



Universidade Federal do ABC

PRISCILA LEAL DA SILVA

# Propriedades álgebro-geométricas de certas equações diferenciais

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da  
FAPESP (processo número 2012/22725-4) e da CAPES

Santo André, 2016





Universidade Federal do ABC

**Universidade Federal do ABC**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**Priscila Leal da Silva**

# **Propriedades álgebro-geométricas de certas equações diferenciais**

**Orientador: Prof. Dr. Igor Leite Freire**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática para obtenção do título de Doutor em Matemática

ESTA É A VERSÃO ORIGINAL DA TESE, TAL COMO  
SUBMETIDA À COMISSÃO JULGADORA.

**Santo André, 2016**

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

da Silva, Priscila Leal  
Propriedades álgebro-geométricas de certas equações  
diferenciais / Priscila Leal da Silva. — 2016.

187 fls. : il.

Orientador: Igor Leite Freire

Tese (Doutorado) — Universidade Federal do ABC, Programa de  
Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2016.

1. Simetrias. 2. Leis de Conservação. 3. Peakons. 4.  
Integrabilidade. I. Freire, Igor Leite. II. Programa de Pós-Graduação  
em Matemática, 2016. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 29 de dezembro de 2016.

Assinatura do autor: Priscila L. da Silva

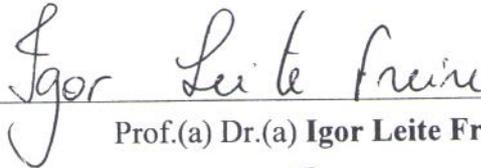
Assinatura do orientador: José Leite Freire



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Fundação Universidade Federal do ABC  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017  
ppg.matematica@ufabc.edu.br

## FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Priscila Leal da Silva, realizada em 16 de dezembro de 2016:



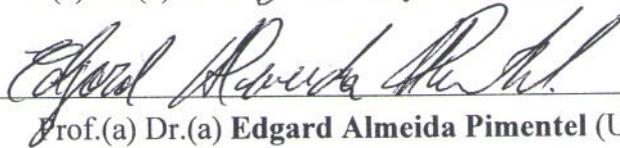
Prof.(a) Dr.(a) **Igor Leite Freire** (UFABC) – Presidente



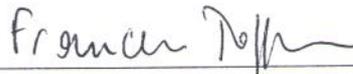
Prof.(a) Dr.(a) **Stylianos Dimas** (UFABC) – Membro Titular



Prof.(a) Dr.(a) **Zhanna Gennadyevna Kuznetsova** (UFABC) – Membro Titular



Prof.(a) Dr.(a) **Edgard Almeida Pimentel** (UFSCAR) – Membro Titular



Prof.(a) Dr.(a) **Francesco Toppan** (CBPF) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Júlio Cesar Santos Sampaio** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Antonio Carlos Gilli Martins** (UNICAMP) – Membro Suplente

Dedico esta tese aos meus pais Neide  
e Osvandir e à minha madrinha Silvana (*in memoriam*).



## AGRADECIMENTOS

Certamente mais difícil do que escrever o texto técnico e formal que se segue é descrever o sentimento de dar talvez o passo mais importante da sua vida. E agradecer a todos de maneira justa beira o impossível.

Os últimos quatro anos foram intensos e extenuantes, cheios de reveses que muitas vezes trouxeram a sensação de talvez não ter escolhido o caminho certo. Lembro-me claramente dos meus medos, das minhas inseguranças, das dúvidas, do sentimento de incapacidade e da inexistência de um único mês sem pensar em desistir. Por outro lado, penso nas diversas oportunidades que surgiram e continuam surgindo e sempre procurei aproveitá-las da melhor maneira possível. Ser duas vezes finalista de uma competição internacional foram provavelmente as conquistas profissionais mais importantes que tive. Hoje eu tenho certeza de que a dedicação nos leva ao céu, por mais que o caminho seja tortuoso; hoje eu sei que nada é impossível desde que a batalha em busca de um objetivo seja incessante.

Muitas vezes a vida não faz justiça às pessoas merecedoras, e infelizmente esse é o nosso caso. Oposto à última vez, começo agradecendo à minha *Dinha*, que mesmo não estando ao meu lado hoje, certamente está vendo o caminho que trilhamos e o que estamos prestes a conquistar. Muito obrigada por todo o amor que existiu nos curtos 17 anos de convivência e que ainda existe, cada vez maior. Por, apesar de tudo, ter me deixado mais forte e mais preparada para enfrentar o mundo.

Aos pais mais maravilhosos do mundo, devo tudo a vocês. Pelos princípios, pelo amor, pelas broncas, pelo respeito, pelo ombro amigo quando precisei chorar, por todo o sacrifício que fizeram por mim, pela luta incessante por uma vida melhor, por me ensinarem o que é uma família. Por sempre me apoiarem, seja jogando damas, futebol, cantando ou até aprendendo matemática. Por fazerem dos meus sonhos os nossos sonhos. O que vem a seguir assusta bastante, porém eu sei que sempre vou tê-los ao meu lado, guiando-me e me deixando mais segura para que tudo ocorra da melhor maneira possível. Imagino que não entenderão o que se segue nesta tese, mas tenham a certeza de que coloco meu coração e todo o meu amor a vocês ao dizer que nada do que está escrito aqui seria possível sem vocês.

Agradeço ao professor Igor Leite Freire por ter acolhido aquela menina perdida e crua e tê-la transformado em alguém ligeiramente versada, por tê-la proporcionado tanto conhecimento e por incentivá-la a sempre buscar mais. Pela amizade, pela confiança, pela dedicação, por ter se tornado parte da minha família, por acreditar em mim e sempre buscar tirar o melhor de mim. Espelho-me em você pessoal e profissionalmente e espero um dia te deixar orgulhoso por quem eu venha a me tornar. Nunca me esquecerei das conversas em momentos improváveis e hoje dou muito valor à toda curiosidade que você fez nascer em mim. Procurarei trabalhar cada dia mais duro para que possa contribuir, de alguma maneira, para o enriquecimento da ciência.

Ao professor Mariano Torrisi deixo meus agradecimentos por todo o ensinamento profissional e pessoal que me proporcionou durante suas visitas ao Brasil. *Oggi io so che non ho bisogno di prepararmi, ho bisogno di essere pronta. Grazie mille, professore.*

Aos professores Zhanna Gennadyevna Kuznetsova e Francesco Toppan pelas frutíferas discussões sobre um dos meus trabalhos. Recordo-me de encontrar o tão procurado par de Lax e sorrir pensando nos seminários que apresentei e de discutirmos possíveis maneiras de encontrá-lo.

Aos professor Stylianos Dimas, agradeço pelas diversas vezes em que me ajudou com o Mathematica. Acredito que hoje parte dos nossos resultados não estariam prontos sem a sua ajuda.

Aos professores Juliana Fernandes da Silva Pimentel e Edgard Almeida Pimentel agradeço por ajudarem na minha preparação para a AIMS de 2016. O apoio de vocês me deixou mais confiante para seguir minha jornada no Doutorado.

Agradeço aos diversos professores que acompanham a minha jornada durante a graduação e a pós por me ajudarem a entender quem eu era como matemática.

Aos colegas de pós-graduação, Altemir, Rian, Samuel e Vanessa, com quem compartilhei vários momentos de desespero e felicidade ao ver a defesa de uns, qualificação de outros e frustrações naturais da vida universitária, gostaria de deixar meus profundos agradecimentos e dizer que a caminhada é longa e tortuosa, mas com trabalho duro as dificuldades serão superadas. Continuem firmes!

Hoje deixo a UFABC, após tantos anos de dedicação, com um sentimento de tristeza e de eterno agradecimento. Foram nove anos de convívio, de dificuldades, tristezas e alegrias. Espero partir deixando uma boa lembrança de tudo que conquistei na primeira tese defendida do Doutorado em Matemática.

*“Pain is temporary. It may last a minute, or an hour, or a day, or a year, but eventually it will subside and something else will take its place. If I quit, however, it lasts forever.”*

**Lance Armstrong**



## RESUMO

Neste trabalho estudamos diversos aspectos de algumas classes de equações ou sistemas de equações. Simetrias de Lie, de Noether, leis de conservação derivadas do Teorema de Noether e soluções invariantes são obtidas para uma classe de equações diferenciais ordinárias. Também consideramos equações e sistemas do tipo Camassa-Holm, alguns dos quais foram obtidos como soluções de um problema inverso. Para todos são encontradas as simetrias de Lie e, para alguns, obtemos leis de conservação utilizando o Teorema de Ibragimov. Além disso, para casos particulares das equações deduzidas via problema inverso, investigamos a existência de soluções *peakon* e *multipeakon*. Finalmente, consideramos uma família de equações evolutivas, a qual admite soluções *peakon* e membros integráveis.

**Palavras-chave:** Simetrias, leis de conservação, *peakons*, integrabilidade



## ABSTRACT

In this work we study several aspects of some families of differential equations and systems. Lie point symmetries, Noether symmetries, conservation laws obtained from Noether Theorem and invariant solutions are derived for a class of ordinary differential equations. We also consider Camassa-Holm type equations and systems, some of which deduced from an inverse problem. For all of them we obtain Lie point symmetry classifications and, for some, conservation laws using Ibragimov's Theorem. Furthermore, for particular cases of the equations obtained as an inverse problem, we investigate the existence of peakon and multipeakon solutions. Finally, we consider a family of evolution equations, which admits peakon solutions and integrable members.

**Keywords:** Symmetries, conservation laws, *peakons*, integrability



# CONTEÚDO

1	INTRODUÇÃO	1
2	SIMETRIAS DE LIE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	5
2.1	Variedades diferenciáveis	5
2.2	Espaço de $k$ -jatos e sistemas de equações diferenciais	14
2.3	Grupos locais de transformações a 1-parâmetro	24
2.4	Grupos de simetrias e invariantes	37
2.5	Simetrias de sistemas de equações diferenciais e condição de invariância	45
2.6	Soluções invariantes	61
3	TEOREMAS DE CLASSIFICAÇÃO DE SIMETRIAS DE LIE	67
3.1	Classe de equações diferenciais ordinárias autônomas de ordem par	69
3.2	Equação de Novikov modificada	74
3.3	Uma classe de equações que unifica as equações de Camassa-Holm e Novikov	76
3.4	Um sistema de equações diferenciais parciais	78
3.5	Equação de Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov	79
3.6	Comentários sobre este capítulo	81
4	SIMETRIAS E LEIS DE CONSERVAÇÃO	83
4.1	Conservação de momento linear	84
4.2	Leis de conservação	86
4.3	Teorema de Noether	95
4.4	Teorema de Ibragimov	101
4.5	Teoremas de leis de conservação	110
4.5.1	Classe de equações diferenciais ordinárias autônomas de ordem par	110
4.5.2	Uma classe de equações que unifica as equações de Camassa-Holm e Novikov	111

4.5.3	Equação de Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov	114
5	O PROBLEMA INVERSO	115
5.1	Subfamília invariante por dilatações	118
5.2	Subfamília estritamente auto-adjunta	118
5.3	O caso $b \neq 0$ e suas consequências	120
5.4	Caso $b = 0$ : uma equação evolutiva com propriedades especiais	122
6	TEORIA DE DISTRIBUIÇÕES E SOLUÇÕES PEAKON	129
6.1	Espaços $L^p$	130
6.2	O espaço de distribuições	134
6.3	Soluções do tipo peakon	142
6.3.1	Uma classe de equações que unifica as equações de Camassa-Holm e Novikov	147
6.3.2	Uma família homogênea de equações evolutivas	150
7	CONCLUSÕES	153
	Referências Bibliográficas	155
	Índice Remissivo	164

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Diferenciabilidade de uma função	7
Figura 2	Diferencial de uma função	9
Figura 3	Diferencial em coordenadas	12
Figura 4	Sistema de coordenadas adaptadas	15
Figura 5	Órbitas da dilatação - Exemplo 2.3.5	26
Figura 6	Órbitas da dilatação - Exemplo 2.3.6	27
Figura 7	Órbitas da dilatação - Exemplo 2.3.7	28
Figura 8	Órbitas da transformação projetiva - Exemplo 2.3.11	31
Figura 9	Soluções invariantes	74
Figura 10	Solução $u(x, t) = t^{1/6} Ai\left(\frac{x}{(6t)^{1/3}}\right)$ .	128
Figura 11	Solução $u(x, t) = \operatorname{tgh}\left(\frac{c}{2}(x + ct)\right)$ .	128
Figura 12	Gráfico da função $f(x) = e^{- x }$ .	141
Figura 13	Gráfico da função $h(x) = -\operatorname{sign}(x)e^{- x }$ .	141
Figura 14	Gráfico da função $g(x) = \sin( x )$ .	144
Figura 15	Gráfico da função $h(x, t) = e^{- x }/\sqrt{t}$ .	146
Figura 16	Gráfico da função $h(0, t)$ .	146
Figura 17	Gráfico da função $u(x, t) = 4^{1/3}e^{- x-4t }$ .	149
Figura 18	Gráfico da curva $u(2, t) = 4^{1/3}e^{- 2-4t }$ .	149
Figura 19	Gráfico da superfície $u(x, t) = e^{-\sqrt{\frac{c}{2a}} x-ct }$ com $c = 3$ e $a = 1$ .	151
Figura 20	Gráfico da função $u(x, t) = \sin\left(-\sqrt{\frac{c}{2a}} x-ct \right)$ com $c = 2$ e $a = -2$ .	152



# 1

## INTRODUÇÃO

Ao iniciar o Mestrado, no ano de 2013, minha dissertação deveria discorrer sobre o chamado Teorema de Ibragimov e estruturá-lo em termos de teoria de operadores, o que até hoje não foi feito. A princípio eu não conhecia as técnicas utilizadas em tal teorema, mas sabia que possuía relações com o Teorema de Noether que, por sua vez, relaciona simetrias de equações com quantidades conservadas. Como em meu Trabalho de Conclusão de Curso [23, 48] já havia estudado o Teorema de Noether aplicado a equações diferenciais ordinárias, a transição acabou não sendo traumática.

Nosso primeiro passo foi estudar a equação de Novikov modificada

$$u_t - u_{txx} + (b + 1)u^2u_x - buu_xu_{xx} - u_{xxx} = 0$$

do ponto de vista do conceito de auto-adjuncidade estrita proposto por Ibragimov [60, 65]. Provamos que apenas o caso especial  $b = 3$ , já conhecido na literatura e chamado de equação de Novikov, admitia tal propriedade.

Ao descobrir um congresso a ser realizado em julho de 2013 na cidade de Waterloo, Canadá, perguntei ao meu orientador se poderia enviar tal trabalho para apresentação em pôster. Recebi resposta positiva e no referido período apresentei em painel o trabalho intitulado “*On the group analysis of a modified Novikov equation*” no *Interdisciplinary International Conference on Applied Mathematics, Modeling and Computational Science (AMMCS 2013)*, o que culminou num capítulo de livro publicado pela Springer [29]. Os resultados ali publicados correspondem ao Teorema 3.2.1 e partes dos Teoremas 4.5.4 e 4.5.5. Mais importante do que a publicação em si, o congresso me propiciou a oportunidade de conhecer pesquisadores que até então apenas conhecia por seus trabalhos. O contato que tive com Maria Gandarias (*Universidad de Cádiz, Espanha*) e Chaudry Masood Khaliq (*Northwest University, África do Sul*) gerou um convite para participação na *10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (AIMS 2014)*, congresso este que mudaria drasticamente os rumos da minha dissertação.

Paralelamente ao AMMCS 2013, trabalhávamos para encontrar grupos de simetria de Lie, Noether, primeiras integrais e soluções da equação

$$y^{(2n)} + f(y) = 0, \quad (1.1)$$

onde  $n$  é num inteiro positivo. Esta equação generaliza parcialmente nossos resultados anteriores acerca da família de equações

$$y'''' + \alpha x^\gamma y^p = 0, \quad \alpha \neq 0, \gamma \in \mathbb{R}, p \notin \{0, 1\},$$

cujos resultados foram publicados em [48] e foi a base do material do meu Trabalho de Conclusão de Curso para obtenção do título de bacharela em Matemática [23]. Os resultados relativos à equação (1.1) foram publicados no *IMA Journal of Applied Mathematics* [31] e correspondem aos Teoremas 3.1.2, 4.5.1, 4.5.2 e 4.5.3 desta tese.

No último semestre de 2013, ainda influenciados pela equação de Novikov modificada, tentamos entender qual era a relação entre nossos resultados e as diversas outras equações importantes que haviam surgido nos últimos anos e que possuíam a mesma propriedade de auto-adjunticidade. Juntando alguns resultados da literatura, percebemos que a equação de Novikov

$$u_t - u_{txx} + 4u^2u_x - 3uu_xu_{xx} - u^2u_{xxx} = 0$$

e a chamada de equação de Camassa-Holm

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x - 2u_xu_{xx} - uu_{xxx} = 0$$

tinham propriedades de auto-adjunticidade e simetria em comum. Deduzimos então a família de equações

$$u_t - u_{txx} + (b+2)u^b u_x - (b+1)u^{b-1}u_x u_{xx} - u^b u_{xxx} = 0 \quad (1.2)$$

que possui ambas as propriedades e que unificava as equações de Camassa-Holm e Novikov, veja [30]. Diante do convite para participação na AIMS 2014, realizado em julho de 2014 em Madri, Espanha, submetemos nossos resultados para a *Student Paper Competition* e fui selecionada como finalista. Além da grande oportunidade de pela primeira vez oralmente apresentar um trabalho em inglês, o reconhecimento pelo trabalho bem feito foi o melhor prêmio que eu poderia receber. Como se tal prêmio já não fosse o suficiente, outra apresentação rendeu frutos ainda maiores.

Na seção especial conduzida por Gandarias e Khaliq, tive a oportunidade de apresentar o mesmo trabalho para um público bem mais familiarizado com o tema. Um dos presentes era o renomado Stephen Anco (*Brock University, Canadá*) e meu trabalho rendeu discussões sobre assuntos bem mais profundos, como a existência de soluções especiais e outras propriedades da família que havíamos deduzido.

Voltando ao Brasil, tínhamos estabelecido colaboração com Anco e trabalhávamos remotamente. Porém, nesta época eu deveria qualificar e preparar minha dissertação de Mestrado. Foi então que a situação mudou drasticamente.

Decidimos que seria melhor converter meu Mestrado para Doutorado Direto e, desta forma, teríamos tempo para continuar desenvolvendo pesquisa sem nos preocuparmos com a defesa do Mestrado. Este tempo a mais que tivemos culminou no aprofundamento do estudo da equação que tínhamos deduzido e passamos então a analisar propriedades que até então não considerávamos. Do estudo de simetrias e Teorema de Ibragimov, passamos a estudar integrabilidade de equações e certas soluções “estranhas”. Ou seja, em termos de teoria e novos estudos era como se um novo projeto começasse.

Passamos a estudar aspectos geométricos mais profundos, como estruturas simpléticas, métodos algébricos para obtenção de infinitas simetrias e a chamada Teoria de Distribuições para as soluções. Os resultados da colaboração com S. Anco é um trabalho publicado no *Journal of Mathematical Physics* [7] e aparecem como os Teoremas 3.3.1, 4.5.4 e 4.5.5 e nas soluções da Subseção 6.3.1.

Como nosso interesse havia mudado de simetrias para integrabilidade e soluções do tipo *peakon* de equações diferenciais parciais, em 2015 meu orientador aproveitou o estudo da família de equações

$$u_t + 2a \frac{u_x u_{xx}}{u} = \epsilon a u_{xxx} = 0, \quad \epsilon, a \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

que ele e Júlio Cesar Santos Sampaio estavam desenvolvendo e me propôs a análise da integrabilidade da equação em questão. Obtivemos resultados interessantes não somente sobre integrabilidade e soluções *peakon*, mas também sobre obtenção de soluções da equação que estudávamos a partir de soluções de equações já bem estabelecidas na literatura. O resultado de tais estudos é o trabalho [33], que atualmente encontra-se submetido a um periódico internacional.

Nesta tese, procuramos ilustrar a teoria com exemplos próprios ou que serão importantes para conceitos posteriores. De maneira geral, por **Proposição** e **Lema** nos referiremos a resultados já estabelecidos na literatura que não são de nossa autoria. Algumas proposições mais famosas, como Teorema da Aplicação Implícita ou Teorema de

Noether, levam seus respectivos nomes. Por outro lado, nossos resultados são chamados de **Teorema**. Com relação aos frutos originais desta tese, tivemos dois artigos publicados [7, 31], um capítulo de livro [29], diversos *proceedings* de congressos [25, 26, 27, 28, 32], além de dois artigos atualmente submetidos a periódicos internacionais [24, 33].

A presente tese está estruturada da seguinte forma:

- No Capítulo 2 discutiremos a teoria de variedades diferenciáveis para que de maneira geométrica possamos definir equações diferenciais, simetrias de Lie e soluções invariantes;
- No Capítulo 3 apresentaremos resultados originais acerca de classificação de simetrias de Lie e soluções invariantes de algumas equações que trabalhamos nos últimos quatro anos;
- No Capítulo 4 formalizaremos a teoria de leis de conservação, auto-adjunticidade e Teoremas de Noether e Ibragimov para encontrarmos leis de conservação de equações. Nas Seções 4.5.1, 4.5.2 e 4.5.3 exibimos resultados originais sobre leis de conservação;
- No Capítulo 5 discorreremos sobre a motivação que nos levou a estudar equações diferenciais parciais de um novo ponto de vista. Deduzimos duas classes de equações diferenciais com membros integráveis. Uma, não-evolutiva dada por (1.2), unifica as equações de Camassa-Holm e Novikov. A outra, que inclui a equação evolutiva (1.3);
- No Capítulo 6 estudamos princípios de análise funcional e estruturamos a teoria de distribuições. Na Seção 6.3 definimos soluções *peakon* e encontramos tais soluções para duas famílias de equações.
- Finalmente, no Capítulo 7 apresentamos as conclusões desta tese.

# 2

## SIMETRIAS DE LIE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

De maneira ingênua, uma simetria de Lie de um determinado sistema de equações diferenciais é um grupo de transformações agindo no espaço de variáveis dependentes e independentes que de alguma maneira deixa o sistema invariante. Tal sistema, de ordem  $k$ , geralmente é abordado simplesmente como uma expressão da forma

$$F_\alpha(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(k)}) = 0,$$

onde  $\alpha = 1, 2, \dots, r$ ;  $x \in \mathbb{R}^m$ ;  $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função suficientemente diferenciável, e  $u_{(j)}$  representa o conjunto de derivadas de  $u$  de ordem  $j$ .

Do ponto de vista prático do estudo de invariância do sistema, tal definição de simetria é suficiente no sentido de que uma construção mais rigorosa não se faz necessária para a obtenção das simetrias. Por outro lado, uma vez que estamos lidando com propriedades geométricas de objetos como equações diferenciais e grupos de simetria, é importante darmos uma estrutura mais robusta para tais entidades a fim de estabelecermos conexões formais entre elas. Nesse sentido, as chamadas variedades diferenciáveis se tornam o ambiente matemático natural para tal objetivo. Como consequência construiremos a variedade de jatos, que reduz um sistema de equações diferenciais a uma subvariedade da variedade de jatos e simetrias de Lie a fluxos de seções do fibrado de jatos.

### 2.1 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

As variedades diferenciáveis generalizam os conceitos familiares de curvas e superfícies no espaço  $\mathbb{R}^3$ , veja [76]. Em geral, uma variedade de dimensão  $m$  é um espaço de Hausdorff que localmente se comporta como o  $\mathbb{R}^m$ , mas que globalmente pode ter propriedades bem diferentes.

**Definição 2.1.1.** Uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  é um espaço de Hausdorff  $M$  munido de uma família enumerável  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in I \subset \mathbb{N}\}$  de abertos  $U_\alpha \subset M$ , chamada de atlas, e homeomorfismos  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$  que satisfazem as seguintes propriedades:

(a) A família  $\{U_\alpha, \alpha \in I\}$  cobre  $M$ :

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M.$$

(b)  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$  ou a função de transição

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é infinitamente diferenciável no sentido usual de análise,  $\forall \alpha, \beta \in I$ .

Na definição anterior, chamamos cada  $U_\alpha$  de domínio coordenado,  $\varphi_\alpha$  é a correspondente função coordenada local e dizemos que o par  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  é uma carta coordenada em  $M$ . Para cada  $p \in M$  e cada carta  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  de  $M$  com  $p \in U$ , denotaremos por  $\hat{p} := \varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$  as coordenadas locais de  $p$  em  $\mathbb{R}^m$ .

**Exemplo 2.1.1.** O espaço  $\mathbb{R}^m$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $m$ . De fato,  $id : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  define um homeomorfismo global.

De maneira mais geral, se  $M$  é uma variedade de dimensão  $m$ ,  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in I\}$  é um atlas em  $M$  e  $U \subset M$  é um aberto (portanto Hausdorff), definindo  $V_\alpha = W_\alpha \cap U$ , temos que  $\mathcal{B} = \{V_\alpha, \varphi_\alpha|_{V_\alpha}\}$  define um atlas em  $U$ . De fato, as condições (a) e (b) são satisfeitas e  $U$  é chamado de subvariedade aberta de  $M$ .

Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades diferenciáveis de dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente, e  $F : M \rightarrow N$  uma função. Dizemos que  $F$  é uma função infinitamente diferenciável se, para todo  $p \in M$ , existem cartas  $(U, \varphi)$  de  $M$ , com  $p \in U$ , e  $(V, \psi)$  de  $N$ , com  $F(U) \subset V$ , tais que a representação coordenada de  $F$

$$\tilde{F} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$$

seja infinitamente diferenciável. Se  $F$  é infinitamente diferenciável, simplesmente diremos que  $F$  é diferenciável.

A diferenciabilidade é uma propriedade intrínseca da função em termos das estruturas diferenciáveis das variedades em questão.

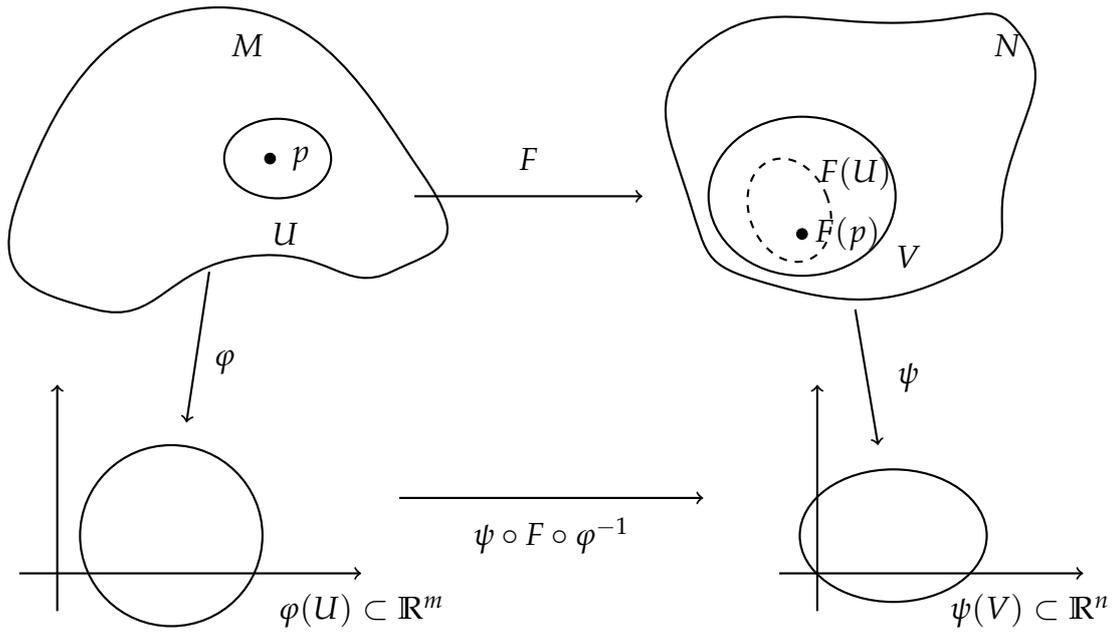


Figura 1: Diferenciabilidade de  $F$ .

**Proposição 2.1.1.** Sejam  $M, N$  e  $P$  variedades diferenciáveis.

- (a) Toda função diferenciável  $F : M \rightarrow N$  é contínua;
- (b) A função identidade  $\text{id} : M \rightarrow M$  é diferenciável;
- (c) Se  $U \subset M$  é um aberto, então a inclusão  $i : U \hookrightarrow M$ , dada por  $i(x) = x$ , é diferenciável;
- (d) Se  $F : M \rightarrow N$  e  $G : N \rightarrow P$  são diferenciáveis, então  $G \circ F : M \rightarrow P$  também o é.

*Demonstração.* Veja [76], *Proposition 2.4* (página 34) para o item (a) e *Proposition 2.10* (página 36) para os demais. □

**Proposição 2.1.2.** Suponha que  $M_1, \dots, M_k, N$  sejam variedades diferenciáveis. Para cada  $i$ , seja  $\pi_i : M_1 \times \dots \times M_i \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$  a projeção em  $M_i$ . Então  $F : N \rightarrow M_1 \times \dots \times M_k$  é diferenciável se, e somente se, cada uma de suas funções componentes  $F_i = \pi_i \circ F : N \rightarrow M_i$  o for.

*Demonstração.* Veja [76], *Proposition 2.12* (página 36). □

Se  $M$  e  $N$  são variedades diferenciáveis, definimos um difeomorfismo  $F : M \rightarrow N$  como sendo uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável. Se existe tal difeomor-

fismo entre  $M$  e  $N$ , dizemos que as variedades são difeomorfas. Duas variedades  $M$  e  $N$  não podem ser difeomorfas a não ser que  $\dim M = \dim N$ .

Da Proposição 2.1.1 temos que todo difeomorfismo é um homeomorfismo, composição de difeomorfismos também é um difeomorfismo e a restrição de um difeomorfismo a um aberto  $U$  é um difeomorfismo entre  $U$  e sua imagem. Além disso, serem difeomorfas define uma relação de equivalência na classe de todas as variedades diferenciáveis.

Denote por  $C^\infty(M)$  o conjunto de todas as funções  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  infinitamente diferenciáveis e seja  $p \in M$ . Se  $F, G \in C^\infty(M)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então a soma e multiplicação usuais

$$(F + G)(p) := F(p) + G(p), \quad (\alpha F)(p) := \alpha F(p)$$

dão a  $C^\infty(M)$  uma estrutura de espaço vetorial. Uma transformação linear  $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser uma derivação em  $p$  se,  $\forall f, g \in C^\infty(M)$ , a regra de Leibniz

$$v(fg) = f(p)v g + g(p)v f$$

for satisfeita.

O conjunto de todas as derivações em  $C^\infty(M)$  em  $p$ , denotado por  $T_p M$ , é chamado de *espaço tangente a  $M$  em  $p$*  e os elementos  $v \in T_p M$  são os *vetores tangentes*. Quando munimos  $T_p M$  das operações usuais de soma e multiplicação damos ao espaço tangente uma estrutura de espaço vetorial.

Uma vez que definimos função diferenciável entre variedades, o próximo passo é explorar como funções diferenciáveis afetam o plano tangente.

**Definição 2.1.2.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis e  $F : M \rightarrow N$  uma função diferenciável. Dado  $v \in T_p M$ , a diferencial de  $F$  no ponto  $p \in M$  é a transformação linear

$$dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N,$$

definida por

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F), \quad \forall f \in C^\infty(N).$$

Similarmente às propriedades que conhecemos em  $\mathbb{R}^n$ , temos:

**Proposição 2.1.3.** Sejam  $M, N$  e  $P$  variedades diferenciáveis,  $F : M \rightarrow N$ ,  $G : N \rightarrow P$  funções diferenciáveis e  $p \in M$ . Então:

$$(a) \quad d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_p M \rightarrow T_{G \circ F(p)} P;$$

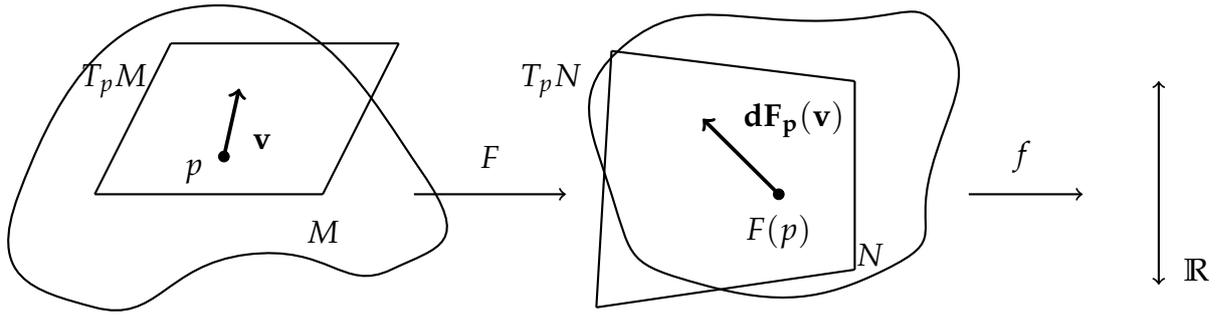


Figura 2: A diferencial de uma função  $F : M \rightarrow N$ . Note que ela transporta vetores tangentes  $v \in T_pM$  a vetores tangentes  $dF_p(v) \in T_{F(p)}N$ .

(b)  $d(\text{id}_M)_p = \text{id}_{T_pM} : T_pM \rightarrow T_pM$ ;

(c) Se  $F$  é um difeomorfismo, então  $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$  é um isomorfismo.

*Demonstração.* Veja [76], *Proposition 3.6* (página 55). □

O que queremos, na verdade, é utilizar coordenadas para relacionar o espaço tangente em  $M$  com o espaço tangente em  $\mathbb{R}^m$ . Porém, o problema que encontramos nesse momento é que, enquanto definimos o espaço tangente em termos de funções diferenciáveis na variedade inteira, as cartas estão intimamente ligadas a abertos dela. O próximo resultado nos diz que podemos identificar o espaço tangente de um aberto da variedade com o espaço tangente da variedade inteira.

**Proposição 2.1.4.** Sejam  $M$  uma variedade diferenciável e  $U \subset M$  um aberto. Para cada  $p \in U$ , temos que  $di_p : T_pU \rightarrow T_pM$ , onde  $i : U \hookrightarrow M$  é a função inclusão, define um isomorfismo.

*Demonstração.* Veja [76], *Proposition 3.9* (página 56). □

Note que, dado um aberto  $U \subset M$ , o isomorfismo da proposição anterior é canônico. Desta forma,  $T_pU$  e  $T_pM$  são indistinguíveis a menos de isomorfismo.

**Proposição 2.1.5.** Sejam  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e  $p \in M$ . Então  $T_pM$  é um espaço vetorial de dimensão  $m$ .

*Demonstração.* Veja [76], *Proposition 3.10* (página 57). □

Observe que  $\mathbb{R}^m$  é um espaço vetorial. Desta forma,  $\mathbb{R}^m$  é isomorfo a  $T_p\mathbb{R}^m$ , o que explica o porquê de sempre tratarmos  $T_p\mathbb{R}^m$  como o próprio  $\mathbb{R}^m$ .

**Proposição 2.1.6.** A aplicação  $D_v : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p\mathbb{R}^m$  dada por  $D_v(p) = D_v\Big|_p$ , no qual  $D_v\Big|_p : C^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow T_p\mathbb{R}^m$  é a função tal que

$$D_v\Big|_p f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(p + tv), \quad (2.1)$$

é um isomorfismo canônico de  $\mathbb{R}^m$  em  $T_p\mathbb{R}^m$ .

*Demonstração.* Uma versão mais geral desta Proposição, juntamente com sua demonstração, pode ser encontrada em [76], *Proposition 3.13* (página 59).  $\square$

**Exemplo 2.1.2.** Sejam  $\{e_1, \dots, e_m\}$  uma base para  $\mathbb{R}^m$  e  $p \in \mathbb{R}^m$ . Como (2.1) é um isomorfismo de  $\mathbb{R}^m$  em  $T_p\mathbb{R}^m$ , então  $\{D_{e_i}\Big|_p, i = 1, \dots, m\}$  forma uma base para  $T_p\mathbb{R}^m$ . Mas, dada  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ , temos

$$D_{e_i}\Big|_p f = \frac{d}{dt}f(p + tv)\Big|_{t=0} = \langle \nabla f, e_i \rangle = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno usual em  $\mathbb{R}^m$  e  $\nabla f$  o gradiente de  $f$ . Portanto, obtemos

$$D_{e_i}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

e encontramos uma base do espaço tangente  $T_p\mathbb{R}^m$ . A identificação de um elemento  $v = \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \in T_p\mathbb{R}^m$  com um de  $\mathbb{R}^m$  se dá por  $v \mapsto (v^1, v^2, \dots, v^m)$ .

A partir de agora, adotaremos a convenção de Einstein para índices repetidos, ou seja, escreveremos

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \quad i = 1, \dots, m,$$

significando que  $v$  é uma soma de  $i = 1$  a  $m$ .

Suponha que  $M$  e  $(U, \varphi)$  sejam uma variedade de dimensão  $m$  e uma carta de  $M$ , respectivamente. Da Proposição 2.1.3 (c), temos que  $d\varphi_p : T_pU \rightarrow T_{\varphi(p)}\varphi(U)$  é um isomorfismo. Combinando tal resultado com a Proposição 2.1.4, concluímos que

$$d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$$

é um isomorfismo.

Do Exemplo 2.1.2 temos que as derivações

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{\varphi(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_{\varphi(p)}$$

formam uma base de  $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$ . Desta forma, a pré-imagem desses vetores pelo isomorfismo  $d\varphi_p$  nos dá uma base para  $T_pM$ . Denotaremos tal base de  $T_pM$  por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p \right\}.$$

Temos, então

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = (d\varphi_p)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \right) f = d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \right) f = \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

Em outras palavras,  $\partial/\partial x^i|_p$  nada mais é do que a derivação da  $i$ -ésima coordenada de  $f \circ \varphi^{-1}$  no ponto  $\varphi(p)$ . No caso especial de coordenadas usuais de  $\mathbb{R}^m$ , esses vetores são literalmente as derivações parciais.

Com a base já encontrada, podemos dizer que um vetor tangente  $v \in T_pM$  é escrito unicamente como uma combinação linear

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad i = 1, \dots, m.$$

Seja  $F : M \rightarrow N$  uma função diferenciável, onde  $M, N$  são variedades de dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente. No ponto  $p \in M$ , sejam  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  cartas de  $M$  e  $N$ , respectivamente, com  $p \in U$  e  $F(U) \subset V$ . Dada a representação coordenada  $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$ , sabemos que a transformação linear  $d\hat{F}_{\hat{p}}$  é representada pela matriz Jacobiana de  $\hat{F}$  em  $\hat{p} = \varphi(p)$ .

Por outro lado, calculando a diferencial de  $F$  em  $p$  num elemento qualquer da base de  $T_pM$  e utilizando a Proposição 2.1.3 (a), obtemos

$$dF_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial \hat{F}^j(\hat{p})}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.2}$$

onde  $(y^1, \dots, y^n)$  denota coordenadas em  $V$ .

Desta forma, concluímos que, em coordenadas,  $dF_p$  é a transformação linear cuja representação matricial é dada pela matriz Jacobiana de  $\hat{F}$  no ponto  $\hat{p}$ . Muitas vezes chamamos  $dF_p$  de *pushforward* e denotamos por  $F_*$  pelo simples fato de ser a transformação que naturalmente leva um elemento de um espaço tangente ao outro.

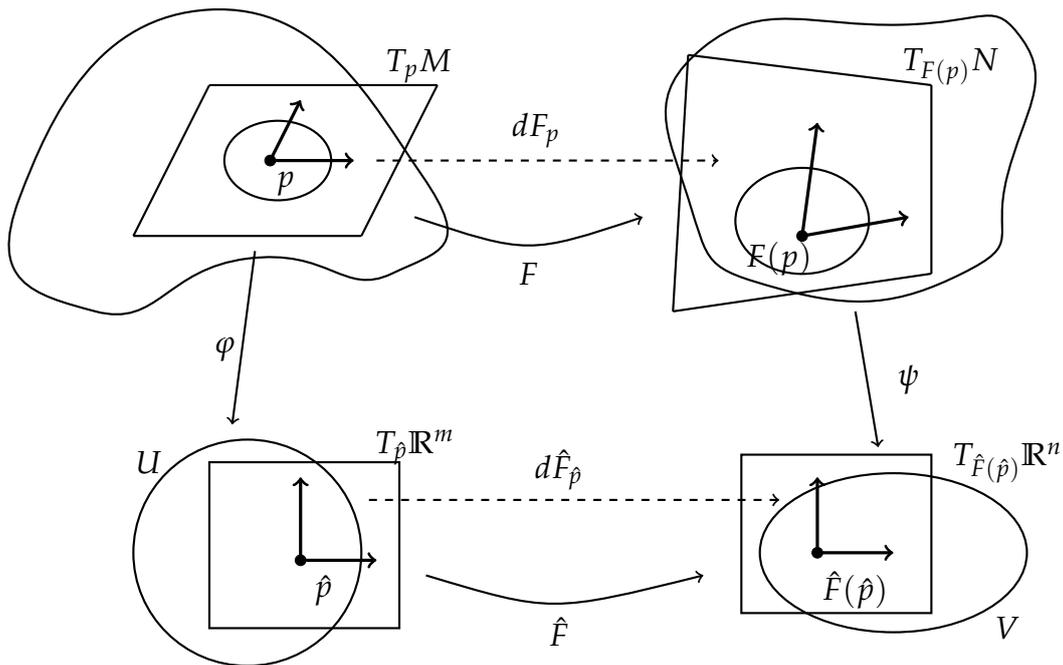


Figura 3: A diferencial em coordenadas.

Dizemos que a aplicação diferenciável  $F : M \rightarrow N$  é uma imersão se  $dF_p$  é injetiva em cada  $p \in M$ . Caso  $dF_p$  seja sobrejetiva em cada  $p \in M$ , dizemos que  $F$  é uma submersão. Um mergulho é uma imersão  $F : M \rightarrow N$  que também é um homeomorfismo sobre sua imagem.

**Definição 2.1.3.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma subvariedade regular de  $M$  é um subconjunto  $S \subset M$  que é uma variedade diferenciável com respeito à topologia de subespaços tal que a inclusão  $i : S \hookrightarrow M$  é um mergulho.

A próxima proposição nos fornece uma maneira de construir subvariedades regulares de uma variedade diferenciável.

**Proposição 2.1.7.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis,  $F : N \rightarrow M$  um mergulho e  $S = F(N)$ . Com respeito à topologia de subespaços,  $S$  possui uma única estrutura diferenciável que a transforma em uma subvariedade regular de  $M$  com a propriedade de que  $F$  é um difeomorfismo sobre  $S$ .

*Demonstração.* Veja [76], *Proposition 5.2* (página 99). □

**Exemplo 2.1.3.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente,  $U \subset M$  um aberto, e  $f : U \rightarrow N$  uma função diferenciável. Defina o gráfico de  $f$  como sendo o conjunto

$$\text{Gr}f = \{(x, f(x)) \in M \times N; x \in U\}.$$

Mostremos que  $\text{Gr}f$  é uma subvariedade de  $M \times N$  de dimensão  $m$ .

Defina  $\gamma_f : U \rightarrow M \times N$  como sendo  $\gamma_f(x) = (x, f(x))$ . Como cada uma de suas componentes é diferenciável, temos que  $\gamma_f$  é diferenciável. Note agora que  $\pi_M \circ \gamma_f = \text{id}_U$ . Desta forma, dado  $x \in U$ ,

$$d(\pi_M)_{(x, f(x))} \circ d(\gamma_f)_x = d(\pi_M \circ \gamma_f)_x = d(\text{id}_U)_x = \text{id}_{T_x U} = \text{id}_{T_x M}.$$

Logo,  $d(\gamma_f)_x$  é injetiva, de onde segue que  $\gamma_f$  é uma imersão.

Note agora que  $\pi_M|_{\text{Gr}f}$  é tal que  $\pi_M \circ \gamma_f = \text{id}_U = \gamma_f \circ \pi_M|_{\text{Gr}f}$ . Desta forma, pela continuidade da projeção, segue que  $\gamma_f$  é um homeomorfismo. Logo,  $\gamma_f(U) = \text{Gr}f$  é uma subvariedade regular de  $M \times N$ .

**Proposição 2.1.8.** (TEOREMA DA APLICAÇÃO INVERSA) Suponha que  $M$  e  $N$  sejam variedades e  $F : M \rightarrow N$  seja uma função diferenciável. Se  $p \in M$  é um ponto tal que  $dF_p$  é inversível, então existem vizinhanças abertas  $U_0 \ni p$  e  $V_0 \ni F(p)$  tais que  $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$  é um difeomorfismo.

*Demonstração.* A demonstração segue como consequência quase imediata do Teorema da Aplicação Inversa para o  $\mathbb{R}^m$ . Entretanto, ela pode ser encontrada em [76], *Theorem 4.5* (página 79).  $\square$

Dada uma aplicação diferenciável  $F : M \rightarrow N$  e  $q \in F(M)$ , definimos a fibra de  $F$  em  $q$  como sendo o conjunto  $F^{-1}(\{q\})$ . O ponto  $q \in M$  é dito ser um valor regular de  $F$  se  $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  é sobrejetora, para todo  $p \in F^{-1}(\{q\})$ .

O Exemplo 2.1.3 é útil no sentido de que podemos olhar para o gráfico de uma função diferenciável como um conjunto munido de uma estrutura suficientemente forte. Utilizaremos essa estrutura, todavia, em objetos vistos como a fibra de algum valor regular.

**Proposição 2.1.9.** (TEOREMA DA APLICAÇÃO IMPLÍCITA) Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis e  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Dado  $q \in F(M)$ , defina  $S = F^{-1}(\{q\})$ . Se  $F|_S$  é uma submersão, então  $S$  tem uma única estrutura de variedade tal que  $S$  é uma subvariedade regular.

*Demonstração.* Veja [107], *Theorem* 1.38 (página 31).  $\square$

Como consequência da Proposição 2.1.9, temos o resultado que mais nos interessa.

**Proposição 2.1.10.**  $S \subset M$  é uma subvariedade regular de  $M$  se, e somente se, todo ponto de  $S$  tem uma vizinhança  $U \subset M$  tal que  $U \cap S$  é a fibra de alguma submersão  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m-s}$ , onde  $m$  e  $s$  representam, respectivamente, as dimensões de  $M$  e  $S$ .

*Demonstração.* Veja [76], *Proposition* 5.16 (página 106).  $\square$

A Proposição 2.1.10 é talvez a mais importante desta seção. Ela nos mostrará como traduzir a definição geométrica de sistema de equações diferenciais no que é tradicionalmente conhecido.

## 2.2 ESPAÇO DE $k$ -JATOS E SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Considere variedades  $E$  e  $M$ . Um feixe de fibras é uma tripla  $(E, \pi, M)$  tal que  $\pi : E \rightarrow M$  é uma submersão sobrejetiva. A variedade  $E$  é chamada de espaço total e  $M$  é a base. Para cada ponto  $p \in M$ ,  $E_p = \pi^{-1}(\{p\})$  é chamada de fibra do feixe no ponto  $p$ .

O que a definição de feixe de fibras nos diz é que localmente podemos colocar uma estrutura de espaço produto em  $E$ , estrutura essa que não necessariamente é refletida em propriedades globais. A vantagem é que podemos colocar coordenadas de certa forma especiais em tais espaços. Mas antes de prosseguir com a definição de tais coordenadas, exemplifiquemos o feixe de fibras que será de extrema importância no que se segue.

**Exemplo 2.2.1.** Seja  $E = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  e  $M = \mathbb{R}^m$ . Defina  $\pi : E \rightarrow M$  por  $\pi(p, q) = p$ . Então  $\pi$  é claramente uma submersão sobrejetora e  $(E, \pi, M)$  é um feixe de fibras. Dado  $p \in M$ , a fibra  $E_p$  do feixe é dada por  $E_p = \pi^{-1}(\{p\}) = \{p\} \times \mathbb{R}^n$ .

De maneira mais geral, se  $E = M \times N$  é uma variedade produto, onde  $M$  e  $N$  são variedades quaisquer, então  $(E, \pi, M)$  com a projeção natural  $\pi : M \times N \rightarrow M$  é um feixe de fibras.

**Definição 2.2.1.** Seja  $(E, \pi, M)$  um feixe de fibras tal que  $\dim M = m$  e  $\dim E = m + n$ , e seja  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  uma função coordenada local do aberto  $U \subset E$ . O sistema de

coordenadas determinado por  $\varphi$  é chamado de sistema de coordenadas adaptadas se, para todo  $a, b \in U$  tal que  $\pi(a) = \pi(b)$ , temos  $\pi_1(\varphi(a)) = \pi_1(\varphi(b))$  onde  $\pi_1 : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$  denota a projeção usual.

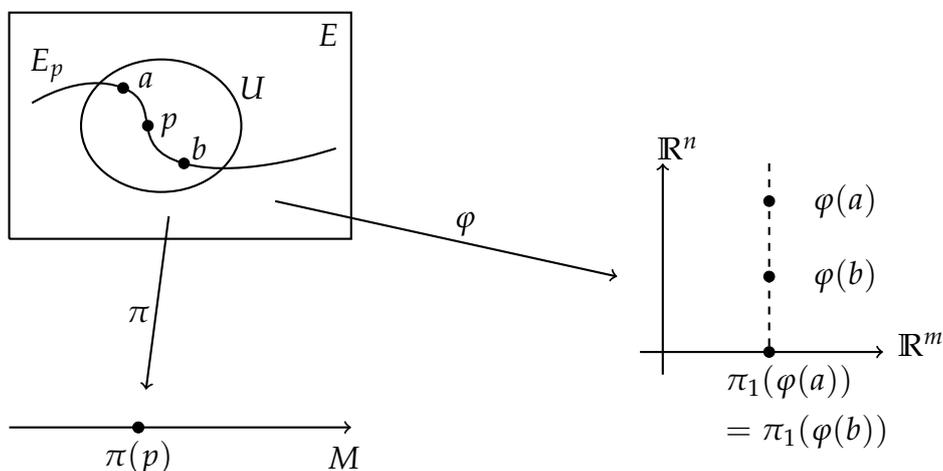


Figura 4: A figura ilustra a definição de sistema de coordenadas adaptadas. Todos os pontos de  $E_p \cap U$  possuem as mesmas primeiras  $m$  coordenadas, ou seja, são caracterizados apenas pelas suas últimas  $n$  coordenadas.

**Exemplo 2.2.2.** Considere o feixe de fibras  $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \pi, \mathbb{R}^m)$ . Se  $U = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , então  $id : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  determina um sistema de coordenadas adaptadas  $(x^1, \dots, x^m, u^1, \dots, u^n)$  em  $U$ . De fato, sejam  $a, b \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  tais que  $\pi(a) = \pi(b)$ . Denote as coordenadas de  $a$  por  $(x^1, \dots, x^m, u^1, \dots, u^n)$  e as de  $b$  por  $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m, \tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n)$ . Se  $\pi(a) = \pi(b)$ , então as primeiras  $m$  coordenadas de  $a$  e  $b$  são iguais. Além disso,  $\pi_1(id(a)) = (x^1, \dots, x^m) = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m) = \pi_1(id(b))$ . Portanto, o sistema de coordenadas é um sistema de coordenadas adaptadas.

**Definição 2.2.2.** Se  $(E, \pi, M)$  é um feixe de fibras, então uma trivialização local do feixe num ponto  $p \in M$  é um difeomorfismo  $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \tilde{N}$ , onde  $U \subset M$  é uma vizinhança de  $p$  e  $\tilde{N}$  é uma variedade, tal que  $\pi_1 \circ \phi = \pi$ , onde  $\pi_1 : U \times \tilde{N} \rightarrow U$  é a projeção canônica em  $U$ . Se existe um difeomorfismo global  $\phi : E \rightarrow M \times F$  tal que  $\pi_1 \circ \phi = \pi$ , então o feixe é dito ser trivial.

É importante observar que o aspecto local da trivialização se refere a  $M$  e não a  $E$ . Além disso, a existência de uma trivialização local em todo ponto de  $M$  automaticamente implica a submersão da projeção  $\pi$ .

Um feixe de fibras que admite, para todo  $p \in M$ , uma trivialização local é chamado de fibrado. Usaremos a notação  $\pi : E \rightarrow M$  quando nos referirmos ao fibrado  $(E, \pi, M)$ .

**Exemplo 2.2.3.** Considere o feixe  $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \pi, \mathbb{R}^m)$  do Exemplo 2.2.1. Para cada  $p \in \mathbb{R}^m$ , seja  $U_p$  a bola aberta centrada em  $p$  de raio 1. Como  $\pi^{-1}(U_p) = U_p \times \mathbb{R}^n$ , definindo  $\phi_p : \pi^{-1}(U_p) \rightarrow U_p \times \mathbb{R}^n$  por  $\phi_p(x) = x$ , temos que  $\phi_p$  é um difeomorfismo. Desta forma, o feixe  $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \pi, \mathbb{R}^m)$  admite uma trivialização local em todo  $p \in \mathbb{R}^m$  e, portanto, é um fibrado. Uma outra maneira de caracterizar o fibrado  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é olharmos para a trivialização  $\phi : \pi^{-1}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  dada por  $\phi(p) = p$ . O difeomorfismo  $\phi$  faz com que o fibrado seja trivial. É essa estrutura de fibrado trivial que usaremos na construção do espaço de jatos.

**Definição 2.2.3.** Um fibrado vetorial de posto  $k$  é um fibrado  $\pi : E \rightarrow M$  tal que:

- (i) Para cada  $p \in M$ , a fibra  $E_p$  é um espaço vetorial real de dimensão  $k$ ;
- (ii) Dado  $p \in M$ , existe uma trivialização local  $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ , onde  $U \subset M$  é uma vizinhança de  $p$ , tal que, para cada  $q \in U$ , a trivialização local  $\phi$  restrita a  $E_q$  é um isomorfismo de  $E_q$  em  $\{q\} \times \mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^k$ .

No caso em que a trivialização local  $\phi$  é global, o fibrado vetorial é dito trivial. A partir de agora, qualquer fibrado  $\pi : E \rightarrow M$  será um fibrado vetorial.

**Exemplo 2.2.4.** Considere o fibrado trivial  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e sua trivialização global definida no Exemplo 2.2.3. Observe que, para cada  $p \in \mathbb{R}^m$ , temos  $E_p = \pi^{-1}(\{p\}) = \{p\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$  e, desta forma,  $E_p$  tem estrutura de espaço vetorial. Além disso,  $\phi$  é linear, de onde segue que, para cada  $q \in \mathbb{R}^m$ ,  $\phi|_{E_q}$  é linear. Para finalizar, como  $E_q = \{q\} \times \mathbb{R}^n$ , temos que  $\phi|_{E_q}$  é um isomorfismo de  $E_q$  em  $\{q\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ . Desta forma,  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um fibrado vetorial trivial.

O próximo exemplo é talvez o fibrado mais clássico e importante da teoria de variedades diferenciáveis. É o espaço natural dos chamados campos vetoriais, campos esses que são os objetos utilizados para o estudo das simetrias de equações diferenciais. Apresentamos o fibrado tangente agora, mas a utilização dele será dada num momento posterior.

**Exemplo 2.2.5.** Sejam  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e  $p, q \in M$ , com  $p \neq q$ . Note que  $T_pM \cap T_qM = \emptyset$ . Considere a união disjunta

$$TM = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_pM.$$

Então  $TM$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $2m$ . Além disso,  $TM$  é um fibrado vetorial sobre  $M$ , onde  $\pi : TM \rightarrow M$  é tal que

$$\pi(v) = \pi \left( v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = p. \quad (2.3)$$

O espaço  $TM$  é chamado de fibrado tangente de  $M$ . Para maiores detalhes, veja [76] (página 65).

**Definição 2.2.4.** Uma seção (global) em um fibrado  $\pi : E \rightarrow M$  é uma aplicação  $\sigma : M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$ . Uma seção local de  $E$  é uma aplicação  $\sigma : U \subset M \rightarrow E$ , onde  $U$  é um aberto, tal que  $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$ .

O conjunto  $\Gamma(\pi)$  de seções diferenciáveis do fibrado vetorial  $\pi : E \rightarrow M$  munido da soma e da multiplicação por escalar usuais forma um espaço vetorial.

No caso do fibrado tangente, uma seção de  $TM$  é chamada de campo vetorial. O conjunto de todos os campos vetoriais de  $TM$  é denotado por  $\mathfrak{X}(M)$ . Os campos vetoriais não serão importantes nesta seção, porém serão a base do estudo de simetrias.

**Exemplo 2.2.6.** Considere o fibrado  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e seja  $\sigma \in \Gamma(\pi)$  uma seção. Como o fibrado é trivial, temos que  $\sigma(x) = (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , de onde segue que a cada seção  $\sigma$  podemos associar uma única função diferenciável  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(x) = y$  e  $\sigma(x) = (x, f(x))$ . Desta forma, podemos tratar as seções de  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  como funções  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Para um resultado mais geral, veja [58], *Proposition 1.5* (página 12).

**Exemplo 2.2.7.** Seja  $X \in TM$  e considere a projeção  $\pi : TM \rightarrow M$  dada por (2.3). Então  $X \in T_pM$ , para algum  $p \in M$ , de onde segue que

$$X = X_p = v^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Defina

$$\begin{aligned} \sigma & : M \rightarrow TM \\ p & \mapsto \sigma(p) = X_p. \end{aligned}$$

Então  $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$  e  $\sigma$  é uma seção de  $TM$ .

No próximo exemplo, consideramos casos específicos de campos vetoriais da variedade  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 2.2.8.** (a) Sejam  $m = 1, n = 1$ . Considere a variedade  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e o fibrado tangente  $T(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ . A função  $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow T(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  dada por

$$X_{(x_0, y_0)} = x_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + (2k - 1)x_0 y_0 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)},$$

onde  $k \in \mathbb{N}$ , é um campo vetorial no fibrado tangente. Como estamos em espaços  $\mathbb{R}^m$  podemos remover a explícita dependência no ponto  $(x_0, y_0)$  e escrever o campo como

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (2k - 1)xy \frac{\partial}{\partial y}.$$

(b) Em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , o campo  $X : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow T(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  dado por

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

define um campo vetorial.

(c) Se  $m = 2, n = 2$  e  $(x, t, u, v)$  são coordenadas de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , então  $X : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow T(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$  dado por

$$X = u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} - bt \frac{\partial}{\partial t}, \quad b \in \mathbb{R},$$

define um campo vetorial em  $T(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ .

O que faremos agora é construir o chamado espaço de  $k$ -jatos para o fibrado  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Tal espaço é o ambiente natural das equações diferenciais. Definiremos coordenadas especiais para o espaço de  $k$ -jatos de maneira que possamos identificar tal espaço com algum  $\mathbb{R}^l$ . Uma construção em fibrados mais gerais pode ser encontrada em [70, 71, 96].

**Definição 2.2.5.** Sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  inteiros não-negativos. Definimos o multi-índice  $\alpha$  como sendo a  $m$ -upla  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  e o número  $|\alpha|$  como  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ .

Inicialmente, considere uma seção  $\sigma \in \Gamma(\pi)$  e  $x = (x^1, \dots, x^m)$  coordenadas em  $\mathbb{R}^m$ . Cada ponto  $p \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  é determinado pela sua projeção  $\pi(p)$  e coordenadas  $(u^1, \dots, u^n)$ . A  $(m+n)$ -upla  $(x^1, \dots, x^m, u^1, \dots, u^n)$  é chamada de sistema de coordenadas adaptadas em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ .

Observe que a função  $f$  associada a  $\sigma$  é representada como  $f = (f^1, \dots, f^n)$ , onde cada  $f^i$  é uma função definida em  $\mathbb{R}^m$ . Desta forma, cada seção é escrita, em coordenadas, como  $(x^1, \dots, x^m, f^1, \dots, f^n)$ .

**Definição 2.2.6.** Duas seções  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  do fibrado  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são ditas tangentes de ordem  $k$  no ponto  $p \in \mathbb{R}^m$  se  $\sigma_1(p) = \sigma_2(p)$  e se suas correspondentes funções  $u_1 = (u_1^1, \dots, u_1^n), u_2 = (u_2^1, \dots, u_2^n) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  possuem derivadas parciais de ordem até  $k$  iguais no ponto  $p$ :

$$\left. \frac{\partial^{|\alpha|} u_1^j}{\partial x^\alpha} \right|_p = \left. \frac{\partial^{|\alpha|} u_2^j}{\partial x^\alpha} \right|_p,$$

onde  $\partial x^\alpha = (\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^m)^{\alpha_m}$  e  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  é um multi-índice tal que  $|\alpha| = 1, \dots, k$ .

A  $k$ -tangência num ponto  $p$  é uma relação de equivalência em  $\Gamma(\pi)$ , pois as condições de reflexividade, simetria e transitividade são trivialmente satisfeitas. A classe de equivalência contendo  $\sigma$  é chamada de  $k$ -jato de  $\sigma$  e é denotada por  $j_p^k(\sigma)$ . Em [87], o autor chama o  $k$ -ésimo jato de  $\sigma$  de  $k$ -ésima prolongação da função  $f$  associada a  $\sigma$  e a denota por  $pr^{(k)}f$ . O conjunto  $J_p^k(\pi) := \{j_p^k(\sigma), \sigma \in \Gamma(\pi)\}$  tem a estrutura de espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  se definirmos

$$j_p^k(\sigma_1) + j_p^k(\sigma_2) := j_p^k(\sigma_1 + \sigma_2), \quad a j_p^k(\sigma_1) := j_p^k(a\sigma_1), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Observe que cada elemento  $j_p^k(\sigma)$  é univocamente determinado pelo ponto  $p$  e pela função  $u = (u^1, \dots, u^n)$  associada à seção  $\sigma$  juntamente com suas derivadas até ordem  $k$  no ponto  $p$ . Desta forma, sempre há uma seção em  $j_p^k(\sigma)$  que, em coordenadas, é um polinômio de ordem menor ou igual a  $k$ . Obviamente estamos falando do polinômio de Taylor de  $u$  truncado na ordem  $k$ .

Considere

$$J^k(\pi) = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^m} J_p^k(\pi)$$

e, para cada multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , com  $1 \leq i = |\alpha| \leq k$ , defina

$$u_{(i)}^l(j_p^k(\sigma)) = \left. \frac{\partial^i u^l}{\partial x^\alpha} \right|_p, \quad l = 1, \dots, n,$$

e  $u_{(0)}^l(j_p^k(\sigma)) = u^l(p)$ . Então  $x, u, u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^n$  são coordenadas em  $J^k(\pi)$ . De fato, definindo  $\varphi : J^k(\pi) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell$  por

$$\varphi(j_p^k(\sigma)) = (p, u, u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^n), \quad (2.4)$$

onde

$$\ell = \dim J_x^k(\pi) = n \binom{m+k}{k},$$

temos a estrutura diferenciável de  $J^k(\pi)$ , pois  $\varphi$  é contínua,  $\varphi(J^k(\pi)) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell$  e  $\varphi^{-1}(p, u, u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^n) = j_p^k(\sigma)$ , onde  $\sigma$  é a seção que tem, em coordenadas,  $(u, u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^n)$  como coeficientes do polinômio de Taylor ao redor de  $p$  truncado em  $k$ . Além disso, a projeção natural  $\pi_k : J^k(\pi) \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida por  $\pi_k(j_p^k(\sigma)) = p$  torna  $\pi_k : J^k(\pi) \rightarrow \mathbb{R}^m$  um fibrado vetorial trivial.

Se  $u = (u^1, \dots, u^n)$ , então, de acordo com a convenção anterior para  $u_{(i)}^l$ ,  $u_{(i)}$  denotará o conjunto das  $i$ -ésimas derivadas de  $u$ . Desta forma, simplificamos a notação para as coordenadas em  $J^k(\pi)$  como explicitado na definição abaixo.

**Definição 2.2.7.** Considere o fibrado  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

- (a) A variedade  $J^k(\pi)$  é chamada de espaço de  $k$ -jatos;
- (b) O fibrado  $\pi_k : J^k(\pi) \rightarrow \mathbb{R}^m$  é chamado de fibrado de  $k$ -jatos;
- (c) As coordenadas  $x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}$ , com  $i = 1, \dots, k$ , são chamadas de coordenadas adaptadas em  $J^k(\pi)$ .

**Exemplo 2.2.9.** Como a função coordenada local  $\varphi$  definida por (2.4) é global, para todo  $k \in \mathbb{M}$  podemos simplesmente olhar  $J^k(\pi)$ , em coordenadas, como  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell$ .

O espaço de 0-jatos será sempre o próprio  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . No caso onde  $m = 2$  e  $n = 1$ , temos

$$J^1(\pi) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

$$J^2(\pi) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3,$$

e, mais geralmente, o espaço de  $k$ -jatos  $J^k(\pi)$  será dado por

$$J^k(\pi) = \mathbb{R}^2 \times \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 \times \dots \times \mathbb{R}^{k+1}}_{\text{derivadas de ordem menor ou igual a } k}.$$

**Exemplo 2.2.10.** Considere  $m = 2, n = 1$  e o fibrado de 3-jatos  $J^3(\pi)$ . Dada uma seção  $\sigma \in \Gamma(\pi)$ , seja  $u$  a função associada a ela.

Com relação às coordenadas  $x, t, u$  de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , temos que as coordenadas de  $J^3(\pi)$  serão  $x, t, u, u_\alpha$ . De maneira mais explícita, como  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 3$ , devemos ter  $\alpha \in \{(1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)\}$ , ou seja, as coordenadas serão

$$x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_{xxx}, u_{xxt}, u_{xtt}, u_{ttt}.$$

É útil observar que os termos cruzados  $u_{xt}, u_{xtx}, u_{xxt}, u_{txt}, u_{xtt}$  não aparecem pois estamos supondo desde o começo que as seções  $\sigma \in \Gamma(\pi)$  são diferenciáveis.

Desta forma, usando a relação entre  $J^3(\pi)$  e suas cordenadas, uma função  $F : J^3(\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  associa cada ponto

$$(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_{xxx}, u_{xxt}, u_{xtt}, u_{ttt})$$

a um número real.

Para  $0 \leq l \leq k$ , defina a *projeção do  $l$ -jato* como a submersão sobrejetiva (veja [96], *Corollary 6.2.7*, página 198)  $\pi_{k,l} : J^k(\pi) \rightarrow J^l(\pi)$  por  $\pi_{k,l}(j_p^k(\sigma)) = j_p^l(\sigma)$ . Observe que tal função está bem definida, pois  $j_p^l(\sigma) \subset j_p^k(\sigma)$ . No caso  $l = k$ , temos  $\pi_{k,k} = id : J^k(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$ . Assumindo a associação  $J^0(\pi) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = E$  feita no Exemplo 2.2.9, temos uma sequência de projeções:

$$\dots J^k(\pi) \xrightarrow{\pi_{k,k-1}} J^{k-1}(\pi) \longrightarrow \dots \longrightarrow J^1(\pi) \xrightarrow{\pi_{k,0}} E.$$

Para finalizar esta seção, podemos agora definir geometricamente o conceito de sistemas de equações diferenciais. Na definição que se segue, podemos olhar tal objeto como  $F^{-1}(\{0\})$  para alguma submersão  $F : U \subset J^k(\pi) \rightarrow \mathbb{R}^l$ , onde  $U$  é um aberto não-vazio.

**Definição 2.2.8.** Um sistema de equações diferenciais é uma subvariedade fechada  $S \subset J^k(\pi)$ . Além disso, no fibrado  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  temos as seguintes classificações:

- (a) Se  $m = 1$ , então  $S$  é dita ser um sistema de equações diferenciais ordinárias. No caso particular em que  $m = n = 1$ , então o sistema é dito ser uma equação diferencial ordinária (EDO).
- (b) Se  $m > 1$ ,  $S$  é chamada de sistema de equações diferenciais parciais. Se  $n = 1$  e  $m > 1$ ,  $S$  é uma equação diferencial parcial (EDP).

Uma seção local  $\sigma : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  é dita ser uma solução clássica de  $S$  se

$$j_p^k(\sigma)(\mathbb{R}^m) \subset S, \forall p \in U.$$

Por mais abstrata que a definição acima possa parecer, ela é equivalente a dizer que um sistema de equações diferenciáveis é o zero de uma aplicação  $F : V \subset J^k(\pi) \rightarrow \mathbb{R}^l$ , onde  $V$  é aberto. Para verificarmos isso, seja  $S$  um sistema de equações diferenciais, ou

seja, uma subvariedade fechada de  $J^k(\pi)$ . Pela Proposição 2.1.10, todo ponto de  $S$  tem uma vizinhança  $V \subset J^k(\pi)$  tal que  $V \cap S$  é a fibra de alguma submersão  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-s}$ , onde  $m = \dim J^k(\pi)$  e  $s = \dim S$ . Sem perda de generalidade, podemos dizer que  $V \cap S = F^{-1}(\{0\})$  e então o conceito usual é retomado.

Desta forma, dado um sistema de equações diferenciais  $F(x^1, \dots, x^m, u, u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^n) = 0$ , com  $F = (F^1, \dots, F^{m-s})$ , a ordem da equação é o maior número natural  $k$  tal que  $\frac{\partial^{|\alpha|} F^i}{\partial x^\alpha} \neq 0$ ,  $|\alpha| = k$ . Quando olhamos  $J^k(\pi)$ , estamos interessados em equações de ordem  $k$ , pois se a equação é de ordem  $r < k$ , então podemos considerá-la como uma subvariedade de  $J^r(\pi)$ .

Em relação à solução, basta lembrar que a caracterização de uma seção  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  é dada por uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Desta forma,  $\sigma$  será solução do sistema  $S$  se, e somente se,  $f$  for solução de  $F(x^1, \dots, x^m, u, u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^n) = 0$  no sentido tradicional de calcularmos suas respectivas derivadas e substituímos na função.

**Exemplo 2.2.11.** Considere o fibrado trivial  $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  com coordenadas  $(x, t, u)$ . Defina  $F : J^3(\pi) \setminus U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U = \{j_p^3(\sigma) \in \Gamma(\pi); \sigma(x) = (x, 0)\}$ , por

$$F(j_p^3(\sigma)) = f_t + 2a \frac{f_x f_{xx}}{f} - \varepsilon a f_{xxx},$$

onde  $f$  é a função que representa  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  e  $a$  são constantes reais. Para verificar que  $F$  é uma submersão, precisamos olhar para sua representação coordenada  $\tilde{F}$  que é a função  $\tilde{F} = F \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\tilde{F}(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tx}, u_{xxx}, u_{txx}, u_{ttx}, u_{ttt}) = u_t + 2a \frac{u_x u_{xx}}{u} - \varepsilon a u_{xxx}.$$

Observando que  $\nabla F \neq 0$ , pois  $\partial \tilde{F} / \partial u_t = 1$ , temos que  $\tilde{F}$  é uma submersão, de onde segue que  $F$  é uma submersão. Logo,

$$S = \{j_p^3(\sigma) \in J^3(\pi); (u_t + 2a \frac{u_x u_{xx}}{u} - \varepsilon a u_{xxx})(j_p^3(\sigma)) = 0\}$$

determina uma equação diferencial de ordem 3 desde que  $\varepsilon \neq 0$ . A equação

$$u_t + 2a \frac{u_x u_{xx}}{u} = \varepsilon a u_{xxx}, \quad \varepsilon, a \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

será discutida em momentos posteriores. De maneira mais geral, dados  $\varepsilon, \alpha, \gamma, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$u_t + \varepsilon u_{txx} + \alpha u_x - \beta \frac{u_x u_{xx}}{u} + \gamma u_{xxx} = 0 \tag{2.6}$$

é uma equação diferencial de ordem 3, desde que  $\varepsilon$  ou  $\gamma$  seja diferente de zero.

O exemplo anterior ilustra que ao lidarmos com equações diferenciais, do ponto de vista geométrico, normalmente usamos a representação coordenada  $\tilde{F}$  da função  $F$ . E, daqui em diante, será essa representação coordenada  $\tilde{F}$  que chamaremos de sistema de equações diferenciais e não mais a subvariedade  $S$  ou a submersão  $F$ .

Sabemos que todo gráfico é uma subvariedade e que toda subvariedade é *localmente* o gráfico de uma função. Porém, existem subvariedades que são caracterizadas como gráficos globais de funções. Não entraremos no mérito de definir tais objetos, chamados de *subvariedades transversais*, mas os próximos exemplos tratam de gráficos globais.

**Exemplo 2.2.12.** Considere o fibrado trivial  $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , coordenadas  $(y, w)$ , onde  $y = (x, t)$  e  $w = (u, v)$ , e  $J^3(\pi)$ . Defina  $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$F(y, w, w_{(1)}, w_{(2)}, w_{(3)}) = (u_t - u_{txx} - v^b u_x - v^b u_{xxx}, v_t - v_{txx} - u^b v_x - u^b v_{xxx}),$$

onde  $0 < b \in \mathbb{R}$ . Observando que a matriz Jacobiana de  $F$  tem posto máximo, temos que

$$\begin{cases} u_t - u_{txx} - v^b u_x - v^b u_{xxx} = 0, \\ v_t - v_{txx} - u^b v_x - u^b v_{xxx} = 0 \end{cases}$$

define um sistema de equações diferenciais de ordem 3. Fazendo a mudança de variáveis  $m = u - u_{xx}$ ,  $n = v - v_{xx}$ , reescrevemos o sistema como

$$\begin{cases} m_t - v^b m_x = 0, \\ n_t - u^b n_x = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Se  $b < 0$ , então devemos, como no exemplo anterior, restringir o domínio de  $F$  de maneira que  $u \neq 0$ . Logo, a mesma função  $F$  definida em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^8$  define um sistema de equações diferenciais parciais. Desta forma, o sistema (2.7) fica definido para qualquer valor  $b \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.2.13.** No caso do fibrado  $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com coordenadas  $(x, y)$ , dado  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{2n \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(2n)}) = y^{(2n)} + f(y),$$

onde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, determina a equação diferencial ordinária de ordem  $2n$

$$y^{(2n)} + f(y) = 0. \quad (2.8)$$

**Exemplo 2.2.14.** Considere o fibrado  $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , coordenadas  $(x, t, u)$ . Analogamente ao caso das equações (2.5) e (2.6),

$$u_t - u_{txx} + (b + 2)u^b u_x - (b + 1)u^{b-1} u_x u_{xx} - u^b u_{xxx} = 0 \quad (2.9)$$

é uma equação diferencial parcial de ordem 3, para todo  $b \in \mathbb{R}$ .

## 2.3 GRUPOS LOCAIS DE TRANSFORMAÇÕES A 1-PARÂMETRO

**Definição 2.3.1.** Um grupo de Lie a  $r$ -parâmetros é uma variedade  $G$  de dimensão  $r$ , que também tem a estrutura de um grupo algébrico, com a propriedade de que a multiplicação  $m : G \times G \rightarrow G$  e a inversão  $i : G \rightarrow G$  do grupo, dadas por

$$m(g, h) = g \cdot h, \quad i(g) = g^{-1},$$

são ambas diferenciáveis.

**Exemplo 2.3.1.** A reta real  $\mathbb{R}$  munida das funções  $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $m(x, y) = x + y$  e  $i(x) = -x$  é um grupo de Lie (aditivo). A identidade do grupo é o 0.

Se  $a \in \mathbb{R}$  é um número real qualquer, então as funções  $\tilde{m} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\tilde{i} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $\tilde{m}(x, y) = x + y - a$  e  $\tilde{i}(x) = 2a - x$  são diferenciáveis e fazem com que  $\mathbb{R}$  tenha estrutura de grupo de Lie com a identidade igual a  $a$ .

**Exemplo 2.3.2.** Um outro exemplo importante no que iremos utilizar é o conjunto dos números reais estritamente positivos  $\mathbb{R}_+^*$ . De fato ele determina uma variedade por ser um aberto da variedade  $\mathbb{R}$ . Além disso, a multiplicação  $m : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  e a inversão  $i : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  dadas por

$$m(x, y) = xy, \quad i(x) = \frac{1}{x}$$

são diferenciáveis e fazem com que  $\mathbb{R}_+^*$  seja um grupo multiplicativo.

**Definição 2.3.2.** Se  $G$  e  $H$  são grupos de Lie, um homomorfismo de grupos de Lie é um homomorfismo de grupo  $F : G \rightarrow H$  que também é diferenciável. Se  $F$  é um difeomorfismo, então dizemos que  $F$  é um isomorfismo de grupos de Lie e, neste caso,  $G$  e  $H$  são isomorfos.

Observe que se  $F$  é um difeomorfismo, então, em particular,  $F$  é inversível. A função inversa de todo homomorfismo é um homomorfismo. Para verificarmos isso, sejam  $(H, *)$ ,  $(G, \cdot)$  dois grupos e  $h_1, h_2 \in (H, *)$ . Se  $g_1 = F^{-1}(h_1) \in G$  e  $g_2 = F^{-1}(h_2) \in G$ , então

$$F^{-1}(h_1 * h_2) = F^{-1}(F(g_1) * F(g_2)) = F^{-1}(F(g_1 \cdot g_2)) = F^{-1}(h_1) \cdot F^{-1}(h_2).$$

Desta forma, o fato de  $F$  ser um difeomorfismo só tem a ver com a estrutura de variedade dos grupos de Lie e não com aspectos algébricos por detrás do homomorfismo.

**Exemplo 2.3.3.** Considere os grupos de Lie  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}_+^*$ . Definindo  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  por  $F(t) = e^t$ , temos que, dados  $t, s \in \mathbb{R}$ ,

$$F(t + s) = e^{t+s} = e^t e^s.$$

Logo,  $F$  determina um isomorfismo de grupos de Lie com inversa diferenciável  $F^{-1}(t) = \ln t$ .

**Exemplo 2.3.4.** Dado  $a \in \mathbb{R}$ , denote por  $\mathbb{R}_a$  o grupo aditivo  $\mathbb{R}$  com identidade  $a$ . Defina  $F : \mathbb{R}_a \rightarrow \mathbb{R}$  por  $F(x) = x - a$ . Então  $F$  é um difeomorfismo tal que

$$\begin{aligned} F(\tilde{m}(x, y)) &= F(x + y - a) = x + y - 2a = (x - a) + (y - a) = F(x) + F(y) = \\ &= m(F(x), F(y)), \end{aligned}$$

de onde segue que  $F$  é um homomorfismo e os dois grupos de Lie são isomorfos.

Seja  $M$  uma variedade. A aplicação  $T : M \rightarrow M$  é dita ser uma transformação se  $T$  é bijetora. Se  $S(M)$  denota o conjunto de todas as transformações em  $M$ , então  $S(M) \neq \emptyset$ , pois a função identidade é um elemento do conjunto. Além disso, dadas  $T_1, T_2 \in S(M)$ ,  $T_1 \circ T_2$  é uma nova transformação, o que torna  $S(M)$  um grupo, chamado de grupo de transformações.

Dizemos que o grupo de Lie  $G$  é conexo se não existem abertos disjuntos não-vazios  $U, V \subset G$  tais que  $G = U \cup V$ . Trabalharemos com grupos de Lie a 1-parâmetro conexos, pois devemos ligar continuamente os elementos de  $G$  ao seu elemento neutro. Além disso, as técnicas infinitesimais que aqui serão apresentadas possuem problemas se o grupo de Lie não for conexo. Um resultado bastante interessante, que pode ser encontrado em [103], *Lemma 6.6* (página 97), nos diz que os únicos grupos de Lie a 1-parâmetro conexos, a menos de isomorfismo, são  $\mathbb{R}$  e o círculo unitário  $S^1$ . Porém, como  $S^1$  é compacto e, em particular, fechado temos problemas com derivadas. Por isso, a partir de agora, todo grupo de Lie a 1-parâmetro considerado será isomorfo a  $\mathbb{R}$ .

**Definição 2.3.3.** Sejam  $M$  uma variedade e  $(G, m, i)$  um grupo de Lie a 1-parâmetro com identidade  $e$ . Um grupo de transformações a 1-parâmetro agindo em  $M$  é uma função diferenciável  $T : G \times M \rightarrow M$  tal que

- (a)  $T(\varepsilon, T(\delta, p)) = T(m(\varepsilon, \delta), p)$ , para todo  $\varepsilon, \delta \in G$ ;
- (b) Para todo  $p \in M$ , temos  $T(e, p) = p$ ;
- (c)  $T(i(\varepsilon), T(\varepsilon, p)) = p$ , para todo  $\varepsilon \in G$ .

Denotando  $T(\varepsilon, p)$  por  $T_\varepsilon(p)$ , podemos redefinir um grupo de transformações a 1-parâmetro como um conjunto  $\{T_\varepsilon; \varepsilon \in G\}$  de difeomorfismos tais que

$$T_\varepsilon \circ T_\delta = T_{m(\varepsilon, \delta)}, \quad T_e = id, \quad T_\varepsilon^{-1} = T_{i(\varepsilon)}.$$

A função  $F : G \rightarrow \{T_\varepsilon; \varepsilon \in G\}$  dada por  $F(\varepsilon) = T_\varepsilon$  define um isomorfismo e  $\{T_\varepsilon; \varepsilon \in G\}$  será abeliano se  $G$  o for.

Por outro lado, cada grupo de transformações a 1-parâmetro  $T$  determina uma família de curvas em  $M$ . Fixado  $p \in M$ , a curva  $T_p : G \rightarrow M$  dada por  $T_p(\varepsilon) = T_\varepsilon(p)$  é chamada de órbita do grupo de transformações passando por  $p$ . As órbitas de um grupo de transformações a 1-parâmetro são importantes pois relacionam  $M$  a  $T_p M$ .

Os próximos três exemplos tratam de dois dos mais simples (e importantes) grupos de transformações a 1-parâmetro: grupo de translações e grupo de *scalings* (dilatação).

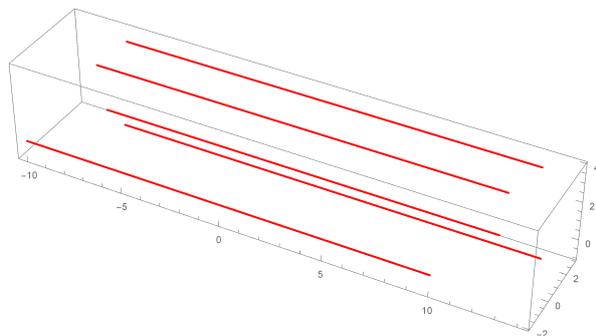


Figura 5: Nesta imagem fixamos o ponto  $(x, t, u)$  e deixamos o parâmetro  $\varepsilon$  variar para encontrarmos diferentes órbitas da translação do Exemplo 2.3.5.

**Exemplo 2.3.5.** Considere o conjunto de translações em  $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  dado por

$$\{T_\varepsilon(x, t, u) = (x + \varepsilon, t, u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}\}.$$

Cada função  $T_\varepsilon : M \rightarrow M$  é claramente uma transformação e sua inversa é dada por  $T_\varepsilon^{-1}(x, t, u) = (x - \varepsilon, t, u)$ , o que também nos diz que  $T_\varepsilon^{-1} = T_{-\varepsilon}$ .

Além disso, observe que  $T_0 = id$  e que, para todo  $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ , temos

$$T_\varepsilon \circ T_\delta(x, t, u) = T_\varepsilon(x + \delta, t, u) = (x + (\varepsilon + \delta), t, u) = T_{\varepsilon + \delta}(x, t, u),$$

de onde segue que  $T_\varepsilon \circ T_\delta = T_{\varepsilon+\delta}$ . Portanto,  $\{T_\varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}\}$  é um grupo de transformações a 1-parâmetro.

As órbitas de tal grupo de transformações são dadas por retas paralelas ao plano  $(t, u)$ , como representadas na Figura 5.

**Exemplo 2.3.6.** Em  $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , considere  $\{T_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}_+^*\}$ , onde

$$T_\lambda(x, t, u) = (\lambda x, \lambda^{-b} t, u),$$

e  $b \in \mathbb{R}$  é uma constante fixada.

Cada função  $T_\lambda : M \rightarrow M$  é claramente um difeomorfismo cuja inversa é dada por  $T_\lambda^{-1}(x, t, u) = \left(\frac{x}{\lambda}, \lambda^b t, u\right)$  e  $T_1 = id$ . Além disso, dados  $\lambda, \delta \in \mathbb{R}_+^*$ , temos

$$T_\lambda \circ T_\delta(x, t, u) = T_\lambda(\delta x, \delta^{-b} t, u) = ((\lambda\delta)x, (\lambda\delta)^{-b} t, u) = T_{\lambda\delta}(x, t, u),$$

de onde segue que  $m(\lambda, \delta) = \lambda\delta$  é diferenciável.

Portanto, o conjunto  $\{T_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}_+^*\}$  é um grupo de transformações a 1-parâmetro.

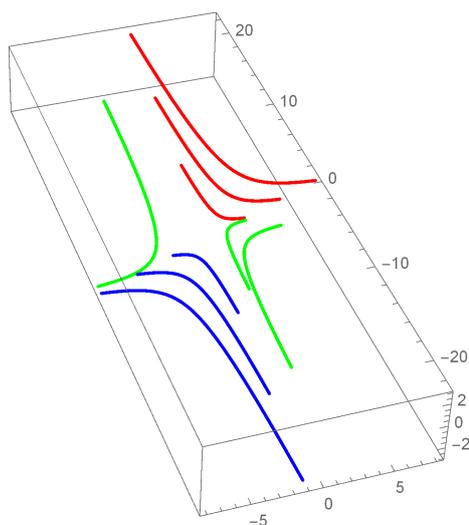


Figura 6: A figura ilustra órbitas para a dilatação considerada no Exemplo 2.3.6 com  $b = 2$ . Nas curvas em vermelho, os pontos  $(x, t, u)$  são tomados com coordenadas sempre positivas, enquanto nas curvas azuis as coordenadas são negativas. Nas curvas verdes temos coordenadas positivas e negativas.

**Exemplo 2.3.7.** Em  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , considere as dilatações  $\{T_\varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ , onde

$$T_\varepsilon(x, t, u) = (e^\varepsilon x, e^{\varepsilon(2k-1)/2} y).$$

Analogamente ao exemplo anterior, o conjunto  $\{T_\varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}\}$  é um grupo de transformações a 1-parâmetro. Suas órbitas são exibidas na Figura 7.

O próximo exemplo é delicado, pois existem conjuntos de transformações que dependem de um parâmetro que deve ser suficientemente próximo da identidade para que tenhamos alguma estrutura parecida com aquela de grupo.

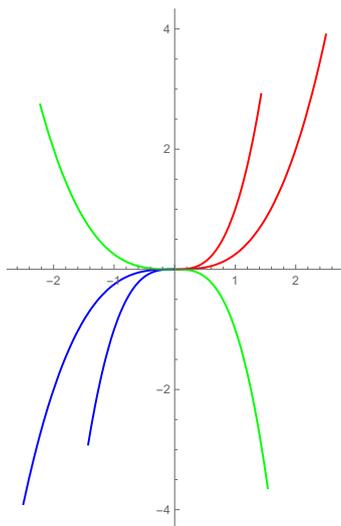


Figura 7: Tomamos  $k = 2$  na dilatação  $T_\epsilon$  do Exemplo 2.3.7. Similarmente à dilatação do Exemplo 2.3.6, as cores representam o sinal das coordenadas tomadas.

**Exemplo 2.3.8.** Considere a transformação  $T_\epsilon(x) = \frac{x}{1-\epsilon x}$ , chamada de transformação projetiva. Se  $\epsilon = 0$ , então  $T_0 = id$ . Além disso,

$$T_\epsilon(x) \circ T_\delta(x) = T_\epsilon(x) \left( \frac{x}{1-\delta x} \right) = \frac{\frac{x}{1-\delta x}}{1-\epsilon \frac{x}{1-\delta x}} = \frac{x}{1-(\delta+\epsilon)x} = T_{\epsilon+\delta}(x).$$

Como  $T_\epsilon^{-1} = T_{-\epsilon}$ , teremos um grupo a 1-parâmetro desde que  $1 - \epsilon x$ ,  $1 - \delta x$  e  $1 - (\epsilon + \delta)x$  não se anulem.

Para isso, fixado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , tome  $I = (-1/|x_0|, 1/|x_0|)$ , ou seja,  $1 - \epsilon x_0 \neq 0$  e  $1 - \delta x_0 \neq 0$ . Porém, como  $\frac{1}{2|x_0|} < \frac{1}{|x_0|}$ , temos que  $\frac{1}{2|x_0|} \in I$ , mas  $\frac{1}{2|x_0|} + \frac{1}{2|x_0|} = \frac{1}{|x_0|} \notin I$ . Logo, encontramos  $\epsilon$  e  $\delta$  tais que  $\epsilon + \delta \notin I$ .

Diminuir o conjunto  $I$  não resolve o problema, pois sempre encontraremos elementos cuja soma está fora de  $I$ . Com isso vemos que não importa quão pequeno seja  $I$ , não conseguimos dar a  $\{T_\epsilon, \epsilon \in I\}$  uma estrutura de grupo de transformações a 1-parâmetro. Porém, o conceito de grupo de Lie local consegue estender a definição de grupos de transformações a 1-parâmetro para transformações locais.

Para resolver o problema do exemplo anterior, precisamos de ferramentas que nos auxiliem a lidar com o “suficientemente próximo da identidade”.

Na definição abaixo, caracterizamos grupos de Lie locais a 1-parâmetro. Para uma definição mais ampla, veja [87], *Definition 1.20* (página 18).

**Definição 2.3.4.** Seja  $G$  um grupo de Lie a 1-parâmetro. Um grupo de Lie *local* a 1-parâmetro consiste de abertos conexos  $V_0$  e  $V$  tais que  $e \in V_0 \subset V \subset G$  e aplicações diferenciáveis  $m : V \times V \rightarrow G$  e  $i : V_0 \rightarrow V$  que satisfazem as seguintes propriedades:

- (a) Se  $x, y, z \in V$  e  $m(x, y), m(y, z) \in V$ , então  $m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$ ;
- (b) Para cada  $x \in V$ , temos que  $m(e, x) = x = m(x, e)$ ;
- (c) Para cada  $x \in V_0$ ,  $m(x, i(x)) = 0 = m(i(x), x)$ .

Para simplificar a notação, diremos simplesmente que  $V_0$  é um grupo de Lie local. Note que a definição acima diz que  $V_0$  é um grupo numa vizinhança da identidade suficientemente pequena.

**Exemplo 2.3.9.** A definição acima caracteriza os grupos de Lie (aditivos) locais contidos em  $\mathbb{R}$  como todos os intervalos abertos contendo 0.

Seja  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto, onde  $a < 0 < b$ . Defina  $V_0 = I$ ,  $V = \mathbb{R}$  e considere as funções  $m : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  e  $i : V_0 \rightarrow V$  como  $m(x, y) = x + y$  e  $i(x) = -x$ . Observe que não necessariamente temos  $-x \in V_0$ . As propriedades da Definição 2.3.4 são trivialmente satisfeitas pois  $\mathbb{R}$  é um grupo aditivo. O mesmo vale para os abertos  $(-\infty, b)$  e  $(a, \infty)$ .

**Exemplo 2.3.10.** Todo grupo de Lie a 1-parâmetro  $G$  é um grupo local. Basta tomar  $V_0 = V = G$  e as funções  $m$  e  $i$  como as usuais para o grupo  $G$ .

Com isso agora podemos estender o conceito de grupo de transformação a 1-parâmetro para algo que localmente se comporte como tal.

**Definição 2.3.5.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Um grupo local de transformações a 1-parâmetro agindo em  $M$  é dado por grupo de Lie local a 1-parâmetro  $G$ , um aberto  $U$  tal que  $\{e\} \times M \subset U \subset G \times M$  e uma função diferenciável  $T : U \rightarrow M$  com as seguintes propriedades:

- (a) Se  $(\delta, p) \in U$ ,  $(\varepsilon, T(\delta, p)) \in U$  e também  $(m(\varepsilon, \delta), p) \in U$ , então

$$T(\varepsilon, T(\delta, p)) = T(m(\varepsilon, \delta), p);$$

- (b) Para todo  $p \in M$ , temos  $T(e, p) = p$ ;
- (c) Se  $(\varepsilon, p) \in U$ , então  $(i(\varepsilon), T(\varepsilon, p)) \in U$  e  $T(i(\varepsilon), T(\varepsilon, p)) = p$ .

Analogamente aos grupos globais, escreveremos  $T(\varepsilon, p) = T_\varepsilon(p)$  e as condições da definição podem ser reformuladas como

$$T_\varepsilon \circ T_\delta(p) = T_{m(\varepsilon, \delta)}(p), \quad \varepsilon, \delta \in U, \quad p \in M,$$

quando ambos os lados da igualdade estiverem definidos,

$$T_\varepsilon(p) = p, \quad \forall p \in M,$$

e

$$T_{i(\varepsilon)} \circ T_\varepsilon(p) = p, \quad \varepsilon \in U, p \in M$$

se  $T_\varepsilon(p)$  está definido.

Desta forma, se  $p \in M$  está fixado, então cada  $T_\varepsilon(p)$  é um difeomorfismo em seu respectivo domínio. Além disso, note que, para cada  $p \in M$ , os elementos  $\varepsilon$  tais que  $T_\varepsilon(p)$  faz sentido forma um grupo de Lie local  $G_p = \{\varepsilon \in G; (\varepsilon, p) \in U\}$  pois  $U$  é aberto.

Reciprocamente, para qualquer  $\varepsilon \in G$ ,  $M_\varepsilon = \{p \in M; (\varepsilon, p) \in U\}$  define uma sub-variedade aberta de  $M$ . Em alguns casos, o único elemento que age em  $M$  inteiro é a identidade. Por outro lado, se  $U = G \times M$ , então segue que o grupo de transformações a 1-parâmetro é global no sentido da Definição 2.3.3. Desta forma, podemos ver que todo grupo de transformações a 1-parâmetro é um grupo local de transformações a 1-parâmetro.

Na Definição 2.3.5, não escrevemos  $U = I \times V$ , onde  $I \subset G, V \subset M$ , pois há vezes em que os conjuntos  $I$  e  $V$  são definidos um em função do outro, como veremos no exemplo a seguir.

**Exemplo 2.3.11.** Consideremos uma transformação projetiva parecida com a do Exemplo 2.3.8. Sejam  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $G = \mathbb{R}$  e a função  $T : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$T(\varepsilon, x, y) = \left( \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x} \right).$$

Queremos determinar  $U$  de forma que vejamos  $T$  como um grupo local de transformações a 1-parâmetro.

Fixe um ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e defina

$$U_{\varepsilon, x} = \{\varepsilon \in \mathbb{R}; \varepsilon < 1/x \text{ se } x > 0 \text{ ou } \varepsilon > 1/x \text{ se } x < 0\}.$$

Observe que, dados  $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ , teremos  $0 \in U_{\varepsilon, x} \cap U_{\delta, x}$ . Desta forma, sempre que  $\varepsilon + \delta$  estiver definido em  $U_{\varepsilon, x} \cap U_{\delta, x}$ , teremos

$$T_\varepsilon \circ T_\delta(x, y) = T_\varepsilon \left( \frac{x}{1 - \delta x}, \frac{y}{1 - \delta x} \right) = \left( \frac{x}{1 - (\varepsilon + \delta)x}, \frac{y}{1 - (\varepsilon + \delta)x} \right) = T_{\varepsilon + \delta}(x, y).$$

Além disso,  $T_0 = id$  e  $T_{-\varepsilon} = T_\varepsilon^{-1}$  sempre que  $\varepsilon \in U_{\varepsilon, x}$ . Desta forma, definimos o conjunto  $U$  como sendo a intersecção dos conjuntos  $U_{\varepsilon, x}$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ :

$$U = \{(\varepsilon, x, y); \varepsilon < 1/x \text{ se } x > 0 \text{ e } \varepsilon > 1/x \text{ se } x < 0\}.$$

Na Figura 8, órbitas da transformação projetiva são plotadas com coordenadas positivas (vermelhas) e negativas (azuis).

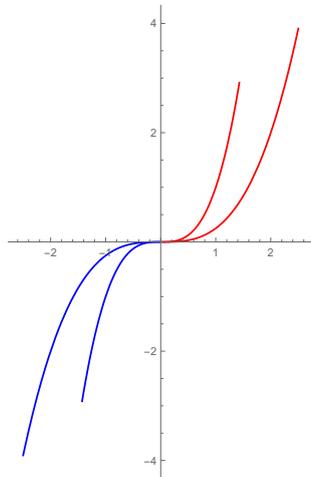


Figura 8: A figura ilustra órbitas para a transformação projetiva considerada no Exemplo 2.3.11.

Quando consideramos um grupo de Lie  $G$  isomorfo a  $\mathbb{R}$ , estamos pensando em grupos que podem não ser aditivos, como é o caso de  $\mathbb{R}_+^*$  e que já vimos serem importantes para transformações de *scaling*. Entretanto, há um resultado, conhecido como Primeiro Teorema Fundamental de Lie, que diz que toda lei de composição de um grupo de Lie local a 1-parâmetro pode ser transformada em aditiva, o que na prática significa tomar  $G = \mathbb{R}$ . Em outras palavras, todos os grupos de Lie locais podem ser considerados, sem perda de generalidade, como intervalos abertos de  $\mathbb{R}$  contendo 0. A partir de agora, apenas trataremos de transformações que agem em  $M = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  com coordenadas adaptadas  $(x, u)$ , onde  $x \in \mathbb{R}^m$  e  $u \in \mathbb{R}^n$ .

Antes de enunciar a próxima proposição, precisamos definir os infinitesimais de um grupo local de transformações a 1-parâmetro. Considere um grupo local de transformações  $T = (T^1, \dots, T^m, T^{m+1}, \dots, T^{m+n}) : U \subset G \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow G \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , cujo elemento neutro de  $G$  é denotado por  $e$  e sua lei de composição é  $m$ . Expandindo  $T$  em série de Taylor ao redor de  $\varepsilon = e$ , temos

$$T^i(x, u, \varepsilon) = x^i + \varepsilon \left( \frac{\partial T^i}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=e} \right) + o(\varepsilon^2), \quad i = 1, \dots, n + m, \quad (2.10)$$

onde  $x^{m+1} = u^1, \dots, x^{m+n} = u^n$ .

As funções  $\zeta^i := \frac{\partial T^i}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=e}$  são chamadas de infinitesimais do grupo de transformações  $T$ . Com isso, podemos enunciar o Primeiro Teorema Fundamental de Lie.

**Proposição 2.3.1.** (PRIMEIRO TEOREMA FUNDAMENTAL DE LIE) Seja  $T : U \subset G \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  um grupo local de transformações a 1-parâmetro. Existe uma parametrização  $\tau(\varepsilon)$  tal que  $T = (T^1, \dots, T^m, T^{m+1}, \dots, T^{m+n})$  é equivalente à solução do problema de valor inicial

$$\frac{dT^i}{d\tau} = \zeta^i(T(\tau)), \quad i = 1, \dots, m+n,$$

onde  $\zeta^i$  são os infinitesimais de  $T$  e  $T_e = id$ . Em particular,

$$\tau(\varepsilon) = \int_e^\varepsilon \Gamma(\varepsilon') d\varepsilon',$$

onde

$$\Gamma(\varepsilon) = \left. \frac{\partial m(x, y)}{\partial y} \right|_{(x, y) = (i(\varepsilon), \varepsilon)}.$$

e  $\Gamma(e) = 1$ .

*Demonstração.* Veja [9], *Theorem 2.3.1–1* (páginas 39 e 40). □

No Exemplo 2.3.6 utilizamos uma lei de composição multiplicativa. Abaixo, aplicaremos o Primeiro Teorema Fundamental de Lie para mostrar como transformar tal lei de composição em aditiva.

**Exemplo 2.3.12.** Considere as dilatações do Exemplo 2.3.6, a lei de composição  $m(\lambda, \delta) = \lambda\delta$  encontrada e a inversão  $i(\lambda) = 1/\lambda$ . Observe que em  $\mathbb{R}_+^*$  temos  $e = 1$ . Desta forma,

$$\Gamma(\lambda) = \left. \frac{\partial m(x, y)}{\partial y} \right|_{(x, y) = (i(\lambda), \lambda)} = \frac{1}{\lambda},$$

$$\varepsilon(\lambda) = \int_1^\lambda \Gamma(\lambda') d\lambda' = \ln \lambda.$$

Logo,  $\lambda = e^\varepsilon$  e a transformação é reparametrizada como  $T_\varepsilon(x, t, u) = (e^\varepsilon x, e^{-b\varepsilon} t, u)$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  com  $m(\varepsilon, \delta) = \varepsilon + \delta$ . Observe que o resultado é de certa forma esperado, pois no Exemplo 2.3.3 mostramos que os dois grupos de Lie são isomorfos. O que o Teorema Fundamental de Lie reafirma é que, em termos de grupos de transformações,  $\mathbb{R}$  é o único grupo de Lie a 1-parâmetro de sua classe de equivalência (grupos de Lie isomorfos) que realmente precisamos.

Em vista da Proposição 2.3.1, consideraremos os grupos de transformações cujo parâmetro esteja definido em termos de grupos locais  $I \subset \mathbb{R}$  aditivos, ou seja,  $0 \in I$ . O

que faremos a seguir é estabelecer conexão entre tais grupos de transformações agindo em  $M$  e campos vetoriais  $X \in TM$ .

Dada uma variedade  $M$ , uma curva integral de um campo vetorial  $X \in TM$  é uma curva diferenciável  $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , onde  $0 \in I$ , cujo vetor tangente coincide com  $X$ :

$$\phi'(\varepsilon) = X(\phi(\varepsilon)), \forall \varepsilon \in I. \quad (2.11)$$

Observemos agora que (2.11) faz sentido. Primeiramente, definimos o vetor velocidade de  $\phi$  calculado no ponto  $\varepsilon_0$  como

$$\phi'(\varepsilon_0) = d\phi_{\varepsilon_0} \left( \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon_0} \right).$$

Seja, então,  $(\varphi, U)$  uma carta de  $M$  com coordenadas locais  $x^1, \dots, x^m$  tal que  $\phi(\varepsilon_0) \in U$ . Para  $\varepsilon$  suficientemente próximo de  $\varepsilon_0$ , podemos escrever a representação coordenada de  $\phi$  por  $\phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), \dots, \phi^m(\varepsilon))$ . Desta forma, a relação (2.2) nos dirá que

$$\phi'(\varepsilon_0) = \frac{d\phi^i}{d\varepsilon}(\varepsilon_0) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\phi(\varepsilon_0)}$$

ou seja,  $\phi'(\varepsilon_0) \in TM$  e a curva integral está bem definida. Por outro lado, se escrevermos  $X = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , então a equação (2.11) nos diz que  $\phi$  deve ser solução do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d\phi^i}{d\varepsilon} = \zeta^i(\phi^1(\varepsilon), \dots, \phi^m(\varepsilon)), \quad (2.12)$$

que nada mais é do que a condição do Primeiro Teorema Fundamental de Lie com a lei de composição aditiva. Como assumimos que cada  $\zeta^i$  é diferenciável, então os teoremas de existência e unicidade de soluções nos garantem que existe uma solução única para cada problema de valor inicial

$$\phi(0) = p_0. \quad (2.13)$$

Desta forma, dado um campo vetorial  $X \in TM$ , garantimos a existência de uma única curva integral, chamada de curva integral maximal, passando pelo ponto  $p_0$ .

**Definição 2.3.6.** Seja  $X \in TM$  um campo vetorial. Denotamos a curva integral maximal  $\psi : I \rightarrow M$  passando por  $p \in M$  por  $\psi(\varepsilon, p)$  e chamamos de fluxo gerado por  $X$ .

O fluxo de um campo vetorial tem as seguintes propriedades:

$$\psi(\varepsilon, \psi(\delta, p)) = \psi(m(\varepsilon, \delta), p), \quad (2.14)$$

sempre que  $m(\varepsilon, \delta)$  e  $\psi(\delta, p)$  estiverem bem definidos em relação à multiplicação  $m$  do grupo de Lie local  $I$ ,

$$\psi(0, p) = p, \quad (2.15)$$

para todo  $p \in M$  e

$$\frac{d\psi(\varepsilon, p)}{d\varepsilon} = X \Big|_{\psi(\varepsilon, p)}. \quad (2.16)$$

Observe que a condição (2.15) simplesmente nos dá a condição inicial que caracteriza a curva integral. Já (2.16) relata que, fixado  $p$ ,  $X$  é tangente à curva  $\psi(\varepsilon, p)$ . Além disso, se voltarmos à Definição 2.3.5 de grupos locais de transformações e compararmos à definição as condições (2.14) e (2.15), vemos que o fluxo gerado por  $X$  determina um grupo local de transformações a 1-parâmetro com lei de composição aditiva. O campo vetorial  $X$  é chamado de gerador infinitesimal do grupo.

As órbitas do grupo são as curvas integrais do campo  $X$ . Por outro lado, se  $\psi(\varepsilon, p)$  é um grupo local de transformações a 1-parâmetro agindo numa variedade  $M$ , então seu gerador infinitesimal é dado por

$$X_p = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \psi(\varepsilon, p).$$

Desta forma, estabelecemos uma relação unívoca entre grupos locais de transformações e seus geradores infinitesimais. No caso especial de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , colocando coordenadas adaptadas  $(x, u)$ , onde  $x \in \mathbb{R}^m$  e  $u \in \mathbb{R}^n$ , escrevemos o gerador infinitesimal como

$$X = \zeta^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u^j},$$

onde  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

**Proposição 2.3.2.** O grupo de transformações a um parâmetro

$$T(\varepsilon, p) = (T^1(\varepsilon, p), \dots, T^{m+n}(\varepsilon, p))$$

é equivalente a

$$T^i(\varepsilon, p) = e^{\varepsilon X} p := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k x^i, \quad (2.17)$$

onde  $x^i$  denota a  $i$ -ésima coordenada de  $p$ , o operador  $X$  denota o gerador infinitesimal de  $T$ ,  $X^k = XX^{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  e  $X^0 = id$ .

*Demonstração.* Veja [9], *Theorem 2.3.3-1* (página 43). □

Com a proposição anterior, concluímos que, dado um gerador  $X$ , temos duas maneiras de explicitamente encontrar o grupo de transformações a 1-parâmetro associado a  $X$ :

- (a) resolver o problema de valor inicial (2.12) – (2.13); ou
- (b) expressar o grupo em termos da série de potências (2.17).

Na maioria dos casos, ambos métodos são eficientes e simples de serem utilizados. Porém, um caso aqui apresentado se torna substancialmente mais difícil quando usamos série de potências. Nos próximos exemplos discutiremos as duas maneiras.

**Exemplo 2.3.13.** Considere o grupo de dilatações

$$\{T_\varepsilon(x, t, u, v) = (x, e^{-b\varepsilon}t, e^\varepsilon u, e^\varepsilon v), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}\}. \quad (2.18)$$

Seu gerador infinitesimal será dado por

$$X = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} T_\varepsilon(x, t, u, v) = u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} - bt \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Se temos somente o operador (2.19), queremos recuperar a transformação (2.18) usando o problema de valor inicial (2.12)-(2.13). Considere o sistema

$$\frac{dT^1}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{dT^2}{d\varepsilon} = -bT^2, \quad \frac{dT^3}{d\varepsilon} = T^3, \quad \frac{dT^4}{d\varepsilon} = T^4.$$

A solução do sistema nos dá

$$T_\varepsilon(x, t, u, v) = (T^1, T^2, T^3, T^4) = (c_1, e^{-bt}c_2, e^\varepsilon c_3, e^\varepsilon c_4)$$

e, quando consideramos a condição inicial  $T_0(x, t, u, v) = (x, t, u, v)$ , temos (2.18).

**Exemplo 2.3.14.** Neste exemplo, consideraremos o campo vetorial

$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

e queremos encontrar, via série de potências, o grupo de transformações  $T : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T_0(x, t, u) = (x, t, u)$ .

Para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , temos  $X^k t = X^k u = 0$ . Além disso,  $Xx = 1$  e  $X^k x = 0$  para todo natural  $k > 1$ . Logo, da expressão (2.17), temos

$$T^1 = x + \varepsilon, \quad T^2 = t, \quad T^3 = u$$

e o grupo de transformações a 1-parâmetro é dado por

$$T_\varepsilon(x, t, u) = (x + \varepsilon, t, u).$$

**Exemplo 2.3.15.** Considere o campo vetorial

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (2k - 1)xy \frac{\partial}{\partial y}$$

do Exemplo 2.2.8 (a). Inicialmente considere o problema de valor inicial (2.12)-(2.13) que, neste caso, escrevemos como

$$\frac{dT^1}{d\varepsilon} = (T^1)^2, \quad \frac{dT^2}{d\varepsilon} = (2k - 1)T^1 T^2$$

com condições iniciais

$$T_0^1(x, y) = x, \quad T_0^2(x, y) = y.$$

A solução das EDOs de primeira ordem é

$$T^1(\varepsilon, x, y) = -\frac{1}{\varepsilon + c_1}, \quad T^2(\varepsilon, x, y) = \frac{c_2}{(1 - \varepsilon x)^{2k-1}},$$

onde  $c_1, c_2$  são constantes de integração. As condições iniciais dizem então que  $c_1 = -1/x, c_2 = y$  e a transformação é dada por

$$T_\varepsilon(x, y) = \left( \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{(1 - \varepsilon x)^{2k-1}} \right).$$

Isto mostra que mesmo que o campo vetorial considerado seja global no sentido de estar definido no espaço inteiro (como é o caso do operador  $X$ ), o grupo gerado por ele pode ser apenas local.

Consideremos agora a série de potências

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k y.$$

Temos  $Xy = (2k - 1)xy, X^2y = ((2k - 1)^2 + (2k - 1))x^2y, X^3y = ((2k - 1)^2 + (2k - 1))(2k + 1)x^3y$ . Com isso, vemos que é bem mais difícil encontrar um padrão para  $X^k y$  do que resolver o problema de valor inicial (2.12)-(2.13).

Estamos próximos de definir simetria de um sistema de equações diferenciais. Com o que construímos até agora, o máximo que podemos dizer é que uma simetria de um sistema de equações diferenciais é um grupo local de transformações a 1-parâmetro que preserva algum tipo de estrutura do sistema, estrutura esta que discutiremos adiante.

## 2.4 GRUPOS DE SIMETRIAS E INVARIANTES

Nesta seção discutiremos conceitos preliminares da teoria de simetrias de Lie e também prepararemos o terreno para mais tarde discutirmos um tipo especial de soluções de sistemas de equações diferenciais: as soluções invariantes.

Na definição a seguir, denotaremos um grupo local de transformações a 1-parâmetro por  $G$  pela simplicidade da notação.

**Definição 2.4.1.** Seja  $G$  um grupo local de transformações a 1-parâmetro agindo em  $M$ . Um subconjunto  $\mathcal{S} \subset M$  é dito ser  $G$ -invariante, e  $G$  é chamado de grupo de simetria de  $\mathcal{S}$ , se sempre que  $p \in \mathcal{S}$  e  $g \in G$  são tais que  $g \cdot p$  está definido, então  $g \cdot p \in \mathcal{S}$ .

Apesar de a notação da Definição 2.4.1 ser mais simples no sentido que simplesmente dizemos que o conjunto é  $G$ -invariante, sua aplicação pode não ser tão clara. Se  $g$  é um elemento de  $G$ , então podemos associá-lo a uma transformação  $T_\varepsilon$  definida em algum subconjunto de  $M$ . Desta forma, a definição diz que  $g \cdot p = T_\varepsilon(p) \in \mathcal{S}$  sempre que  $T_\varepsilon(p)$  estiver definido.

**Exemplo 2.4.1.** Considere o grupo de translações dado por

$$T(\varepsilon, x, t, u) = (x + \varepsilon c, t + \varepsilon, u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (2.20)$$

onde  $c$  é uma constante, e os planos em  $\mathbb{R}^3$  dados pelo conjunto  $\mathcal{S} = \{(x, t, u) \in \mathbb{R}^3; x = ct + d\}$ , onde  $d$  também é uma constante.

Sejam  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  e  $p \in \mathcal{S}$ . Então

$$T_\varepsilon(p) = T_\varepsilon(ct + d, t, u) = (c(t + \varepsilon) + d, t + \varepsilon, u) = (c\bar{t} + d, \bar{t}, u) \in \mathcal{S}.$$

Ou seja,  $\mathcal{S}$  é  $\mathbb{R}$ -invariante (ou invariante sob a ação de  $T$ ).

**Definição 2.4.2.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades e  $G$  um grupo local de transformações agindo em  $M$ . Uma função diferenciável  $F : M \rightarrow N$  é dita ser  $G$ -invariante se, para cada  $p \in M$  e toda  $T_\varepsilon \in G$  tais que  $T_\varepsilon(p)$  está definido, temos

$$F(T_\varepsilon(p)) = F(p). \quad (2.21)$$

Se  $N = \mathbb{R}$ , simplesmente dizemos que  $F$  é um invariante de  $G$ .

**Exemplo 2.4.2.** Considere o grupo de translações (2.20) e a função  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x, t, u) = x - ct$ . A função  $F$  é um invariante do grupo (2.20). De fato, dados  $(x, t, u) \in \mathbb{R}^3$  e  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , temos

$$F(T_\varepsilon(x, t, u)) = F(x + \varepsilon c, t + \varepsilon, u) = x + \varepsilon c - c(t + \varepsilon) - \varepsilon c = x - ct = F(x, t, u).$$

De maneira mais geral, temos que toda função diferenciável  $F(x, t, u) = f(x - ct)$  é um invariante de (2.20), pois

$$F(T_\varepsilon(x, t, u)) = F(x + \varepsilon c, t + \varepsilon, u) = f(x + \varepsilon c - c(t + \varepsilon)) = f(x - ct) = F(x, t, u).$$

**Exemplo 2.4.3.** Considere o grupo  $G$  de dilatações

$$\{T_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, e^{\varepsilon(2k-1)/2} y), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}\}$$

como no Exemplo 2.3.7. Considere também a função  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x, y) = \frac{x^{(2k-1)/2}}{y}$ . Se  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  e  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , então

$$F(T_\varepsilon(x, y)) = F(e^\varepsilon x, e^{\varepsilon(2k-1)/2} y) = \frac{e^{\varepsilon(2k-1)/2} x^{(2k-1)/2}}{e^{\varepsilon(2k-1)/2} y} = \frac{x^{(2k-1)/2}}{y} = F(x, y).$$

**Proposição 2.4.1.** Se  $G$  é um grupo local de transformações que age em  $M$  e  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^l$  é diferenciável, então  $F$  é  $G$ -invariante se, e somente se, cada conjunto de nível  $\{p \in M; F(p) = c\}$ , onde  $c \in \mathbb{R}^l$ , é um conjunto  $G$ -invariante.

*Demonstração.* A demonstração segue diretamente das definições 2.4.1 e 2.4.2.  $\square$

A proposição acima diz que se  $F$  é  $G$ -invariante, então todos os seus conjuntos de nível são conjuntos  $G$ -invariantes. Mas o contrário não é válido e é isso que discutiremos no próximo exemplo.

**Exemplo 2.4.4.** Considere  $F(x, y) = xy$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , o conjunto  $\{(x, y); F(x, y) = 0\}$  e a dilatação  $T_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, e^\varepsilon y)$ .

Dados  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , temos  $T_\varepsilon(x, y) = (e^\varepsilon x, e^\varepsilon y)$ . Se  $\bar{x} = e^\varepsilon x$  e  $\bar{y} = e^\varepsilon y$ , então as coordenadas transformadas são tais que  $\bar{x}\bar{y} = e^{2\varepsilon} xy = 0$ , ou seja,  $T_\varepsilon(x, y) \in \{(x, y); F(x, y) = 0\}$ .

Porém, observe que

$$F(T_\varepsilon(x, y)) = F(e^\varepsilon x, e^\varepsilon y) = e^{2\varepsilon} xy \neq F(x, y)$$

se  $\varepsilon \neq 0$ . Desta forma, temos uma função  $F$  que possui uma curva de nível  $\{(x, y); F(x, y) = 0\}$   $G$ -invariante, mas que não é  $G$ -invariante enquanto função.

O problema da  $G$ -invariância é que, a princípio, as condições que dela surgem são complicadas, pois as funções não necessariamente precisam ser lineares (ou até mesmo polinomiais). A grande qualidade da teoria de simetrias de Lie é poder, ao invés de olharmos as definições 2.4.1 e 2.4.2, considerarmos somente o gerador infinitesimal do grupo  $G$  e condições lineares que surgem dele.

**Proposição 2.4.2.** Seja  $G$  um grupo local de transformações conexo agindo numa variedade  $M$ . Uma função diferenciável  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  é um invariante de  $G$  se, e somente se,

$$XF(p) = 0, \tag{2.22}$$

para todo ponto  $p \in M$  e todo gerador infinitesimal  $X$  de  $G$ .

*Demonstração.* Veja [87], *Proposition 2.6* (página 79). □

**Exemplo 2.4.5.** Considere a translação (2.20) e a função  $F(x, t, u) = f(x - ct)$  do Exemplo 2.4.2. O gerador infinitesimal de (2.20) é dado por

$$X = c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Daí, temos

$$XF(x, t, u) = cf' - cf' = 0,$$

de onde segue que (2.22) é satisfeita e, como já havíamos encontrado no Exemplo 2.4.2,  $F$  é um invariante do grupo de translações.

O próximo exemplo utiliza o espaço de jatos e começa a explorar o que queremos discutir com equações diferenciais.

**Exemplo 2.4.6.** Considere o fibrado trivial  $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , o espaço de 3-jatos  $J^3(\pi)$  e a função  $F : J^3(\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned} F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tx}, u_{tt}, u_{xxx}, u_{txx}, u_{ttx}, u_{ttt}) = \\ = u_t - u_{txx} + (b + 2)u^b u_x - (b + 1)u^{b-1} u_x u_{xx} - u^b u_{xxx}. \end{aligned}$$

O grupo de translações  $T_\varepsilon(x, t, u) = (x, t + \varepsilon, u, u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)})$  de gerador infinitesimal  $X = \frac{\partial}{\partial t}$  é tal que

$$XF = 0.$$

Pela Proposição 2.4.1, o conjunto dos pontos tais que  $F = 0$  (a equação diferencial do Exemplo 2.2.14) é invariante pela translação no tempo.

**Exemplo 2.4.7.** Considere o grupo de transformações

$$T_\varepsilon(x, t, u) = ((a_1 e^\varepsilon + a_2 \varepsilon)x, e^\varepsilon t, u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

no qual  $a_1, a_2$  são constantes arbitrárias porém fixadas. O gerador infinitesimal  $X$  é dado por

$$X = (a_1 x + a_2) \frac{\partial}{\partial x} + a_1 t \frac{\partial}{\partial t}.$$

Considere agora a função  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x, t, u) = f\left(\frac{x}{t}\right)$ , onde  $f$  é uma função diferenciável. Então

$$XF(x, t, u) = a_1 \frac{x}{t} f' - a_1 \frac{x}{t} f' + \frac{a_2}{t} f' = \frac{a_2}{t} f'.$$

Logo, se  $f' \neq 0$ , então  $F$  não poderá ser invariante. O problema com tal função se dá porque o gerador  $X$  pode ser escrito como combinação linear de dois operadores linearmente independentes

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}.$$

Com essa combinação, a função  $F$  é invariante em relação a  $X_2$ , mas não em relação a  $X_1$ .

Com a motivação do exemplo anterior, podemos mostrar que se  $G$  é um grupo gerado por uma combinação linear  $a_1 X_1 + \dots + a_r X_r$  de operadores linearmente independentes  $X_1, \dots, X_r$ , então a Proposição 2.4.2 diz que uma função  $F$  será invariante se, e somente se,

$$X_i F = 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.23)$$

Para o caso de equações  $F(p) = 0$ , onde  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $l \leq m$ , é uma função diferenciável, a condição (2.22) é necessária, porém não suficiente para garantir que o conjunto de soluções seja  $G$ -invariante. Para que o seja, precisamos exigir que a função  $F$  tenha posto máximo, isto é, seja uma submersão. No caso em que a função  $F$  é  $G$ -invariante, a Proposição 2.4.1 diz que não precisamos impor posto máximo.

**Proposição 2.4.3.** Seja  $G$  um grupo de Lie local de transformações a 1-parâmetro conexo agindo em uma variedade  $m$ -dimensional  $M$ . Seja  $F = (F^1, \dots, F^l) : M \rightarrow \mathbb{R}^l$ , com  $l \leq m$ , uma função diferenciável que define um sistema de equações

$$F_i(p) = 0, \quad i = 1, \dots, l,$$

e assumamos que o sistema tenha posto máximo. Então  $G$  é um grupo de simetria do sistema se, e somente se,

$$XF_i(p) = 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad \text{sempre que } F(p) = 0 \quad (2.24)$$

para todo gerador  $X$  de  $G$ .

*Demonstração.* Veja [87], *Theorem 2.8* (página 80). □

**Exemplo 2.4.8.** Considere o fibrado  $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , o espaço de jatos  $J^{2n}(\pi)$  e a função  $F : J^{2n}(\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F = y^{(2n)} + \lambda y^p$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $p \neq 0, 1$  é um número real. Omitimos o argumento da função  $F$  por simplicidade. Considere também as dilatações em  $J^{2n}(\pi)$  de gerador infinitesimal

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2n}{1-p} y \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{2n+k(p-1)}{1-p} y^{(k)} \frac{\partial}{\partial y^{(k)}}. \quad (2.25)$$

Se  $\mathcal{S}$  denota o conjunto de zeros de  $F$ , então  $F$  tem posto máximo em  $\mathcal{S}$ . Desta forma, caso tenhamos  $XF = 0$  quando  $F = 0$ , então o conjunto  $\mathcal{S}$  será invariante pela ação das dilatações. Temos

$$XF = \frac{2np}{1-p} (y^{(2n)} + \lambda y^p),$$

ou seja,  $XF = 0$  quando  $F = 0$ .

No próximo exemplo veremos a razão de exigirmos que a função  $F$  seja uma submersão em seu conjunto de zeros.

**Exemplo 2.4.9.** Considere o grupo de translações  $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por

$$T_\varepsilon(x, y, u) = (x, t + \varepsilon, u),$$

cujo gerador infinitesimal é dado por

$$X = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Considere também o conjunto de zeros  $\mathcal{S} = \{(x, t, u) \in \mathbb{R}^3; F(x, t, u) = 0\}$  da função  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x, t, u) = (t - 1)^2$ , ou seja,  $\mathcal{S}$  é o plano  $t = 1$ . Olhemos inicialmente a condição (2.24):

$$XF(x, t, u) = 2t - 2 = 2(t - 1).$$

Logo,  $XF = 0$  quando  $F = 0$ . Porém, dados  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  e  $(x_0, t_0, u_0) \in \mathcal{S}$ , temos  $t_0 = 1$  e

$$T_\varepsilon(x_0, 1, u_0) = (x_0, 1 + \varepsilon, u_0) = (\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}).$$

Para que  $\mathcal{S}$  seja  $G$ -invariante, devemos ter  $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}) \in \mathcal{S}$ , o que somente acontecerá se  $\varepsilon = 0$ . Portanto,  $\mathcal{S}$  não é  $G$ -invariante. O problema do conjunto  $\mathcal{S}$  é que a função  $F$  que define o conjunto não tem posto máximo em  $\mathcal{S}$ . De fato, temos que o gradiente  $\nabla F = (0, 2(t-1), 0)$  se anula no conjunto  $\mathcal{S}$  inteiro.

O leitor pode se perguntar a importância de estudarmos funções invariantes e invariância das curvas de nível de funções. Funções invariantes nos darão soluções invariantes, enquanto  $G$ -invariância de zero de funções nos dará as simetrias de Lie do sistema de equações em questão. Este último ponto ficará mais claro na próxima seção.

Às vezes estamos interessados em determinar exatamente quantos são os invariantes de um grupo local de transformações. Porém, observe que se  $F^1, \dots, F^k : M \rightarrow \mathbb{R}$  são  $k$  invariantes de um grupo  $G$  com gerador  $X$  e  $H$  é uma função real diferenciável, então  $H(F^1(p), \dots, F^k(p))$  também será um invariante, pois

$$XH = \frac{\partial H}{\partial F^i} XF^i = 0.$$

Por isso precisamos diferenciar invariantes independentes dos dependentes.

**Definição 2.4.3.** Sejam  $\zeta^1, \dots, \zeta^k$  funções diferenciáveis definidas numa variedade  $M$ . Então:

- (a)  $\zeta^1, \dots, \zeta^k$  são ditas *funcionalmente dependentes* se, para cada  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  e uma função diferenciável não identicamente nula (em qualquer aberto de  $\mathbb{R}^k$ )  $F : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F(\zeta^1(p), \dots, \zeta^k(p)) = 0, \quad \forall p \in U. \quad (2.26)$$

- (b)  $\zeta^1, \dots, \zeta^k$  são ditas *funcionalmente independentes* se elas não são funcionalmente dependentes.

Pelo Teorema da Função Implícita, as funções  $\zeta^1, \dots, \zeta^k$  serão funcionalmente dependentes se, e somente se, existir uma função diferenciável  $f$  tal que, sem perda de generalidade,

$$\zeta^k(p) = f(\zeta^1(p), \dots, \zeta^{k-1}(p)).$$

**Exemplo 2.4.10.** Considere o grupo de dilatações com gerador infinitesimal

$$X = u \frac{\partial}{\partial u} - bt \frac{\partial}{\partial t}, \quad b \in \mathbb{R}^*.$$

As funções  $x$  e  $ut^{1/b}$  são invariantes funcionalmente independentes do grupo considerado. De fato, elas são invariantes do grupo pois

$$Xx = 0, \quad Xut^{1/b} = ut^{1/b} - \frac{b}{b}ut^{1/b} = 0.$$

Além disso, suponha que exista  $F$  tal que  $F(x, ut^{1/b}) = 0$  em qualquer aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Então pelo Teorema da Aplicação Inversa existe um aberto  $V$  tal que  $F|_V \equiv 0$  o que nos diz que a condição (a) da Definição 2.4.3 não pode ser satisfeita. Portanto,  $x$  e  $ut^{1/b}$  são invariantes funcionalmente independentes.

Por outro lado, considere os invariantes  $ut^{1/b}$  e  $u^bt$ . Eles são funcionalmente dependentes, pois

$$u^bt = (ut^{1/b})^b = f(ut^{1/b}),$$

onde  $f(z) = z^b$ . Como veremos a seguir,  $x$  e  $ut^{1/b}$  são os únicos invariantes funcionalmente independentes de tal grupo de transformações.

Suponha agora que  $G$  seja um grupo local de transformações a 1-parâmetro agindo em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  com gerador infinitesimal

$$X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u^j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.27)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^m$  e  $u \in \mathbb{R}^n$ . Se queremos encontrar *todos* os invariantes do grupo  $G$ , buscamos todas as funções  $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $XF = 0$ . Logo, queremos resolver o sistema

$$XF = \xi^i(x, u) \frac{\partial F}{\partial x^i} + \eta^j(x, u) \frac{\partial F}{\partial u^j} = 0. \quad (2.28)$$

**Proposição 2.4.4.** A solução geral da equação (2.28) tem a forma

$$F(x, u) = H(J_1(x, u), \dots, J_{m+n-1}(x, u)),$$

onde  $G$  é uma função diferenciável arbitrária de  $m + n - 1$  variáveis e as funções  $J_1(x, u), \dots, J_{m+n-1}(x, u)$  são  $m + n - 1$  soluções linearmente independentes do sistema de características de (2.28) dado por

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x, u)} = \dots = \frac{dx^m}{\xi^m(x, u)} = \frac{du^1}{\eta^1(x, u)} = \dots = \frac{du^n}{\eta^n(x, u)}. \quad (2.29)$$

*Demonstração.* Veja [59], *Theorem 4.2.1* (página 136). □

Como consequência imediata da Proposição 2.4.4, veja [66], *Theorem 2.6* (página 35), temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.4.5.** Um grupo local de transformações a 1-parâmetro  $G$  agindo em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  tem exatamente  $m + n - 1$  invariantes funcionalmente independentes. Podemos tomar tais invariantes como sendo as soluções  $J_1(x, u), \dots, J_{m+n-1}(x, u)$  de (2.29). Tal conjunto de invariantes é dito ser uma base de invariantes para  $G$ .

**Exemplo 2.4.11.** (a) Voltemos ao Exemplo 2.4.10. De acordo com a Proposição 2.4.5, o grupo de dilatações tem apenas dois invariantes, que podemos tomar como sendo as soluções do sistema de características associado ao gerador  $X$ :

$$\frac{dx}{0} = -\frac{dt}{bt} = \frac{du}{u}. \quad (2.30)$$

Vale a pena ressaltar que  $dx/0$  não significa que estamos dividindo por zero: é apenas uma simbologia. Temos então:

$$dx = 0, \quad -\frac{dt}{bt} = \frac{du}{u},$$

cujas soluções são dadas por  $J_1 = x$  e  $J_2 = ut^{1/b}$ .

(b) Considere o grupo projetivo

$$T(\varepsilon, x, y) = \left( \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{(1 - \varepsilon x)^{2k-1}} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

cujos gerador infinitesimal é dado por

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (2k - 1)xy \frac{\partial}{\partial y}.$$

Tal grupo de transformações possui apenas um invariante independente. O sistema de características é dado por

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{(2k - 1)xy}.$$

A solução do sistema de características é dada por

$$J_1(x, y) = \frac{y}{x^{2k-1}}.$$

(c) Considere o grupo de translações no tempo

$$T_\varepsilon(x, t, u) = (x, t + \varepsilon, u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

cujo gerador é dado por

$$X = \frac{\partial}{\partial t}.$$

A Proposição 2.4.5 diz que temos dois invariantes funcionalmente independentes dados pela solução do sistema de características

$$\frac{dx}{0} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0}.$$

Temos  $J_1(x, t, u) = x$  e  $J_2(x, t, u) = u$ .

(d) Considere uma constante real  $c$  e o grupo

$$T_\varepsilon(x, t, u) = (x + c\varepsilon, t + \varepsilon, u)$$

de gerador

$$X = c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

O sistema de características

$$\frac{dx}{c} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{u}$$

tem dois invariantes, que são dados por  $J_1(x, t, u) = x - ct$  e  $J_2(x, t, u) = u$ .

Sabendo como encontrar os invariantes de um grupo de transformações, precisamos saber o que são simetrias de Lie para podermos encontrar soluções invariantes.

## 2.5 SIMETRIAS DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E CONDIÇÃO DE INVARIÂNCIA

Nesta seção finalmente definiremos simetrias de Lie de sistemas de equações diferenciais utilizando toda a teoria que desenvolvemos até agora. Apresentando as simetrias ainda de maneira informal neste momento, mas conectando conceitos, consideraremos uma subvariedade definindo um sistema de equações diferenciais que mora em algum espaço de jatos e encontraremos grupos locais de transformações a 1-parâmetro que transformam uma solução do sistema em outra solução do mesmo sistema. Isso é o que

definirá uma simetria de Lie. Porém, alguns problemas teóricos precisam ser resolvidos, como, por exemplo, o fato de uma simetria agir no espaço de variáveis dependentes e independentes e a equação depender de derivadas das variáveis dependentes. Em outras palavras, esta seção mostrará como um grupo de transformações transforma as derivadas em questão.

Suponha que tenhamos um sistema de equações diferenciais  $\mathcal{S}$  envolvendo variáveis independentes  $x = (x^1, \dots, x^m)$  e dependentes  $u = (u^1, \dots, u^n)$ . As soluções de tal sistema serão seções da forma  $u = f(x)$ .

Consideraremos  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  com coordenadas adaptadas  $(x, u)$ . Um grupo de simetrias de Lie do sistema será um grupo local de transformações a 1-parâmetro  $G$  agindo numa subvariedade aberta  $M \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  de tal forma que  $G$  transforma soluções de  $\mathcal{S}$  em novas soluções de  $\mathcal{S}$ . Porém, precisamos entender como uma função  $u = f(x)$  é transformada por um grupo  $G$ .

Considere o gráfico de  $f$

$$\text{Gr}f = \{(x, f(x)); x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

Pelo Exemplo 2.1.3,  $\text{Gr}f$  é um subvariedade de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  de dimensão  $m$ . Se  $\text{Gr}f \subset U_\varepsilon$ , onde  $U_\varepsilon$  é domínio de definição da transformação  $T_\varepsilon \in G$ , então

$$T_\varepsilon(\text{Gr}f) = \{(\bar{x}, \bar{u}) := T_\varepsilon(x, u); (x, u) \in \text{Gr}f\}.$$

O conjunto  $T_\varepsilon(\text{Gr}f)$  não necessariamente é o gráfico de outra função  $\bar{u} = \bar{f}(\bar{x})$ . Entretanto, como  $T_0(\text{Gr}f) = \text{Gr}f$  e  $G$  age diferenciavelmente em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , então podemos diminuir  $\Omega$  de forma que, para elementos  $T_\varepsilon$  suficientemente próximos da identidade, tenhamos  $T_\varepsilon(\text{Gr}f) = \text{Gr}\bar{f}$  como o gráfico de uma função  $\bar{u} = \bar{f}(\bar{x})$ . Escrevemos  $\bar{f} = T_\varepsilon(f)$  e dizemos que  $\bar{f}$  é a função transformada de  $f$  por  $T_\varepsilon$ .

Precisamos então entender como encontramos  $\bar{f}$ . Suponha que a transformação  $T_\varepsilon$  seja escrita como

$$(\bar{x}, \bar{u}) = T_\varepsilon(x, u) = (\Phi(x, u), \Psi(x, u))$$

para funções diferenciáveis  $\Phi$  e  $\Psi$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \Phi(x, f(x)) = \Phi \circ (\text{id} \times f)(x), \\ \bar{u} &= \Psi(x, f(x)) = \Psi \circ (\text{id} \times f)(x), \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde  $(\text{id} \times f)(x) := (x, f(x))$ . Para encontrar  $\bar{u} = \bar{f}(\bar{x})$  devemos eliminar  $x$  das duas equações em (2.31). Note que como  $T_0 f = f$ , então existe uma vizinhança da origem tal

que a Jacobiana de  $\Phi \circ (id \times f)$  é não singular. Logo, do Teorema da Aplicação Inversa, podemos escrever

$$x = [\Phi \circ (id \times f)]^{-1}(\bar{x}).$$

Substituindo em  $\bar{u}$ , temos

$$\bar{u} = [\Psi \circ (id \times f)] \circ [\Phi \circ (id \times f)]^{-1}(\bar{x})$$

e, desta forma, sempre conseguimos encontrar  $\bar{f}$  como

$$\bar{f} = [\Psi \circ (id \times f)] \circ [\Phi \circ (id \times f)]^{-1}. \quad (2.32)$$

**Exemplo 2.5.1.** (a) Dadas constantes reais  $a, a_1$  e  $b_1$  e um ponto  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ , considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, t) = a + a_1(x - x_0) + b_1(t - t_0)$ , e a translação no espaço  $T_\varepsilon(x, t, u) = (x + \varepsilon, t, u)$ . Temos

$$(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}) = T_\varepsilon(x, t, f(x, t)) = (x + \varepsilon, t, a + a_1(x - x_0) + b_1(t - t_0)).$$

Queremos encontrar  $\bar{u} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{f}(x + \varepsilon, t)$ . Das equações

$$\bar{x} = x + \varepsilon,$$

$$\bar{t} = t$$

$$\bar{u} = a + a_1(x - x_0) + b_1(t - t_0)$$

temos que  $x = \bar{x} - \varepsilon, t = \bar{t}$  e  $\bar{u} = a - \varepsilon a_1 + a_1(\bar{x} - x_0) + b_1(\bar{t} - t_0)$ . Em outras palavras,

$$\bar{u} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = a - \varepsilon a_1 + a_1(\bar{x} - x_0) + b_1(\bar{t} - t_0).$$

No caso em que a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$\begin{aligned} f(x, t) = & a + a_1(x - x_0) + b_1(t - t_0) + a_2(x - x_0)^2 + b_2(t - t_0)^2 + \\ & + c_2(x - x_0)(t - t_0) + a_3(x - x_0)^3 + b_3(t - t_0)^3 + \\ & + c_3(x - x_0)^2(t - t_0) + d_3(x - x_0)(t - t_0)^2, \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde  $a, a_i, b_i$  e  $c_i$  são constantes reais, temos

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}) = & T_\varepsilon(x, t, f(x, t)) = \\ = & (x + \varepsilon, t, a + a_1(x - x_0) + b_1(t - t_0) + a_2(x - x_0)^2 + b_2(t - t_0)^2 \\ & + c_2(x - x_0)(t - t_0) + a_3(x - x_0)^3 + b_3(t - t_0)^3 + \\ & + c_3(x - x_0)^2(t - t_0) + d_3(x - x_0)(t - t_0)^2), \end{aligned}$$

o que significa que ainda temos  $x = \bar{x} - \varepsilon$  e  $t = \bar{t}$ , porém

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = \\ &= a + a_1(\bar{x} - x_0 - \varepsilon) + b_1(\bar{t} - t_0) + a_2(\bar{x} - x_0 - \varepsilon)^2 + \\ &\quad + b_2(\bar{t} - t_0)^2 + c_2(\bar{x} - x_0 - \varepsilon)(\bar{t} - t_0) + a_3(\bar{x} - x_0 - \varepsilon)^3 + \\ &\quad + b_3(\bar{t} - t_0)^3 + c_3(\bar{x} - x_0 - \varepsilon)^2(\bar{t} - t_0) + d_3(\bar{x} - x_0 - \varepsilon)(\bar{t} - t_0)^2.\end{aligned}$$

(b) Considere o grupo transformações projetivas

$$T_\varepsilon(x, y) = \left( \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x} \right)$$

e a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$ , onde  $a_0, a_1$  e  $a_2$  são constantes e  $x_0 \in \mathbb{R}$  é um ponto fixado. Temos então

$$(\bar{x}, \bar{y}) = T_\varepsilon(x, f(x)) = \left( \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2}{1 - \varepsilon x} \right),$$

o que nos diz que

$$\bar{x} = \frac{x}{1 - \varepsilon x},$$

ou seja,

$$x = \frac{\bar{x}}{1 + \varepsilon \bar{x}}.$$

Para  $\bar{y}$  temos

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \bar{f}(\bar{x}) = \frac{a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2}{1 - \varepsilon x} = \\ &= a_0(1 + \varepsilon \bar{x}) + a_1(\bar{x} - x_0(1 + \varepsilon \bar{x})) + a_2 \frac{(\bar{x} - x_0(1 + \varepsilon \bar{x}))^2}{1 + \varepsilon \bar{x}}.\end{aligned}$$

Veremos a seguir que a escolha das funções  $f$  no Exemplo 2.5.1 como polinômios é de extrema importância para determinarmos extensões de grupos de transformações.

Podemos agora definir rigorosamente uma simetria de Lie de um sistema de equações diferenciais.

**Definição 2.5.1.** Seja  $\mathcal{S} \subset J^k(\pi)$  um sistema de equações diferenciais definido em termos do fibrado trivial  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Um grupo de simetrias, ou grupo de simetrias de Lie, do sistema  $\mathcal{S}$  é um grupo local de transformações a 1-parâmetro  $G$  agindo numa variedade aberta  $M \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  com a propriedade de que sempre que  $u = f(x)$  for uma solução clássica de  $\mathcal{S}$ , e sempre que  $T_\varepsilon(f)$  estiver definido para  $T_\varepsilon \in G$ , então  $\bar{u} = T_\varepsilon(f)(\bar{x})$  também é uma solução do sistema.

**Exemplo 2.5.2.** Considere a equação de Novikov modificada

$$u_t - u_{txx} + (b + 1)u^2u_x - buu_xu_{xx} - u^2u_{xxx} = 0$$

e seja  $u = f(x, t)$  uma solução qualquer da equação. Considere também o grupo de translações  $T_\varepsilon(x, t, u) = (x + \varepsilon, t, u)$ . Para que o grupo seja uma simetria,  $\bar{u} = T_\varepsilon(f)(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{f}(\bar{x}, \bar{t})$  deve ser uma nova solução.

Como  $T_\varepsilon(x, t, u) = (x + \varepsilon, t, f(x, t))$ , então temos  $\bar{x} = x + \varepsilon, \bar{t} = t$  e  $\bar{u} = f(x, t)$ . Além disso, conseguimos escrever  $x = \bar{x} - \varepsilon$ , desta forma, encontramos

$$\bar{u} = f(\bar{x} - \varepsilon, \bar{t}).$$

Precisamos verificar que  $\bar{u}$  é solução da equação. Para isso, basta notar que

$$\begin{aligned}\bar{u}_{\bar{x}} &= f_{\bar{x}} = f_x \frac{dx}{d\bar{x}} = f_x = u_x, \\ \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} &= u_{xx}, \quad \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = u_{xxx}, \\ \bar{u}_{\bar{t}} &= u_t, \quad \bar{u}_{\bar{t}\bar{x}\bar{x}} = u_{txx}, \quad \bar{u} = u.\end{aligned}$$

Desta forma, teremos

$$\begin{aligned}\bar{u}_{\bar{t}} - \bar{u}_{\bar{t}\bar{x}\bar{x}} + (b + 1)\bar{u}^2\bar{u}_{\bar{x}} - b\bar{u}\bar{u}_{\bar{x}}\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{u}^2\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} &= \\ = u_t - u_{txx} + (b + 1)u^2u_x - buu_xu_{xx} - u^2u_{xxx} &= 0\end{aligned}$$

e o grupo de translações será uma simetria da equação. Considere agora a função

$$f(x, t) = \frac{e^{\pm x}}{\sqrt{t}}.$$

Podemos verificar que  $u = f(x, t)$  é solução da equação de Novikov modificada. Mostraremos como a translação leva essa solução em outra solução. Como  $T_\varepsilon(x, t, u) = (x + \varepsilon, t, f(x, t))$  e  $x = \bar{x} - \varepsilon$ , então

$$\bar{u} = \frac{e^{\pm x}}{\sqrt{t}} = \frac{e^{\pm(\bar{x} - \varepsilon)}}{\sqrt{\bar{t}}}$$

é uma nova solução da equação.

Uma vez que uma simetria de Lie é um grupo de transformações  $G$  e já sabemos que existe uma relação unívoca entre o grupo e seu gerador  $X$ , precisamos entender o que a Definição 2.5.1 quer dizer em termos do gerador infinitesimal.

Para isso precisamos relembrar diversas propriedades do espaço de jatos que construímos na Seção 2.2. Considerando o fibrado da Definição 2.5.1 e seu respectivo espaço de  $k$ -jatos  $J^k(\pi)$ , dada uma função diferenciável  $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  conseguimos associar  $u$  a uma única seção  $\sigma(x) = (x, u(x)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . A partir da seção  $\sigma$  temos o seu  $k$ -ésimo jato  $j_x^k(\sigma)$ , que em [87] é chamado de  $k$ -ésima prolongação de  $u = f(x)$  e é denotado por  $pr^{(k)}f$ .

Definimos coordenadas adaptadas  $x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}$  em  $J^k(\pi)$  onde  $u_{(i)}$  denota o conjunto das  $i$ -ésimas derivadas da função  $u = (u^1, \dots, u^n)$ . Cada  $i$ -ésima derivada da componente  $l$  da função  $u$  é da forma

$$u_{(i)}^l = \frac{\partial^i u^l}{\partial x^\alpha}, \quad (2.34)$$

onde  $\alpha$  é um multi-índice tal que  $|\alpha| = i$ . Deixando  $i$  variar de 1 a  $k$ , as condições (2.34) são chamadas de *condições de contato*. Além disso, podemos considerar  $J^k(\pi) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell$ , onde

$$\ell = n \binom{m+k}{k}.$$

Suponha que  $G$  seja um grupo local de transformações a 1-parâmetro agindo num aberto  $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Defina  $U^{(k)} \subset J^k(\pi)$  como sendo o conjunto dos pontos  $(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)})$  tais que  $(x, u) \in U$ . Dado um ponto  $(x_0, u_0, (u_0)_{(1)}, \dots, (u_0)_{(k)}) \in U^{(k)}$ , escolha qualquer função  $u = f(x)$  definida numa vizinhança de  $x_0$ , cujo gráfico more em  $U$  e que possua derivadas em  $x_0$

$$(u_0, (u_0)_{(1)}, \dots, (u_0)_{(k)}) = pr^{(k)}f(x_0). \quad (2.35)$$

Tal função sempre existe, pois podemos tomar  $f$  como um polinômio de Taylor com coeficientes  $(u_0)_{(i)}^j$ .

Se  $T_\varepsilon \in G$  é um elemento suficientemente próximo da identidade, a função transformada de  $f$  dada por (2.32) está definida numa vizinhança do ponto transformado  $(\bar{x}_0, \bar{u}_0) = T_\varepsilon(x_0, u_0)$ , com  $u_0 = f(x_0)$ .

Conseguimos então definir como estendemos a ação de um elemento  $T_\varepsilon \in G$  a  $U^{(k)}$ :

$$pr^{(k)}T_\varepsilon(x_0, u_0, (u_0)_{(1)}, \dots, (u_0)_{(k)}) := (\bar{x}_0, \bar{u}_0^k), \quad (2.36)$$

onde  $\bar{u}_0^k := pr^{(k)}(\bar{f})(\bar{x}_0)$ . A condição (2.36) diz que para calcularmos  $pr^{(k)}T_\varepsilon$  num ponto  $(x_0, u_0, (u_0)_{(1)}, \dots, (u_0)_{(k)})$ , basta tomar uma função  $f$  tal que (2.35) aconteça, calculamos  $\bar{f}$  como (2.32) e encontramos  $\bar{u}_0^k = pr^{(k)}(\bar{f})(\bar{x}_0)$ .

O problema que surge é se o procedimento está bem definido, ou seja, se ele não depende do representante  $f$  escolhido. Se  $f_1$  e  $f_2$  são duas funções tais que (2.35) acontece, então as seções  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  associadas a  $f_1$  e  $f_2$  estão no mesmo jato  $j_{x_0}^k(\sigma_1)$ . Da regra da cadeia segue que (2.36) independe do representante. Logo, podemos sempre tomar  $f$  como sendo um determinado polinômio.

Em [70, 71] os autores constroem o grupo estendido via formas diferenciais e uma certa invariância das chamadas distribuições de Cartan. Em [9, 10], os autores utilizam as distribuições de Cartan de maneira indireta, olhando as formas de contato. A beleza da construção que fizemos, como apresentada em [87], é que as condições de contato (2.34) já estão embutidas na definição da ação estendida do grupo. Em termos geométricos, [9, 10, 70, 71] estão considerando o chamado fibrado cotangente, enquanto estamos trabalhando no fibrado tangente.

**Exemplo 2.5.3.** (a) Considere o grupo de translações do Exemplo 2.5.1 (a)

$$\{T_\varepsilon(x, t, u) = (x + \varepsilon, t, u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}\}.$$

Calcularemos a terceira prolongação de tal grupo. Observe inicialmente que  $U^{(3)} = J^3(\pi)$  com coordenadas

$$(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_{xxx}, u_{xxt}, u_{xtt}, u_{ttt}).$$

Dado um ponto

$$(x^0, t^0, u_{(1)}^0, u_{(2)}^0, u_{(3)}^0) := (x^0, t^0, u^0, u_x^0, u_t^0, u_{xx}^0, u_{tx}^0, u_{tt}^0, u_{xxx}^0, u_{ttx}^0, u_{ttt}^0) \in J^3(\pi),$$

precisamos de uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $pr^{(3)}f(x^0, t^0) = (x^0, t^0, u_{(1)}^0, u_{(2)}^0, u_{(3)}^0)$ .

Fazendo uma modificação nas constantes da função  $f$  do Exemplo 2.5.1 (a), temos que a função

$$\begin{aligned} f(x, t) = & u^0 + u_x^0(x - x^0) + u_t^0(t - t^0) + \frac{u_{xx}^0}{2}(x - x^0)^2 + \frac{u_{tt}^0}{2}(t - t^0)^2 + \\ & + u_{tx}^0(x - x^0)(t - t^0) + \frac{u_{xxx}^0}{6}(x - x^0)^3 + \frac{u_{ttt}^0}{6}(t - t^0)^3 + \\ & + \frac{u_{ttx}^0}{2}(x - x^0)^2(t - t^0) + \frac{u_{ttx}^0}{2}(x - x^0)(t - t^0)^2 \end{aligned}$$

satisfaz  $pr^{(3)}f(x^0, t^0) = (x^0, t^0, u^0, u^0_{(1)}, u^0_{(2)}, u^0_{(3)})$ . De acordo com o Exemplo 2.5.1 (a), a função transformada  $\bar{f}$  é dada por

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = & u^0 + u^0_x(\bar{x} - x^0 - \varepsilon) + u^0_t(\bar{t} - t^0) + \frac{u^0_{xx}}{2}(\bar{x} - x^0 - \varepsilon)^2 + \frac{u^0_{tt}}{2}(\bar{t} - t^0)^2 + \\ & + u^0_{tx}(\bar{x} - x^0 - \varepsilon)(\bar{t} - t^0) + \frac{u^0_{xxx}}{6}(\bar{x} - x^0 - \varepsilon)^3 + \frac{u^0_{ttt}}{6}(\bar{t} - t^0)^3 + \\ & + \frac{u^0_{txx}}{2}(\bar{x} - x^0 - \varepsilon)^2(\bar{t} - t^0) + \frac{u^0_{ttx}}{2}(\bar{x} - x^0 - \varepsilon)(\bar{t} - t^0)^2. \end{aligned}$$

Como  $\bar{x}^0 = x^0 + \varepsilon$  e  $\bar{t}^0 = t^0$ , temos

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{x}^0, \bar{t}^0) &= u^0, \\ \bar{f}_{\bar{x}}(\bar{x}^0, \bar{t}^0) &= u^0_x, \quad \bar{f}_{\bar{t}}(\bar{x}^0, \bar{t}^0) = u^0_t, \\ \bar{f}_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{x}^0, \bar{t}^0) &= u^0_{xx}, \quad \bar{f}_{\bar{t}\bar{t}}(\bar{x}^0, \bar{t}^0) = u^0_{tt}, \quad \bar{f}_{\bar{t}\bar{x}}(\bar{x}^0, \bar{t}^0) = u^0_{tx}, \\ \bar{f}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(\bar{x}^0, \bar{t}^0) &= u^0_{xxx}, \quad \bar{f}_{\bar{t}\bar{x}\bar{x}}(\bar{x}^0, \bar{t}^0) = u^0_{txx}, \quad \bar{f}_{\bar{t}\bar{t}\bar{x}}(\bar{x}^0, \bar{t}^0) = u^0_{ttx}, \quad \bar{f}_{\bar{t}\bar{t}\bar{t}}(\bar{x}^0, \bar{t}^0) = u^0_{ttt}. \end{aligned}$$

Logo, a terceira extensão do grupo é dada por

$$pr^{(3)}T_\varepsilon(x, t, u) = (x + \varepsilon, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tx}, u_{tt}, u_{xxx}, u_{txx}, u_{ttx}, u_{xxx}). \quad (2.37)$$

(b) Considere o grupo projetivo do Exemplo 2.5.1 (b)

$$T_\varepsilon(x, y) = \left( \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x} \right).$$

Para cada  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , considere o conjunto  $U_\varepsilon$  no qual  $T_\varepsilon$  está definida. Seja  $(x_0, y_0, y'_0, y''_0) \in U_\varepsilon^{(2)} \subset J^2(\pi)$ . Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2}(x - x_0)^2.$$

Com essa função  $f$  temos que  $pr^{(2)}f(x_0) = (y_0, y'_0, y''_0)$ . Do Exemplo 2.5.1 (b), temos que a função transformada  $\bar{f}$  é dada por

$$\bar{f}(\bar{x}) = y_0(1 + \varepsilon\bar{x}) + y'_0(\bar{x} - x_0(1 + \varepsilon\bar{x})) + \frac{y''_0}{2} \frac{(\bar{x} - x_0(1 + \varepsilon\bar{x}))^2}{1 + \varepsilon\bar{x}}.$$

Para facilitar os cálculos, observe que  $\bar{x}_0 = \frac{x_0}{1 - \varepsilon x_0}$  e

$$\bar{x}_0 - x_0(1 + \varepsilon\bar{x}_0) = \frac{x_0}{1 - \varepsilon x_0} - x_0 \left( 1 + \frac{x_0}{1 - \varepsilon x_0} \right) = \frac{x_0}{1 - \varepsilon x_0} - \frac{x_0}{1 - \varepsilon x_0} = 0.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{x}_0) &= \frac{y_0}{1 - \varepsilon x_0} = \bar{y}_0, \\ \bar{f}'(\bar{x}_0) &= y'_0 + (y_0 - x_0 y'_0)\varepsilon, \quad \bar{f}''(\bar{x}_0) = -y''_0(\varepsilon x_0 - 1)^3. \end{aligned}$$

ou seja,

$$pr^{(2)}T_\varepsilon(x, y) = \left( \frac{x}{1 - \varepsilon x'}, \frac{y}{1 - \varepsilon x'}, y' + (y - xy')\varepsilon, -y''(\varepsilon x - 1)^3 \right).$$

**Proposição 2.5.1.** Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  e suponha que  $\mathcal{S}$  seja um sistema de equações diferenciais de ordem  $k$  definido em  $U$ . Suponha que  $G$  seja um grupo local de transformações agindo em  $U$  tal que teremos  $prT_\varepsilon(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) \in \mathcal{S}$  sempre que  $(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) \in \mathcal{S}$  e  $T_\varepsilon \in G$  é tal que isso esteja definido. Então  $G$  é um grupo de simetrias de Lie no sentido da Definição 2.5.1.

*Demonstração.* Veja [87], *Theorem 2.27* (página 101).  $\square$

Agora que estendemos a ação de um grupo de transformações, precisamos entender como o gerador infinitesimal se comporta no grupo estendido. E a prolongação do gerador infinitesimal é dada exatamente como a princípio poderíamos pensar: é o gerador infinitesimal do grupo estendido.

**Definição 2.5.2.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  um aberto e suponha que  $X$  seja um campo vetorial no fibrado tangente  $TU$  gerando um grupo local de transformações a 1-parâmetro  $e^{\varepsilon X}$ . A  $k$ -ésima prolongação de  $X$ , denotado por  $pr^{(k)}X$  ou  $X^{(k)}$ , será um campo vetorial no fibrado tangente  $TJ^k(\pi)$  e é definido como o gerador infinitesimal do correspondente grupo prolongado  $pr^{(k)}[e^{\varepsilon X}]$ . Explicitamente,

$$pr^{(k)}X \Big|_{(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)})} = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} pr^{(k)}[e^{\varepsilon X}](x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}), \quad (2.38)$$

para todo  $(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) \in U^{(k)}$ .

Se  $k = 0$ , da construção que fizemos do grupo estendido temos que  $pr^{(0)}[e^{\varepsilon X}] = e^{\varepsilon X}$ . Além disso, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos  $X^{(k)} = X^{(k-1)} + Y$ , onde  $Y$  é um campo que envolve somente as coordenadas  $u_{(k)}$ . De maneira mais explícita, se

$$X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u^j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

então

$$X^{(k)} = X + \sum_{|\alpha|=1}^k \Phi_\alpha^j \frac{\partial}{\partial u_\alpha^j}, \quad (2.39)$$

onde  $\alpha$  é um multi-índice e as funções  $\Phi_\alpha^j$  dependem de  $x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(|\alpha|)}$ .

Por exemplo, se  $x, t$  são variáveis independentes e  $u, v$  variáveis dependentes e temos um operador

$$X = \zeta^1(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial x} + \zeta^2(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^1(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial v},$$

então  $X^{(2)}$  pode ser escrito, de maneira geral, como

$$\begin{aligned} X = & \zeta^1 \frac{\partial}{\partial x} + \zeta^2 \frac{\partial}{\partial t} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial v} + \Phi_x^1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \Phi_t^1 \frac{\partial}{\partial u_t} + \Phi_x^2 \frac{\partial}{\partial v_x} + \Phi_t^2 \frac{\partial}{\partial u_t} + \\ & + \Phi_{xx}^1 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \Phi_{tx}^1 \frac{\partial}{\partial u_{tx}} + \Phi_{tt}^1 \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \Phi_{xx}^2 \frac{\partial}{\partial v_{xx}} + \Phi_{tx}^2 \frac{\partial}{\partial v_{tx}} + \Phi_{tt}^2 \frac{\partial}{\partial v_{tt}}, \end{aligned}$$

onde omitimos os argumentos de cada função  $\Phi_\alpha^j$  para não sobrecarregar a notação. É crucial observar que  $\Phi_\alpha^j$  é apenas uma notação para as funções, isto é,  $\Phi_{xx}^j$  não é a derivada de  $\Phi_x^j$  com relação a  $x$ .

**Exemplo 2.5.4.** Consideraremos os grupos estendidos encontrados no Exemplo 2.5.3.

- (a) Considere o grupo de translações  $\{T_\varepsilon; \varepsilon \in \mathbb{R}\}$  do Exemplo 2.5.3 (a). Seu gerador infinitesimal é dado por

$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

a terceira extensão do grupo é dada por

$$pr^{(3)}T_\varepsilon(x, t, u) = (x + \varepsilon, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_{xxx}, u_{xxt}, u_{xtt}, u_{xxx}).$$

Observe que  $pr^{(3)}T_\varepsilon$  somente possui dependência em  $\varepsilon$  na coordenada  $x$ . Utilizando a equação (2.38), escrevemos

$$X^{(3)} = pr^{(3)}X = X = \frac{\partial}{\partial x}.$$

- (b) O grupo projetivo do Exemplo 2.5.3 (b) tem gerador infinitesimal dado por

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}$$

e sua segunda prolongação é dada por

$$pr^{(2)}T_\varepsilon(x, y) = \left( \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x}, y' + (y - xy')\varepsilon, -y''(\varepsilon x - 1)^3 \right).$$

O gerador estendido  $X^{(2)}$  é então dado por

$$X^{(2)} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y} + (y - xy') \frac{\partial}{\partial y'} - 3xy'' \frac{\partial}{\partial y''}.$$

Observemos que agora já temos diversas ferramentas que se conectam. Começamos com um grupo local de transformações a 1-parâmetro  $G$  agindo numa variedade  $M$  e na Proposição 2.4.3 exibimos uma condição para que uma função  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^l$  tenha  $G$  como grupo de simetria. Depois definimos uma simetria de Lie como sendo um grupo  $G$  agindo em abertos  $U$  de  $M = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  que leva soluções de sistemas de equações diferenciais em soluções. Sistemas estes que são determinados por funções  $F : V^{(k)} \subset J^k(\pi) \rightarrow \mathbb{R}^l$ , onde  $V^{(k)}$  é um aberto do espaço de  $k$ -jatos. Estendemos elementos do grupo  $G$  para  $pr^{(k)}T_\varepsilon$  e sabemos como eles agem num elemento de  $V^{(k)}$ . Logo, sabemos como encontrar o gerador estendido.

Com esse raciocínio, se  $F : V^{(k)} \subset J^k(\pi) \rightarrow \mathbb{R}^l$  é uma função de posto máximo (ou seja, uma submersão) que determina um sistema de equações diferenciais de ordem  $k$  e  $G$  é um grupo agindo em  $V$  tal que  $X^{(k)}F = 0$  quando  $F = 0$ , então da Proposição 2.4.3 temos que  $prT_\varepsilon(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) \in \mathcal{S} = \{(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}); F(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0\}$  sempre que  $(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) \in \mathcal{S}$ . Da Proposição 2.5.1 concluímos que  $G$  é um grupo de simetrias de Lie do sistema em questão.

Por outro lado, é de se esperar que a recíproca da Proposição 2.4.3 seja válida. Porém precisamos de algo ainda mais forte para que isso aconteça.

**Definição 2.5.3.** Um sistema de equações

$$\mathcal{S}_F = \{(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}); F(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0\} \subset J^k(\pi)$$

de ordem  $k$  é dito ser localmente solúvel num ponto  $(x^0, u^0, u_{(1)}^0, \dots, u_{(k)}^0) \in \mathcal{S}$  se existe uma solução clássica (vide Definição 2.2.8)  $u = f(x)$  definida numa vizinhança de  $x^0$  tal que  $u^0 = f(x^0), u_{(1)}^0 = f_{(1)}(x^0), \dots, u_{(k)}^0 = f_{(k)}(x^0)$ . O sistema é dito ser localmente solúvel se é localmente solúvel em todo ponto de  $\mathcal{S}$ .

A definição acima é importante porque conecta as duas definições existentes para simetrias de Lie. A primeira foi a que definimos na Definição 2.5.1 e que segue [87, 62]. A segunda, utilizada em [9, 10, 62], é a da nossa Proposição 2.5.1, onde consideramos a invariância do sistema pelo grupo estendido. E, como vimos nessa mesma proposição, a segunda definição implica na primeira (mas não o contrário). Geralmente utilizamos os conceitos sem distinção alguma simplesmente porque a maior parte dos problemas considerados é localmente solúvel e, para tais sistemas, as duas definições são equivalentes, veja [62, 63] e referências ali presentes. Apesar de existirem sistemas que não são localmente solúveis, são os localmente solúveis os de nosso interesse nessa tese.

Suponha agora que o sistema de equações diferenciais

$$F(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0$$

tenha posto máximo. Então sempre conseguimos encontrar uma função  $f = (f^1, \dots, f^n)$  definida em algum aberto tal que reescrevemos o sistema como

$$\frac{\partial^k u^j}{\partial (x^m)^k} = f_j(x, u, u_{(1)}, \dots, \widetilde{u_{(k)}}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.40)$$

onde  $\widetilde{u_{(k)}}$  denota o conjunto de derivadas de  $u$  de ordem  $k$  com exceção de  $\frac{\partial^k u^j}{\partial (x^m)^k}$ . Se, além disso, cada  $f_j$  é uma função analítica em seus argumentos, então o Teorema de Cauchy-Kovalevskaya, diz que o sistema (2.40) é localmente solúvel, veja [87], *Theorem 2.73* (página 162). A recíproca que procurávamos e a chamada *condição de invariância* são então dadas como no próximo resultado.

**Proposição 2.5.2.** Seja  $F : U^{(k)} \subset J^k(\pi) \rightarrow \mathbb{R}^l$  uma função de posto máximo determinando um sistema de equações diferenciais  $F_i(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0$  de ordem  $k$  localmente solúvel,  $i = 1, \dots, n$ . O grupo local de transformações a 1-parâmetro  $G$  agindo no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  é uma simetria de Lie do sistema se, e somente se,

$$X^{(k)} F_i(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0, \quad \text{quando} \quad F_i(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0. \quad (2.41)$$

*Demonstração.* Fizemos a ida. Para a volta, veja [87], *Theorem 2.71* (página 161).  $\square$

Uma consequência do Teorema de Cauchy-Kovalevskaya é que todo sistema analítico é localmente solúvel ([87], *Corollary 1.74*, página 163) e, como muitos dos sistemas considerados na literatura são analíticos, tal consequência se torna importante na Proposição 2.5.2 e podemos simplesmente requerer que o sistema seja analítico. Além disso, se o sistema é analítico, podemos reescrever a condição (2.41) como

$$X^{(k)} F_i(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = \lambda_i^j F_j, \quad (2.42)$$

para funções  $\lambda_i^j$  dependendo de  $x, u$  e derivadas de  $u$ . Logo, nas soluções do sistema as duas condições são equivalentes.

Porém, como veremos no próximo capítulo, na prática não olhamos a analiticidade ou solubilidade local do sistema. Simplesmente consideramos um grupo  $G$  geral de gerador  $X$  e forçamos que a condição de invariância (2.41) aconteça. Como vimos, a ida da proposição somente requer que o sistema tenha posto máximo.

No próximo exemplo aplicaremos esta observação a exemplos concretos. Apesar de nesta tese não termos considerado sistemas ou equações que não são analíticos, também abordaremos a importância da solubilidade local na volta da Proposição 2.5.2.

**Exemplo 2.5.5.** No Exemplo 2.5.4 calculamos os geradores estendidos de dois grupos. Aqui utilizaremos tais extensões.

- (a) Dado um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , considere  $U^{(3)} \subset J^3(\pi)$  com coordenadas  $(x, t, u, u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)})$ . Seja  $F : U^{(3)} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de posto máximo tal que  $\partial F / \partial x = 0$ . Do Exemplo 2.5.4 (a) temos que a terceira extensão de

$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

é o próprio operador  $X$ . Logo, quando consideramos a equação  $F = 0$ , temos

$$X^{(3)}F(x, t, u, u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)}) = XF(x, t, u, u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)}) \equiv 0.$$

Portanto, a translação  $T_\varepsilon(x, t, u) = (x + \varepsilon, t, u)$  é uma simetria de Lie da equação  $F = 0$ . Em outras palavras, qualquer equação de posto máximo que não tenha dependência explícita de  $x$  admite o grupo de translações em  $x$  como simetria de Lie.

- (b) Um exemplo mais trabalhoso vem do grupo projetivo do Exemplo 2.5.4 (b) e de seu gerador estendido

$$X^{(2)} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y} + (y - xy') \frac{\partial}{\partial y'} - 3xy'' \frac{\partial}{\partial y''}.$$

Consideremos a equação diferencial ordinária  $y'' + \lambda y^{-3} = 0$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Observe que  $F = y'' + \lambda y^{-3}$  tem posto máximo. Logo, como

$$\begin{aligned} X^{(2)}F &= \left( x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y} + (y - xy') \frac{\partial}{\partial y'} - 3xy'' \frac{\partial}{\partial y''} \right) (y'' + \lambda y^{-3}) = \\ &= -3x(y'' + \lambda y^{-3}), \end{aligned}$$

temos que  $X^{(2)}F = 0$  quando  $F = 0$  e o grupo projetivo é uma simetria de Lie da equação  $y'' + \lambda y^{-3} = 0$ .

- (c) Em [87] (página 160), o autor discute o sistema

$$u_x = yu, \quad u_y = 0$$

e mostra que o sistema não é localmente solúvel pois não existe solução diferenciável  $u$  que satisfaça as condições

$$u(x_0, y_0) = 1, \quad u_x(x_0, y_0) = y_0, \quad u_y(x_0, y_0) = 0,$$

valores que algebricamente resolvem o sistema. Mais do que isso, ele diz que a única solução do sistema é  $u \equiv 0$ .

Se considerarmos a translação  $T_\varepsilon(x, y, u) = (x, y + \varepsilon, u)$  e a única solução  $u = 0$ , temos que a função transformada  $\bar{u} = T_\varepsilon(u)$  é identicamente nula, ou seja, é uma nova solução do sistema para todo  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . Desta forma, a translação é uma simetria de Lie do sistema. Porém, o gerador infinitesimal estendido, de acordo com a parte (a) deste exemplo, é dado por

$$X^{(1)} = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Daí, a condição de invariância se escreve como

$$X^{(1)}(u_x - yu) = -u, \quad X^{(1)}u_y = 0,$$

ou seja,  $X^{(1)}(u_x - yu) \neq 0$  quando  $F = 0$ . Logo, mostramos que precisamos da solubilidade local quando sabemos que  $G$  é uma simetria de Lie de um determinado sistema e queremos que a condição de invariância (2.41) ainda valha.

Para terminarmos a seção, somente precisamos entender como podemos calcular o gerador estendido sem explicitamente exibir o grupo estendido.

Seja  $F : U^{(k)} \subset J^k(\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. A derivada total de  $F$  com respeito à  $x^i$  é a função  $D_i F \in U^{(k+1)}$  dada por

$$D_i F = \frac{\partial F}{\partial x^i} + \sum_{|\alpha|=0}^k u_{\alpha,i}^j \frac{\partial F}{\partial u_\alpha^j}, \quad (2.43)$$

onde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  é um multi-índice e

$$u_{\alpha,i}^j = \frac{\partial u_\alpha^j}{\partial x^i} = \frac{\partial^{k+1} u^j}{\partial x^i \partial x^\alpha} = \frac{\partial^{k+1} u^j}{\partial x^i (\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^m)^{\alpha_m}}.$$

A convenção acima utiliza a notação de multi-índice do gerador estendido (2.39). Ela não é de fato a notação mais auto-explicativa possível, mas é bastante compacta.

Para clarificar como calculamos a derivada total (2.43), considere um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  e coordenadas  $(x, t, u, u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)})$  em  $U^{(3)} \subset J^3(\pi)$ . Seja  $F : U^{(3)} \rightarrow \mathbb{R}$  uma

função diferenciável. A derivada total de  $F$  com respeito a  $x$  é a função  $D_x F \in U^{(4)}$  dada por

$$\begin{aligned} D_x F &= \frac{\partial F}{\partial x} + \sum_{|\alpha|=0}^3 u_{\alpha,x} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} + u_x \frac{\partial F}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{tx} \frac{\partial F}{\partial u_t} + u_{xxx} \frac{\partial F}{\partial u_{xxx}} + u_{txx} \frac{\partial F}{\partial u_{tx}} + u_{ttx} \frac{\partial F}{\partial u_{tt}} + \\ &\quad + u_{xxxx} \frac{\partial F}{\partial u_{xxxx}} + u_{txxx} \frac{\partial F}{\partial u_{txxx}} + u_{tttx} \frac{\partial F}{\partial u_{tttx}} + u_{tttx} \frac{\partial F}{\partial u_{tttx}}. \end{aligned}$$

O mesmo raciocínio nos dá a derivada total de  $F$  com respeito a  $t$ . De maneira um pouco mais geral, se  $x = (x^1, \dots, x^m)$  e  $u = u(x)$  é uma função real, então dada uma função  $F$  definida em um aberto  $U^{(k)} \subset J^k(\pi)$ , então

$$D_i F = \frac{\partial F}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial F}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial F}{\partial u_j} + \dots + u_{ij_1 j_2 \dots j_k} \frac{\partial F}{\partial u_{j_1 j_2 \dots j_k}}. \quad (2.44)$$

Podemos definir derivadas totais de ordens maiores de maneira análoga. Se  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  é um multi-índice qualquer, onde  $0 \leq \alpha_i \leq m$ , então a  $\alpha$ -ésima derivada total de uma função  $F$  é denotada por

$$D_\alpha F = D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_l} F.$$

Por exemplo, se  $\alpha = (i, i, i)$ , então a  $\alpha$ -ésima derivada total de  $F$  é

$$D_i^3 F := D_i D_i D_i F.$$

Finalmente, a última proposição desta seção.

**Proposição 2.5.3.** Seja

$$X = \zeta^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u^j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

um campo vetorial definido num aberto  $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . A  $k$ -ésima prolongação de  $X$  é o campo vetorial (2.39) definido no correspondente espaço  $U^{(k)} \subset J^k(\pi)$ . As funções  $\Phi_\alpha^j$  são dadas pela seguinte fórmula:

$$\Phi_\alpha^j = D_\alpha \left( \eta^j - \zeta^i u_i^j \right) + \zeta^i u_{\alpha, i'}^j, \quad (2.45)$$

onde  $u_i^j = \partial u^j / \partial x^i$  e  $\partial u_\alpha^j = \partial u_\alpha^j / \partial x^i$ .

*Demonstração.* A demonstração é bastante extensa e pode ser encontrada em [87], *Theorem 2.36* (página 111). Uma outra versão da proposição pode ser encontrada em [9], *Theorem 2.4.4-1* (página 66).  $\square$

Desta forma, sabendo como calcular os coeficientes do gerador estendido e, mais do que isso, sabendo que esses coeficientes dependem de  $x$ ,  $u$  e derivadas de  $u$ , podemos dizer que a condição de invariância (2.41) se reduz a um sistema sobredeterminado de equações que obtemos quando igualamos os coeficientes de cada monômio dado por derivadas de  $u$ . Tal sistema é chamado de *equações determinantes* e sua solução dará a forma do gerador  $X$ .

**Exemplo 2.5.6.** (a) Repetiremos o grupo de translações  $T_\varepsilon(x, t, u) = (x + \varepsilon, t, u)$  de gerador infinitesimal

$$X = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Então  $\xi_1 = 1, \xi^2 = 0, \eta = 0$ . Os coeficientes, até terceira ordem, serão  $\Phi_x, \Phi_t, \Phi_{xx}, \Phi_{tx}, \Phi_{tt}, \Phi_{xxx}, \Phi_{txx}, \Phi_{ttx}, \Phi_{ttt}$ . De acordo com (2.45), teremos

$$\Phi_x = D_x(\eta - \xi^1 u_x - \xi^2 u_t) + \xi^1 u_{xx} + \xi^2 u_{tx} = D_x(-u_x) + u_{xx} = 0,$$

$$\Phi_t = D_x(\eta - \xi^1 u_x - \xi^2 u_t) + \xi^1 u_{tx} + \xi^2 u_{tt} = D_t(-u_x) + u_{tx} = 0,$$

$$\Phi_{xx} = D_x^2(-u_x) + u_{xxx} = 0,$$

$$\Phi_{tt} = D_t^2(-u_x) + u_{ttt} = 0,$$

$$\Phi_{tx} = D_t D_x(-u_x) + u_{txx} = 0,$$

$$\Phi_{xxx} = D_x^3(-u_x) + u_{xxxx} = 0,$$

$$\Phi_{txx} = D_t D_x^2(-u_x) + u_{txxx} = 0,$$

$$\Phi_{ttx} = D_t^2 D_x(-u_x) + u_{ttxx} = 0,$$

$$\Phi_{ttt} = D_t^3(-u_x) + u_{tttx} = 0.$$

Ou seja, a terceira extensão do operador  $X$  é ele próprio, como já havíamos encontrado no Exemplo 2.5.5 (a).

(b) Considere o grupo projetivo do Exemplo 2.5.4 de gerador infinitesimal

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}.$$

Temos  $\xi = x^2$  e  $\eta = xy$ . Se queremos obter  $X^{(2)}$ , então precisamos encontrar os coeficientes  $\Phi_x$  e  $\Phi_{xx}$ . Teremos

$$\Phi_x = D_x(\eta - \xi y') + \xi y'' = D_x(xy - x^2 y') + x^2 y'' = y - xy',$$

$$\Phi_{xx} = D_x^2(xy - x^2 y') + x^2 y''' = -3xy''.$$

Portanto, a segunda extensão do operador  $X$  é dada por

$$X^{(2)} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y} + (y - xy') \frac{\partial}{\partial y'} - 3xy'' \frac{\partial}{\partial y''},$$

também de acordo com o Exemplo 2.5.4 (b).

## 2.6 SOLUÇÕES INVARIANTES

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  um aberto,  $G$  um grupo local de transformações a 1-parâmetro agindo em  $U$  e  $F(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0$  um sistema de equações diferenciais de ordem  $k$  definido em  $U^{(k)}$ .

**Definição 2.6.1.** Uma solução clássica  $u = f(x)$  de  $F(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0$  é dita ser uma solução  $G$ -invariante se seu gráfico  $\text{Gr}f = \{(x, f(x)); x \in U\}$  é um conjunto  $G$ -invariante.

Suponha que  $G$  seja tal que todo elemento  $T_\varepsilon \in G$  aja projetavelmente em  $U$ , ou seja, a transformação das variáveis independentes  $x$  não dependa das variáveis dependentes  $u$  :

$$T_\varepsilon(x, u) = (\bar{x}, \bar{u}) = (\Phi(x), \Psi(x, u)).$$

Nessas condições, o conjunto das  $\tilde{T}_\varepsilon(x, u) := \pi_U \circ T_\varepsilon(x, u) = \Phi(x)$ , que denotaremos por  $\tilde{G}$ , é um grupo de transformações (projetado). Pela Proposição 2.4.5,  $\tilde{G}$  tem exatamente  $m - 1$  invariantes funcionalmente independentes  $y^1 = \phi^1(x), \dots, y^{m-1} = \phi^{m-1}(x)$ . Observe que cada um desses invariantes do grupo projetado  $\tilde{G}$  é um invariante do grupo total  $G$ , pois se  $X = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j}$  denota o gerador infinitesimal de  $G$ , então o gerador de  $\tilde{G}$  é dado por  $\tilde{X} = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Daí,

$$X\phi^k = \zeta^i \frac{\partial \phi^k}{\partial x^i} + \eta^j \frac{\partial \phi^k}{\partial u^j} = \tilde{X}\phi^k + 0 \equiv 0, \quad k = 1, \dots, m - 1.$$

Novamente pela Proposição 2.4.5, construímos outros  $n$  invariantes de  $G$  da forma  $v^1 = \psi^1(x, u), \dots, v^n = \psi^n(x, u)$  de forma a termos exatamente  $m + n - 1$  invariantes de  $G$ . Escrevamos

$$y = \phi(x) := (\phi^1(x), \dots, \phi^{m-1}(x)), \quad v = \psi(x, u) := (\psi^1(x, u), \dots, \psi^n(x, u)).$$

Consideremos inicialmente  $y = \phi(x)$ . Pelo Teorema da Aplicação Implícita, conseguimos resolver  $y = \phi(x)$  para  $m - 1$  variáveis  $\tilde{x} = (x^{i_1}, \dots, x^{i_{m-1}})$ . A escolha de tais variáveis se dá de tal forma que a matriz  $\frac{\partial \eta^j}{\partial \tilde{x}^i}$  seja inversível. Logo, se  $\hat{x} = x^{i_m}$ , temos a solução

$$\tilde{x} = \gamma(\hat{x}, y)$$

para alguma função bem definida  $\gamma$ . A variável  $\hat{x}$  é chamada de *variável principal* e as coordenadas de  $\tilde{x}$  são as *variáveis paramétricas*.

Suponha agora que a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^i}{\partial u^{k'}} & \frac{\partial \psi^j}{\partial u^k} \end{pmatrix}$$

tenha posto igual a  $n$ . Novamente pelo Teorema da Aplicação Implícita, podemos resolver  $v = \psi(x, u)$  para  $u$  em termos de  $x$  e  $v$ . Logo,

$$u = \tilde{\delta}(x, v) = \tilde{\delta}(\hat{x}, \tilde{x}, v) = \tilde{\delta}(\hat{x}, \gamma(\hat{x}, y, v) = \delta(\hat{x}, y, v).$$

**Exemplo 2.6.1.** Considere  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  e o grupo de dilatações

$$T_\varepsilon(x, t, u, v) = (x, e^{-b\varepsilon}t, e^\varepsilon u, e^\varepsilon v), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

cujo gerador infinitesimal é dado por

$$X = -bt \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}.$$

Observe que  $\bar{x} = x$  e  $\bar{t} = e^{-b\varepsilon}t$  não dependem de  $u$  e  $v$ , ou seja, o grupo age projetavelmente em  $\mathbb{R}^2$ . Como o grupo possui duas variáveis independentes, teremos  $2 - 1 = 1$  invariante que é solução da equação característica

$$\frac{dx}{0} = -\frac{dt}{bt}.$$

Como teremos  $J_1 = x$ , coloque  $\phi(x, t) = x$  e  $y = \phi(x, t)$ . Neste caso não temos opção a não ser colocar  $x$  como nossa variável paramétrica e deixar  $t$  como variável principal.

O grupo de dilatações possui exatamente  $4 - 1 = 3$  invariantes, sendo que já temos o primeiro. Os outros dois, obtidos via equações características, são  $J_2 = ut^{1/b}$  e  $J_3 = vt^{1/b}$ . Sejam  $\psi^1(x, t, u, v) = ut^{1/b}$  e  $\psi^2(x, t, u, v) = vt^{1/b}$ ,  $(\hat{\psi}^1, \hat{\psi}^2) = (\psi^1, \psi^2)$ . Temos

$$\hat{\psi}^1 = ut^{1/b}, \quad \hat{\psi}^2 = vt^{1/b},$$

ou seja,

$$u = \hat{\psi}^1 t^{-1/b}, \quad v = \hat{\psi}^2 t^{-1/b}.$$

Com isso encontramos as funções  $\gamma$  e  $\delta$  que de maneira teórica construímos anteriormente.

Se  $v = h(y)$  é qualquer função diferenciável, então

$$u = f(x) = \delta(\hat{x}, y, v) = \delta(\hat{x}, \phi(x), h(\phi(x))) \quad (2.46)$$

é claramente uma função  $G$ -invariante.

O que queremos realmente saber é quando uma função  $u = f(x)$  correspondente a uma função  $v = h(y)$  que pode ser escrita como (2.46) é uma solução do sistema de equações diferenciais de ordem  $k$

$$\Delta(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0.$$

Para isso, precisamos saber como as derivadas de funções  $v = h(y)$  se relacionam com as derivadas de  $u = f(x)$ . Em relação a  $x$ , a matriz Jacobiana de (2.46) é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \delta}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \delta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Usando o fato de que  $\tilde{x} = \gamma(\hat{x}, y)$ , podemos reescrever  $\partial u / \partial x$  como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \delta_1(\hat{x}, y, v, \partial v / \partial y),$$

ou seja, podemos expressar as primeiras derivadas de qualquer função  $G$ -invariante em termos de  $\hat{x}, y, v$  e primeiras derivadas de  $v$  com respeito a  $y$ . Prosseguindo de maneira análoga até uma certa ordem  $l$ , encontramos

$$\frac{\partial^l u}{\partial x^l} = \delta_l(\hat{x}, y, v, v_{(1)}, \dots, v_{(l)}).$$

**Exemplo 2.6.2.** No Exemplo 2.6.1, consideramos  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , o grupo de dilatações  $(x, t, u, v) \mapsto (x, e^{-bt}t, e^{\epsilon}u, e^{\epsilon}v)$  e construímos os invariantes  $J_1 = x, J_2 = ut^{1/b}, J_3 = vt^{1/b}$ . Colocamos  $y = x, \hat{v}^1 = ut^{1/b}, \hat{v}^2 = vt^{1/b}$  e com isso podemos escrever

$$u = \hat{v}^1 t^{-1/b}, \quad v = \hat{v}^2 t^{-1/b}.$$

Suponha que  $\bar{v}^1 = \bar{v}^1(y) = \bar{v}^1(x)$  e  $\bar{v}^2 = \bar{v}^2(x)$ . Então podemos calcular algumas derivadas de  $u$  e  $v$ :

$$u_x = \frac{\hat{v}_y^1}{t^{1/b}}, \quad u_{xx} = \frac{\hat{v}_{yy}^1}{t^{1/b}}, \quad u_{xxx} = \frac{\hat{v}_{yyy}^1}{t^{1/b}},$$

$$u_t = -\frac{1}{b} \frac{\hat{v}^1}{t^{(b+1)/b}}, \quad u_{txx} = -\frac{1}{b} \frac{\hat{v}_{yy}^1}{t^{(b+1)/b}},$$

$$v_x = \frac{\hat{v}_y^2}{t^{1/b}}, \quad v_{xx} = \frac{\hat{v}_{yy}^2}{t^{1/b}}, \quad v_{xxx} = \frac{\hat{v}_{yyy}^2}{t^{1/b}},$$

$$v_t = -\frac{1}{b} \frac{\hat{v}^2}{t^{(b+1)/b}}, \quad v_{txx} = -\frac{1}{b} \frac{\hat{v}_{yy}^2}{t^{(b+1)/b}}.$$

Uma vez que encontramos as derivadas que precisamos no sistema  $\Delta = 0$ , simplesmente substituímos no sistema e encontraremos um novo sistema

$$\tilde{\Delta}(\hat{x}, y, v, v_{(1)}, \dots, v_{(k)}) = 0$$

que ainda depende das variáveis paramétricas  $\hat{x}$ . Se  $G$  for realmente uma simetria de Lie do sistema, então o novo sistema  $\tilde{\Delta} = 0$  será sempre equivalente a um novo sistema

$$(\Delta/G)(y, v, v_{(1)}, \dots, v_{(k)}) = 0$$

que já não mais depende das variáveis  $\hat{x}$ . O sistema  $(\Delta/G)$  é chamado de sistema reduzido e sua notação é dada em referência à teoria de variedades quociente que geometricamente descreve tal sistema, veja [87], *Section 3.4* (página 209).

Desta forma, toda solução  $v = h(y)$  de  $(\Delta/G) = 0$  será, via (2.46), uma solução de  $\Delta = 0$  e, conseqüentemente, podemos construir soluções  $G$ -invariantes do sistema original.

Para finalizar este capítulo, consideremos alguns exemplos.

**Exemplo 2.6.3.** (a) Considere o sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{aligned} u_t - u_{txx} - v^b u_x + v^b u_{xxx} &= 0, \\ v_t - v_{txx} - u^b v_x + u^b v_{xxx} &= 0. \end{aligned}$$

É possível mostrar que o grupo de dilatações dos Exemplos 2.6.1 e 2.6.2 de gerador infinitesimal

$$X_3 = -bt \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}$$

é uma simetria de Lie do sistema. No Exemplo 2.6.1 calculamos  $u$  e  $v$  em função de  $t, \hat{v}^1, \hat{v}^2$  e colocamos  $y = x$ . No Exemplo 2.6.2 encontramos as derivadas que precisamos para o sistema. Quando substituímos no sistema, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{bt^{(b+1)/b}} \left( -\hat{v}^1 + \hat{v}_{yy}^1 - b(\hat{v}^2)^b \hat{v}_y^1 + b(\hat{v}^2)^b \hat{v}_{yyy}^1 \right) &= 0, \\ \frac{1}{bt^{(b+1)/b}} \left( -\hat{v}^2 + \hat{v}_{yy}^2 - b(\hat{v}^1)^b \hat{v}_y^2 + b(\hat{v}^1)^b \hat{v}_{yyy}^2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Com isso, encontramos o sistema reduzido

$$\begin{aligned} -\hat{v}^1 + \hat{v}_{yy}^1 - b(\hat{v}^2)^b \hat{v}_y^1 + b(\hat{v}^2)^b \hat{v}_{yyy}^1 &= 0, \\ -\hat{v}^2 + \hat{v}_{yy}^2 - b(\hat{v}^1)^b \hat{v}_y^2 + b(\hat{v}^1)^b \hat{v}_{yyy}^2 &= 0, \end{aligned}$$

Se encontrarmos uma solução para o sistema reduzido, então encontramos uma solução para o sistema original. Considere  $\hat{v}^1 = \hat{v}^2 = e^y$ . Como

$$\hat{v}^1 = \hat{v}^2 = \hat{v}_y^1 = \hat{v}_y^2 = \hat{v}_{yy}^1 = \hat{v}_{yy}^2 = \hat{v}_{yyy}^1 = \hat{v}_{yyy}^2,$$

então  $(\hat{v}^1, \hat{v}^2)$  é solução do sistema reduzido. Logo,

$$u = \frac{\hat{v}^1(y)}{t^{1/b}} = \frac{e^y}{t^{1/b}} = \frac{e^x}{t^{1/b}}, \quad v = \frac{\hat{v}^2(y)}{t^{1/b}} = \frac{e^y}{t^{1/b}} = \frac{e^x}{t^{1/b}}$$

é uma solução invariante do sistema. Analogamente se pode mostrar que  $\hat{v}^1 = \hat{v}^2 = e^{-y}$  também é solução do sistema reduzido e, portanto, temos duas soluções invariantes  $(u_{\pm}, v_{\pm})$ , onde

$$u_{\pm} = \frac{e^{\pm x}}{t^{1/b}}, \quad v_{\pm} = \frac{e^{\pm x}}{t^{1/b}}.$$

(b) Considere agora a equação diferencial ordinária de ordem  $2n$

$$y^{(2n)}(x) + \lambda y^{\frac{1+2n}{1-2n}}(x) = 0, \quad \lambda \neq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

que admite a translação em  $x$  como simetria de Lie. O gerador da translação é dado por

$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

e a solução das equações características é  $y = k$ , onde  $k$  é uma constante de integração. Logo, o gerador  $X$  nos dará uma solução, se ela existir, constante. Porém, note que a constante  $\frac{1+2n}{1-2n}$  é sempre menor que zero. Isto quer dizer que quando substituirmos o invariante  $y = k$  na equação, obtemos

$$\lambda \frac{1}{k^{-\frac{1+2n}{1-2n}}} = 0,$$

que nunca se anula pois estamos assumindo  $\lambda \neq 0$ . Logo,  $y = k$  não pode ser uma solução invariante da equação.

Com isso, mostramos que nem todo grupo de transformação admitido por uma equação diferencial dará de fato uma solução. Neste caso em particular, a razão de não existir tal solução ficará clara no capítulo seguinte, quando classificaremos as simetrias da equação e encontraremos uma solução invariante a 3-parâmetros.



# 3

## TEOREMAS DE CLASSIFICAÇÃO DE SIMETRIAS DE LIE

Neste capítulo aplicaremos as técnicas do Capítulo 2 para encontrarmos as simetrias de Lie de equações que consideramos nos últimos quatro anos. Alguns desses resultados já se encontram publicados [7, 25, 26, 28, 29, 31], enquanto outros estão em fase final de redação dos respectivos resultados para submissão.

Para iniciar o capítulo, comecemos com o algoritmo discutido no capítulo anterior. Considere o fibrado  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dado um sistema de equações  $F = 0$  de ordem  $k$ , onde  $F$  está definida num aberto de  $J^k(\pi)$ , queremos encontrar o grupo local de transformações a 1-parâmetro  $G$  agindo em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  mais geral, de gerador infinitesimal

$$X = \zeta^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u^j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

tal que

$$X^{(k)}F = 0 \quad \text{quando} \quad F = 0, \quad (3.2)$$

o que significa que estamos usando a ida da Proposição 2.5.2. Em (3.2),  $X^{(k)}$  é a  $k$ -ésima prolongação de  $X$  dada como em (2.39):

$$X^{(k)} = X + \sum_{|\alpha|=1}^k \Phi_\alpha^j \frac{\partial}{\partial u_\alpha^j}. \quad (3.3)$$

Os coeficientes  $\Phi_\alpha^j$  são calculados por (2.45) como exibidos na Proposição 2.5.3:

$$\Phi_\alpha^j = D_\alpha \left( \eta^j - \zeta^i u_i^j \right) + \zeta^i u_{\alpha,i}^j. \quad (3.4)$$

A condição de invariância (2.42) é dada por

$$X^{(k)}F = \lambda F, \quad (3.5)$$

onde  $\lambda$  é uma função que pode depender de  $x, u$  e derivadas de  $u$ . Da condição de invariância obtemos uma equação polinomial que é transformada num sistema sobredeterminado de equações, chamado de equações determinantes.

Na próxima seção, a única que faremos com detalhes de como aplicamos o algoritmo apresentado no começo deste capítulo, apresentaremos o teorema de classificação de simetrias de Lie da equação diferencial ordinária

$$y^{(2n)} + f(y) = 0, \quad (3.6)$$

onde  $n \in \mathbb{N}$  é um número natural e  $f(y)$  é uma função diferenciável. Tais resultados, dentre outros, foram publicados em [31].

Depois, consideraremos a equação diferencial parcial

$$u_t - u_{txx} + (b+1)u^2u_x - buu_xu_{xx} - u^2u_{xxx} = 0, \quad (3.7)$$

onde  $b$  é um parâmetro real. A equação (3.7) é chamada de equação de Novikov modificada (mNovikov) e quando  $b = 3$  reobtemos a equação de Novikov. A classificação pode ser encontrada em [29].

A terceira equação que consideraremos é dada por

$$u_t - u_{txx} + au^p u_x - bu^{p-1}u_x u_{xx} - cu^p u_{xxx} = 0, \quad (3.8)$$

onde  $a, b$  e  $c$  são constantes reais. Tomando as constantes  $a = 3, b = 2, c = 1$  e  $p = 1$ , temos a equação de Camassa-Holm (CH) e se  $a = 4, b = 3, c = 1$  e  $p = 2$  reobtemos a equação de Novikov. Os resultados de classificação de simetrias de Lie da equação (3.8) podem ser encontrados em [7].

Depois consideraremos o sistema

$$\begin{aligned} m_t &= v^b m_x \\ n_t &= u^b n_x, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde  $b$  é um parâmetro real,  $m = u - u_{xx}$  e  $n = v - v_{xx}$ . O estudo do sistema (3.9) encontra-se em andamento.

Por fim, consideraremos a equação em 1 + 3 dimensões

$$u_t + \alpha uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

chamada de equação de Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov. Nossos resultados referentes à equação (3.10) podem ser encontrados em [26].

### 3.1 CLASSE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS AUTÔNOMAS DE ORDEM PAR

Considere a equação diferencial ordinária

$$y^{(2n)} + f(y) = 0. \quad (3.11)$$

Um gerador de simetria de tal EDO é um operador da forma

$$X = \zeta(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.12)$$

Existem alguns resultados de G. W. Bluman [9, 10] que muito facilitam a tarefa de encontrar simetrias de Lie de algumas equações. No caso da equação diferencial ordinária (3.11), o seguinte lema nos auxilia, veja [9], *Theorem 3.3.4-3* (página 134).

**Lema 3.1.1.** *Considere uma equação diferencial ordinária de ordem  $k$  da forma*

$$y^{(k)} = g(x, y)y^{(k-1)} + h(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-2)}).$$

*Se a equação admite um gerador da forma (3.12), então  $\zeta_y = 0$  e  $\eta_{yy} = 0$ .*

Se tomarmos  $k = 2n$ ,  $g = 0$  e  $h = f(y)$ , então (3.11) satisfaz o Lema 3.1.1 e o gerador (3.12) é reescrito como

$$X = \zeta(x) \frac{\partial}{\partial x} + [\alpha(x)y + \beta(x)] \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.13)$$

Precisamos então calcular a  $2n$ -ésima extensão de  $X$ :

$$X^{(2n)} = \zeta(x) \frac{\partial}{\partial x} + [\alpha(x)y + \beta(x)] \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=1}^{2n} \Phi_i \frac{\partial}{\partial y^{(i)}}, \quad (3.14)$$

onde os coeficientes  $\Phi_i$  são dados por

$$\Phi_i = D_x^i(\alpha(x)y + \beta(x) - \zeta(x)y') + \zeta(x)y^{i+1}.$$

O primeiros coeficientes  $\Phi_1, \Phi_2$  são dados por

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= D_x(\alpha(x)y + \beta(x) - \zeta(x)y') + \zeta(x)y'' = \\ &= \alpha'y + \beta' + \alpha y' - \zeta'y' - \zeta y'' + \zeta y'' = \\ &= \beta' + \alpha'y + (\alpha - \zeta')y', \\ \Phi_2 &= D_x^2(\alpha(x)y + \beta(x) - \zeta(x)y') + \zeta(x)y''' = \\ &= \beta'' + \alpha''y + (2\alpha' - \zeta'')y' + (\alpha + 2\zeta')y'' \end{aligned}$$

e indutivamente podemos provar que

$$\Phi_k = \beta^{(k)} + \alpha^{(k)}y + \sum_{j=1}^k \left[ \binom{k}{j} \alpha^{(k-j)} - \binom{k}{j-1} \xi^{(k-j+1)} \right] y^{(j)}. \quad (3.15)$$

Quando consideramos a condição de invariância (3.5), queremos resolver a equação polinomial

$$X^{(2n)}(y^{(2n)} + f(y)) = \Phi_{2n} + \alpha y + \beta = \lambda(y^{(2n)} + f(y))$$

para as funções  $\lambda, \xi, \alpha$  e  $\beta$ .

Substituindo  $\Phi_{2n}$  na condição de invariância teremos as seguintes equações determinantes:

$$\lambda = \alpha - 2n\xi',$$

$$\binom{2n}{k} \alpha^{(2n-k)} - \binom{2n}{k-1} \xi^{(2n-k+1)} = 0, \quad 1 \leq k < 2n, \quad (3.16)$$

$$(\alpha y + \beta)f'(y) + \beta^{(2n)} + \alpha^{(2n)}y = \lambda f(y).$$

O sistema (3.16) é equivalente a

$$\xi(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3,$$

$$\alpha(x) = \frac{2n-1}{2}(2a_1 x + a_2) + k_1,$$

$$0 = \left[ \frac{2n-1}{2}(2a_1 x + a_2) + k_1 \right] y f'(y) + \beta(x) f'(y) + \beta^{(2n)}(x) + \left[ \frac{2n+1}{2}(2a_1 x + a_2) - k_1 \right] f(y), \quad (3.17)$$

onde  $a_1, a_2, a_3$  e  $k_1$  são constantes de integração.

Para terminar de resolver o sistema (3.17), precisamos saber como  $f$  e sua derivada  $f'$  se comportam. Em [101], o autor mostrou que é suficiente considerarmos algumas funções particulares para que a classificação seja completa. Essas funções surgem das condições de compatibilidade da equação (3.17). São os casos:

1.  $f$  é uma função arbitrária tal que  $f$  e  $f'$  são linearmente independentes;
2.  $f(y) = \lambda e^{ay}$ , onde  $\lambda$  e  $a$  são constantes reais;
3.  $f(y) = \lambda y^p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .

Considerando as “três” opções de funções, temos o seguinte teorema de classificação.

**Teorema 3.1.2.** Para quaisquer escolhas  $f = f(y)$  e  $n \geq 1$ , o campo vetorial

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.18)$$

é um gerador de simetria da equação (3.11). Para escolhas especiais da função  $f(y)$ , é possível aumentar o grupo de simetrias de Lie. Além de (3.18), os geradores adicionais são:

1. Se  $f(y) = \lambda e^{ay}$ ,  $\lambda a \neq 0$  e  $n \geq 1$ , temos:

$$D_1 = x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2n}{a} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.19)$$

2. Suponha  $f(y) = \lambda y^p$ ,  $p \neq 0, 1$ ,  $\lambda \neq 0$  e  $n \geq 1$ . Então temos os geradores

$$D_p = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2n}{1-p} y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.20)$$

3. Suponha  $f(y) = \lambda y^{\frac{1+2n}{1-2n}}$ ,  $\lambda \neq 0$  e  $n \geq 1$ . Então temos os operadores

$$X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2n-1}{2} y \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.21)$$

e

$$X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (2n-1)xy \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.22)$$

4. Suponha  $f(y) = \lambda$ :

a) Se  $n > 1$ , temos

$$Y_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2n-1}{2} \left[ y - \lambda \frac{2n+1}{2n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right] \frac{\partial}{\partial y}, \quad (3.23)$$

$$Y_2 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + x \left[ (2n-1)y - \lambda \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right] \frac{\partial}{\partial y}, \quad (3.24)$$

$$Y_3 = \left( y - \lambda \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.25)$$

e

$$Z_j = \frac{x^j}{j!} \frac{\partial}{\partial y}, \quad 0 \leq j \leq 2n-1. \quad (3.26)$$

b) Se  $n = 1$ , além de (3.23)-(3.26) com  $j = 0, 1$ , temos

$$Y_4 = \left( xy - \frac{\lambda}{2}x^3 \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( y^2 - \frac{\lambda}{4}x^4 \right) \frac{\partial}{\partial y},$$

$$Y_5 = \left( y - \frac{3}{2}\lambda x^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} - \lambda x^3 \frac{\partial}{\partial y}.$$
(3.27)

5. Suponha  $f(y) = \lambda y$ :

a) Se  $n > 1$ , temos

$$V_1 = y \frac{\partial}{\partial y}$$
(3.28)

e

$$V_\beta = \beta(x) \frac{\partial}{\partial y},$$
(3.29)

onde  $\beta$  é uma solução da equação linear

$$\beta^{(2n)} + \lambda\beta = 0.$$

b) Se  $n = 1$ , temos (3.28)-(3.29) e

$$V_2 = \sin(2\sqrt{\lambda}x) \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\lambda}y \cos(2\sqrt{\lambda}x) \frac{\partial}{\partial y},$$

$$V_3 = \cos(2\sqrt{\lambda}x) \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\lambda}y \sin(2\sqrt{\lambda}x) \frac{\partial}{\partial y},$$

$$V_4 = y \sin(\sqrt{\lambda}x) \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\lambda}y^2 \cos(\sqrt{\lambda}x) \frac{\partial}{\partial y},$$

$$V_5 = y \cos(\sqrt{\lambda}x) \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\lambda}y^2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \frac{\partial}{\partial y}.$$
(3.30)

Este teorema pode ser encontrado em [31], *Theorem 2.1* (página 3). De longe, o Teorema 3.1.2 é o mais extenso que apresentaremos. Porém, ele ilustra muito bem o tipo de dificuldades que a equação e o método apresentam.

Temos vários tipos de simetrias no Teorema 3.1.2, como a translação em  $x$  (3.18), a dilatação (3.20) e o grupo projetivo (3.22) até geradores (3.27) que, via Primeiro

Teorema Fundamental de Lie, nos dão transformações bem mais complicadas que dependem de funções especiais.

No que se segue, encontraremos uma solução invariante para o caso 3 do teorema. Ou seja, encontraremos uma solução para a equação  $y^{(2n)} + \lambda y^{(1+2n)/(1-2n)} = 0$  de geradores  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  dados como em (3.18), (3.21) e (3.22), respectivamente.

Considere a combinação linear  $X = \alpha X_1 + 2\beta X_2 + \gamma X_3$ , ou seja,

$$X = (\alpha + 2\beta x + \gamma x^2) \frac{\partial}{\partial x} + (2n - 1)(\beta y + \gamma xy) \frac{\partial}{\partial y}.$$

O sistema de características é escrito como

$$\frac{dx}{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2} = \frac{dy}{(2n - 1)(\beta y + \gamma xy)},$$

cuja solução é dada por

$$\frac{y}{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)^{\frac{2n-1}{2}}} = A_n,$$

onde  $A_n$  é uma constante. Supondo

$$y = A_n (\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)^{\frac{2n-1}{2}},$$

e impondo que  $y$  seja solução da equação considerada, encontramos o valor de  $A_n$ :

$$A_n = \left[ (-1)^{n+1} \frac{\lambda}{(\beta^2 - \alpha\gamma)^n} \left( \frac{2^n n!}{(2n)!} \right)^2 \right]^{\frac{2n-1}{4n}}.$$

Portanto,

$$y(x) = \left[ (-1)^{n+1} \frac{\lambda}{(\beta^2 - \alpha\gamma)^n} \left( \frac{2^n n!}{(2n)!} \right)^2 \right]^{\frac{2n-1}{4n}} (\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)^{\frac{2n-1}{2}} \quad (3.31)$$

é uma solução a três parâmetros de

$$y^{(2n)} + \lambda y^{(1+2n)/(1-2n)} = 0$$

desde que  $\beta^2 - \alpha\gamma \neq 0$  e

$$(-1)^{n+1} \frac{\lambda}{(\beta^2 - \alpha\gamma)^n} > 0.$$

Na Figura 9, mostramos a diferença de comportamento da solução para os casos  $n = 1$  e  $n \neq 1$ .

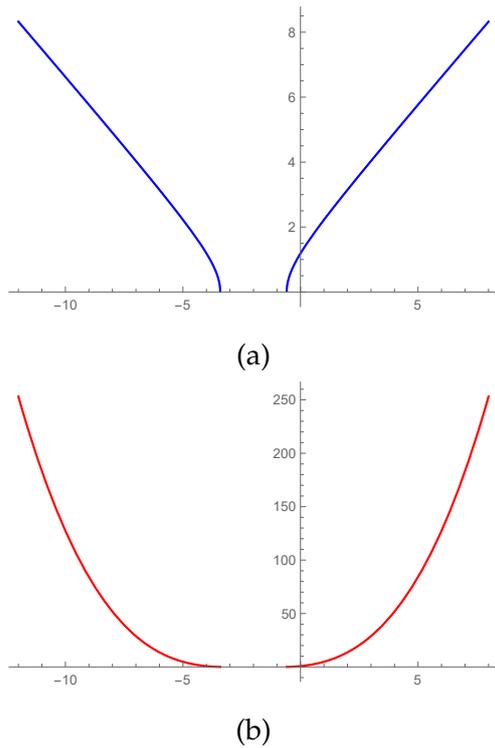


Figura 9: A figura (a) ilustra o comportamento da solução invariante para  $n = 1, \lambda = \gamma = 1$  e  $\alpha = \beta = 2$ . Já no caso (b) tomamos  $n = 2$  e as mesmas constantes  $\lambda, \gamma, \alpha$  e  $\beta$ . Se  $n > 1$ , então o formato da solução será o mesmo de (b).

Observe que obtivemos a solução (3.31) a partir de uma combinação linear mais geral possível de todos os geradores admitidos pela equação. Além disso, na solução (3.31) exigimos que  $\beta^2 - \alpha\gamma \neq 0$ . Isso quer dizer que não podemos tomar  $\beta = \gamma = 0$ , ou seja, não podemos tomar  $X = X_1$ . Essa observação explica o motivo de não termos conseguido encontrar uma solução invariante para a equação no Exemplo 2.6.3 (b) considerando apenas  $X_1$ .

## 3.2 EQUAÇÃO DE NOVIKOV MODIFICADA

Apresentaremos agora a classificação da mNovikov

$$u_t - u_{txx} + (b+1)u^2u_x - buu_xu_{xx} - u^2u_{xxx} = 0. \quad (3.32)$$

Para maiores detalhes, veja [29] (página 4).

**Teorema 3.2.1.** Para todos os valores de  $b$ , a equação (3.32) admite os seguintes geradores de simetria:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = 2t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (3.33)$$

Se  $b = 3$ , então em adição aos campos (3.33) temos

$$X_4 = e^{2x} \frac{\partial}{\partial x} + e^{2x} u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = e^{-2x} \frac{\partial}{\partial x} - e^{-2x} u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (3.34)$$

Os resultados do Teorema 3.2.1 para  $b = 3$  já eram conhecidos em [12]. O que nosso teorema mostrou é que, em termos de simetrias, tal caso é realmente o mais rico e interessante da família (3.7). Ainda em relação ao Teorema 3.2.1, temos a seguinte tabela de transformações e seus respectivos invariantes.

Tabela 1: Na tabela apresentamos as cinco transformações relacionadas aos geradores do Teorema 3.2.1, seus geradores e os respectivos invariantes. Para simplificarmos a notação, nos geradores utilizamos  $\partial_x, \partial_t, \partial_u$  como as derivadas com respeito a  $x, t$  e  $u$ , respectivamente.

<i>Transformação</i> $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u})$	<i>Gerador</i>	<i>Invariantes</i>
$(x + \varepsilon, t, u)$	$X_1 = \partial_x$	$J_1 = t$ $J_2 = u$
$(x, t + \varepsilon, u)$	$X_2 = \partial_t$	$J_1 = x$ $J_2 = u$
$(x, e^{2\varepsilon}t, e^\varepsilon u)$	$X_3 = 2t\partial_t - u\partial_u$	$J_1 = x$ $J_2 = ut^{1/2}$
$\left(-\frac{1}{2} \ln(e^{-2x} - 2\varepsilon), t, \frac{u}{\sqrt{1 - 2\varepsilon e^{2x}}}\right)$	$X_4 = e^{2x}\partial_x + e^{2x}u\partial_u$	$J_1 = t$ $J_2 = ue^{-x}$
$\left(-\frac{1}{2} \ln(e^{2x} - 2\varepsilon), t, \frac{u}{\sqrt{1 - 2\varepsilon e^{-2x}}}\right)$	$X_5 = e^{-2x}\partial_x - e^{-2x}u\partial_u$	$J_1 = t$ $J_2 = ue^x$

A seguir, calcularemos uma solução invariante da equação (3.32) com  $b \neq 3$ . Como vimos,  $X_1, X_2$  e  $X_3$  são os geradores de simetria para tal caso.

Consideremos  $X_3$  e lembremos que queremos escrever  $v = h(y)$ , onde  $y$  será os  $m - 1$  invariantes relativos às variáveis independentes e  $v$  será os  $n$  invariantes restantes para completarmos os  $m + n - 1$  invariantes funcionalmente independentes. Neste caso,

$y = J_1 = x$  e  $v = J_2 = ut^{1/2}$  e temos então  $ut^{1/2} = v = h(y)$ . Precisamos agora encontrar as respectivas derivadas presentes na equação

$$u_t - u_{txx} + (b+1)u^2u_x - buu_xu_{xx} - u^2u_{xxx} = 0$$

para podermos substituir na equação e obtermos a equação reduzida. Como

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{h_y}{\sqrt{t}}, & u_{xx} &= \frac{h_{yy}}{\sqrt{t}}, & u_{xxx} &= \frac{h_{yyy}}{\sqrt{t}}, \\ u_t &= -\frac{1}{2} \frac{h}{t^{3/2}}, & u_{txx} &= -\frac{1}{2} \frac{h_{yy}}{t^{3/2}}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação, temos

$$\frac{1}{t^{3/2}} \left( -\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h_{yy} + (b+1)h^2h_y - bh h_y h_{yy} - h^2 h_{yyy} \right) = 0,$$

ou seja, a equação reduzida é dada por

$$-h + h_{yy} + 2(b+1)h^2h_y - 2bh h_y h_{yy} - 2h^2 h_{yyy} = 0.$$

Duas soluções do sistema reduzido são dadas por  $h(y) = \alpha e^{\pm y}$ . Logo, duas soluções invariantes da equação serão

$$u_{\pm}(x, t) = \frac{\alpha e^{\pm x}}{\sqrt{t}}.$$

Pela definição de simetria de Lie, se temos uma solução, a simetria transformará a solução em uma nova solução. Como  $u_{\pm}$  é solução e as translações em  $x$  e  $t$  (duas primeiras linhas da Tabela 1) são simetrias de Lie da equação com  $b \neq 3$ , então

$$u_{\pm, \alpha, \beta, \gamma}(x, t) = \frac{\alpha e^{\pm x + \beta}}{\sqrt{t + \gamma}}$$

determina duas soluções invariantes a três parâmetros.

### 3.3 UMA CLASSE DE EQUAÇÕES QUE UNIFICA AS EQUAÇÕES DE CAMASSA-HOLM E NOVIKOV

Sobre a equação

$$u_t - u_{txx} + au^p u_x - bu^{p-1} u_x u_{xx} - cu^p u_{xxx} = 0, \quad (3.35)$$

temos o seguinte teorema de classificação, veja [7].

**Teorema 3.3.1.** A equação (3.35) admite os geradores de simetria

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t'}, \quad X_3 = u \frac{\partial}{\partial u} - pt \frac{\partial}{\partial t}$$

para quaisquer valores de  $p$  e constantes  $a, b$  e  $c$  não todas nulas. A equação (3.35) admite geradores adicionais nos seguintes casos:

(a) se  $p = 1$  e  $a = c$ , temos o *boost* de Galileu

$$X_4 = at \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}$$

(a) se  $p = 2$ ,  $a = 4c$  e  $b = 3c$ , então temos os operadores como em (3.34).

Como no caso da mNovikov, o Teorema 3.3.1 nos diz que, em termos de simetrias, os casos mais importantes da equação (3.35) são justamente quando reobtemos a equação de Camassa-Holm ( $b = 1$ ) e a equação de Novikov ( $b = 2$ ).

Analogamente à seção anterior, a tabela a seguir resume as transformações do Teorema 3.3.1 e seus respectivos invariantes.

Tabela 2: Na tabela apresentamos as seis transformações relacionadas aos geradores do Teorema 3.3.1, seus geradores e os respectivos invariantes.

Transformação $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u})$	Gerador	Invariantes
$(x + \varepsilon, t, u)$	$X_1 = \partial_x$	$J_1 = t$ $J_2 = u$
$(x, t + \varepsilon, u)$	$X_2 = \partial_t$	$J_1 = x$ $J_2 = u$
$(x, e^{-p\varepsilon t}, e^\varepsilon u)$	$X_3 = u \partial_u - pt \partial_t$	$J_1 = x$ $J_2 = ut^{1/p}$
$(x + \varepsilon at, t, u + \varepsilon)$	$X_4 = at \partial_x - \partial_u$	$J_1 = at^2/2$ $J_2 = u + x/(at)$
$\left(-\frac{1}{2} \ln(e^{-2x} - 2\varepsilon), t, \frac{u}{\sqrt{1 - 2\varepsilon e^{2x}}}\right)$	$X_5 = e^{2x} \partial_x + e^{2x} u \partial_u$	$J_1 = t$ $J_2 = ue^{-x}$
$\left(-\frac{1}{2} \ln(e^{2x} - 2\varepsilon), t, \frac{u}{\sqrt{1 - 2\varepsilon e^{-2x}}}\right)$	$X_6 = e^{-2x} \partial_x - e^{-2x} u \partial_u$	$J_1 = t$ $J_2 = ue^x$

Em termos de soluções invariantes, o caso geral será muito semelhante à mNovikov da seção anterior. Considerando os geradores  $X_3$ ,  $X_1$  e  $X_2$  como fizemos anteriormente, teremos uma solução invariante a três parâmetros da forma

$$u_{\pm, \alpha, \beta, \gamma}(x, t) = \frac{\alpha e^{\pm x + \beta}}{(t + \gamma)^{1/p'}}$$

desde que  $\alpha = \beta + \gamma$ .

### 3.4 UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

O sistema

$$\begin{aligned} m_t &= v^b m_x \\ n_t &= u^b n_x, \end{aligned}$$

é o único presente neste capítulo cujo trabalho ainda se encontra em andamento. Todavia, podemos apresentar a classificação das simetrias de Lie dele.

Antes, é conveniente reescrever o sistema em função de  $u$  e  $v$ :

$$\begin{aligned} u_t - u_{txx} - v^b u_x + v^b u_{xxx} &= 0, \\ v_t - v_{txx} - u^b v_x + u^b v_{xxx} &= 0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

**Teorema 3.4.1.** O sistema (3.36) admite

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = -bt \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \tag{3.37}$$

como geradores de simetria de Lie para todos os valores de  $b$ . Se  $b = 1$ , em adição aos operadores (3.37), o sistema admite o gerador

$$X_4 = -t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}.$$

Novamente o teorema sugere que o caso  $b = 1$  é o mais interessante. A tabela a seguir resume as transformações, geradores e os  $2 + 2 - 1$  invariantes de cada grupo.

Tabela 3: Na tabela apresentamos as seis transformações relacionadas aos geradores do Teorema 3.4.1, seus geradores e os respectivos invariantes.

<i>Transformação</i> $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, \bar{v})$	<i>Gerador</i>	<i>Invariantes</i>
$(x + \varepsilon, t, u, v)$	$X_1 = \partial_x$	$J_1 = t$ $J_2 = u$ $J_3 = v$
$(x, t + \varepsilon, u, v)$	$X_2 = \partial_t$	$J_1 = x$ $J_2 = u$ $J_3 = v$
$(x, e^{-b\varepsilon}t, e^\varepsilon u, e^\varepsilon v)$	$X_3 = -bt\partial_t + u\partial_u + v\partial_v$	$J_1 = x$ $J_2 = ut^{1/b}$ $J_3 = vt^{1/b}$
$(x - \varepsilon t, t, u + \varepsilon, v + \varepsilon)$	$X_4 = -t\partial_x + \partial_u + \partial_v$	$J_1 = t^2/2$ $J_2 = u + x/(at)$ $J_3 = u - v$

Consideremos  $X_3$  e seus invariantes. Devemos ter  $\bar{v} = h(y)$ , onde  $\bar{v} = (J_2, J_3)$  e  $y = J_1$ . Logo, temos

$$(u, v) = \left( \frac{\phi(x)}{t^{1/b}}, \frac{\psi(x)}{t^{1/b}} \right).$$

Substituindo no sistema, temos o sistema reduzido

$$\begin{aligned} -\phi - \phi'' - b\psi^b\phi' + b\psi^b\phi''' &= 0, \\ -\psi - \psi'' - b\phi^b\psi' + b\phi^b\psi''' &= 0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Ainda não analisamos soluções mais gerais do sistema (3.38), porém é fácil observar que se  $\phi = \psi = e^{\pm x}$ , então  $u = v = e^{\pm x}/t^{1/b}$  é uma solução do sistema.

### 3.5 EQUAÇÃO DE KORTEWEG-DE VRIES-ZAKHAROV-KUZNETSOV

Nesta seção apresentamos a classificação de simetrias da equação da Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov

$$u_t + \alpha uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{3.39}$$

**Teorema 3.5.1.** A equação (3.39) admite os geradores de simetria

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad (3.40)$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial z'}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial t'}, \quad (3.41)$$

$$X_5 = -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.42)$$

$$X_6 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + 3t \frac{\partial}{\partial t} - 2u \frac{\partial}{\partial u} \quad (3.43)$$

$$X_7 = \alpha t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}. \quad (3.44)$$

Considere agora as variáveis independentes  $(x, w)$ , onde  $x \in \mathbb{R}$  e  $w = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , e a variável dependente  $u = u(x, w)$ . Numa generalização da equação (3.39), estendemos o Teorema 3.5.1 para a equação

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} + (\text{Div}_w \cdot \nabla_w u)_x = 0, \quad (3.45)$$

onde  $\nabla_w u$  denota o gradiente de  $u$  com respeito às variáveis  $w$  e  $\text{Div}_w$  o operador de divergência também com respeito a  $w$ . De forma mais explícita,

$$\nabla_w u = \left( \frac{\partial u}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y^n} \right)$$

e

$$\text{Div}_w \cdot \nabla_w u = \frac{\partial^2 u}{\partial (y^1)^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial (y^n)^2}.$$

**Teorema 3.5.2.** A equação (3.45) admite os geradores de simetria

$$X = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t'}, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial y^i},$$

$$X_{ij} = -y^j \frac{\partial}{\partial y^i} + y^i \frac{\partial}{\partial y^j},$$

$$D = x \frac{\partial}{\partial x} + y^i \frac{\partial}{\partial y^i} + 3t \frac{\partial}{\partial t} - 2u \frac{\partial}{\partial u},$$

$$G = \alpha t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u},$$

onde  $i, j = 1, \dots, n$ .

## 3.6 COMENTÁRIOS SOBRE ESTE CAPÍTULO

Nesta seção faremos alguns comentários sobre os resultados que apresentamos neste capítulo.

1. Com exceção da EDO considerada na Seção 3.1, todas as simetrias das outras equações podem ser encontradas utilizando extensões para programas como o *Mathematica* ou o *Maple*. No caso da presente tese, utilizamos o pacote SYM (veja [36]) para cálculo de algumas simetrias.
2. O problema de encontrar simetrias da EDO considerada neste capítulo utilizando programas de computador é a arbitrariedade de sua ordem. Por mais que fixemos  $2n$  como ordem,  $n$  pode ser qualquer número natural, forçosamente nos fazendo calcular as simetrias de maneira manual.
3. Os resultados de classificação da Seção 3.1, em particular, generalizam parcialmente resultados que havíamos obtido anteriormente em [23, 48], no qual consideramos, entre outros casos, a equação

$$y'''' + y^p = 0.$$



# 4

## SIMETRIAS E LEIS DE CONSERVAÇÃO

Para um sistema de equações diferenciais, a existência de leis de conservação pode servir como ferramenta para o estudo de soluções do sistema e suas propriedades. Leis de conservação são utilizadas, dentre outras aplicações, para investigação de propriedades de soluções [19, 20, 21, 22, 49, 54, 55, 78, 94], e propriedades de integrabilidade do sistema [14, 15, 35, 38, 56, 93]. O termo lei de conservação é motivado pelos diversos exemplos físicos onde quantidades como massa, energia e momentos linear e angular são conservados no tempo. Por exemplo, em mecânica dos fluidos, a massa  $M = \int_V \rho(x, y, z) dV$  de um fluido com densidade  $\rho$  e velocidade  $\mathbf{v}$  é conservada nas soluções da equação da continuidade

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.1)$$

No eletromagnetismo, a carga de uma partícula também é conservada nas soluções da mesma equação (4.1), veja [39] (página 114). Todavia, ambos exemplos não são necessariamente obtidos a partir de propriedades de simetria da equação (4.1).

Mas, matematicamente falando, como encontrar tais quantidades que são conservadas? Se nossos sistemas não possuem necessariamente uma interpretação física, como encontramos leis de conservação? Em 1918, Emmy Noether [85] mostrou que para sistemas de equações provenientes de um princípio variacional, toda lei de conservação do sistema é derivada a partir de uma propriedade de simetria do sistema. Nem todo sistema possui tal propriedade variacional, mas, quando estamos nessa condição, o chamado de Teorema de Noether se torna uma ferramenta poderosa para encontrarmos leis de conservação.

E o que acontece com sistemas que não possuem tal propriedade variacional? Já neste século, Nail Ibragimov [60, 65] tentou estender o Teorema de Noether para que ele fosse aplicável a um grupo maior de problemas. Ele construiu um sistema auxiliar de tal forma que esse novo sistema admitisse uma formulação variacional e, se a equação é auto-adjunta, então conseguimos encontrar leis de conservação para o sistema original utilizando o Teorema de Noether.

São esses conceitos que trabalharemos neste capítulo. Na próxima seção daremos uma motivação física mostrando ingenuamente como relacionamos a conservação de momento linear da mecânica clássica com propriedades de simetria da segunda lei de Newton. Após, apresentaremos uma teoria geral de leis de conservação que será bastante utilizada nas seções seguintes. Na terceira seção trataremos formalmente do Teorema de Noether. Depois discutiremos o Teorema de Ibragimov e como ele se conecta com o Teorema de Noether. Para finalizar, apresentaremos os nossos resultados sobre leis de conservação de algumas equações que estudamos nos últimos quatro anos.

## 4.1 CONSERVAÇÃO DE MOMENTO LINEAR

Considere uma partícula de massa  $m$  constante, posição  $x(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$  e velocidade  $v(t) = (v^1(t), v^2(t), v^3(t))$ , onde

$$v^i(t) = \frac{dx^i(t)}{dt}.$$

O vetor momento linear  $p$  é definido como o produto da massa  $m$  pela sua velocidade  $v$ :

$$p(t) = mv(t).$$

Em consequência de interações com outros objetos ou campos, a partícula pode sofrer ação de vários tipos de força, como a gravitacional ou a elétrica. A somatória dessas forças nos dá a força total  $F$ . As duas primeiras Leis de Newton dizem que num referencial inercial essa força é descrita por

$$F = \frac{dp(t)}{dt}.$$

Logo, se a força total  $F$  agindo na partícula é nula então o momento linear se conserva. Em termos matemáticos, teremos

$$\frac{dp(t)}{dt} = 0.$$

O que acabamos de fazer foi deduzir de maneira física a conservação do momento linear. Porém, propriedades de simetria podem ser usadas para deduzirmos a mesma conservação de momento e é essa conexão que faremos agora.

Se a força  $F$  é nula, pelas duas primeiras leis de Newton estamos nas soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem

$$F = m \frac{d^2x^i(t)}{dt^2} = 0. \quad (4.2)$$

Quando consideramos um gerador

$$X = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

e aplicamos a condição de invariância (3.2), temos que  $X$  é escrito como combinação linear dos geradores

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Y_i = t \frac{\partial}{\partial x^i},$$

com  $i, j = 1, 2, 3$ , veja [64] (página 240).

Seja

$$L = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^3 (v^k)^2$$

e observe que

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} = m \frac{dx^i(t)}{dt} = F. \quad (4.3)$$

Além disso, considerando os operadores  $X_i$ , temos

$$X_i L - L D_t(\tau) = 0, \quad (4.4)$$

pois  $\tau = 0$  e  $L$  não depende de  $x^i$ . No caso do nosso sistema (4.2), o chamado Teorema de Noether diz que a quantidade

$$T^i = L\tau + (\eta^i - \tau v^i) \frac{\partial L}{\partial v^i}$$

é conservada nas soluções do sistema (4.2). Como  $\tau = 0$  e  $\eta^i = 1$ , temos

$$T^i = m v^i = p^i,$$

onde  $p^i$  denota a  $i$ -ésima componente do momento linear  $p$ . Logo, considerando  $i = 1, 2, 3$ , temos que o momento linear  $T = mv = p$  é conservado nas soluções de (4.2). Desta forma, matematicamente mostramos a conservação de momento linear obtida a partir da invariância sob translações espaciais ( $X_1, X_2$  e  $X_3$ ).

Como veremos nas seções seguintes, as condições (4.3) e (4.4) são de extrema importância para aplicação do Teorema de Noether. São elas que garantem que podemos encontrar as quantidades conservadas que estão de fato conectadas com as simetrias do sistema em questão.

Analogamente ao caso aqui apresentado, é possível mostrar que o gerador  $X_0$  está relacionado à conservação de energia  $E = m|v|^2/2$ . Já os operadores  $X_{ij}$ , que nada mais

são do que rotações, nos dizem que o momento angular  $M = m(x \times v)$  é conservado. Por fim, os *boost* de Galileu, dados pelos geradores  $Y_i$ , garantem a conservação de  $Q = m(tv - x)$  que, no caso de um sistema de partículas, nos dá a conservação do centro de massa. Para maiores detalhes, veja [64] (página 241).

## 4.2 LEIS DE CONSERVAÇÃO

Considere um sistema de equações diferenciais de ordem  $k$

$$\Delta(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0 \quad (4.5)$$

definido num aberto  $U^{(k)} \subset J^k(\pi)$ . Uma lei de conservação para o sistema é uma expressão de divergência

$$\text{Div } C = D_i C^i \quad (4.6)$$

que se anula nas soluções de (4.5). Em (4.6), o *vetor conservado*  $C = (C^1, \dots, C^m)$  é uma  $m$ -upla de funções diferenciáveis dependendo de  $x, u$  e derivadas de  $u$  até uma certa ordem  $\ell$  e  $D_i C^i$  denota a derivada total de  $C^i$  com relação à variável  $x^i$ .

Na seção anterior, mostramos que o momento linear é conservado nas soluções de determinado sistema no sentido de que a derivada do momento com relação ao tempo  $t$  se anula. Em outras palavras, mostramos que o momento linear é uma lei de conservação de (4.2). No caso em que  $m = 1$  e  $C = C^1$  satisfaz (4.6) nas soluções de um sistema de EDOs, chamamos  $C$  de *primeira integral*.

Num sistema de equações diferenciais parciais em que uma das variáveis independentes é o tempo  $t \in [0, \infty)$  e o restante das variáveis independentes é dado por  $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ , reescrevemos (4.6) como

$$\text{Div } C = D_t C^0 + D_i C^i. \quad (4.7)$$

A componente  $C^0$  é chamada de *densidade* ou *corrente conservada* e  $\tilde{C} = (C^1, \dots, C^m)$  é o respectivo *fluxo conservado*.

No caso particular de uma variável temporal  $t \in [0, \infty)$  e apenas uma espacial  $x \in \mathbb{R}$ , caso este que será suficiente para os nossos resultados, a expressão (4.7) se reescreve como

$$D_t C^0 = -D_x C^1$$

nas soluções da equação. Após integração em  $\mathbb{R}$ , temos que

$$\int_{\mathbb{R}} D_t C^0 dx = -C^1 \Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Logo, se  $C^1 \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ , então a quantidade

$$I = \int_{\mathbb{R}} C^0 dx$$

é conservada com respeito ao tempo, veja [87, 88, 89, 105]. Quando a condição

$\lim_{|x| \rightarrow \infty} C^1 = 0$  é satisfeita, dizemos que  $C^1$  tem decaimento no infinito.

**Exemplo 4.2.1.** (a) Considere a equação diferencial ordinária de ordem  $2n$

$$y^{(2n)}(x) + \lambda y^{\frac{1+2n}{1-2n}}(x) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

e a função

$$I = \frac{(y^{(n)})^2}{2} + (-1)^n \lambda \frac{1-2n}{2} y^{2/(1-2n)} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} y^{(j+1)} y^{(2n-j-1)}.$$

Quando consideramos  $D_x I$ , temos

$$\begin{aligned} D_x I &= y^{(n)} y^{(n+1)} + (-1)^n \lambda y^{\frac{1+2n}{1-2n}} y' + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} y^{(j+2)} y^{(2n-j-1)} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} y^{(j+1)} y^{(2n-j)}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de índice  $j+2 = k+1$  na primeira somatória, obtemos

$$\begin{aligned} D_x I &= y^{(n)} y^{(n+1)} + (-1)^n \lambda y' y^{\frac{1+2n}{1-2n}} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k+1} y^{(k+1)} y^{(2n-k)} + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} y^{(j+1)} y^{(2n-j)} = \\ &= (-1)^n \lambda y' y^{\frac{1+2n}{1-2n}} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k+1} y^{(k+1)} y^{(2n-k)} + \\ &\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} y^{(j+1)} y^{(2n-j)} + (-1)^n y' y^{(2n)} = \\ &= (-1)^n y' \left( y^{(2n)} + \lambda y^{\frac{1+2n}{1-2n}} \right). \end{aligned}$$

Logo, nas soluções da equação, temos que  $D_x I = 0$  e  $I$  é uma primeira integral da equação diferencial ordinária.

(b) Considere agora a equação diferencial parcial

$$u_t - u_{txx} + au^p u_x - b(p+1)u^{p-1}u_x u_{xx} - bu^p u_{xxx} = 0,$$

onde  $a, b$  e  $p$  são constantes reais. Considere agora o vetor  $C = (C^0, C^1)$  cujas componentes são dadas por  $C^0 = u^2 + u_x^2$  e

$$C^1 = \begin{cases} \frac{2}{p+2} au^{p+2} - 2bu^{p+1}u_{xx} - 2uu_{tx}, & \text{se } p \neq -2, \\ 2a \ln |u| + 2bu^{-1}u_{xx} - 2uu_{tx}, & \text{se } p = -2. \end{cases}$$

Observe que  $D_t C^0 = 2uu_t + 2u_x u_{tx}$  e

$$D_x C^1 = \begin{cases} u \left( 2au^p u_x - 2b(p+1)u^{p-1}u_x u_{xx} - 2bu^p u_{xxx} - 2u_{txx} \right) - 2u_x u_{tx}, \\ u \left( 2au^{-2}u_x - 2bu^{-3}u_x u_{xx} + 2bu^{-2}u_{xx} - 2u_{txx} \right) - 2u_x u_{tx}, \end{cases}$$

se  $p \neq -2$  e  $p = 2$ , respectivamente. Desta forma,

$$D_t C^0 + D_x C^1 = 2u \left( u_t - u_{txx} + au^p u_x - b(p+1)u^{p-1}u_x u_{xx} - bu^p u_{xxx} \right)$$

se anula nas soluções da equação, e, portanto, temos que  $D_t C^0 + D_x C^1$  é uma lei de conservação para a equação.

Suponha agora que  $p \in \mathbb{N}$  e que  $u(x, t)$  seja uma solução da equação tal que  $u, u_t, u_x, \dots \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Então claramente  $C^1 \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$  e então podemos afirmar que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} C^0 dx = 0,$$

ou seja,  $\int_{\mathbb{R}} C^0 dx$  é conservada no tempo.

Antes de procedermos com os métodos que usaremos para encontrar tais quantidades, daremos uma estrutura de espaço vetorial ao conjunto das leis de conservação de um determinado sistema. Mais do que isso, construiremos um espaço vetorial quociente para podermos lidar com alguns problemas que podem surgir das leis de conservação.

Suponha que  $C_1$  e  $C_2$  sejam dois vetores conservados nas soluções do sistema (4.5) e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  sejam duas constantes reais quaisquer. Observe que o novo vetor  $C = \alpha C_1 + \beta C_2$  é tal que

$$\text{Div } C = \alpha \text{Div } C_1 + \beta \text{Div } C_2 = 0$$

nas soluções de (4.5). Ou seja, o conjunto  $\text{CV}(\Delta)$  dos vetores conservados forma um espaço vetorial.

Vale a pena observar que tal espaço vetorial é sempre não vazio, pois todo vetor constante é trivialmente um vetor conservado de qualquer sistema, seja ele de equações ordinárias ou parciais. Porém, podemos definir de maneira mais geral o que é um vetor conservado trivial.

**Definição 4.2.1.** Dizemos que  $C = (C^1, \dots, C^m)$  é um vetor conservado trivial de um sistema de equações (4.5) se

$$\text{Div}C \equiv 0. \quad (4.8)$$

Neste caso, a lei de conservação gerada por  $C$  é dita ser trivial.

**Exemplo 4.2.2.** O caso dos vetores constantes é o mais simples possível. Porém, existem outros exemplos de vetores que não são constantes mas que satisfazem a condição de divergência nula (4.8). Com variáveis independentes  $t, x, y$  e  $z$ , tome  $C = (u_x, -u_t, -u_z, u_y)$ . Daí, teremos

$$\text{Div}C = D_t u_x - D_x u_t - D_y u_z + D_z u_y = u_{tx} - u_{tx} - u_{yz} + u_{yz} \equiv 0.$$

Isso mostra que precisamos, de alguma forma, distinguir os vetores que são triviais daqueles que não o são. O “problema” do vetor  $C$  é que todas as suas componentes podem ser escritas como  $C^i = D_j u$  para algum  $j$ .

A seguinte proposição caracteriza os vetores que são trivialmente conservados.

**Proposição 4.2.1.** Considere o fibrado trivial  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , um sistema de equações (4.5) e suponha que  $C = (C^1, \dots, C^m)$  seja um vetor cujas componentes são funções diferenciáveis. Então  $C$  é um vetor conservado trivial se, e somente se, existem funções diferenciáveis  $H_i$  e  $Q_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ , dependendo de  $x, u$  e derivadas de  $u$ , tais que as funções  $H_i$  se anulam nas soluções de (4.5),

$$Q_{ij} = -Q_{ji} \quad (4.9)$$

e

$$C^i = \sum_{j=1}^m D_j Q_{ij} + H_i. \quad (4.10)$$

*Demonstração.* Veja [87], *Theorem 4.24* (página 265). □

Já vimos que  $\text{CV}(\Delta)$  forma um espaço vetorial. Pode-se facilmente mostrar que o conjunto  $\text{CV}_0(\Delta)$  dos vetores conservados triviais é um subespaço vetorial de  $\text{CV}(\Delta)$ .

Em vista da Proposição 4.2.1, poderíamos reformular a Definição 4.2.1 em termos de vetores que são escritos como em (4.10), veja [68].

**Definição 4.2.2.** Dois vetores conservados  $C = (C^1, \dots, C^m)$  e  $\tilde{C} = (\tilde{C}^1, \dots, \tilde{C}^m)$  são ditos equivalentes se existem funções  $Q_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ , e  $H = (H^1, \dots, H^m)$  que dependem de  $x = (x^1, \dots, x^m)$  e derivadas de  $u$  até uma certa ordem  $\ell$  tal que  $H$  se anula nas soluções de (4.5), as funções  $Q_{ij}$  satisfazem (4.9) e

$$C^i = \tilde{C}^i + \sum_{j=1}^m D_j Q_{ij} + H^i. \quad (4.11)$$

Um vetor conservado é dito ser trivial se ele é equivalente ao vetor nulo.

Em outras palavras,  $C$  e  $\tilde{C}$  são equivalentes se  $C - \tilde{C}$  é um vetor conservado trivial. Além disso,  $C$  é trivial se ele é escrito como (4.10).

Observe que  $C$  é sempre equivalente a ele próprio, pois  $C = C + 0$ . Além disso, se  $C$  é equivalente a  $\tilde{C}$ , então  $\tilde{C}$  é equivalente a  $C$ , pois se (4.11) é satisfeito, então

$$\tilde{C}^i = C^i - \sum_{j=1}^m D_j Q_{ij} - H^i.$$

Suponha finalmente que  $C$  seja equivalente a  $\tilde{C}$  e  $\tilde{C}$  a  $\hat{C}$ . Logo, existem funções diferenciáveis  $\tilde{H}, \hat{H}$  que se anulam nas soluções de (4.5) e coeficientes antissimétricos  $\tilde{Q}_{ij}, \hat{Q}_{ij}$  tais que

$$\begin{aligned} C^i &= \tilde{C}^i + \sum_{j=1}^m D_j \tilde{Q}_{ij} + \tilde{H}^i, \\ \tilde{C}^i &= \hat{C}^i + \sum_{j=1}^m D_j \hat{Q}_{ij} + \hat{H}^i. \end{aligned}$$

Desta forma, teremos

$$C^i = \hat{C}^i + \sum_{j=1}^m D_j Q_{ij} + H^i,$$

onde  $H^i = \tilde{H}^i + \hat{H}^i$  e  $Q_{ij} = \tilde{Q}_{ij} + \hat{Q}_{ij}$ . Observando que  $H^i$  também se anula nas soluções de (4.5) e que  $Q_{ij}$  é antissimétrico, temos que  $C$  é equivalente a  $\hat{C}$ .

Desta forma, a equivalência da Definição 4.2.2 define uma relação de equivalência em  $CV(\Delta)$  e, portanto, temos o espaço quociente  $CL(\Delta) = CV(\Delta) / \sim$ .

No estudo de leis de conservação de um sistema (4.5) buscamos encontrar todas as classes de equivalência de  $CL(\Delta)$  que determinará uma base para o espaço  $CV(\Delta)$  mesmo que ele tenha dimensão infinita. Assim, quando encontramos um vetor conservado, eliminamos todas as divergências nulas e exibimos somente o representante da classe de equivalência.

Note que essa escolha não depende do representante, pois se  $C$  e  $\tilde{C}$  são dois vetores equivalentes, então eles diferem por um vetor de divergência nula e, desta forma, geram a mesma lei de conservação.

**Exemplo 4.2.3.** No Exemplo 4.2.1 (b), exibimos um vetor conservado  $C = (C^0, C^1)$  para a equação

$$u_t - u_{txx} + au^p u_x - b(p+1)u^{p-1}u_x u_{xx} - bu^p u_{xxx} = 0.$$

Neste exemplo, mostraremos como podemos ter um vetor equivalente àquele já exibido para o caso  $b \neq -2$ . Considere o vetor  $\tilde{C} = (\tilde{C}^0, \tilde{C}^1)$  cujas componentes são dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{C}^0 &= u^2 + u_x^2 - aptu^{p+1}u_x - bp(p+1)tu^p u_x u_{xx} - bptu^{p+1}u_{xxx} + \frac{1}{3}ptu_x u_{tx} + \\ &+ \frac{2}{3}ptuu_{txx} - \frac{1}{3}ptu_t u_{xx} - \frac{2}{3}uu_{xx} - \frac{2}{3}u_x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}^1 &= 2bu^{p+1}u_{xx} - 2uu_{tx} - aptu^{p+1}u_t - \frac{2}{3}u_t u_x - \frac{1}{3}pu_t u_x - \frac{1}{3}ptu_x u_{tt} +, \\ &- \frac{2}{3}uu_{tx} + \frac{2}{3}ptu_t u_{tx} - \frac{1}{3}ptu_t u_{tx} + \frac{2}{3}ptuu_{txx} - bpu^{p+1}u_{xx} + \\ &- bp(p+1)tu^p u_t u_{xx} - bptu^{p+1}u_{txx} + \frac{2}{3}puu_{tx}. \end{aligned}$$

É possível mostrar que

$$\text{Div} \tilde{C} = D_t \tilde{C}^0 + D_x \tilde{C}^1 = 2u \left( u_t - u_{txx} + au^p u_x - b(p+1)u^{p-1}u_x u_{xx} - bu^p u_{xxx} \right),$$

expressão esta que se anula nas soluções da equação. Desta forma, o vetor  $C$  está gerando a mesma lei de conservação do vetor considerado no Exemplo 4.2.1. É natural pensar que os dois vetores são equivalentes e eles de fato são se observarmos que

$$\begin{aligned} \tilde{C}^0 &= u^2 + u_x^2 + D_x \left[ -\frac{p}{3}tu_t u_x - \frac{p}{p+2}atu^{p+2} - \frac{2}{3}uu_x - pbtu^{p+1}u_{xx} + \frac{2p}{3}tuu_{tx} \right] = \\ &= C^0 + D_x Q_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}^1 &= \frac{2}{2+p}au^{p+2} + 2bu^{p+1}u_{xx} - 2uu_{tx} + \\ &- D_t \left[ -\frac{p}{3}tu_t u_x - \frac{p}{p+2}atu^{p+2} - \frac{2}{3}uu_x - pbtu^{p+1}u_{xx} + \frac{2p}{3}tuu_{tx} \right] = \\ &= C^1 + D_t Q_{21}, \end{aligned}$$

onde claramente temos  $Q_{12} = -Q_{21}$ . Como os vetores  $C$  e  $\tilde{C}$  são equivalentes, escolhemos sempre  $C$  como o mais simples, ou seja, eliminamos todos os termos de divergência nula.

Na Seção 2.5 definimos a derivada total de uma função  $F$  com respeito à variável  $x_i$  como sendo dada por

$$D_i F = \frac{\partial F}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial F}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial F}{\partial u_j} + \cdots + u_{ij_1 \dots j_k} \frac{\partial F}{\partial u_{j_1 \dots j_k}}.$$

Naquele momento fora conveniente definir de tal maneira pois queríamos calcular derivadas totais de coeficientes dados para que pudéssemos encontrar as prolongações de geradores de simetria. Neste capítulo, todavia, o problema que surge é que por mais que possamos reformular toda a teoria de maneira a evitar operadores que agem funções definidas em espaços que nesta tese não foram construídos (a saber, o espaço de jatos infinitos), a construção natural se dá por meio de tais operadores. No que se segue, usaremos tais operadores de maneira *formal*, guiando o leitor a [70, 71, 96] para maiores detalhes.

Suponha que  $(x, u) \in U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  denote as variáveis independentes  $x$  e dependentes  $u$ . Denote por  $z$  a seqüência

$$z = (x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)}, \dots) \quad (4.12)$$

cujas primeiras  $m + n$  coordenadas são dadas por

$$\begin{aligned} z^i &= x^i, & 1 \leq i \leq m, \\ z^i &= u^i, & m + 1 \leq i \leq m + n, \end{aligned}$$

e o restante são dadas pelas derivadas de  $u$ . Por  $[z]$  denotaremos uma subsequência finita qualquer de  $z$ .

**Definição 4.2.3.** Uma função diferencial  $F([z])$  é uma função real diferenciável localmente analítica. A ordem mais alta de uma função diferencial é a ordem de derivada mais alta presente em  $[z]$ . O conjunto de todas as funções diferenciais é o espaço vetorial  $\mathcal{A}$ , chamado de *espaço universal da Grupo-Análise*.

Algumas observações se fazem necessárias:

1. Se assumirmos que um sistema de equações diferenciais é o zero de uma função diferencial, então estamos assumindo que o sistema é localmente solúvel. Se, além de analítico, o sistema tiver posto máximo, então estamos em condições de ida e volta da Proposição 2.5.2.

2. De maneira ingênua, o jato infinito  $J^\infty(\pi)$  é construído da mesma maneira que o espaço de  $k$ -jatos, porém não fixamos uma ordem para as derivadas de  $u$ , veja [70, 71, 96]. Desta forma, podemos colocar coordenadas adaptadas  $z$  em  $J^\infty(\pi)$ . Com tal observação, uma função diferencial é uma função  $F : U^\infty \subset J^\infty(\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  localmente analítica.

O operador formal

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{s=1}^{\infty} u_{i_1 \dots i_s}^j \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.13)$$

é chamado de operador derivada total com respeito à variável independente  $x^i$ . Em termos práticos, o operador transforma uma função diferencial  $F \in \mathcal{A}$  em  $D_i F \in \mathcal{A}$  exatamente como havíamos definido na derivada total de  $F$ .

O termo *formal* utilizado acima quer dizer que não explicitamos o espaço no qual o operador está agindo. De maneira geral, quando dizemos que um objeto é *formal*, significa que não estamos lidando com problemas que podem vir explícitos no objeto. Por exemplo, uma soma formal é uma soma infinita na qual não estamos preocupados em avaliar a convergência.

**Definição 4.2.4.** O operador de Euler-Lagrange é definido como os operadores formais

$$\frac{\delta}{\delta u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.14)$$

Se  $F$  é uma função tal que  $\frac{\delta F}{\delta u^j}$  faz sentido, então  $\frac{\delta F}{\delta u^j}$  é chamada de derivada variacional de  $F$  com respeito a  $u^j$ .

**Exemplo 4.2.4.** Inicialmente, suponha que  $F \in \mathcal{A}$  seja uma função que dependa de variáveis independentes  $x$  e  $t$ , dependente  $u$  e derivadas de  $u$  de até segunda ordem, ou seja,  $F$  é da forma  $F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tx}, u_{tt})$ . Então a derivada variacional de  $F$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta u} &= \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial F}{\partial u_{i_1 \dots i_s}} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial u} - D_x \frac{\partial F}{\partial u_x} - D_t \frac{\partial F}{\partial u_t} + D_x^2 \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + D_x D_t \frac{\partial F}{\partial u_{tx}} + D_t^2 \frac{\partial F}{\partial u_{tt}}. \end{aligned}$$

Se temos duas variáveis dependentes  $u$  e  $v$ , ou seja,  $F = F(x, t, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, u_{(2)}, v_{(2)})$ , então teremos duas derivadas variacionais

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \frac{\partial F}{\partial u} - D_x \frac{\partial F}{\partial u_x} - D_t \frac{\partial F}{\partial u_t} + D_x^2 \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + D_x D_t \frac{\partial F}{\partial u_{tx}} + D_t^2 \frac{\partial F}{\partial u_{tt}},$$

$$\frac{\delta F}{\delta v} = \frac{\partial F}{\partial v} - D_x \frac{\partial F}{\partial v_x} - D_t \frac{\partial F}{\partial v_t} + D_x^2 \frac{\partial F}{\partial v_{xx}} + D_x D_t \frac{\partial F}{\partial v_{tx}} + D_t^2 \frac{\partial F}{\partial v_{tt}}.$$

Talvez a propriedade mais importante do operador de Euler-Lagrange que usaremos nesta tese é:

$$\frac{\delta}{\delta u^j} D_i = 0$$

para  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ , veja [64], *Lemma 2* (página 199).

Defina

$$\frac{\delta}{\delta u} := \left( \frac{\delta}{\delta u^1}, \dots, \frac{\delta}{\delta u^n} \right). \quad (4.15)$$

A função  $\delta F / \delta u = (\delta F / \delta u^1, \dots, \delta F / \delta u^n)$  é chamada de derivada variacional de  $F \in \mathcal{A}$  e é um elemento de

$$\mathcal{A}^n := \underbrace{\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}}_{n\text{-vezes}}.$$

A próxima proposição fundamentará parte dos métodos que construiremos adiante.

**Proposição 4.2.2.** Uma função  $F \in \mathcal{A}$  tem derivada variacional nula

$$\frac{\delta F}{\delta u} \equiv 0$$

se, e somente se, existe uma função  $H = (H^1, \dots, H^m) \in \mathcal{A}^m$  tal que

$$F = \text{Div}H = D_i H^i.$$

*Demonstração.* Veja [87], *Theorem 4.7* (página 252). □

Antes de prosseguirmos com o Teorema de Noether, exemplifiquemos a Proposição 4.3.2.

**Exemplo 4.2.5.** Dado  $b \neq -2$ , considere a função

$$F = uu_t - uu_{txx} + (p+2)u^{p+1}u_x - (p+1)u^p u_x u_{xx} - u^{p+1}u_{xxx}.$$

A derivada variacional de  $F$  é dada por

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \frac{\partial F}{\partial u} - D_x \frac{\partial F}{\partial u_x} - D_t \frac{\partial F}{\partial u_t} + D_x^2 \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} - D_x^3 \frac{\partial F}{\partial u_{xxx}} - D_t D_x^2 \frac{\partial F}{\partial u_{txx}},$$

onde

$$\frac{\partial F}{\partial u} = u_t - u_{txx} + (p+2)(p+1)u^p u_x - p(p+1)u^{p-1}u_x u_{xx} - (p+1)u^p u_{xxx},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u_x} &= (p+2)u^{p+1} - (p+1)u^p u_{xx}, & \frac{\partial F}{\partial u_t} &= u, \\ \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} &= -(p+1)u^p u^x, & \frac{\partial F}{\partial u_{xxx}} &= -u^{p+1}, & \frac{\partial F}{\partial u_{txx}} &= -u.\end{aligned}$$

Observando que

$$\frac{\partial F}{\partial u} = u_t - u_{txx} + D_x \frac{\partial F}{\partial u_x} = D_t \frac{\partial F}{\partial u_t} + D_t D_x^2 \frac{\partial F}{\partial u_{txx}}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} = D_x \frac{\partial F}{\partial u_{xxx}},$$

finalmente encontramos que

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta u} &= D_t \frac{\partial F}{\partial u_t} + D_t D_x^2 \frac{\partial F}{\partial u_{txx}} + D_x \frac{\partial F}{\partial u_x} - D_x \frac{\partial F}{\partial u_x} - D_t \frac{\partial F}{\partial u_t} + \\ &+ D_x^3 \frac{\partial F}{\partial u_{xxx}} - D_x^3 \frac{\partial F}{\partial u_{xxx}} - D_t D_x^2 \frac{\partial F}{\partial u_{txx}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 4.2.2, existe uma função  $H = (H_0, H_1)$  tal que  $F = \text{Div}H = D_t H_0 + D_x H_1$ . Fazendo alguns cálculos podemos concluir que as funções  $H_0$  e  $H_1$  são dadas por

$$\begin{aligned}H_0 &= u^2 + u_x^2 - p(p+2)tu^{p+1}u_x - p(p+1)tu^p u_x u_{xx} - ptu^{p+1}u_{xxx} + \frac{1}{3}ptu_x u_{tx} + \\ &+ \frac{2}{3}ptuu_{txx} - \frac{1}{3}ptu_t u_{xx} - \frac{2}{3}uu_{xx} - \frac{2}{3}u_x^2, \\ H_1 &= 2u^{p+1}u_{xx} - 2uu_{tx} - p(p+2)tu^{p+1}u_t - \frac{2}{3}u_t u_x - \frac{1}{3}pu_t u_x - \frac{1}{3}ptu_x u_{tt} + \\ &- \frac{2}{3}uu_{tx} + \frac{2}{3}ptu_t u_{tx} - \frac{1}{3}ptu_t u_{tx} + \frac{2}{3}ptuu_{ttx} - pu^{p+1}u_{xx} + \\ &- p(p+1)tu^p u_t u_{xx} - ptu^{p+1}u_{txx} + \frac{2}{3}puu_{tx},\end{aligned}$$

que é o mesmo vetor que consideramos no Exemplo 4.2.3.

## 4.3 TEOREMA DE NOETHER

Nesta seção discutiremos com detalhes o Teorema de Noether e sua aplicação em equações diferenciais parciais e ordinárias. Utilizaremos a abordagem de Ibragimov

[64] na qual ele lida de maneira algébrica com algumas identidades que simplificam significativamente a demonstração do famoso teorema de Emmy Noether [85]. Para outras abordagens, veja [9, 10, 87].

Consideremos o fibrado  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e as seções

$$X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u^j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.16)$$

**Definição 4.3.1.** Dado um campo vetorial (4.16), os operadores de Noether são os  $m$  operadores (formais)  $N^i$  dados por

$$N^i = \xi^i + W^j \frac{\delta}{\delta u^j} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \dots D_{i_s}(W^j) \frac{\delta}{\delta u^{j i_1 \dots i_s}}, \quad (4.17)$$

onde  $W^j := \eta^j - \xi^i u^j_i$ .

Na prática, quando aplicamos os operadores de Noether  $N^i$  a alguma função  $F$  que depende de  $x, u$  e derivadas de  $u$  até uma certa ordem  $\ell$ , truncamos o operador nesta ordem, pois o restante dos termos do operador consistirá de derivadas de ordem maior que  $\ell$ .

**Exemplo 4.3.1.** Considere a equação diferencial ordinária

$$y^{(2n)} + \lambda y^{\frac{1+2n}{1-2n}} = 0.$$

Voltando aos casos 2 e 3 do Teorema 3.1.2, temos que os geradores de simetria da equação são dados por

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2n-1}{2} y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (2n-1)xy \frac{\partial}{\partial y}.$$

Podemos associar um operador de Noether a cada um dos operadores. Considere  $X_1$  e observe que, neste caso,  $W = \eta - \xi y' = -y'$ . Logo,

$$N_1 = 1 - y' \frac{\delta}{\delta y} + \sum_{s=1}^{\infty} D_x^s(-y') \frac{\delta}{\delta y^{(s+1)}} = 1 - \sum_{s=0}^{\infty} y^{(s+1)} \frac{\delta}{\delta y^{(s+1)}}.$$

Analogamente, os outros dois operadores de Noether são dados respectivamente por

$$N_2 = x + \sum_{s=0}^{\infty} \left( \frac{2n-2s-1}{2} y^{(s)} - xy^{(s+1)} \right) \frac{\delta}{\delta y^{(s+1)}},$$

$$N_3 = x^2 + \sum_{s=0}^{\infty} \left[ s(2n-s)y^{(s-1)} + (2n-2s-1)xy^{(s)} - x^2y^{(s+1)} \right] \frac{\delta}{\delta y^{(s+1)}}.$$

Assim como os operadores de Noether são importantes ferramentas para simplificação do Teorema de Noether, a chamada *identidade de Noether* torna o Teorema de Noether uma simples consequência sua.

**Proposição 4.3.1.** (IDENTIDADE DE NOETHER) O operador de Euler-Lagrange (4.13), o campo vetorial (4.16) e seus respectivos operadores de Noether (4.17) estão relacionados pela seguinte *identidade de Noether*:

$$X^{(\infty)} + D_i(\xi^i) = W^j \frac{\delta}{\delta u^j} + D_i N^i, \tag{4.18}$$

onde  $X^{(\infty)}$  denota a soma formal

$$X^{(\infty)} = X + \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \Phi_{\alpha}^k \frac{\partial}{\partial u_{\alpha}^k},$$

com  $\Phi_{\alpha}^k$  sendo dado por (2.45).

*Demonstração.* Veja [64], página 331, observação 31. □

**Definição 4.3.2.** Seja

$$\Delta_{\nu}(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \tag{4.19}$$

um sistema de equações diferenciais. Se existe uma função  $\mathcal{L} \in \mathcal{A}$  tal que

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^{\nu}} = \Delta_{\nu} \tag{4.20}$$

para todo  $\nu$ , então  $\mathcal{L}$  é chamada de *Lagrangeana* do sistema. No caso da existência de uma Lagrangeana, dizemos que o sistema (4.19) possui princípio variacional.

**Exemplo 4.3.2.** Considere a equação diferencial ordinária de ordem  $2n$

$$y^{(2n)} + f(y) = 0,$$

onde  $f$  é uma função diferenciável, e a função

$$\mathcal{L} = \frac{(y^{(n)})^2}{2} + F(y),$$

onde  $F' = (-1)^n f$ . Observe que

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + (-1)^n D_x^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^{(n)}} = (-1)^n (y^{(2n)} + f(y)).$$

Desta forma, encontramos uma Lagrangeana para a equação e, portanto, ela possui princípio variacional. No caso particular em que  $f(y) = \lambda y^p$ , com  $\lambda \neq 0$  e  $p \neq 0, 1$ , podemos determinar  $F$  de maneira simples:

$$F(y) = \begin{cases} (-1)^n \frac{\lambda}{1+p} y^{p+1}, & \text{se } p \neq -1, \\ (-1)^n \lambda \ln |y|, & \text{se } p = -1. \end{cases} \quad (4.21)$$

Apesar de termos exibido uma Lagrangeana bastante geral no exemplo anterior, até hoje não é conhecido um algoritmo que determine uma Lagrangeana de um sistema dado. Porém, sabe-se que equações diferenciais parciais evolutivas e equações de ordem ímpar não podem admitir Lagrangeanas.

**Definição 4.3.3.** Suponha que o sistema (4.19) possua uma Lagrangeana de ordem  $\ell$  e considere um gerador de simetria  $X$  do sistema dado como em (4.16). Dizemos que  $X$  é uma simetria de Noether de (4.19) se existe um vetor  $B = (B^1, \dots, B^m)$  de funções  $B^i \in \mathcal{A}$  tal que

$$X^{(\ell)} \mathcal{L} + \mathcal{L} D_i \xi^i = D_i B^i, \quad (4.22)$$

onde  $X^{(\ell)}$  denota a  $\ell$ -ésima extensão de  $X$ . No caso particular  $B \equiv 0$ , dizemos que  $X$  é uma *simetria variacional*.

**Exemplo 4.3.3.** Consideremos a equação diferencial

$$y^{(2n)} + \lambda y^p = 0, \quad \lambda \neq 0, \quad p \neq 0, 1.$$

Do caso 2 do Teorema 3.1.2 de classificação de simetrias, temos que o operador (3.20) dado por

$$D_p = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2n}{1-p} y \frac{\partial}{\partial y}$$

é um gerador de simetria da equação para todos os valores de  $p$  exceto 0 e 1. No Exemplo 4.3.2 exibimos a Lagrangeana  $\mathcal{L} = (y^{(n)})^2/2 + F(y)$ , onde  $F$  é dada como em (4.21). Consideremos inicialmente o caso  $p = -1$ :

$$D_{-1}^{(n)} \mathcal{L} + \mathcal{L} D_x \xi = (-1)^n \lambda + \mathcal{L} = D_x((-1)^n \lambda x) + \mathcal{L}.$$

Como  $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta y} \neq 0$ , então pela Proposição 4.3.2 temos que não pode existir função  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{L} = D_x A$ . Desta forma, não existe função  $B \in \mathcal{A}$  tal que (4.22) seja satisfeito e, portanto,  $D_{-1}$  não é uma simetria de Noether.

Por outro lado, suponha  $p \neq -1, 0, 1$ . A condição (4.22) é então reescrita como

$$D_p^{(n)} \mathcal{L} + \mathcal{L} D_x \xi = \frac{2n + 1 + p(2n - 1)}{1 - p} \mathcal{L}.$$

Pelo argumento utilizado anterior, não pode existir função  $B \in \mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{L} = D_x B$ . Porém, tomando  $p = (1 + 2n)/(1 - 2n)$ , temos que

$$\frac{2n + 1 + p(2n - 1)}{1 - p} = 0$$

e então podemos tomar  $B = 0$  e os operadores  $D_p$  serão simetrias de Noether da equação com  $p = (1 + 2n)/(1 - 2n)$ .

Suponhamos agora que estejamos nas condições da Definição 4.3.3. Pela identidade de Noether (4.18), temos

$$D_i B^i = W^j \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^j} + D_i N^i(\mathcal{L}),$$

ou seja,

$$W^j \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^j} = -D_i(N^i(\mathcal{L}) - B^i).$$

Observando agora que (4.20) vale, então nas soluções do sistema  $\Delta_\nu = 0$  temos que

$$D_i(N^i(\mathcal{L}) - B^i) = 0.$$

Em outras palavras, o vetor  $C = (C^1, \dots, C^m)$  cujas funções coordenadas  $C^i$  são dadas por

$$C^i = N^i(\mathcal{L}) - B^i,$$

é conservado nas soluções do sistema. Com isso terminamos a demonstração do Teorema de Noether:

**Proposição 4.3.2.** (TEOREMA DE NOETHER) Considere um sistema de equações diferenciais

$$\Delta(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0, \tag{4.23}$$

com Lagrangeana  $\mathcal{L}$ . Se um gerador de simetria  $X$  do sistema é também uma simetria de Noether, então o sistema (4.23) admite o vetor conservado  $C$  de componentes

$$C^i = N^i(\mathcal{L}) - B^i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{4.24}$$

onde  $N^i$  são os operadores de Noether associados a  $X$ .

Quando exemplificamos a conservação do momento linear na Seção 4.1, dissemos que as condições (4.3) e (4.4) eram de extrema importância para aplicação do Teorema de Noether. Agora podemos claramente ver que a condição (4.3) se refere ao princípio variacional do sistema, enquanto (4.4) diz que, tomando  $B = 0$ ,  $X_i$  será uma simetria de Noether do sistema.

Como mencionado anteriormente, o Teorema de Noether não é aplicável a qualquer sistema. Quando não conseguimos encontrar uma Lagrangeana para o sistema ou quando suas simetrias não são de Noether, estamos impossibilitados de utilizar a Proposição 4.3.2.

**Exemplo 4.3.4.** O Exemplo 4.3.3 mostra duas situações opostas envolvendo a equação

$$y^{(2n)} + \lambda y^p = 0, \quad \lambda \neq 0, \quad p \neq 0, 1, \tag{4.25}$$

que possui Lagrangeana para todos os valores de  $p$ . Como vimos, o operador

$$D_p = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2n}{1-p} y \frac{\partial}{\partial y}$$

será uma simetria de Noether se, e somente se,  $p = (1 + 2n)/(1 - 2n)$ . Logo, não podemos aplicar o Teorema de Noether se  $p \neq (1 + 2n)/(1 - 2n)$ .

Consideremos então os geradores de simetria da equação (4.25):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = D_{\frac{1+2n}{1-2n}} = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2n-1}{2} y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (2n-1)xy \frac{\partial}{\partial y}.$$

Para o operador  $X_2$ , mostramos que

$$X_2 \mathcal{L} + \mathcal{L} D_x \xi = 0,$$

no qual  $\mathcal{L}$  denota a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{(y^{(n)})^2}{2} + (-1)^n \lambda \frac{1-2n}{2} y^{\frac{2}{1-2n}}.$$

De maneira análoga pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} X_1^{(n)} \mathcal{L} + \mathcal{L} D_x \xi &= 0, \\ X_3^{(n)} \mathcal{L} + \mathcal{L} D_x \xi &= D_x \left( \frac{n^2}{2} (y^{(n-1)})^2 \right). \end{aligned}$$

Já no Exemplo 4.3.1, encontramos os operadores de Noether  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  associados aos operadores  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , respectivamente. Pelo Teorema de Noether, as três quantidades

$$I_i = N_i(\mathcal{L}) - B_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

determinam vetores conservados que, no caso de equações diferenciais ordinárias, são chamados de primeira integrais. Temos então

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{(y^{(n)})^2}{2} + (-1)^n \lambda \frac{1-2n}{2} y^{\frac{2}{1-2n}} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} y^{(j+1)} y^{(2n-j-1)}, \\
 I_2 &= x \frac{(y^{(n)})^2}{2} + (-1)^n \lambda x \frac{(1-2n)}{2} y^{\frac{2}{1-2n}} \\
 &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} \left( \frac{2n-2j-1}{2} y^{(j)} - x y^{(j+1)} \right) y^{(2n-j-1)}, \\
 I_3 &= \frac{x^2}{2} (y^{(n)})^2 + (-1)^n \lambda x^2 \frac{1-2n}{2} y^{\frac{2}{1-2n}} - \frac{n^2}{2} (y^{(n-1)})^2 \\
 &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} \left[ j(2n-j) y^{(j-1)} + (2n-2j-1) x y^{(j)} - x^2 y^{(j+1)} \right] y^{(2n-j-1)}.
 \end{aligned}$$

#### 4.4 TEOREMA DE IBRAGIMOV

Na seção anterior, vimos que a utilização do Teorema de Noether está restrita a sistemas que possuam princípio variacional e, além disso, que alguma de suas simetrias seja de fato simetria de Noether. A necessidade de ambas condições explicita uma deficiência do Teorema de Noether, pois o mesmo não é aplicável a qualquer equação.

Na segunda metade da década de 2000, Ibragimov [60, 65], a fim de estender a aplicação do Teorema de Noether para sistemas que inicialmente não estavam nas condições do teorema, mostrou que sempre podemos construir um sistema auxiliar, que herda as simetrias do sistema original, de tal forma que o Teorema de Noether seja aplicável. Além disso, se o sistema possui uma propriedade a mais, chamada por ele de auto-adjunticidade, então podemos reobter o sistema original a partir do auxiliar. Porém, é de extrema relevância ressaltar que por mais que o método estenda de certa forma o Teorema de Noether, ele possui problemas teóricos que discutiremos a seguir.

**Definição 4.4.1.** Considere um sistema de equações diferenciais de ordem  $k$

$$\Delta_\nu(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, n, \tag{4.26}$$

no qual  $\Delta_\nu \in \mathcal{A}$ . O sistema

$$\Delta_\nu^*(x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \dots, u_{(k)}, v_{(k)}) := \frac{\delta(v^\beta \Delta_\beta)}{\delta u^\nu} = 0, \quad \nu = 1, \dots, n, \tag{4.27}$$

onde  $v = v(x) = (v^1(x), \dots, v^n(x))$ , é chamado de sistema adjunto do sistema (4.26).

Em termos da derivada variacional, a expressão (4.27) reescreve como

$$\Delta_v^* = \frac{\delta}{\delta u^v} (v^\beta \Delta_\beta) = v^\beta \frac{\partial \Delta_\beta}{\partial u^v} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \left( v^\beta \frac{\partial \Delta_\beta}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^v} \right).$$

O que Ibragimov faz é olhar para o princípio variacional de um sistema auxiliar.

**Proposição 4.4.1.** Dado um sistema (4.27), o novo sistema

$$\begin{cases} \Delta_v(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0, \\ \Delta_v^*(x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \dots, u_{(k)}, v_{(k)}) = 0, \end{cases} \quad v = 1, \dots, n, \quad (4.28)$$

possui uma Lagrangeana dada por

$$\mathcal{L} = v^\beta \Delta_\beta. \quad (4.29)$$

A Lagrangeana definida por (4.29) é chamada de *Lagrangeana formal*.

A função  $\mathcal{L}$  é de fato uma Lagrangeana do sistema auxiliar (4.28), pois

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta v^v} = \Delta_v, \quad v = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^v} = \Delta_v^*, \quad v = 1, \dots, n.$$

Para maiores detalhes, veja [60], *Theorem 3.2* (página 319).

A próxima proposição, conhecida como Teorema de Ibragimov, basicamente nos diz que toda simetria de Lie de um sistema (4.26) pode ser estendida para uma simetria de Noether do sistema (4.28).

**Proposição 4.4.2.** (TEOREMA DE IBRAGIMOV) Suponha que o sistema (4.26) admita uma simetria de Lie com gerador

$$X = \zeta^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u^j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Então o sistema adjunto (4.27) admite uma simetria de Lie de gerador infinitesimal

$$X_* = \zeta^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u^j} + \eta_*^j \frac{\partial}{\partial v^j},$$

onde  $\eta_*^j = -(\lambda_v^j v^\nu + v^j D_\ell \zeta^\ell)$  e  $\lambda_v^j$  é a função tal que  $X \Delta_v = \lambda_v^j \Delta_j$ . Mais do que isso,  $X_*$  será sempre uma simetria de Noether do sistema (4.28) com relação à Lagrangeana formal  $\mathcal{L} = v^\beta \Delta_\beta$ .

*Demonstração.* Veja [60], *Theorem 3.3* (páginas 320 e 321). □

Observe que se o sistema original (4.26) tem ordem  $k$ , então a Lagrangeana formal  $\mathcal{L}$  também terá ordem  $k$ . Com isso, um detalhe importante que está presente na demonstração do Teorema de Ibragimov é que sempre teremos

$$X_*^{(k)} \mathcal{L} + \mathcal{L} D_t \zeta^i = 0,$$

ou seja,  $X_*$  será simetria de Noether do sistema auxiliar (4.28). Em particular, sempre teremos  $B^i = 0$  em (4.24). Desta forma, a partir de cada gerador de simetria  $X$  da equação original, construímos uma nova simetria  $X_*$  do sistema auxiliar de tal forma que o Teorema de Noether seja aplicável com  $B^i = 0$  em (4.24). Isso significa que o vetor conservado  $C = (C^1, \dots, C^m)$  terá componentes

$$C^i = N_*^i(\mathcal{L}).$$

**Exemplo 4.4.1.** Considere a equação

$$F = u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{4.30}$$

chamada de equação de Zakharov-Kuznetsov em 1 + 3 dimensões. Inicialmente queremos encontrar a equação adjunta  $F^* = 0$  de  $F = 0$ . Para isso, seja  $v = v(t, x, y, z)$  uma função suficientemente diferenciável. Temos

$$\begin{aligned} F^* &= v \frac{\partial F}{\partial u} - D_t \left( v \frac{\partial F}{\partial u_t} \right) - D_x \left( v \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - D_x^3 \left( v \frac{\partial F}{\partial u_{xxx}} \right) - D_x^3 \left( v \frac{\partial F}{\partial u_{xxx}} \right) + \\ &\quad - D_x D_y^2 \left( v \frac{\partial F}{\partial u_{xyy}} \right) - D_x D_z^2 \left( v \frac{\partial F}{\partial u_{xzz}} \right) = \\ &= -D_t v - \alpha u D_x v - D_x^3 v - D_x D_y^2 v - D_x D_z^2 v = 0. \end{aligned}$$

Desta forma, o sistema auxiliar é dado por

$$\begin{cases} F &= u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} = 0, \\ F^* &= -D_t v - \alpha u D_x v - D_x^3 v - D_x D_y^2 v - D_x D_z^2 v = 0. \end{cases}$$

De acordo com a Seção 3.5, o operador

$$X = X_6 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} - 2u \frac{\partial}{\partial u}$$

é um gerador de simetria da equação (4.30). Precisamos agora determinar a função  $\lambda$  tal que  $X^{(3)}F = \lambda F$ . Quando utilizamos a Proposição 2.5.3 para determinar os coeficientes do gerador estendido  $X^{(3)}$ , encontramos

$$X^{(3)} = 3t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} - 2u \frac{\partial}{\partial u} - 5u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - 3u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \\ - 5u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} - 5u_{xyy} \frac{\partial}{\partial u_{txyy}} - 5u_{xzz} \frac{\partial}{\partial u_{xzz}},$$

ou seja,  $X^{(3)}F = -5F$ , de onde segue que  $\lambda = -5$ . Então, teremos  $\eta_* = -(\lambda v + v D_i \zeta^i) = -v$  e

$$X_* = 3t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} - 2u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v}.$$

Antes de verificarmos a condição de simetria de Noether, observe que

$$X_*^{(3)} \mathcal{L} = v X^{(3)} \mathcal{L} - v F = -6v F.$$

Desta forma,

$$X_*^{(3)} \mathcal{L} + \mathcal{L} D_i \zeta^i = -6v F + 6\mathcal{L} = -6v F + 6v F = 0,$$

como já esperávamos. Estamos então nas condições do Teorema de Noether e precisamos, desta forma, encontrar  $N_*^i(\mathcal{L})$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Pela Definição 4.3.1, temos

$$N_*^i(\mathcal{L}) = \zeta^i \mathcal{L} + W^1 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_i} + W^2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta v_i} + \\ + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \dots D_{i_s} (W^1) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{ii_1 \dots i_s}} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \dots D_{i_s} (W^2) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta v_{ii_1 \dots i_s}},$$

onde  $W^1 = \eta - \zeta^i u_i$  e  $W^2 = \eta_* - \zeta^i u_i$ . Observe que para  $N_*^i(\mathcal{L})$  fazer sentido, precisamos simetrizar a Lagrangeana  $\mathcal{L}$ , pois o operador  $N_*^i$  já é escrito de maneira simétrica em relação às derivadas cruzadas (ou seja,  $D_x D_y = D_y D_x$ , por exemplo). Por esse motivo, escrevamos

$$\mathcal{L} = v \left[ u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} + \frac{1}{3} (u_{xyy} + u_{yxy} + u_{yyx}) + \frac{1}{3} (u_{xzz} + u_{zxx} + u_{zzx}) \right].$$

Como  $\mathcal{L}$  não depende de derivadas de  $v$ , então reescrevemos  $N_*^i(\mathcal{L})$  como

$$N_*^i(\mathcal{L}) = \zeta^i \mathcal{L} + W^1 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_i} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \dots D_{i_s} (W^1) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{ii_1 \dots i_s}}.$$

Observe que no caso do operador  $X_*$ , temos que  $\zeta^1 = 3t, \zeta^2 = x, \zeta^3 = y, \zeta^4 = z$  e  $\eta = -2u$ , de onde segue que  $W^1 = -2u - 3tu_t - xu_x - yu_y - zu_z$ . Consideremos

também as componentes  $C^j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , do vetor conservado  $C$  como  $C^j = N_*^{j+1}(\mathcal{L})$ .

Logo,

$$\begin{aligned}
C^0 &= 3t\mathcal{L} + W^1 \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_t} = 3t\mathcal{L} + W^1 \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t} \right), \\
C^1 &= x\mathcal{L} + W^1 \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_x} + D_x(W^1) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{xx}} + D_y(W^1) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{xy}} + D_z(W^1) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{xz}} + \\
&\quad + D_x^2(W^1) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{xxx}} + D_y^2(W^1) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{xyy}} + D_z^2(W^1) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{xzz}} = \\
&= 3t\mathcal{L} + W^1 \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} + D_x^2 \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) + D_y^2 \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xyy}} \right) + D_z^2 \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xzz}} \right) \right] + \\
&\quad - D_x(W^1) D_x \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) - D_y(W^1) D_y \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xyy}} \right) - D_x(W^1) D_z \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xzz}} \right) + \\
&\quad + D_x^2(W^1) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} + D_y^2(W^1) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xyy}} + D_z^2(W^1) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xzz}}, \\
C^2 &= y\mathcal{L} + W^1 \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_y} + D_x(W^1) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{yx}} + D_y(W^1) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{yy}} + D_x D_y(W^1) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{yyx}} + \\
&\quad + D_y D_x(W^1) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{yyx}} = \\
&= y\mathcal{L} + W^1 \left[ D_x D_y \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yyx}} \right) + D_y D_x \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yyx}} \right) \right] - D_x(W^1) D_y \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yyx}} \right) + \\
&\quad - D_y(W^1) D_x \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yyx}} \right) + D_x D_y(W^1) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yyx}} + D_y D_x(W^1) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yyx}}, \\
C^3 &= z\mathcal{L} + W^1 \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_z} + D_x(W^1) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{zx}} + D_z(W^1) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{zz}} + D_x D_z(W^1) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{zxx}} + \\
&\quad + D_z D_x(W^1) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u_{zxx}} = \\
&= z\mathcal{L} + W^1 \left[ D_x D_z \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zxx}} \right) + D_z D_x \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zxx}} \right) \right] - D_x(W^1) D_z \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zxx}} \right) + \\
&\quad - D_z(W^1) D_x \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zxx}} \right) + D_x D_z(W^1) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zxx}} + D_z D_x(W^1) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zxx}}.
\end{aligned}$$

Quando calculamos as respectivas derivadas e substituímos nas componentes  $C^j$ , temos

$$\begin{aligned}
C^0 &= v \left[ 3\alpha t u u_x + 3t u_{xxx} + 3t u_{xyy} + 3t u_{xzz} - 2u - x u_x - y u_y - z u_z \right], \\
C^1 &= v \left[ x u_t + x u_{xxx} + \frac{2}{3} x u_{xyy} + \frac{2}{3} x u_{xzz} - 2\alpha u^2 - 3\alpha t u u_t - \alpha y u u_y - \alpha z u u_z + \right. \\
&\quad - 4u_{xx} - x u_{xxx} - 3t u_{txx} - y u_{xyy} - z u_{xzz} + \frac{1}{3} (-4u_{yy} - y u_{yyy} - 3t u_{tyy} - z u_{zyy}) + \\
&\quad \left. \frac{1}{3} (-4u_{zz} - z u_{zzz} - 3t u_{tzz} - y u_{yzz}) \right] - v_x (-3u_x - x u_{xx} - 3t u_{tx} - y u_{xy} - z u_{xz}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3}v_y(-3u_y - yu_{yy} - 3tu_{ty} - xu_{xy} - zu_{yz}) \\
 & -\frac{1}{3}v_z(-3u_z - zu_{zz} - 3tu_{tz} - xu_{xz} - yu_{yz}) + \\
 & v_{xx}(-2u - 3tu_t - xu_x - yu_y - zu_z) + \frac{1}{3}v_{yy}(-2u - 3tu_t - xu_x - yu_y - zu_z) + \\
 & + \frac{1}{3}v_{zz}(-2u - 3tu_t - xu_x - yu_y - zu_z), \\
 C^2 = & v \left[ yu_t + \alpha yuu_x + yu_{xxx} + \frac{1}{3}yu_{xyy} + yu_{xzz} + \frac{2}{3}(-4u_{xy} - xu_{xxy} - 3tu_{txy} - zu_{xyz}) \right] + \\
 & -\frac{1}{3}v_x(-3u_y - yu_{yy} - 3tu_{ty} - xu_{xy} - zu_{zy}) + \\
 & -\frac{1}{3}v_y(-3u_x - xu_{xx} - 3tu_{tx} - yu_{xy} - zu_{xz}) + \\
 & + \frac{2}{3}v_{xy}(-2u - 3tu_t - xu_x - yu_y - zu_z), \\
 C^3 = & v \left[ zu_t + \alpha zuu_x + zu_{xxx} + zu_{xyy} + \frac{1}{3}zu_{xzz} + \frac{2}{3}(-4u_{xz} - xu_{xxz} - 3tu_{txz} - yu_{xyz}) \right] + \\
 & -\frac{1}{3}v_x(-3u_z - zu_{zz} - 3tu_{tz} - xu_{xz} - yu_{yz}) + \\
 & -\frac{1}{3}v_z(-3u_x - xu_{xx} - 3tu_{tx} - yu_{xy} - zu_{xz}) + \\
 & + \frac{2}{3}v_{xz}(-2u - 3tu_t - xu_x - yu_y - zu_z).
 \end{aligned}$$

O exemplo anterior mostra como utilizamos o Teorema de Ibragimov para encontrarmos vetores conservados via Teorema de Noether. E é importante observar que enquanto não é necessário simetrizar a Lagrangeana formal para encontrarmos a equação adjunta, é imprescindível o fazer quando aplicamos o Teorema de Noether.

O problema explícito que surge é que tais vetores dependem de  $v$ , uma variável que não faz parte do sistema original. Isso quer dizer que, em termos do sistema original, a lei de conservação é *não-local*.

Para eliminar a variável não-local  $v$ , Ibragimov desenvolveu vários conceitos a fim de obtermos leis de conservação locais para a equação. Apresentamos abaixo o mais geral, introduzido em [61].

**Definição 4.4.2.** Um sistema de equações diferenciais (4.26) é dito ser não-linearmente auto-adjunto se existe uma substituição  $v = \mu(x, u, u_{(1)}, \dots)$ , com  $\mu \neq 0$ , tal que

$$\Delta_v^* \Big|_{v=\mu} = \lambda_v^\beta \Delta_\beta + \sum_{s \geq 1} \lambda_v^{\beta j_1 \dots j_s} D_{j_1} \dots D_{j_s} \Delta_\beta, \tag{4.31}$$

para certas funções  $\lambda_v^\beta \in \mathcal{A}$ . Se (4.26) é não-linearmente auto-adjunto com substituição  $v = u$ , então (4.26) é dito ser estritamente auto-adjunto.

Para maiores detalhes e uma revisão sobre os conceitos de auto-adjunticidade, veja [45]

A Definição 4.4.2 diz que, nas soluções de (4.26), o sistema

$$\begin{cases} \Delta_v = 0, \\ \Delta_v^*|_{v=\mu} = 0, \end{cases}$$

é equivalente ao sistema original  $\Delta_v = 0$ . Desta forma, se temos o vetor conservado não-local de componentes  $C^i = N_*^i(\mathcal{L})$ , então basta fazermos  $v = \mu$  para que o vetor retorne às variáveis originais e seja, portanto, local.

Com isso, temos um algoritmo para tentarmos encontrar vetores conservados para um sistema independentemente da existência de princípio variacional ou não:

1. Dado um sistema de equações diferenciais  $\Delta_v = 0$ , encontre o sistema adjunto

$$\Delta_v^* = \frac{\delta(v\Delta_v)}{\delta u^\nu} = 0;$$

2. Para cada simetria de Lie do sistema  $\Delta_v = 0$ , construa o vetor conservado não-local  $C$  de componentes  $C^i = N_*^i(\mathcal{L})$ ;
3. Fixe uma ordem  $\ell \geq 0$  e encontre substituições  $v = \mu(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(\ell)})$  tais que

$$\Delta_v^*|_{v=\mu} = \lambda_v^\beta \Delta_\beta + \sum_{s \geq 1} \lambda_v^{\beta, j_1 \dots j_s} D_{j_1} \dots D_{j_s} \Delta_\beta;$$

4. Faça  $v = \mu$  nos vetores conservados não-locais para encontrar os correspondentes vetores locais;
5. Elimine possíveis divergências nulas e obtenha o vetor mais simples de sua classe de equivalência.

O Teorema de Ibragimov possui vantagens e desvantagens. Uma vantagem é que sempre podemos utilizar o Teorema de Noether para encontrar leis de conservação para o sistema auxiliar e, no caso em que a equação é não-linearmente auto-adjunta, encontramos leis de conservação para o sistema original. Por outro lado, ter que fixar a

ordem da substituição  $v = \mu$  nos diz que vamos encontrar *alguns* vetores conservados e isso é problemático porque pode existir alguma substituição de ordem mais alta que poderia nos produzir algum outro vetor conservado. Além disso, dada uma equação, pode não existir uma substituição  $v$  para eliminarmos a variável não-local. Porém, há de ser ressaltado que o método é uma ferramenta importante para que consigamos encontrar vetores conservados.

**Exemplo 4.4.2.** Consideremos a equação (4.30) do Exemplo 4.4.1. Nele, encontramos a equação adjunta  $F^* = -D_t v - \alpha u D_x v - D_x^3 v - D_x D_y^2 v - D_x D_z^2 v = 0$  e o vetor conservado não-local  $C = (C^0, C^1, C^2, C^3)$  relacionado ao gerador de simetria  $X = \alpha t \frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial u}$  dado como em (3.44).

Suponha então que  $v = \mu(t, x, y, z, u(t, x, y, z))$ , onde  $u$  é uma solução da equação. Calculando as derivadas e substituindo na equação adjunta, temos

$$\begin{aligned} F^* = & \mu_u (-u_t - u_{zzz} - u_{xyy} - u_{xxx}) - 2u_{xz} (u_z \mu_{uu} + \mu_{zu}) + \\ & - u_x [u_{zz} \mu_{uu} + u_z \mu_{zuu} + u_z (u_z \mu_{uuu} + \mu_{zuu}) + \mu_{zzu}] + \\ & - 2u_{xy} (u_y \mu_{uu} + \mu_{yu}) - u_x [u_{yy} \mu_{uu} + u_y \mu_{yuu} + u_y (u_y \mu_{uuu} + \mu_{yuu}) + \mu_{yyu}] + \\ & - \mu_t - \alpha u (u_x \mu_u + \mu_x) - u_{zz} \mu_{xu} - u_{yy} \mu_{xu} - u_{xx} \mu_{xu} + \\ & - 2u_{xx} (u_x \mu_{uu} + \mu_{xu}) - u_z \mu_{xzu} - u_z (u_z \mu_{xuu} + \mu_{xzu}) - \mu_{xzz} - u_y \mu_{xyu} + \\ & - u_y (u_y \mu_{xuu} + \mu_{xyu}) - \mu_{xyy} - u_x \mu_{xxu} - u_x (u_x \mu_{xuu} + \mu_{xxu}) + \\ & - u_x [u_{xx} \mu_{uu} + u_x \mu_{xuu} + u_x (u_x \mu_{uuu} + \mu_{xuu}) + \mu_{xxu}] - \mu_{xxx} = 0. \end{aligned}$$

Observe que nas soluções da equações temos  $\mu_u (-u_t - u_{zzz} - u_{xyy} - u_{xxx}) = \alpha \mu_u u u_x$ . Assim, a equação adjunta é reescrita como

$$\begin{aligned} F^* = & \alpha \mu_u u u_x - 2u_{xz} (u_z \mu_{uu} + \mu_{zu}) + \\ & - u_x [u_{zz} \mu_{uu} + u_z \mu_{zuu} + u_z (u_z \mu_{uuu} + \mu_{zuu}) + \mu_{zzu}] + \\ & - 2u_{xy} (u_y \mu_{uu} + \mu_{yu}) - u_x [u_{yy} \mu_{uu} + u_y \mu_{yuu} + u_y (u_y \mu_{uuu} + \mu_{yuu}) + \mu_{yyu}] + \\ & - \mu_t - \alpha u (u_x \mu_u + \mu_x) - u_{zz} \mu_{xu} - u_{yy} \mu_{xu} - u_{xx} \mu_{xu} + \\ & - 2u_{xx} (u_x \mu_{uu} + \mu_{xu}) - u_z \mu_{xzu} - u_z (u_z \mu_{xuu} + \mu_{xzu}) - \mu_{xzz} - u_y \mu_{xyu} + \\ & - u_y (u_y \mu_{xuu} + \mu_{xyu}) - \mu_{xyy} - u_x \mu_{xxu} - u_x (u_x \mu_{xuu} + \mu_{xxu}) + \\ & - u_x [u_{xx} \mu_{uu} + u_x \mu_{xuu} + u_x (u_x \mu_{uuu} + \mu_{xuu}) + \mu_{xxu}] - \mu_{xxx} = 0, \end{aligned}$$

ou seja, um polinômio nas derivadas de  $u$ . Quando ordenamos  $F^*$  em função das derivadas de  $u$ , do termo  $u_x u_{zz}$ , temos que  $\mu_{uu} = 0$  e, desta forma, podemos escrever  $\mu = f(t, x, y, z)u + g(t, x, y, z)$ . Dos termos  $u_{xz}$ ,  $u_{xy}$ ,  $u_{zz}$ ,  $u_{yy}$  e  $u_{xx}$  concluímos que

$$\mu_{zu} = \mu_{xu} = \mu_{yu} = 0,$$

ou seja,  $f = f(t)$ . Eliminando os termos nulos da equação adjunta, conseguimos reescrevê-la como  $F^* = -\mu_t - \alpha u \mu_x - \mu_{xzz} - \mu_{xyy} - \mu_{xxx} = 0$ , onde  $\mu = f(t)u + g(t, x, y, z)$ . Logo, temos

$$F^* = -u f_t - g_t - \alpha u g_x - g_{xzz} - g_{xyy} - g_{xxx} = 0.$$

Do termo  $u$ , temos que  $\alpha g = -f'(t)x + h(t, y, z)$ . Daí, obtemos que  $g_{xxx} = g_{xyy} = g_{xzz} = 0$ , sobrando somente  $g_t = 0$ . Portanto,  $f = a_1 t + a_2$ , com  $a_1$  e  $a_2$  constantes,  $\alpha g = -a_1 x + h(y, z)$  e, se assumirmos  $\alpha \neq 0$ , a substituição  $v = \mu$  é escrita como

$$v = \mu = (a_1 t + a_2)u - a_1 x + h(y, z) = a_1(tu - x) + a_2 u + h(y, z).$$

Para encontrarmos as leis de conservação, podemos (e devemos) considerar separadamente as substituições  $v_1 = tu - x$ ,  $v_2 = u$  e  $v_3 = h(y, z)$  e os geradores de simetria da equação. No caso do operador  $X_6$ , substituindo  $v_2 = u$  no vetor encontrado no Exemplo 4.4.1, temos

$$\begin{aligned} C^0 &= -\frac{1}{2}u^2 + D_x \left( \alpha t u^3 + 3t u u_{xx} - \frac{3}{2}t u_x^2 - \frac{3}{2}t u_y^2 - \frac{3}{2}t u_z^2 - \frac{1}{2}x u^2 \right) + \\ &\quad D_y \left( 3t u u_{xy} - \frac{1}{2}y u^2 \right) + D_z \left( 3t u u_{xz} - \frac{1}{2}z u^2 \right), \\ C^1 &= -\frac{1}{3}\alpha u^3 - u u_{xx} + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_y^2 + \frac{1}{2}u_z^2 + \\ &\quad D_t \left( -\alpha t u^3 - 3t u u_{xx} + \frac{3}{2}t u_x^2 + \frac{3}{2}t u_y^2 + \frac{3}{2}t u_z^2 + \frac{1}{2}x u^2 \right) + \\ &\quad D_y \left( -t u u_{ty} - t u_t u_y - \frac{1}{3}y u u_{zz} - \frac{1}{3}\alpha y u^3 - \frac{1}{3}x u_x u_y + \frac{2}{3}x u u_{xy} + \frac{1}{6}y u_y^2 + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3}y u u_{yy} - y u u_{xx} + \frac{1}{2}y u_x^2 - \frac{1}{3}z u u_{yz} - \frac{1}{3}z u_y u_z + \frac{1}{6}y u_z^2 - \frac{5}{3}u u_y \right) + \\ &\quad D_z \left( -\frac{1}{3}\alpha z u^3 - \frac{4}{3}u u_z - \frac{1}{3}z u u_{zz} - \frac{1}{3}x u_x u_z + \frac{1}{6}z u_z^2 + \frac{1}{2}z u_x^2 + \frac{1}{2}z u_y^2 + \frac{2}{3}x u u_{xz} + \right. \\ &\quad \left. - z u u_{xx} - t u_t u_z - t u u_{tz} \right), \\ C^2 &= -u u_{xy} + D_t \left( -3t u u_{xy} + \frac{1}{2}y u^2 \right) + D_z \left( \frac{2}{3}z u u_{xz} - \frac{1}{3}y u_x u_z - z u u_{xy} \right) + \\ &\quad D_x \left( t u u_{ty} + t u_t u_y + \frac{1}{3}y u u_{zz} + \frac{1}{3}\alpha y u^3 + \frac{1}{3}x u_x u_y - \frac{2}{3}x u u_{xy} - \frac{1}{6}y u_y^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}y u u_{yy} + y u u_{xx} - \frac{1}{2}y u_x^2 + \frac{1}{3}z u u_{yz} + \frac{1}{3}z u_y u_z - \frac{1}{6}y u_z^2 + \frac{5}{3}u u_y \right), \\ C^3 &= -u u_{xz} + D_t \left( -3t u u_{xz} + \frac{1}{2}z u^2 \right) + D_y \left( -\frac{2}{3}y u u_{xz} + \frac{1}{3}y u_x u_z + z u u_{xy} \right) + \end{aligned}$$

$$D_x \left( \frac{1}{3} \alpha z u^3 + \frac{4}{3} u u_z + \frac{1}{3} z u u_{zz} + \frac{1}{3} x u_x u_z - \frac{1}{6} z u_z^2 - \frac{1}{2} z u_x^2 - \frac{1}{2} z u_y^2 - \frac{2}{3} x u u_{xz} + \right. \\ \left. + z u u_{xx} + t u_t u_z + t u u_{tz} \right).$$

Após multiplicar as componentes por  $-1$  e eliminar as divergências nulas, o vetor conservado  $C = (C^0, C^1, C^2, C^3)$  tem componentes

$$C^0 = \frac{u^2}{2}, \quad C^1 = \frac{\alpha}{3} u^3 + u u_{xx} - \frac{u_x^2}{2} - \frac{u_y^2}{2} - \frac{u_z^2}{2}, \\ C^2 = u u_{xy}, \quad C^3 = u u_{xy}$$

de maneira que teremos  $\text{Div}C = D_t C^0 + D_x C^1 + D_y C^2 + D_z C^3 = 0$  nas soluções da equação.

## 4.5 TEOREMAS DE LEIS DE CONSERVAÇÃO

Analogamente ao Capítulo 3, nesta seção apresentaremos os resultados pertinentes ao Teorema de Noether e Teorema de Ibragimov que obtivemos durante os quatro anos de trabalho. O Teorema de Noether é aplicável diretamente a apenas uma das equações que estudamos, sendo que para o restante utilizamos o Teorema de Ibragimov.

### 4.5.1 Classe de equações diferenciais ordinárias autônomas de ordem par

Considere a equação diferencial ordinária de ordem  $2n$

$$y^{(2n)} + \lambda y^{\frac{1+2n}{1-2n}} = 0, \quad \lambda \neq 0. \quad (4.32)$$

Nos Exemplos 4.3.1-4.3.4 consideramos a equação (4.32) e encontramos uma Lagrangeana e seus operadores de Noether, mostramos que suas simetrias são simetrias de Noether e finalmente utilizamos o Teorema de Noether para encontrar primeiras integrais de (4.32). Tais resultados podem ser resumidos nos teoremas a seguir, veja [31].

**Teorema 4.5.1.** O gerador de simetria

$$D_p = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2n}{1-p} y \frac{\partial}{\partial y}$$

é uma simetria de Noether da equação

$$y^{(2n)} + \lambda y^p = 0, \quad \lambda \neq 0, \quad p \neq 0, 1,$$

se, e somente se,

$$p = \frac{1 + 2n}{1 - 2n}. \quad (4.33)$$

A demonstração do Teorema 4.5.1 foi feita no Exemplo 4.3.3, mas pode ser encontrada em [31], *Subsection 6.1* (página 1753).

**Teorema 4.5.2.** Todos os geradores de simetria da equação (4.32) com  $p$  dado como em (4.33) são simetrias de Noether.

No Exemplo 4.3.4 apenas indicamos a demonstração. Em [31], o Teorema 4.5.2 é referido como *Theorem 2.3* (página 1744) e sua demonstração pode ser encontrada na *Subsection 6.2* (página 1753). Por fim, o teorema que tem sua demonstração na *Section 7* de [31].

**Teorema 4.5.3.** As primeiras integrais associadas às simetrias de Noether da equação (4.32) são dadas por

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(y^{(n)})^2}{2} + (-1)^n \lambda \frac{1 - 2n}{2} y^{\frac{2}{1-2n}} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} y^{(j+1)} y^{(2n-j-1)}, \\ I_2 &= x \frac{(y^{(n)})^2}{2} + (-1)^n \lambda x \frac{(1 - 2n)}{2} y^{\frac{2}{1-2n}} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} \left( \frac{2n - 2j - 1}{2} y^{(j)} - x y^{(j+1)} \right) y^{(2n-j-1)}, \\ I_3 &= \frac{x^2}{2} (y^{(n)})^2 + (-1)^n \lambda x^2 \frac{1 - 2n}{2} y^{\frac{2}{1-2n}} - \frac{n^2}{2} (y^{(n-1)})^2 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} \left[ j(2n - j) y^{(j-1)} + (2n - 2j - 1) x y^{(j)} - x^2 y^{(j+1)} \right] y^{(2n-j-1)}. \end{aligned}$$

#### 4.5.2 Uma classe de equações que unifica as equações de Camassa-Holm e Novikov

Nesta seção consideraremos a equação

$$u_t - u_{txx} + au^p u_x - bu^{p-1} u_x u_{xx} - cu^p u_{xxx} = 0, \quad (4.34)$$

onde  $a, b, c$  e  $p$  são constantes reais arbitrárias.

Antes de enunciar nossos resultados, é importante dizer que a maneira com que eles foram exibidos em [7] aparentemente não tem relação com o que enunciaremos nesta seção. Isso acontece porque nesta tese não consideramos os métodos desenvolvidos por Bluman e Anco [4, 5, 6] para se encontrar leis de conservação, as quais nos leva ao conceito de multiplicadores, conceito este equivalente ao de substituição proposto por Ibragimov.

Uma substituição  $v$  de ordem 0 será uma substituição  $v = \mu(x, t, u)$  que torna a equação (4.34) não-linearmente auto-adjunta. De maneira análoga, uma substituição de ordem  $k$  será uma substituição  $v = \mu(x, t, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)})$  que faz com que a equação (4.34) seja não-linearmente auto-adjunta.

Temos o seguinte resultado, veja [7], *Proposition 2.1* (página 5).

**Teorema 4.5.4.** (i) A equação (4.34) admite substituições  $v$  de ordem 0 nos seguintes casos:

- (a) Se  $p = 1$  ou  $b = pc$ , temos  $v = 1$ ;
- (b) Se  $b = (p + 1)c$ , então  $v = u$ ;
- (c) Se  $p = 1$ ,  $b = 3c$  e  $c \neq 0$ , temos  $v = e^{\pm\sqrt{a/c}x}$ ;
- (d) Se  $p = 1$ ,  $a = c$  e  $b = 3c$ , então  $v = f(t)e^{\pm x}$ ;
- (e) Se  $p = 1$ ,  $a = c$  e  $b = 2c$ , temos  $v = x - ctu$ ;

(ii) Para qualquer  $p \neq 0$  e qualquer  $(a, b, c) \neq 0$ , a equação (4.34) não admite substituições  $v$  de ordem 1;

(iii) A equação (4.34) admite substituições de ordem 2 da forma  $v = \mu(u, u_x, u_{xx})$  nos seguintes casos:

- (a) Se  $q = \frac{pc}{b} \neq 1$  e  $a = b + c$ , então temos  $v = (u - u_{xx})^{q-1}$ ;
- (b) Se  $b = \frac{1}{2}pc$ ,  $c \neq 0$  e  $p \neq -2$ , então temos  $v = 2au - (p + 2)cu_{xx}$ .

Quando combinamos os geradores de simetria da equação (4.34) com suas substituições, conseguimos encontrar as classes de equivalência dos vetores conservados não-triviais  $C = (C^0, C^1)$  relacionadas às substituições do Teorema 4.5.4.

**Teorema 4.5.5.** (i) Os vetores conservados locais não-triviais admitidos por (4.34) relacionados aos geradores de simetria e substituições de ordem 0 são, a menos de divergências nulas,

(a) Se  $p = 1$  ou  $b = p$ , obtemos

$$C_1 = \left( u, \frac{a}{p+1} u^{p+1} + \frac{1}{2}(pc - b)u_x^2 - cu^p u_{xx} + u_{tx} \right);$$

(b) Se  $p = 1$ ,  $b = 3c$  e  $c \neq 0$ , então

$$C_2 = \left( (c - a)e^{\pm\sqrt{a/cx}} u, e^{\pm\sqrt{a/cx}} (\pm\sqrt{ac}(u_t + cuu_x) - cu_{tx} - c^2(u_x^2 + uu_{xx})) \right);$$

(c) Se  $p = 1$ ,  $a = c$  e  $b = 3c$ , então

$$C_3 = \left( 0, f(t)e^{\pm x} (\pm(u_t + cuu_x) - u_{tx} - c(u_x^2 + uu_{xx})) \right);$$

(d) Se  $b = (p + 1)c$ , então

$$C_4 = \left( \frac{1}{2}(u^2 + u_x^2), \left( \frac{a}{p+2} u - cu_{xx} \right) u^{p+1} - uu_{tx} \right);$$

(e) Se  $p = 1$ ,  $a = c$  e  $b = 2c$ , temos

$$C_5 = \left( -\frac{1}{2}ct(u^2 + u_x^2) + xu, \right. \\ \left. (ctu - x)(u_{tx} + cuu_{xx}) + u_t - \frac{1}{3}c^2tu^3 + \frac{1}{2}cx(u^2 - u_x^2 + 2uu_x) \right);$$

(ii) Os vetores conservados locais não-triviais admitidos por (4.34) relacionados aos geradores de simetria e substituições de ordem 2 da forma  $v = \mu(u, u_x u_{xx})$  são, a menos de divergências nulas,

(a) Se  $a = b + c$ ,  $b \neq pc$  e  $c \neq 0$ , então

$$C_6 = \left( (u - u_{xx})^{pc/b}, cu^p(u - u_{xx})^{pc/b} \right);$$

(b) Se  $b = \frac{1}{2}pc$  e  $c \neq 0$ , então

$$C_7 = \left( au^2 + (a + b + c)u_x^2 + (b + c)u_{xx}^2, \right. \\ \left. \frac{2}{p+2}(au - (b + c)u_{xx})^2 u^p - 2auu_{tx} - 2(b + c)u_t u_x \right).$$

Em todos os vetores conservados, todo termo da forma  $a_1^{-1}u^{a_1}$  deve ser substituído por  $\ln|u|$  se  $a_1 = 0$ .

## 4.5.3 Equação de Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov

Em todos os exemplos da Seção 4.4 consideramos a equação de Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov

$$u_t + \alpha uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} = 0. \quad (4.35)$$

Como não podemos aplicar diretamente o Teorema de Noether, mostramos que, no caso de substituições  $v = \mu(x, y, z, t, u)$ , a equação (4.35) é não-linearmente auto-adjunta se, e somente se,  $v = a_1(\alpha tu - x) + a_2u + h(y, z)$ , onde  $h$  é uma função arbitrária e  $a_1, a_2$  são constantes de integração. Quando consideramos os geradores de simetria de (4.35) e combinamos o Teorema de Ibragimov com o Teorema de Noether, temos o seguinte resultado.

**Teorema 4.5.6.** As únicas classes de equivalência de vetores conservados locais não-triviais  $C = (C^0, C^1, C^2, C^3)$  associadas às simetrias de Lie da equação (4.35) e substituições da forma  $v = a_1(tu - x) + a_2u + h(y, z)$  são

$$C_1 = \left( u, \frac{1}{2}\alpha u^2 + u_{xx}, u_{xy}, u_{xz} \right),$$

$$C_2 = \left( \frac{1}{2}u^2, \frac{1}{3}\alpha u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_y^2 - \frac{1}{2}u_z^2, uu_{xy}, uu_{xz} \right).$$

# 5

## O PROBLEMA INVERSO

Desde o trabalho de Korteweg e de Vries [69], no qual uma equação evolutiva de terceira ordem foi derivada como um modelo de águas rasas, um enorme número de artigos surgiu na literatura modelando tal fenômeno ou discutindo suas propriedades. Durante os anos 60 uma sequência de artigos [51, 52, 73, 83, 84, 100] deduziu uma série de propriedades da equação de Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t = u_{xxx} + \alpha uu_x, \quad (5.1)$$

onde  $\alpha$  é uma constante usualmente tomada como 1 ou 6, propriedades estas que foram formalizadas em momentos posteriores e hoje constituem o que chamamos de teoria de equações integráveis.

Apesar de ter propriedades bastante versáteis, alguns autores questionaram a eficácia da equação de KdV enquanto modelo de águas rasas. Em [8], Benjamin, Bona e Mahony deduziram a equação de Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

$$u_t = u_{txx} + uu_x \quad (5.2)$$

para ondas moderadamente longas de amplitudes pequenas.

Entretanto, as diferenças entre as equações (5.1) e (5.2) são maiores do que o simples fato de (5.1) ser uma equação evolutiva e (5.2) não o ser. Em [8] os autores encontraram três vetores conservados para (5.2) e Olver em [89] mostrou que tais quantidades conservadas eram as únicas existentes para tal equação. Este fato evidencia uma diferença dramática entre (5.1) e (5.2), pois (5.1) admite um número infinito de leis de conservação [83].

Mais recentemente, Camassa e Holm [14] utilizaram métodos Hamiltonianos para derivar a hoje conhecida equação de Camassa-Holm (CH)

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \quad (5.3)$$

A equação (5.3) surgiu como um novo modelo de águas rasas e possui propriedades interessantes como a admissibilidade de certas ondas contínuas (e apenas contínuas),

chamadas por eles de solução *peakon*, como solução que interagem entre si sem mudança em suas formas e velocidades<sup>1</sup>. A equação de CH (5.3) possui outras propriedades interessantes: existência de pares de Lax [15], formulação bi-Hamiltoniana [14, 15] e, mais do que isso, o espaço vetorial quociente CL dos vetores conservados da equação (5.3) tem dimensão infinita [14].

Desde então, tem sido de grande interesse a pesquisa acerca de equações diferenciais parciais polinomiais de terceira ordem não-evolutivas

$$u_t - u_{txx} = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$$

tendo propriedades em comum com a equação de CH. Dentre as diversas equações deduzidas no período, veja [34, 35, 38, 40, 91, 93], a que atraiu nosso maior interesse foi a equação

$$u_t - u_{txx} + 4u^2u_x = 3uu_xu_{xx} + u^2u_{xxx}, \quad (5.4)$$

chamada de equação de Novikov, deduzida por V. Novikov em [86] como uma generalização teórica da CH que, dentre as diversas propriedades em comum com a CH [56], possui infinitas leis de conservação e soluções *peakon*.

Desde o desenvolvimento dos conceitos de auto-adjunticidade [60, 65], pesquisadores têm se mostrado interessados no problema de encontrar famílias de equações possuindo alguma propriedade de auto-adjunticidade [41, 42, 43, 44, 46, 50, 102]. Além disso, pode-se observar que um número considerável de equações com infinitas leis de conservação são também estritamente auto-adjuntas. Ibragimov em [67] mostrou que a CH é estritamente auto-adjunta e Bozhkov, Freire e Ibragimov em [12] provaram o mesmo resultado para a equação de Novikov. Em particular, com respeito a (5.3) e (5.4), existem trabalhos [12, 18, 67] mostrando que infinitas leis de conservação e auto-adjunticidade estrita não são, do ponto de vista de simetrias, as únicas similaridades das duas equações:

1. Em [18], os autores mostraram que a CH admite um gerador de simetria da forma

$$X_1 = u \frac{\partial}{\partial u} - t \frac{\partial}{\partial t},$$

enquanto em [12] os autores encontraram que

$$X_2 = u \frac{\partial}{\partial u} - 2t \frac{\partial}{\partial t}$$

<sup>1</sup> Tais soluções, num contexto bastante específico que não será abordado nesta tese, são chamadas de *solitons*, veja [16].

é um gerador de simetria da equação de Novikov. Podemos, desta forma, escrever os campos  $X_1$  e  $X_2$  como casos particulares do campo vetorial

$$X_b = u \frac{\partial}{\partial u} - bt \frac{\partial}{\partial t}, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

2. Combinando o item 1 com a auto-adjunticidade das equações, conseguimos mostrar, utilizando os teoremas de Ibragimov e de Noether, que a norma de Sobolev [13]

$$H_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2) dx.$$

é conservada nas soluções com decaimento no infinito de ambas equações (5.3) e (5.4).

Passamos então a tentar entender a relação entre auto-adjunticidade estrita, os itens 1 e 2 e a existência de infinitas leis de conservação. Durante os últimos quatro anos, nossos trabalhos sugeriram a conjectura de que a invariância pela dilatação do gerador (5.5) é de extrema importância, mas ainda não temos respostas conclusivas.

Motivados por estas observações, fomos levados a determinar condições necessárias e suficientes para que a equação

$$F := u_t + \varepsilon u_{txx} + f(u)u_x + g(u)u_x u_{xx} + h(u)u_{xxx} = 0, \quad (5.6)$$

que generaliza as equações de CH e Novikov, fosse estritamente auto-adjunta e admitisse o operador (5.5) como gerador de simetria. Estas duas condições, juntamente com o Teorema de Ibragimov, nos dão como quantidade conservada o funcional

$$H_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 - \varepsilon u_x^2) dx,$$

que nada mais é do que a conservação da norma de Sobolev se  $\varepsilon < 0$ .

Este problema inverso permitiu que nos deparássemos com a possibilidade da existência de infinitas leis de conservação para casos da equação (5.6) e, desta forma, passamos a lidar com a teoria de simetrias generalizadas (veja Capítulo 5 de [87] ou [90]) e outras estruturas que levam a questionamentos mais profundos a respeito de diversas propriedades de equações diferenciais. Foi assim que mudamos o rumo das nossas pesquisas e passamos a estudar soluções *peakon* e integrabilidade de equações, tópicos que estão profundamente ligados com simetrias de equações. Neste capítulo apresentaremos a dedução detalhada, utilizando as ferramentas dos capítulos anteriores, da equação que nos levou a tal mudança. Os resultados exibidos nas próximas seções foram deduzidos primeiramente em [30] e discutidos mais tarde em [7, 25, 28].

## 5.1 SUBFAMÍLIA INVARIANTE POR DILATAÇÕES

Consideremos a equação (5.6) e observemos que a terceira prolongação do campo (5.5) é dada por

$$X^{(3)} = u \frac{\partial}{\partial u} - bt \frac{\partial}{\partial t} + (b+1)u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + (b+1)u_{txx} \frac{\partial}{\partial u_{txx}}.$$

Um simples cálculo mostra que

$$\begin{aligned} X^{(3)}(u_t + \varepsilon u_{txx} + f(u)u_x + g(u)u_x u_{xx} + h(u)u_{xxx}) = \\ (b+1)(u_t + \varepsilon u_{txx}) + (uf)'u_x + [(ug)' + g]u_x u_{xx} + (uh)'u_{xxx}. \end{aligned}$$

A condição de invariância (3.5) nos diz que

$$\begin{aligned} (b+1)(u_t + \varepsilon u_{txx}) + (uf)'u_x + [(ug)' + g]u_x u_{xx} + (uh)'u_{xxx} = \\ \lambda(u_t + \varepsilon u_{txx} + f(u)u_x + g(u)u_x u_{xx} + h(u)u_{xxx}). \end{aligned}$$

Dos coeficientes de  $u_t$ ,  $u_x$ ,  $u_x u_{xx}$  and  $u_{xxx}$  obtemos, respectivamente,

$$\lambda = b+1, \quad (uf)' = \lambda f, \quad (ug)' + g = \lambda g, \quad (uh)' = \lambda h,$$

o que nos diz que  $f(u) = \gamma u^b$ ,  $g(u) = \sigma u^{b-1}$  e  $h(u) = \delta u^b$ , onde  $\gamma$ ,  $\sigma$  and  $\delta$  são constantes arbitrárias. Desta forma concluímos que a única subfamília invariante pela dilatação de gerador (5.5) é dada por

$$u_t + \varepsilon u_{txx} + \gamma u^b u_x + \sigma u^{b-1} u_x u_{xx} + \delta u^b u_{xxx} = 0. \quad (5.7)$$

## 5.2 SUBFAMÍLIA ESTRITAMENTE AUTO-ADJUNTA

Consideremos novamente a equação (5.6). Queremos agora obter condições para que ela seja estritamente auto-adjunta, ou seja, não-linearmente auto-ajunta com substituição  $v = u$ . Como primeiro passo, a equação adjunta de (5.6) é dada por

$$\begin{aligned} F^* = v(f'(u)u_x + g'(u)u_x u_{xx} + h'(u)u_{xxx}) - D_t(v) - D_x[v(f(u) + g(u)u_{xx})] \\ + D_x^2(vg(u)u_x) - D_x^2 D_t(\varepsilon v) - D_x^3(vh(u)) = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Depois de calcular os termos de (5.8) envolvendo as derivadas totais, a equação adjunta é dada explicitamente por

$$\begin{aligned} F^* &= v(g''(u)u_x^3 + 3g'(u)u_xu_{xx} - h'''(u)u_x^3 - 3h''(u)u_xu_{xx}) \\ &\quad + v_x(-f(u) - g(u)u_{xx} + 2g'(u)u_x^2 + 2g(u)u_{xx} - 3h''(u)u_x^2 - 3h'(u)u_{xx}) \quad (5.9) \\ &\quad - v_t - \varepsilon v_{txx} - h(u)v_{xxx} + v_{xx}(g(u)u_x - 3h'(u)u_x) = 0. \end{aligned}$$

Fazendo  $v = u$  em (5.9) e considerando a condição  $F^* \Big|_{v=u} = \lambda F$ , temos

$$\begin{aligned} &-u_t - \varepsilon u_{txx} - h(u)u_{xxx} - f(u)u_x + u_x^3(g''(u) - uh'''(u) + 2g'(u) - 3h''(u)) \\ &\quad + u_xu_{xx}(3ug'(u) - 3uh''(u) - 6h'(u) + 2g(u)) = \\ &= \lambda u_t + \lambda \varepsilon u_{txx} + \lambda f(u)u_x + \lambda g(u)u_xu_{xx} + \lambda h(u)u_{xxx}. \end{aligned}$$

Do coeficiente  $u_t$ , temos que  $\lambda = -1$ . De  $u_{txx}$ ,  $u_x$ ,  $u_{xxx}$ ,  $u_x^3$ ,  $u_xu_{xx}$ , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} -\varepsilon &= \lambda \varepsilon, \quad -f(u) = \lambda f(u), \quad -h(u) = \lambda h(u), \\ (ug)'' - (uh)''' &= 0, \quad (ug)' - (uh)'' = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Observemos agora que as três primeiras condições não apresentam qualquer informação nova. Já a quarta condição é consequência diferencial da última. Integrando uma vez o coeficiente de  $u_xu_{xx}$ , obtemos a condição

$$g(u) = \frac{(uh)'}{u} + \frac{c}{u'}, \quad (5.11)$$

onde  $c$  é uma constante de integração.

Na Seção 5.1 mostramos que a equação (5.7) forma uma família de equações invariantes por dilatações. Queremos agora determinar condições para que essa mesma família seja estritamente auto-adjunta. Substituindo  $g(u) = \sigma u^{b-1}$  e  $h(u) = \delta u^b$  em (5.11), temos

$$\sigma u^{b-1} = \delta(b+1)u^{b-1} + \frac{c}{u'}$$

cujas soluções são  $\sigma = \delta + c$  se  $b = 0$ , e  $\sigma = \delta(b+1)$ ,  $c = 0$  para  $b \neq 0$ . Definindo  $\delta = -\beta$ , obtemos as seguintes famílias de equações estritamente auto-adjuntas e invariantes por dilatações:

$$u_t + \varepsilon u_{txx} + \gamma u^b u_x - \beta(b+1)u^{b-1}u_xu_{xx} - \beta u^b u_{xxx} = 0, \quad (5.12)$$

se  $b \neq 0$ , e

$$u_t + \varepsilon u_{txx} + \gamma u_x + \sigma \frac{u_x u_{xx}}{u} + \delta u_{xxx} = 0, \quad (5.13)$$

para  $b = 0$ .

Nas próximas seções discutiremos algumas propriedades interessantes que estudamos durante os últimos 18 meses referentes às equações (5.12) e (5.13). Apesar de tentarmos conceituar alguns objetos que não estão no escopo desta tese, não daremos tantos detalhes técnicos e focaremos mais nas ideias intuitivas.

### 5.3 O CASO $b \neq 0$ E SUAS CONSEQUÊNCIAS

Antes de prosseguirmos, relembremos que a equação

$$u_t + \varepsilon u_{txx} + \gamma u^b u_x - \beta(b+1)u^{b-1}u_x u_{xx} - \beta u^b u_{xxx} = 0, \quad (5.14)$$

referente ao caso  $b \neq 0$ , fora deduzida como uma família de equações estritamente auto-adjuntas e invariantes pela dilatação de gerador

$$X = u \frac{\partial}{\partial u} - bt \frac{\partial}{\partial t}$$

de tal forma que as equações de CH e Novikov fossem membros de (5.14). A equação de CH é de fato reobtida quando tomamos  $\varepsilon = -1$ ,  $\beta = -1$ ,  $b = 1$  e  $\gamma = 3$ , enquanto para Novikov escolhemos os mesmos valores de  $\varepsilon$  e  $\beta$  e  $b = 2$ ,  $\gamma = 4$ . Por essa razão, num momento inicial fomos levados a considerar apenas o caso  $b \neq 0$  representado pela equação (5.14), deixando (5.13) de lado.

Observamos então que a única informação importante sobre  $\beta$  é se ele se anula ou não. De fato,  $\beta = 0$  eliminaria o único termo de terceira ordem e perderíamos qualquer relação com as equações de CH e Novikov. Por outro lado, se  $\beta \neq 0$ , então podemos dividir a equação (5.14) por  $\beta$  e as mudanças  $t \mapsto \beta t$  e  $\gamma \mapsto \beta \gamma$  farão com que a equação seja reescrita como

$$u_t + \varepsilon u_{txx} + \gamma u^b u_x - (b+1)u^{b-1}u_x u_{xx} - u^b u_{xxx} = 0. \quad (5.15)$$

Da mesma maneira,  $\varepsilon$  apenas dirá se a equação é evolutiva ( $\varepsilon = 0$ ) ou não e, como temos  $\varepsilon = -1$  para a CH e a Novikov, escolhemos  $\varepsilon = -1$ . Outro fato interessante sobre a equação (5.15) é que a escolha  $\gamma = (b+2)$  faz com que a equação resultante

$$u_t - u_{txx} + (b+2)u^b u_x = (b+1)u^{b-1}u_x u_{xx} + u^b u_{xxx} \quad (5.16)$$

unifique as equações de CH ( $b = 1$ ) e Novikov ( $b = 2$ ) com um único parâmetro. Inicialmente achávamos que fora simplesmente sorte poder escolher o parâmetro  $\gamma$  de forma a obtermos a equação (5.15), porém a existência de soluções especiais, assunto este que abordaremos no próximo capítulo, impõe a condição  $\gamma = b + 2$  de maneira natural.

Como dito no início do capítulo, as equações de CH e Novikov possuem uma propriedade interessante em termos de leis de conservação: existência de um número infinito delas. Naturalmente passamos a nos perguntar se a família herdava tal propriedade, mas o problema que encontramos foi como determinar uma resposta para a pergunta.

Essa linha de questionamento inevitavelmente leva ao estudo de propriedades de integrabilidade de EDPs e, quando falamos em integrabilidade, podemos considerar uma enormidade de definições teoricamente distintas mas que na prática parecem se conectar. Porém, é quase unânime que a integrabilidade no sentido da existência de infinitas leis de conservação começou com a equação de KdV, veja [80] para maiores informações históricas sobre integrabilidade. Por integrabilidade de uma EDP podemos nos referir a:

1. solubilidade da equação pelo método de *inverse scattering transform* [1, 2, 37, 75];
2. existência de infinitas leis de conservação [80];
3. operador formal de recursão: existência de operadores que recursivamente levam simetrias em simetrias gerando, assim, infinitas simetrias. Tais simetrias não serão mais de Lie e envolverão derivadas de  $u$  (veja [87], Capítulo 6, ou [81], *Definition* 21, página 39);
4. sistema bi-Hamiltoniano: escrevemos a equação como sistema Hamiltoniano de duas maneiras distintas porém compatíveis (veja [87], Capítulos 6 e 7);
5. par de Lax: escrevemos a equação como compatibilidade de dois determinados operadores [74, 80].

Tais conceitos não são equivalentes, mas na prática se vê que a maior parte das equações que possuem uma destas propriedades admitem todas [14, 38, 34, 56, 86, 93]. Porém, existem resultados que relacionam alguns deles. Por exemplo, sabe-se que uma equação somente admitirá infinitas leis de conservação se existir um operador formal de recursão (veja [80], *Theorem* 32, página 43). Além disso, todo sistema bi-Hamiltoniano

possui infinitas densidades conservadas (veja *Theorem 7.24*, página 455, de [87]) e toda equação de duas variáveis independentes que possui um par de Lax também terá infinitas leis de conservação (veja [80], página 6). Nesta tese, por integrável nos referimos a equações que possuem hierarquias infinitas de leis de conservação.

Sabíamos de antemão que as equações de CH e Novikov eram membros da equação (5.16) que possuíam todas as propriedades mencionadas. Queríamos encontrar outros membros que possivelmente fossem integráveis em algum sentido e, para isso, passamos pelos operadores formais de recursão.

O chamado *perturbative symmetry approach*, veja [82], é composto de métodos algébricos e representação simbólica de equações capazes de dizer se um operador formal de recursão existe baseados nos coeficientes polinomiais de uma série construída a partir da equação em questão. Quando aplicamos o método à equação (5.16), encontramos que a equação admitiria um operador formal de recursão apenas para os casos  $b = 1$  e  $b = 2$ . Ou seja, a CH e a Novikov são os únicos membros integráveis da família (5.16).

Decidimos então olhar a equação (5.16) em termos de outra propriedade presente nas equações de CH e Novikov: a existência de soluções especiais que são apenas contínuas. Este tópico, porém, será tratado no próximo capítulo.

## 5.4 CASO $b = 0$ : UMA EQUAÇÃO EVOLUTIVA COM PROPRIEDADES ESPECIAIS

Inicialmente, a equação

$$u_t + \varepsilon u_{txx} + \gamma u_x + \sigma \frac{u_x u_{xx}}{u} + \delta u_{xxx} = 0 \quad (5.17)$$

não atraiu nossa atenção por não ter qualquer relação com as equações de CH e Novikov e, desta forma, restringimos nossos estudos à equação da seção anterior. Porém, recentemente nos deparamos com a equação

$$u_t + 2a \frac{u_x u_{xx}}{u} = \varepsilon a u_{xxx}, \quad (5.18)$$

onde  $a$  e  $\varepsilon$  são constantes reais, e apenas após a obtenção de boa parte dos nossos resultados [33], percebemos que (5.18) era caso particular de (5.17) fazendo  $\varepsilon = \gamma = 0$ . Recentemente retomamos a equação (5.17) com  $\varepsilon \neq 0$ , mas não apresentamos os resultados nesta tese. O leitor interessado pode consultar [24].

A equação (5.18) surgiu em [99] quando os autores tentavam melhorar a efetividade de um programa genético que, ao receber uma função, responderia com a equação mais “simples” possível que admitisse tal função como solução. Para testar o programa, eles forneceram a função

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - x_0) \right),$$

onde  $x_0$  representa uma constante arbitrária, que é uma conhecida solução da equação de KdV

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

e, surpreendentemente, receberam como resposta (5.18) com  $a = \epsilon = 1$ . Os autores em [99] obtiveram diversos resultados e fizeram o seguinte comentário:

*Nós não encontramos valor algum de  $\epsilon$  no qual uma transformação reduz a equação (5.18) à equação de KdV.*

Uma vez que a equação (5.18) fora deduzida a partir de uma solução em comum com a KdV, tal observação é, no mínimo, intrigante. Seria a solução em comum apenas uma coincidência? De fato, realmente é apenas uma coincidência visto que conseguimos relacionar a equação (5.18) com a equação de KdV num caso diferente de  $a = \epsilon = 1$ , como será discutido a seguir. Mas antes de tal descoberta, obtivemos indicativos de quais escolhas de  $a$  e  $\epsilon$  seriam as mais interessantes.

Antes, porém, rapidamente discutiremos alguns conceitos. Um campo vetorial generalizado de duas variáveis independentes e uma dependente é campo da forma

$$\mathbf{v} = \xi[u] \frac{\partial}{\partial x} + \tau[u] \frac{\partial}{\partial t} + \phi[u] \frac{\partial}{\partial u},$$

onde  $\xi, \tau, \phi$  são funções que dependem de  $x, t, u$  e derivadas de  $u$ . A prolongação de  $\mathbf{v}$  é encontrada da mesma maneira que para geradores de simetria de Lie, isto é,

$$\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v} + \sum_{|\alpha|=1}^k \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha},$$

com  $\phi_\alpha = D_\alpha(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{\alpha,x} + \tau u_{\alpha,t}$ . O campo  $\mathbf{v}$  será uma simetria generalizada de uma equação diferencial

$$\Delta(x, t, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0$$

se, e somente se,

$$\mathbf{v}^{(k)}(\Delta) = 0 \quad \text{quando} \quad \Delta = 0,$$

veja [87], *Definition 5.2*, página 290. Obviamente, todo gerador de simetria de Lie de uma equação é uma simetria generalizada da mesma.

Dado um campo generalizado  $\mathbf{v}$ , considere a quantidade  $Q = \phi - \xi u_x - \tau u_t$ , chamada de característica. O campo

$$\mathbf{v}_Q = Q \frac{\partial}{\partial u}$$

é chamado de campo evolutivo relacionado ao campo generalizado  $\mathbf{v}$ . De acordo com a *Proposition 5.5* (página 291) de [87], o campo generalizado  $\mathbf{v}$  é uma simetria generalizada de  $\Delta = 0$  se, e somente se, seu representante evolutivo  $\mathbf{v}_Q$  também o é.

Um operador de recursão de  $\Delta = 0$  é um operador linear  $\mathcal{R} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  com a propriedade de que se  $\mathbf{v}_Q$  é uma simetria de  $\Delta = 0$ , então  $\mathbf{v}_{\tilde{Q}}$  também o é, onde  $\tilde{Q} = \mathcal{R}Q$ . Em outras palavras, um operador de recursão é um operador que leva simetrias em simetrias.

**Exemplo 5.4.1.** Como um exemplo para ilustrar o conceito de operador de recursão, consideremos a equação de Airy  $u_t = u_{xxx}$  e o operador  $\mathcal{R} = D_x$ . Se  $\mathbf{v}_Q$  é um campo evolutivo, então ele será simetria generalizada da equação de Airy se, e somente se,

$$\mathbf{v}_Q^{(3)}(u_t - u_{xxx}) = D_t Q - D_x^3 Q = 0$$

nas soluções da equação. Considere agora o campo evolutivo  $\mathbf{v}_{\tilde{Q}}$ , onde  $\tilde{Q} = \mathcal{R}Q = D_x Q$ . Para que  $\mathcal{R}$  seja um operador de recursão, precisamos mostrar que  $\mathbf{v}_{\tilde{Q}}$  é uma nova simetria. Observe que

$$\mathbf{v}_{\tilde{Q}}^{(3)}(u_t - u_{xxx}) = D_t \tilde{Q} - D_x^3 \tilde{Q} = D_t D_x Q - D_x^4 Q = D_x (D_t Q - D_x^3 Q) = 0$$

nas soluções da equação. Portanto,  $\mathbf{v}_{\tilde{Q}}$  é uma simetria generalizada da equação de Airy e, conseqüentemente,  $\mathcal{R} = D_x$  é um operador de recursão.

No caso do gerador de simetria  $X = \partial/\partial x$ , cujo representante evolutivo é dado por  $\mathbf{v}_Q = u_x \partial/\partial u$ , conseguiremos recursivamente encontrar geradores de simetria  $\mathbf{v}_Q^{n+1}$  dados por

$$\mathbf{v}_Q^{n+1} = \mathcal{R}^n Q \frac{\partial}{\partial u}, \quad n \in \mathbb{N},$$

onde  $\mathcal{R}^n Q = \mathcal{R} \mathcal{R}^{n-1} Q = u_x^{n+1}$  e  $u_x^{n+1}$  representa a derivada de  $u$  com relação a  $x$  exatas  $n + 1$  vezes.

Acerca de operadores de recursão, impusemos que a família (5.18) satisfizesse as condições obtidas em [92, 95] para a existência de operadores de recursão (note que este é outro problema inverso!). Com isso, provamos o seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada na Seção 4.1 de [33] (página 9):

**Teorema 5.4.1.** A equação (5.18), com  $\epsilon a = 1$ , admite os operadores de recursão

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^- &= D_x^2 + 2u^{-1}u_x D_x + u^{-1}u_{xx}, \\ \mathcal{R}^+ &= D_x^2 - 2u^{-1}u_x D_x - u^{-1}u_{xx} + u^{-2}u_x + u_x D_x^{-1} \left( u^{-2}u_{xx} - u^{-3}u_x^2 \right),\end{aligned}$$

para  $\epsilon = -2/3$  e  $\epsilon = 2/3$ , respectivamente.

Foi possível mostrar também que, para o caso  $\epsilon = -2/3$ , a substituição  $\mu = u^3$  faz com que a equação

$$u_t - 3 \frac{u_x u_{xx}}{u} - u_{xxx} = 0 \quad (5.19)$$

seja não-linearmente auto-adjunta. Quando consideramos tal substituição e suas infinitas simetrias obtidas recursivamente pelo operador de recursão, fomos capazes de obter infinitas leis de equação para equação (5.19), mostrando que, de fato, a equação é integrável.

Porém, o caso mais interessante se deu no caso simétrico  $\epsilon = 2/3$  quando conseguimos responder o questionamento levantado pelos autores de [99]. Entretanto, antes de dizer a razão do esclarecimento, necessitamos de uma definição.

**Definição 5.4.1.** Se existem operadores auto-adjunto  $L$  e antissimétrico  $B$  de tal maneira que o sistema

$$\begin{aligned}L\phi &= \lambda\phi, \\ \phi_t &= B\phi,\end{aligned}$$

seja resolvido para todo parâmetro espectral  $\lambda$  de tal forma que a condição de compatibilidade (equação de Lax)  $L_t = [B, L]$ , no qual  $[B, L] = BL - LB$ , seja obtida nas soluções da uma equação evolutiva  $u_t - F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = 0$ , então dizemos que  $L$  e  $B$  formam um par de Lax para a equação.

Como mencionado anteriormente, pares de Lax de equações (1+1)-dimensionais são ferramentas importantes pois implicam na existência de infinitas leis de conservação (veja [80]).

Querendo relacionar a equação (5.18) com a KdV, decidimos procurar por pares de Lax para os casos  $\epsilon = \pm 2/3$ . Focamos nestes casos porque, sendo os únicos admitindo um operador de recursão, eram os únicos candidatos a terem infinitas leis de conservação.

Para o caso negativo, não encontramos um par de Lax, porém encontramos diversas leis de conservação de ordem mais alta nas derivadas de  $u$ . Além disso, se definirmos  $\rho := u^2$ , então transformamos a equação

$$u_t - 3 \frac{u_x u_{xx}}{u} - u_{xxx} = 0$$

na equação linear  $\rho_t = \rho_{xxx}$ . Já o caso positivo era mais intrigante, pois por mais que estivéssemos próximos de uma resposta positiva, não conseguíamos resolver o sistema da Definição 5.4.1. Nossa tentativa foi, seguindo os passos de Lax [74], considerar operadores

$$L = AD_x^2 + \alpha[u], \quad B = BD_x^3 + \gamma[u]D_x - \frac{1}{2}D_x(\gamma[u]),$$

com constantes  $A$  e  $B$ , e era uma missão árdua determinar as funções  $\alpha[u]$  e  $\gamma[u]$ , que a princípio dependiam de  $u$  e suas derivadas, de tal forma que  $L$  e  $B$  formassem um par de Lax. O trabalho não parecia promissor, até que um dia recebi uma ligação do meu orientador dizendo para tentar  $\alpha = u_{xx}/u$  e  $\gamma = -6\alpha$  e as escolhas funcionaram quase como mágica!

O “truque” foi observar uma relação, via transformação  $u = e^{D_x^{-1}v}$  já conhecida de [99], entre soluções da equação

$$u_t + 3 \frac{u_x u_{xx}}{u} - u_{xxx} = 0 \tag{5.20}$$

que estudávamos e soluções da chamada equação de KdV modificada (mKdV)

$$v_t + 6v^2 v_x - v_{xxx} = 0,$$

que por sua vez conecta suas soluções com soluções da equação de KdV

$$w_t + 6ww_x - w_{xxx} = 0 \tag{5.21}$$

por meio da transformação  $w = v^2 + v_x$ . Daí, invertemos a transformação  $u = e^{D_x^{-1}v}$  de forma a obter  $v = u_x/u$ . A relação entre a equação (5.20) e a KdV então se dá por

$$w = v^2 + v_x = \frac{u_x^2}{u^2} + \frac{u_{xx}}{u} - \frac{u_x^2}{u^2} = \frac{u_{xx}}{u}.$$

A partir daí, o trabalho foi considerar o par de Lax de (5.21), dado por

$$L = -D_x^2 + w, \quad B = 4D_x^3 - 6wD_x - 3w_x,$$

e fazer  $w = u_{xx}/u$ , de maneira a obter

$$L = -D_x^2 + \frac{u_{xx}}{u}, \quad B = 4D_x^3 - 6\frac{u_{xx}}{u}D_x - 3\left(\frac{u_{xxx}}{u} - \frac{u_x u_{xx}}{u^2}\right)$$

como par de Lax para a equação (5.20). Mais detalhes com os cálculos podem ser encontrados em [33]. Apesar de termos mostrado, como corolário, que transformamos a equação (5.20) na KdV por meio da transformação  $w$ , talvez a consequência mais importante é dada pela possibilidade de obtenção de soluções de (5.20) a partir de soluções conhecidas da equação de KdV.

Se  $w = u_{xx}/u$  transforma soluções da nossa equação em soluções da KdV, podemos definir um operador  $S_w = D_x^2 - w$  de tal forma que tenhamos o seguinte teorema.

**Teorema 5.4.2.** Sejam  $\mathcal{S}$  o conjunto de todas as soluções clássicas da equação de Korteweg-de Vries (5.21) e  $w \in \mathcal{S}$ . Se  $u$  pertence ao núcleo do operador  $S_w$  e é uma solução não-nula de  $u_t + 3wu_x = u_{xxx}$ , então  $u$  é uma solução da equação (5.20).

*Demonstração.* Veja Theorem 5.1 de [33] (página 13).  $\square$

Em outras palavras, dada uma solução  $w \in \mathcal{S}$ , a função  $u$  será uma solução da equação (5.20) se ela resolve o sistema linear

$$\begin{aligned} u_t + 3wu_x - u_{xxx} &= 0, \\ u_{xx} - wu &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, conseguimos relacionar soluções da famosa e já bem estabelecida equação de KdV com soluções da estranha equação (5.20). Por exemplo, se considerarmos  $w = x/6t$ , então conseguimos encontrar a solução

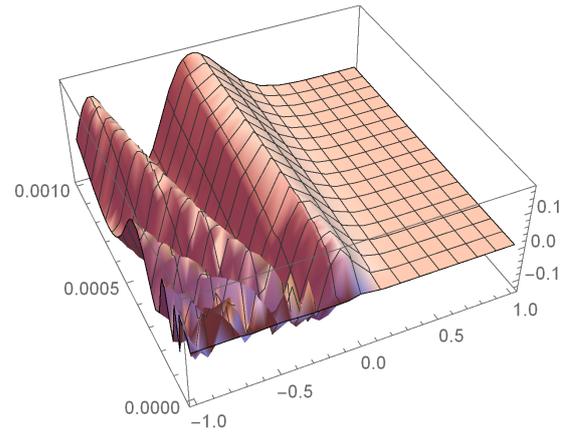
$$u(x, t) = c_1 t^{1/6} Ai\left(\frac{x}{(6t)^{1/3}}\right) + c_2 t^{1/6} Bi\left(\frac{x}{(6t)^{1/3}}\right), \quad (5.22)$$

onde  $c_1, c_2$  são constantes arbitrárias e  $Ai, Bi$  denotam as funções de Airy (veja [104], página 6).

Ao considerarmos a famosa solução secante hiperbólica ao quadrado

$$w = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x + ct)\right)$$

Figura 10: Na figura consideramos a solução (5.22) com  $c_1 = 1$  e  $c_2 = 0$  plotada em  $[-1, 1] \times [0, 0.001]$ .



da equação (5.21), obtemos a solução

$$u(x, t) = \operatorname{tgh} \left( \frac{\sqrt{c}}{2}(x + ct) \right), \quad (5.23)$$

representada pela Figura 11.

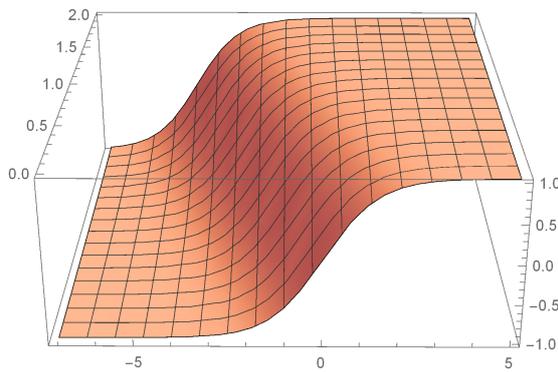


Figura 11: O gráfico representa a solução (5.23) com  $c = 2$ .

# 6

## TEORIA DE DISTRIBUIÇÕES E SOLUÇÕES PEAKON

O início histórico da teoria de distribuições (ou funções generalizadas) que hoje conhecemos se deve concomitantemente à formalização da análise e ao estudo de espaços duais.

Do ponto de vista de análise funcional, Hadamard (1903), Riesz (1909, 1910) e as três versões do hoje chamado Teorema da Representação de Riesz criaram as ferramentas para que pudéssemos rigorosamente definir distribuições. Riesz, em suas duas versões, deu a entender que existiam funcionais que podiam ser representados por funções, enquanto outros não. Porém, foi Sobolev quem, somente na década de 30, atentou-se ao uso de funcionais como funções generalizadas.

Na época, existiam dois grandes problemas no desenvolvimento da teoria de distribuições: não se tinha um profundo conhecimento sobre dualidade de espaços e tampouco havia motivação concreta.

A função  $\delta$  de Dirac tem um papel importante na motivação que faltava: ela já havia aparecido em problemas físicos como, por exemplo, no eletromagnetismo tratado por Heaviside (1893), onde a função  $\delta$  de Dirac apareceu informalmente como derivada da função degrau de Heaviside. E, após Dirac utilizá-la na formulação da mecânica quântica, engenheiros e físicos que pouco ou nada sabiam sobre análise funcional passaram a usá-la com bastante frequência.

A teoria de espaços duais, por sua vez, começou a ser estruturada com o Teorema de Hahn-Banach e a teoria de duais de espaços normados apareceu no livro de 1932 de Banach. Porém, foi na década de 40 que a teoria de distribuições tomou forma e rigor com Schwartz, quando ele desenvolveu uma teoria abstrata para o espaço dual do conjunto  $C^\infty(\mathbb{R})$  de funções infinitamente diferenciáveis. A parte mais importante do trabalho de Schwartz é que  $C^\infty(\mathbb{R})$  não é isomorfo ao seu dual e novamente a função  $\delta$  de Dirac tem um papel importante nisso.

O que faltava para que a teoria de distribuições estivesse pronta era entender como se calculava derivadas dessas funções generalizadas e foi em 1944 que Schwartz propôs

o conceito de derivada fraca. E em 1950 Schwartz publicou seu famoso livro [98] que formaliza e estrutura a teoria de distribuições. Para detalhes históricos aprofundados sobre a teoria de distribuições, veja [79].

O que buscamos neste capítulo é construir a teoria de distribuições para que possamos estudar tipos especiais de soluções (no sentido de distribuições) admitidas pela equação de CH (5.3), chamadas de soluções *peakon*.

Na próxima seção lidaremos com conceitos de análise funcional para trabalharmos com espaços  $L^p$  e  $L^1_{loc}$ . Depois discutiremos a teoria de distribuições de forma que possamos generalizar o conceito usual de derivada e definir soluções de equações que não sejam clássicas. Por fim, apresentaremos resultados originais referentes a soluções *peakon* de duas equações que estudamos nos últimos quatro anos.

## 6.1 ESPAÇOS $L^p$

Nesta seção lidaremos com espaços vetoriais de dimensão infinita que nos dão uma estrutura para generalizarmos o conceito de derivada para funções que sejam no máximo contínuas.

Suponha que  $V, W$  sejam dois espaços normados quaisquer. Denotemos as normas de  $V$  e  $W$  por  $\|\cdot\|_V$  e  $\|\cdot\|_W$ , respectivamente. Um operador linear entre  $V$  e  $W$  é uma função linear  $T : V \rightarrow W$ . Se  $W$  é um corpo, que para os nossos propósitos será  $\mathbb{R}$ , então  $T$  é chamado de funcional linear.

**Definição 6.1.1.** Consideremos um operador linear  $T : V \rightarrow W$ .

(a)  $T$  é dito ser limitado se existe uma constante  $K > 0$  tal que

$$\|Tx\|_W \leq K\|x\|_V, \quad \forall x \in V.$$

Caso contrário, o operador é dito ser ilimitado. No caso de operadores limitados  $T : V \rightarrow W$ , definimos a norma de  $T$  como

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_V=1} \|Tx\|_W. \quad (6.1)$$

(b)  $T$  é dito ser contínuo num ponto  $x_0 \in V$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|Tx - Tx_0\|_W < \varepsilon$$

sempre que  $\|x - x_0\|_V < \delta$ .

**Proposição 6.1.1.** Um operador linear  $T : V \rightarrow W$  é limitado se, e somente se, é contínuo.

*Demonstração.* Veja *Theorem 5.18* (página 99) de [57] ou *Theorem 2.7-9* (página 97) de [72].  $\square$

Os operadores lineares serão de extrema importância quando definirmos o espaço de distribuições. Na verdade, o espaço de distribuições será o espaço dual de um determinado espaço de funções com uma propriedade bastante importante. Antes de apresentarmos um exemplo sobre operadores lineares contínuos, precisamos definir o chamado espaço  $L^p$ .

Dado  $1 \leq p < \infty$ , seja  $X \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto não-vazio e defina  $L^p(X)$  como o conjunto das classes de equivalência  $[f]$  de funções integráveis contínuas  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\|[f]\|_{L^p(X)} := \left( \int_X |f(x)|^p \right)^{1/p} < \infty. \quad (6.2)$$

Se  $p = \infty$ ,  $L^\infty(X)$  denotará o conjunto das classes de equivalência das funções localmente limitadas (veja [11])  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\|[f]\|_{L^\infty(X)} := \text{ess sup } |f(x)| := \inf\{S_f(U); U \subset X \text{ e } \mu(U) = 0\} < \infty, \quad (6.3)$$

onde  $S_f(U) = \sup\{|f(x)|; x \notin U\}$ . Os conjuntos  $L^p(X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , munido das funções  $\|\cdot\|_{L^p(X)}$ , são espaços normados chamados de *espaços  $L^p(X)$* . Escreveremos  $\|\cdot\|_{L^p(X)} = \|\cdot\|_p$  pela simplicidade da notação. Para maiores detalhes, veja [11].

**Proposição 6.1.2.** (DESIGUALDADE DE HÖLDER) Sejam  $1 \leq p, q \leq \infty$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Se  $f \in L^p(X)$  e  $g \in L^q(X)$ , então  $fg \in L^1(X)$  e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

*Demonstração.* Veja [11] Teorema 1.2.1 (página 8).  $\square$

**Exemplo 6.1.1.** Fixada  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , definamos de maneira formal a função

$$(T_f g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy, \quad (6.4)$$

chamada de convolução de  $f$  por  $g$ .  $T$  é linear, pois dados  $g, h$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , temos

$$T_f(g + \lambda h)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy + \lambda \int_{\mathbb{R}} f(x-y)h(y)dy = (T_f g + \lambda T_f h)(x).$$

Queremos agora determinar a imagem de  $T_f$ .

(a) Suponha que  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Então

$$|T_f g(x)| \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| dy = \|g\|_\infty \|f\|_1 < \infty.$$

Logo,  $\|T_f g\|_\infty < \infty$  e  $T_f g \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

(b) Suponha que  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . Então, pelo Teorema de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}} |T_f g(x)| dx \leq \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty,$$

de onde segue que  $T_f g \in L^1(\mathbb{R})$  e  $T_f$  é limitado.

(c) Por fim, suponha que  $g \in L^q(\mathbb{R})$ , para algum  $q \in (1, \infty)$ . Seja  $p$  tal que  $1/p + 1/q = 1$ .

Então, pela desigualdade de Hölder,

$$|T_f g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{1/p+1/q} |g(y)| dy \leq \|f\|_1^{1/p} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)|^q dy \right)^{1/q}.$$

Assim, pelo Teorema de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}} |T_f g(x)|^q dx \leq \|f\|_1^{q/p} \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g(y)|^q dy.$$

Desta forma, encontramos que

$$\|f\|_q^q = \int_{\mathbb{R}} |T_f g(x)|^q dx \leq \|f\|_1^{q/p} \|f\|_1 \|g\|_q^q = \|f\|_1^{1-1/q} \|g\|_q^q < \infty.$$

Concluimos então que se  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , então  $T_f : L^q(\mathbb{R}) \rightarrow L^q(\mathbb{R})$  definido como em (6.4) é um operador linear contínuo para  $1 \leq q \leq \infty$ .

**Definição 6.1.2.** Um espaço de Banach é um espaço vetorial  $V$  munido de uma norma  $\|\cdot\|_V$  tal que toda sequência de Cauchy em  $V$  converge em  $V$ .

Sobre espaços  $L^p$ , temos o seguinte resultado:

**Proposição 6.1.3.** Os espaços  $L^p(X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , são espaços de Banach quando munidos das normas (6.1) e (6.2).

*Demonstração.* Veja [11], Teorema 1.2.3 (página 10) e Teorema 1.3.1 (página 13).  $\square$

O problema da definição dos espaços  $L^p$  é que estamos eliminando diversas funções que podem não se comportar bem no conjunto  $X$  inteiro, mas que possuem boas propriedades quando restritas a um compacto qualquer.

**Exemplo 6.1.2.** Um exemplo bastante simples é a função  $f(x) = 1/x$  considerada em  $X = (0, 1)$ . Se por um lado temos

$$\|f(x)\|_1 = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty,$$

por outro lado, quando nos restringimos a um compacto  $[a, b] \subset X$  qualquer, temos

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln b - \ln a < \infty.$$

Por outro lado se  $f \in L^p(X)$  e  $K \subset X$  é um compacto qualquer, então

$$\int_K |f(x)|^p dx \leq \int_X |f(x)|^p dx < \infty.$$

Isso sugere que podemos estender o espaço  $L^p(X)$  a um espaço maior que contenha funções que se comportem bem em compactos  $K \subset X$  quaisquer.

Dado um conjunto  $U \subset \mathbb{R}^m$  qualquer, considere a função característica  $\chi_U : U \rightarrow \{0, 1\}$  dada por

$$\chi_U(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in U, \\ 0, & \text{se } x \notin U. \end{cases}$$

**Definição 6.1.3.** Dado um conjunto  $X \in \mathbb{R}^m$ , uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser localmente  $p$ -integrável se a função  $f\chi_K$  pertence a  $L^p(K)$  para todo compacto  $K \subset X$ . O conjunto das funções localmente  $p$ -integráveis é denotado por  $L^p_{loc}(X)$ .

O caso que mais nos interessará é  $p = 1$  e o conjunto  $L^1_{loc}(X)$  das funções localmente integráveis. Isso se dará, como veremos mais à frente, pelo conceito de distribuições regulares.

**Exemplo 6.1.3.** Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $f \in L^p(X)$ . Então  $\int_X |f(x)|^p dx < \infty$ . Para todo compacto  $K \subset X$ , temos

$$\int_K |f(x)|^p dx \leq \int_X |f(x)|^p dx < \infty.$$

Logo,  $f \in L^p_{loc}(X)$ . Por outro lado, se  $f \in L^p_{loc}(X)$ , então, para todo compacto  $K \subset X$ , a desigualdade de Hölder nos diz que

$$\int_K |f(x)| dx = \int_K |f(x)\chi_K| dx \leq \left| \int_K |f(x)|^p \right|^{1/p} \left| \int_K 1 dx \right|^{1/q},$$

onde  $q$  é um número tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Logo,

$$\int_K |f(x)| dx \leq (\mu(K))^{1/q} \underbrace{\left| \int_K |f(x)|^p \right|^{1/p}}_{< \infty} < \infty,$$

onde  $\mu(K)$  denota o comprimento de  $K$ , e  $f \in L^1_{loc}(X)$ . O caso  $p = \infty$  é feito de maneira análoga e temos a seguinte sequência de continências:

$$L^p(X) \subset L^p_{loc}(X) \subset L^1_{loc}(X).$$

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial  $H$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tal que  $H$  é um espaço de Banach com respeito à norma induzida pelo produto interno. Em outras palavras,  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é um espaço de Hilbert se  $(H, \|\cdot\|)$ , onde  $\|x\|^2 := \langle x, x \rangle$  para todo  $x \in V$ , é um espaço de Banach.

O espaço  $L^p(X)$ , com  $X \subset \mathbb{R}^m$  é conexo, será um espaço de Hilbert com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (6.5)$$

se, e somente se  $p = 2$ , veja [11], Teorema 5.2.2 (página 109) e suas consequências.

## 6.2 O ESPAÇO DE DISTRIBUIÇÕES

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  um aberto não vazio e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  uma função. O suporte de  $f$  é o conjunto

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

Dizemos que  $f$  tem suporte compacto se  $\text{supp} f$  é um conjunto compacto.

**Definição 6.2.1.** Considere um aberto não vazio  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ . O conjunto  $\mathcal{D}(\Omega)$  das funções infinitamente diferenciáveis  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de suporte compacto é chamado de *espaço das funções teste*.

Pode-se facilmente mostrar que  $\mathcal{D}(\Omega)$  é um espaço vetorial. Mas a questão mais importante é saber se existe algum elemento neste espaço. Apesar da resposta ser positiva, a construção de tal elemento não é simples.

**Exemplo 6.2.1.** Considere a função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

A função  $\varphi$  possui suporte compacto pois  $\text{supp}\varphi = [0, 1]$ . Os únicos dois pontos problemáticos para verificarmos a diferenciabilidade de  $\varphi$  é  $x = \pm 1$ . Porém, pode-se mostrar que  $\varphi^{(n)}(1) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , veja [97] (página 71).

Um fato interessante sobre a função  $\varphi$  é que ela se traduz como exemplo de uma função infinitamente diferenciável que não é analítica, pois a partir de suas derivadas em  $x = 1$  concluiríamos que

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(j)}(1)}{j!} (x-1)^j \equiv 0,$$

o que claramente é um absurdo.

De maneira mais geral, a função

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \text{se } \|x\| < 1, \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

onde  $\|\cdot\|$  denota a norma usual do  $\mathbb{R}^m$ , define uma função teste em  $\mathbb{R}^m$ .

Em termos de funções  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$ , a existência de funções teste  $\varphi$  diz que sempre podemos integrar funções  $f\varphi$  em  $\mathbb{R}^m$  inteiro.

**Definição 6.2.2.** Dizemos que uma sequência  $(\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\Omega)$  converge para uma função  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  quando  $j \rightarrow \infty$  se:

(a) Existe um compacto  $K \subset \Omega$  tal que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \text{supp}\varphi_j \subset K;$$

(b) Qualquer derivada de  $\varphi_j$  converge uniformemente para a respectiva derivada de  $\varphi$ .

**Definição 6.2.3.** Um operador linear  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é dito ser contínuo se  $T(\varphi_j)$  converge na reta para  $T(\varphi)$  sempre que  $\varphi_j \rightarrow \varphi$ .

O espaço dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$  é o conjunto  $\mathcal{D}'(\Omega)$  dos funcionais lineares  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definição 6.2.4.** Uma distribuição, ou função generalizada, é um funcional linear contínuo  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Exemplo 6.2.2.** Nos próximos exemplos consideraremos duas distribuições. A primeira delas é o que definiremos mais adiante por distribuição regular e a segunda é a função  $\delta$  de Dirac.

(a) Seja  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  e defina uma função  $\Lambda_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\Lambda_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx. \quad (6.6)$$

Observe que  $\Lambda_f$  está bem definida pois  $\varphi$  tem suporte compacto. Além disso, se  $f \in L^2(\Omega)$ , então  $\Lambda_f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$ . Dados  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\varphi, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\Lambda_f(\varphi + \lambda\phi) = \Lambda_f(\varphi) + \lambda\Lambda_f(\phi)$$

e  $\Lambda_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

Mostremos agora que  $\Lambda_f$  é contínua. Sejam  $(\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\Omega)$  uma sequência que converge para uma função  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Então existe um compacto  $K$  tal que a união dos suportes de  $\varphi_j$  está contida em  $K$ . Além disso, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\|\varphi_j - \varphi\| < \varepsilon$  sempre que  $n \geq N$ .

Tome  $\delta < \varepsilon$ . Então, sempre que  $\|\varphi_j - \varphi\| < \delta$ , teremos

$$\begin{aligned} |\Lambda_f(\varphi_j) - \Lambda_f(\varphi)| &= |\Lambda_f(\varphi_j - \varphi)| \leq \int_{\Omega} |f(x)|\|\varphi_j - \varphi\|dx \leq \\ &\leq \int_K |f(x)|\|\varphi_j - \varphi\|dx < \varepsilon \underbrace{\int_K |f(x)|dx}_{< \infty}. \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon$  é qualquer, segue que  $\Lambda_f$  é contínua e, portanto, uma distribuição.

(b) Fixe um ponto  $x_0 = (x^1, \dots, x^m) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$  e defina  $\delta_{x_0} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0).$$

A função  $\delta_{x_0}$  assim definida é a distribuição chamada de função  $\delta$  de Dirac. A função  $\delta_{x_0}$  é claramente linear. Para verificarmos sua continuidade, seja  $(\varphi_n)$  uma sequência de funções em  $\mathcal{D}(\Omega)$  que convergem a  $\varphi$ . Então, como  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  uniformemente, temos que  $|\varphi_n(x_0) - \varphi(x_0)| \rightarrow 0$ . Com relação à função  $\delta$  de Dirac, temos

$$|\delta_{x_0}(\varphi_n) - \delta_{x_0}(\varphi)| = |\delta_{x_0}(\varphi_n - \varphi)| = |\varphi_n(x_0) - \varphi(x_0)| \rightarrow 0.$$

Portanto,  $\delta_{x_0}(\varphi_n)$  converge a  $\delta_{x_0}(\varphi)$  e  $\delta_{x_0}$  é um funcional linear contínuo, ou seja, uma distribuição.

Antes de prosseguirmos com a  $\delta$  e mostrarmos uma diferença considerável entre ela e a distribuição  $\Lambda_f$  do item (a), precisamos de três resultados:

(i) Se  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  e  $x = (x^1, \dots, x^m)$ , então  $(x^1 - x_0^1)\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

Claramente  $(x^1 - x_0^1)\varphi$  é diferenciável. Além disso, o fato de  $\varphi$  ser uma função teste nos diz que  $\text{supp}(x^1 - x_0^1)\varphi = \text{supp}\varphi$ .

(ii) A função  $(x^1 - x_0^1)f$  é localmente integrável. Para verificarmos isso, seja  $K \subset \Omega$  um compacto qualquer. Então, pela desigualdade de Hölder

$$\int_K |(x^1 - x_0^1)f(x)| dx = \|(x^1 - x_0^1)f\|_{L^1(K)} \leq \|(x^1 - x_0^1)\|_{L^\infty(K)} \|f\|_{L^1(K)} < \infty.$$

Logo,  $(x^1 - x_0^1)f \in L^1(K)$  para todo compacto  $K \subset \Omega$ , ou seja,  $(x^1 - x_0^1)f \in L^1_{loc}(\Omega)$ .

(iii) (LEMA DE DU BOIS REYMOND) Uma função  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  satisfaz

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0$$

se, e somente se, o conjunto de pontos  $x \in \Omega$  tais que  $f(x) \neq 0$  tem medida nula.

Para a demonstração, veja [106], *Lemma* (página 72).

Suponha, por absurdo, que exista uma função  $f$  localmente integrável tal que  $\delta_{x_0}$  seja escrita como (6.6):

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx.$$

Como  $(x^1 - x_0^1)\varphi$  é uma função teste, temos

$$\int_{\Omega} f(x)(x^1 - x_0^1)\varphi = \delta_{x_0}((x^1 - x_0^1)\varphi) = (x^1 - x_0^1)\varphi(x) \Big|_{x=x_0} = 0.$$

Por outro lado,

$$\int_{\Omega} f(x)[(x^1 - x_0^1)\varphi(x)] dx = \int_{\Omega} [(x^1 - x_0^1)f(x)]\varphi(x) dx = 0.$$

Como  $(x^1 - x_0^1)f$  é localmente integrável, pelo Lema de Du Bois Reymond  $(x^1 - x_0^1)f(x) = 0$  com exceção de um conjunto de medida nula. Logo, o conjunto de pontos  $x \in \Omega$  tais que  $f(x) \neq 0$  também tem medida nula. Desta forma,

$$\varphi(x_0) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

o que é um absurdo, pois sempre podemos construir uma função teste como a do Exemplo 6.1.1 tal que  $\varphi(x_0) \neq 0$ . Logo, a função  $\delta$  de Dirac não pode ser escrita como (6.6).

O exemplo anterior mostra que existem tipos diferentes de distribuições. Um deles pode ser escrito como (6.6), enquanto o outro (caso da  $\delta$ ) não. Isso motiva a seguinte definição:

**Definição 6.2.5.** Uma distribuição  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  é chamada de *distribuição regular* se existe uma função  $f$  localmente integrável em  $\Omega$  tal que

$$T(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx. \quad (6.7)$$

Caso contrário,  $T$  é dita ser uma *distribuição singular*.

Observe primeiramente que a expressão (6.7) se assemelha ao produto interno do espaço  $L^2(\Omega)$ . Por causa desta semelhança escrevemos a ação de uma distribuição regular  $T$  como

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (6.8)$$

A partir de agora, denotaremos  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$  por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de forma a termos a notação mais simples. No caso de uma distribuição singular  $T$ , adotamos a mesma notação (6.8) por simplicidade. Por exemplo, no caso da  $\delta$  de Dirac escrevemos

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0).$$

Por fim, dada uma função localmente integrável  $f$ , pelo Exemplo 6.2.2 (a) sempre conseguimos construir uma distribuição regular  $\Lambda_f$ .

O próximo exemplo ajudará a dar sentido à definição de derivada distribucional.

**Exemplo 6.2.3.** Sejam  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  e  $\alpha$  um multi-índice qualquer. Observe que, por ser uma função teste,  $\varphi$  é infinitamente diferenciável e é diferente de zero no máximo dentro de um compacto  $K$ . Desta forma, a derivada  $D_{\alpha}\varphi$  certamente se anulará fora de  $K$ . Logo,  $\text{supp } D_{\alpha}\varphi \subset K$  e temos que o conjunto  $\text{supp } D_{\alpha}\varphi$  é limitado. Por outro lado, pela definição de suporte,  $\text{supp } D_{\alpha}\varphi$  é sempre um conjunto fechado, de onde segue que  $\text{supp } D_{\alpha}\varphi$  é compacto e  $D_{\alpha}\varphi$  é uma nova função teste.

**Definição 6.2.6.** Suponha que  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma distribuição e  $\alpha$  um multi-índice. A  $\alpha$ -ésima derivada distribucional (ou derivada fraca) de  $T$  é a distribuição  $D_{\alpha}T$  definida por

$$\langle D_{\alpha}T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D_{\alpha}\varphi \rangle. \quad (6.9)$$

Aparentemente a Definição 6.2.6 apresenta um problema, pois define a derivada de uma distribuição  $T$  como uma distribuição que satisfaz (6.9). A questão é: seria  $D_\alpha T$  realmente uma distribuição?

Para verificarmos tal fato, observe inicialmente que, da linearidade de  $T$  e  $D_\alpha$ ,  $D_\alpha T$  é linear. Suponha então que  $(\varphi_n)$  seja uma sequência de funções teste que converge para  $\varphi$  em  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Pela definição de convergência temos que  $D_\alpha \varphi_n \rightarrow D_\alpha \varphi$ .

Desta forma, temos  $\langle D_\alpha T, \varphi_n \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D_\alpha \varphi_n \rangle$ . Como  $T$  é um funcional contínuo, devemos ter a convergência  $\langle T, D_\alpha \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, D_\alpha \varphi \rangle$ . Segue então que

$$\langle D_\alpha T, \varphi_n \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, D_\alpha \varphi \rangle = \langle D_\alpha T, \varphi \rangle.$$

e  $D_\alpha T$  é realmente uma distribuição.

Se  $f$  é uma função localmente integrável, sua derivada distribucional (ou fraca) é a derivada fraca da distribuição regular  $\Lambda_f$  associada a  $f$ . Como acabamos de ver, tais funções  $f$  sempre possuem derivadas fracas, mas, em geral, tais derivadas não serão funções e sim distribuições. Outra observação importante é que a derivada  $D_\alpha$  é linear pela linearidade da integral que define  $\langle D_\alpha T, \varphi \rangle$ .

**Exemplo 6.2.4.** Considere a função descontínua  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x = 0, \\ 0, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

chamada de *função degrau de Heaviside*. Observe que  $H$  não pertence a  $L^1(\mathbb{R})$ , pois

$$\int_{\mathbb{R}} |H(x)| dx = \int_0^{\infty} dx = \infty.$$

Considere então o compacto  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Em termos da função de Heaviside, podemos assumir  $a, b \geq 0$ , pois se  $a, b < 0$  teremos  $H|_{[a,b]} \equiv 0$ . Desta forma,

$$\int_a^b |H(x)| dx \leq \int_a^b dx = b - a < \infty$$

e  $U$  é uma função localmente integrável. Podemos construir a distribuição regular  $\Lambda_H(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx$  e queremos encontrar a derivada distribucional  $H'$ . Temos

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx = \int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \delta(\varphi) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Desta forma, encontramos que  $H'(x) = \delta(x)$  no sentido fraco.

**Exemplo 6.2.5.** Dado um ponto  $x \in \Omega$ , consideremos a função  $\delta$  de Dirac do Exemplo 6.2.2 (b) a fim de encontrarmos sua derivada distribucional. Se  $\varphi$  é uma função teste qualquer, temos  $\langle \delta'_{x_0}, \varphi \rangle = -\langle \delta_{x_0}, \varphi' \rangle = -\varphi'(x_0)$ , ou seja,  $\delta'_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $\delta'_{x_0}(\varphi) = -\varphi'(x_0)$ . No caso particular da função  $\delta$  de Dirac, onde tomamos  $x_0 = 0$ , temos  $\delta'(\varphi) = -\varphi'(0)$ .

**Exemplo 6.2.6.** Considere a função sinal definida como

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Observe que  $|\text{sign}(x)| = 1$  se  $x \neq 0$  e  $|\text{sign}(0)| = 0$ . Desta forma, dado um compacto qualquer  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , temos

$$\int_a^b |\text{sign}(x)| dx = \int_a^b dx = b - a < \infty,$$

o que nos diz que  $\text{sign} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Encontremos agora a derivada fraca da função  $\text{sign}$ . Para qualquer função teste  $\varphi$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \text{sign}', \varphi \rangle &= -\langle \text{sign}, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \text{sign}(x) \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \\ &= 2\varphi(0) = \langle 2\delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

de onde concluimos que  $\text{sign}'(x) = 2\delta(x)$ . Poderíamos ter olhado a função sinal de uma outra maneira. Bastava observar que  $\text{sign}(x) = 2H(x) - 1$  e da linearidade da derivada seguiria  $\text{sign}'(x) = 2H'(x) = 2\delta(x)$ .

Vimos que a derivada fraca de uma distribuição  $T$  é sempre uma distribuição  $\tilde{T}$ . A questão interessante que o exemplo anterior discute é que a derivada fraca de uma distribuição regular não necessariamente é uma distribuição regular. Mais explicitamente, a derivada fraca da função sinal é um múltiplo da função generalizada  $\delta$  de Dirac, que por sua vez é singular. Tal observação não se traduz em problemas práticos, mas é conceitualmente importante.

Saindo dos exemplos clássicos de derivada distribucional, o próximo exemplo trata uma função que será de extrema importância nos nossos resultados.

**Exemplo 6.2.7.** Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = e^{-|x|}$ . A função  $f$  é claramente contínua em todo o domínio, mas não possui derivada em  $x = 0$ . Mais do que isso,

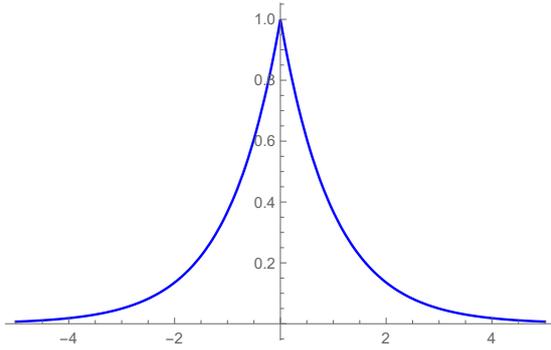


Figura 12: A função  $f$  é contínua em todo o seu domínio, mas perde diferenciabilidade no ponto  $x = 0$ . Uma propriedade interessante de  $f$  é que ela vai a zero quando  $|x| \rightarrow \infty$ .

$f$  é infinitamente diferenciável em  $\mathbb{R}^*$ , mas possui um bico no referido ponto, como exemplificado na Figura 14. Mostremos inicialmente que  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Observe que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2,$$

ou seja,  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Pelo Exemplo 6.1.3, concluímos que  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Calculemos agora  $f'$  no sentido fraco utilizando a definição de derivada distribucional e integração por partes.

$$\begin{aligned} \langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \varphi'(x) dx = -\int_{-\infty}^0 e^x \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} e^{-x} \varphi'(x) dx = \\ &= -\varphi(0) + \int_{-\infty}^0 e^x \varphi(x) dx + \varphi(0) - \int_0^{\infty} e^{-x} \varphi(x) dx = \\ &= -\int_{-\infty}^0 \text{sign}(x) e^{-|x|} \varphi(x) dx - \int_0^{\infty} \text{sign}(x) e^{-|x|} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} -\text{sign}(x) e^{-|x|} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Fazendo  $h(x) = -\text{sign}(x) e^{-|x|}$ , concluímos que  $\langle f', \varphi \rangle = \langle h, \varphi \rangle$ , de onde segue que  $f'(x) = h(x) = -\text{sign}(x) e^{-|x|}$ .

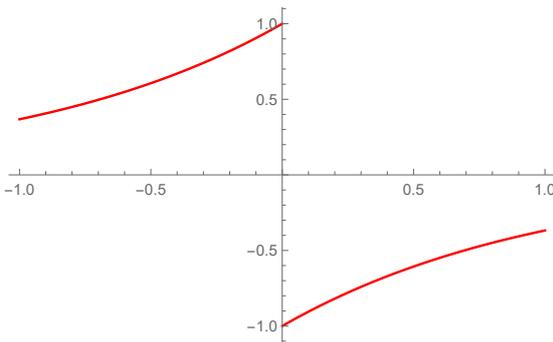


Figura 13: A função  $h(x) = -\text{sign}(x) e^{-|x|}$ , derivada fraca da função  $f$ , determina uma nova distribuição regular  $\Lambda_h$  uma vez que  $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ .

Observe que a derivada fraca de  $f$  é uma função  $f'$  localmente integrável, que por sua vez induz uma distribuição regular  $\Lambda_{f'}$ . Calculando a segunda derivada, temos:

$$\langle f'', \varphi \rangle = -\langle f', \varphi' \rangle = \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(x) e^{-|x|} \varphi'(x) dx = -\int_{-\infty}^0 e^x \varphi'(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-x} \varphi'(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\varphi(0) + \int_{-\infty}^0 e^x \varphi(x) dx - \varphi(0) + \int_0^{\infty} e^{-x} \varphi(x) dx = \\
&= -2\varphi(0) + \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left( e^{-|x|} - 2\delta(x) \right) \varphi(x) dx = \langle \tilde{h}, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

onde  $\tilde{h}(x) = e^{-|x|} - 2\delta(x)$ . Desta forma,  $f''(x) = h'(x) = \tilde{h}(x) = e^{-|x|} - 2\delta(x)$ . Procedendo da mesma maneira, encontramos que  $f'''(x) = -\text{sign}(x)e^{-|x|} - 2\delta'(x)$ .

Uma propriedade interessante da distribuição  $\delta_{x_0}$  é dada no seguinte exemplo.

**Exemplo 6.2.8.** Suponha que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função contínua. Se  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma distribuição, então  $fT$  é claramente uma nova distribuição. Além disso, se considerarmos uma função teste  $\varphi$ , então  $f\varphi$  também é uma função teste. Desta forma, podemos definir o produto  $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$  por  $\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$ . No caso particular em que  $T = \delta_{x_0}$ , temos

$$\langle f\delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, f\varphi \rangle = f(x_0)\varphi(x_0) = \langle f(x_0)\delta_{x_0}, \varphi \rangle,$$

de onde segue que  $f\delta_{x_0} = f(x_0)\delta_{x_0}$ .

Podemos também provar um resultado análogo para a derivada de  $\delta_{x_0}$ :

$$\begin{aligned}
\langle f\delta'_{x_0}, \varphi \rangle &= \langle \delta'_{x_0}, f\varphi \rangle = -\langle \delta_{x_0}, (f\varphi)' \rangle = -f'(x_0)\varphi(x_0) - f(x_0)\varphi'(x_0) = \\
&= \langle -f'(x_0)\delta_{x_0}, \varphi \rangle + \langle f(x_0)\delta'_{x_0}, \varphi \rangle = \langle f(x_0)\delta'_{x_0} - f'(x_0)\delta_{x_0}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Como resultado, concluímos que  $f\delta'_{x_0} = f(x_0)\delta'_{x_0} - f'(x_0)\delta_{x_0}$ .

Seguindo a linha do que acabou de ser feito, definimos  $\text{sign} \delta_{x_0} := \text{sign}(x_0)\delta_{x_0}$  e, no caso particular que será de nosso interesse, temos  $\text{sign} \delta = 0$ . A formulação rigorosa de que podemos de fato assumir  $\text{sign} \delta_{x_0} := \text{sign}(x_0)\delta_{x_0}$  envolve a convergência de distribuições, tópico este que não será abordado na presente tese. Entretanto, o leitor interessado é guiado a [57], Seção 11.4 (página 298), para maiores detalhes.

### 6.3 SOLUÇÕES DO TIPO PEAKON

Quando definimos soluções de equações diferenciais, primeiramente pensamos nos espaços em que tais entidades estão definidas. No caso de soluções clássicas de uma equação

$$F(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0, \quad (6.10)$$

dizemos que  $u = f(x)$  é uma função  $k$  vezes diferenciável. Quando nos restringimos a funções  $C^k$ , perdemos funções que não são diferenciáveis e que podem satisfazer a equação de outras maneiras.

Uma solução *peakon* de uma equação diferencial será uma função apenas contínua, de determinada forma, que num certo sentido será solução de equações diferenciais. Como tal solução não é diferenciável, ela conseqüentemente não será uma solução clássica. Como discutido anteriormente no Capítulo 5, as soluções *peakon* apareceram pela primeira vez no trabalho de Camassa e Holm [14] quando eles mostraram que a função contínua  $u(x, t) = Ae^{-|x-ct|}$  de alguma maneira resolvia a equação de Camassa-Holm

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}$$

para alguma constante  $A$  bem determinada. Outra equação de nosso interesse que também possui solução *peakon*  $u$  é a equação de Novikov [56, 86]

$$u_t - u_{txx} + 4u^2 u_x = 3uu_x u_{xx} + u^2 u_{xxx}.$$

Para entendermos o que esses resultados das últimas décadas significam, precisamos primeiramente compreender o que é de fato uma solução *peakon*. No que se segue, definimos um *peak* de uma função real de acordo com Lenells [77].

**Definição 6.3.1.** Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo e suponha que uma função  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  seja contínua. Dizemos que  $\phi$  tem um *peak* no ponto  $x_0 \in I$  se  $\phi$  é diferenciável em  $I \cap \{x \in I; x < x_0\}$  e  $I \cap \{x \in I; x > x_0\}$  e

$$0 \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \phi'(x_0 + \epsilon) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \phi'(x_0 - \epsilon) \neq \pm\infty. \quad (6.11)$$

A condição (6.11) diz informações importantes sobre o gráfico da função. O fato dos limites laterais não serem iguais diz que a derivada no ponto  $x_0$  não é contínua e, portanto,  $\phi$  não é diferenciável em tal ponto. Além disso, como os limites laterais devem ter sinais trocados, existem vizinhanças à direita e à esquerda do ponto  $x_0$  que possuem comportamentos distintos quanto a crescimento.

**Exemplo 6.3.1.** Neste exemplo consideraremos duas funções. Uma delas já foi apresentada no Exemplo 6.2.7.

- (a) Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = e^{-A|x|}$ , onde  $A$  é uma constante. A função  $f$  é contínua, como já havíamos notado no Exemplo 6.2.7 mas não é diferenciável em  $x = 0$ , veja a Figura 14. Mostraremos agora que  $f$  possui um *peak* em  $x = 0$ .

Primeiramente observe que  $f$  é diferenciável nos conjuntos  $\mathbb{R}_+^*$  e  $\mathbb{R}_-^*$ , conforme pedido pela Definição 6.3.1. Além disso,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f'(x_0 + \epsilon) = -A = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f'(x_0 - \epsilon).$$

Portanto,  $f$  possui um *peak* em  $x = 0$ .

- (b) A função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = \sin(A|x|)$ , onde  $A$  denota uma constante, também possui um *peak* em  $x = 0$ . Apesar de globalmente apresentar um comportamento distinto da função  $f$  do item anterior, numa vizinhança de  $x = 0$  percebemos uma certa semelhança que acontece por causa da troca de sinal das derivadas.

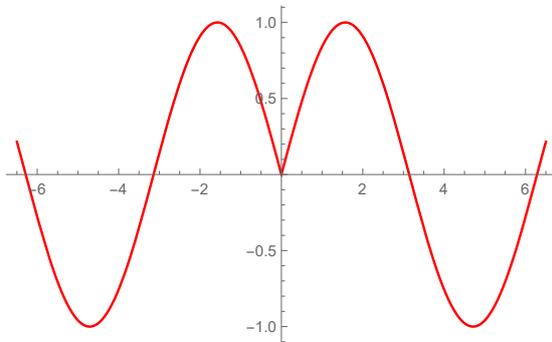


Figura 14: A função  $g$  possui um *peak* em  $x = 0$ . É uma função limitada, mas que não possui assíntota horizontal.

Uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser uma solução *peakon* da equação diferencial (6.10) se  $f$  possui um *peak* em determinado ponto e se suas derivadas distribucionais resolvem a equação.

Conforme a seção anterior, quando falamos em derivada fraca de uma função  $f$ , estamos pensando em  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$  e, a partir daí, construímos a distribuição regular  $\Lambda_f$  e calculamos suas derivadas distribucionais. No caso das soluções *peakon* que acabamos de definir, nada mais natural do que se perguntar se a definição faz realmente sentido, pois a princípio não sabemos se podemos de fato calcular derivadas fracas delas.

Para verificarmos que o conceito está bem definido, seja  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com um *peak* num ponto  $x_0$ . Pela definição de *peak*,  $\phi$  é contínua em  $I$  e, pelo Teorema de Weirstrass, admite máximo e mínimo em qualquer compacto  $K \subset I$ . Isso implica que  $|\phi(x)| \leq c$  para alguma constante  $c$ . Desta forma, dado um compacto  $K \subset I$  qualquer, temos

$$\int_K |f(x)| dx \leq \int_K c dx = c\mu(K) < \infty,$$

onde  $\mu(K)$  denota o comprimento de  $K$ . Com isso concluímos que de fato soluções *peakon* estão bem definidas, pois se  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  tem um *peak* num determinado ponto, então  $\phi$  obrigatoriamente deve estar em  $L^1_{loc}(I)$  e podemos calcular suas derivadas distribucionais por meio da distribuição regular  $\Lambda_\phi$ .

**Exemplo 6.3.2.** No Exemplo 6.3.1, vimos que a função  $f(x) = e^{-|x|}$  é uma candidata a solução *peakon* de equações diferenciais. Por exemplo, quando consideramos a EDO

$$c(\phi'(x) - \phi'''(x)) - (b+2)\phi^b(x)\phi'(x) + (b+1)\phi^{b-1}(x)\phi'(x)\phi''(x) + \phi^b(x)\phi'''(x) = 0$$

e as derivadas fracas da função  $\phi(x) = Ae^{-|x|}$  como encontradas no Exemplo 6.2.7, reescrevemos a equação como

$$-2Ac\delta'(x) - 2A(b+1)\text{sign}(x)\delta(x) + 2A\delta'(x)\phi^b(x) = 0.$$

Do Exemplo 6.2.8, temos que  $\text{sign } \delta = 0$  e  $\delta'(x)\phi^b(x) = \phi^b(0)\delta'(x) - (\phi^b)'(0)\delta(x) = A^b\delta'(x)$ . Logo,  $A^b\delta'(x) = c\delta'(x)$ , de onde segue que tomando  $A = c^{1/b}$ , a função  $\phi(x) = Ae^{-|x|}$  será uma solução *peakon* da EDO em questão.

A nossa definição de solução *peakon* contempla apenas EDOs. Isso se torna um problema se levarmos em consideração que Camassa e Holm [14] em 1993 introduziram tal conceito como uma função de duas variáveis  $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(x, t) = ce^{-|x-ct|}$ , onde  $c$  é uma constante chamada de *velocidade da onda*, que no sentido distribucional resolvia a equação de Camassa-Holm

$$u_t - u_{txx} + 2uu_x - 3u_xu_{xx} - uu_{xxx} = 0.$$

Os autores chamaram a função  $u$  de *peakon* porque a função perde diferenciabilidade ao longo da curva  $x = ct$  (ou  $t = x/c$ ). Em outras palavras, quando fixamos a posição  $x$  e o tempo  $t$ , a curva resultante possui um *peak* em  $x = ct$ .

Uma solução preliminar para o referido problema pode ser formulada: uma função  $u(x, t)$  possui um *peak* no ponto  $(x_0, t_0)$  se  $x \mapsto u(x, t_0)$  e  $t \mapsto u(x_0, t)$  possuem *peak* em  $x = x_0$  e  $t = t_0$ , respectivamente. Uma solução *peakon* será uma função  $u(x, t)$  com um *peak* num ponto  $(x_0, t_0)$  que resolve a equação.

Em termos do que encontramos na literatura [7, 14, 22, 33, 34, 56, 93], a solução apresentada anteriormente é suficiente, pois há uma tendência de buscarmos soluções *peakon* da forma  $u(x, t) = \phi(x - ct) = Ae^{-B|x-ct|}$ . Tal escolha possui sentido físico, pois  $u$  se comporta como uma onda solitária, ou seja, é uma onda da forma  $u(x, t) = \phi(z)$ , com

$z = x - ct$ , de velocidade  $c$  que possui assíntotas horizontais. Porém, matematicamente falando, muitas funções com comportamento no *peak* localmente parecido seriam esquecidas.

Um exemplo dramático da razão pela qual a definição acima de *peak* não é a melhor possível é dado pela função  $h(x, t) = e^{-|x|}/\sqrt{t}$  definida em  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ . De acordo

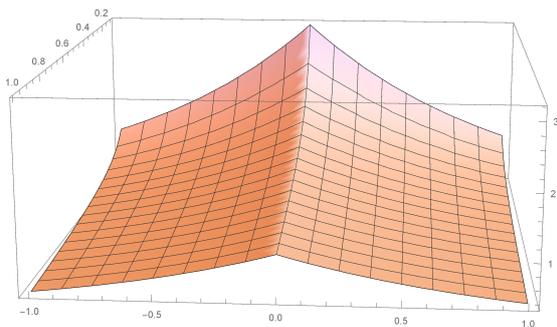
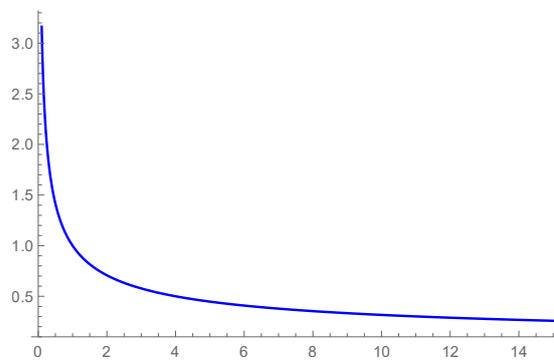


Figura 15: A função  $h(x) = e^{-|x|}/\sqrt{t}$  possui um *peak* em  $x = 0$ , mas quando fixamos  $x$ , a curva resultante não possui *peak*, veja a Figura 16.

com o que acabamos de definir, a função  $h$  terá um *peak* num ponto  $(x_0, t_0)$  se as funções  $x \rightarrow u(x, t_0)$  e  $t \rightarrow u(x_0, t)$  possuem *peak* em  $x = x_0$  e  $t = t_0$ , respectivamente. Porém, a função  $t \rightarrow h(x_0, t)$  não possui *peak* conforme representado na Figura 16.

Figura 16: Quando fixamos um ponto  $x_0$ , a função  $h(x_0, t)$  não possui *peaks*, o que, de acordo com solução preliminar, descaracterizaria o *peak* em  $x = 0$  para a função ser um candidato a solução *peakon* de uma equação. Na imagem vemos plotada a curva  $h(0, t)$ .



Buscando definir precisamente uma solução *peakon* de uma EDP de duas variáveis independentes que contemplasse o que se conhece por tal solução, em [33] propusemos a seguinte definição.

**Definição 6.3.2.** Seja  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Dizemos que  $u$  possui um *peak* no ponto  $(x_0, t_0)$  se  $x \mapsto u(x, t_0)$  tem um *peak* em  $x = x_0$  ou  $t \mapsto u(x_0, t)$  tem um *peak* em  $t = t_0$ .

Como resultados originais, apresentaremos soluções *peakon* para duas famílias de equações. No primeiro resultado, encontraremos condições para que a equação

$$u_t - u_{txx} + \alpha u^b u_x + \delta(b+1)u^{b-1}u_x u_{xx} + \delta u^b u_{xxx} = 0$$

admita uma solução *peakon* da forma  $u(x, t) = Ae^{-|x-ct|}$ . A segunda equação a ser considerada é dada por

$$u_t + 2a \frac{u_x u_{xx}}{u} = \epsilon a u_{xxx}$$

e consideraremos uma função da forma  $u(x, t) = e^{-A|x-ct|}$ .

### 6.3.1 Uma classe de equações que unifica as equações de Camassa-Holm e Novikov

Considere a equação

$$u_t - u_{txx} + \alpha u^b u_x - \gamma(b+1)u^{b-1}u_x u_{xx} - \gamma u^b u_{xxx} = 0 \quad (6.12)$$

que unifica as equações de Camassa-Holm e Novikov, e a função  $u(x, t) = Ae^{-|x-ct|}$ , onde  $A$  é uma constante e  $c$  a velocidade da onda  $u$ . Queremos encontrar condições para as constantes  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $A$  de forma que a equação (6.12) admita  $u$  como solução *peakon*.

Colocando  $z = x - ct$ , reescrevemos  $u = \phi(z) = Ae^{-|z|}$ . Em termos da nova função de uma variável  $\phi$ , a equação (6.12) é transformada na EDO

$$c(\phi' - \phi''') - \alpha \phi^b \phi' + \gamma(b+1)\phi^{b-1}\phi'\phi'' + \gamma\phi^b \phi''' = 0. \quad (6.13)$$

Do Exemplo 6.2.7 temos que  $\phi$  pertence a  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  e suas três primeiras derivadas distribucionais são dadas por

$$\begin{aligned} \phi'(z) &= -\text{sign}(z)\phi(z), & \phi''(z) &= \phi(z) - 2A\delta(z), \\ \phi'''(z) &= -\text{sign}(z)\phi(z) - 2A\delta'(z). \end{aligned}$$

Substituindo as respectivas derivadas na EDO (6.13), obtemos

$$2Ac\delta'(z) + (\alpha - \gamma(b+2))\text{sign}(z)\phi^{b+1} + 2A\gamma(b+1)\text{sign}(z)\delta(z) - 2A\gamma\phi^b\delta'(z) = 0.$$

Como  $\text{sign}(z)\delta(z) = 0$  e  $\phi^b\delta'(z) = \phi^b(0)\delta(z) - (\phi^b)'(0)\delta(z) = A^b\delta(z)$ , temos

$$2A(c - A^b)\delta'(z) + (\alpha - \gamma(b+2))\text{sign}(z)\phi^{b+1} = 0.$$

Para que a igualdade valha, devemos ter  $A^b = c$  e  $\alpha = \gamma(b + 2)$ . Assumiremos que  $b \in \mathbb{N}$  e que a velocidade de onda  $c$  seja positiva. Desta forma, temos o seguinte resultado original.

**Teorema 6.3.1.** Para toda velocidade de onda  $c > 0$ , a equação

$$u_t - u_{txx} + \gamma(b + 2)u^b u_x - \gamma(b + 1)u^{b-1}u_x u_{xx} - \gamma u^b u_{xxx} = 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad (6.14)$$

possui uma solução *peakon* da forma  $u(x, t) = c^{1/b} e^{-|x-ct|}$ .

Em [31], o Teorema 6.3.1 é enunciado na *Proposition 3.1* (página 7).

No Capítulo 5 deduzimos a equação (6.12) como a única subfamília de uma família geral que unifica as equações de Novikov e CH possuindo as propriedades de invariância por uma determinada dilatação e auto-adjunticidade estrita. No final do referido capítulo, percebemos que se tomássemos  $\alpha = b + 2$  e  $\gamma = 1$ , então reduziríamos a equação (6.12) a uma família a um único parâmetro (a equação (6.14) com  $\gamma = 1$ ) que unificava as equações de CH ( $b = 1$ ) e Novikov ( $b = 2$ ). Tal escolha, a princípio, fora realmente uma mistura de sorte com perspicácia, mas a dedução da solução *peakon* mostrou que, ao fazermos tal escolha, estávamos na verdade impondo outra propriedade importante: existência da solução *peakon* que generalizasse o que já se conhecia sobre as equações de CH [14] e Novikov [56]. Com relação à escolha de  $\gamma$ , se tomássemos  $\gamma = 0$  perderíamos todos os termos não-lineares da equação, daí podemos simplesmente assumir  $\gamma \neq 0$ . Dividindo (6.14) por  $\gamma$  e fazendo a mudança de variáveis  $t \rightarrow \gamma t$ , eliminamos a constante  $\gamma$ , o que é equivalente a simplesmente tomarmos  $\gamma = 1$ .

Era conhecido do trabalho de Camassa e Holm [14] que  $u(x, t) = ce^{-|x-ct|}$  determinava uma solução *peakon* da equação de CH

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}.$$

Já para a equação de Novikov

$$u_t - u_{txx} + 4u^2 u_x = 3uu_x u_{xx} + u^2 u_{xxx},$$

os autores em [56] deduziram a solução *peakon*  $u(x, t) = c^{1/2} e^{-|x-ct|}$ . A solução  $u(x, t) = c^{1/b} e^{-|x-ct|}$  que encontramos para a equação a 1-parâmetro

$$u_t - u_{txx} + (b + 2)u^b u_x - (b + 1)u^{b-1}u_x u_{xx} - u^b u_{xxx} = 0, \quad b \in \mathbb{N}, \quad (6.15)$$

generaliza tais resultados.

Figura 17: A função  $u(x, t) = 4^{1/3}e^{-|x-4t|}$ , plotada na bola  $[-2, 2] \times [0, 1]$  possui um *peak* em  $x = 4t$ .

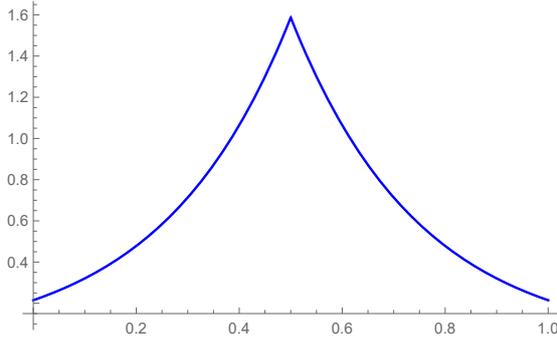
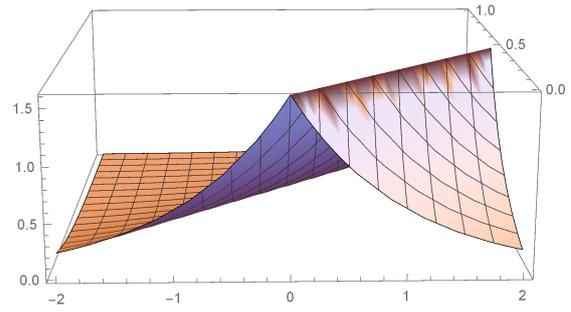


Figura 18: Fixado  $x = 2$ , o *peak* da curva  $u(2, t) = 4^{1/3}e^{-|2-4t|}$  é atingido quando  $t = 1/2$ .

De maneira mais geral, em [31] consideramos sobreposição de *peakons* da forma

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N p_j(t) e^{-|x - q_j(t)|}$$

para funções  $p_j$  e  $q_j$  diferenciáveis, e mostramos que  $u$  é uma solução de (6.15), solução esta chamada de *multipeakon*, se, e somente se, as funções  $p_j$  e  $q_j$  satisfazem o sistema dinâmico

$$p'_j = p_j \sum_{i_1, \dots, i_b=1}^N \text{sign}(q_j - q_{i_1}) p_{i_1} \dots p_{i_b} e^{-|q_j - q_{i_1}| - \dots - |q_j - q_{i_b}|},$$

$$q'_j = \sum_{i_1, \dots, i_b=1}^N p_{i_1} \dots p_{i_b} e^{-|q_j - q_{i_1}| - \dots - |q_j - q_{i_b}|},$$

sistema este que também generaliza os respectivos resultados conhecidos para a CH [14] e a Novikov [56].

Como podemos observar, resolver o sistema dinâmico acima é uma tarefa árdua, para não dizer impossível. Geralmente se utilizam métodos numéricos para estimar determinados comportamentos de  $u$ , o que não é de nossa alçada. Porém, se tomarmos  $N = 1$ , reobtemos a solução *peakon* que deduzimos nesta seção.

## 6.3.2 Uma família homogênea de equações evolutivas

Consideremos agora a equação

$$u_t + 2a \frac{u_x u_{xx}}{u} = \epsilon a u_{xxx}, \quad (6.16)$$

onde  $a$  e  $\epsilon$  são constantes reais. Assumamos que  $a \neq 0$  para que o único termo não-linear  $u_x u_{xx}/u$  não se anule. Em termos de uma função  $u = \phi(z)$ , em que  $z = x - ct$ , a equação (6.16) é reescrita como

$$\phi' \left( c - 2a \frac{\phi''}{\phi} \right) + \epsilon a \phi''' = 0. \quad (6.17)$$

Observe que a equação (6.16) é homogênea. Desta forma, se  $u$  é uma solução, então  $Au$  será outra solução. Logo, consideremos a exponencial  $\phi = e^{-A|z|}$ , onde  $A$  é uma constante a ser determinada. As três primeiras derivadas distribucionais de  $\phi$  são dadas por

$$\begin{aligned} \phi' &= -A \operatorname{sign}(z) \phi, & \phi'' &= -2A \delta(z) + A^2 \phi, \\ \phi''' &= -2A \delta'(z) - A^3 \operatorname{sign}(z) \phi. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (6.17), obtemos

$$A(-c + A^2(2a - \epsilon a)) \operatorname{sign}(z) \phi - 2A \epsilon a \delta'(z) = 0.$$

Para que a igualdade valha, devemos ter  $A \epsilon a = 0$  e  $A^2 = c/(2a - \epsilon a)$ . Queremos encontrar a  $A$  de maneira a ser não nula, pois caso contrário teremos uma solução  $\phi = 1$  que não nos interessa. Como  $a \neq 0$ , devemos obrigatoriamente ter  $\epsilon = 0$  na primeira condição, de forma a obtermos  $A^2 = c/2a$ .

Devemos nos atentar a dois casos:  $A$  pode ser real ou imaginário. Se tomarmos a velocidade da onda  $c$  como positiva, então o sinal de  $a$  determinará os dois casos. No mais simples deles, tomamos  $a > 0$  e  $A = \pm \sqrt{c/2a}$ . Supondo que a solução  $\phi$  seja uma onda solitária, ou seja,  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \phi(z) < \infty$ , então tomamos  $A = \sqrt{c/2a}$  e a solução *peakon* da equação (6.16) será dada por

$$u(x, t) = e^{-\sqrt{\frac{c}{2a}}|x-ct|}.$$

Por outro lado, se  $a < 0$ , então  $A = \pm iB$ , onde  $0 < B = \sqrt{-c/2a}$ . Desta forma, teremos soluções dadas por

$$u(x, t) = e^{\pm iB|x-ct|} = \cos(B|x-ct|) \pm i \sin(B|x-ct|).$$

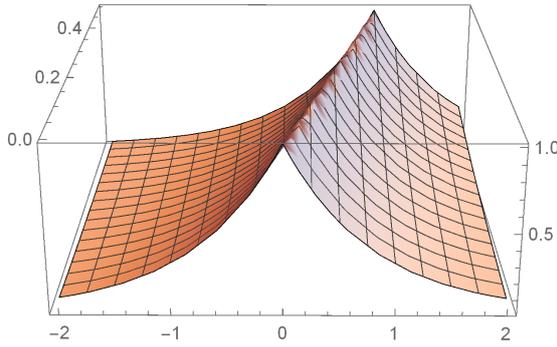


Figura 19: Solução *peakon* da forma  $u = e^{-\sqrt{\frac{c}{2a}}|x-ct|}$ , com  $c = 3$  e  $a = 1$ .

Tal solução é complexa e não nos interessa. Porém, podemos olhar separadamente cada uma das funções a fim de verificar se alguma delas resolve a equação. Inicialmente observe que a função cosseno não nos fornecerá um *peakon* devido a sua paridade. Por outro lado, a função  $u(x, t) = \phi_1(z) = \sin(B|z|)$  possui um *peak* em  $z = 0$  conforme o Exemplo 6.3.1 (b) e é de fato uma candidata a solução *peakon*. Calculando suas derivadas distribucionais, temos

$$\begin{aligned} \phi_1' &= B\text{sign}(z) \cos(B|z|), & \phi_1'' &= -2B\delta(z) - B^2 \sin(B|z|), \\ \phi_1''' &= -2B\delta'(z) - B^3\text{sign}(z) \cos(B|z|), \end{aligned}$$

de onde segue que reescrevemos (6.17) como

$$B\text{sign}(z) \cos(B|z|)(c + B^2(2a - \epsilon a)) - 2B\epsilon a\delta'(z) = 0.$$

Como  $B^2 = -c/2a$ , vemos que o primeiro termo claramente se anula, restando apenas  $2B\epsilon a\delta'(z) = 0$ . Pelos mesmos argumentos da exponencial real, a equação admitirá  $u(x, t) = \sin(B|z|)$  como solução *peakon* somente se  $\epsilon = 0$ .

Consequentemente, temos o seguinte resultado:

**Teorema 6.3.2.** Para qualquer velocidade de onda  $c > 0$ , a onda viajante

$$u(x, t) = \begin{cases} e^{-\sqrt{\frac{c}{2a}}|x-ct|}, & \text{se } a > 0, \\ \sin\left(\sqrt{-\frac{c}{2a}}|x-ct|\right), & \text{se } a < 0, \end{cases}$$

é uma solução *peakon* da equação

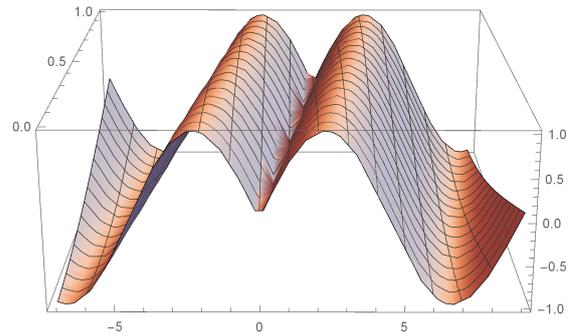
$$u_t + 2a \frac{u_x u_{xx}}{u} = \epsilon a u_{xxx},$$

se, e somente se  $\epsilon = 0$ .

Figura 20: A função

$$u(x, t) = \sin\left(-\sqrt{\frac{c}{2a}}|x - ct|\right),$$

com  $c = 2$  e  $a = -2$ , é uma onda limitada com *peak* ao longo da curva  $x = 2t$ . Ela determinará uma solução *peakon* para a equação (6.16) com  $a = -2$ .



Durante o desenvolvimento da presente tese, o estudo de soluções *peakon* da equação (6.16) fora complicado. Em [47], Freire e Sampaio sugeriram que a equação (6.16) pudesse admitir  $u = e^{-A|x-ct|}$ , onde  $A$  é uma constante determinada em função de  $c, a, \epsilon$ , como solução *peakon* **para todos** os valores das constantes  $a$  e  $\epsilon$ . Tal resultado era condizente com o que Wazwaz [108] havia deduzido para diversas equações evolutivas. Entretanto, entendemos que os métodos que foram utilizados em [47, 108] não estavam corretos, pois as derivadas não estavam sendo calculadas de maneira distribucional. Foi então que percebemos os erros em tais trabalhos e que a solução *peakon* somente surgiria para o caso  $\epsilon = 0$ .

Desde seu aparecimento [14], as soluções *peakon* têm atraído muitos pesquisadores a desenvolverem teorias para equações do tipo  $u_t - u_{txx} = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ . Até onde sabemos, nosso estudo das soluções *peakon* da equação (6.16) é o primeiro a estudar equações evolutivas. O mais interessante é que fomos capazes de encontrar dois *peakons* distintos, e um deles nunca antes considerado antes na literatura, para casos de uma família relativamente complicada. Este fato levanta questionamentos sobre classificação de equações evolutivas admitindo *peakons*. Conjecturamos que se uma equação evolutiva possui uma solução *peakon*, então sua ordem será no máximo dois. Este, porém, é um tema que se encontra em aberto.

# 7

## CONCLUSÕES

Nesta tese discutimos propriedades álgebra-geométricas de certas equações diferenciais. No Capítulo 2 formalizamos os conceitos de simetria de Lie e soluções invariantes que foram utilizados no Capítulo 3 para obtenção dos Teoremas de classificação de simetrias da EDO (3.6), das EDPs (3.7), (3.8) e (3.10) e do sistema (3.9).

No Capítulo 4 estruturamos os Teoremas de Noether e Ibragimov para que pudéssemos ter ferramentas para encontrar leis de conservação. Nas Seções 4.5.1, 4.5.2 e 4.5.3 exibimos resultados originais (Teoremas 4.5.1-4.5.6) acerca de leis de conservação de algumas equações.

No Capítulo 5 deduzimos a equação a 1-parâmetro que mudou o rumo do trabalho que até então estávamos desenvolvendo. Passamos a analisar propriedades relacionadas com existência de infinitas leis de conservação (integrabilidade) e soluções *peakon*. Nesta tese, apenas pincelamos os conceitos relacionados a integrabilidade de equações diferenciais parciais.

Já no Capítulo 6, apresentamos conceitos de análise funcional para que pudéssemos construir a teoria de distribuições, teoria esta que fornece a base para o estudo de soluções apenas contínuas que devem ser derivadas no sentido fraco. Por fim, nas Subseções 6.3.1 e 6.3.2, deduzimos nossos resultados originais (Teorema 6.3.1 e Teorema 6.3.2) caracterizando soluções *peakon* de duas famílias de equações diferenciais parciais.

Existem muitos problemas em aberto relacionados ao tema desta tese. Abaixo, listamos alguns:

1. É conhecido que se uma equação possui uma lei de conservação, então a equação é não-linearmente auto-adjunta [4, 5, 6, 3]. O problema teórico é que até hoje não se conseguiu determinar qual a ordem da substituição que torna a equação auto-adjunta. Haveria alguma relação entre a ordem dos vetores conservados com a ordem da substituição?
2. Ainda sobre auto-adjuncidade não-linear, existe alguma conexão entre auto-adjuncidade não-linear e integrabilidade de equações? Apesar de existirem

problemas teóricos, como o mencionado no item anterior, responder esta pergunta proveria um método que poderia ser indicativo da integrabilidade de sistemas e equações. Essa ideia é explorada de modo ingênuo em [33].

3. Num artigo muito recente [17], os autores consideraram uma determinada equação integrável e argumentaram que a única escolha consistente com os pares de Lax da equação daria forma a uma solução *peakon* diferente da já conhecida na literatura [53]. Como o cálculo das soluções *peakon* se tornou padrão, este artigo levanta um sério questionamento sobre se tudo o que foi feito é realmente calculado da maneira correta. Apesar de recente, o artigo vem atraindo o interesse dos maiores nomes da área.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] M. J. Ablowitz, *Nonlinear dispersive waves: asymptotic analysis and solitons*, Cambridge University Press, Cambridge, (2011).
- [2] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, Cambridge University Press, Cambridge, (1991).
- [3] S. C. Anco, Symmetry properties of conservation laws, *Int. J. Mod. Phys. B*, (2016). DOI: 10.1142/S0217979216400038.
- [4] S. C. Anco and G. Bluman, Direct construction of conservation laws from field equations, *Phys. Rev. Lett.*, v. 78, 2869–2873, (1997).
- [5] S. C. Anco and G. Bluman, Direct construction method for conservation laws of partial differential equations: I. Examples of conservation law classifications, *European J. Appl. Math.*, v. 13, 545–566, (2002).
- [6] S. C. Anco and G. Bluman, Direct construction method for conservation laws of partial differential equations: II. General treatment, *European J. Appl. Math.*, v. 13, 567–585, (2002).
- [7] S. C. Anco, P. L. da Silva and I. L. Freire, A family of wave-breaking equations generalizing the Camassa-Holm and Novikov equations, *J. Math. Phys.*, v. 56, paper 091506, (2015).
- [8] T. B. Benjamin, J. L. Bona and J. J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, v. 272, 47–78, (1972).
- [9] G. W. Bluman and S. C. Anco, *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences Series 154, Springer, New York, (2002).
- [10] G. W. Bluman and S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences Series 81, Springer, New York, (1989).

- [11] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira, *Fundamentos de análise funcional*, Textos Universitários, 1ª edição, SBM, (2012).
- [12] Y. Bozhkov, I. L. Freire and N. H. Ibragimov, Group analysis of the Novikov equation, *Comp. Appl. Math.*, v. 33, 193–202, (2014).
- [13] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, (2011).
- [14] R. Camassa and D. D. Holm, An integrable shallow water equation with peaked solitons, *Phys. Rev. Lett.*, v. 71, 1661–1664, (1993).
- [15] R. Camassa, D. D. Holm and J. M. Hyman, A new integrable shallow water equation, *Adv. Appl. Mech.*, v. 31, 1–33, (1994).
- [16] F. A. C. C. Chalub e J. P. Zubelli, Sólitons: na crista da onda por mais de 100 anos, *Matemática Universitária*, n. 30, 41–65, SBM, (2001).
- [17] X. Chang and J. Szmigielski, Lax integrability of the modified Camassa-Holm equation and the concept of peakons, *J. Nonlinear Math. Phys.*, v. 23, 563–572, (2016).
- [18] P. A. Clarkson, E. L. Mansfield and T. J. Priestley, Symmetries of a class of nonlinear third-order partial differential equations, *Math. Comput. Modelling*, v. 25, 195–212, (1997).
- [19] A. Constantin, Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation: a geometric approach, *Ann. Inst. Fourier*, v. 50, 321–362, (2000).
- [20] A. Constantin and J. Escher, Global existence and blow-up for a shallow water equation, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, v. 26, 303–328, (1998).
- [21] A. Constantin and J. Escher, Well-posedness, global existence, and blowup phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 51, 475–504, (1998).
- [22] A. Constantin and W. Strauss, Stability of peakons, *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 53, 603–610, (2000).
- [23] P. L. da Silva, Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática, Universidade Federal do ABC, (2013).

- [24] P. L. da Silva and I. L. Freire, A family of peakon equations, submitted, (2016).
- [25] P. L. da Silva and I. L. Freire, An equation unifying both Camassa-Holm and Novikov equations, Proceedings of the 10th AIMS International Conference, (2015), DOI: 10.3934/proc.2015.0304.
- [26] P. L. da Silva e I. L. Freire, Auto-adjunticidade não-linear e leis de conservação da equação de Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 3, N. 1, (2015).
- [27] P. L. da Silva e I. L. Freire, Comparações entre o Teorema de Noether e o Teorema de Ibragimov utilizando uma classe de equações diferenciais ordinárias, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 3, N. 1, (2015).
- [28] P. L. da Silva and I. L. Freire, On certain shallow water models, scaling invariance and strict self-adjointness, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, (2015), DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0022.
- [29] P. L. da Silva and I. L. Freire, On the Group Analysis of a Modified Novikov Equation, Interdisciplinary Topics in Applied Mathematics, Modeling and Computational Science 117, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 161–166, (2015), DOI: 10.1007/978-3-319-12307-3\_23.
- [30] P. L. da Silva and I. L. Freire, Strict self-adjointness and shallow water models, arXiv: 1312.3992, (2013).
- [31] P. L. da Silva and I. L. Freire, Symmetry analysis of a class of autonomous even-order ordinary differential equations, *IMA J. Appl. Math.*, v. 80, 1739–1758, (2015).
- [32] P. L. da Silva e I. L. Freire, Uma nova equação unificando quatro modelos físicos, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 3, N. 2, (2015).
- [33] P. L. da Silva, I. L. Freire and J. C. S. Sampaio, A family of homogeneous equations: integrable members, Lax pairs and peakon solutions, (submitted), (2016), arXiv: 1602.06525v3.

- [34] A. Degasperis, D. D. Holm and A. N. W. Hone, A new integrable equation with peakon solutions, *Theor. Math. Phys.*, v. **133**, 1463–1474, (2002).
- [35] A. Degasperis and M. Procesi, Asymptotic integrability, in A. Degasperis, G. Gaeta, *Symmetry and Perturbation Theory II – SPT98*, 23–37, World Scientific, Singapura, (1999).
- [36] S. Dimas and D. Tsoubelis, SYM: A new symmetry-finding package for Mathematica, *Proceedings of the 10th international conference in modern group analysis*, 64–70, (2004).
- [37] P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Solitons: an introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, (1989).
- [38] H. R. Dullin, G. A. Gottwald and D. D. Holm, On asymptotically equivalent shallow water wave equations, *Phys. D*, v. **190**, 1–14, (2004).
- [39] L. Eyges, *The classical electromagnetic field*, Dover, New York, (1972).
- [40] A. S. Fokas, On a class of physically important integrable equations, *Phys. D*, v. **87**, Issues 1–4, 145–150, (1995).
- [41] I. L. Freire, Conservation laws for self-adjoint first order evolution equations, *J. Nonlinear Math. Phys.*, v. **18**, 279–290, (2011).
- [42] I. L. Freire, New classes of nonlinearly self-adjoint evolution equations of third- and fifth-order, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, v. **18**, 493–499, (2013).
- [43] I. L. Freire, New conservation laws for inviscid Burgers equation, *Comp. Appl. Math.*, v. **31**, 559–567, (2012).
- [44] I. L. Freire, Self-adjoint sub-classes of third and fourth-order evolution equations, *Appl. Math. Comp.*, v. **217**, 9467–9473, (2011).
- [45] I. L. Freire and J. C. S. Sampaio, Nonlinear self-adjoint classification of a Burgers-KdV family of equations, *Abstr. Appl. Anal.*, paper 804703, (2014). DOI: 10.1155/2014/804703.
- [46] I. L. Freire and J. C. S. Sampaio, Nonlinear self-adjointness of a generalized fifth-order KdV equation, *J. Phys. A: Math. Theor.*, v. **45**, paper 032001, (2012).

- [47] I. L. Freire e J. C. S. Sampaio, Solução do tipo peakon para uma equação evolutiva de terceira ordem, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 3, N. 2, (2015).
- [48] I. L. Freire, P. L. da Silva and M. Torrisi, Lie and Noether symmetries for a class of fourth-order Emden-Fowler equations, *J. Phys. A: Math. Theor.*, v. 46, paper 245206, 9 pp., (2013).
- [49] Y. Fu, G. Gui, Y. Liu and C. Qu, On the Cauchy problem for the integrable modified Camassa-Holm equation with cubic nonlinearity, *J. Diff. Eq.*, v. 255, 1905–1938, (2013).
- [50] M. L. Gandarias, Weak self-adjoint differential equations, *J. Phys. A: Math. Theor.*, v. 44, paper 262001, (2011).
- [51] C. S. Gardner, Korteweg-de Vries equation and generalizations IV. The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system, *J. Math. Phys.*, v. 12, 1548–1551, (1971).
- [52] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Korteweg-de Vries equation and generalization. VI. Methods for exact solution, *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 27: 97–133, (1974).
- [53] G. Gui, Y. Liu, P. J. Olver and C. Qu, Wave-breaking and peakons for a modified Camassa-Holm equation, *Commun. Math. Phys.*, v. 319, 731–759, (2013).
- [54] A. A. Himonas and C. Holliman, The Cauchy problem for the Novikov equation, *Nonlinearity*, v. 25, 449–479, (2012).
- [55] A. A. Himonas and J. Holmes, Holder continuity of the solution map for the Novikov equation, *J. Math. Phys.*, v. 54, paper 061501, (2013).
- [56] A. N. W. Hone and J. P. Wang, Integrable peak on equations with cubic nonlinearities, *J. Phys. A: Math. Theor.*, v. 41, paper 372002, (2008).
- [57] J. K. Hunter and B. Nachtergaele, *Applied Analysis*, World Scientific, Singapore, (2001).
- [58] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 3rd ed., New York, (1993).

- [59] N. H. Ibragimov, A practical course in differential equations and Mathematical modelling, World Scientific, Singapore, (2010).
- [60] N. H. Ibragimov, A new conservation theorem, *J. Math. Anal. Appl.*, v. 333, 311–328, (2007).
- [61] N. H. Ibragimov, Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws, Archives of ALGA, Volume 7-8, 1–90, ALGA Publications, Sweden, (2010).
- [62] N. H. Ibragimov, CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, Volume 1: Symmetries exact solutions and conservation laws, CRC Press, Boca Raton, (1994).
- [63] N. H. Ibragimov, CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, Volume 2: applications in engineering and physical Sciences, CRC Press, Boca Raton, (1994).
- [64] N. H. Ibragimov, Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations, Mathematical Methods in Practice, Wiley, New York, (1999).
- [65] N. H. Ibragimov, Nonlinear self-adjointness and conservation laws, *J. Phys. A: Math. Theor.*, v. 44, paper 432002, (2011).
- [66] N. H. Ibragimov, Transformation groups and Lie algebras, World Scientific, Singapore, (2013).
- [67] N.H. Ibragimov, R.S. Khamitova and A. Valenti, Self-adjointness of a generalized Camassa-Holm equation, *Appl. Math. Comp.*, v. 218, 2579–2583, (2011).
- [68] N. M. Ivanova and R. O. Popovych, Equivalence of conservation laws and equivalence of potential systems, *Int. J. Theor. Phys.*, v. 46, 2658–2668, (2007).
- [69] D. J. Korteweg and G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag.*, v. 39, 422–443, (1895).
- [70] I. S. Krasil'schick and A. M. Vinogradov, Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, (1999).

- [71] I. S. Krasil'schick and P. H. M. Kersten, *Symmetries and Recursion Operators for Classical and Sypersymmetric Differential Equations, Mathematics and Its Applications*, Springer, Netherlands, (2000).
- [72] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, (1989).
- [73] M. D. Kruskal, R. M. Miura, C. S. Gardner and N. J. Zabusky, Korteweg-de Vries equation and generalizations. V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws, *J. Math. Phys.*, v. **11**, 952–960, (1970).
- [74] P. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.*, v. **21**, 467–490, (1968).
- [75] P. D. Lax and R. S. Phillips, *Scattering Theory, Revised Edition*, Pure and Applied Mathematics 26, Academic Press, London, (1989).
- [76] J. M. Lee; *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2nd edition, New York, (2013).
- [77] J. Lenells, Traveling wave solutions of the Camassa-Holm equation, *J. Diff. Eq.*, v. **217**, 393–430, (2005).
- [78] X. Liu, Y. Liu and C. Qu, Orbital stability of the train of peakons for an integrable modified Camassa-Holm equation, *Adv. Math.*, v. **255**, 1–37, (2014).
- [79] J. Lützen, The prehistory of the theory of distributions, *Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*, v. **7**, Springer-Verlag, New York, (1982).
- [80] A. V. Mikhailov, Introduction, *Lect. Notes Phys.* 767, 1–18, (2009).
- [81] A. V. Mikhailov and V. V. Sokolov, Symmetries of Differential Equations and the Problem of Integrability, *Lect. Notes Phys.* 767, 19–88, (2009).
- [82] A. V. Mikhailov and V. S. Novikov, Perturbative symmetry approach, *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. **35**, (2002).
- [83] R. M. Miura, Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation, *J. Math. Phys.*, v. **9**, 1202–1204, (1968).

- [84] R. M. Miura, C. S. Gardner and M. D. Kruskal, Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion, *J. Math. Phys.*, **v. 9**, 1204–1209, (1968).
- [85] E. Noether, Invariante Variationsprobleme, *Math. Phys. Kl.*, 235–257, (1918) (veja *Transport Theor. Stat. Phys.*, **v. 1**, 186–207, (1971) para uma tradução em inglês).
- [86] V. S. Novikov, Generalizations of the Camassa-Holm equation, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **v. 42**, paper 342002, (2009).
- [87] P. J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2nd edition, New York, (1993).
- [88] P. J. Olver, Conservation laws of free boundary problems and the classification of conservation laws for water waves, *Trans. Am. Math. Soc.*, **v. 277**, 353–280, (1983).
- [89] P. J. Olver, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Math. Proc. Cambridge Phils. Soc.*, **v. 85**, 143–160, (1979).
- [90] P. J. Olver, Evolution equations possessing infinitely many symmetries, *J. Math. Phys.*, **v. 18**, 1212–1215, (1977).
- [91] P. J. Olver and P. Rosenau, Tri-Hamiltonian duality between solitons and solitary-wave solutions having compact support, *Phys. Rev. E*, **v. 53**, 1900–1906, (1996).
- [92] N. Petersson, N. Euler and M. Euler, Recursion operators for a class of integrable third-order evolution equations, *Stud. Appl. Math.*, **v. 112**, 201–225, (2004).
- [93] Z. Qiao, A new integrable equation with cuspons and W/M-shape-peaks solitons, *J. Math. Phys.*, **v. 47**, paper 112701-9, (2006).
- [94] C. Qu, X. Liu and Y. Liu, Stability of peakons for an integrable modified Camassa-Holm equation with cubic nonlinearity, *Comm. Math. Phys.*, **v. 322**, 967–997, (2013).
- [95] J. A. Sanders and J. P. Wang, On the integrability of homogeneous scalar evolution equations, *J. Diff. Eq.*, **v. 147**, 410–434, (1998).
- [96] D. J. Saunders, The Geometry of Jet Bundles, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, New York, (1989).

- [97] L. Schwartz, *Mathematics for the Physical Sciences*, Dover, New York (2008).  
Tradução em inglês do livro original L. Schwartz, *Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques*, Editions Hermann, Paris, (1966).
- [98] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, v. I, Hermann & Cie, (1950).
- [99] A. Sen, D. P. Ahalpara, A. Thyagaraja and G. S. Krishnaswami, A KdV-like advection-dispersion equation with some remarkable properties, *Commun. Nonlin. Sci. Num. Simul.*, v. **17**, 4115–4124, (2012).
- [100] C. H. Su and C. S. Gardner, Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. III. Derivation of the Korteweg de Vries Equation and Burgers Equation, *J. Math. Phys.*, v. **10**, 536–539 (1969).
- [101] S. R. Svirshchevskii, Group classification of nonlinear polyharmonic equations and their invariant solutions, *Diff. Eq.*, v. **29**, 1598–1547, (1993).
- [102] M. Torrisi and R. Tracinà, Quasi self-adjointness of a class of third order nonlinear dispersive equations, *Nonlin. Anal. RWA*, v. **14**, (2013).
- [103] V. V. Trofimov, *Introduction to Geometry of Manifolds with Symmetry*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, (1994).
- [104] O. Vallée and M. Soares, *Airy functions and applications to Physics*, Imperial College Press, London, (2004).
- [105] A. M. Vinogradov, Local Symmetries and Conservation Laws, *Acta Applic. Mathematicae*, v. **2**, 21-78, (1984).
- [106] V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker, New York, (1971).
- [107] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, (1983).
- [108] A. M. Wazwaz, Peakon and solitonic solutions for KdV-like equations, *Phys. Scr.*, v. **90**, N. 4, paper 045203, (2015).



## ÍNDICE

- Base de invariantes, 43
- Campo evolutivo, 124
- Campo vetorial, 17
- Carta coordenada, 6
- Condição de invariância, 56, 67
- Condições de contato, 50
- Conjunto  $G$ -invariante, 37
- Convolução, 131
- Coordenadas
  - adaptadas em  $J^k(\pi)$ , 20
  - adaptadas, 14
  - locais, 6
- Curva integral, 33
  - maximal, 33
- Decaimento no infinito, 87
- Densidade conservada, 86
- Derivação, 8
- Derivada
  - distribucional, 138
  - fraca, 138
- Derivada total, 58
- Derivada variacional, 93, 94
- Difeomorfismo, 7
- Diferencial, 8
- Distribuição, 136
  - regular, 138
  - singular, 138
- Distribuições de Cartan, 50
- Domínio coordenado, 6
- Equação
  - de KdV modificada, 126
  - de Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov, 68
  - de Airy, 124
  - de Camassa-Holm, 2, 68, 115
  - de Lax, 125
  - de Novikov, 1, 68, 116
  - de Novikov modificada, 68
- Equação diferencial
  - ordinária, 21
  - parcial, 21
- Equações determinantes, 59, 67
- Espaço
  - de Banach, 132
  - das funções teste, 134
  - de  $k$  jatos, 20
  - de Hilbert, 134
  - de jatos infinitos, 92
  - dual, 135
  - tangente, 8, 9
  - universal da Grupo-Análise, 92
  - vetorial, 17
- Espaços
  - $L^p(X)$ , 131

- Feixe de fibras, 14
- Fibra, 13
- Fibrado, 15
  - de  $k$ -jatos, 20
  - tangente, 17
  - vetorial, 16
  - vetorial trivial, 16
- Fluxo, 33
- Fluxo conservado, 86
- Função
  - $G$ -invariante, 37
  - $\delta$  de Dirac, 136
  - coordenada local, 6
  - de Heaviside, 139
  - diferenciável, 6
  - diferencial, 92
  - generalizada, 136
  - identidade, 7
  - inclusão, 7
  - localmente  $p$ -integrável, 133
  - sinal, 140
  - transformada, 46
- Funções
  - funcionalmente dependentes, 42
  - funcionalmente independentes, 42
  - localmente integráveis, 133
- Funcional
  - linear, 130
- Gerador infinitesimal, 34
- Grupo de Lie
  - a  $r$ -parâmetros, 24
  - conexo, 25
  - local a 1-parâmetro, 28
- Grupo de simetria, 37
  - de Lie, 48
- Grupo de simetrias, 48
- Grupo de transformações, 25
  - a 1-parâmetro, 26
- Grupo local de transformações a 1-parâmetro, 29
- Homomorfismo de grupos de Lie, 24
- Identidade de Noether, 97
- Imersão, 11
- Integrabilidade, 121
- Isomorfismo, 9, 10
- Isomorfismo de grupos de Lie, 24
- $k$ -jato, 19
- Lagrangeana, 97
- Lagrangeana formal, 102
- Lei de conservação, 86
- Localmente solúvel, 55
- Matriz
  - Jacobiana, 11
- Mergulho, 11
- Multi-índice, 18
- Onda
  - solitária, 146
- Operador
  - de Euler-Lagrange, 93
  - de Noether, 96
  - de recursão, 124
  - derivada total, 93
  - formal de recursão, 121
  - limitado, 130
  - linear, 130

- Operador contínuo, 130
- Par de Lax, 121, 125
- Peak, 143
- Perturbative symmetry approach, 122
- Primeira integral, 86
- Primeiro Teorema Fundamental de Lie, 32
- Princípio variacional, 97
- Projeção do  $l$ -jato, 21
- Prolongação, 19
- Pushforward, 11
- Representação coordenada, 6
- Seção, 17
  - local, 17
- Seções tangentes de ordem  $k$ , 19
- Simetria
  - generalizada, 123
- Simetria de Noether, 98
- Simetria variacional, 98
- Sistema
  - de características, 43
  - estritamente auto-adjunto, 106
  - não-linearmente auto-adjunto, 106
- Sistema adjunto, 101
- Sistema bi-Hamiltoniano, 121
- Sistema de equações diferenciais, 21
  - ordinárias, 21
  - parciais, 21
- Sistema reduzido, 64
- Solução
  - $G$ -invariante, 61
  - clássica, 21
  - peakon, 143, 144
- Submersão, 11
- Subvariedade
  - aberta, 6
  - regular, 12
- Suporte, 134
  - compacto, 134
- Teorema
  - da Aplicação Implícita, 13
  - da Aplicação Inversa, 13
  - de Cauchy-Kovalevskaya, 55
  - de Ibragimov, 102, 107
  - de Noether, 83, 85, 99
- Transformação, 25
- Transformação projetiva, 28
- Trivialização local, 15
- Valor regular, 13
- Variáveis paramétricas, 61
- Variável principal, 61
- Variedade diferenciável, 6
- Velocidade
  - da onda, 146
- Vetor conservado, 86
  - trivial, 89
- Vetores
  - tangentes, 8