\ell_t i}^2 e_{\ell_t}^2 \sum_{k\in\Lambda(\ell_t)} \alpha_{\ell_t k}^3.
\end{aligned}
$$

Visto que $\ell_h \in D^1(i)$ para $h \in \{1, \ldots, t\}$ então, pela hipótese, $\sum_{k\in\Lambda(\ell_1)} \alpha_{\ell_1 k}^3 = \cdots = \sum_{k\in\Lambda(\ell_t)} \alpha_{\ell_t k}^3 = 0$. Portanto $e_i^2 e_i^2 = 0$. □

**Observação 3.3.6.** *O Teorema 3.2.6 apresenta condições para que uma álgebra de evolução não degenerada tenha derivações com diagonal nula. Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução degenerada, então existe $d \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ com alguma entrada não nula na diagonal. De fato, sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não degenerada com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e $\ell \in \Lambda$ tal que $e_\ell^2 = 0$. Considere o operador linear $d = (d_{ij})$ definido por*

$$
d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j = \ell, \\ 0, & \text{se } i \neq \ell \text{ ou } j \neq \ell. \end{cases}
$$

*Então as Equações (3) e (4) permitem concluir que $d \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$. Os próximos dois resultados mostram condições para que uma álgebra de evolução de Volterra não degenerada tenha derivações com entradas não nulas na diagonal.*

**Observação 3.3.7.** *[6, Observação 4.8] Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução de Volterra com uma base natural $B = \{e_i;\ \in \Lambda\}$. e $\Lambda = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_r$ uma decomposição natural de $\Lambda$ relativa à $B$. Note que se existe um caminho de $i$ para $j$ e $j \in \Lambda_k$, para algum $k \in \{1, \ldots, r\}$, então $\delta(i, \ell) = \delta(i, j)$ para todo $\ell \in \Lambda_k$. Portanto, podemos escrever $\delta(i, \Lambda_k) = \delta(i, j)$, onde $j \in \Lambda_k$. Analogamente, $\delta(\Lambda_\ell, \Lambda_k) = \delta(i, j)$, onde $i \in \Lambda_k$ e $j \in \Lambda_\ell$.*

**Proposição 3.3.8.** *[6, Proposição 4.9] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução de Volterra com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ tal que $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ não tem ciclos de comprimento ímpar. Se existe $i \in \Lambda$ tal que*

$$
\sum_{k\in\Lambda(i)} \alpha_{ik}^3 = \sum_{k\in\Lambda(j)} \alpha_{jk}^3 = 0, \ \textit{para todo } j \in \Lambda, \ \textit{com } \delta(i, j) \textit{ par},
$$

*então existe $d = (d_{ij}) \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ tal que $d_{kk} \neq 0$ para todo $k \in D(i)$.*

*Demonstração.* Primeiro, observamos que se $i \in \Lambda$ então $\Lambda_h \subseteq D(i)$ ou $\Lambda_h \cap D(i) = \varnothing$ para todo $h \in \{1, \ldots, r\}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que a decomposição natural seja ordenada de tal forma que $\Lambda = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_t \cup \Lambda_{t+1} \cup \ldots \cup \Lambda_r$

onde $i \in \Lambda_1$, $\Lambda_h \subseteq D(i)$ para $h \in \{1,\dots,t\}$ e $\Lambda_h \cap D(i) = \varnothing$ para $h \in \{t+1,\dots,r\}$. Seja $d$ um operador linear com matriz em blocos diagonais $d = \mathrm{diag}(C_1,\dots,C_r)$ onde $C_k \in M_{|\Lambda_k|}(\mathbb{K})$ é definido como segue:

- Se $k \in \{t+1,\dots,r\}$ então $C_k = 0$.
- Se $k \in \{1,\dots,t\}$ então $\delta(i,\Lambda_k)$ é ímpar então $C_k =: 2I_{|\Lambda_k|}$.
- Se $k \in \{1,\dots,t\}$, $\delta(i,\Lambda_k)$ é par e $\Lambda_k = \{k_1,\dots,k_s\}$ então

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -3\alpha^2_{k_sk_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -3\alpha^2_{k_sk_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -3\alpha^2_{k_sk_{s-1}} \\ 3\alpha_{k_sk_1} & 3\alpha_{k_sk_2} & \dots & 3\alpha_{k_sk_{s-1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Para provar que $d = (d_{ij}) \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ é suficiente verificar que $d$ satisfaz as condições da Proposição 3.3.1. É claro que a condição 3.3.1(i) é respeitada.

Vamos agora verificar que $d$ satisfaz a condição a condição (ii) da Proposição 3.3.1. Sejam $\ell, j \in \Lambda$, $\ell \neq j$ e $\{\ell, j\} \subseteq \Lambda_k$. Se $k \in \{t+1,\dots,r\}$ ou $k \in \{1,\dots,t\}$ e $\delta(i,\Lambda_k)$ é ímpar, então $d_{\ell j} = d_{j\ell} = 0$ pela definição de $d$. Agora, observe que $\{\ell, j\} \subseteq \Lambda_k \setminus \{k_s\}$ onde $\Lambda_k = \{k_1,\dots,k_s\}$ e $\delta(i,\Lambda_k)$ é par então $d_{\ell j} = d_{j\ell} = 0$. Finalmente, se $\{\ell, j\} \cap \{k_s\} \neq \varnothing$ podemos assumir sem perda de generalidade que $\ell = k_s$. Então,

$$d_{\ell j} = d_{k_sj} = 3\alpha_{k_sj} = 3\alpha_{k_sj}\alpha_{k_sj}\alpha_{jk_s} = \alpha_{jk_s}3\alpha^2_{k_sj} = -\alpha_{j\ell}d_{j\ell}.$$

Vamos agora mostrar que $d$ verifica a condição (iii) da Proposição 3.3.1. Note que se $k \in \{1,\dots,t\}$ e $\delta(i,\Lambda_k)$ é ímpar, então $\delta(i,\Lambda_h)$ é par, para todo $\Lambda_h$ tal que $\delta(\Lambda_h,\Lambda_k) = 1$. De fato, se supormos que $\delta(i,\Lambda_k)$ e $\delta(i,\Lambda_h)$ são pares para algum $\Lambda_h$ com $\delta(\Lambda_h,\Lambda_k) = 1$, então existe um caminho $\mu$ de $i$ para $j_1$ e $\sigma$ de $i$ para $j_2$, onde $j_1 \in \Lambda_k$ e $j_2 \in \Lambda_h$ tais que $|\mu|$ e $|\sigma|$ são ímpares. Como $\delta(j_1, j_2) = 1$ então temos um ciclo de comprimento $|\mu|+|\sigma|+1$, que é ímpar, uma contradição. Analogamente, se $k \in \{1,\dots,t\}$ e $\delta(i,\Lambda_k)$ é par, então $\delta(i,\Lambda_h)$ é ímpar para todo $\Lambda_h$ verificando $\delta(\Lambda_h,\Lambda_k) = 1$. Sejam $\ell, j \in \Lambda$ com $\ell \in D^1(j)$. Observe que $\Lambda(\ell) \cap \Lambda(j) = \varnothing$ visto que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução de Volterra e portanto $\omega_{jj} = 0$. Vamos considerar alguns casos:

**Caso 1.** Se $\ell \in \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_t$ e $j \in \Lambda_{t+1} \cup \ldots \cup \Lambda_r$ então $\ell \notin D^1(j)$, o que é uma contradição.

**Caso 2.** Se $\ell, j \in \Lambda_{t+1} \cup \ldots \cup \Lambda_r$ então $d_{\ell\ell} = d_{\ell j} = d_{j\ell} = 0$ por definição.
**Caso 3.** Neste caso, vamos supor que $\delta(i, \Lambda(\ell))$ é par. Sabemos que $\delta(i, \Lambda(j))$ é ímpar visto que $\delta(\Lambda(j), \Lambda(\ell)) = 1$. Então $d_{\ell\ell} = 1$, $d_{jj} = 2$ e $d_{kj} = 0$ para todo $k \in \Lambda \setminus \{j\}$. Portanto

$$2d_{\ell\ell} = 2 = \alpha_{jj}d_{jj} = \sum_{k\in\Lambda(j)} \alpha_{jk}d_{kj}.$$

**Caso 4.** Assuma que $\delta(i, \Lambda(\ell))$ é ímpar. Como no caso anterior, observe que $\delta(i, \Lambda(j))$ é par. Assim, temos que $d_{\ell\ell} = 2$. Seja $\Lambda(j) = \{k_1, \ldots, k_s\}$. Vamos considerar dois casos:
**Caso 4.1.** Se $j \neq k_s$ então $d_{jj} = 1$, $d_{k_sj} = 3\alpha_{k_sj}$ e $d_{kj} = 0$ para $k \in \Lambda \setminus \{j, k_s\}$. Logo

$$\sum_{k\in\Lambda(j)} \alpha_{jk}d_{kj} = \alpha_{jj}d_{jj} + \alpha_{jk_s}d_{k_sj} = 1 + \alpha_{jk_s}3\alpha_{k_sj} = 4 = 2d_{\ell\ell}.$$

**Caso 4.2.** Se $j = k_s$ então $d_{k_sk_s} = 1$ e $d_{kk_s} = -3\alpha^2_{k_sk}$ para $k \in \{k_1, \ldots, k_{s-1}\}$. Portanto

$$\sum_{k\in\Lambda(j)} \alpha_{k_sk}d_{kk_s} = \alpha_{k_sk_s}d_{k_sk_s} - \sum_{\substack{k\in\Lambda(j)\\ k\neq k_s}} \alpha_{k_sk}3\alpha^2_{k_sk} = 1 - 3\sum_{\substack{k\in\Lambda(j)\\ k\neq k_s}} \alpha^3_{k_sk}.$$

Visto que $\sum\limits_{k\in\Lambda(j)} \alpha^3_{k_sk} = 0$ temos que $\sum_{\substack{k\in\Lambda(j)\\ k\neq k_s}} \alpha^3_{k_sk} = -1$. Portanto

$$\sum_{k\in\Lambda(j)} \alpha_{k_sk}d_{kk_s} = 1 - 3\sum_{\substack{k\in\Lambda(j)\\ k\neq k_s}} \alpha^3_{k_sk} = 4 = 2d_{\ell\ell}.$$

□

Vejamos agora que a hipótese de que o grafo associado a $\mathcal{A}$ não tenha ciclos de comprimentos ímpar não pode ser retirada da Proposição 3.3.8.

**Exemplo 3.3.9.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ ($\Lambda = \{1, \ldots, 7\}$) e multiplicação dada por $e_1^2 = e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7$, $e_2^2 = -e_3^2 = -e_1 + e_4 - e_5$, $e_4^2 = -e_5^2 = -e_1 - e_2 + e_3$ e $e_6^2 = -e_7^2 = -e_1$. Considerando que $M_B$ é antissimétrica, então $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução de Volterra. Observe que se $\Lambda_1 = \{1\}$, $\Lambda_2 = \{2, 3\}$, $\Lambda_3 = \{4, 5\}$ e $\Lambda_4 = \{6, 7\}$ então $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4$ é uma decomposição natural de $\Lambda$ relativa à $B$. Note que $7 \in \Lambda$ é tal que $\sum\limits_{k\in\Lambda(j)} \alpha^3_{jk} = 0$ para todo $j \in \Lambda$ com $\delta(7, j)$ par. Portanto, todas as hipóteses do Teorema 3.3.8 são verificadas, exceto que $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ tem ciclos de comprimento ímpar. Por fim, pode-se facilmente mostrar que* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \{0\}$. □

Vejamos agora uma aplicação deste teorema.

**Exemplo 3.3.10.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$, onde $\Lambda = \{1, 2, \ldots, 8\}$, tal que a matriz de estrutura $M_B$ e o grafo $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ são apresentados abaixo.*

$$M_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

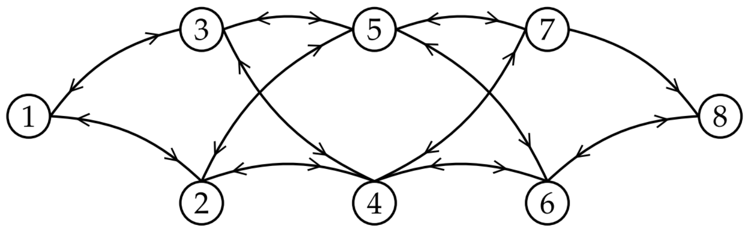


Figura 14: $\Gamma(\mathcal{A}, B)$

*Podemos considerar $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4$ a decomposição natural de $\Lambda$ relativo à base $B$, onde $\Lambda_1 = \{1\}$, $\Lambda_2 = \{2, 3\}$, $\Lambda_3 = \{4, 5\}$, $\Lambda_4 = \{6, 7\}$ e $\Lambda_5 = \{8\}$. Primeiro, note que $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ não tem ciclos de comprimento ímpar. Por outro lado, $\alpha_{23} = \alpha_{78} = -1$ e portanto*

$$\sum_{k \in \Lambda_2} \alpha_{k2}^3 = \sum_{k \in \Lambda_2} \alpha_{k3}^3 = \sum_{k \in \Lambda_4} \alpha_{k6}^3 = \sum_{k \in \Lambda_4} \alpha_{k7}^3 = 0.$$

*Portanto $i = 2$ respeita as hipóteses do Teorema 3.3.8, e consequentemente o seguinte operador linear é uma derivação de $\mathcal{A}$*

$$d = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3\alpha_{32}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\alpha_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3\alpha_{67}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\alpha_{67} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

**Proposição 3.3.11.** *[6, Proposição 4.11] Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução de Volterra com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e matriz de estrutura $M_B = (w_{ij})$. Se existe $g \in \Lambda$ tal que*

$$\sum_{t \in \Lambda(k)} \alpha_{kt}^3 = 0, \ \textit{para todo } k \in D(g),$$

*então existe $d = (d_{ij}) \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ tal que $d_{kk} \neq 0$ para todo $k \in D(g)$.*

*Demonstração.* Primeiro, vamos tomar a decomposição natural de $\Lambda$ relativa à base $B$ de tal forma que $\Lambda = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_t \cup \Lambda_{t+1} \cup \ldots \cup \Lambda_r$, com $D(i) = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_t$. Defina o operador linear $d = (d_{ij})$ como uma matriz diagonal $d = \mathrm{diag}(C_1, \ldots, C_r)$ onde os blocos $C_k \in M_{|\Lambda_k|}(\mathbb{K})$ são definidos abaixo:

- Se $k \in \{t+1, \ldots, r\}$ então $C_k = 0$.
- Se $k \in \{1, \ldots, t\}$ e $\Lambda_k = \{k_1, \ldots, k_s\}$ então

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_{k_s k_1}^2 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_{k_s k_2}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{k_s k_{s-1}}^2 \\ \alpha_{k_s k_1} & \alpha_{k_s k_2} & \ldots & \alpha_{k_s k_{s-1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Para provar que $d$ é uma derivação, vamos provar que $d$ satisfaz as condições (i)-(iii) da Proposição 3.3.1. Por definição, $d$ satisfaz a Proposição 3.3.1 (i).

Sejam $p, q \in \Lambda$, $p \neq q$ e $\{p, q\} \subseteq \Lambda_h$ para $h \in \{1, \ldots, r\}$. Se $h > t$ então $d_{pq} = d_{qp} = 0$. Se $h \leq t$, vamos considerer dois casos.

**Caso 1.** Se $\{p, q\} \subseteq \Lambda_h \setminus \{k_s\}$ então $d_{pq} = d_{qp} = 0$.

**Caso 2.** Se $\{p, q\} \cap \{k_s\} \neq \varnothing$, assuma, sem perda de generalidade, que $p = k_s$. Então

$$d_{pq} = d_{k_s q} = \alpha_{k_s q} = \alpha_{k_s q}(\alpha_{k_s q}\alpha_{q k_s}) = \alpha_{q k_s}(\alpha_{k_s q}^2) = \alpha_{q k_s}(-d_{q k_s}) = -\alpha_{qp} d_{qp}.$$

Assim, a condição (ii) da Proposição 3.3.1 é satisfeita.

Sejam $p, q \in \Lambda$, $q \in \Lambda(q) = \Lambda_h$ para algum $h \in \{1, \ldots, r\}$, e $p \in D^1(q)$.

Se $h > t$, então $d_{pp} = d_{kq} = 0$ para todo $k \in \Lambda_h$ visto que $p \notin D(i)$, pois caso contrário, teríamos $q \in D(i)$, uma contradição.

Se $h \leq t$ então $d_{qq} = 1$. Além disso, $p \in D(i)$ então $d_{pp} = 1$. Escrevendo $\Lambda_h = \{k_1, k_2, \ldots, k_s\}$, vamos considerar dois casos.

**Caso 1.** Se $q \neq k_s$ então

$$\sum_{k\in\Lambda_h} \alpha_{qk} d_{kq} = d_{qq} + \alpha_{qk_s} d_{k_s q} = d_{qq} + \alpha_{qk_s}\alpha_{k_s q} = 2.$$

**Caso 2.** Se $q = k_s$ então

$$\sum_{k\in\Lambda_h} \alpha_{k_s k} d_{kk_s} = 1 + \sum_{\substack{k\in\Lambda_h\\ k\neq k_s}} \alpha_{k_s k}(-\alpha_{k_s k}^2) = 1 - \sum_{\substack{k\in\Lambda_h\\ k\neq k_s}} \alpha_{k_s k}^3 = 2.$$

Em ambos os casos, obtemos $2d_{pp} = \sum_{k\in\Lambda_h} \alpha_{qk} d_{kq}$. □

## 3.4 LAÇOS EM ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO

Começaremos esta seção com a definição de laços de uma álgebra de evolução.

**Definição 3.4.1.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e matriz de estrutura $M_B = (\omega_{ij})$. Dizemos que $e_i$ é um* ***laço relativo à base*** *$B$ se $\omega_{ii} \neq 0$. Denotaremos por $\mathrm{L}(\mathcal{A}, B)$ o conjuntos de todos os laços de $B$ e $\mathrm{NL}(\mathcal{A}, B) = B \setminus \mathrm{L}(\mathcal{A}, B)$ o seu complementar.*

**Observação 3.4.2.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$. Então as seguintes condições são equivalentes.*

- *$\mathcal{A}$ não tem laços relativos a $B$.*
- $\mathrm{L}(\mathcal{A}, B) = \varnothing$.
- *$i \notin \mathrm{supp}(e_i^2)$ para todo $i \in \Lambda$.*
- *$e_i e_i^2 = 0$ para todo $i \in \Lambda$.*

*Para a última afirmação, lembrando que $\mathrm{supp}(e_i^2) = D^1(i)$, basta observar que se escrevermos $e_i^2 = \sum_{k\in D^1(i)} w_{ik} e_k$ então*

$$e_i e_i^2 = e_i \sum_{k\in D^1(i)} w_{ik} e_k = w_{ii} e_i^2.$$

*Logo $e_i e_i^2 = 0$ se, e somente se, $w_{ii} = 0$.*

Uma das questões acerca da utilização dos grafos associados para o estudo das álgebras de evolução, é que o grafo associado varia de acordo com a base natural, então é interessante entender quais propriedades das álgebras de evolução são invariantes pela troca de base. Por exemplo, sabemos que a quantidade de poços no grafo associado a uma álgebra é precisamente a dimensão do anulador, portanto invariante pela troca de base. Os próximos resultados desta seção irão nos permitir determinar quais condições sobre uma álgebra de evolução não degenerada para que a quantidade de laços no grafo associado seja preservada pela troca de base.

Lembramos que, como afirma a Observação 3.1.4, dadas duas bases naturais $B$ e $B'$ de uma álgebra de evolução e decomposições naturais $B = B_0 \cup \ldots \cup B_r$ e $B' = B'_0 \cup \ldots \cup B'_r$, então elas podem ser ordenadas de tal forma que $\operatorname{span} B_0 = \operatorname{span} B'_0$ e $B_k \subseteq \operatorname{span} B'_k$, para todo $k \in \{1, \ldots, r\}$.

**Teorema 3.4.3.** *[6, Teorema 5.3] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com bases naturais $B$ e $B'$. Sejam $B = B_0 \cup \ldots \cup B_r$ e $B' = B'_0 \cup \ldots \cup B'_r$ decomposições naturais de $B$ e $B'$. Então $B_i \subseteq \mathrm{NL}(\mathcal{A}, B)$ se, e somente se, $B'_i \subseteq \mathrm{NL}(\mathcal{A}, B')$.*

*Demonstração.* Sejam $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ e $B' = \{f_i;\ i \in \Lambda\}$ bases naturais e $M_B = (\omega_{ij})$ e $M_{B'} = (\omega'_{ij})$ suas matrizes de estruturas correspondentes. Para $B_0$ e $B'_0$ a afirmação é trivial. Seja $B_t$ com $t \neq 0$ tais que $B_t \subseteq \mathrm{NL}(\mathcal{A}, B)$. Suponha por redução ao absurdo que existe $f_j \in B'_t \cap \mathrm{L}(\mathcal{A}, B')$. Então, pela Observação 3.4.2 temos que $f_j^2 f_j = \omega'_{jj} f_j^2 \neq 0$. Sejam $e_\ell \in B_t$ e $\alpha_{\ell k} \in \mathbb{K}^*$ para $k \in \Lambda_t$ tais que $e_k^2 = \alpha_{\ell k} e_\ell^2$. Então $D^1(k) = D^1(\ell)$, para $k \in \Lambda_t$. Por outro lado, usando a Observação 1.3.16 podemos escrever $f_j = \sum_{k \in \Lambda_t} x_k e_k + \sum_{k \in \Lambda_0} x_k e_k$, com $x_t$ coeficientes. Então

$$f_j^2 = \sum_{k \in \Lambda_t} x_k^2 e_k^2 = \sum_{k \in \Lambda_t} x_k^2 \alpha_{\ell k} e_\ell^2 = \beta \sum_{p \in D^1(\ell)} \omega_{\ell p} e_p,$$

onde $\beta = \sum_{k \in \Lambda_t} x_k^2 \alpha_{\ell k}$. Portanto

$$0 \neq f_j^2 f_j = f_j^2 \left( \sum_{k \in \Lambda_t} x_k e_k + \sum_{k \in \Lambda_0} x_k e_k \right) = f_j^2 \sum_{k \in \Lambda_t} x_k e_k = \beta \left( \sum_{p \in D^1(\ell)} \omega_{\ell p} e_p \right) \left( \sum_{k \in \Lambda_t} x_k e_k \right).$$

Logo existe $e_q \in B_t$ tal que $q \in D^1(\ell) = D^1(q)$, ou seja, $e_q \in \mathrm{L}(\mathcal{A}, B)$, o que contrária a hipótese. A prova no outro sentido é análoga. $\square$

**Corolário 3.4.4.** *[6, Corolário 5.4] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução. Se existe uma base natural $B$ de $\mathcal{A}$ satisfazendo qualquer uma das seguintes condições*

*(i) $\mathcal{A}$ tem a propriedade* (2LI).

*(ii)* $\mathrm{L}(\mathcal{A}, B) = \varnothing$.

*(iii)* $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.

*(iv)* $\Gamma(\mathcal{A}, B)$ *é livre de gêmeos.*

*(v)* $\mathcal{A}$ *é uma álgebra de evolução de Volterra.*

*Então* $|\mathrm{L}(\mathcal{A}, B)| = |\mathrm{L}(\mathcal{A}, B')|$ *para toda base natural* $B'$.

**Corolário 3.4.5.** *[6, Corolário 5.5] Seja* $\mathcal{A}$ *uma álgebra de evolução com bases naturais* $B$ *e* $B'$*. Então* $\mathrm{L}(\mathcal{A}, B) = \varnothing$ *se, e somente se* $\mathrm{L}(\mathcal{A}, B') = \varnothing$.

Sabemos que a quantidade de laços de uma álgebra de evolução pode variar de acordo com a base natural tomada, tal como mostra o Exemplo 1.2.2, no qual $|\mathrm{L}(\mathcal{A}, B)| = 2$ e $|\mathrm{L}(\mathcal{A}, B')| = 3$. A seguir apresentaremos alguns condições para que uma álgebra de evolução preserve a quantidade de laços com a troca de base.

**Teorema 3.4.6.** *[6, Teorema 5.7] Seja* $\mathcal{A}$ *uma álgebra de evolução com uma base natural* $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ *e* $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_r$ *a decomposição natural de* $\Lambda$ *relativa à* $B$*. Se para todo* $i \in \{1, \ldots, r\}$*, tal que* $|\Lambda_i| > 1$*, vale que* $B_i \subseteq \mathrm{NL}(\mathcal{A}, B)$ *então* $|\mathrm{L}(\mathcal{A}, B)| = |\mathrm{L}(\mathcal{A}, B')|$ *para toda base natural* $B'$ *de* $\mathcal{A}$.

*Demonstração.* Seja $B' = \{f_i\}_{i \in \Lambda}$ uma base natural de $\mathcal{A}$. Definimos $\Lambda^1 = \bigcup_{|\Lambda_t|=1} \Lambda_t$. Por hipótese, $\mathrm{L}(\mathcal{A}, B) \subseteq \{e_i;\ i \in \Lambda^1\}$. Note que se $i \in \Lambda^1$ então, pelo Teorema 3.4.3, com uma ordenação conveniente da decomposição natural de $B'$, $e_i \in \mathrm{L}(\mathcal{A}, B)$ se, e somente se, $f_i \in \mathrm{L}(\mathcal{A}, B')$. Portanto $|\mathrm{L}(\mathcal{A}, B)| = |\mathrm{L}(\mathcal{A}, B')|$. $\square$

**Teorema 3.4.7.** *[6, Teorema 5.8] Seja* $\mathcal{A}$ *uma álgebra de evolução com uma base natural* $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$*. Considere a decomposição natural* $B = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_r$ *e suponha que existe* $i \in \{1, \ldots, r\}$ *tal que* $|B_i| > 1$ *e também satisfaz alguma das seguintes condições:*

*(i)* $B_i \cap \mathrm{L}(\mathcal{A}, B) \neq \varnothing$ *e* $B_i \cap \mathrm{NL}(\mathcal{A}, B) \neq \varnothing$.

*(ii)* $B_i \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{A}, B)$ *e existem* $e_q, e_p \in B_i$ *tais que* $\alpha_{qp} \neq -\left(\frac{\omega_{qq}}{\omega_{qp}}\right)^2$ *onde* $e_p^2 = \alpha_{qp} e_q^2$.

*(iii)* $B_i \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{A}, B)$ *e* $|B_i| > 2$.

*Então existe uma base natural* $B'$ *tal que* $|\mathrm{L}(\mathcal{A}, B)| \neq |\mathrm{L}(\mathcal{A}, B')|$.

*Demonstração.* Primeiro, assuma que $B_t$ satisfaz (i). Sejam $e_i \in B_t \cap \mathrm{L}(\mathcal{A}, B)$ e $e_j \in B_t \cap \mathrm{NL}(\mathcal{A}, B)$. Considere ainda $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}^*$ tal que $e_j^2 = \alpha_{ij} e_i^2$ e $\gamma \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$ tal que $\gamma^2 \neq \frac{-1}{\alpha_{ij}}$. Então $\omega_{ij} = \frac{1}{\alpha_{ij}} \omega_j = 0$. Considere o conjunto $B' = \{f_k;\ k \in \Lambda\}$ onde

$$f_k = \begin{cases} e_k, & \text{se } k \neq i, j, \\ e_i + \gamma e_j, & \text{se } k = i, \\ -\gamma\alpha_{ij} e_i + e_j, & \text{se } k = j. \end{cases}$$

Como $1 + \gamma^2 \alpha_{ij} \neq 0$, então $B'$ é linearmente independente, e portanto uma base de $\mathcal{A}$. Note agora que $f_i f_j = -\gamma\alpha_{ij} e_i^2 + \gamma e_j^2 = -\gamma\alpha_{ij} e_i^2 + \gamma\alpha_{ij} e_i^2 = 0$. Então, $B'$ é uma base natural de $\mathcal{A}$. Observe que $f_k f_k^2 = 0$ se, e somente se, $e_k e_k^2 = 0$ para todo $k \in \Lambda \setminus \{i, j\}$. Agora vamos provar que $f_i f_i^2 \neq 0$ e $f_j f_j^2 \neq 0$. De fato,

$$e_i e_i^2 = \omega_{ii} e_i^2, \ \ e_j e_j^2 = e_j e_i^2 = 0, f_i^2 = (1 + \alpha_{ij}\gamma^2) e_i^2 \text{ e } f_j^2 = (\alpha_{ij} + \alpha_{ij}^2 \gamma^2) e_i^2.$$

Então

$$\begin{aligned} f_i f_i^2 &= (e_i + \gamma e_j)(1 + \alpha_{ij}\gamma^2) e_i^2 = (1 + \alpha_{ij}\gamma^2)\omega_{ii} e_i^2 \neq 0, \\ f_j f_j^2 &= (-\gamma\alpha_{ij} e_i + e_j)(\alpha_{ij} + \alpha_{ij}^2\gamma^2) e_i^2 = -\gamma\alpha_{ij}(\alpha_{ij} + \alpha_{ij}^2\gamma^2)\omega_{ii} e_i^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto $|\mathrm{L}(\mathcal{A}, B)| = |\mathrm{L}(\mathcal{A}, B')| + 1$. Assuma agora que $B_t$ satisfaz (ii). Defina $\gamma = -\alpha_{qp} \frac{\omega_{qp}}{\omega_{qq}}$ e $\beta = \frac{\omega_{qp}}{\omega_{qq}}$. Considere o conjunto $B' = \{f_k;\ k \in \Lambda\}$ onde

$$f_k = \begin{cases} e_k, & \text{se } k \neq q, p, \\ \gamma e_q + e_p, & \text{se } k = q, \\ e_q + \beta e_p, & \text{se } k = p. \end{cases}$$

Pela hipótese $\gamma\beta \neq 1$, então $B'$ é uma base de $\mathcal{A}$. Similar ao item (i), $f_k f_k^2 = 0$ se, e somente se, $e_k e_k^2 = 0$ para todo $k \in \Lambda \setminus \{q, p\}$. Portanto

$$f_q f_q^2 = (\gamma e_q + e_p)(\gamma^2 + \alpha_{qp}) e_q^2 = (\gamma^2 + \alpha_{qp})(\gamma\omega_{qq} e_q^2 + \omega_{qp} e_p^2) = (\gamma^2 + \alpha_{qp})(\gamma\omega_{qq} + \omega_{qp}\alpha_{qp}) e_q^2 = 0.$$

Assim $|\mathrm{L}(\mathcal{A}, B')| < |\mathrm{L}(\mathcal{A}, B)|$.

Agora, assuma que $B_t$ satisfaz (iii). Suponha por redução ao absurdo que $\alpha_{ji} = -\left(\frac{\omega_{jj}}{\omega_{ji}}\right)^2$ para todo $j, i \in \Lambda_t$. Sejam $q, p, \ell \in \Lambda_t$. Visto que $\alpha_{qp} = -\frac{\omega_{qq}^2}{\omega_{qp}^2}$ então $\omega_{pq} = -\frac{\omega_{qq}^3}{\omega_{qp}^2}$ e analogamente $\omega_{\ell q} = -\frac{\omega_{qq}^3}{\omega_{qt}^2}$. Consequentemente $\omega_{pp} = -\frac{\omega_{qq}^2}{\omega_{qp}}$ e $\omega_{p\ell} = -\omega_{q\ell} \frac{\omega_{qq}^2}{\omega_{qp}^2}$. Além disso, usando o fato de que $\alpha_{p\ell} = -\frac{\omega_{pp}^2}{\omega_{p\ell}^2}$ temos que $\omega_{tq} = \alpha_{pt} w_{pq} = \frac{\omega_{qq}^3}{\omega_{q\ell}^2}$, uma contradição. Portanto existem $q, p \in \Lambda_t$ tais que $\alpha_{qp} \neq -\frac{\omega_{qq}^2}{\omega_{qp}^2}$ e a afirmação segue do item (ii). $\square$

**Proposição 3.4.8.** *[6, Proposição 5.9] Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não degenerada e $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ uma base natural de $\mathcal{A}$. Considere a decomposição natural $B = B_1 \cup \ldots \cup B_r$ e suponha que $|B_s| \leq 2$ para todo $s \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $B_s \cap \mathrm{L}(\mathcal{A}, B) \neq \varnothing$. Se para todo $B_i$, com $|B_i| = 2$, alguma das seguintes condições for satisfeita:*

*(i) $B_i \subseteq \mathrm{NL}(\mathcal{A}, B)$,*

*(ii) $B_i \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{A}, B)$ e $\alpha_{jk} = -\left(\frac{\omega_{jj}}{\omega_{jk}}\right)^2$ para todo $j, k \in \Lambda_i$ onde $e_k^2 = \alpha_{jk} e_j^2$,*

*então $|\mathrm{L}(\mathcal{A}, B)| = |\mathrm{L}(\mathcal{A}, B')|$ para toda base natural $B'$ de $\mathcal{A}$.*

*Demonstração.* Seja $\Lambda = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_r$ uma decomposição natural de $\Lambda$ relativa à $B$. Defina

$$\Lambda^1 = \bigcup_{|\Lambda_t|=1} \Lambda_t, \quad \Lambda^2 = \bigcup_{\substack{|\Lambda_t|=2 \\ B_t \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{A},B)}} \Lambda_t \quad \text{e} \quad \Lambda^3 = \bigcup_{\substack{|\Lambda_t|\geq 2 \\ B_t \subseteq \mathrm{NL}(\mathcal{A},B)}} \Lambda_t.$$

Suponha, por redução ao absurdo, que existe uma base natural $B' = \{f_k;\ k \in \Lambda\}$ de $\mathcal{A}$ tal que $|\mathrm{L}(\mathcal{A}, B')| \neq |\mathrm{L}(\mathcal{A}, B)|$.

Seja $B' = B'_1 \cup \ldots \cup B'_r$ uma decomposição natural ordenada de tal forma que $B'_t \subseteq \mathrm{span}(B_t)$ para todo $t$ e seja $M_{B'} = (\omega'_{kj})$ a matriz de estrutura de $\mathcal{A}$ relativa à base $B'$. Pelo Teorema 3.4.3 temos que $|\{k \in \Lambda^1;\ \omega'_{kk} \neq 0\}| = |\{k \in \Lambda^1;\ \omega_{kk} \neq 0\}|$ e $\omega'_{jj} = 0$ para todo $j \in \Lambda^3$. Portanto existem $h \in \{1, \ldots, r\}$ tais que $B_h = \{e_i, e_\ell\} \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{A}, B)$ e $B'_h = \{f_k, f_j\} \nsubseteq \mathrm{L}(\mathcal{A}, B')$. Sem perda de generalidade, assumimos que $f_k f_k^2 = 0$. Assim, temos que

$$f_k = x_{11} e_i + x_{12} e_\ell \text{ e } f_j = x_{21} e_i + x_{22} e_\ell,$$

onde $x_{ij} \in \mathbb{K}$. Consequentemente, usando $e_\ell^2 = \alpha_{i\ell} e_i^2$, $e_i e_i^2 = \omega_{ii} e_i^2$ e $e_i^2 e_\ell = \omega_{i\ell} e_\ell^2$, segue que

$$\begin{aligned} f_k f_k^2 &= (x_{11} e_i + x_{12} e_\ell)(x_{11}^2 + x_{12}^2 \alpha_{i\ell}) e_i^2 \\ &= (x_{11}^2 + x_{12}^2 \alpha_{i\ell})(x_{11} \omega_{ii} e_i^2 + x_{12} \omega_{i\ell} e_\ell^2) \\ &= (x_{11}^2 + x_{12}^2 \alpha_{i\ell})(x_{11} \omega_{ii} + x_{12} \omega_{i\ell} \alpha_{i\ell}) e_i^2 = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Como $f_k^2 \neq 0$ então $x_{11}^2 + x_{12}^2 \alpha_{i\ell} \neq 0$. Assim

$$x_{11} \omega_{ii} - x_{12} \omega_{i\ell} \frac{\omega_{ii}^2}{\omega_{i\ell}^2} = \omega_{ii} \left( x_{11} - x_{12} \frac{\omega_{ii}}{\omega_{i\ell}} \right) = 0,$$

onde, por hipótese, usamos que $\alpha_{i\ell} = -\frac{\omega_{ii}^2}{\omega_{i\ell}^2}$. O fato de que $w_{ii} \neq 0$ implica em $x_{11} = \frac{\omega_{ii}}{\omega_{i\ell}} x_{12}$. Portanto $x_{11} x_{12} \neq 0$, visto que $f_k \in B'$. Por outro lado, como $B'$ é uma base natural então

$$f_k f_j = x_{11} x_{21} e_i^2 + x_{12} x_{22} e_\ell^2 = (x_{11} x_{21} + x_{12} x_{22} \alpha_{i\ell}) e_i^2 = 0. \tag{21}$$

Pela Equação (21) temos que

$$x_{21} = \frac{x_{12}x_{22}}{x_{11}}\frac{\omega_{ii}^2}{\omega_{i\ell}^2} = x_{12}x_{22}\frac{\omega_{ii}^2}{\omega_{i\ell}^2}\frac{\omega_{i\ell}}{x_{12}\omega_{ii}} = \frac{\omega_{ii}}{\omega_{i\ell}}x_{22}.$$

Finalmente, concluímos que

$$x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = x_{12}\frac{\omega_{ii}}{\omega_{i\ell}}x_{22} - x_{12}\frac{\omega_{ii}}{\omega_{i\ell}}x_{22} = 0.$$

Portanto $f_k$ e $f_j$ são linearmente dependentes, o que é um absurdo. □

**Corolário 3.4.9.** *[6, Corolário 5.12] Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não degenerada com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$. Considere uma decomposição natural $B = B_1 \cup \ldots \cup B_r$. Então o número de laços de $\mathcal{A}$ é invariante pela troca de base natural se $|B_t| \leq 2$ para todo $B_t \cap \mathrm{L}(\mathcal{A}, B) \neq \varnothing$ e para todo $s$ tal que $|B_s| = 2$, alguma das seguintes condições é satisfeita:*

*(i)* $B_s \subseteq \mathrm{NL}(\mathcal{A}, B)$,

*(ii)* $B_s \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{A}, B)$ *e* $\alpha_{jk} = -\left(\omega_{jj}/\omega_{jk}\right)^2$ *para* $j, k \in \Lambda_s$ *onde* $e_k^2 = \alpha_{jk}e_j^2$.

*Para qualquer outro caso, o número de laços depende da base natural.*

*Demonstração.* O fato de que a quantidade de laços é invariante por troca de base segue da Proposição 3.4.8. Por outro lado, pelo Teorema 3.4.7, em qualquer outro caso o número de laços de $\mathcal{A}$ é depende da base natural. □

**Exemplo 3.4.10.** *Considere novamente a álgebra de evolução $\mathcal{A}$ com base $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e produto dado por*

$$e_1^2 = e_1 + e_2, \quad e_2^2 = e_1, \quad e_3^2 = e_4 \quad e \quad e_4^2 = e_4,$$

*que apresentamos no Exemplo 1.1.2. Note que $\mathrm{L}(\mathcal{A}, B) = \{1, 4\}$. Considere $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ uma decomposição natural de $B$, onde $B_1 = \{e_1\}$, $B_2 = \{e_2\}$ e $B_3 = \{e_3, e_4\}$. Como $|B_3| > 1$, $B_3 \cap \mathrm{L}(\mathcal{A}, B) = \{e_4\}$ e $B_3 \cap \mathrm{NL}(\mathcal{A}, B) = \{e_3\}$, então $\mathcal{A}$ e $B$ satisfazem as hipóteses do Teorema 3.4.7 e portanto existe uma outra base natural $B'$ de $\mathcal{A}$ tal que $|\mathrm{L}(\mathcal{A}, B')| \neq 2$. De fato, a base $B'$ apresentada no Exemplo 1.1.2 tem essa característica.* □

# 4 DERIVAÇÕES DE ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO ASSOCIADAS A GRAFOS NÃO ORIENTADOS

Nos capítulos anteriores, utilizamos o grafo associado a um álgebra de evolução relativa a uma base natural para estudar certas estruturas desta álgebra. Neste capítulo, utilizaremos outra construção, que foi proposta em [19, Capítulo 6.1]. Dado um grafo não orientado, iremos construir uma base natural para uma álgebra de evolução. Além disso, utilizaremos a estrutura deste grafo para descrever o espaço de derivações desta álgebra. Na Seção 4.1 apresentaremos a definição de álgebra de evolução associada a um grafo não orientado e alguns resultados preliminares. Na Seção 4.2 apresentaremos o resultado principal deste capítulo, a caracterização do espaço das derivações de álgebras de evoluções associadas a grafos não orientados. Todos os resultados apresentados aqui são provenientes de [18].

## 4.1 ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO ASSOCIADAS A GRAFOS NÃO ORIENTADOS

Começaremos esta seção com algumas definições básicas e notações. Para diferenciar dos grafos orientados que tratamos nos outros capítulos, vamos utilizar a letra $\mathcal{G}$ para representar grafos não orientados. Um grafo não orientado finito com $n$ vértices é um par $\mathcal{G} = (V, E)$, onde $V = \{1, \ldots, n\}$ é o conjunto de vértices e $E \subset \{(i, j) \in V \times V : i \leq j\}$ é o conjunto de arestas. Se $(i, j) \in E$ ou $(j, i) \in E$ dizemos que $i$ e $j$ são **vizinhos** e denotamos o conjunto de vizinhos de $i$ por $\mathcal{N}(i)$. Para um subconjunto $U \subset V$, denotamos o conjunto dos seus vizinhos por $\mathcal{N}(U) = \{j \in V : j \in \mathcal{N}(i), \text{ para algum } i \in U\}$. O **grau** de $i$, denotado por $\deg(i)$, é a cardinalidade do conjunto $\mathcal{N}(i)$. Dizemos que $i$ e $j$ em $V$ são **gêmeos** se eles tem exatamente os mesmos vizinhos, ou seja, se $\mathcal{N}(i) = \mathcal{N}(j)$. Definimos então uma relação $\sim$ em $V$ da seguinte forma: $i \sim j$ se $i$ e $j$ são gêmeos. Note que tal relação é de equivalência. Denotaremos a classe de equivalência de $i \in V$ por $\mathcal{T}(i)$, isto é, $\mathcal{T}(i) = \{j \in V : i \sim j\}$. O grafo $\mathcal{G}$ é dito **livre de gêmeos** se para todo $i \in V$, o conjunto $\mathcal{T}(i)$ é unitário. Um **caminho** de $i$ para $j$ é uma sequência finita de vértices $\mu := i_0, i_1, \ldots, i_r$, tal que $i_0 = i$, $i_n = j$ e $i_{k+1} \in \mathcal{N}(i_k)$ para todo $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$. Neste caso, dizemos que $\mu$ tem **comprimento** $r$ e denotamos $|\mu| = r$. Se $i = j$ dizemos que $\mu$ é um **ciclo**. Os ciclos de comprimento 1 são chamados de **laços**. Dados dois vértices $i$ e $j$ tais que existe ao menos um caminho conectando-os, a distância entre $i$ e $j$, denotada por $\mathrm{d}(i,j)$, é dada por $\mathrm{d}(i,j) = \min\{|\mu|;\ \mu$ é um caminho entre $i$ e $j\}$.

Um grafo é dito **conexo** se sempre existe um caminho entre dois vértices quaisquer. Neste trabalho, consideramos apenas grafos conexos e simples, isto é, sem laços e arestas paralelas. A **matriz de adjacência** de um grafo $\mathcal{G} = (V, E)$, denotado por $A_{\mathcal{G}} = (a_{ij})$, é uma matriz simétrica $n \times n$ definida da seguinte forma: $a_{ij} = 1$ se $i \in \mathcal{N}(j)$, e $a_{ij} = 0$ caso contrário.

**Definição 4.1.1.** *Seja $\mathcal{G} = (V, E)$ um grafo com matriz de adjacência $A_{\mathcal{G}} = (b_{ij})$. A álgebra de evolução associado a $\mathcal{G}$ é a álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ com uma base natural $B = \{e_i;\ i \in V\}$ e produto dado por*

$$e_i \cdot e_i = \sum_{k \in V} b_{ik} e_k, \ \text{para } i \in V,$$
$$e_i \cdot e_j = 0, \ \text{se } i \neq j.$$

Note que essas álgebras, com as restrições sobre os grafos, são álgebras cuja matriz de estrutura é simétrica, com diagonal nula e coeficientes em $\{0, 1\}$. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 4.1.2.** *Seja $\mathcal{G}$ o grafo da Figura 15.*

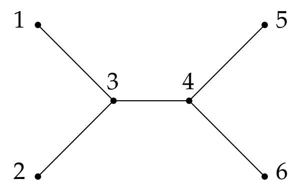


Figura 15: Grafo $\mathcal{G}$

*A álgebra de evolução associada a $\mathcal{G}$ é a álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ com uma base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ e o produto dado por*

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3; \quad e_3^2 = e_1 + e_2 + e_4; \quad e_4^2 = e_3 + e_5 + e_6; \quad e_5^2 = e_6^2 = e_4;$$

$$e_ie_j = 0, \text{ para todo } i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, i \neq j.$$

*As classes de equivalência da relação* $\sim$ *são* $\mathcal{T}(1), \mathcal{T}(3), \mathcal{T}(4)$ *e* $\mathcal{T}(5)$*, onde*

$$\mathcal{T}(1) = \mathcal{T}(2) = \{1, 2\}, \quad \mathcal{T}(3) = \{3\}, \quad \mathcal{T}(4) = \{4\} \quad e \quad \mathcal{T}(5) = \mathcal{T}(6) = \{5, 6\}.$$

□

Seja $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ a álgebra de evolução associada a um grafo $\mathcal{G}$ e $B$ sua base natural conforme a Definição 4.1.1. Então o grafo orientado associado a $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ com relação a base $B$ é o grafo orientado com a mesma matriz de adjacência que $\mathcal{G}$. Para o Exemplo 15, o grafo orientado associado a $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ é o grafo da Figura 16.

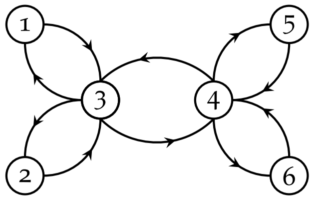


Figura 16: Grafo associado a álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ do Exemplo 15.

**Observação 4.1.3.** *Sejam* $\mathbb{K}$ *um corpo e* $\mathcal{G} = (V, E)$ *um grafo não orientado com matriz de adjacência* $A_{\mathcal{G}} = (a_{ij})$*. Se* $|V| = 1$*, como consideramos somente grafos sem laços, temos que* $v \cdot u = 0$ *para todo* $u, v \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$*, e portanto* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G})) = \mathcal{L}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$*. Se* $|V| = 2$*, visto que consideramos grafos simples conexos,* $\mathcal{G}$ *é necessariamente o grafo da Figura 17. Portanto,* $a_{11} = a_{22} = 0$ *e* $a_{12} = a_{21} = 1$*. Se* $d = (d_{ij}) \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}(G))$*, tomando* $i = k = 1$ *e* $j = 2$ *na Equação (3) temos que* $d_{12} = 0$*. Tomando* $i = k = 2$ *e* $j = 1$ *temos que* $d_{21} = 0$*. Portanto* $d$ *é uma matriz diagonal. Usando a Equação (4), com* $i \neq j$*, temos que*

$$d_{11} = 2d_{22} \text{ e } d_{22} = 2d_{11}, \tag{22}$$

*o que implica que* $d_{11} = 4d_{11}$ *e* $d_{22} = 4d_{22}$*. Assim, se* $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 3$*, obtemos que* $d_{11} = d_{22} = 0$ *e portanto* $d = 0$*. Por outro lado, se* $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 3$*, de (22) concluímos que* $d_{22} = 2d_{11}$*. Desta forma*

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}(G)) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{K} \right\}.$$

A partir daqui, vamos considerar somente grafos com mais que dois vértices. Esta próxima proposição é uma generalizado de [9, Proposição 3.1], que estuda o caso em que o corpo tem característica zero.


Figura 17: Grafo da Observação 4.1.3.

**Proposição 4.1.4.** *[18, Proposição 2.3] Sejam $\mathbb{K}$ um corpo de característica qualquer e $\mathcal{G} = (V, E)$ um grafo não orientado. Então $d \in \operatorname{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$ se, e somente se, $d$ satisfaz as seguintes condições:*

*(i) Se $i, j \in V$, $i \neq j$, e $\mathcal{N}(i) \cap \mathcal{N}(j) \neq \emptyset$, então $d_{ij} = -d_{ji}$.*

*(ii) Se $i, j \in V$, $i \neq j$, e $\mathcal{N}(i) \cap \mathcal{N}(j)^c \neq \emptyset$, então $d_{ji} = d_{ij} = 0$.*

*(iii) Para todo $i \in V$*

$$\sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \notin \mathcal{N}(i), \\ 2d_{ii}, & \text{se } j \in \mathcal{N}(i). \end{cases}$$

*Demonstração.* Se $d \in \operatorname{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$ então a prova que $d$ satisfaz as condições (i)-(iii) é a mesma que a apresentada em [9, Proposition 3.1]. No outro sentido, seja $d \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$ satisfazendo as condições (i)- (iii). Para provar que $d \in \operatorname{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$, vamos verificar que $d$ verifica as Equações (3) e (4). Sejam $i, j, k \in V$. Para provar que $d$ satisfaz (3) temos que considerar vários casos:

**Caso 1.** Se $k \in \mathcal{N}(i)^c \cap \mathcal{N}(j)^c$, então $a_{jk} = a_{ik} = 0$. Portanto vale (3).

**Caso 2.** Para $k \in \mathcal{N}(i) \cap \mathcal{N}(j)^c$ temos que $a_{ik} = 1$, $a_{jk} = 0$ e $d_{ji} = 0$, por (ii). Então segue (3). Para $k \in \mathcal{N}(i)^c \cap \mathcal{N}(j)$ o argumento é análogo ao usado na situação anterior.

**Caso 3.** Se $k \in \mathcal{N}(i) \cap \mathcal{N}(j)$, então $a_{jk} = a_{ik} = 1$ e, pela condição (i), $d_{ij} = -d_{ji}$. Portanto $a_{jk}d_{ij} + a_{ik}d_{ji} = d_{ij} - d_{ij} = 0$.

Para provar que $d$ satisfaz (4), note que, por (iii), temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}d_{kj} &= \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kj}, \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } j \notin \mathcal{N}(i), \\ 2d_{ii}, & \text{se } j \in \mathcal{N}(i), \end{cases} \\ &= 2a_{ij}d_{ii}. \end{aligned}$$

para todo $i, j, k \in V$. □

O enunciado do próximo lema, com exceção da característica do corpo, é o mesmo de [9, Lemma 3.4], que considera corpos de característica zero. Porém a mesma prova é válida, então enunciaremos o lema e omitiremos a demonstração.

**Lema 4.1.5.** *[18, Lema 2.4] Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, $G = (V, E)$ um grafo não orientado, e $d \in \operatorname{Der}(\mathcal{A}(G))$. Se $d_{ij} \neq 0$, para $i, j \in V$ com $i \neq j$, então $i \sim j$.*

**Corolário 4.1.6.** *[18, Corolário 2.5] Seja $\mathbb{K}$ um corpo com $\operatorname{char}(\mathbb{K}) = p$, $p \notin \{0, 2\}$. Seja $\mathcal{G} = (V, E)$ um grafo não orientado e $d \in \operatorname{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$. Então $d$ satisfaz as seguintes condições:*

*(i) Se $i, \ell \in V$ e $i \sim_t \ell$, então $d_{ii} = d_{\ell\ell}$.*

*(ii) Se $i \in V$ e $p \mid \deg(i)$, então*

$$\sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kk} = 0. \tag{23}$$

*(iii) Se $i \in V$ e $p \nmid \deg(i)$, então*

$$2 \deg(i) d_{ii} = \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kk}. \tag{24}$$

*(iv) Seja $\ell \in V$. Então $\sum_{k \in \mathcal{T}(\ell)} d_{kj} = 2d_{ii}$ para todo $j \in \mathcal{T}(\ell)$ e $i \in \mathcal{N}(\mathcal{T}(\ell))$.*

*Demonstração.* Se $i \sim_t \ell$ e $j \in \mathcal{N}(i) = \mathcal{N}(\ell)$, então a Proposição 4.1.4(iii) nos garante que

$$2d_{ii} = \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kj} = \sum_{k \in \mathcal{N}(\ell)} d_{kj} = 2d_{\ell\ell},$$

o que prova (i). Por outro lado, se $i, j \in V$ e $j \in \mathcal{N}(i)$, pela Proposição 4.1.4(iii), temos que

$$2d_{ii} = \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kj}.$$

Visto que a equação acima vale para todo $j \in \mathcal{N}(i)$, então

$$\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} 2d_{ii} = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kj},$$

que podemos reescrever da seguinte forma:

$$2 \deg(i) d_{ii} = \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kk} + \sum_{\substack{j,k \in \mathcal{N}(i) \\ j \neq k}} d_{kj}. \tag{25}$$

Note que, pela Proposição 4.1.4(i), vale que

$$\sum_{\substack{j,k \in \mathcal{N}(i) \\ j \neq k}} d_{kj} = 0.$$

Vamos agora considerar dois casos. Se $p \mid \deg(i)$, então a Equação (25) pode ser escrita da seguinte forma

$$\sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kk} = 0,$$

o que prova (ii). Por outro lado, se $p \nmid \deg(i)$, então por (25) temos que

$$2 \deg(i) d_{ii} = \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kk},$$

o que prova (iii). Sejam $i, j \in V$ tais que $j \in \mathcal{T}(\ell)$ e $i \in \mathcal{N}(\mathcal{T}(\ell))$. Então $\mathcal{T}(\ell) \subset \mathcal{N}(i)$ e

$$\sum_{k \in \mathcal{T}(\ell)} d_{kj} = \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kj} - \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus \mathcal{T}(\ell)} d_{kj}.$$

Porém, se $k \in \mathcal{N}(i) \setminus \mathcal{T}(\ell)$, então $k \not\sim_t j$ e, pelo lema anterior, $d_{kj} = 0$. Também, pela Proposição 4.1.4(iii) temos que

$$\sum_{k \in \mathcal{T}(\ell)} d_{kj} = \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kj} = 2 d_{ii},$$

o que prova (iv). □

**Corolário 4.1.7.** *[18, Corolário 2.6] Sejam $\mathbb{K}$ um corpo com $\operatorname{char}(\mathbb{K}) = 2$, $\mathcal{G} = (V, E)$ um grafo não orientando e $d \in \operatorname{Der}(\mathcal{A}(G))$. Então*

$$\sum_{k \in \mathcal{T}(\ell)} d_{kj} = 0, \ \textit{para qualquer } \ell \in V, j \in \mathcal{T}(\ell) \textit{ e } i \in \mathcal{N}(\mathcal{T}(\ell)).$$

*Demonstração.* Vamos usar um argumento análogo ao utilizado na prova do Corolário 4.1.6 (iv). Sejam $i, j \in V$ tais que $j \in \mathcal{T}(\ell)$ e $i \in \mathcal{N}(\mathcal{T}(\ell))$. Então $\mathcal{T}(\ell) \subset \mathcal{N}(i)$ e portanto

$$\sum_{k \in \mathcal{T}(\ell)} d_{kj} = \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kj} - \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus \mathcal{T}(\ell)} d_{kj} = \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kj}.$$

Agora, utilizando a Proposição 4.1.4(iii) temos que

$$\sum_{k \in \mathcal{T}(\ell)} d_{kj} = \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kj} = 0.$$

□

Em [9, Lema 3.5], provou-se que se $d = (d_{ij}) \in \operatorname{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$ então $d_{k\ell} = 0$ implica que $|\mathcal{T}(k)| \geq 3$, onde $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra de evolução associada ao grafo $\mathcal{G}$ e $\operatorname{char}(\mathbb{K}) = 0$. No próximo lema, provamos que este resultado também é válido se $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \geq 3$. Além disso, o Exemplo 4.1.9 discute o fato de que a afirmação não é válida se $\operatorname{char}(\mathbb{K}) = 2$.

**Lema 4.1.8.** *[18, Lema 2.7] Seja* $\mathbb{K}$ *um corpo com* $\operatorname{char}(\mathbb{K}) = p$, $p \neq 2$. *Seja* $\mathcal{G} = (V, E)$ *um grafo não orientado e* $d \in \operatorname{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$. *Se* $d_{k\ell} \neq 0$ *para algum* $k, \ell \in V$, *com* $k \neq \ell$, *então* $|\mathcal{T}(\ell)| \geq 3$.

*Demonstração.* Sem perda de generalidade assuma que $d_{12} \neq 0$. Pelo Lema 4.1.5, $d_{12} \neq 0$ implica que $1 \sim_t 2$, ou seja $1, 2 \in \mathcal{T}(1)$. Portanto $|\mathcal{T}(1)| \geq 2$. Assuma que $|\mathcal{T}(1)| = 2$. Seja $m \in \mathcal{N}(1) = \mathcal{N}(2)$. Pela Proposição 4.1.4(iii) temos que

$$2d_{mm} = \sum_{j \in \mathcal{N}(m)} d_{j1} = d_{11} + d_{21} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{N}(m) \\ j \neq 1,2}} d_{j1}.$$

Pela hipótese, se $j \in \mathcal{N}(m) \setminus \{1, 2\}$ então $j \not\sim_t 1$. Portanto, pelo Lema 4.1.5, $d_{j1} = 0$. Assim,

$$2d_{mm} = d_{11} + d_{21} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{N}(m) \\ j \neq 1,2}} d_{j1} = d_{11} + d_{21}. \tag{26}$$

Analogamente,

$$2d_{mm} = \sum_{j \in \mathcal{N}(m)} d_{j2} = d_{12} + d_{22} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{N}(m) \\ j \neq 1,2}} d_{j2} = d_{12} + d_{22}. \tag{27}$$

Então, por(26) e (27), $d_{11} + d_{12} = d_{21} + d_{22}$. Pelo Corolário 4.1.6 (i), $d_{11} = d_{22}$. Portanto, $d_{12} = d_{21}$, o que contraria a Proposição 4.1.4 (i). □

Como mostra o próximo exemplo, este lema não é válido para corpos de característica 2.

**Exemplo 4.1.9.** *Seja* $\mathbb{F}_2$ *o corpo de Galois com* 2 *elementos e* $\mathcal{G}$ *o grafo da Figura 18. Utilizando*

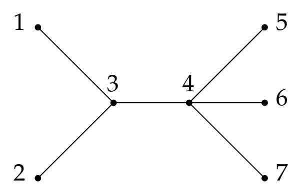


Figura 18: Grafo $\mathcal{G}$.

*as Equações* (3) *e* (4) *pode-se mostrar que o operador $d$ dado por*

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*é um elemento de* $\operatorname{Der} \mathcal{A}(\mathcal{G})$*. Observe que* $d_{12} \neq 0$ *e* $|\mathcal{T}(1)| = 2$*. Note também que* $6 \sim_t 7$ *e* $d_{66} \neq d_{77}$*, o que mostra que o Corolário 4.1.6(i) também não é válido para* $\operatorname{char} \mathbb{K} = 2$. □

## 4.2 RESULTADOS PRINCIPAIS

Vejamos esta última notação e poderemos então apresentar o Teorema 3.1 de [18], que é o resultado principal capítulo. Seja $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Vamos denotar por $\overline{C} = (\overline{c}_{ij})$ a matriz tal que

$$\overline{c}_{ij} := \begin{cases} c_{ij}, & \text{se } i \neq j, \\ 0, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

**Teorema 4.2.1.** *[18, Teorema 3.1] Sejam $\mathbb{K}$ um corpo com $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 0$, $\mathcal{G} = (V, E)$ um grafo não orientado e $\{c_1, \ldots, c_m\}$ um conjunto completo de representantes da relação $\sim$. Então um operador $d \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$ também pertence a $\operatorname{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$ se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

*(i) $d$ é uma matriz de blocos com a forma*

$$d = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & C_m \end{pmatrix},$$

*onde $C_i \in M_{u_i}(\mathbb{K})$, para $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $u_i := |\mathcal{T}(c_i)|$.*

*(ii)* *Se $j \in \mathcal{T}(c_i)$, com $i \in \{1, \ldots, m\}$, então*

$$\sum_{k \in \mathcal{T}(c_i)} d_{kj} = 2d_{tt}, \text{ para todo } t \in \mathcal{N}(\mathcal{T}(c_i)).$$

*(iii)* *$\overline{C_i}$ é antissimétrica, para $i \in \{1, \ldots, m\}$ .*

*Demonstração.* Seja $t_0 := 0$ e

$$t_i := \sum_{\ell=1}^{i} |\mathcal{T}(c_\ell)|, \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Podemos ordenar $V$ de tal forma que $\{t_{j-1}+1, \ldots, t_j\} = \mathcal{T}(c_j)$, para $j \in \{1, \ldots, m\}$. Seja $d \in \text{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$. Se $i, k \in V$ são tais que $i \in \mathcal{T}(c_j)$ e $k \in \mathcal{T}(c_j)^c$, para algum $j \in \{1, \ldots, m\}$ então $d_{ik} = d_{ki} = 0$, pelo Lema 4.1.5. Definindo

$$C_i := \begin{pmatrix} d_{t_{i-1}+1, t_{i-1}+1} & d_{t_{i-1}+1, t_{i-1}+2} & \cdots & d_{t_{i-1}+1, t_i} \\ d_{t_{i-1}+2, t_{i-1}+1} & d_{t_{i-1}+2, t_{i-1}+2} & \cdots & d_{t_{i-1}+2, t_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{t_i, t_{i-1}+1} & d_{t_i, t_{i-1}+2} & \cdots & d_{t_i, t_i} \end{pmatrix},$$

para $i \in \{1, \ldots, m\}$, temos que $d$ tem a forma desejada em (i).

O item (ii) segue do Corolário 4.1.6 (iv), para $p \neq 2$, e do Corolário 4.1.7, para $p = 2$. Por fim, o item (iii) segue da Proposição 4.1.4 (i).

No outro sentido, vamos assumir que $d$ satisfaz as condições (i)-(iii). Para provar que $d \in \text{Der}\,(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$, vamos mostrar que $d$ satisfaz as condições da Proposições 4.1.4. Primeiro, afirmamos que se $d_{ij} \neq 0$ então $i \sim_t j$. De fato, pela estrutura de blocos de $d$, se $d_{ij} \neq 0$ então $d_{ij}$ é uma entrada de $C_k$, para algum $k \in \{1, \ldots, m\}$. Consequentemente,

$$t_{k-1} < i \leq t_k \text{ e } t_{k-1} < j \leq t_k,$$

e portanto $i, j \in \mathcal{T}(c_k)$. Seja $i, j \in V$, com $i \neq j$. Se $\mathcal{N}(i) = \mathcal{N}(j)$ então $i \sim_t j$ e pelo item (iii), temos que $d_{ij} = -d_{ji}$.

Por outro lado, se $\mathcal{N}(i) \neq \mathcal{N}(j)$ então $i \not\sim_t j$ e assim $d_{ij} = d_{ji} = 0$, o que prova que $d$ satisfaz as condições (i) e (ii) da Proposição 4.1.4. Finalmente, para provar a última condição, vamos considerar dois casos. Sejam $i, j \in V$.

**Caso 1.** Se $j \notin \mathcal{N}(i)$, então $j \not\sim_t k$, para todo $k \in \mathcal{N}(i)$ e portanto $d_{kj} = 0$. Consequentemente $\sum_{k \in \mathcal{N}(i)} d_{kj} = 0$.

**Caso 2.** Se $j \in \mathcal{N}(i)$, então

$$\sum_{k\in\mathcal{N}(i)} d_{kj} = \sum_{k\in\mathcal{N}(i)\setminus\mathcal{T}(c_s)} d_{kj} + \sum_{k\in\mathcal{T}(c_s)} d_{kj} = \sum_{k\in\mathcal{T}(c_s)} d_{kj}.$$

onde $s \in \{1,\ldots,m\}$ é tal que $j \in \mathcal{T}(c_s)$. A afirmação que assumimos em (ii) implica que

$$\sum_{k\in\mathcal{T}(c_s)} d_{kj} = 2d_{tt}, \text{ para todo } t \in \mathcal{N}(\mathcal{T}(c_s)).$$

Tomando $t = i$ temos a equação desejada. □

**Observação 4.2.2.** *[18, Observação 2] Enfatizamos que o resultado do teorema anterior também é válido para corpos de característica zero. De fato, se $d \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$ e $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, então, por [9, Teorema 2.6], temos que d satisfaz as condições (i)-(iii). Por outro lado, o argumento utilizado para demonstrar a outra implicação não depende da característica do corpo.*

**Corolário 4.2.3.** *[18, Corolário 3.2] Sejam $\mathbb{K}$ um corpo tal que $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = p$, com $p \notin \{0,3\}$, e $\mathcal{G} = (V,E)$ um grafo não orientado. Se $d \in \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$ é tal que $d_{ij} = d_{ji} = 0$ para todo $i,j \in V$, $i \neq j$, então $d_{ii} = 0$ para todo $i \in V$.*

*Demonstração.* Sejam $i,j \in V$ tais que $j \in \mathcal{N}(i)$. Primeiro, assumiremos que $p = 2$. Pela Proposição 4.1.4(iii) temos que

$$0 = \sum_{k\in\mathcal{N}(j)} d_{ki} = \sum_{\substack{k\in\mathcal{N}(j)\\ k\neq i}} d_{ki} + d_{ii} = d_{ii}.$$

Se $p > 3$, pelo Teorema 4.2.1(ii), temos que

$$2d_{ii} = \sum_{k\in\mathcal{T}(i)} d_{kj} = d_{jj} \quad \text{e} \quad 2d_{jj} = \sum_{k\in\mathcal{T}(j)} d_{ki} = d_{ii}.$$

Então $4d_{ii} = d_{ii}$, o que implica que $d_{ii} = 0$. □

**Exemplo 4.2.4.** *[18, Exemplo 3.3] Sejam $\mathbb{K}$ um corpo com $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 3$ e $K_{23}$ o grafo bipartido completo (veja Figura 19).*

*Se $d \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}(K_{23}))$, então pelo Teorema 4.2.1(i) e (iii) temos que*

$$d = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 \\ -d_{12} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 \\ -d_{13} & -d_{23} & d_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & d_{45} \\ 0 & 0 & 0 & -d_{45} & d_{55} \end{pmatrix}.$$

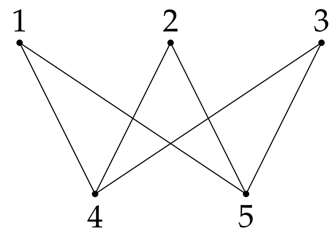


Figura 19: Grafo bipartido completo $K_{23}$.

*Por outro lado, pelo Teorema 4.2.1(ii), temos que*

$$\begin{aligned} d_{11} - d_{12} - d_{13} &= 2d_{44} = 2d_{55}; \\ d_{12} + d_{22} - d_{23} &= 2d_{44} = 2d_{55}; \\ d_{13} + d_{23} + d_{33} &= 2d_{44} = 2d_{55}; \\ d_{44} - d_{45} &= 2d_{11} = 2d_{22} = 2d_{33}; \\ d_{45} + d_{55} &= 2d_{11} = 2d_{22} = 2d_{33}. \end{aligned}$$

*Definindo $\alpha := d_{44}$ e $\beta := d_{12}$ podemos reescrever $d$ como*

$$d = \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 2\alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & -\beta & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

□

Uma consequência interessante do Teorema 4.2.1 é o [18, Teorema 3.4], que descreve $\mathrm{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$ para o caso em que $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ é uma álgebra perfeita.

**Teorema 4.2.5.** *[18, Teorema 3.4] Sejam $\mathbb{K}$ um corpo com $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 0$ e $\mathcal{G} = (V, E)$ um grafo tal que $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ é uma álgebra de evolução perfeita. Então $\mathrm{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$ satisfaz as seguintes propriedades:*

*(i) Se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 3$, então $\mathrm{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G})) = 0$.*

*(ii)* *Se* $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 3$, *então* $\dim \mathrm{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G})) \leq 1$ *e a igualdade é válida se, e somente se,* $\mathcal{G}$ *não tem ciclos de comprimento ímpar. Nesse caso,* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G})) = \mathrm{span}\{f\}$, *onde* $f = (f_{ij})$ *é a transformação linear diagonal definida por*

$$f_{ii} := \begin{cases} 1, & \text{se } i = 1, \\ 2, & \text{se } d(i,1) \text{ é ímpar}, \\ 1, & \text{se } d(i,1) \text{ é par}. \end{cases} \tag{28}$$

*Demonstração.* Seja $d = (d_{ij}) \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$. Se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, então $d = 0$ por [10, Theorem 2.1]. Se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \notin \{0, 3\}$, pelo Lema 4.1.5, temos que $d_{ij} = 0$ para todo $i, j \in V$ com $i \neq j$. Além disso, pelo Corolário 4.2.3, $d = 0$, o que prova que (i).

Como $\mathcal{G}$ é conexo, para $i, k \in V$ existe um caminho $k = j_0, j_1 \ldots, j_t = i$ de $k$ para $i$. Então, pelo Teorema 4.2.1 (ii), temos que

$$d_{kk} = 2d_{j_1j_1} = d_{j_2j_2} = 2d_{j_3j_3} = \cdots = \begin{cases} 2d_{ii}, & \text{se } t \text{ é ímpar}, \\ d_{ii}, & \text{se } t \text{ é par}. \end{cases} \tag{29}$$

Assim se $d_{jj} = 0$, para algum $j \in V$, temos que $d = 0$.

Suponha que $\mathrm{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G})) \neq 0$. Sejam $d, d' \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$ derivações não nulas tais que $d \neq d'$. Seja $i \in V$. Então, como $d_{ii} \neq 0$ e $d'_{ii} \neq 0$, existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, tal que $d'_{ii} = \lambda d_{ii}$. Por outro lado, para $k \in V$, existe um caminho $k = j_0, j_1, \ldots, j_t = i$, e então, por (29), temos que

$$d'_{kk} = \begin{cases} 2d'_{ii}, & \text{se } t \text{ é ímpar}, \\ d'_{ii}, & \text{se } t \text{ é par}. \end{cases} = \begin{cases} 2\lambda d_{ii}, & \text{se } t \text{ é ímpar}, \\ \lambda d_{ii}, & \text{se } t \text{ é par}. \end{cases} = \lambda d_{kk}.$$

Portanto $d' = \lambda d$, ou seja, $\dim \mathrm{Der}(\mathcal{A}(G)) = 1$.

Suponha que $\mathcal{G}$ tem um ciclo de comprimento ímpar $k = j_0, j_1, j_2, \ldots, j_t = k$. Então, por (29), $d_{kk} = 2d_{kk}$ e portanto $d = 0$. No outro sentido, se $\mathcal{G}$ tem um ciclo de comprimento ímpar, considere o operador linear diagonal $f = (f_{ij})$ definido em (28).

Sejam $j, \ell, t \in V$ tais que $j \in \mathcal{T}(\ell)$ e $t \in \mathcal{N}(\mathcal{T}(\ell))$. Se $f_{jj} = 2$, então $\mathrm{d}(j, 1)$ é ímpar, e consequentemente $\mathrm{d}(t, 1)$ é par e assim $f_{tt} = 1$, caso contrário teríamos um ciclo de comprimento ímpar em 1, o que contraria a hipótese. Portanto

$$\sum_{k \in \mathcal{T}(\ell)} f_{kj} = f_{jj} = 2f_{tt},$$

o que prova que $f$ satisfaz o Teorema 4.2.1(ii). Se $f_{jj} = 1$, um argumento análogo conclui o mesmo resultado. Claramente $f$ respeita as condições (i) e (iii) do Teorema 4.2.1, assim $f \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}(G))$ e portanto $\dim \mathrm{Der}(\mathcal{A}(G)) = 1$. □

Para o caso em que o grafo é livre de gêmeos e $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, já havia sido provado em [9] que $\mathrm{Der}(\mathcal{A}(\mathcal{G})) = 0$. Uma consequência do próximo corolário é que esse resultado é sempre válido, com exceção das álgebras de evolução sobre corpos de característica três.

**Corolário 4.2.6.** *[18, Corolário 3.5]) Sejam* $\mathbb{K}$ *um corpo com* $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = p$ *e* $\mathcal{G} = (V, E)$ *um grafo. Então* $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A}(\mathcal{G})) = 0$ *para os seguintes casos.*

*(i) Se* $p \notin \{2, 3\}$ *e* $|\mathcal{T}(i)| \leq 2$*, para todo* $i \in V$.

*(ii) Se* $p = 2$ *e* $\mathcal{G}$ *é livre de gêmeos.*

*Demonstração.* Se $p = 0$, o resultado segue de [9, Tereoma 2.3]. Se $p \notin \{0, 2, 3\}$ e $d \in \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}(G))$ então pelo Lema 4.1.8, $d_{ij} = 0$ para todo $i, j \in V$ com $i \neq j$, o que implica que $d = 0$ pelo Corolário 4.2.3. Para provar o item (ii), note que se $d \in \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$, pelo Teorema 4.2.1 (i) temos que $d_{ij} = 0$ para todo $i, j \in V$ com $i \neq j$. Portanto, pelo Corolário 4.2.3, temos que $d = 0$. □

# BIBLIOGRAFIA


[1] ALSARAYREH, A.; QARALLEH, I.; AHMMAD, M. Z.; *Derivation of three dimensional evolution algebras.* JP J Algebra, Number Theory and Appl, 39(4), 425-444, 2017.

[2] BOUDI, N.; CABRERA, Y.; SILES, M.; *Natural families in evolution algebras*. Publ. Mat, 66(1), 159-181, 2022.

[3] CABRERA, Y.; *Evolution Algebras.* Tese (Doutorado em Matemática) - Facultad de Ciencias - Universidad de Málaga. Málaga, Espanha, 2016.

[4] CABRERA, Y.; KANUNI, M.; SILES, M.; *Basic ideals in evolution algebras*. Linear Algebra Appl., 570, 148-180, 2019.

[5] CABRERA, Y.; SILES, M.; VELASCO M. V.; *Evolution algebras of arbitrary dimension and their decomposition*. Linear Algebra Appl., 495, 122-162, 2016.

[6] CABRERA, Y.; CADAVID, P.; REIS, T.; *Derivations and loops of some evolutions algebras*. Submetido à publicação. 2022. Disponível em: https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.13657 Acesso em: 02 de maio de 2022

[7] CABRERA, Y.; GONÇALVES, D.; CARDOSO GONÇALVES, M. I.; BARQUERO, D. M.; *Chains in evolution algebras*. Linear Algebra Appl., 622, 104-149, 2021.

[8] CABRERA, Y.; CADAVID P.; RODIÑO MONTOYA, M. L.; RODRÍGUEZ, P.; *On the characterization of the space of derivations in evolution algebras*. Annali di Matematica, 200, 737-755, 2021.

[9] CADAVID, P.; RODIÑO MONOTYA, M. L.; Rodriguez, P. M.; *Characterization theorems for the spaces of derivations of evolution algebras associated to graphs.* Linear Multilinear Algebra, 68, 1340-1354, 2018.

[10] CAMACHO, L. M.; GÓMEZ, J. R.; OMIROV, B. A.; TURDIBAEV, R. M.; *The derivations of some evolution algebras*. Linear Multilinear Algebra, 61, 309-322, 2013.

[11] ELDUQUE, A.; LABRA A.; *On nilpotent evolution algebra.* Linear Algebra Appl., 505, 11-31, 2016.

[12] ELDUQUE, A.; LABRA A.; *Evolution algebras and graphs.* J. Algebra Appl., 14(07), 1550103, 2015.

[13] ELDUQUE, A.; LABRA, A.; *Evolution algebras, automorphisms, and graphs.* Linear Multilinear Algebra, 69(2), 331-342, 2019.

[14] JACOBSON, N.; *Lie algebras.* Dover Publications, Inc, New York, 1979.

[15] MUKHAMEDOV, F.; KHAKIMOV, O.; OMIROV, B. A.; Qaralleh, I.; *Derivations and automorphisms of nilpotent evolution algebras with maximal nilindex.* J. Algebra Appl, 18(12), 19502333, 2019.

[16] OUATTARA, M.; SAVADOGO, S.; *Power-associative evolution algebra.* Associative and Non-Associative Algebras and Applications. MAMAA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 311.

[17] QARALLEH, I.; MUKHAMEDOV, F.; *Volterra evolution algebras and their graphs*. Linear Multilinear Algebra, 69(2), 2228-2244, 2019.

[18] REIS, T.; CADAVID, P.; *Derivations of evolution algebras associated to graphs over a field of any characteristic*. Linear Multilinear Algebra, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1818673 Acesso em: 02 de maio de 2022

[19] TIAN, J. P.; *Evolution algebras and their applications*. Springer-Verlang, Berlin Heidelberg, 2008.

[20] TIAN, J. P.; VOJTECHOVSKY, P.; *Mathematical concepts of evolution algebras in Non-Mendelian genetics*. Quasigroups Related Systems, 14, 111-122, 2006.