Universidade Federal do ABC

Nazime Sales Filho

Simetrias e leis de conservação de equações de Novikov

Santo André, 2021

Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Nazime Sales Filho

Simetrias e leis de conservação de equações de Novikov

Orientador: Prof. Dr. Igor Leite Freire

Coorientadora: Profa. Dra. Priscila Leal da Silva

Tese de doutorado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Doutor em Matemática

Esta é a versão original da tese, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Santo André, 2021

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Sales Filho, Nazime
Simetrias e leis de conservação de equações de Novikov / Nazime Sales Filho. — 2021.

93 fls.

Orientador: Igor Leite Freire
Coorientadora: Priscila Leal da Silva

Tese (Doutorado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós Graduação em Matemática, Santo André, 2021.

1. equações de Novikov. 2. simetrias de Lie. 3. invariantes. 4. multiplicadores. 5. leis de conservação. I. Freire, Igor Leite. II. Silva, Priscila Leal da. III. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2021. IV. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).

Santo André , 10 de Dezembro de 2021 .

Nazime Sales Filho

Nome completo e Assinatura do(a) autor(a)

João Leite Freire

Nome completo e Assinatura do(a) (co)orientador(a)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato, NAZIME SALES FILHO realizada em 07 de Dezembro de 2021:

Priscila Leal da Silva

p/ **Prof.(a) ÉRICA DE MELLO SILVA**
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

Priscila Leal da Silva

p/ **Prof.(a) JÚLIO CÉSAR SANTOS SAMPAIO**
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Priscila Leal da Silva

p/ **Prof.(a) STYLIANOS DIMAS**
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

Priscila Leal da Silva

p/ **Prof.(a) ZHANNA GENNADYEVNA KUZNETSOVA**
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) ALCINDO TELES GALVÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Prof.(a) ALISSON DAROS SANTOS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

Prof.(a) ALTEMIR BORTULI JUNIOR

Prof.(a) MARCIO FABIANO DA SILVA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Priscila Leal da Silva

Prof.(a) PRISCILA LEAL DA SILVA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001"

À minha esposa Barbara
e minha mãe Nely,
com amor, dedico.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço a Deus, sem o qual nada disso seria possível.

Sou muito grato aos professores Igor Leite Freire e Priscila Leal da Silva. Primeiro por terem acreditado em mim e aceitado me guiar durante o desenvolvimento deste trabalho, sem dúvidas são pessoas na qual quero me espelhar. Segundo, por terem sido mais do que orientadores de cunho intelectual, mas também de motivação e apoio nas horas em que mais precisei acreditar em mim mesmo. Vocês são demais!

Agradeço a minha esposa Barbara por todo o companheirismo e por aguentar todas as minhas variações de humor e ausência durante todo o processo de minha formação. Agradeço minha mãe Nely, minha sogra Ana Maria e a todos os meus familiares pelas diversas formas de incentivo que recebi.

Aos amigos que fiz durante minha jornada na UFABC que sem dúvida alguma tornaram essa caminhada menos solitária e mais leve. Em especial, aos queridos Carlos e Ligia pelas diversas horas compartilhadas na discussão de exercícios, teorias e sobre a vida. Muito obrigado por tudo e que nossa amizade tenda ao infinito.

A todo pessoal da faculdade de engenharia FAENG/CUVG que direta ou indiretamente contribuíram para que eu pudesse desenvolver meu doutorado. Em particular, aqueles que diretamente me incentivaram desde o início ou me auxiliaram de alguma forma enquanto estava afastado da UFMT. Seria injusto esquecer de citar algum nome, portanto não o farei, mas estes sabem quem são.

Aos professores Érica de Mello Silva, Júlio César Santos Sampaio, Stylianos Dimas e Zhanna Gennadyevna Kuznetsova por terem aceitado avaliar meu trabalho e fornecido sugestões para a melhoria do mesmo.

Agradeço a todos os professores desse país que apesar das inúmeras dificuldades tentam formar uma sociedade menos ignorante. Em especial, aos que foram meus professores que sem dúvida foram essenciais para eu chegar até aqui.

"To explain all nature is too difficult a task for any one man or even for any one age. It is much better to do a little with certainty, and leave the rest for others that come after you, than to explain all things by conjecture without making sure of anything."

Isaac Newton

RESUMO

Neste trabalho estudamos aspectos estruturais de algumas equações diferenciais parciais com não linearidade quadrática. Uma vez que estabelecemos a base da teoria de Lie sobre grupos de transformações contínuos classificamos todas as simetrias de Lie, apresentamos como obter invariantes para, a partir deles, obter soluções particulares para as equações analisadas. Além disso, construímos via método direto um conjunto de leis de conservação para cada equação.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais, equações de Novikov, simetrias de Lie, invariantes, multiplicadores, leis de conservação.

ABSTRACT

In this work we study structural aspects of some partial differential equations with quadratic nonlinearities. We classify the Lie point symmetries of the equations and obtain some particular group invariant solutions. Also, we construct conservation laws for the equations using the direct method.

Keywords: Partial differential equations, Novikov equations, Lie symmetries, invariants, multipliers, conservation laws.

CONTEÚDO

1 INTRODUÇÃO

Equações são vitais para matemática, física, engenharia, tecnologia, enfim, para as ciências em geral. Em particular, as equações diferenciais parciais (EDPs) descrevem vários fenômenos fundamentais da física e codificam muitas informações do mundo real. Por exemplo, a equação diferencial parcial

$$u_t - u_{txx} = -3uu_x + 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \tag{1}$$

conhecida como equação de Camassa-Holm foi deduzida, enquanto modelo físico, no ano de 1993 em um trabalho sobre propagação de ondas em águas rasas [6]. Porém, essa equação foi descoberta por Fokas e Fuchssteiner [16] em 1981.

A equação (1) é de grande interesse em pesquisa, pois apresenta várias propriedades estruturais que a torna especial, tais como estrutura bi-hamiltoniana, infinitas leis de conservação, existência de par de Lax, soluções do tipo onda chamadas *peakon* e outras propriedades que podem ser encontradas em diversos trabalhos, veja [13, 18, 25] e suas referências. Deste modo, a equação (1) apresenta uma estrutura intrínseca muito rica e isso levou vários pesquisadores a estudarem equações da forma

$$u_t - u_{txx} = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \cdots), \tag{2}$$

que apresentam propriedades em comum com a equação (1). Não por acaso, nossos estudos iniciais com relação a teoria para escrever esta tese se deu a partir da equação

$$u_t - u_{txx} = -\lambda(u - u_{xx}) - 3u^2 u_x + uu_{xxx} + 2u_x u_{xx},$$

em que $\lambda > 0$ é uma constante. Nossos resultados para esta equação podem ser encontrados em [18].

Algumas das propriedades mencionadas, tais como estruturas bi-hamiltonianas e infinitas simetrias, são relacionadas à integrabilidade de equações diferenciais parciais. Embora a equação (1) tenha sido deduzida por uma motivação física, em [25] Novikov estudou e classificou algumas equações da forma (2) não por este motivo, mas para tentar classificar todas as equações do tipo (2) que potencialmente poderiam ser integráveis. Nesse estudo, Novikov obteve um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares de onde fazem parte as equações:

$$u_t - u_{txx} = 32uu_x - 8u_x u_{xx} - 8uu_{xxx} + 2u_{xx}u_{xxx}, \tag{3}$$

$$u_t - u_{txx} = 16uu_x - 8u_x u_{xx} + 2u_{xx}^2 - 4uu_{xxx} + 2u_x u_{xxx} \tag{4}$$

e

$$u_t - u_{txx} = 4uu_x + 2u_x^2 + 2uu_{xx} - 6u_x u_{xx} - 2uu_{xxx}. \tag{5}$$

Essas equações, até o momento, receberam pouca atenção, sendo que suas propriedades estruturais ou qualitativas são pouco conhecidas. Motivados por este fato, nosso objetivo com esta tese é abordar tais equações levando em consideração o pouco conhecimento sobre suas propriedades. Particularmente, neste trabalho estamos interessados em investigar os aspectos estruturais como simetrias de Lie e leis de conservação associadas com as equações (3), (4) e (5).

As simetrias de Lie de equações diferenciais surgiram quando Sophus Lie introduziu, nas décadas finais do século XIX, a noção de grupos de transformações contínuos com o objetivo de unificar e estender vários métodos de obtenção de soluções de equações diferenciais. Um grupo de simetrias de Lie para equações diferenciais são transformações que mapeiam qualquer solução de uma equação diferencial em outra solução da mesma equação, deixando-a invariante pela ação do grupo. Tais grupos de simetrias dependem apenas de parâmetros contínuos e consistem em transformações agindo no espaço de variáveis independentes e dependentes.

As leis de conservação associadas a uma equação diferencial são de grande importância para entendermos o comportamento do fenômeno descrito pela equação. De acordo com [1], algumas características que as leis de conservação apresentam são:

- descrevem quantidades físicas conservadas;
- são importantes para investigar propriedades de soluções e integrabilidade;
- são usadas na análise de estabilidade e comportamento global de soluções;
- checam a acurácia de soluções via métodos numéricos;

- são fundamentais no estudo de uma dada equação diferencial, no sentido de que se aplica a qualquer condição inicial e/ou de contorno dadas.

Assim, é de grande interesse que possamos conhecer leis de conservação vinculadas a uma determinada equação diferencial. No entanto, nem sempre é fácil ou trivial obtê-las.

Nesta tese, nosso objetivo é obter as simetrias de Lie e leis de conservação das equações de Novikov [25] com não linearidades quadráticas. Em particular, neste texto vamos enfatizar as equações (3), (4) e (5).

Aqui faremos alguns comentários sobre os cálculos apresentados neste trabalho. Embora seja completamente viável seguir os procedimentos algorítmicos descritos para encontrar simetrias de Lie e leis de conservação para nossas equações, esses cálculos podem se tornar difíceis de manusear para problemas envolvendo equações diferenciais parciais de ordem superior ou sistema de equações diferenciais. No entanto, podemos usar recursos computacionais para nos ajudar nesta parte. Em nossos cálculos utilizamos duas ferramentas computacionais para nos auxiliar na verificação dos resultados: o pacote computacional SYM [15] desenvolvido para o software Mathematica e o GeM [7–11] desenvolvido para o software Maple. Mais detalhes sobre essas ferramentas podem ser encontrados em [7–11, 15].

Para uma melhor compreensão do texto e identificação das contribuições, todos os **exemplos** apresentados neste trabalho são originais e são fruto do desenvolvimento da tese. Nossos resultados serão chamados de **Teorema**, enquanto **Proposição** se refere a resultados estabelecidos na literatura. Estruturamos esta tese da seguinte maneira:

- No Capítulo 2, apresentamos as noções necessárias para a compreensão básica da teoria de simetrias de Lie, bem como o procedimento algorítmico para que possamos obter geradores de simetrias de Lie para uma EDP. Apresentamos também como encontrar o grupo de transformações a um parâmetro conhecendo um determinado gerador de simetrias aplicando o primeiro teorema fundamental de Lie ou séries de Lie;

- No Capítulo 3, classificamos todas as simetrias de Lie relacionadas com as equações (3), (4) e (5);

- No Capítulo 4, utilizando geradores de simetrias de Lie, construímos invariantes e por meio destes obtemos soluções particulares, chamadas de solução invariante de uma EDP. Além disso, construímos o sistema ótimo para base de geradores de simetrias da equação (3) que também engloba as bases de geradores de simetrias das equações (4) e (5);

- No Capítulo 5, introduzimos noções básicas sobre leis de conservação. Também definimos a noção de multiplicadores, tais multiplicadores foram fundamentais para construção das leis de conservação associadas com as equações (3), (4) e (5) que são apresentadas neste capítulo. Ainda apresentamos neste capítulo algumas quantidades conservadas relacionadas com as equações;
- Por fim, fazemos nossas considerações finais no Capítulo 6.

2 SIMETRIAS DE LIE: UMA INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos uma introdução à teoria de simetrias de Lie que fornecerá os alicerces para construção das propriedades estruturais das equações

$$u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_xu_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx} = 0, \tag{6}$$

$$u_t - u_{txx} - 16uu_x + 8u_xu_{xx} - 2u_{xx}^2 + 4uu_{xxx} - 2u_xu_{xxx} = 0 \tag{7}$$

e

$$u_t - u_{txx} - 4uu_x - 2u_x^2 - 2uu_{xx} + 6u_xu_{xx} + 2uu_{xxx} = 0. \tag{8}$$

Para tanto, iniciaremos com algumas definições.

2.1 GRUPO DE TRANSFORMAÇÕES DE LIE A UM PARÂMETRO

O embasamento teórico do que apresentaremos daqui em diante pode ser encontrado nas referências [1,4,21–24,26]. Outras referências sobre simetrias, em língua portuguesa, podem ser encontradas nas teses [3,13,17,28].

Definição 2.1. *Um conjunto G não vazio munido de uma lei de composição $\varphi : G \times G \to G$ é dito ser um grupo, e denotado por (G, φ), se satisfaz aos seguintes axiomas:*

1. *(Associatividade) Se $a,\ b,\ c \in G$, então $\varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c)$;*
2. *(Elemento identidade) Existe um único elemento $e \in G$, tal que se $a \in G$, então $\varphi(a, e) = \varphi(e, a) = a$;*
3. *(Elemento inverso) Dado qualquer elemento $a \in G$, existe um único elemento inverso $a^{-1} \in G$ tal que $\varphi(a, a^{-1}) = \varphi(a^{-1}, a) = e$.*

Por exemplo, $(\mathbb{R}, +)$ é um dos grupos mais triviais e que será de grande importância no que se segue.

Agora definiremos grupos de transformações com relação a um parâmetro real e, posteriormente, um grupo de transformações de Lie a um parâmetro.

Definição 2.2. *Sejam $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e um parâmetro $\varepsilon \in I \subseteq \mathbb{R}$. O conjunto de transformações*

$$\begin{aligned} \overline{x} : \Omega \times I &\to \Omega \\ (x, \varepsilon) &\mapsto \overline{x} := X(x; \varepsilon), \end{aligned}$$

definido para cada $x \in \Omega$, com $\varphi : I \times I \to I$ definindo uma lei de composição, é dito ser um grupo de transformações a um parâmetro em Ω se:

1. *Para cada $\varepsilon \in I$ fixado, a transformação $X(x; \varepsilon)$ é bijetora em Ω;*

2. *O par (I, φ) é um grupo;*

3. *Para cada $x \in \Omega$, $\overline{x} = x$ quando $\varepsilon = e$, no qual e representa o elemento identidade de I, isto é,*

$$\overline{x} = X(x; e) = x;$$

4. *Se $\overline{x} = X(x; \varepsilon)$ e $\overline{\overline{x}} = X(\overline{x}; \delta)$, então*

$$\overline{\overline{x}} = X(x; \varphi(\varepsilon, \delta)).$$

Definição 2.3. *Um grupo de transformações a um parâmetro é chamado de grupo de transformações de Lie a um parâmetro se, adicionalmente às condições da Definição 2.2, tivermos que:*

1. *ε é um parâmetro contínuo, isto é, $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo;*

2. *$\overline{x}$ é infinitamente diferenciável com relação à $x \in \Omega$ e é uma função analítica de $\varepsilon \in I$;*

3. *φ é analítica.*

Exemplo 2.1. *Sejam $(t, x, u) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Temos que*

$$(\bar{t}, \overline{x}, \overline{u}) = X((t, x, u); \varepsilon) = (t, x + \varepsilon, u) \quad e \quad (\bar{t}, \overline{x}, \overline{u}) = X((t, x, u); \varepsilon) = (te^{\varepsilon}, x, ue^{-\varepsilon})$$

são grupos de transformações de Lie a um parâmetro de translação e dilação, respectivamente.

2.2 TRANSFORMAÇÕES INFINITESIMAIS

No intuito de apresentar alguns resultados e definições vamos considerar que

$$\overline{x} := X(x;\varepsilon) \tag{9}$$

é um grupo de transformações de Lie a um parâmetro com elemento identidade e e lei de composição φ. Assim, expandindo (9) em série de Taylor com respeito ao parâmetro ε em torno da identidade até a primeira ordem, obtemos:

$$\overline{x} = x + \left(\frac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=e} \right) (\varepsilon - e) + O((\varepsilon - e)^2).$$

Fazendo $\xi(x) = \dfrac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=e}$ temos que a aproximação linear

$$x \mapsto \overline{x} = x + \xi(x)(\varepsilon - e)$$

é denominada *transformação infinitesimal* do grupo de transformações de Lie a um parâmetro, sendo $\xi(x) = (\xi^1(x), \xi^2(x), \cdots, \xi^n(x))$ chamado de infinitésimo.

Exemplo 2.2. *Sejam $(t,x,u) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Considere o seguinte grupo de transformações de Lie a um parâmetro:*

$$(\overline{t}, \overline{x}, \overline{u}) = X((t,x,u);\varepsilon) = (te^{\varepsilon} + e^{\varepsilon} - 1, x + \varepsilon, -e^{-2x-2\varepsilon} + e^{-2x-\varepsilon} + ue^{-\varepsilon}). \tag{10}$$

Perceba que no grupo de transformações (10) o elemento identidade é $e = 0$ e, consequentemente, a lei de composição é $\varphi(a,b) = a + b$. Os infinitésimos associados a este grupo são

$$\xi^1(t,x,u) = \frac{\partial(te^{\varepsilon} + e^{\varepsilon} - 1)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = t + 1, \;\; \xi^2(t,x,u) = \frac{\partial(x+\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 1$$

e

$$\xi^3(t,x,u) = \frac{\partial(-e^{-2x-2\varepsilon} + e^{-2x-\varepsilon} + ue^{-\varepsilon})}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = e^{-2x} - u.$$

Em (10), se fizermos $e^{\varepsilon} = \lambda$ vamos obter o grupo de transformações de Lie a um parâmetro

$$(\overline{t}, \overline{x}, \overline{u}) = X((t,x,u);\lambda) = (\lambda(t+1) - 1, x + ln\,\lambda, \lambda^{-1}(e^{-2x} + u) - \lambda^{-2}e^{-2x}), \tag{11}$$

com $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Note que o elemento identidade desse grupo é $e = 1$, logo, a lei de composição é $\varphi(a,b) = ab$. Além disso, os infinitésimos relacionados com (11) são

$$\xi^1(t,x,u) = \frac{\partial(\lambda(t+1) - 1)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=1} = t + 1, \;\; \xi^2(t,x,u) = \frac{\partial(x + ln\,\lambda)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=1} = 1$$

e

$$\xi^3(t,x,u) = \frac{\partial(\lambda^{-1}(e^{-2x} + u) - \lambda^{-2}e^{-2x})}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=1} = e^{-2x} - u.$$

Veja que os infinitésimos do grupo (11), que tem lei de composição multiplicativa, são exatamente os mesmos do grupo (10), que possui lei de composição aditiva. Mas, isso seria apenas uma coincidência? A resposta é que isso não acontece por acaso. A justificativa será dada pelo próximo resultado, que mostra ser sempre possível (re)parametrizar um dado grupo de transformações de Lie a um parâmetro, com lei de composição não aditiva, em termos de um parâmetro $\tau \in I$ tal que a lei de composição passe a ser aditiva, isto é, $\varphi(a, b) = a + b$.

Proposição 2.1 (Primeiro Teorema Fundamental de Lie)**.** *Existe uma parametrização $\tau(\varepsilon)$ tal que o grupo de transformações (9) é equivalente à solução de um problema de valor inicial para o sistema de equações diferenciais de primeira ordem:*

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{d\tau} = \xi(\overline{x}), \\ \overline{x}(0) = x. \end{cases} \tag{12}$$

Em particular,

$$\tau(\varepsilon) = \int_e^{\varepsilon} \Gamma(t)\, dt,$$

em que

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\partial\varphi(a, b)}{\partial b}\bigg|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}$$

e

$$\Gamma(e) = 1.$$

Demonstração. Veja [4], página 37. □

Exemplo 2.3. *Considere o grupo de transformações de Lie a um parâmetro*

$$(\bar{t}, \overline{x}, \overline{u}) = X((t, x, u); \lambda) = (\lambda(t + 1) - 1, x + ln\, \lambda, \lambda^{-1}(e^{-2x} + u) - \lambda^{-2}e^{-2x}),$$

com $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Vimos no Exemplo 2.2 que este grupo tem como elemento identidade $e = 1$, lei de composição $\varphi(a, b) = ab$ e os infinitésimos associados sendo os mesmos que do grupo (10). E isso está acontecendo porque podemos, via Proposição 2.1, reparametrizar o grupo (11) e obter o grupo (10). De fato, os elementos identidade e inverso do grupo (11) são $e = 1$ e $\lambda^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}$, respectivamente. Logo, pela Proposição 2.1, temos que

$$\Gamma(\lambda) = \frac{\partial\varphi(a, b)}{\partial b}\bigg|_{(a,b)=(\lambda^{-1},\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \quad e \quad \Gamma(1) = 1. \tag{13}$$

Usando (13) obtemos que

$$\tau(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{1}{\varepsilon}\, d\varepsilon = ln(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\lambda} = ln(\lambda) \Rightarrow \lambda = e^\tau. \tag{14}$$

Com isso, de (14) podemos reparametrizar o grupo de transformações (11) e obter o grupo de transformações

$$(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) = X((t, x, u); \tau) = (te^\tau + e^\tau - 1, x + \tau, -e^{-2x-2\tau} + e^{-2x-\tau} + ue^{-\tau})$$

que é exatamente o grupo de transformações (10) cuja lei de composição é $\varphi(a, b) = a + b$.

Além disso, o Teorema Fundamental de Lie mostra que:

- as transformações infinitesimais possuem informação essencial para a determinação do grupo de transformações de Lie a um parâmetro;
- as transformações (9) definem um fluxo estacionário dado por (12), e reciprocamente, qualquer fluxo estacionário dado por (12) define um grupo de transformações de Lie a um parâmetro.

2.3 GERADORES INFINITESIMAIS

Apoiados pela Proposição 2.1, daqui em diante, assumiremos que um grupo de transformações de Lie a um parâmetro é parametrizado de modo que sua lei de composição seja $\varphi(a, b) = a + b$, o que implica em $\varepsilon^{-1} = -\varepsilon$, $e = 0$ e $\Gamma(0) = 1$. Dessa forma, em termos dos infinitésimos $\xi(x)$, o grupo de transformações de Lie (9) é totalmente descrito pelo problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{d\tau} = \xi(\bar{x}), \\ \bar{x}(0) = x. \end{cases}$$

Definição 2.4. *O operador diferencial*

$$X = X(x) := \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{15}$$

em que $\xi^i(x) = \dfrac{\partial X^i(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$, é chamado de gerador infinitesimal do grupo de transformações de Lie a um parâmetro (9).

Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então aplicando o operador dado por (15) em F, temos

$$XF(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} F(x).$$

Em particular,

$$Xx = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) e_i = \xi(x).$$

Proposição 2.2 (Série de Lie). *O grupo de transformações de Lie a um parâmetro (9) é equivalente a*

$$\overline{x} = e^{\varepsilon X} x = x + \varepsilon X x + \frac{\varepsilon^2}{2} X^2 x + \cdots = \left(1 + \varepsilon X + \frac{\varepsilon^2}{2} X^2\right) x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k x,$$

em que X é o operador definido em (15) e o operador $X^k = XX^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, sendo $X^0 F(x) = F(x)$ para qualquer função diferenciável $F(x)$.

Demonstração. Veja [4], página 41. □

Note que as Proposições 2.1 e 2.2 fornecem duas ferramentas equivalentes para encontrar explicitamente um grupo de transformações de Lie a um parâmetro. De maneira mais clara:

1. por meio da solução explícita do problema de valor inicial (12);
2. expressando o grupo por meio da chamada série de Lie dada pela Proposição 2.2 que é construída a partir do gerador infinitesimal (15).

Além disso, elas caracterizam univocamente um grupo de transformações por meio de seu gerador infinitesimal.

Exemplo 2.4. *Considere o seguinte gerador infinitesimal*

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + e^{2x} \frac{\partial}{\partial u} \tag{16}$$

definido em $\mathbb{R}^3$, com coordenadas (t, x, u). Encontraremos o grupo de transformações de Lie a um parâmetro associado com o gerador infinitesimal (16) utilizando as Proposições 2.1 e 2.2:

1. *Note que do gerador infinitesimal (16) obtemos que $\xi(t, x, u) = (1, 1, e^{2x})$, logo*

$$\frac{d\overline{t}}{d\varepsilon} = 1 \Longrightarrow d\overline{t} = d\varepsilon \Longrightarrow \overline{t} = \varepsilon + c_0, \tag{17}$$

em que c_0 *é uma constante, com relação a* ε, *a ser determinada. Assim, pela condição inicial* $\bar{t}(0) = t$, *obtemos* $\bar{t} = t + \varepsilon$.

Para variável $\overline{x}$, *de modo análogo a* (17), *obtemos* $\overline{x} = x + \varepsilon$. *Por outro lado, para variável* $\overline{u}$, *temos que*

$$\frac{d\overline{u}}{d\varepsilon} = e^{2\overline{x}} = e^{2x+2\varepsilon} \Longrightarrow e^{-2x} d\overline{u} = e^{2\varepsilon} d\varepsilon \Longrightarrow \overline{u} = \frac{1}{2} e^{2x+2\varepsilon} + e^{2x} c_1,$$

em que c_1 *é uma constante, com relação a* ε, *a ser determinada. Com isso, pela condição inicial* $\overline{u}(0) = u$, *obtemos*

$$\overline{u} = u + \frac{1}{2} e^{2x+2\varepsilon} - \frac{1}{2} e^{2x}.$$

Portanto, pela Proposição 2.1, *temos o seguinte grupo de transformações de Lie a um parâmetro:*

$$(\bar{t}, \overline{x}, \overline{u}) = X((t, x, u); \varepsilon) = \left(t + \varepsilon, x + \varepsilon, u + \frac{1}{2} e^{2x+2\varepsilon} - \frac{1}{2} e^{2x} \right). \tag{18}$$

2. *Agora vamos utilizar a Proposição* 2.2. *Para tanto, façamos*

$$(\bar{t}, \overline{x}, \overline{u}) = e^{\varepsilon X}(t, x, u) = (e^{\varepsilon X} t, e^{\varepsilon X} x, e^{\varepsilon X} u).$$

Consequentemente,

(i)

$$Xt = 1 \Longrightarrow X^2 t = 0 \Longrightarrow e^{\varepsilon X} t = t + \varepsilon;$$

(ii)

$$Xx = 1 \Longrightarrow X^2 x = 0 \Longrightarrow e^{\varepsilon X} x = x + \varepsilon;$$

(iii)

$$\begin{aligned}
Xu &= e^{2x}, \\
X^2 u &= X(e^{2x}) = 2^1 e^{2x}, \\
X^3 u &= X(2e^{2x}) = 2^2 e^{2x}, \\
X^4 u &= X(2^2 e^{2x}) = 2^3 e^{2x}, \\
&\vdots \\
X^k u &= X(2^{k-2} e^{2x}) = 2^{k-1} e^{2x}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
e^{\varepsilon X}u &= u + \varepsilon e^{2x} + 2\frac{\varepsilon^2}{2!}e^{2x} + 2^2\frac{\varepsilon^3}{3!}e^{2x} + \cdots + 2^{k-1}\frac{\varepsilon^k}{k!}e^{2x} + \cdots \\
&= u + e^{2x}\left(\varepsilon + 2\frac{\varepsilon^2}{2!} + 2^2\frac{\varepsilon^3}{3!} + \cdots + 2^{k-1}\frac{\varepsilon^k}{k!} + \cdots\right) \\
&= u + e^{2x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\frac{\varepsilon^k}{k!}\right) = u + \frac{e^{2x}}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2\varepsilon)^k}{k!}\right) \\
&= u + \frac{e^{2x}}{2}(e^{2\varepsilon} - 1) = u + \frac{1}{2}e^{2x+2\varepsilon} - \frac{1}{2}e^{2x}.
\end{aligned}
$$

Portanto, de (*i*)*,* (*ii*) *e* (*iii*) *obtemos o seguinte grupo de transformações de Lie a um parâmetro:*

$$
(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) = X((t, x, u); \varepsilon) = \left(t + \varepsilon, x + \varepsilon, u + \frac{1}{2}e^{2x+2\varepsilon} - \frac{1}{2}e^{2x}\right). \tag{19}
$$

Perceba que a partir do gerador infinitesimal (16) e usando as Proposições 2.1 e 2.2 obtemos o mesmo grupo de transformações (18) e (19). Além disso, do grupo obtido podemos retornar para o gerador infinitesimal (16). De fato,

$$
\begin{aligned}
\xi(t, x, u) &= \left.\frac{\partial X((t, x, u); \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(t + \varepsilon, x + \varepsilon, u + \frac{1}{2}e^{2x+2\varepsilon} - \frac{1}{2}e^{2x}\right)\right|_{\varepsilon=0} = (1, 1, e^{2x}),
\end{aligned}
$$

o que implica em

$$
X = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + e^{2x}\frac{\partial}{\partial u}.
$$

2.4 FUNÇÕES INVARIANTES

Definição 2.5. *Uma função infinitamente diferenciável* $F(x)$ *definida em um aberto* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *é invariante sob um grupo de transformações de Lie* (9) *se, e somente se,*

$$
F(\bar{x}) \equiv F(x), \ \text{onde}\ \bar{x} = X(x; \varepsilon).
$$

Se $F(x)$ *é uma função invariante por* (9)*, então a chamamos de um invariante do grupo de transformações* (9) *e* $F(x)$ *é dita ser invariante com relação a* (9)*.*

Proposição 2.3. *A função $F(x)$ é invariante com relação a um grupo de transformações de Lie a um parâmetro (9) se, e somente se, $XF(x) \equiv 0$.*

Demonstração. Veja [4], página 43. □

Exemplo 2.5. *Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(t, x, u) = u - \frac{1}{2}e^{2x}$. Consideremos o gerador infinitesimal (16) e o grupo de transformações de Lie a um parâmetro (19). Então,*

$$F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) = \bar{u} - \frac{1}{2}e^{2\bar{x}} = u + \frac{1}{2}e^{2x+2\varepsilon} - \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x+2\varepsilon} = u - \frac{1}{2}e^{2x} = F(t, x, u).$$

Portanto, a função $F(t, x, u) = u - \frac{1}{2}e^{2x}$ é invariante com relação a (19). Além disso,

$$XF(t, x, u) = \frac{\partial}{\partial t}F(t, x, u) + \frac{\partial}{\partial x}F(t, x, u) + e^{2x}\frac{\partial}{\partial u}F(t, x, u) = -e^{2x} + e^{2x} = 0.$$

2.5 TRANSFORMAÇÕES ESTENDIDAS

Sejam $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $u = u(x) \in \mathbb{R}$. Considere o grupo de transformações de Lie a um parâmetro

$$x^* = X(x, u; \varepsilon), \; u^* = U(x, u; \varepsilon), \tag{20}$$

atuando no espaço de $n+1$ variáveis $(x^1, x^2, \cdots, x^n, u)$, com x representando as variáveis independentes e u a variável dependente.

Seja $\partial^k u$, com $k \in \mathbb{N}$, o conjunto de todas as derivadas parciais de ordem k da variável u em relação a x. Utilizaremos a seguinte notação para representar as derivadas parciais de ordem k de u:

$$u_{i_1 i_2 \cdots i_k} := \frac{\partial^k u}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \cdots \partial x^{i_k}} \quad \text{com} \quad i_j = 1, 2, \cdots, n \quad \text{e} \quad j = 1, 2, \cdots, k.$$

Dada uma equação diferencial parcial $E = E(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0$, de ordem k, um grupo de transformações de Lie (20) associado com a equação diferencial $E = 0$ mapeia qualquer solução $u = \Psi(x)$ de $E = 0$ em outra solução $u = \psi(x; \varepsilon)$ da mesma equação, de modo que as transformações (20) deixem a equação diferencial $E = 0$ invariante.

Uma vez que estamos interessados na invariância da equação $E = 0$, naturalmente nos deparamos com o problema de estender a atuação do grupo de transformações

(20) no espaço (x, u) para o espaço $(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u)$ de modo que o grupo de transformações obtido continue transformando soluções da equação diferencial parcial $E = 0$ em outras soluções da mesma equação. De maneira análoga, podemos pensar no prolongamento das transformações infinitesimais correspondentes ao grupo de transformações de Lie. Verificaremos que tais extensões são fundamentais para obtermos o grupo de transformações de Lie a um parâmetro de uma equação diferencial $E = 0$. Faremos a exposição do processo para tais prolongamentos. Para tanto, tomemos o grupo de transformações de Lie a um parâmetro (20).

Pela Definição 2.2 as transformações (20) são bijetoras em algum domínio D do espaço (x, u) e assumiremos que também sejam k vezes diferenciáveis em D. Assim, as transformações (20) preservam as condições de contato

$$\begin{aligned} du &= \partial u dx, \\ &\vdots \\ d\partial^{k-1} u &= \partial^k u dx, \end{aligned} \tag{21}$$

em algum domínio D do espaço $(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} du^* &= \partial u^* dx^*, \\ &\vdots \\ d\partial^{k-1} u^* &= \partial^k u^* dx^*, \end{aligned} \tag{22}$$

em algum domínio D^* do espaço $(x^*, u^*, \partial u^*, \partial^2 u^*, \cdots, \partial^k u^*)$.

De modo a expressar explicitamente as condições de contato vamos definir

$$u_i := \frac{\partial u}{\partial x^i}, \; u_i^* := \frac{\partial u^*}{\partial x^{*i}} = \frac{\partial U}{\partial X^i}, \cdots.$$

Daqui em diante assumiremos a notação de Einstein para soma sobre os índices repetidos, ou seja, as condições (21) são reescritas como

$$\begin{aligned} du &= u_i dx^i, \\ &\vdots \\ du_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} &= u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} j} dx^j, \end{aligned} \tag{23}$$

com $i_l = 1, 2, \cdots, n$ e $l = 1, 2, \cdots, k-1$. De maneira análoga, obtemos as representações de soma para (22).

Definição 2.6. *Seja $F = F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u)$ uma função, em que $u = u(x)$ é suficientemente diferenciável. Dizemos que F é uma função diferencial se F é localmente analítica, isto é, pode ser expandida localmente em série de Taylor em cada uma de suas variáveis. A maior ordem das derivadas que aparecem na função diferencial é chamada ordem desta função. Denotaremos por $\mathcal{A}$ o espaço vetorial de todas as funções diferenciais de ordem finita.*

Definição 2.7. *Dada uma função diferencial $F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u)$ de ordem k, a derivada total de F, denotada por $D_i F$, é dada por*

$$D_i F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) = \frac{\partial F}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial F}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial F}{\partial u_j} + \cdots + u_{i i_1 i_2 \cdots i_n} \frac{\partial F}{\partial u_{i_1 i_2 \cdots i_n}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

O operador

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \cdots + u_{i i_1 i_2 \cdots i_n} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \cdots i_n}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{24}$$

é chamado de operador de derivação total.

Nossa intenção é obter a transformação prolongada

$$u_j^* = U_j(x, u, \partial u; \varepsilon), \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Observe que do grupo (20) e de (23) conseguimos os seguintes diferenciais

$$\begin{aligned} dx^{*j} = dX^j = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial X^j}{\partial u} du &= \frac{\partial X^j}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial X^j}{\partial u} u_i dx^i \\ = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} dx^i + u_i \frac{\partial X^j}{\partial u} dx^i &= \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial X^j}{\partial u} \right) dx^i \\ = \left(D_i X^j \right) dx^i & \end{aligned} \tag{25}$$

e, analogamente,

$$du^* = dU = (D_i U) \, dx^i. \tag{26}$$

Além disso, das condições de contato temos que

$$du^* = \partial u^* dx^* = u_j^* dx^{*j} = U_j dX^j. \tag{27}$$

Então, de (25)-(27) concluímos que

$$D_i U = U_j \left(D_i X^j \right), \ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{28}$$

Seja a matriz A, $n \times n$, tal que

$$A := \begin{bmatrix} D_1X^1 & \cdots & D_1X^n \\ \vdots & & \vdots \\ D_nX^1 & \cdots & D_nX^n \end{bmatrix}.$$

Assim, como A é invertível, segue que

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1U \\ \vdots \\ D_nU \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Desta forma, obtemos o prolongamento do grupo de transformações (20) para o grupo de transformações

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,u;\varepsilon), \\ u^* &= U(x,u;\varepsilon), \\ \partial u^* &= \partial U(x,u,\partial u;\varepsilon), \end{aligned}$$

em que $\partial u^* = (u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*)$ e u_j^*, $j = 1, 2, \cdots, n$, é dado em (29).

De modo geral, obtemos o k-ésimo prolongamento do grupo (20) para o espaço $(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u)$ dado por

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,u;\varepsilon), \\ u^* &= U(x,u;\varepsilon), \\ \partial u^* &= \partial U(x,u,\partial u;\varepsilon), \\ &\vdots \\ \partial^k u^* &= \partial U(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u;\varepsilon), \end{aligned}$$

em que as componentes de $\partial^k u^*$ são determinadas por (29) no caso $k = 1$ e para $k \geq 2$ por

$$\begin{bmatrix} u^*_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1} \\ \vdots \\ u^*_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1} \\ \vdots \\ U_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_n U i_1 i_2 \cdots i_{k-1} \end{bmatrix}, \tag{30}$$

com $i_l = 1, 2, \cdots, k-1$, $l = 1, 2, \cdots, k-1$ e $k \geq 2$.

De maneira análoga ao prolongamento do grupo de transformações de Lie a um parâmetro (20), podemos prolongar as transformações infinitesimais associadas a este grupo. De fato, em termos de infinitesimais podemos representar o grupo (20) como

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,u;\varepsilon) = x + \varepsilon\xi(x,u) + O(\varepsilon^2), \\ u^* &= U(x,u;\varepsilon) = u + \varepsilon\eta(x,u) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{31}$$

atuando no espaço (x,u) e com gerador infinitesimal

$$X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \; i = 1,2,\cdots,n. \tag{32}$$

O k-ésimo prolongamento de (31) é dado por

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,u;\varepsilon) = x + \varepsilon\xi(x,u) + O(\varepsilon^2), \\ u^* &= U(x,u;\varepsilon) = u + \varepsilon\eta(x,u) + O(\varepsilon^2), \\ u_i^* &= U_i(x,u,\partial u;\varepsilon) = u_i + \varepsilon\eta_i^{(1)}(x,u,\partial u) + O(\varepsilon^2), \\ &\vdots \\ u_{i_1\cdots i_k}^* &= U_{i_1\cdots i_k}(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u;\varepsilon) = u_{i_1\cdots i_k} + \varepsilon\eta_{i_1\cdots i_k}^{(k)}(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

em que $i = 1,2,\cdots,n$, $i_l = 1,2,\cdots,n$ com $l = 1,2,\cdots,k$ e $k \geq 1$. E o k-ésimo prolongamento de (32) é

$$X^{(k)} = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u_i} + \cdots + \eta_{i_1\cdots i_k}^{(k)}(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u)\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_k}}. \tag{33}$$

Os infinitésimos prolongados $\eta^{(k)}$ são obtidos a partir do seguinte resultado:

Proposição 2.4. *Os infinitésimos prolongados satisfazem as relações de recursão*

$$\begin{aligned} \eta_i^{(1)} &= D_i\eta - (D_i\xi^j)u_j, \\ \eta_{i_1\cdots i_k}^{(k)} &= D_i\eta_{i_1\cdots i_k}^{(k-1)} - (D_i\xi^j)u_{i_1\cdots i_{k-1}j}, \end{aligned}$$

em que $i = 1,2,\cdots,n$, $i_l = 1,2,\cdots,n$, *com* $l = 1,2,\cdots,k$ *e* $k \geq 2$.

Demonstração. Veja [4], página 67. □

Exemplo 2.6. *Considere o gerador infinitesimal (32) com os infinitésimos sendo funções diferenciais dependentes das variáveis* t, x *e* u. *O prolongamento de terceira ordem desse gerador é*

$$\begin{aligned} X^{(3)} = \xi^t\frac{\partial}{\partial t} + \xi^x\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta_t^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_t} + \eta_x^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_{tt}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \eta_{tx}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{tx}} + \eta_{xx}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} \\ + \eta_{ttt}^{(3)}\frac{\partial}{\partial u_{ttt}} + \eta_{txt}^{(3)}\frac{\partial}{\partial u_{txt}} + \eta_{txx}^{(3)}\frac{\partial}{\partial u_{txx}} + \eta_{xxx}^{(3)}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} \end{aligned} \tag{34}$$

e os infinitésimos prolongados obtidos por meio da Proposição 2.4 são

$$\begin{aligned}\eta_t^{(1)} &= D_t\eta - u_t D_t\xi^t - u_x D_t\xi^x \\ &= \eta_t + (\eta_u - \xi_t^t)u_t - \xi_t^x u_x - \xi_u^t u_t^2 - \xi_u^x u_t u_x,\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\eta_x^{(1)} &= D_x\eta - u_t D_x\xi^t - u_x D_x\xi^x \\ &= \eta_x + (\eta_u - \xi_x^x)u_x - \xi_x^t u_t - \xi_u^x u_x^2 - \xi_u^t u_t u_x,\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\eta_{tt}^{(2)} &= D_t\eta_t^{(1)} - u_{tt}D_t\xi^t - u_{tx}D_t\xi^x \\ &= \eta_{tt} + (2\eta_{tu} - \xi_{tt}^t)u_t - \xi_{tt}^x u_x - 2\xi_{tu}^x u_t u_x + (\eta_{uu} - 2\xi_{tu}^t)u_t^2 - \xi_{uu}^x u_x u_t^2 - \xi_{uu}^t u_t^3 \\ &+ (\eta_u - 2\xi_t^t)u_{tt} - 3\xi_u^t u_{tt}u_t - \xi_u^x u_{tt}u_x - 2\xi_t^x u_{tx} - 2\xi_u^x u_{tx}u_t,\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\eta_{tx}^{(2)} &= D_x\eta_t^{(1)} - u_{tt}D_x\xi^t - u_{tx}D_x\xi^x \\ &= \eta_{tx} + (\eta_{xu} - \xi_{tx}^t)u_t + (\eta_{tu} - \xi_{tx}^x)u_x - \xi_{xu}^t u_t^2 + (\eta_{uu} - \xi_{tu}^t - \xi_{xu}^x)u_t u_x - \xi_{tu}^x u_x^2 \\ &- \xi_{uu}^t u_x u_t^2 - \xi_{uu}^x u_t u_x^2 + (\eta_u - \xi_t^t - \xi_x^x)u_{tx} - 2\xi_u^t u_t u_{tx} - 2\xi_u^x u_x u_{tx} - \xi_t^x u_{xx} \\ &- \xi_u^x u_t u_{xx} - \xi_x^t u_{tt} - \xi_u^t u_x u_{tt},\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\eta_{xx}^{(2)} &= D_x\eta_x^{(1)} - u_{xt}D_x\xi^t - u_{xx}D_x\xi^x \\ &= \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{xx}^x)u_x - \xi_{xx}^t u_t - 2\xi_{xu}^t u_t u_x + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu}^x)u_x^2 - \xi_{uu}^t u_t u_x^2 - \xi_{uu}^x u_x^3 \\ &+ (\eta_u - 2\xi_x^x)u_{xx} - 3\xi_u^x u_{xx}u_x - \xi_u^t u_{xx}u_t - 2\xi_x^t u_{tx} - 2\xi_u^t u_{tx}u_x,\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\eta_{ttt}^{(3)} &= D_t\eta_{tt}^{(2)} - u_{ttt}D_t\xi^t - u_{ttx}D_t\xi^x \\ &= \eta_{ttt} + (3\eta_{ttu} - \xi_{ttt}^t)u_t - \xi_{ttt}^x u_x - 3\xi_{ttu}^x u_t u_x + (3\eta_{tuu} - 3\xi_{ttu}^t)u_t^2 - 3\xi_{tuu}^x u_x u_t^2 \\ &+ (\eta_{uuu} - 3\xi_{tuu}^t)u_t^3 + (3\eta_{tu} - 3\xi_{tt}^t)u_{tt} + (3\eta_{uu} - 9\xi_{tu}^t)u_t u_{tt} - 3\xi_{tu}^x u_x u_{tt} \\ &- 3\xi_{tt}^x u_{tx} - 6\xi_{tu}^x u_t u_{tx} - \xi_{uuu}^x u_x u_t^3 - \xi_{uuu}^t u_t^4 - 6\xi_{uu}^t u_t^2 u_{tt} - 3\xi_{uu}^x u_t u_x u_{tt} \\ &- 3\xi_{uu}^x u_t^2 u_{tx} - 3\xi_u^t u_{tt}^2 - 3\xi_u^x u_{tx}u_{tt} + (\eta_u - 3\xi_t^t)u_{ttt} - 4\xi_u^t u_t u_{ttt} - \xi_u^x u_x u_{ttt} \\ &- 3\xi_t^x u_{ttx} - 3\xi_u^x u_t u_{ttx},\end{aligned} \tag{40}$$

$$
\begin{aligned}
\eta^{(3)}_{txt} &= D_t\eta^{(2)}_{tx} - u_{txt}D_t\xi^t - u_{txx}D_t\xi^x \\
&= \eta_{ttx} + (2\eta_{txu} - \xi^t_{ttx})u_t + (\eta_{ttu} - \xi^x_{ttx})u_x + (\eta_{xuu} - 2\xi^t_{txu})u_t^2 - \xi^x_{ttu}u_x^2 \\
&+ (2\eta_{tuu} - \xi^t_{ttu} - 2\xi^x_{txu})u_tu_x + (\eta_{uuu} - 2\xi^t_{tuu} - \xi^x_{xuu})u_t^2u_x - 2\xi^x_{tuu}u_tu_x^2 \\
&+ (2\eta_{tu} - \xi^t_{tt} - 2\xi^x_{tx})u_{tx} + (2\eta_{uu} - 4\xi^t_{tu} - 2\xi^x_{xu})u_tu_{tx} - 4\xi^x_{tu}u_xu_{tx} - \xi^x_{tt}u_{xx} \\
&- 2\xi^x_{tu}u_tu_{xx} + (\eta_{xu} - 2\xi^t_{tx})u_{tt} + (\eta_{uu} - 2\xi^t_{tu} - \xi^x_{xu})u_xu_{tt} - \xi^t_{xuu}u_t^3 \\
&- \xi^t_{uuu}u_xu_t^3 - \xi^x_{uuu}u_t^2u_x^2 - 3\xi^t_{uu}u_t^2u_{tx} - 4\xi^x_{uu}u_tu_xu_{tx} - \xi^x_{uu}u_t^2u_{xx} - 3\xi^t_{xu}u_tu_{tt} \\
&- 3\xi^t_{uu}u_tu_xu_{tt} - \xi^x_{uu}u_x^2u_{tt} - 3\xi^t_{u}u_{tx}u_{tt} - \xi^x_{u}u_{tt}u_{xx} - 2\xi^x_{u}u_{tx}^2 - \xi^t_{x}u_{ttt} - \xi^t_{u}u_xu_{ttt} \\
&+ (\eta_u - 2\xi^t_t - \xi^x_x)u_{ttx} - 3\xi^t_uu_tu_{ttx} - 2\xi^x_uu_xu_{ttx} - 2\xi^x_tu_{txx} - 2\xi^x_uu_tu_{txx},
\end{aligned}
\tag{41}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta^{(3)}_{txx} &= D_x\eta^{(2)}_{tx} - u_{txt}D_x\xi^t - u_{txx}D_x\xi^x \\
&= \eta_{txx} + (2\eta_{txu} - \xi^x_{txx})u_x + (\eta_{xxu} - \xi^t_{txx})u_t + (\eta_{tuu} - 2\xi^x_{txu})u_x^2 - \xi^t_{xxu}u_t^2 \\
&+ (2\eta_{xuu} - \xi^x_{xxu} - 2\xi^t_{txu})u_tu_x + (\eta_{uuu} - 2\xi^x_{xuu} - \xi^t_{tuu})u_x^2u_t - 2\xi^t_{xuu}u_xu_t^2 \\
&+ (2\eta_{xu} - \xi^x_{xx} - 2\xi^t_{tx})u_{tx} + (2\eta_{uu} - 4\xi^x_{xu} - 2\xi^t_{tu})u_xu_{tx} - 4\xi^t_{xu}u_tu_{tx} - \xi^t_{xx}u_{tt} \\
&- 2\xi^t_{xu}u_xu_{tt} + (\eta_{tu} - 2\xi^x_{tx})u_{xx} + (\eta_{uu} - 2\xi^x_{xu} - \xi^t_{tu})u_tu_{xx} - \xi^x_{tuu}u_x^3 \\
&- \xi^x_{uuu}u_tu_x^3 - \xi^t_{uuu}u_t^2u_x^2 - 3\xi^x_{uu}u_x^2u_{tx} - 4\xi^t_{uu}u_tu_xu_{tx} - \xi^t_{uu}u_x^2u_{tt} - 3\xi^x_{tu}u_xu_{xx} \\
&- 3\xi^x_{uu}u_tu_xu_{xx} - \xi^t_{uu}u_t^2u_{xx} - 3\xi^x_uu_{tx}u_{xx} - \xi^t_uu_{tt}u_{xx} - 2\xi^t_uu_{tx}^2 - \xi^x_tu_{xxx} \\
&- \xi^x_uu_tu_{xxx} + (\eta_u - 2\xi^x_x - \xi^t_t)u_{txx} - 3\xi^x_uu_xu_{txx} - 2\xi^t_uu_tu_{txx} - 2\xi^t_xu_{ttx} \\
&- 2\xi^t_uu_xu_{ttx},
\end{aligned}
\tag{42}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta^{(3)}_{xxx} &= D_x\eta^{(2)}_{xx} - u_{xxt}D_x\xi^t - u_{xxx}D_x\xi^x \\
&= \eta_{xxx} + (3\eta_{xxu} - \xi^x_{xxx})u_x - \xi^t_{xxx}u_t - 3\xi^t_{xxu}u_tu_x + (3\eta_{xuu} - 3\xi^x_{xxu})u_x^2 \\
&- 3\xi^t_{xuu}u_tu_x^2 + (\eta_{uuu} - 3\xi^x_{xuu})u_x^3 + (3\eta_{xu} - 3\xi^x_{xx})u_{xx} + (3\eta_{uu} - 9\xi^x_{xu})u_xu_{xx} \\
&- 3\xi^t_{xu}u_tu_{xx} - 3\xi^t_{xx}u_{tx} - 6\xi^t_{xu}u_xu_{tx} - \xi^t_{uuu}u_tu_x^3 - \xi^x_{uuu}u_x^4 - 6\xi^x_{uu}u_x^2u_{xx} \\
&- 3\xi^t_{uu}u_tu_xu_{xx} - 3\xi^t_{uu}u_x^2u_{tx} - 3\xi^x_uu_{xx}^2 - 3\xi^t_uu_{tx}u_{xx} + (\eta_u - 3\xi^x_x)u_{xxx} \\
&- 4\xi^x_uu_xu_{xxx} - \xi^t_uu_tu_{xxx} - 3\xi^t_xu_{txx} - 3\xi^t_uu_xu_{txx},
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Exemplo 2.7. *Considerando o gerador infinitesimal* $X = t\dfrac{\partial}{\partial t} - u\dfrac{\partial}{\partial u}$*, temos que* $\xi^t = t$*,* $\xi^x = 0$ *e* $\eta = -u$*. Logo, das expressões* (35)-(43)*, obtemos*

$$
\begin{aligned}
&\eta^{(1)}_t = -2u_t,\ \eta^{(1)}_x = -u_x,\ \eta^{(2)}_{tt} = -3u_{tt},\ \eta^{(2)}_{tx} = -2u_{tx},\ \eta^{(2)}_{xx} = -u_{xx},\ \eta^{(3)}_{ttt} = -4u_{ttt},\\
&\eta^{(3)}_{txt} = -3u_{ttx},\ \eta^{(3)}_{txx} = -2u_{txx},\ \eta^{(3)}_{xxx} = -u_{xxx},
\end{aligned}
$$

implicando que o prolongamento de ordem 3 desse gerador é:

$$X^{(3)} = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u} - 2u_t\frac{\partial}{\partial u_t} - u_x\frac{\partial}{\partial u_x} - 3u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} - 2u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_{tx}} - u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} - 4u_{ttt}\frac{\partial}{\partial u_{ttt}}$$
$$- 3u_{ttx}\frac{\partial}{\partial u_{txt}} - 2u_{txx}\frac{\partial}{\partial u_{txx}} - u_{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}.$$

2.6 INVARIÂNCIA DE UMA EDP

Nesta seção apresentaremos as condições para que uma equação diferencial parcial $E(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0$ seja invariante. Inicialmente seguimos com a definição:

Definição 2.8. *Uma equação diferencial parcial $E(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0$, com $E \in \mathcal{A}$, é invariante com relação ao grupo de transformações de Lie a um parâmetro (20) se, e somente se,*

$$E(x^*, u^*, \partial u^*, \partial^2 u^*, \cdots, \partial^k u^*) = 0 \;\; quando \;\; E(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0.$$

Um grupo de transformações que satisfaz a Definição 2.8 é chamado de *simetria de Lie* da equação $E = 0$. Note que a Definição 2.8 mostra que a invariância da equação $E = 0$ com relação ao $k - ésimo$ prolongamento do grupo de transformações (20) mapeia qualquer solução $u = \Psi(x)$ de $E = 0$ em outra solução $u = \psi(x; \varepsilon)$ da mesma equação sob a ação deste grupo.

O próximo resultado, juntamente com os que já foram estabelecidos, nos fornecerá as ferramentas necessárias para que possamos obter os geradores de simetrias associados a uma dada equação diferencial parcial gerada por uma função diferencial. A partir de agora assumiremos que a equação $E = 0$ é tal que $E \in \mathcal{A}$.

Proposição 2.5 (Critério infinitesimal para invariância de uma EDP)**.** *Seja*

$$X = \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u}$$

o gerador infinitesimal do grupo de transformações de Lie a um parâmetro $x^* = X(x, u; \varepsilon)$, $u^* = U(x, u; \varepsilon)$ e seu $k - ésimo$ prolongamento dado por

$$X^{(k)} = X + \eta_i^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_i} + \eta_{ij}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{ij}} + \cdots + \eta_{i_1 \cdots i_k}^{(k)}\frac{\partial}{\partial u_{i_1 \cdots i_k}},$$

em que $i = 1, 2, \cdots, n$, $i_l = 1, 2, \cdots, n$, $l = 1, 2, \cdots, k$. Então, esse grupo é admitido pela equação diferencial parcial $E(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0$ se, e somente se,

$$X^{(k)}E(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0 \;\; quando \;\; E(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0. \tag{44}$$

Demonstração. Veja [4], página 164. □

Exemplo 2.8. *Considere a equação diferencial parcial (6) escrita na forma*

$$E(t,x,u,u_t,u_x,u_{xx},u_{txx},u_{xxx}) = u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_xu_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx} = 0$$

e o gerador infinitesimal

$$X = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{45}$$

Para verificarmos se a equação (6) admite (45) como gerador de simetrias precisamos estendê-lo até a terceira ordem, já que a equação (6) é de terceira ordem, e aplicar a Proposição 2.5. Sendo assim, façamos inicialmente algumas observações:

1. *o gerador (45) prolongado até a terceira ordem é dado no Exemplo 2.7;*

2. *a equação (6) possui dependência apenas de t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{txx} e u_{xxx}. Logo, precisamos utilizar apenas os infinitésimos prolongados $\eta_t^{(1)}$, $\eta_x^{(1)}$, $\eta_{xx}^{(2)}$, $\eta_{txx}^{(3)}$ e $\eta_{xxx}^{(3)}$ do Exemplo 2.7.*

Com isso, teremos que

$$X^{(3)} = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u} - 2u_t\frac{\partial}{\partial u_t} - u_x\frac{\partial}{\partial u_x} - u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} - 2u_{txx}\frac{\partial}{\partial u_{txx}} - u_{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}. \tag{46}$$

Agora aplicando o gerador (46) na equação (6) ficamos com

$$\begin{aligned}
X^{(3)}E &= t\frac{\partial E}{\partial t} - u\frac{\partial E}{\partial u} - 2u_t\frac{\partial E}{\partial u_t} - u_x\frac{\partial E}{\partial u_x} - u_{xx}\frac{\partial E}{\partial u_{xx}} - 2u_{txx}\frac{\partial E}{\partial u_{txx}} - u_{xxx}\frac{\partial E}{\partial u_{xxx}} \\
&= -u(-32u_x + 8u_{xxx}) - 2u_t - u_x(-32u + 8uu_{xx}) - u_{xx}(8u_x - 2u_{xxx}) + 2u_{txx} \\
&- u_{xxx}(8u - 2u_{xx}) \\
&= -2(u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_xu_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx}) \\
&= -2E
\end{aligned}$$

De onde concluímos que

$$X^{(3)}E(t,x,u,u_t,u_x,u_{xx},u_{txx},u_{xxx}) = 0 \;\; \textit{quando} \;\; E(t,x,u,u_t,u_x,u_{xx},u_{txx},u_{xxx}) = 0,$$

satisfazendo a Proposição 2.5. Consequentemente, o gerador infinitesimal (45) é um gerador de simetrias da equação (6).

No Exemplo 2.8 verificamos que conhecendo um gerador, fazemos seu prolongamento até a ordem da equação diferencial parcial analisada, aplicamos o gerador prolongado nesta equação e com auxílio da Proposição 2.5 podemos verificar se o gerador prolongado de fato é um gerador de simetrias da equação.

A questão que surge é: Como encontrar tais geradores de simetrias para uma equação diferencial parcial? A resposta é utilizarmos a ida da Proposição 2.5, ou seja, considerando que temos uma equação diferencial parcial $E(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0$ de ordem k tomamos um gerador geral como (32) e fazemos o seu $k - \acute{e}simo$ prolongamento obtendo (33). Pela Proposição 2.4 obtemos os infinitésimos prolongados até a $k - \acute{e}sima$ ordem.

De posse desses resultados podemos aplicar o critério de invariância (44) na equação $E = 0$ e obteremos um sistema de equações lineares sobredeterminado em que os coeficientes são compostos pelos infinitésimos do gerador (32) e suas derivadas. A solução do sistema nos conduzirá a todos os geradores de simetria de Lie da equação $E = 0$ e, por isso, as equações envolvidas no sistema encontrado são chamadas de *equações determinantes* do gerador de simetrias admitido pela equação. No próximo capítulo apresentaremos tais procedimentos para as equações estudadas nesta tese.

3 EQUAÇÕES DE NOVIKOV E SUAS SIMETRIAS DE LIE

Neste capítulo aplicaremos as ferramentas obtidas até aqui nas equações que foram estudadas no decorrer da construção desta tese. Para estas equações temos $(t, x, u) \in \mathbb{R}^3$, em que t, x são as variáveis independentes e $u = u(t, x)$ a variável dependente. Logo, um gerador infinitesimal de simetrias para uma equação com variáveis independentes t e x, e variável dependente u, é da forma

$$X = \xi^t(t, x, u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^x(t, x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{47}$$

Assim, para obtermos os geradores de simetrias de Lie é necessário determinarmos os infinitésimos $\xi^t = \xi^t(t, x, u)$, $\xi^x = \xi^x(t, x, u)$ e $\eta = \eta(t, x, u)$. Para tanto, aplicaremos a ida da Proposição 2.5. Em primeiro lugar vamos considerar a equação diferencial parcial (6)

$$E = u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_x u_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx} = 0.$$

Observe que esta equação é a do Exemplo 2.8. Então, o prolongamento do gerador (47) até a terceira ordem é dado por

$$X^{(3)} = X + \eta_t^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_t} + \eta_x^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_{xx}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta_{txx}^{(3)}\frac{\partial}{\partial u_{txx}} + \eta_{xxx}^{(3)}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}, \tag{48}$$

em que os infinitésimos prolongados $\eta_t^{(1)}$, $\eta_x^{(1)}$, $\eta_{xx}^{(2)}$, $\eta_{txx}^{(3)}$ e $\eta_{xxx}^{(3)}$ são as expressões (35), (36), (39), (42) e (43), respectivamente.

Aplicando o gerador (48) na equação (6) obteremos

$$\begin{aligned} X^{(3)}E = {} & \eta(-32u_x + 8u_{xxx}) + \eta_t^{(1)} + \eta_x^{(1)}(-32u + 8u_{xx}) + \eta_{xx}^{(2)}(8u_x - 2u_{xxx}) - \eta_{txx}^{(3)} \\ & + \eta_{xxx}^{(3)}(8u - 2u_{xx}). \end{aligned} \tag{49}$$

Em (49), aplicando o critério de invariância

$$X^{(3)}E = 0 \quad \text{quando} \quad E = 0,$$

vamos obter a seguinte equação algébrica nas derivadas da variável u:

$$\begin{aligned}
&\eta_t - 32u\eta_x - \eta_{txx} + 8u\eta_{xxx} + (-\eta_{xxu} + 8u\xi^t_x + 2\xi^x_x + \xi^t_{txx} - 8u\xi^t_{xxx})u_t \\
&+ (-32\eta + 8\eta_{xx} - 2\eta_{txu} + 24u\eta_{xxu} - \xi^x_t - 32u\xi^x_x + \xi^x_{txx} - 8u\xi^x_{xxx} - 32u\xi^t_t + 768u^2\xi^t_x)u_x \\
&+ (8\eta_u + 24u\eta_{uu} - 6\eta_{xxu} - 8\xi^x_x + 3\xi^x_{tu} - 72u\xi^x_{xu} + 2\xi^x_{xxx} + 8\xi^t_t - 384u\xi^t_x)u_x u_{xx} \\
&+ (-2\eta_{xuu} + 2\xi^x_u - 56u\xi^t_u - 8\xi^t_{xx} + \xi^x_{xxu} + 2\xi^t_{txu} - 24u\xi^t_{xxu})u_t u_x + 4\xi^t_{xu}u_t u_x u_{xxx} + 2\xi^t_u u^2_{tx} \\
&+ (-6\eta_{xu} - 24u\xi^x_u + 6\xi^x_{xx})u^2_{xx} + (\xi^x_u + 2\xi^t_{xx} + 8u\xi^t_u)u_t u_{xxx} + (\xi^t_u + \xi^t_{xxu})u^2_t - 12\xi^t_x u^2_{xx}u_{xxx} \\
&+ (8\eta - 2\eta_{xx} + \xi^t_x - 8u\xi^x_x + 8u\xi^t_t - 192u^2\xi^t_x)u_{xxx} + \xi^t_u u_{tt}u_{xx} + 6\xi^t_{xu}u_t u^2_{xx} + 2\xi^t_{uu}u_t u^2_x u_{xxx} \\
&+ (-4\eta_{xu} + 2\xi^x_{xx} - 8u\xi^x_u - 192u^2\xi^t_u)u_x u_{xxx} + (-2\eta_u + 6\xi^x_x - 2\xi^t_t + 96u\xi^t_x)u_{xx}u_{xxx} + \xi^t_{xx}u_{tt} \\
&+ (16\eta_{xu} - \eta_{tuu} + 24u\eta_{xuu} - 64u\xi^x_u - 8\xi^x_{xx} + 2\xi^x_{txu} - 24u\xi^x_{xxu} + 728u^2\xi^t_u)u^2_x + 4\xi^t_{xu}u_t u_{tx} \\
&+ (8\eta_x - \eta_{tu} + 24u\eta_{xu} - 2\eta_{xxx} + 2\xi^x_{tx} - 24u\xi^x_{xx})u_{xx} + (-2\eta_{uu} + 4\xi^x_{xu})u^2_x u_{xxx} + 4\xi^t_x u_{tx}u_{xxx} \\
&+ (-\eta_{uu} - 2\xi^t_x + 2\xi^x_{xu} + \xi^t_{tu} - 24u\xi^t_{xu} + \xi^t_{xxx})u_t u_{xx} + (8\xi^x_u + 96u\xi^t_u)u_x u_{xx}u_{xxx} + 2\xi^t_{xuu}u_x u^2_t \\
&+ (-6\eta_{xuu} - 8\xi^x_u - 48u\xi^x_{uu} + 6\xi^x_{xxu} - 384u\xi^t_u)u^2_x u_{xx} + (3\xi^x_{uu} - 24u\xi^t_{uu} + 6\xi^t_{xxu} + 6\xi^t_u)u_t u_x u_{xx} \\
&+ (8\eta_{uu} + 8u\eta_{uuu} - 16\xi^x_{xu} + \xi^x_{tuu} - 24u\xi^x_{xuu})u^3_x + (-8\xi^t_{uu} + \xi^x_{uuu} - 8u\xi^t_{uuu})u_t u^3_x + \xi^t_{uuu}u^2_t u^2_x \\
&+ (-2\eta_{xu} + \xi^x_{xx} + 2\xi^t_{tx} - 24u\xi^t_{xx})u_{tx} + (-8\xi^x_{uu} - 8u\xi^x_{uuu})u^4_x + 4\xi^t_u u_x u_{tx}u_{xxx} + 2\xi^x_{uu}u^3_x u_{xxx} \\
&+ (-6\eta_{uu} + 18\xi^x_{xu} + 48\xi^t_x)u_x u^2_{xx} + (-2\eta_{uu} - 16\xi^t_x + 4\xi^x_{xu} + 2\xi^t_{tu} - 48u\xi^t_{xu})u_x u_{tx} + 2\xi^t_{xu}u_x u_{tt} \\
&+ (-16\xi^t_u + 3\xi^x_{uu} - 24u\xi^t_{uu})u^2_x u_{tx} + (-2\eta_{uuu} + 6\xi^x_{xuu})u^3_x u_{xx} + 4\xi^t_{uu}u_t u_x u_{tx} + \xi^t_{uu}u^2_x u_{tt} \\
&+ (3\xi^x_u - 24u\xi^t_u + 6\xi^t_{xx})u_{tx}u_{xx} + (12\xi^x_{uu} + 48\xi^t_u)u^2_x u^2_{xx} + \xi^t_{uu}u^2_t u_{xx} + 2\xi^t_u u_x u_{ttx} + 6\xi^t_{xuu}u_t u^2_x u_{xx} \\
&+ 6\xi^x_u u^3_x + 12\xi^t_{xu}u_x u_{tx}u_{xx} + 2\xi^t_{uuu}u_t u^3_x u_{xx} + 2\xi^x_{uuu}u^4_x u_{xx} + 6\xi^t_{uu}u^2_x u_{tx}u_{xx} + 6\xi^t_u u_{tx}u^2_{xx} \\
&- 12\xi^t_u u_x u^2_{xx}u_{xxx} = 0.
\end{aligned} \tag{50}$$

Veja que os coeficientes da equação (50) envolvem expressões lineares com os infinitésimos $\xi^t = \xi^t(t,x,u)$, $\xi^x = \xi^x(t,x,u)$, $\eta = \eta(t,x,u)$ e suas derivadas. Desta forma, tal equação nos fornecerá o sistema de equações lineares sobredeterminado:

$$\left\{\begin{array}{r}
-32\eta + 8\eta_{xx} - 2\eta_{txu} + 24u\eta_{xxu} - \xi^x_t - 32u\xi^x_x + \xi^x_{txx} - 8u\xi^x_{xxx} - 32u\xi^t_t + 768u^2\xi^t_x = 0,\\
8\eta_u + 24u\eta_{uu} - 6\eta_{xxu} - 8\xi^x_x + 3\xi^x_{tu} - 72u\xi^x_{xu} + 2\xi^x_{xxx} + 8\xi^t_t - 384u\xi^t_x = 0,\\
-2\eta_{xuu} + 2\xi^x_u - 56u\xi^t_u - 8\xi^t_{xx} + \xi^x_{xxu} + 2\xi^t_{txu} - 24u\xi^t_{xxu} = 0,\\
16\eta_{xu} - \eta_{tuu} + 24u\eta_{xuu} - 64u\xi^x_u - 8\xi^x_{xx} + 2\xi^x_{txu} - 24u\xi^x_{xxu} + 728u^2\xi^t_u = 0,\\
\eta_t - 32u\eta_x - \eta_{txx} + 8u\eta_{xxx} = 0,\ -\eta_{xxu} + 8u\xi^t_x + 2\xi^x_x + \xi^t_{txx} - 8u\xi^t_{xxx} = 0,\\
8\eta - 2\eta_{xx} + \xi^t_x - 8u\xi^x_x + 8u\xi^t_t - 192u^2\xi^t_x = 0,\ -8\xi^t_{uu} + \xi^x_{uuu} - 8u\xi^t_{uuu} = 0,\\
8\eta_x - \eta_{tu} + 24u\eta_{xu} - 2\eta_{xxx} + 2\xi^x_{tx} - 24u\xi^x_{xx} = 0,\ -6\eta_{xu} - 24u\xi^x_u + 6\xi^x_{xx} = 0,\\
-\eta_{uu} - 2\xi^t_x + 2\xi^x_{xu} + \xi^t_{tu} - 24u\xi^t_{xu} + \xi^t_{xxx} = 0,\ -2\eta_u + 6\xi^x_x - 2\xi^t_t + 96u\xi^t_x = 0,\\
-6\eta_{xuu} - 8\xi^x_u - 48u\xi^x_{uu} + 6\xi^x_{xxu} - 384u\xi^t_u = 0,\ -4\eta_{xu} + 2\xi^x_{xx} - 8u\xi^x_u - 192u^2\xi^t_u = 0,\\
3\xi^x_{uu} - 24u\xi^t_{uu} + 6\xi^t_{xxu} + 6\xi^t_u = 0,\ 8\eta_{uu} + 8u\eta_{uuu} - 16\xi^x_{xu} + \xi^x_{tuu} - 24u\xi^x_{xuu} = 0,\\
-2\eta_{xu} + \xi^x_{xx} + 2\xi^t_{tx} - 24u\xi^t_{xx} = 0,\ -2\eta_{uu} - 16\xi^t_x + 4\xi^x_{xu} + 2\xi^t_{tu} - 48u\xi^t_{xu} = 0,\\
3\xi^x_u - 24u\xi^t_u + 6\xi^t_{xx} = 0,\ \xi^x_u + 2\xi^t_{xx} + 8u\xi^t_u = 0,\ -6\eta_{uu} + 18\xi^x_{xu} + 48\xi^t_x = 0,\\
-16\xi^t_u + 3\xi^x_{uu} - 24u\xi^t_{uu} = 0,\ 12\xi^x_{uu} + 48\xi^t_u = 0,\ -2\eta_{uuu} + 6\xi^x_{xuu} = 0,\ \xi^t_u + \xi^t_{xxu} = 0,\\
-8\xi^x_{uu} - 8u\xi^x_{uuu} = 0,\ -2\eta_{uu} + 4\xi^x_{xu} = 0,\ 8\xi^x_u + 96u\xi^t_u = 0,\\
2\xi^t_{xuu} = 0,\ \xi^t_{uuu} = 0,\ 6\xi^t_{xuu} = 0,\ 2\xi^t_{uuu} = 0,\ 2\xi^x_{uuu} = 0,\\
4\xi^t_{xu} = 0,\ 6\xi^t_{xu} = 0,\ 2\xi^t_{uu} = 0,\ \xi^t_{xx} = 0,\ 4\xi^t_{xu} = 0,\ 2\xi^x_{uu} = 0,\\
2\xi^t_{xu} = 0,\ 4\xi^t_{uu} = 0,\ \xi^t_{uu} = 0,\ 12\xi^t_{xu} = 0,\ 6\xi^t_{uu} = 0,\\
2\xi^t_u = 0,\ -12\xi^t_x = 0,\ \xi^t_u = 0,\ 4\xi^t_x = 0,\ 4\xi^t_u = 0,\ 2\xi^t_u = 0,\ 6\xi^x_u = 0,\ 6\xi^t_u = 0,\ -12\xi^t_u = 0.
\end{array}\right. \tag{51}$$

Note que da última linha do sistema (51) temos que $\xi^t_x = 0$, $\xi^t_u = 0$ e $\xi^x_u = 0$. Com isso, todas as derivadas de segunda ordem ξ^t_{xx}, ξ^t_{uu}, ξ^t_{tx}, ξ^t_{tu}, ξ^t_{xu}, ξ^x_{uu}, ξ^x_{tu}, ξ^x_{xu}, bem como todas as derivadas de terceira ordem ξ^t_{xxx}, ξ^t_{uuu}, ξ^t_{xxu}, ξ^t_{xuu}, ξ^t_{txu}, ξ^x_{uuu}, ξ^x_{tuu}, ξ^x_{xxu}, ξ^x_{xuu}, ξ^x_{txu} se anulam. Logo, eliminando estas derivadas do sistema (51) ficamos com o sistema:

$$
\begin{cases}
-32\eta + 8\eta_{xx} - 2\eta_{txu} + 24u\eta_{xxu} - \xi^x_t - 32u\xi^x_x + \xi^x_{txx} - 8u\xi^x_{xxx} - 32u\xi^t_t = 0, \\
8\eta_u + 24u\eta_{uu} - 6\eta_{xxu} - 8\xi^x_x + 2\xi^x_{xxx} + 8\xi^t_t = 0, \\
8\eta_x - \eta_{tu} + 24u\eta_{xu} - 2\eta_{xxx} + 2\xi^x_{tx} - 24u\xi^x_{xx} = 0, \\
16\eta_{xu} - \eta_{tuu} + 24u\eta_{xuu} - 8\xi^x_{xx} = 0, \\
\eta_t - 32u\eta_x - \eta_{txx} + 8u\eta_{xxx} = 0, \\
8\eta - 2\eta_{xx} - 8u\xi^x_x + 8u\xi^t_t = 0, \\
-2\eta_u + 6\xi^x_x - 2\xi^t_t = 0, \\
-\eta_{xxu} + 2\xi^x_x = 0, \\
-\eta_{xu} + \xi^x_{xx} = 0, \\
-2\eta_{xu} + \xi^x_{xx} = 0, \\
\eta_{uu} + u\eta_{uuu} = 0, \\
\eta_{uuu} = 0, \; \eta_{xuu} = 0, \; \eta_{uu} = 0 \\
\xi^t_x = 0, \; \xi^t_u = 0, \; \xi^x_u = 0.
\end{cases}
\tag{52}
$$

No sistema (52) podemos fazer novas simplificações. De fato, como $\eta_{uu} = 0$ conseguimos eliminar todos os termos que envolvem a derivada de segunda ordem do infinitésimo η com relação a variável u. Além disso, das equações $-\eta_{xu} + \xi^x_{xx} = 0$ e $-2\eta_{xu} + \xi^x_{xx} = 0$ obtemos que $\eta_{xu} = \xi^x_{xx} = 0$ implicando na equação $-\eta_{xxu} + 2\xi^x_x = 0$ que $\xi^x_x = 0$, logo os termos que envolvem estas derivadas também podem ser eliminados. Com isso o sistema (52) se torna:

$$
\begin{cases}
-32\eta + 8\eta_{xx} - \xi^x_t - 32u\xi^t_t = 0, \\
8\eta_u + 8\xi^t_t = 0, \\
8\eta_x - 2\eta_{xxx} - \eta_{tu} = 0, \\
\eta_t - 32u\eta_x - \eta_{txx} + 8u\eta_{xxx} = 0, \\
8\eta - 2\eta_{xx} + 8u\xi^t_t = 0, \\
-2\eta_u - 2\xi^t_t = 0, \\
\eta_{xu} = 0, \; \eta_{uu} = 0 \\
\xi^t_x = 0, \; \xi^t_u = 0, \; \xi^x_x = 0, \; \xi^x_u = 0.
\end{cases}
\tag{53}
$$

Trabalhando um pouco mais com as equações do sistema (53) podemos encontrar um sistema equivalente mais simples. Com efeito, veja que

- da equação $8\eta - 2\eta_{xx} + 8u\xi^t_t = 0$ temos que
$$8\eta - 2\eta_{xx} = -8u\xi^t_t; \tag{54}$$
- da primeira equação do sistema (53) e de (54) teremos que
$$-32\eta + 8\eta_{xx} - \xi^x_t - 32u\xi^t_t = -4(8\eta - 2\eta_{xx}) - \xi^x_t - 32u\xi^t_t = 0 \Rightarrow \xi^x_t = 0;$$
- as equações $8\eta_u + 8\xi^t_t = 0$ e $-2\eta_u - 2\xi^t_t = 0$ vão implicar em $\eta_u + \xi^t_t = 0$;
- derivando (54) com relação a variável x obtemos $8\eta_x - 2\eta_{xxx} = 0$, uma vez que $\xi^t_{tx} = 0$ (veja sistema (51)), logo, da equação $8\eta_x - 2\eta_{xxx} - \eta_{tu} = 0$ concluímos que $\eta_{tu} = 0$;
- tomando a equação $\eta_u + \xi^t_t = 0$, derivando com relação a variável t e usando que $\eta_{tu} = 0$ seremos conduzidos a concluir que $\xi^t_{tt} = 0$;
- o fato que $8\eta_x - 2\eta_{xxx} = 0$, quando derivamos (54) com realação a x, implicará pela equação $\eta_t - 32u\eta_x - \eta_{txx} + 8u\eta_{xxx} = 0$, que $\eta_t - \eta_{txx} = 0$;
- agora, derivando (54) com relação a variável t e usando que $\xi^t_{tt} = 0$ chegaremos em $4\eta_t - \eta_{txx} = 0$;
- por fim, subtraindo $\eta_t - \eta_{txx} = 0$ de $4\eta_t - \eta_{txx} = 0$ concluímos que $\eta_t = 0$.

Dessa forma, o sistema (53) é reduzido para o sistema equivalente:
$$\begin{cases} \eta_{xx} - 4u\xi^t_t - 4\eta = 0, \\ \eta_u + \xi^t_t = 0, \\ \eta_t = 0, \\ \xi^x_t = 0,\ \xi^x_x = 0,\ \xi^x_u = 0, \\ \xi^t_{tt} = 0,\ \xi^t_x = 0,\ \xi^t_u = 0. \end{cases} \tag{55}$$

A solução do sistema (55) nos permite encontrar todas as simetrias de Lie associadas a equação (6). Deste modo, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Uma base para os geradores de simetrias de Lie da equação*
$$E = u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_xu_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx} = 0$$
é dada por
$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u},\ X_4 = e^{-2x}\frac{\partial}{\partial u},\ X_5 = e^{2x}\frac{\partial}{\partial u}. \tag{56}$$

Demonstração. A demonstração do Teorema 3.1 já foi praticamente feita em linhas gerais, isto é,

- identificamos qual a ordem da equação (6) e as variáveis que a equação depende;
- estabelecemos o prolongamento do gerador (47) baseado no item anterior;
- por meio da Proposição 2.4 obtemos os infinitésimos prolongados do gerador (48);
- aplicamos o critério de invariância $X^{(3)}E|_{E=0} = 0$ para obter o sistema (55).

Portanto, nos resta resolver o sistema (55) para finalizarmos a demonstração. Sendo assim, desse sistema temos que

$$\xi^x_t = 0,\ \xi^x_x = 0,\ \xi^x_u = 0 \Rightarrow \xi^x = c_1,$$

em que c_1 é uma constante. Além disso,

$$\xi^t_x = 0,\ \xi^t_u = 0 \Rightarrow \xi^t = g(t).$$

Logo, integrando $\xi^t_{tt} = 0$ duas vezes com relação a variável t, obtemos

$$\xi^t = c_2 t + c_3,$$

com c_2 e c_3 sendo constantes. Note ainda que

$$\eta_t = 0 \Rightarrow \eta = f(x, u).$$

Assim, substituindo $\xi^t_t = c_2$ na equação $\eta_u + \xi^t_t = 0$ e integrando uma vez com relação a variável u ficamos com

$$\eta = -c_2 u + h(x). \tag{57}$$

Da equação (57) e de $\eta_{xx} - 4u\xi^t_t - 4\eta = 0$, com $\xi^t_t = c_2$, vamos obter a seguinte equação diferencial ordinária linear de segunda ordem

$$h''(x) - 4h(x) = 0,$$

que nos leva à solução $h(x) = c_4 e^{-2x} + c_5 e^{2x}$, em que c_4 e c_5 são constantes. Desta forma, temos que os infinitésimos do gerador (47) para equação (6) são

$$\xi^t(t, x, u) = c_2 t + c_3,\ \xi^x(t, x, u) = c_1,\ \eta = -c_2 u + c_4 e^{-2x} + c_5 e^{2x}. \tag{58}$$

Com isso, substituindo (58) em (47) obteremos

$$X = (c_2 t + c_3)\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} + (c_2 u + c_4 e^{-2x} + c_5 e^{2x})\frac{\partial}{\partial u},$$

que é combinação linear dos geradores (56). □

De maneira inteiramente análoga ao procedimento conduzido para a equação (6), temos para as equações (7) e (8), o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Uma base para os geradores de simetrias de Lie da equação* (7)

$$u_t - u_{txx} - 16uu_x + 8u_xu_{xx} - 2u_{xx}^2 + 4uu_{xxx} - 2u_xu_{xxx} = 0$$

é dada pelos geradores X_1*,* X_2*,* X_3*,* X_5 *em* (56)*, enquanto os geradores* X_1*,* X_2*,* X_3 *formam uma base de geradores de simetrias da equação* (8)

$$u_t - u_{txx} - 4uu_x - 2u_x^2 - 2uu_{xx} + 6u_xu_{xx} + 2uu_{xxx} = 0.$$

Para os geradores encontrados nos Teoremas 3.1 e 3.2 podemos aplicar o primeiro teorema fundamental de Lie (ou séries de Lie) de forma a obtermos os seguintes grupos de transformações (veja Exemplo 2.4 para mais detalhes):

Tabela 1: Na tabela apresentamos os cinco grupos de transformação relacionados aos geradores dos Teoremas 3.1 e 3.2.

Transformações $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u})$	Geradores de simetria
$(t, x + \varepsilon, u)$	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$
$(t + \varepsilon, x, u)$	$X_2 = \dfrac{\partial}{\partial t}$
$(te^{\varepsilon}, x, ue^{-\varepsilon})$	$X_3 = t\dfrac{\partial}{\partial t} - u\dfrac{\partial}{\partial u}$
$(t, x, u + \varepsilon e^{-2x})$	$X_4 = e^{-2x}\dfrac{\partial}{\partial u}$
$(t, x, u + \varepsilon e^{2x})$	$X_5 = e^{2x}\dfrac{\partial}{\partial u}$

4 CONSTRUÇÃO DE SOLUÇÕES VIA GERADOR DE SIMETRIAS

No capítulo anterior vimos como podemos obter os geradores de simetrias associados a uma dada equação diferencial parcial. Além disso, à partir de um gerador de simetrias podemos obter o respectivo grupo de transformações associado com este gerador. Neste capítulo mostraremos como podemos utilizar os geradores de simetrias para tentar encontrar soluções explícitas das EDPs estudadas.

4.1 INVARIANTES DE UM GERADOR DE SIMETRIAS E SOLUÇÕES INVARIANTES

Sejam $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ e $u = u(x) \in \mathbb{R}$. Na seção 2.4 definimos um invariante sob a ação de um grupo de transformações de Lie a um parâmetro. E pela Proposição 2.3 vimos que podemos verificar se uma dada função é invariante por meio do gerador infinitesimal associado com o respectivo grupo de transformações. Então, considerando o grupo de transformações

$$x^* = X(x, u; \varepsilon), \ u^* = U(x, u; \varepsilon), \tag{59}$$

atuando no espaço de $n+1$ variáveis $(x^1, x^2, \cdots, x^n, u)$ e com gerador infinitesimal

$$X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{60}$$

Se desejamos encontrar invariantes com relação ao grupo (59) precisamos buscar por funções $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tais que $XF(x,u) = 0$. Isso significa que precisamos resolver a equação

$$XF(x,u) = \xi^i(x,u)\frac{\partial F(x,u)}{\partial x^i} + \eta(x,u)\frac{\partial F(x,u)}{\partial u} = 0. \tag{61}$$

Proposição 4.1. *A solução geral da equação (61) tem a forma*

$$F(x,u) = \theta(J_1(x,u), J_2(x,u), \cdots, J_n(x,u)),$$

em que θ é uma função diferenciável arbitrária de n variáveis e as funções $J_1, J_2, \cdots, J_n$ são n soluções linearmente independentes do sistema de características da equação (61) dado por

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x,u)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x,u)} = \cdots = \frac{dx^n}{\xi^n(x,u)} = \frac{du}{\eta(x,u)}. \tag{62}$$

Demonstração. Veja [21], página 136. □

Em consequência das Proposições 2.3 e 4.1 temos o seguinte resultado, veja [24], página 35.

Proposição 4.2. *O grupo de transformações de Lie a um parâmetro (59) atuando no espaço de $n+1$ variáveis tem exatamente n invariantes, cujos gradientes são linearmente independentes. Podemos tomar tais invariantes como sendo as soluções $J_1(x,u), J_2(x,u), \cdots, J_n(x,u)$ do sistema de características da equação (61). Tal conjunto de invariantes é dito ser uma base de invariantes para (59).*

Observe que o sistema de características (62) depende dos infinitésimos do gerador (60). Logo, para obtermos invariantes de um grupo de transformações de Lie a um parâmetro por meio do gerador infinitesimal associado a ele precisamos apenas conhecer os infinitésimos para escrevermos as equações características e resolvê-las. Com isso temos condições de descrever o seguinte procedimento para obtermos invariantes de um grupo de transformações:

1. conhecendo o gerador infinitesimal associado ao grupo, identificamos os infinitésimos;
2. escrevemos as equações características (62) da Proposição 4.1;
3. resolvemos as equações características e obtemos os invariantes que procurávamos da Proposição 4.2.

Exemplo 4.1. *Considere o gerador de simetrias dado por*

$$X = c\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}, \tag{63}$$

definido em $\mathbb{R}^3$, com coordenadas (t,x,u) e $c \neq 0$. Conforme a Proposição 4.2 o grupo associado a este gerador possui apenas 2 invariantes. De fato, veja que os infinitésimos associados com o gerador (63) são $\xi^t = 1$, $\xi^x = c$ e $\eta = 0$. Desta forma, obtemos as equações características:

$$\frac{dt}{\xi^t} = \frac{dx}{\xi^x} = \frac{du}{\eta} \Rightarrow \frac{dt}{1} = \frac{dx}{c} = \frac{du}{0}$$

de onde temos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{1} = \dfrac{dx}{c}, \\ \dfrac{dx}{c} = \dfrac{du}{0}. \end{cases} \tag{64}$$

A primeira equação do sistema (64), por integração, resulta em $J_1(t, x, u) = x - ct$ *enquanto a segunda resulta em* $J_2(t, x, u) = u$.

Agora que já sabemos como encontrar uma base de invariantes para um grupo de transformações de Lie a um parâmetro associado a um gerador de simetrias admitido por uma dada equação diferencial, podemos utilizar tais invariantes para tentar obter soluções particulares para esta equação.

Definição 4.1. *Seja* $(x, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *com* $u = u(x) \in \mathbb{R}$. *Dada uma equação diferencial parcial*

$$E(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0 \tag{65}$$

com gerador de simetrias

$$X = \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{66}$$

Dizemos que uma função $u = v(x)$ *é uma solução invariante da equação (65) em relação ao gerador de simetrias (66) se,*

1. $X(u - v(x)) = 0$ *quando* $u = v(x)$;
2. $E = 0$ *quando* $u = v(x)$.

A primeira condição da Definição 4.1 é chamada de condição de superfície invariante e podemos reescrevê-la como

$$\xi^i(x, v(x))\frac{\partial v(x)}{\partial x^i} = \eta(x, v(x)). \tag{67}$$

Para $u = v(x)$ a equação (67) admite o sistema de características (62), veja [21], página 140. Logo, pelas Proposições 4.1 e 4.2 a solução $u = v(x)$ é dada implicitamente em termos dos n invariantes associados ao gerador (66).

Exemplo 4.2. *Considere a equação (8)*

$$u_t - u_{txx} - 4uu_x - 2u_x^2 - 2uu_{xx} + 6u_x u_{xx} + 2uu_{xxx} = 0$$

e um gerador de simetrias associado a esta equação dado por

$$X = c\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}, \tag{68}$$

com $c \neq 0$*. Uma solução invariante para esta equação é* $u(t,x) = e^{x-ct}$*. De fato, veja que pela primeira condição da Definição 4.1 temos*

$$X(u - e^{x-ct}) = \left(c\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)(u - e^{x-ct}) = -ce^{x-ct} + ce^{x-ct} = 0 \quad \textit{quando} \quad u = e^{x-ct}.$$

Além disso, a equação (8) se anula quando $u(t,x) = e^{x-ct}$*. De fato, temos que* $u_t = u_{txx} = -ce^{x-ct}$ *e* $u_x = u_{xx} = u_{xxx} = e^{x-ct}$*. Fazendo a substituição dessas derivadas na equação (8) veremos que a segunda condição da Definição 4.1 também é satisfeita.*

Por outro lado, $u(t,x) = e^x$ *é uma solução para a equação (8) que não é invariante com relação ao gerador (68). Com efeito, basta ver que a primeira condição da Definição 4.1 não é satisfeita, isto é,*

$$X(u - e^x) = \left(c\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)(u - e^x) = -ce^x \neq 0 \quad \textit{quando} \quad u = e^x.$$

De modo a tentarmos encontrar soluções que sejam invariantes vamos utilizar um caso particular do resultado encontrado em [23], página 225.

Proposição 4.3. *Assuma que a equação (65) admita (66) como gerador de simetrias. Se* $\dfrac{\partial J_n}{\partial u} \neq 0$*, então definindo*

$$\lambda^j = J_j(x,u),\ 1 \leq j \leq n-1,$$
$$\zeta(x,u) = J_n(x,u),$$

podemos escrever a solução invariante da equação (65) como

$$\zeta(x,u) = \theta(\lambda^1, \cdots, \lambda^{n-1}). \tag{69}$$

Ao obtermos a solução (69) podemos fazer a substituição na equação diferencial parcial (65). Com isso, vamos ter uma redução na ordem desta equação para uma outra equação diferencial parcial em termos da função θ. No caso particular em que $n = 2$ a equação diferencial parcial será reduzida para uma equação diferencial ordinária.

Exemplo 4.3. *Vamos usar a Proposição 4.3 para obter a solução invariante, do Exemplo 4.2, da equação (8) com relação ao gerador de simetrias*

$$X = c\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t},$$

com $c \neq 0$*.*

No Exemplo 4.1, encontramos 2 invariantes $J_1(t,x,u) = x - ct$ *e* $J_2(t,x,u) = u$ *que estão relacionados com este gerador. Veja que* $\dfrac{\partial J_2}{\partial u} = 1 \neq 0$*. Então, definindo* $\lambda^1 = J_1(t,x,u)$ *e*

$\zeta(t,x,u) = J_2(t,x,u)$, temos que uma solução invariante é dada por $\zeta(t,x,u) = \theta(\lambda^1)$, ou seja, uma solução invariante da equação (8) é da forma $u(t,x) = \theta(z)$, em que $z = x - ct$ e a função θ satisfaz a equação diferencial ordinária

$$-c\theta' + c\theta''' - 4\theta\theta' - 2(\theta')^2 - 2\theta\theta'' + 6\theta'\theta'' + 2\theta\theta''' = 0. \tag{70}$$

Agora, suponha que a EDO (70) tenha uma solução do tipo $\theta = e^{\alpha(x-ct)}$, com $\alpha \neq 0$. Então, substituindo θ em (70) obtemos

$$-\alpha c e^{\alpha z} + \alpha^3 c e^{\alpha z} - 4\alpha(e^{\alpha z})^2 - 2\alpha^2(e^{\alpha z})^2 - 2\alpha^2(e^{\alpha z})^2 + 6\alpha^3(e^{\alpha z})^2 + 2\alpha^3(e^{\alpha z})^2 = 0.$$

Logo,

$$(-c\alpha + c\alpha^3)e^{\alpha z} + (-4\alpha - 4\alpha^2 + 8\alpha^3)(e^{\alpha z})^2 = 0. \tag{71}$$

Note que a equação (71) só é satisfeita se $\alpha = 1$. Portanto, uma solução invariante para equação (8), considerando o gerador (68), é $u(t,x) = e^{x-ct}$.

Veja que no Exemplo 4.2 a solução $u(t,x) = e^{x-ct}$ satisfaz imediatamente a primeira condição da Definição 4.1 sem usar que $u = v(t,x)$, isto é, ao aplicarmos o gerador (68) na função $F(t,x,u) = u - e^{x-ct}$ ela se anula idendicamente. No entanto, isto nem sempre acontece como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 4.4. *A equação (8) também admite o seguinte gerador de simetrias*

$$X = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{72}$$

Seguindo os mesmos procedimentos do Exemplo 4.1 obtemos que os invariantes com relação ao gerador (72) são $J_1 = x$ e $J_2 = tu$. Se $t \neq 0$, então a solução invariante é da forma $u(t,x) = \dfrac{\theta(x)}{t}$, em que θ é uma função satisfazendo a EDO

$$-\theta + \theta'' - 4\theta\theta' - 2(\theta')^2 - 2\theta\theta'' + 6\theta'\theta'' + 2\theta\theta''' = 0. \tag{73}$$

Considerando a ansatz $\theta(x) = e^{\beta x}$, $\beta \neq 0$, vamos obter fazendo a substituição na equação (73), que

$$-e^{\beta x} + \beta^2 e^{\beta x} - 4\beta(e^{\beta x})^2 - 2\beta^2(e^{\beta x})^2 - 2\beta^2(e^{\beta x})^2 + 6\beta^3(e^{\beta x})^2 + 2\beta^3(e^{\beta x})^2 = 0.$$

Logo,

$$(-1 + \beta^2)e^{\beta x} + (-4\beta - 4\beta^2 + 8\beta^3)(e^{\beta x})^2 = 0.$$

O que implica em $\beta = 1$. Assim, obtemos a solução invariante explícita $u(t,x) = \dfrac{e^x}{t}$.

Podemos verificar as condições da Definição 4.1 com a solução $u(t,x) = \dfrac{e^x}{t}$ da equação (8), obtida no Exemplo 4.4. Pela primeira condição temos

$$X\left(u - \frac{e^x}{t}\right) = \left(t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(u - \frac{e^x}{t}\right) = \frac{e^x}{t} - u.$$

Perceba que neste caso o gerador (72) não anula identicamente a função $F(t,x,u) = u - \dfrac{e^x}{t}$. No entanto, impondo a condição $u = \dfrac{e^x}{t}$ vamos ter que

$$X\left(u - \frac{e^x}{t}\right) = \frac{e^x}{t} - u = 0 \quad \text{quando} \quad u = \frac{e^x}{t},$$

satisfazendo a primeira condição da Definição 4.1. A segunda condição é imediata calculando as derivadas de $u(t,x) = \dfrac{e^x}{t}$ e substituindo na equação (8).

4.2 SISTEMA ÓTIMO DE SUBÁLGEBRAS UNIDIMENSIONAIS

Na seção anterior obtivemos os invariantes de um determinado gerador de simetrias associado a uma equação diferencial parcial e, por meio desses invariantes, mostramos como construir soluções invariantes para a equação. Um problema básico sobre obter soluções invariantes por meio de uma base de geradores de simetrias associada a uma EDP é que podemos tomar qualquer combinação linear dos elementos desta base para tentar encontrar essas soluções. No entanto, podemos nos deparar com a situação de obter várias soluções que podem ser transformadas uma na outra por meio de simetrias associadas com a EDP. Nesta seção, apresentaremos como contornar essa situação obtendo um sistema ótimo de geradores de simetrias que forneceram soluções invariantes fundamentalmente diferentes. Uma análise mais profunda do que apresentaremos aqui pode ser consultada em [20, 26].

Definição 4.2. *Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ munido de uma operação chamada colchete (ou comutador) de Lie $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *bilinearidade, isto é, $\forall\, X_i, X_j, X_k \in \mathfrak{g}$ e escalares $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ temos*

$$[\alpha X_i + \beta X_j, X_k] = \alpha[X_i, X_k] + \beta[X_j, X_k] \quad e \quad [X_k, \alpha X_i + \beta X_j] = \alpha[X_k, X_i] + \beta[X_k, X_j];$$

2. *antissimétrico, isto é,* $\forall\, X_i, X_j \in \mathfrak{g}$ *temos que* $[X_i, X_j] = -[X_j, X_i]$;

3. *satisfaz a identidade de Jacobi, isto é,* $\forall\, X_i, X_j, X_k \in \mathfrak{g}$ *temos*

$$[X_i,[X_j,X_k]] + [X_k,[X_i,X_j]] + [X_j,[X_k,X_i]] = 0.$$

Definição 4.3. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. Uma subálgebra* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathfrak{g}$ *que é fechado pelo colchete de Lie, ou seja, se* $X_i, X_j \in \mathfrak{h}$*, então* $[X_i, X_j] \in \mathfrak{h}$.

Consideremos os seguintes geradores de simetrias

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u},\ X_4 = e^{-2x}\frac{\partial}{\partial u},\ X_5 = e^{2x}\frac{\partial}{\partial u}. \tag{74}$$

O conjunto $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ forma uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão 5 sobre $\mathbb{R}$ com o colchete de Lie sendo dado por

$$[X_i, X_j] = X_iX_j - X_jX_i, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{75}$$

Utilizando (75), obtemos a seguinte tabela de comutadores para o conjunto $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ de geradores de simetrias:

Tabela 2: Tabela de comutadores.

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	$-2X_4$	$2X_5$
X_2	0	0	X_2	0	0
X_3	0	$-X_2$	0	X_4	X_5
X_4	$2X_4$	0	$-X_4$	0	0
X_5	$-2X_5$	0	$-X_5$	0	0

A álgebra de Lie gerada pelos operadores $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ nos permite tentar obter soluções invariantes para as equações que estamos considerando neste texto. Por exemplo, na Seção 4.1 consideramos os geradores $cX_1 + X_2$ e X_3 para obter, respectivamente, as soluções invariantes $u(t,x) = e^{x-ct}$ e $u(t,x) = \dfrac{e^x}{t}$ da equação (8), Exemplos 4.3 e 4.4.

Em outras palavras, qualquer solução invariante para as nossas equações é baseada em alguma subálgebra unidimensional da álgebra de Lie gerada pelo conjunto

$\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$. Um problema que surge é a classificação do grupo de soluções invariantes, uma vez que existe uma infinidade de subálgebras unidimensionais. Isto é, podemos tomar um gerador genérico $X = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + +a_5X_5 \in \mathfrak{g}$, em que a_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ são constantes arbitrárias, que podemos usar para tentar encontrar essas soluções.

Um método para determinar quais grupos levarão a tipos fundamentalmente diferentes de soluções invariantes é essencial para uma compreensão abrangente das possíveis soluções. Este problema de classificação pode ser resolvido através da análise da representação adjunta do grupo de simetrias em sua álgebra de Lie.

Se X_i é um gerador de simetrias de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, então o grupo de transformações de Lie a um parâmetro gerado por X_i é $e^{\varepsilon X_i}$ e o correspondente grupo de transformações adjuntas a um parâmetro é

$$ad\, X_i\Big|_{X_j} = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} Ad(e^{\varepsilon X_i})X_j, \quad X_j \in \mathfrak{g}.$$

Além disso, temos que $ad\, X_i\Big|_{X_j} = -[X_i, X_j]$ e

$$Ad(e^{\varepsilon X_i})X_j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}(ad\, X_i)^n(X_j) = X_j - \varepsilon[X_i, X_j] + \frac{\varepsilon^2}{2}[X_i, [X_i, X_j]] - \cdots, \tag{76}$$

veja [26].

Utilizando a Tabela 2 e (76) podemos construir a seguinte tabela de representação adjunta da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ gerada pelo conjunto $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$:

Tabela 3: Tabela de representação adjunta.

$Ad(e^{\varepsilon X_i})X_j$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	X_1	X_2	X_3	$e^{2\varepsilon}X_4$	$2e^{-2\varepsilon}X_5$
X_2	X_1	X_2	$X_3 - \varepsilon X_2$	X_4	X_5
X_3	X_1	$e^{\varepsilon}X_2$	X_3	$e^{-\varepsilon}X_4$	$e^{-\varepsilon}X_5$
X_4	$X_1 - 2\varepsilon X_4$	X_2	$X_3 + \varepsilon X_4$	X_4	X_5
X_5	$X_1 + 2\varepsilon X_5$	X_2	$X_3 + \varepsilon X_5$	X_4	X_5

Uma vez que temos a representação adjunta dos geradores X_i podemos obter um sistema ótimo de subálgebras que nos permitirá construir soluções invariantes para nossas equações. Tal sistema ótimo será obtido pelo método empregado em [26] que consiste em tomar um gerador $X = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5$ e simplificar tantas das constantes a_i, $i = 1,2,3,4,5$, quanto possíveis por meio de aplicações das representações adjuntas de modo a obter um gerador $\tilde{X}$ que será equivalente a X após esse processo. Dessa forma, tomando o gerador $X = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5$ teremos que:

1. Caso $a_5 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ e $a_3 - 2a_1 \neq 0$: Fazendo $a_5 = 1$ temos $X = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + X_5$. Então,

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1 &= Ad(e^{\varepsilon X_2})X\\ &= a_1Ad(e^{\varepsilon X_2})X_1 + a_2Ad(e^{\varepsilon X_2})X_2 + a_3Ad(e^{\varepsilon X_2})X_3\\ &+ a_4Ad(e^{\varepsilon X_2})X_4 + a_5Ad(e^{\varepsilon X_2})X_5\\ &= a_1X_1 + a_2X_2 + a_3(X_3 - \varepsilon X_2) + a_4X_4 + X_5\\ &= a_1X_1 + (a_2 - a_3\varepsilon)X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + X_5.\end{aligned}$$

Podemos tomar $\varepsilon = \dfrac{a_2}{a_3}$ e obtemos

$$\tilde{X}_1 = a_1X_1 + a_3X_3 + a_4X_4 + X_5.$$

Aplicando $Ad(e^{\varepsilon X_4})$ em $\tilde{X}_1$, temos:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_2 &= Ad(e^{\varepsilon X_4}))\tilde{X}_1\\ &= a_1(X_1 - 2\varepsilon X_4) + a_3(X_3 + \varepsilon X_4) + a_4X_4 + X_5\\ &= a_1X_1 + a_3X_3 + ((a_3 - 2a_1)\varepsilon + a_4)X_4 + X_5.\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon = -\dfrac{a_4}{a_3 - 2a_1}$ obtemos

$$\tilde{X}_2 = a_1X_1 + a_3X_3 + X_5.$$

Como não conseguimos mais fazer simplificações usando as representações adjuntas temos que o gerador $X = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5$, com $a_5 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ e $a_3 - 2a_1 \neq 0$, é equivalente ao gerador $\tilde{X}_2 = a_1X_1 + a_3X_3 + X_5$.

2. Caso $a_5 = 0$, $a_4 \neq 0$ e $a_3 \neq 0$: Fazendo $a_4 = 1$ temos $X = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + X_4$. Então,

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= Ad(e^{\varepsilon X_2})X\\ &= a_1X_1 + a_2X_2 + a_3(X_3 - \varepsilon X_2) + X_4\\ &= a_1X_1 + (a_2 - a_3\varepsilon)X_2 + a_3X_3 + X_4.\end{aligned}$$

Logo, se $\varepsilon = \dfrac{a_2}{a_3}$ obtemos

$$\tilde{X} = a_1X_1 + a_3X_3 + X_4.$$

Novamente não conseguimos mais fazer simplificações usando as representações adjuntas, então o gerador $X = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5$, com $a_5 = 0$, $a_4 \neq 0$ e $a_3 \neq 0$, é equivalente ao gerador $\tilde{X} = a_1X_1 + a_3X_3 + X_4$.

3. Caso $a_5 = a_4 = 0$ e $a_3 \neq 0$: Tomando $a_3 = 1$ temos $X = a_1X_1 + a_2X_2 + X_3$. Então,

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= Ad(e^{\varepsilon X_2})X \\ &= a_1X_1 + a_2X_2 + X_3 - \varepsilon X_2 \\ &= a_1X_1 + (a_2 - \varepsilon)X_2 + X_3,\end{aligned}$$

escolhendo $\varepsilon = a_2$, obtemos $\tilde{X} = a_1X_1 + X_3$. Logo, para este caso temos que X é equivalente a $\tilde{X} = a_1X_1 + X_3$.

4. Caso $a_5 = a_4 = a_3 = 0$ e $a_2 \neq 0$: Tomando $a_2 = 1$ temos $X = a_1X_1 + X_2$. Neste caso, não conseguimos fazer nenhuma simplificação utilizando as representações adjuntas. Assim, X é equivalente ao gerador $\tilde{X} = a_1X_1 + X_2$.

5. Caso $a_5 = a_4 = a_3 = a_2 = 0$ e $a_1 \neq 0$: Teremos que $X = X_1$.

Deste modo, obtemos o seguinte sistema ótimo de subálgebras unidimensionais:

$$a_1X_1 + a_3X_3 + X_5,\ a_1X_1 + a_3X_3 + X_4,\ a_1X_1 + X_3,\ a_1X_1 + X_2 \text{ e } X_1. \tag{77}$$

Assim, podemos utilizar o sistema ótimo (77) para tentar obter soluções invariantes que não sejam equivalentes. Mas, antes façamos uma obervação com relação aos coeficientes dos geradores do sistema ótimo (77). Por exemplo, no gerador $a_1X_1 + X_2$ se $a_1 = 0$, então esse gerador é reduzido simplesmente para X_2. Caso $a_1 \neq 0$, podemos fazer uma mudança de coordenadas $(t, x, u) \mapsto (t, |a_1|x, u)$ que transforma $a_1X_1 + X_2$ em $(|a_1|/a_1)X_1 + X_2 = sgn(a_1)X_1 + X_2$, uma vez que podemos reescalonar os geradores. Com isso, podemos dividir a análise deste caso em $a_1 = 0$ ou $a_1 = \pm 1$. No entando, em nossos exemplos preferimos considerar uma análise geral deixando $a_1 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.5. *Vamos considerar novamente a equação* (8)

$$u_t - u_{txx} - 4uu_x - 2u_x^2 - 2uu_{xx} + 6u_xu_{xx} + 2uu_{xxx} = 0.$$

O sistema ótimo para esta equação é formado pelos geradores $a_1X_1 + X_3$, $a_1X_1 + X_2$ e X_1, em que a_1 é uma constante e os geradores X_i, $i = 1, 2, 3$, são dados em (74)*. Então,*

1. *Soluções invariantes considerando o gerador X_1: Para este gerador os invariantes são $J_1 = t$ e $J_2 = u$. Logo, a solução invariante é da forma $u(t,x) = \theta(t)$, em que a função θ satisfaz a EDO $\theta' = 0$. Ou seja, a solução invariante neste caso é $u(t,x) = k$, em que k é uma constante.*

2. *Soluções invariantes considerando o gerador $a_1X_1 + X_3$: Para este gerador os invariantes são $J_1 = te^{-\frac{x}{a_1}}$ e $J_2 = ue^{\frac{x}{a_1}}$. Com isso, podemos escrever a solução invariante como $u(t,x) = e^{-\frac{x}{a_1}}\theta(z)$, $z = te^{-\frac{x}{a_1}}$. Substituindo essa solução na equação (8), temos que a função θ deve satisfazer a EDO*
$$\begin{aligned}&(a_1^3 - 4a_1)\theta' - 5a_1z\theta'' - a_1z^2\theta''' + (4a_1^2 - 4a_1 - 8)\theta^2 + (-2a_1 - 18)z^2(\theta')^2\\&+ (4a_1^2 - 10a_1 - 38)z\theta\theta' + (-2a_1 - 18)z^2\theta\theta'' - 6z^3\theta'\theta'' - 2z^3\theta\theta''' = 0\end{aligned} \tag{78}$$
Veja que a EDO acima não é tão simples para ser resolvida, mas podemos obter algumas soluções simples se considerarmos $\theta = k$ uma constante não nula. Deste modo, obtemos as soluções $u(t,x) = ke^{x}$, caso $a_1 = -1$, e $u(t,x) = ke^{-x/2}$, se $a_1 = 2$. Todavia, a EDO (78) também nos sugere a ansatz $\theta(z) = kz^p$, $k \neq 0$. Se $p \neq 0$ podemos encontrar que $p = -(a_1 + 1)$, o que implicará na solução $u(t,x) = k\dfrac{e^x}{t^{a_1+1}}$. Caso $p = 0$ recuperamos as soluções em que θ é constante. Além disso, se tomarmos $a_1 = 0$ no gerador $a_1X_1 + X_3$ conseguimos obter a mesma solução invariante do Exemplo 4.4.

3. *Soluções invariantes considerando o gerador $a_1X_1 + X_2$: Este gerador é o mesmo gerador do Exemplo 4.3 se fizermos $a_1 = c$. Logo, uma solução invariante é da forma $u(t,x) = \theta(z)$, com $z = x - ct$. Particularmente, $u(t,x) = e^{x-ct}$ é uma solução invariante neste caso. Contudo, neste mesmo exemplo temos a EDO*
$$-c\theta' + c\theta''' - 4\theta\theta' - 2(\theta')^2 - 2\theta\theta'' + 6\theta'\theta'' + 2\theta\theta''' = 0. \tag{79}$$
A EDO (79) pode ser integrada uma vez, o que resulta em
$$-c\theta + c\theta'' - 2\theta^2 + 2(\theta')^2 - 2\theta\theta' + 2\theta\theta'' + C_1 = 0, \tag{80}$$
em que C_1 é uma constante de integração. Se multiplicarmos a EDO (80) por e^z podemos fazer uma nova integração resultando em
$$-ce^z\theta + ce^z\theta' - 2e^z\theta^2 + 2e^z\theta\theta' + C_1e^z + C_2 = 0.$$
Fazendo $C_2 = 0$ na última EDO podemos encontrar a solução implícita
$$z - \frac{1}{2}ln(2\theta^2 + c\theta - C_1) + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8C_1}}\,arctanh\left(\frac{c + 4\theta}{\sqrt{c^2 + 8C_1}}\right) + K = 0.$$
Por outro lado, se $C_1 = C_2 = 0$ recuperamos a solução $u(t,x) = e^{x-ct}$.

5 LEIS DE CONSERVAÇÃO

Neste capítulo apresentaremos a teoria necessária para encontrar outra propriedade estrutural das equações estudadas nesta tese: as leis de conservação. Aqui vamos considerar que $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $u = u(t, x) \in \mathbb{R}$ e $E(t, x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0$ denota uma equação diferencial parcial de ordem k. Além disso, continuaremos fazendo uso da notação de Einstein para soma sobre os índices repetidos.

5.1 NOÇÕES BÁSICAS

Formalmente podemos definir uma lei de conservação de uma equação diferencial parcial como:

Definição 5.1. *Uma lei de conservação para a equação diferencial parcial $E = 0$ consiste em uma divergência $\operatorname{Div} C = D_t C^0 + D_i C^i$ que se anula identicamente em toda e qualquer solução da equação. As componentes do vetor $C = (C^0, C^i)$, $i = 1, \cdots, n$, são funções diferenciais, isto é, C^0, $C^1, \cdots, C^n \in \mathcal{A}$, dependentes de t, x, u e das derivadas de u até alguma ordem $p \in \mathbb{N}$. O vetor C é chamado corrente conservada e as funções C^0 e C^i são chamadas respectivamente, de densidade e fluxo conservados. A ordem da corrente conservada C é definida como sendo a maior ordem de suas componentes.*

Exemplo 5.1. *Considere a equação diferencial parcial* (6)

$$u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_x u_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx} = 0,$$

e o vetor $C = (C^0, C^1)$ tal que

$$C^0 = u - u_{xx}, \; C^1 = -16u^2 - u_{xx}^2 + 8uu_{xx}.$$

Note que

$$\begin{aligned} Div\, C &= D_t C^0 + D_x C^1 \\ &= D_t(u - u_{xx}) + D_x(-16u^2 - u_{xx}^2 + 8uu_{xx}) \\ &= u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_x u_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx}. \end{aligned} \tag{81}$$

Em vista disso, se $u = u(t,x)$ é uma solução da equação (6), então o lado direito de (81) se anula. Portanto, $Div\, C = D_t C^0 + D_x C^1$ é uma lei de conservação para equação (6). A corrente conservada C, neste caso, é de ordem 2.

Definição 5.2. *Seja $C = (C^0, C^1, \cdots, C^n)$ uma corrente conservada de uma dada equação diferencial parcial $E(t, x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0$. Dizemos que C é um vetor conservado trivial se sua divergência é identicamente nula, isto é,*

$$Div\, C = D_t C^0 + D_i C^i \equiv 0.$$

Neste caso, chamamos a lei de conservação associada com o vetor C de trivial.

Veja que uma lei de conservação trivial não está relacionada com nenhuma estrutura particular da equação correspondente. Logo, é uma lei de conservação de qualquer equação.

Exemplo 5.2. *Seja $C = (C^0, C^1)$ tal que*

$$C^0 = uu_x^2 + \frac{1}{2}u^2 u_{xx}, \; C^1 = -uu_t u_x - \frac{1}{2}u^2 u_{tx}.$$

Então,

$$\begin{aligned} D_t C^0 + D_x C^1 &= D_t(uu_x^2 + \frac{1}{2}u^2 u_{xx}) + D_x(-uu_t u_x - \frac{1}{2}u^2 u_{tx}) \\ &= u_t u_x^2 + 2uu_x u_{tx} + uu_t u_{xx} + \frac{1}{2}u^2 u_{txx} \\ &- u_t u_x^2 - 2uu_x u_{tx} - uu_t u_{xx} - \frac{1}{2}u^2 u_{txx} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $D_t C^0 + D_x C^1$ é uma lei de conservação trivial de qualquer equação.

Perceba que as componentes do vetor C no Exemplo 5.2 podem ser reescritas como

$$C^0 = uu_x^2 + \frac{1}{2}u^2 u_{xx} = D_x\left(\frac{1}{2}u^2 u_x\right) \tag{82}$$

e

$$C^1 = -uu_t u_x - \frac{1}{2}u^2 u_{tx} = D_t\left(-\frac{1}{2}u^2 u_x\right). \tag{83}$$

Daí, a trivialidade do vetor conservado decorre do seguinte resultado para leis de conservação triviais:

Proposição 5.1. *Seja $C = (C^0, C^1, \cdots, C^n)$ uma corrente conservada de uma dada equação diferencial parcial $E(t, x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0$. Então, $D_t C^0 + D_i C^i \equiv 0$ se, e somente se, existirem funções diferenciáveis Q_{ij}, $i, j = 0, 1, ..., n$ dependentes de t, x, u e das derivadas de u, de tal forma que*

$$Q_{ij} = -Q_{ji}, \quad i, j = 0, 1, \cdots, n \tag{84}$$

e

$$C^i = \sum_{j=0}^{n} D_j Q_{ij}, \quad i = 0, 1, \cdots, n, \tag{85}$$

$\forall (t, x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^p u)$, com $D_0 = D_t$.

Demonstração. Veja [26], página 265. □

Observe que tomando $n = 1$ na Proposição 5.1, pela condição (85) teremos

$$C^0 = D_t Q_{00} + D_x Q_{01} \quad \text{e} \quad C^1 = D_t Q_{10} + D_x Q_{11}. \tag{86}$$

Agora se compararmos (82)-(83) com (86), por (84) concluímos que $Q_{00} = Q_{11} = 0$ donde $C^0 = D_x Q_{01}$ e $C^1 = D_t Q_{10}$, com $Q_{10} = -Q_{01}$, o que justifica a trivialidade do vetor C no Exemplo 5.2.

Uma vez que temos estabelecida a noção de lei de conservação trivial podemos introduzir a seguinte definição de equivalência para leis de conservação.

Definição 5.3. *Sejam $C = (C^0, C^1, \cdots, C^n)$ e $\tilde{C} = (\tilde{C}^0, \tilde{C}^1, \cdots, \tilde{C}^n)$ duas correntes conservadas. Dizemos que as leis de conservação $D_t C^0 + D_i C^i = 0$ e $D_t \tilde{C}^0 + D_i \tilde{C}^i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, são equivalentes se $D_t(C^0 - \tilde{C}^0) + D_i(C^i - \tilde{C}^i) \equiv 0$ é uma lei de conservação trivial. Uma classe de equivalência de leis de conservação consiste de todas as leis de conservação equivalentes a uma dada lei de conservação representante.*

Exemplo 5.3. *Considere o vetor conservado do Exemplo 5.1 e o vetor $\tilde{C} = (\tilde{C}^0, \tilde{C}^1)$ tal que*

$$\tilde{C}^0 = u - u_{xx} - 32tuu_x, \; \tilde{C}^1 = 8uu_{xx} - u_{xx}^2 + 32tuu_t.$$

Então,

$$\begin{aligned} D_t(C^0 - \tilde{C}^0) + D_x(C^1 - \tilde{C}^1) = & \\ &= D_t(32tuu_x) + D_x(-16u^2 - 32tuu_t) \\ &= 32uu_x + 32tu_tu_x + 32tuu_{tx} - 32uu_x - 32tu_tu_x - 32tuu_{tx} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isso significa que o vetor C do Exemplo 5.1 e o vetor $\tilde{C}$ do Exemplo 5.3 são equivalentes. Vimos que o vetor C do Exemplo 5.1 é uma lei de conservação para a equação (6) o que implica no vetor $\tilde{C}$ também ser uma lei de conservação para esta equação. De fato, note que as componentes $\tilde{C}^0$ e $\tilde{C}^1$ podem ser reescritas como

$$\tilde{C}^0 = u - u_{xx} + D_x(-16tu^2), \ \tilde{C}^1 = 8uu_{xx} - u_{xx}^2 - 16u^2 + D_t(16tu^2). \tag{87}$$

Logo, essas componentes diferem das componentes do vetor C do Exemplo 5.1 apenas pelos termos $D_x(-16tu^2)$ e $D_t(16tu^2)$. Calculando Div $\tilde{C}$ com as componentes (87) temos que

$$\begin{aligned} Div\ \tilde{C} = D_t\tilde{C}^0 + D_x\tilde{C}^1 = & \\ &= D_t\left[u - u_{xx} + D_x(-16tu^2)\right] + D_x\left[8uu_{xx} - u_{xx}^2 - 16u^2 + D_t(16tu^2)\right] \\ &= D_t(u - u_{xx}) + D_tD_x(-16tu^2) + D_x(8uu_{xx} - u_{xx}^2 - 16u^2) \\ &+ D_xD_t(16tu^2). \end{aligned}$$

Como os operadores D_t e D_x comutam, então os termos $D_tD_x(-16tu^2)$ e $D_xD_t(16tu^2)$ se anulam e ficamos com

$$Div\ \tilde{C} = D_t(u - u_{xx}) + D_x(8uu_{xx} - u_{xx}^2 - 16u^2)$$

que é exatamente a lei de conservação do Exemplo 5.1.

O Exemplo 5.3 nos mostra que se tivermos dois vetores conservados equivalentes eles diferem apenas por termos cuja divergência é trivial. Assim, se considerarmos $CV(E)$ como sendo o conjunto de correntes conservadas de uma dada equação diferencial parcial $E = 0$, é fácil ver que $CV(E)$ é um espaço vetorial e que o subconjunto $CV_0(E)$ de correntes conservadas triviais é subespaço de $CV(E)$. Da Definição 5.3, podemos introduzir a seguinte relação de equivalência de correntes conservadas $C \sim \tilde{C} \iff C - \tilde{C} \in CV_0(E)$. Dessa forma, obtemos o espaço vetorial quociente $CL(E) = CV/\sim$. Por conseguinte, quando encontramos um vetor conservado, eliminamos todas as divergências nulas (triviais) e exibimos somente o representante mais simples da classe de equivalência.

5.2 MULTIPLICADORES E LEIS DE CONSERVAÇÃO

Nesta seção apresentaremos a definição de multiplicadores e alguns resultados que nos permitirão descrever sistematicamente como construir leis de conservação locais para uma determinada equação diferencial parcial $E(t, x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0$ de ordem k, $E \in \mathcal{A}$. Tais ferramentas vão constituir o método direto, detalhado em [1, 2].

Definição 5.4. *Considere um conjunto de funções $M = \{\phi = \phi(t, x, u, \partial u, \cdots, \partial^p u) \mid \phi \in \mathcal{A}\}$ e a equação diferencial parcial $E(t, x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0$. Dizemos que as funções $\phi \in M$ são multiplicadores, de alguma ordem $p \in \mathbb{N}$ finita, da equação $E = 0$ se satisfazem*

$$\phi E = D_t C^0 + D_i C^i \tag{88}$$

para algum vetor $C = (C^0, C^i)$, $i = 1, \cdots, n$.

Observe na Definição 5.4 que se $u = u(t, x)$ é solução da equação $E = 0$, então o lado direito de (88) é uma lei de conservação dessa equação desde que exista tal função ϕ. Portanto, se existe tal função $\phi \in \mathcal{A}$, então o vetor $C = (C^0, C^i)$, $i = 1, \cdots, n$, é uma corrente conservada.

Exemplo 5.4. *Seja $(t, x, u) \in \mathbb{R}^3$, com $u = u(t, x)$. Vamos considerar a função $\phi = u - \frac{1}{4}u_{xx}$ e a equação (6). Então,*

$$\begin{aligned}\phi E &= \left(u - \frac{1}{4}u_{xx}\right)(u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_x u_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx}) \\ &= uu_t - uu_{txx} - 32u^2 u_x + 16uu_x u_{xx} + 8u^2 u_{xxx} - 4uu_{xx}u_{xxx} - \frac{1}{4}u_t u_{xx} \\ &+ \frac{1}{4}u_{xx}u_{txx} - 2u_x u_{xx}^2 + \frac{1}{2}u_{xx}^2 u_{xxx}.\end{aligned} \tag{89}$$

Reescrevendo os termos de (89) como

$$\begin{aligned} uu_t &= D_t\left(\frac{1}{2}u^2\right), \\ -uu_{txx} &= D_x(-uu_{tx}) + D_t\left(\frac{1}{2}u_x^2\right), \\ -32u^2 u_x &= D_x\left(\frac{32}{3}u^3\right), \\ 8u^2 u_{xxx} &= D_x(8u^2 u_{xx}) - 16uu_x u_{xx}, \\ -\frac{1}{4}u_t u_{xx} &= D_x\left(-\frac{1}{4}u_t u_x\right) + D_x\left(\frac{1}{8}u_x^2\right), \\ \frac{1}{4}u_{xx}u_{txx} &= D_t\left(\frac{1}{8}u_{xx}^2\right), \\ -2u_x u_{xx}^2 &= D_x(-2uu_{xx}^2) + 4uu_{xx}u_{xxx}, \\ \frac{1}{2}u_{xx}^2 u_{xxx} &= D_x\left(\frac{1}{6}u_{xx}^3\right), \end{aligned}$$

vamos obter que

$$\phi E = D_t\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{8}u_x^2 + \frac{1}{8}u_{xx}^2\right) + D_x\left(-\frac{32}{3}u^3 - uu_{tx} + 8u^2u_{xx} - \frac{1}{4}u_tu_x - 2uu_{xx}^2 + \frac{1}{6}u_{xx}^3\right).$$

Logo, existe um vetor $C = (C^0, C^1)$ tal que a identidade (88) é válida. Portanto, temos que a função $\phi = u - \frac{1}{4}u_{xx}$ é um multiplicador de ordem 2 para equação (6).

Antes de apresentarmos como obter tais multiplicadores para uma determinada equação $E = 0$ seguimos com a definição:

Definição 5.5. *O operador de Euler-Lagrange com relação à variável dependente $u = u(t, x)$ é dado por*

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k D_{i_1}\cdots D_{i_k}\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_k}}. \tag{90}$$

Um resultado fundamental que relaciona o operador (90) com divergências é:

Proposição 5.2. *Uma função $F \in \mathcal{A}$ é anulada pelo operador (90), isto é,*

$$\frac{\delta F}{\delta u} \equiv 0$$

se, e somente se, existe algum vetor $C = (C^0, C^1, \cdots, C^n) \in \mathcal{A}^{n+1}$ tal que F é uma divergência, ou seja,

$$F = D_tC^0 + D_iC^i,\ i = 1, \cdots, n.$$

Demonstração. Veja [26], página 248. □

Exemplo 5.5. *Considere a equação*

$$E = u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_xu_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx} = 0.$$

Vimos no Exemplo 5.1 que ela pode ser reescrita como uma divergência. Portanto, isso significa que pela volta da Proposição 5.2 a derivada variacional $\frac{\delta}{\delta u}$ de E tem que se anular. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\delta E}{\delta u} &= \frac{\partial E}{\partial u} - D_t\frac{\partial E}{\partial u_t} - D_x\frac{\partial E}{\partial u_x} + D_x^2\frac{\partial E}{\partial u_{xx}} - D_x^2D_t\frac{\partial E}{\partial u_{txx}} - D_x^3\frac{\partial E}{\partial u_{xxx}}\\
&= -32u_x + 8u_{xxx} - D_t(1) - D_x(-32u + 8u_{xx}) + D_x(8u_x - 2u_{xxx}) - D_x^2D_t(-1)\\
&- D_x^3(8u - 2u_{xx})\\
&= -32u_x + 8u_{xxx} + 32u_x - 8u_{xxx} + 8u_{xxx} - 2u_{xxxxx} - 8u_{xxx} + 2u_{xxxxx}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, até o momento sabemos que dada uma equação $E(t, x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0$, se existir uma função $\phi = \phi(t, x, u, \partial u, \cdots, \partial^p u) \in \mathcal{A}$ tal que a identidade (88) seja satisfeita, então ϕ é um multiplicador para a equação $E = 0$. Com isso, existe um vetor $C = (C^0, C^i)$, $i = 1, \cdots, n$, de modo que

$$\phi E = Div\ C = D_t C^0 + D_i C^i,$$

o que implica em $D_t C^0 + D_i C^i = 0$ nas soluções da equação $E = 0$ e, portanto, C é um vetor conservado. Por outro lado, o fato de existir tal multiplicador ϕ e de podermos escrever o produto ϕE como uma divergência, pela Proposição 5.2 temos que

$$\frac{\delta \phi E}{\delta u} = \frac{\delta Div\ C}{\delta u} = 0. \tag{91}$$

Observe ainda que a Proposição 5.2 não menciona nada com relação a dependência da função $u = u(t, x)$ para anular a divergência, logo podemos tratá-la como variável independente, assim como todas as suas derivadas com relação às variáveis t e x. Dessa forma, usando a Definição 5.4 em conjunto com a Proposição 5.2 podemos descrever o seguinte algoritmo para obter leis de conservação para uma dada equação diferencial parcial $E = 0$, de ordem k:

Algoritmo 5.1 (Algoritmo para obter leis de conservação de uma EDP).

1. *fixe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ para o multiplicador ϕ;*

2. *fixada a ordem p para o multiplicador ϕ, pela identidade (91) vamos obter uma equação algébrica nas derivadas da variável u. Nesta equação algébrica os coeficientes serão expressões envolvendo a função ϕ, suas derivadas, a variável u e derivadas de u até a ordem p;*

3. *a equação algébrica do item anterior nos conduzirá a um sistema linear sobredeterminado de equações determinantes em que a solução é o multiplicador ϕ do item 1;*

4. *encontrado o multiplicador ϕ, pela Definição 5.4 podemos obter algum vetor $C = (C^0, C^i)$, $i = 1, \cdots, n$, tal que vale a identidade (88);*

5. *o vetor obtido é uma corrente conservada nas soluções $u = u(t, x)$ da equação $E = 0$, logo, vamos ter uma lei de conservação para a equação dada.*

Uma observação sobre o algoritmo descrito acima: Embora estejamos descrevendo o algoritmo para encontrarmos multiplicadores, temos que se as equações estudadas possuírem um número finito de leis de conservação, então ela vai apresentar um número finito de multiplicadores. Essa finitude na quantidade de multiplicadores implicará que temos no máximo uma ordem finita das derivadas no argumento do multiplicador ϕ e, portanto, o multiplicador tem ordem máxima. Isso significa que se impormos uma ordem p igual ou maior que a ordem máxima do multiplicador e conseguirmos resolver o sistema linear sobredeterminado descrito no item 3 vamos encontrar todos os multiplicadores. O problema que surge nesta situação é que, a priori, não sabemos se a equação possui, ou não, infinitas leis de conservação.

Por outro lado, se as equações apresentarem uma infinidade de leis de conservação de ordem alta podemos impor qualquer ordem $p \in \mathbb{N}$ para o multiplicador ϕ de modo a tentar obtê-los até essa ordem, porém existindo outros de ordem maior. Na próxima seção mostraremos que em nosso estudo conseguimos encontrar multiplicadores para as nossas equações até a segunda ordem.

5.3 CONSTRUÇÃO DE CORRENTES CONSERVADAS PARA AS EQUAÇÕES DE NOVIKOV

Nesta seção utilizaremos o que foi exposto na seção anterior para que possamos obter leis de conservação para as equações de nosso estudo via o método direto. Com este propósito tomemos inicialmente a equação (6), isto é,

$$E = u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_xu_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx} = 0,$$

em que $(t, x, u) \in \mathbb{R}^3$ e $u = u(t, x)$. Começamos fixando uma ordem para o multiplicador ϕ conforme o primeiro item do Algoritmo 5.1. Neste caso, vamos tomar $p = 0$ e tentar encontrar o multiplicador $\phi = \phi(t, x, u)$. Pelo segundo item do Algoritmo 5.1, aplicando a identidade (91) ficamos com

$$\frac{\delta\phi E}{\delta u} = \frac{\partial\phi E}{\partial u} - D_t\frac{\partial\phi E}{\partial u_t} - D_x\frac{\partial\phi E}{\partial u_x} + D_x^2\frac{\partial\phi E}{\partial u_{xx}} - D_x^2D_t\frac{\partial\phi E}{\partial u_{txx}} - D_x^3\frac{\partial\phi E}{\partial u_{xxx}} = 0, \tag{92}$$

cujos os termos são dados por:

$$\frac{\partial \phi E}{\partial u} = \phi_u(u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_x u_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx}) + \phi(-32u_x + 8u_{xxx}),$$

$$D_t \frac{\partial \phi E}{\partial u_t} = \phi_t + u_t \phi_u,$$

$$D_x \frac{\partial \phi E}{\partial u_x} = (\phi_x + u_x \phi_u)(-32u + 8u_{xx}) + \phi(-32u_x + 8u_{xxx}),$$

$$\begin{aligned} D_x^2 \frac{\partial \phi E}{\partial u_{xx}} &= (\phi_{xx} + 2u_x\phi_{ux} + u_x^2\phi_{uu} + u_{xx}\phi_u)(8u_x - 2u_{xxx}) + 2(\phi_x + u_x\phi_u)(8u_{xx} - 2u_{xxxx}) \\ &+ \phi(8u_{xxx} - 2u_{xxxxx}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x^2 D_t \frac{\partial \phi E}{\partial u_{txx}} &= -(\phi_{txx} + 2u_x\phi_{txu} + u_x^2\phi_{tuu} + u_{xx}\phi_{tu} + u_t\phi_{xxu} + 2u_t u_x \phi_{xuu} + u_t u_x^2 \phi_{uuu} \\ &+ u_t u_{xx}\phi_{uu} + 2u_{tx}\phi_{xu} + 2u_x u_{tx}\phi_{uu} + u_{txx}\phi_u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x^3 \frac{\partial \phi E}{\partial u_{xxx}} &= (\phi_{xxx} + 3u_x\phi_{xxu} + 3u_x^2\phi_{xuu} + 3u_{xx}\phi_{xu} + u_x^3\phi_{uuu} + 3u_x u_{xx}\phi_{uu} \\ &+ u_{xxx}\phi_u)(8u - 2u_{xx}) + 3(\phi_{xx} + 2u_x\phi_{xu} + u_x^2\phi_{uu} + u_{xx}\phi_u)(8u_x - 2u_{xxx}) \\ &+ 3(\phi_x + u_x\phi_u)(8u_{xx} - 2u_{xxxx}) + \phi(8u_{xxx} - 2u_{xxxxx}). \end{aligned}$$

Observe que o multiplicador ϕ que desejamos obter é de ordem 0. Logo, a equação algébrica dada por (92) deve apresentar coeficientes envolvendo a função ϕ e suas derivadas, juntamente com a variável u. Dessa forma, simplificando e agrupando os termos acima teremos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta \phi E}{\delta u} &= -\phi_t + \phi_{txx} + 32u\phi_x - 8u\phi_{xxx} + (2\phi_{txu} - 24u\phi_{xxu} - 16\phi_{xx})u_x \\ &+ (6\phi_{xxu} - 24\phi_u - 24u\phi_{uu})u_x u_{xx} + (\phi_{tuu} - 32\phi_{xu} - 24u\phi_{xuu})u_x^2 \\ &+ (-16\phi_{uu} - 8u\phi_{uuu})u_x^3 + (2\phi_{xxx} - 16\phi_x + \phi_{tu} - 24u\phi_{xu})u_{xx} + 4\phi_{xx}u_{xxx} \\ &+ 4\phi_u u_{xx}u_{xxx} + 8\phi_{xu}u_x u_{xxx} + 4\phi_{uu}u_x^2 u_{xxx} + 2\phi_x u_{xxxx} + 2\phi_u u_x u_{xxxx} \\ &+ 6\phi_{xuu}u_x^2 u_{xx} + 6\phi_{xu}u_{xx}^2 + 2\phi_{uuu}u_x^3 u_{xx} + 6\phi_{uu}u_x u_{xx}^2 + \phi_{xxu}u_t + 2\phi_{xuu}u_t u_x \\ &+ \phi_{uuu}u_t u_x^2 + \phi_{uu}u_t u_{xx} + 2\phi_{xu}u_{tx} + 2\phi_{uu}u_x u_{tx} = 0 \end{aligned} \tag{93}$$

Agora, pelo terceiro item do Algoritmo 5.1, dos coeficientes da equação (93), obtemos um sistema linear sobredeterminado com 22 equações determinantes:

$$\begin{cases} 2\phi_{xxx} - 16\phi_x + \phi_{tu} - 24u\phi_{xu} = 0, \\ -\phi_t + \phi_{txx} + 32u\phi_x - 8u\phi_{xxx} = 0, \\ 2\phi_{txu} - 24u\phi_{xxu} - 16\phi_{xx} = 0, \\ 6\phi_{xxu} - 24\phi_u - 24u\phi_{uu} = 0, \\ \phi_{tuu} - 32\phi_{xu} - 24u\phi_{xuu} = 0, \\ -16\phi_{uu} - 8u\phi_{uuu} = 0, \\ 6\phi_{xuu} = 0,\ 2\phi_{uuu} = 0,\ \phi_{xxu} = 0, \\ 2\phi_{xuu} = 0,\ \phi_{uuu} = 0, \\ 6\phi_{xu} = 0,\ 4\phi_{xx} = 0,\ 8\phi_{xu} = 0, \\ 4\phi_{uu} = 0,\ 6\phi_{uu} = 0,\ \phi_{uu} = 0, \\ 2\phi_{xu} = 0,\ 2\phi_{uu} = 0, \\ 2\phi_x = 0,\ 2\phi_u = 0,\ 4\phi_u = 0. \end{cases} \tag{94}$$

Veja que da última linha do sistema (94) temos que $\phi_x = 0$ e $\phi_u = 0$. Isso implica que todas as derivadas de ϕ de ordem 2 e 3 que envolvem as variáveis x e u são nulas. Portanto, depois que simplificamos o sistema (94) eliminando essas derivadas obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} \phi_t = 0, \\ \phi_x = 0, \\ \phi_u = 0. \end{cases} \tag{95}$$

Como o multiplicador ϕ depende apenas das variáveis t, x e u o sistema (95) tem como solução $\phi = c$, em que c é uma constante. Conforme o quarto item do Algoritmo 5.1, pela Definição 5.4 deve existir algum vetor $C = (C^0, C^1)$ tal que $\phi E = cE = D_t C^0 + D_x C^1$. De fato, observe que os termos da equação (6) podem ser reescritos como $D_t(u) = u_t$, $D_t(-u_{xx}) = -u_{txx}$, $D_x(-16u^2) = -32uu_x$, $D_x(8uu_{xx}) = 8u_x u_{xx} + 8uu_{xxx}$ e $D_x(-u_{xx}^2) = -2u_{xx}u_{xxx}$ o que implica em,

$$cE = c\left[D_t(u - u_{xx}) + D_x(-16u^2 - u_{xx}^2 + 8uu_{xx})\right],$$

concluindo o Algoritmo 5.1. Em consequência disso, se $u = u(t, x)$ é uma solução da equação (6) e $c = 1$, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.3. *Uma lei de conservação para a equação (6)*

$$E = u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_xu_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx} = 0$$

é dada pela corrente conservada de segunda ordem $C = (C^0, C^1)$ *em que*

$$C^0 = u - u_{xx}, \; C^1 = -16u^2 - u_{xx}^2 + 8uu_{xx}.$$

Demonstração. A demonstração foi totalmente delineada ao longo desta seção. Assim, encontramos

$$D_tC^0 + D_xC^1 = D_t(u - u_{xx}) + D_x(-16u^2 - u_{xx}^2 + 8uu_{xx}) = 1E = 0$$

nas soluções da equação (6). □

Se considerarmos um multiplicador de ordem 1, $\phi = \phi(t, x, u, u_t, u_x)$, para a equação (6) iremos obter o mesmo resultado dado pelo Teorema 5.3. Por outro lado, tomando um multiplicador de ordem 2, $\phi = \phi(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx})$, encontramos os seguintes resultados:

Teorema 5.4. *Um conjunto de multiplicadores de ordem 2 para a equação (6)*

$$E = u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_xu_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx} = 0$$

é dado por

$$\phi_1 = u - \frac{1}{4}u_{xx},$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}uu_{xx} + \frac{1}{32}u_{xx}^2 + \frac{3}{128}u_{tx},$$

$$\phi_3 = e^{-2x}\left(\frac{16}{3}u^2 - 8uu_x - \frac{20}{3}uu_{xx} + \frac{4}{3}u_{xx}^2 + u_{tx} + 2u_xu_{xx} + u_t\right),$$

$$\phi_4 = e^{2x}\left(-\frac{16}{3}u^2 - 8uu_x + \frac{20}{3}uu_{xx} - \frac{4}{3}u_{xx}^2 - u_{tx} + 2u_xu_{xx} + u_t\right),$$

$$\phi_5 = \frac{5}{9}u_{xx}^3 - \frac{28}{3}uu_{xx}^2 + 44u^2u_{xx} + u_x^2u_{xx} + \frac{1}{3}u_{tx}u_{xx} - \frac{560}{9}u^3 - 4uu_x^2 - \frac{10}{3}uu_{tx}$$
$$+ u_tu_x - \frac{1}{6}u_{tt}.$$

Consequentemente, temos o seguinte resultado caracterizando as leis de conservação obtidas por meio dos multiplicadores.

Teorema 5.5. *Para cada multiplicador do Teorema 5.4 as leis de conservação para equação*

$$E = u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_xu_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx} = 0$$

são dadas pelas correntes conservadas de segunda ordem relacionadas a seguir:

1. *para o multiplicador ϕ_1 teremos a corrente conservada $C = (C_1^0, C_1^1)$, em que*

$$C_1^0 = \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{8}u_x^2 + \frac{1}{8}u_{xx}^2,$$

$$C_1^1 = -\frac{32}{3}u^3 - uu_{tx} + 8u^2u_{xx} - \frac{1}{4}u_tu_x - 2uu_{xx}^2 + \frac{1}{6}u_{xx}^3.$$

2. *para o multiplicador ϕ_2 teremos a corrente conservada $C = (C_2^0, C_2^1)$, em que*

$$C_2^0 = \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{8}u^2u_{xx} + \frac{1}{32}uu_{xx}^2 - \frac{1}{384}u_{xx}^3,$$

$$\begin{aligned} C_2^1 = {} & -4u^4 + \frac{3}{256}u_t^2 - \frac{1}{64}u_{xx}^4 - \frac{3}{256}u_{tx}^2 - \frac{3}{2}u^2u_{xx}^2 + 4u^3u_{xx} + \frac{1}{4}uu_{xx}^3 - \frac{3}{8}u^2u_{tx} \\ & + \frac{3}{16}uu_{tx}u_{xx} - \frac{3}{128}u_{tx}u_{xx}^2. \end{aligned}$$

3. *para o multiplicador ϕ_3 teremos a corrente conservada $C = (C_3^0, C_3^1)$, em que*

$$C_3^0 = \frac{e^{-2x}}{9}(16u^3 - 48u^2u_{xx} - 234uu_x^2 + 72uu_xu_{xx} - 6uu_{xx}^2 + 9u_x^3 - 9u_xu_{xx}^2 - u_{xx}^3),$$

$$\begin{aligned} C_3^1 = {} & \frac{e^{-2x}}{6}(512u^3u_x + 256u^3u_{xx} - 384u^2u_xu_{xx} - 192u^2u_{xx}^2 + 96uu_xu_{xx}^2 + 48uu_{xx}^3 \\ & - 8u_xu_{xx}^3 - 4u_{xx}^4 + 120uu_tu_x + 48uu_tu_{xx} + 48uu_{tx}u_{xx} - 18u_tu_x^2 - 6u_tu_{xx}^2 \\ & - 6u_{tx}u_{xx}^2 - 3u_t^2 - 6u_tu_{tx} - 3u_{tx}^2). \end{aligned}$$

4. *para o multiplicador* ϕ_4 *teremos a corrente conservada* $C = (C_4^0, C_4^1)$*, em que*

$$C_4^0 = \frac{e^{2x}}{9}(-16u^3 + 48u^2u_{xx} + 234uu_x^2 + 72uu_xu_{xx} + 6uu_{xx}^2 + 9u_x^3 - 9u_xu_{xx}^2 + u_{xx}^3),$$

$$\begin{aligned} C_4^1 = \frac{e^{2x}}{6}&(512u^3u_x - 256u^3u_{xx} - 384u^2u_xu_{xx} + 192u^2u_{xx}^2 + 96uu_xu_{xx}^2 - 48uu_{xx}^3 \\ &- 8u_xu_{xx}^3 + 4u_{xx}^4 - 120uu_tu_x + 48uu_tu_{xx} - 48uu_{tx}u_{xx} - 18u_tu_x^2 - 6u_tu_{xx}^2 \\ &+ 6u_{tx}u_{xx}^2 + 3u_t^2 - 6u_tu_{tx} + 3u_{tx}^2). \end{aligned}$$

5. *para o multiplicador* ϕ_5 *teremos a corrente conservada* $C = (C_5^0, C_5^1)$*, em que*

$$\begin{aligned} C_5^0 = &\frac{560}{9}u^3u_{xx} + \frac{374}{3}u^2u_x^2 - \frac{26}{3}u^2u_{xx}^2 + \frac{14}{9}uu_{xx}^3 - \frac{1}{2}u_x^2u_{xx}^2 - \frac{1}{12}u_t^2 + 4uu_x^2u_{xx} \\ &- \frac{1}{6}u_{tx}u_{xx}^2 - \frac{1}{12}u_{tx}^2 - \frac{1}{12}u_{xx}^4 - \frac{140}{9}u^4 + \frac{1}{4}u_x^4 + \frac{16}{3}uu_tu_x + \frac{4}{3}uu_{tx}u_{xx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_5^1 = &\frac{3584}{9}u^5 + \frac{1}{6}u_{tx}u_{tt} - u_tu_x^3 + \frac{1}{6}u_{xx}^2u_{tt} - \frac{13}{3}uu_t^2 - \frac{2}{9}u_{tx}u_{xx}^3 + uu_{tx}^2 - 32u^2u_x^2u_{xx} \\ &+ 8uu_x^2u_{xx}^2 - \frac{488}{9}u^2u_{xx}^3 + \frac{2144}{9}u^3u_{xx}^2 + \frac{52}{9}uu_{xx}^4 - \frac{2}{3}u_x^2u_{xx}^3 - \frac{4480}{9}u^4u_{xx} \\ &+ \frac{128}{3}u^3u_x^2 - \frac{2}{9}u_{xx}^5 + \frac{14}{3}uu_{tx}u_{xx}^2 - \frac{80}{3}u^2u_{tx}u_{xx} - \frac{428}{3}u^2u_xu_t - u_tu_xu_{xx}^2 \\ &- u_xu_tu_{tx} - \frac{4}{3}uu_{xx}u_{tt} + 8uu_{xx}u_tu_x. \end{aligned}$$

Com relação a equação (7) dada por

$$u_t - u_{txx} - 16uu_x + 8u_xu_{xx} - 2u_{xx}^2 + 4uu_{xxx} - 2u_xu_{xxx} = 0,$$

buscamos por multiplicadores até a ordem 2 e obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 5.6. *A equação* (7)

$$u_t - u_{txx} - 16uu_x + 8u_xu_{xx} - 2u_{xx}^2 + 4uu_{xxx} - 2u_xu_{xxx} = 0$$

admite os seguintes multiplicadores de ordem 0 *e* 2*:*

$$\begin{aligned} &\phi_1 = 1, \ \phi_2 = u, \ \phi_3 = e^{2x}, \\ &\phi_4 = -4u^2 + u_x^2 + 2uu_{xx} - u_xu_{xx} - \frac{1}{2}u_{tx}, \\ &\phi_5 = e^{-2x}\left(3u^2 - 4uu_x - u_x^2 + u_t - 4uu_{xx} + 2u_xu_{xx} + u_{tx}\right). \end{aligned}$$

Por consequência, as leis de conservação para equação (7) *são dadas pelas correntes conservadas relacionadas a seguir:*

1. *para o multiplicador* ϕ_1 *teremos a corrente conservada* $C = (C_1^0, C_1^1)$*, em que*

$$C_1^0 = u - u_{xx},$$

$$C_1^1 = -8u^2 + 2u_x^2 + 4uu_{xx} - 2u_x u_{xx}.$$

2. *para o multiplicador* ϕ_2 *teremos a corrente conservada* $C = (C_2^0, C_2^1)$*, em que*

$$C_2^0 = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u_x^2,$$

$$C_2^1 = -\frac{16}{3}u^3 - 2uu_x u_{xx} + \frac{2}{3}u_x^3 + 4u^2 u_{xx} - uu_{tx}.$$

3. *para o multiplicador* ϕ_3 *teremos a corrente conservada* $C = (C_3^0, C_3^1)$*, em que*

$$C_3^0 = e^{2x}(u - u_{xx}),$$

$$C_3^1 = -2e^{2x}(4uu_x - 2uu_{xx} - 2u_x^2 + u_x u_{xx}).$$

4. *para o multiplicador* ϕ_4 *teremos a corrente conservada* $C = (C_4^0, C_4^1)$*, em que*

$$C_4^0 = -\frac{4}{3}u^3 + \frac{1}{6}u_x^3 + 4u^2 u_{xx} + 7uu_x^2 - u_x^2 u_{xx},$$

$$\begin{aligned} C_4^1 &= 16u^4 - 8u^2 u_x^2 - 2uu_{tx}u_{xx} - \frac{1}{4}u_t^2 - 16u^3 u_{xx} - 2u_x^3 u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 u_t + 4u^2 u_{xx}^2 \\ &+ u_x^2 u_{xx}^2 + \frac{1}{4}u_{tx}^2 + 8u^2 u_x u_{xx} - 4uu_x u_{xx}^2 + 4uu_x^2 u_{xx} - 6uu_x u_t + u_x u_{xx} u_{tx} + u_x^4. \end{aligned}$$

5. *para o multiplicador* ϕ_5 *teremos a corrente conservada* $C = (C_5^0, C_5^1)$*, em que*

$$C_5^0 = \frac{1}{3}e^{-2x}(3u^3 - 9u^2 u_{xx} - 39uu_x^2 + 12uu_x u_{xx} + u_x^3 + 3u_x^2 u_{xx}),$$

$$\begin{aligned} C_5^1 &= \frac{1}{2}e^{-2x}(48u^3 u_x + 24u^3 u_{xx} + 8u^2 u_x^2 - 44u^2 u_x u_{xx} - 16u^2 u_{xx}^2 - 8uu_x^3 + 8uu_x^2 u_{xx} \\ &+ 16uu_x u_{xx}^2 - 4u_x^4 + 4u_x^3 u_{xx} - 4u_x^2 u_{xx}^2 + 20uu_x u_t + 8uu_t u_{xx} + 8uu_{xx} u_{tx} - 2u_x^2 u_t \\ &- 4u_x u_t u_{xx} - 4u_x u_{xx} u_{tx} - u_t^2 - 2u_t u_{tx} - u_{tx}^2). \end{aligned}$$

No que se refere a equação (8)

$$u_t - u_{txx} - 4uu_x - 2u_x^2 - 2uu_{xx} + 6u_x u_{xx} + 2uu_{xxx} = 0,$$

conseguimos obter apenas multiplicadores de ordem 0. No entanto, um desses multiplicadores envolve uma função arbitrária $f(t)$, o que implicará em infinitas leis de conservação. Logo, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.7. *A equação* (8)

$$u_t - u_{txx} - 4uu_x - 2u_x^2 - 2uu_{xx} + 6u_x u_{xx} + 2uu_{xxx} = 0,$$

admite os seguintes multiplicadores de ordem 0

$$\phi_1 = 1,\ \phi_2 = f(t)e^x,\ \phi_3 = e^{-2x},$$

em que f é uma função diferenciável na variável t. Assim, as leis de conservação para a equação (8) *são dadas pelas correntes conservadas de segunda ordem relacionadas a seguir:*

1. *para o multiplicador ϕ_1 teremos a corrente conservada $C = (C_1^0, C_1^1)$, em que*

$$C_1^0 = u - u_{xx},$$

$$C_1^1 = 2(-u^2 + u_x^2 + uu_{xx} - uu_x).$$

2. *para o multiplicador ϕ_2, se $f(t) \neq 0\ \forall\ t \in \mathbb{R}$, teremos a corrente conservada $C = (C_2^0, C_2^1)$, em que*

$$C_2^0 = f(t)e^x(u - u_{xx}),$$

$$C_2^1 = e^x \left[f(t)(2u_x^2 - 4uu_x + 2uu_{xx}) - f'(t)(u - u_x) \right].$$

3. *para o multiplicador ϕ_3 teremos a corrente conservada $C = (C_3^0, C_3^1)$, em que*

$$C_3^0 = -\frac{1}{3}e^{-2x}(u + 2u_x + u_{xx}),$$

$$C_3^1 = \frac{2}{3}e^{-2x}(-u_t + 3u_x^2 + 3uu_x - u_{tx} + 3uu_{xx}).$$

5.4 QUANTIDADES CONSERVADAS PARA AS EQUAÇÕES DE NOVIKOV

Nesta seção mostraremos como encontrar quantidades conservadas nas soluções das equações estudadas nesta tese. Para esta finalidade estamos considerando aqui as variáveis independentes temporal e espacial $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ e a variável dependente $u = u(t, x) \in \mathbb{R}$.

Na Seção 5.3 construímos um conjunto de correntes conservadas para as equações (6), (7) e (8), mostradas nos Teoremas 5.3, 5.5, 5.6 e 5.7. Vimos que se $C = (C^0, C^1)$ é uma corrente conservada para as nossas equações, então

$$D_t\, C^0 + D_x\, C^1 = 0 \Rightarrow D_t\, C^0 = -D_x\, C^1. \tag{96}$$

Integrando (96) com relação a variável x em $\mathbb{R}$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} D_t\, C^0\, dx = -\int_{\mathbb{R}} D_x\, C^1\, dx \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} C^0\, dx = -C^1\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}. \tag{97}$$

Com isso, se $C^1 \to 0$ quando $|x| \to \infty$ temos de (97) que

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} C^0\, dx = 0.$$

A igualdade acima implica que

$$\int_{\mathbb{R}} C^0\, dx$$

é conservada ao longo do tempo com relação as condições informadas e é chamada de *quantidade conservada*.

Suponha agora que $u = u(t, x)$ seja uma solução para a equação (6) tal que u e suas derivadas até a segunda ordem tendem a 0 quando $|x| \to \infty$. Então, das correntes conservadas obtidas nos Teoremas 5.3 e 5.5, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.8. *Considere a equação* (6)

$$u_t - u_{txx} - 32uu_x + 8u_xu_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx} = 0.$$

Suponha que $u = u(t, x)$ seja uma solução dessa equação tal que u e suas derivadas até a segunda ordem tendem a 0 *quando $|x| \to \infty$. Então*

$$\mathcal{H}_1(t) = \int_{\mathbb{R}} u\, dx, \tag{98}$$

$$\mathcal{H}_2(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{8}u_x^2 + \frac{1}{8}u_{xx}^2\right) dx \tag{99}$$

e

$$\mathcal{H}_3(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{8}u^2 u_{xx} + \frac{1}{32}uu_{xx}^2 - \frac{1}{384}u_{xx}^3\right) dx \tag{100}$$

são quantidades conservadas.

Demonstração. Pelo Teorema 5.3 a equação (6) possui a seguinte corrente conservada $C = (C^0, C^1)$ em que

$$C^0 = u - u_{xx}, \; C^1 = -16u^2 - u_{xx}^2 + 8uu_{xx}.$$

Note que a corrente conservada C é equivalente a corrente conservada $\tilde{C} = (\tilde{C}^0, \tilde{C}^1)$ em que

$$\tilde{C}^0 = u, \; \tilde{C}^1 = -16u^2 - u_{xx}^2 + 8uu_{xx} - u_{tx}.$$

Tomando a divergência da corrente conservada $\tilde{C}$, temos que

$$D_t C^0 + D_x C^1 = D_t(u) + D_x(-16u^2 - u_{xx}^2 + 8uu_{xx} - u_{tx}) = 0.$$

Integrando a divergência acima com relação a x em $\mathbb{R}$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}} D_t(u)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} D_x(-16u^2 - u_{xx}^2 + 8uu_{xx} - u_{tx})\, dx.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u\, dx = -(-16u^2 - u_{xx}^2 + 8uu_{xx} - u_{tx})\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}.$$

Como estamos assumindo que u e suas derivadas até a segunda ordem tendem a 0 quando $|x| \to \infty$ o lado direito da última equação se anula. Portando,

$$\int_{\mathbb{R}} u\, dx$$

é conservada ao longo do tempo e

$$\mathcal{H}_1(t) = \int_{\mathbb{R}} u\, dx$$

é uma quantidade conservada. Os outros casos são completamente análogos e omitiremos a demonstração. □

Da mesmo forma para as equações (7) e (8) e as correntes conservadas obtidas nos Teoremas 5.6 e 5.7, temos:

Teorema 5.9. *Suponha que $u = u(t, x)$ seja uma solução para as equações (7) e (8) tal que u e suas derivadas até a segunda ordem tendem a 0 quando $|x| \to \infty$. Então, para a equação (7) temos as seguintes quantidades conservadas:*

$$\mathcal{H}_1(t) = \int_{\mathbb{R}} u\, dx,$$

$$\mathcal{H}_4(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right) dx, \tag{101}$$

$$\mathcal{H}_5(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2x}(u - u_{xx})\, dx, \tag{102}$$

$$\mathcal{H}_6(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{4}{3}u^3 + \frac{1}{6}u_x^3 + 4u^2 u_{xx} + 7uu_x^2 - u_x^2 u_{xx}\right) dx \tag{103}$$

e

$$\mathcal{H}_7(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{3}e^{-2x}\left(3u^3 - 9u^2 u_{xx} - 39uu_x^2 + 12uu_x u_{xx} + u_x^3 + 3u_x^2 u_{xx}\right) dx. \tag{104}$$

Já as quantidades conservadas para a equação (8) são:

$$\mathcal{H}_1(t) = \int_{\mathbb{R}} u\, dx,$$

$$\mathcal{H}_8(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2x}(u + 2u_x + u_{xx})\, dx \tag{105}$$

e

$$\mathcal{H}_9(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{x}(u - u_{xx})\, dx, \tag{106}$$

em que $f \in C^1(\mathbb{R})$.

A seguir vamos apresentar um exemplo de solução para a equação (7) que apresenta as características do Teorema 5.9. Tal solução foi obtida recentemente quando passamos a analisar e investigar as relações existentes entre a equação (7) e a Degasperis-Procesi [14]. Não apresentaremos a dedução da solução, pois o ferramental teórico utilizado foge do escopo deste texto. Porém, vamos utilizá-la aqui para exemplificar que tal solução conserva as quantidades da equação (7).

Exemplo 5.6. *A equação (7)*

$$u_t - u_{txx} - 16uu_x + 8u_x u_{xx} - 2u_{xx}^2 + 4uu_{xxx} - 2u_x u_{xxx} = 0$$

admite a seguinte solução que conserva suas quantidades:

$$u(t,x) = -\frac{c}{6}e^{-x+ct}\theta(x-ct) - \left(\frac{c}{2}e^{x-ct} - \frac{c}{3}e^{2(x-ct)}\right)\theta(ct-x), \tag{107}$$

em que $c \neq 0$ é uma constante e θ é a função de Heaviside dada por

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & se \quad z > 0, \\ \frac{1}{2}, & se \quad z = 0, \\ 0, & se \quad z < 0. \end{cases}$$

Para mostrar que (107) dá origem a uma quantidade conservada para a equação (7), calculemos a quantidade $\mathcal{H}_1(t)$.

Note que a solução (107) pode ser expressa como uma função de uma variável fazendo $z = x - ct$, ou seja,

$$u = \psi(z) = -\frac{c}{6}e^{-z}\theta(z) - \left(\frac{c}{2}e^{z} - \frac{c}{3}e^{2z}\right)\theta(-z).$$

Assim,

$$\mathcal{H}_1(t) = \int_{\mathbb{R}} -\frac{c}{6}e^{-z}\theta(z) - \frac{c}{2}e^{z}\theta(-z) + \frac{c}{3}e^{2z}\theta(-z)\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -\frac{c}{2}e^{z} + \frac{c}{3}e^{2z}\,dz + \int_{0}^{+\infty} -\frac{c}{6}e^{-z}\,dz = -\frac{c}{2} + \frac{c}{6} - \frac{c}{6} = -\frac{c}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}_1(t) = 0$$

e a quantidade é conservada ao longo do tempo.

De modo frequente, as quantidades conservadas nos fornecem informações úteis sobre o comportamento das soluções de uma equação diferencial, e se a equação descreve algum fenômeno físico essas quantidades podem revelar alguma informação relevante. Observamos ainda que uma lei de conservação (ou corrente conservada) de uma equação diferencial, no sentido apresentado nas seções anteriores, é uma propriedade intrínseca da equação. No entanto, as quantidades conservadas são uma propriedade relacionada com as soluções da equação em conjunto com suas correntes conservadas.

Para fundamentar a observação do parágrafo anterior considere as seguintes correntes conservadas da equação (8)

$$C = (C^0, C^1) = (u, 2u_x^2 - 2u^2 - 2uu_x + 2uu_{xx} - u_{tx})$$

e

$$\tilde{C} = (\tilde{C}^0, \tilde{C}^1) = (u - u_{xx}, 2u_x^2 - 2u^2 - 2uu_x + 2uu_{xx}).$$

É fácil ver que a corrente conservada C é equivalente a corrente conservada $\tilde{C}$, pois $D_t(C^0 - \tilde{C}^0) + D_x(C^1 - \tilde{C}^1) \equiv 0$ (veja Definição 5.3). Portanto, para qualquer solução $u = u(t, x)$ da equação (8) teremos

$$D_t\, C^0 + D_x\, C^1 = 0 \quad \text{e} \quad D_t\, \tilde{C}^0 + D_x\, \tilde{C}^1 = 0.$$

De outro modo, supondo que $u = u(t, x)$ seja uma solução para a equação (8) tal que u e suas derivadas até a segunda ordem tendem a 0 quando $|x| \to \infty$. Das correntes conservadas C e $\tilde{C}$ obtemos, respectivamente, as quantidades conservadas

$$\mathcal{H}_1(t) = \int_{\mathbb{R}} u\, dx \quad \text{e} \quad \tilde{\mathcal{H}}_1(t) = \int_{\mathbb{R}} (u - u_{xx})\, dx.$$

Veja que essas quantidades conservadas são iguais sob essa perspectiva. De fato,

$$\tilde{\mathcal{H}}_1(t) = \int_{\mathbb{R}} (u - u_{xx})\, dx = \int_{\mathbb{R}} u\, dx - \int_{\mathbb{R}} D_x(u_x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} u\, dx - u_x\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = \mathcal{H}_1(t).$$

No entanto, se considerarmos a solução $u = e^{x-ct}$ obtida para equação (8) no Exemplo 4.3 um cálculo rápido mostra que $\mathcal{H}_1(t) = +\infty$, enquanto que $\tilde{\mathcal{H}}_1(t) = 0$. Isso está acontecendo porque a solução que estamos considerando $u = e^{x-ct}$ não se anula quando $|x| \to \infty$, e o mesmo vale para as suas derivadas com relação a variável x. Este fato mostra uma íntima relação entre o comportamento da solução de uma equação diferencial e sua quantidade conservada.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em seu trabalho [25] Novikov classificou um conjunto de equações da forma $u_t - u_{txx} = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ que potencialmente poderiam ser integráveis. Entre as equações classificadas por Novikov, algumas já são bem conhecidas na literatura tais como a Camassa-Holm [6] e a Degasperis-Procesi [14] (equações (13), (14) do *Theorem* 3 em [25]). Em particular, as simetrias de Lie dessas duas equações podem ser encontradas em [12]. Outra equação bastante famosa dentre aquelas obtidas por Novikov é exatamente aquela que hoje recebe seu nome, veja equação (31) do *Theorem* 5 em [25], cujas simetrias de Lie podem ser encontradas em [5].

Essas três equações são integráveis em diversos aspectos e, mais recentemente, foi provado que a equação (8) (equação (17) do *Theorem* 3 em [25]) é geometricamente integrável [19]. Da classificação de Novikov, até onde sabemos, estas são as únicas equações com essa propriedade. Além disso, as propriedades das outras equações dessa classificação são pouco conhecidas.

Nesta tese enfatizamos o estudo de duas propriedades estruturais das equações (6), (7) e (8) que correspondem, respectivamente, as equações (15), (16) e (17) do *Theorem* 3 em [25]: Simetrias de Lie e leis de conservação.

No Capítulo 3 classificamos todas as simetrias de Lie dessas equações e com isso exibimos nossos resultados originais nos Teoremas 3.1 e 3.2. No Capítulo 4, a partir dos geradores de simetrias, utilizamos a teoria de invariantes e soluções invariantes para obter soluções explícitas de EDPs. Diante disso, usando o método sugerido em [26], calculamos um sistema ótimo de subálgebras unidimencionais e encontramos algumas soluções particulares para a equação (8).

Já no Capítulo 5, passamos a estudar as leis de conservação para as equações (6), (7) e (8). As leis de conservação dessas equações foram construídas via método direto que se utiliza de funções diferenciais chamadas multiplicadores para tal construção. Os multiplicadores relacionados às equações (6), (7) e (8) que possibilitaram a construção de leis de conservação para as equações foram obtidos por meio de um algoritmo que pode ser encontrado em [1]. Dessa forma, conseguimos estabelecer nossos resultados originais apresentados nos Teoremas 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7 envolvendo multiplicadores e leis de conservação até a segunda ordem para as equações estudadas. Além disso, mostramos algumas quantidades conservadas (Teoremas 5.8 e 5.9) para as equações (6), (7) e (8) supondo que as soluções dessas equações e suas derivadas se anulam quando $|x| \to \infty$ e apresentamos uma solução (107) para a equação (7) com essa característica.

Por fim, mencionamos que embora a ênfase da tese tenha sido com relação as equações (6), (7) e (8), também obtivemos resultados sobre outras equações de Novikov que podem ser encontrados nos Apêndices. Com relação a solução (107) da equação (7), que apresentamos no capítulo anterior, estamos fazendo uma análise mais profunda e nossas considerações sobre essa solução serão reportadas em trabalhos futuros.

A APÊNDICE: EQUAÇÃO 18, [*THEOREM* 3, [25]]

No que segue vamos apresentar, sumariamente, nossos resultados sobre simetrias de Lie e leis de conservação de outras equações de Novikov, listadas no *Theorem* 3 em [25], com não linearidade quadrática, não evolutivas e até a terceira ordem.

Considere a equação

$$u_t - u_{txx} - 4uu_x - 2u_x^2 - 2uu_{xx} + 2u_xu_{xx} + 2u_{xx}^2 + 2uu_{xxx} + 2u_xu_{xxx} = 0. \tag{108}$$

Teorema A.1. *Uma base para os geradores de simetrias de Lie da equação (108) é dada por*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_\infty = f(t)e^{-x}\frac{\partial}{\partial u},$$

em que f é uma função diferenciável na variável t.

Teorema A.2. *A equação (108) admite os seguintes multiplicadores de ordem 0 e 2*

$$\phi_1 = 1,\ \phi_2 = e^{-2x},\ \phi_3 = e^{-2x}(u^2 - u_x^2 + u_t - 2uu_{xx} - 2u_xu_{xx} + u_{tx}).$$

Consequentemente, as leis de conservação para a equação (108) são dadas pelas correntes conservadas:

1. *para o multiplicador ϕ_1 teremos a corrente conservada $C = (C_1^0, C_1^1)$, em que*

$$C_1^0 = u - u_{xx},$$

$$C_1^1 = 2(-u^2 - uu_x + uu_{xx} + u_xu_{xx}).$$

2. *para o multiplicador ϕ_2 teremos a corrente conservada $C = (C_2^0, C_2^1)$, em que*

$$C_2^0 = e^{-2x}(u - u_{xx}),$$

$$C_2^1 = 2e^{-2x}\left(uu_x + uu_{xx} + u_x^2 + u_xu_{xx}\right).$$

3. *para o multiplicador ϕ_3 teremos a corrente conservada $C = (C_3^0, C_3^1)$, em que*

$$C_3^0 = \frac{e^{-2x}}{3}\left(u^3 - 3u^2u_{xx} - 9uu_x^2 - 3u_x^3 + 3u_x^2u_{xx}\right),$$

$$\begin{aligned} C_3^1 = \frac{e^{-2x}}{2}&(4u^3u_x + 4u^3u_{xx} + 8u^2u_x^2 + 4u^2u_xu_{xx} - 4u^2u_{xx}^2 + 4uu_x^3 - 4uu_x^2u_{xx} \\ &- 8uu_xu_{xx}^2 - 4u_x^3u_{xx} - 4u_x^2u_{xx}^2 + 4uu_tu_x + 4uu_tu_{xx} + 4uu_{tx}u_{xx} + 2u_tu_x^2 + \\ &+ 4u_tu_xu_{xx} + 4u_xu_{xx}u_{tx} - u_t^2 - 2u_tu_{tx} - u_{tx}^2). \end{aligned}$$

B APÊNDICE: EQUAÇÃO 19, [*THEOREM* 3, [25]]

Considere a equação

$$u_t - u_{txx} - 8uu_x - 4u_x^2 - 4uu_{xx} + 2u_{xx}^2 + 2u_x u_{xx} + 4uu_{xxx} + 2u_x u_{xxx} - 2u_{xx}u_{xxx} = 0. \quad (109)$$

Teorema B.1. *Uma base para os geradores de simetrias de Lie da equação (109) é dada por*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = e^{2x}\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_\infty = f(t)e^{-x}\frac{\partial}{\partial u},$$

em que f é uma função diferenciável na variável t.

Teorema B.2. *A equação (109) admite os seguintes multiplicadores de ordem 0 e 2*

$$\phi_1 = 1,\ \phi_2 = e^{-2x}(u_t + u_{tx}),\ \phi_3 = e^{-2x}(-u + u_{xx} - tu_t - tu_{tx}).$$

Consequentemente, as leis de conservação para a equação (109) são dadas pelas correntes conservadas:

1. *para o multiplicador ϕ_1 teremos a corrente conservada $C = (C_1^0, C_1^1)$, em que*

$$C_1^0 = u - u_{xx},$$

$$C_1^1 = -4u^2 - 4uu_x - u_x^2 + 4uu_{xx} + 2u_x u_{xx} - u_{xx}^2.$$

2. *para o multiplicador ϕ_2 teremos a corrente conservada $C = (C_2^0, C_2^1)$, em que*

$$C_2^0 = \frac{e^{-2x}}{3}(18uu_x^2 + 6uu_{xx}^2 + 5u_x^3 + 3u_x u_{xx}^2 - u_{xx}^3),$$

$$C_2^1 = \frac{e^{-2x}}{2}(8uu_t u_x + 8uu_t u_{xx} + 8uu_{tx}u_{xx} + 2u_t u_x^2 + 4u_t u_x u_{xx} - 2u_t u_{xx}^2 + 4u_x u_{xx} u_{tx} \\ - 2u_{tx}u_{xx}^2 - u_t^2 - 2u_t u_{tx} - u_{tx}^2).$$

3. *para o multiplicador* ϕ_3 *teremos a corrente conservada* $C = (C_3^0, C_3^1)$*, em que*

$$C_3^0 = -\frac{e^{-2x}}{6}(3u^2 - 36tuu_x^2 - 12tuu_{xx}^2 - 10tu_x^3 - 6tu_x u_{xx}^2 + 2tu_{xx}^3 - 6uu_{xx} + 3u_{xx}^2),$$

$$C_3^1 = -\frac{e^{-2x}}{6}(24u^2u_x + 24u^2u_{xx} + 18uu_x^2 + 24tuu_tu_x + 24tuu_tu_{xx} + 24tuu_{tx}u_{xx} + 6tu_tu_x^2$$
$$+ 12tu_tu_xu_{xx} - 6tu_tu_{xx}^2 + 12tu_xu_{xx}u_{tx} - 6tu_{tx}u_{xx}^2 + 12uu_xu_{xx} - 18uu_{xx}^2 - 3tu_t^2$$
$$- 6tu_tu_{tx} - 3tu_{tx}^2 + 4u_x^3 - 6u_xu_{xx}^2 + 4u_{xx}^3).$$

C APÊNDICE: EQUAÇÃO 20, [*THEOREM* 3, [25]]

Considere a equação

$$u_t - u_{txx} - 8uu_x - 4u_x^2 + 10u_xu_{xx} - 4uu_{xx} - 2u_{xx}^2 + 4uu_{xxx} - 2u_xu_{xxx} = 0. \tag{110}$$

Teorema C.1. *Uma base para os geradores de simetrias de Lie da equação (110) é dada por*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = e^{2x}\frac{\partial}{\partial u}.$$

Teorema C.2. *A equação (110) admite os seguintes multiplicadores de ordem* 0

$$\phi_1 = 1,\ \phi_2 = f(t)e^x,$$

em que f é uma função diferenciável na variável t.

Consequentemente, as leis de conservação para a equação (110) são dadas pelas correntes conservadas:

1. *para o multiplicador ϕ_1 teremos a corrente conservada $C = (C_1^0, C_1^1)$, em que*

$$C_1^0 = u - u_{xx},$$

$$C_1^1 = -4u^2 - 4uu_x + 3u_x^2 + 4uu_{xx} - 2u_xu_{xx}.$$

2. *para o multiplicador ϕ_2, se $f(t) \neq 0\ \forall\ t \in \mathbb{R}$, teremos a corrente conservada $C = (C_2^0, C_2^1)$, em que $C = (C_2^0, C_2^1)$, em que*

$$C_2^0 = f(t)e^x(u - u_{xx}),$$

$$C_2^1 = e^x\left[f(t)(-8uu_x + 4u_x^2 + 4uu_{xx} - 2u_xu_{xx}) - f'(t)(u - u_x)\right].$$

BIBLIOGRAFIA

[1] ANCO, S. C., BLUMAN, G. W. and CHEVIAKOV, A. F. *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Springer Applied Mathematics Series, Spring, vol. 168, New York, 2010.

[2] ANCO, S. and BLUMAN, G. *Direct construction method for conservation laws of partial differential equations Part II: General treatment*, European Journal of Applied Mathematics, vol. 13, 567-585, 2002.

[3] BACANI, F. *Tratamento de modelos para a dinâmica populacional do Aedes aegypti via simetrias de Lie*, Tese de Doutorado, Unicamp, 2016.

[4] BLUMAN, G. W. and KUMEI, S. *Symmetries and Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer, vol. 81, New York, 1989

[5] BOZHKOV Y., FREIRE, I.L., IBRAGIMOV N. *Group analysis of the Novikov equation*, Computational and Applied Mathematics, vol. 33, 193-202, 2014.

[6] CAMASSA, R. and HOLM, D. D. *An integrable shallow water equation with peaked solitons*, Physical Review Letters, vol. 71, 1661–1664, 1993.

[7] CHEVIAKOV, A. F. *GeM software package for computation of symmetries and conservation laws of differential equations*, Computer Physics Communications, vol. 176, 48-61, 2007.

[8] CHEVIAKOV, A. F. *Symbolic computation of local symmetries of nonlinear and linear partial and ordinary differential equations*, Mathematics Computer Science, vol. 4, 203–222, 2010.

[9] CHEVIAKOV, A. F. *Computation of fluxes of conservation laws*, Journal of Engineering Mathematics, vol. 66, 153–173, 2010.

[10] CHEVIAKOV, A. F. *Symbolic computation of nonlocal symmetries and nonlocal conservation laws of partial differential equations using the GeM package for Maple*, in: Similarity

and Symmetry Methods, in: Lecture Notes 165 in Applied and Computational Mechanics, vol. 73, Springer, 2014.

[11] CHEVIAKOV, A. F. *Symbolic computation of equivalence transformations and parameter reduction for nonlinear physical models*, Computer Physics Communications, vol. 220, 56–73, 2017.

[12] CLARKSON P.A., MANSFIELD E.L., PRIESTLEY T.J. *Symmetries of a class of nonlinear third-order partial differential equations*, Mathematical and Computer Modelling, vol. 25, 195-212, 1997.

[13] DA SILVA, P. L. *Propriedades álgebro-geométricas de certas equações diferenciais*, Tese de Doutorado, UFABC, 2016.

[14] DEGASPERIS, A., PROCESI, M. *Asymptotic integrability*, in: Symmetry and Perturbation Theory, World Scientific, 23-37, Singapore, 1999.

[15] DIMAS, S., TSOUBELIS, D. *SYM: A new symmetry-finding package for Mathematica*, In: Proceedings of the 10th international conference in modern group analysis, University of Cyprus Press, p. 64–70, 2004.

[16] FOKAS, A. S. and FUCHSSTEINER, B. *Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries*, Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 4, 47-66, 1981.

[17] FREIRE, I. L. *Simetrias de Lie de equações diferenciais parciais semilineares envolvendo o operador de Kohn-Laplace no grupo de Heisenberg*, Tese de Doutorado, Unicamp, 2008.

[18] FREIRE, I. L., SALES FILHO, N., DE SOUZA, L. C. and TOFFOLI, C. E. *Invariants and wave breaking analysis of a Camassa-Holm type equation with quadratic and cubic non-linearities*, Journal of Differential Equations, vol. 269, 56–77, 2020.

[19] FREIRE, I.L., TITO, R.S. *A Novikov equation describing pseudo-spherical surfaces, its pseudo-potentials, and local isometric immersions*, Studies in Applied Mathematics, 2021.

[20] HYDON, P. E. *Symmetry methods for diferential equations: A beginner's guide*, Cambridge texts in applied mathematics, New York, 2000.

[21] IBRAGIMOV, N. H. *A practical course in differential equations and Mathematical modelling*, World Scientific, Singapore, 2010.

[22] IBRAGIMOV, N. H. *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, Volume 1: Symmetries exact solutions and conservation laws*, CRC Press, Boca Raton, 1994.

[23] IBRAGIMOV, N. H. *Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations*, John Wiley and Sons, United Kingdom, 1999.

[24] IBRAGIMOV, N. H. *Transformation groups and Lie algebras*, World Scientific, Singapore, 2013.

[25] NOVIKOV, V. *Generalizations of the Camassa-Holm equation*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol. 42, paper 342002, 2009.

[26] OLVER, P. J. *Applications of Lie groups to differential equations*, Graduate texts in mathematics, Springer, vol. 107, New York, 2nd edition, 1993.

[27] OLVER, P. J. *Conservation laws and null divergences*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 94, 529–540, 1983.

[28] SAMPAIO, J. C. S. *Sobre simetrias e a teoria de leis de conservação de Ibragimov*, Tese de Doutorado, Unicamp, 2015.