



Universidade Federal do ABC

ANYELE LIMA ARAÚJO

PROPRIEDADE DE WADA EM MAPAS UNIDIMENSIONAIS

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da
CAPES

Santo André, 15 de setembro de 2020



Universidade Federal do ABC

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

ANYELE LIMA ARAÚJO

**PROPRIEDADE DE WADA EM MAPAS
UNIDIMENSIONAIS**

Orientador: Prof. Dr. Daniel Miranda Machado

Coorientador: Prof. Dr. Rafael Ribeiro Dias Vilela de Oliveira

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELA ALUNA ANYELE LIMA ARAÚJO,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. DANIEL MIRANDA MACHADO.

SANTO ANDRÉ, 15 DE SETEMBRO DE 2020

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Lima Araújo, Anyele
Propriedade de Wada em mapas unidimensionais / Anyele Lima
Araújo. — 2020.

65 fls.

Orientador: Daniel Miranda Machado
Coorientador: Rafael Ribeiro Dias Vilela de Oliveira

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2020.

1. bifurcação. 2. mapas unidimensionais. 3. propriedade de Wada. I.
Miranda Machado, Daniel. II. Ribeiro Dias Vilela de Oliveira, Rafael. III.
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020. IV. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).

Santo André , 07 de junho de 2022 .

Amyele Lima Araújo : Amyele Lima Araújo
Nome completo e Assinatura do(a) autor(a)

Daniel M. Mochado
Nome completo e Assinatura do(a) (co)orientador(a)



SIGAA - Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas
UFABC - Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Matemática
CNPJ nº 07.722.779/0001-06
Av. dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP - Brasil
ppg.matematica@ufabc.edu.br



FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata ANYELE LIMA ARAÚJO, realizada em 15 de Setembro de 2020:

Dr. DANIEL MIRANDA MACHADO, UFABC

Presidente - Interno ao Programa

Dr. RENE ORLANDO MEDRANO TORRICOS, UNIFESP

Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

Dr. EDUARDO GUERON, UFABC

Membro Titular - Examinador(a) Externo ao Programa

Dr. JEFERSON CASSIANO, UFABC

Membro Suplente - Examinador(a) Externo ao Programa

Dr. CHRISTIAN DA SILVA RODRIGUES, UNICAMP

Membro Suplente - Examinador(a) Externo à Instituição

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001”

Resumo

Diz-se que um sistema dinâmico apresenta a propriedade de Wada se possuir pelo menos três bacias de atração e as fronteiras de todas coincidirem, ou seja, se as três fronteiras forem iguais. Essa propriedade foi definida pela primeira vez em 1917 no contexto de fundamentos de topologia, sendo associada a sistemas dinâmicos apenas no fim do século passado. O presente trabalho aborda sistemas dinâmicos que possuem a propriedade de Wada e utiliza uma ferramenta numericamente verificável para testar se mapas unidimensionais possuem tal propriedade. A ferramenta apresentada (critério de Wada) foi utilizada para construir e caracterizar um novo mapa unidimensional que apresenta a propriedade de Wada. Além disso, provou-se que a propriedade de Wada é invariante por conjugação e verificou-se que o critério de Wada pode ser usado em mapas unidimensionais com mais de três bacias de atração.

Palavras-chave: mapas unidimensionais, propriedades de wada, bifurcação

Abstract

A dynamical system is said to have the Wada property if it has at least three basins of attraction and the boundaries of all coincide. This property was first defined in 1917 in the context of Fundamentals of Topology, being associated with Dynamical Systems only in the end of the last century. In the present work, we study dynamical systems that display the Wada property and use a numerically verifiable tool (called Wada criterion) to test if one-dimensional maps have the Wada property. The Wada criterion was used to construct and characterize a new one-dimensional map that presents the Wada property. In addition it has been proved that the Wada property is invariant under conjugacy and it was found that the Wada criterion can be used in one-dimensional maps with more than three basins of attraction.

Keywords: one-dimensional maps, Wada property, bifurcation

Lista de Figuras

0.1	Bacias de Wada em bolinhas de natal	1
1.1	Diagrama de teia de aranha de um ponto sob $f(x) = 2,95x(1 - x)$	4
1.2	Diagrama de Bifurcação do mapa logístico, $1 \leq \alpha \leq 4$	6
1.3	(a) A, B e C formam uma partição para o mapa apresentado; (b) Grafo de Transição	7
1.5	Iteradas do mapa da logístico de parâmetro 4.	8
1.4	Grafo de transição de $G(x) = 4x(1 - x)$	9
1.6	Iteradas do mapa da tenda.	9
2.1	Gráfico de s por $H^s(\mathbf{U})$	15
2.2	Conjunto de Cantor	16
2.3	Sistema com dois pontos atrativos.	18
2.4	Mapa linear com bacias de fronteira fractal e conjunto de Cantor criado pela equação 2.2 , respectivamente.	20
3.1	Função $V(x)$ e bacias de atração dos pontos $-x_0$ e x_0	22
3.2	Mapa da tenda com parâmetro 3	23
3.3	Gráfico de $G(x) = g^3(x)$	29
3.4	Bacias de atração do mapa logístico com parâmetro $\alpha = 3,84$	30
3.5	Gráfico de $G(x) = g^3(x)$ com os intervalos J_i , $1 \leq i \leq 5$	30
3.6	(a) Gráfico de $S = s^3$; (b) Gráfico da terceira iterada de $s(x) = rx(1-x^2)$ com três diferentes parâmetros.	33
3.8	Bacias de atração do mapa logístico modificado	33
3.7	Gráfico da derivada de Schwarz: $s(x) = 2,46x(1 - x^2)$	33
3.9	Conjunto C_1 e C_2 para $G = g^3$	36
3.10	Comportamento das condições iniciais em $[0, 1]$ para o mapa logístico de parâmetro 3,9605.	41
3.11	Bifurcação tangente no intervalo $(3,96, 3,9605)$	42

Lista de Figuras

A.1 Grafo associado à matriz A	49
--	----

Conteúdo

1	Dinâmica de Mapas Unidimensionais	3
1.1	Pontos fixos, pontos periódicos e estabilidade	3
1.2	Itinerários e grafos de transição	6
1.3	Conjugação	9
2	Geometria dos conjuntos invariantes sob mapas unidimensionais	13
2.1	Bacias de atração	13
2.2	Fractais	14
2.3	Bacias de atração com fronteiras fractais	18
3	Propriedade de Wada em mapas unidimensionais	21
3.1	Propriedade de Wada	21
3.2	Mapa Logístico	29
3.3	Mapa Logístico Modificado	32
3.4	Demonstração do Teorema	34
3.5	Conjugação e a Propriedade de Wada	39
3.6	O caso com mais de três bacias de atração	40
4	Considerações Finais	47
A	Matrizes Irredutíveis	49

“A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria”.

Paulo Freire

Agradecimentos

A Deus por estar presente em cada segundo desta jornada.

Aos meus pais, Maria e Geraldo, e às minhas irmãs, Flávia e Tainá, pelo apoio nos momentos difíceis e alegria nos fáceis.

Ao Daniel e ao Rafael pela eterna paciência, atenção e compreensão.

Introdução

A propriedade de Wada é uma propriedade topológica, a princípio não relacionada com sistemas dinâmicos. Foi proposta com a seguinte motivação: construir uma divisão do plano que consiste de três regiões não sobrepostas, conexas, com a particularidade de que cada ponto da fronteira de uma região é ponto da fronteira das outras duas regiões [1].

A propriedade de Wada se manifesta por exemplo em enfeites de natal. A figura 0.1 foi criada dispondo quatro esferas metálicas (bolinhas de árvores de natal, por exemplo) de modo que três fiquem apoiadas no mesmo plano e a quarta apoiada sobre as outras três, fazendo com que cada uma das esferas toque as outras três. Depois de dispostas as esferas é lançada luz nos vãos entre as esferas, resultando no padrão visto na imagem [2].

Ao se ampliar seções cada vez menores de regiões dessa imagem contendo ao menos duas cores, percebe-se que as três cores se fazem presentes sempre, o que indica a presença da propriedade de Wada, considerando que cada cor represente um conjunto.

Foi só na segunda metade do século XX que a propriedade foi associada a Sistemas Dinâmicos.

Kennedy e Yorke [3] observaram a ocorrência de sistemas que apresentam três ou mais bacias de atração de modo que as fronteiras de todas coincidam.

No início dos anos 2000, Breban e Nusse [1] estabeleceram um critério para identificar a presença da propriedade de Wada em mapas unidimensionais que atendam um conjunto de hipóteses verificáveis numericamente.

Os objetivos desta dissertação são (i) aplicar o critério proposto a um novo mapa; (ii)

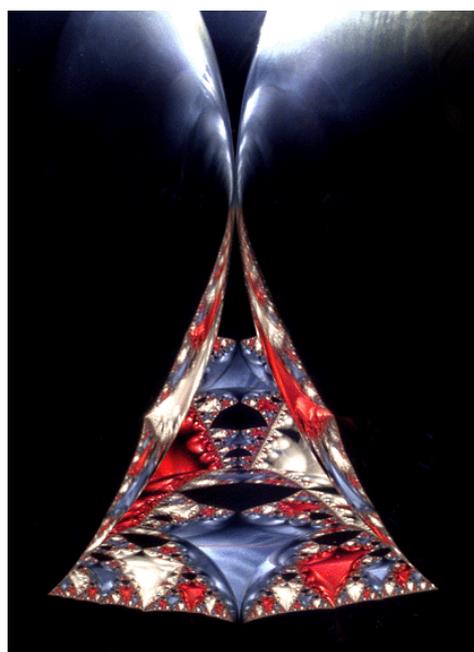


Figura 0.1: Bacias de Wada em bolinhas de natal

Fonte: [2]

Conteúdo

provar que o critério é válido para mapas com $n \geq 3$ bacias de atração (e não apenas três como é feito originalmente); e, por fim, (iv) provar que a propriedade de Wada é invariante por conjugação.

O texto está organizado em três capítulos principais, sendo o primeiro, baseado em [4], sobre resultados gerais de sistemas dinâmicos, tais como estabilidade de órbitas e conjugação. O segundo capítulo aborda conceitos sobre a relação entre sistemas dinâmicos e fractais, como bacias de atração e bacias com fronteira fractal, e foi baseado em [5] e [6]. Já o terceiro define a propriedade de Wada, apresenta os resultados do artigo [1] e explora os resultados originais, objetivo deste trabalho, nas seções 3.3, 3.5 e 3.6.

1 Dinâmica de Mapas Unidimensionais

Um mapa unidimensional é uma função de uma variável cujo domínio é igual ao contradomínio ($f : I \rightarrow I$, $I \subset \mathbb{R}$). A família de mapas logísticos é um exemplo de mapas unidimensionais no conjunto dos números reais, descrito pela regra $f(x) = ax(1 - x)$, sendo a um parâmetro real. É o principal exemplo para a análise da dinâmica de mapas unidimensionais, pois, conforme o parâmetro a varia, há diferentes comportamentos dinâmicos, a quantidade de pontos fixos e periódicos se alteram, podendo haver órbitas estáveis e instáveis, entre outras características importantes. As próximas páginas são dedicadas a definir, exemplificar e enunciar alguns resultados que caracterizam a dinâmica de um mapa unidimensionais. Os conteúdos aqui abordados tem por base o livro [4], capítulos 1 e 3.

1.1 Pontos fixos, pontos periódicos e estabilidade

Definição 1.1. A *órbita* de um ponto x sob um mapa f é o conjunto das iteradas de x sob o mapa, ou seja, é o conjunto $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$. Um ponto p é um **ponto fixo** se $f(p) = p$. Um ponto p é um **ponto periódico** (ou ponto de período k) se $f^k(p) = p$, sendo k o menor inteiro positivo que viabiliza a igualdade.

O mapa logístico de parâmetro a , dado por $f(x) = ax(1 - x)$, tem pontos fixos no intervalo $I = [0, 1]$ em 0 e $x^* = (a - 1)/a$ se $a > 1$. A órbita desses pontos fixos são os conjuntos $\{0, 0, \dots\}$ e $\{x^*, x^*, \dots\}$. Por abuso de linguagem pode-se denotar por órbita a sequência $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$.

1 Dinâmica de Mapas Unidimensionais

A existência de pontos fixos é garantida pelo seguinte teorema, que será útil também para provar a existência de pontos periódicos em momento oportuno:

Teorema 1.2. *Seja f um mapa real contínuo e seja $I = [a, b]$ um intervalo tal que $f(I) \supseteq I$. Então f tem um ponto fixo em I .*

Demonstração. Como o maior valor possível para $f(I)$ é b e o menor possível é a , existe um ponto em I para o qual a função $f(x) - x \geq 0$, e um ponto em I para o qual $f(x) - x \leq 0$. Pelo Teorema do valor intermediário, existe um ponto c tal que $f(c) - c = 0$. \square

A notação $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$ da definição 1.1 é forma de representar uma órbita. Existe outra maneira de representar órbitas, que é o “cobwebplot” (diagrama da teia de aranha), figura 1.1, feita da seguinte maneira: traça-se o gráfico de f num eixo coordenado juntamente com a função identidade, escolhe-se um valor do domínio da função, projeta-o verticalmente no mapa e em seguida horizontalmente na função identidade, depois novamente no mapa e assim sucessivamente.

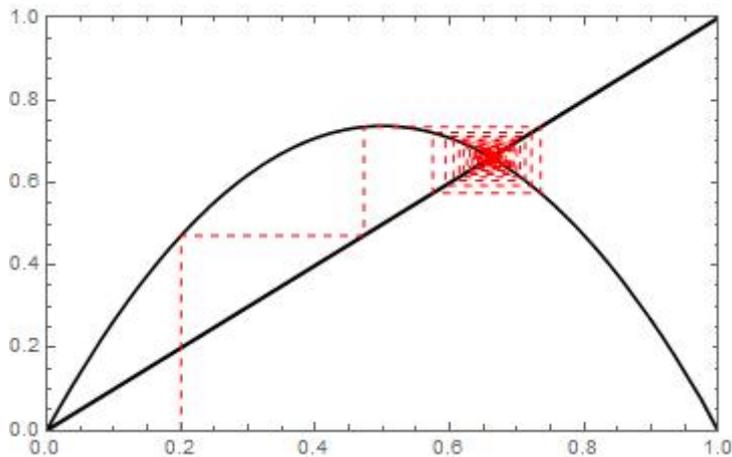


Figura 1.1: Diagrama de teia de aranha de um ponto sob $f(x) = 2,95x(1 - x)$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Note que a órbita do ponto escolhido na figura 1.1 se aproxima a cada iterada do ponto $f(x) = x$, ficando, a partir da terceira iterada, presa em uma vizinhança do ponto fixo. Esse comportamento é inerente a pontos fixos chamados atratores ou sorvedouros, ou seja, pontos que atraem o seu entorno. Há também pontos fixos que repelem os pontos ao redor, estes chamam-se pontos repulsores ou fontes. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 1.3. *Seja f um mapa real e seja p um ponto fixo de f . Se todos os pontos suficientemente próximos a p são atraídos para p , então p é dito **sorvedouro** ou ponto*

fixo atrativo. Se todos os pontos suficientemente próximos a \mathbf{p} são repelidos de \mathbf{p} , então \mathbf{p} é dito **fonte** ou ponto fixo repulsor. Mais precisamente, se existir um $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in N_\epsilon(\mathbf{p})$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = \mathbf{p}$, então \mathbf{p} é um sorvedouro. Se em $N_\epsilon(\mathbf{p})$ todo ponto exceto \mathbf{p} for eventualmente mapeado para fora de $N_\epsilon(\mathbf{p})$, então \mathbf{p} é uma fonte.

Como traçar o diagrama de teia de aranha é um tanto trabalhoso, é interessante que se tenha outras formas de verificar se um dado ponto é um sorvedouro ou uma fonte. Uma dessas formas é apresentada no teorema 1.4, cuja demonstração pode ser encontrada em [4].

Teorema 1.4. *Seja f um mapa (suave) em \mathbb{R} e seja \mathbf{p} um ponto fixo de f .*

1. *Se $|f'(\mathbf{p})| < 1$, então \mathbf{p} é um sorvedouro;*
2. *Se $|f'(\mathbf{p})| > 1$, então \mathbf{p} é uma fonte;*

O teorema tratou apenas do caso de ponto fixo mas, para um ponto periódico, não ocorre diferente. Considere \mathbf{p} um ponto periódico de período k , quando \mathbf{p} for uma fonte (sorvedouro) da função f^k , a órbita de \mathbf{p} será uma fonte periódica (sorvedouro periódico). Essa conclusão segue da aplicação do teste da derivada, teorema 1.4, porém o teste é feito considerando $|f'(\mathbf{p}_k) \dots f'(\mathbf{p}_1)|$, uma vez que:

$$\begin{aligned}
 (f^k)'(\mathbf{p}_1) &= (f(f^{k-1}))'(\mathbf{p}_1) \\
 &= f'(f^{k-1}(\mathbf{p}_1))(f^{k-1})'(\mathbf{p}_1) \\
 &= f'(f^{k-1}(\mathbf{p}_1))f'(f^{k-2}(\mathbf{p}_1)) \dots f'(\mathbf{p}_1) \\
 &= f'(\mathbf{p}_k)f'(\mathbf{p}_{k-1}) \dots f'(\mathbf{p}_1).
 \end{aligned}$$

Analisando a estabilidade dos pontos fixos para a família de mapas logísticos, conclui-se que quando $1 < \mathbf{a} < 3$, o ponto fixo $x^* = (\mathbf{a} - 1)/\mathbf{a}$ é um sorvedouro, uma vez que $|f'(x^*)| = |-\mathbf{a} + 2| < 1$ para esses valores de \mathbf{a} , pode-se mostrar que condições iniciais em $(0, 1)$ são atraídas para x^* , e os extremos são atraídos para o ponto 0. Quando $\mathbf{a} > 3$, $|f'(x^*)| = |-\mathbf{a} + 2| > 1$ e então x^* se torna uma fonte.

A verificação da existência de pontos periódicos para a família de mapas logísticos pode ser feito usando o diagrama de bifurcação desse mapa, figura 1.2, que é o gráfico que descreve o conjunto assintótico em função do parâmetro. Note que a linha que começa em $(1, 0)$ se bifurca em torno do parâmetro $\mathbf{a} = 3$, isso significa que os mapas com

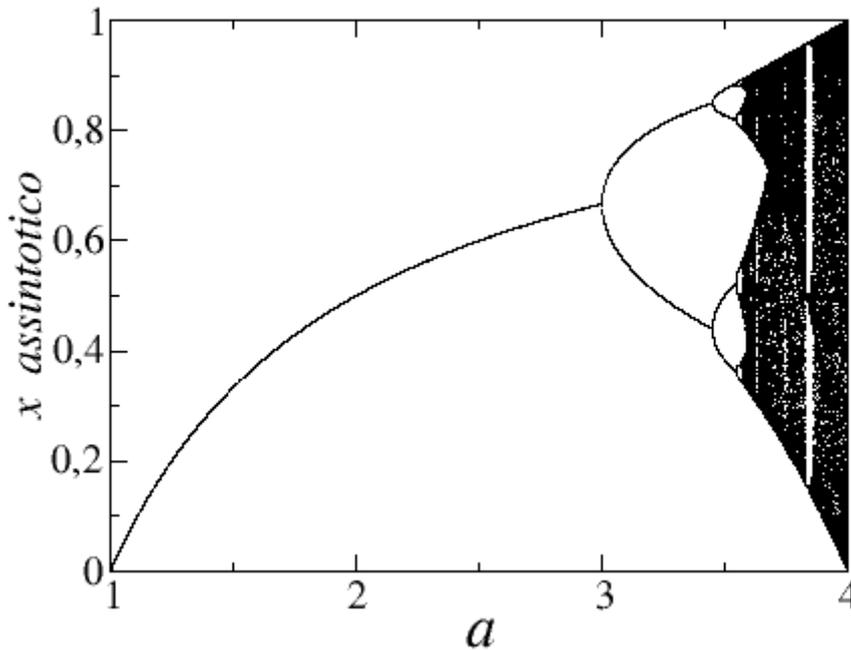


Figura 1.2: Diagrama de Bifurcação do mapa logístico, $1 \leq a \leq 4$.
 Fonte: Elaborada pela autora.

parâmetros entre 1 e 3 possuem apenas um ponto fixo atrativo e quando o parâmetro está entre 3 e 3,5 o mapa possui uma órbita de período 2. À medida que a cresce ocorrem mais bifurcações, nas quais nascem pontos periódicos de todos os períodos. Mais detalhes sobre o diagrama de bifurcação podem ser encontrados em [4].

1.2 Itinerários e grafos de transição

Já foram apresentadas duas formas de representar uma órbita. Esta seção objetiva introduzir mais uma forma de descrever uma órbita, que é por meio de itinerários. Considere o intervalo $I = [0, 1]$. Divida-o em dois subintervalos iguais, $[0, 1/2]$ e $[1/2, 1]$, atribua a letra L para os valores em $[0, 1/2]$ e R para os que estão em $[1/2, 1]$. O itinerário da órbita de um ponto será uma sequência composta por L 's e R 's conforme as iteradas do mapa naquele ponto estiverem em $[0, 1/2]$ ou $[1/2, 1]$. Quando o itinerário possui uma sequência infinita de L 's ou R 's usa-se a notação \bar{L} ou \bar{R} .

Exemplo 1.5. Seja T o mapa da tenda $T(x) = 2x$ se $x \in [0, 1/2]$ e $T(x) = 2(1 - x)$ se $x \in [1/2, 1]$ e $x_0 = 3/4$ uma condição inicial em $[1/2, 1]$, então o itinerário de x_0

inicia-se com R , $T(x_0) = 1/2$, que pode estar em L ou R , considere que esteja em R , $T^2(x_0) = 1$, $1 \in R$, $T^3(x_0) = 0$, $0 \in L$ e as demais iteradas de x_0 serão idênticamente nulas quando $k \rightarrow \infty$, assim, $RRRLL\bar{L}$ corresponde ao itinerário de x_0 sob esse mapa.

Por vezes não é necessário saber qual é o itinerário de cada condição inicial sob um mapa, mas sim possibilidades de construção de itinerários e chegar em outro. A ferramenta usada para descrever tais possibilidades são os grafos de transição que têm o aspecto da figura 1.3(b). A construção de um grafo de transição se dá pela regra: há uma seta de A para B se, e somente se, $f(A)$ contém B . Desse modo, qualquer itinerário construído respeitando-se as setas do grafo de transição é realizado por (pelo menos) uma órbita do mapa.

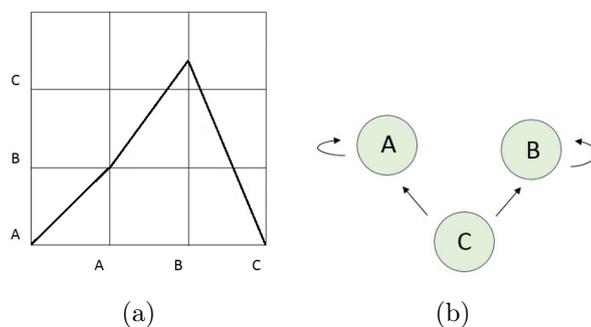


Figura 1.3: (a) A , B e C formam uma partição para o mapa apresentado; (b) Grafo de Transição

Fonte: Elaborada pela autora.

Na figura 1.3(a), segundo a regra de construção, não é possível haver uma seta de A para C , pois $f(A)$ não contém C , nem pode haver uma seta de C para si mesmo. Note também que não é possível haver sequências infinitas de dois ou mais símbolos, pois as setas partem apenas de C para B e A e de A e B para si mesmos, então é possível sair de uma das partições e ir para outra diferente, mas não é possível voltar para a inicial. Também pela regra de construção se, por ventura, em um grafo de transição ocorrer a seguinte sequência de setas $A \rightarrow B \rightarrow C$, implica que $f(A) \supseteq B$ e $f(B) \supseteq C$ e, então, $f^2(A) \supseteq C$.

Sejam f um mapa e I um intervalo tal que a sequência I_1, I_2, \dots, I_n de subintervalos fechados de I satisfaça $f(I_1) \supseteq I_2, f(I_2) \supseteq I_3, \dots, f(I_{n-1}) \supseteq I_n$ e, por fim, $f(I_n) \supseteq I_1$. De acordo com a última sentença do parágrafo acima é possível concluir que $f^n(I_1) \supseteq I_1$ e pelo teorema do ponto fixo, 1.2, f^n tem um ponto fixo em I_1 .

Agora, assumamos que $S_1 S_2 \dots S_k S_1$ é um itinerário no grafo de transição de um mapa f , pelo que foi apresentado anteriormente $f^k(S_1)$ tem um ponto fixo em S_1 , o que prova a existência de órbitas periódicas para um mapa. A órbita que possui o itinerário

1 Dinâmica de Mapas Unidimensionais

$S_1S_2\dots S_kS_1$ pode não ser, necessariamente, uma órbita de período k , mas sim uma órbita de período $s < k$, desde que s divida k .

Corolário 1.6. *Seja $S_1S_2\dots S_kS_1$ um itinerário no grafo de transição de um mapa f . Então o subintervalo denotado por $S_1S_2\dots S_kS_1$ contém um ponto fixo de f^k .*

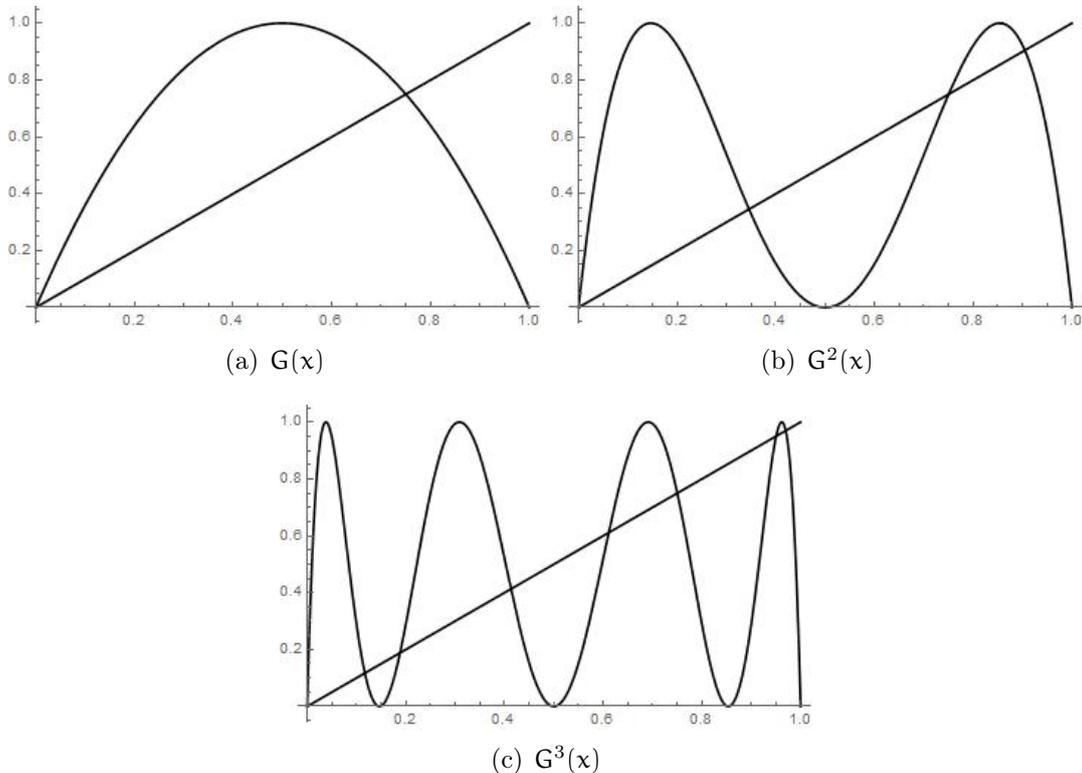


Figura 1.5: Iteradas do mapa da logístico de parâmetro 4.
Fonte: Elaborada pela autora.

Exemplo 1.7. *O mapa logístico de parâmetro $a = 4$, $G(x) = 4x(1 - x)$, tem 2^n pontos periódicos, devido a regularidade de dobrar a quantidade de pontos fixos a cada iteração, como pode ser observado na figura 1.5. Além disso, a existência desses pontos é assegurada pelo grafo de transição desse mapa apresentado na figura 1.4. Por meio dele e do corolário 1.6, é possível garantir a existência de itinerários como LRLRLR... ou RRLRRLRRL... . É garantida também a presença de pontos periódicos de todos os períodos para $G(x) = 4x(1 - x)$, uma vez que tendo, por exemplo, o itinerário RRLR conclui-se rapidamente que f^4 tem um ponto fixo em \mathbf{R} , mas f^4 pode ter órbitas de período 1, 2 ou 4, entretanto $\overline{\text{RRLR}}$ não corresponde a órbitas de período 1 ou 2 (itinerário de um ponto fixo seria do tipo RRRR... ou LLLL... e de um ponto de período 2 seria, por exemplo, LRLR...). Esse argumento pode ser usado para provar a existência de qualquer órbita de qualquer período.*

1.3 Conjugação

Alguns mapas são mais complicados de se trabalhar dependendo do aspecto abordado. Por exemplo, em uma ou outra situação pode ser necessário usar a derivada da n -ésima iterada do mapa. No caso do mapa logístico, a derivada muda a cada iteração, o que dificulta o seu cálculo. Devido a isso esta seção dedica-se a tratar o conceito de conjugação, que é uma maneira de tratar um mapa por meio de outro com dinâmica similar e é definida da seguinte forma:

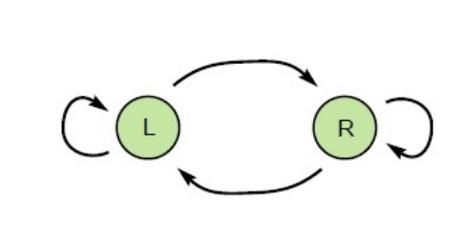


Figura 1.4: Grafo de transição de $G(x) = 4x(1 - x)$

Fonte: [4]

Definição 1.8. Os mapas f e g são conjugados se eles se relacionam por uma mudança de coordenadas contínua e bijetiva, isto é, se $C(f(x)) = g(C(x))$, $\forall x$ no domínio de f , sendo C um mapa contínuo e bijetivo.

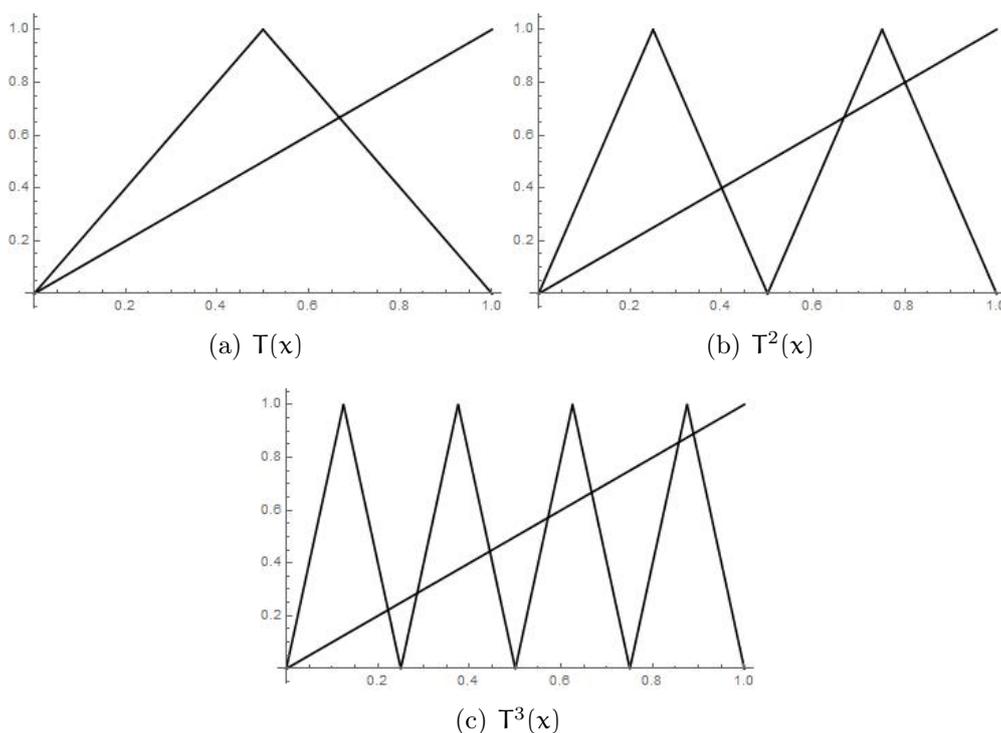


Figura 1.6: Iteradas do mapa da tenda.

Fonte: Elaborada pela autora.

Antes de explorar as propriedades dos conjugados, considere o mapa do exemplo 1.5, o mapa da tenda. Graficamente ele tem o aspecto da 1.6(a). Note que a cada iteração a quantidade de tendas dobra, em processo análogo ao mapa logístico de parâmetro 4.

1 Dinâmica de Mapas Unidimensionais

O mapa da tenda tem um ponto fixo em $x = 2/3$ e a derivada nesse ponto é -2 , portanto fonte, e a derivada para o mapa logístico no ponto fixo $x^* = 3/4$ é $G'(3/4) = 4(1 - 2(3/4)) = -2$, também fonte. Fazendo os cálculos para as derivadas dos pontos de período 2, encontra-se o valor 4 para ambos os mapas, continuando a investigação para pontos de períodos maiores esse comportamento se repetirá.

Isso não ocorre por pura coincidência, mas sim porque G e T são conjugados. O mapa que permite essa correspondência é $C(x) = (1 - \cos \pi x)/2$, C é injetivo e mapeia o intervalo $[0, 1]$ em si mesmo como os mapas da tenda e logístico. Abaixo segue a verificação de que os mapas T e G são conjugados para $x \in [0, 1/2]$, para os valores pertencentes à outra metade do intervalo a prova é feita de forma análoga com o devido ajuste.

$$\begin{aligned}
 G(C(x)) &= 4C(x)(1 - C(x)) \\
 &= 4 \left(\frac{1 - \cos \pi x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos \pi x}{2} \right) \\
 &= 1 - \cos^2 \pi x \\
 &= \sin^2 \pi x \\
 &= \left(\frac{1 - \cos \pi(2x)}{2} \right) \\
 &= C(T(x))
 \end{aligned}$$

Sejam f e g dois mapas conjugados, ou seja, existe h contínuo e injetivo tal que $h(f(x)) = g(h(x))$. Pela inversa h^{-1} é possível tomar g como $g = hf h^{-1}$, assim a n -ésima iterada de g pode ser escrita como

$$g^n = hf h^{-1} hf h^{-1} \dots hf h^{-1} = hf^n h^{-1}.$$

Portanto, as informações sobre as iteradas de f se estendem à g por meio dos conjugados e da igualdade $f = h^{-1}gh$ é possível concluir que se x é um ponto de período k de f então $h(x)$ é um ponto de período k de $g(x)$. Além disso, conjugados preservam a estabilidade do ponto, resultado enunciado no teorema 1.9.

Teorema 1.9. *Sejam f e g mapas conjugados, isto é, $h(f(x)) = g(h(x))$ para todo x . Se x é um ponto de período k para f , então $h(x)$ é um ponto de período k para $g(x)$. Se, ainda, h' existe e não assume o valor 0 em nenhum ponto da órbita periódica de f , então $(g^k)'(h(x)) = (f^k)'(x)$.*

Demonstração. Primeira parte: Se x é um ponto de período k para f , então $f^k(x) = x$, segue que $g^k(h(x)) = h(f^k(x)) = h(x)$.

Segunda parte:

$$\begin{aligned} [g^k(h(x))]' &= [h(f^k(x))]' \\ (g^k)'(h(x)) \cdot h'(x) &= h'(f^k(x)) \cdot (f^k)'(x) \\ (g^k)'(h(x)) \cdot h'(x) &= h'(x) \cdot (f^k)'(x) \\ (g^k)'(h(x)) &= (f^k)'(x) \end{aligned}$$

□

2 Geometria dos conjuntos invariantes sob mapas unidimensionais

2.1 Bacias de atração

Na primeira seção do capítulo anterior definiu-se ponto fixo atrativo e ponto periódico atrativo. Este capítulo visa a explorar o que ocorre nas chamadas bacias de atração de pontos atrativos bem como o comportamento de um mapa na fronteira dessas bacias. É necessário primeiro definir quem são essas bacias. A seguir, é preciso abordar alguns aspectos da Geometria Fractal para, finalmente, enunciar resultados sobre fronteiras de bacias de atração. Os apontamentos dessa seção são feitos com base nos livros [4] e [6] e no artigo [5].

Definição 2.1. *Seja f um mapa em \mathbb{R} e seja p um ponto fixo ou periódico atrativo de f . A **bacia de atração** do ponto p , ou somente **bacia** de p , é o conjunto de pontos x tais que $|f^k(x) - f^k(p)| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, ou seja, é o conjunto de todos os pontos que são atraídos para p .*

Exemplo 2.2. *Considere os mapas da forma $f(x) = ax$. Esse mapa tem apenas um ponto fixo em 0 e é atrativo se $a \in (-1, 1)$. Se $a \notin (-1, 1)$ 0 será uma fonte. No primeiro caso, se 0 é um sorvedouro, a bacia de atração será todo o conjunto dos números reais. Já no segundo caso, 0 repele todo e qualquer ponto, exceto ele próprio,*

portanto, a bacia de atração será o conjunto $\{0\}$ e diz-se que os pontos repelidos por 0 fazem parte da bacia do infinito, ou seja, são atraídas para o infinito.

2.2 Fractais

A definição de fractal foi cunhada por Mandelbrot em *The Fractal Geometry of Nature* [7], para definir objetos como o conjunto de Cantor, a Curva de Koch e outros objetos que possuíam características similares, porém não se encaixavam em definições já existentes. Essa definição requer conhecimento sobre dimensão topológica e dimensão de Hausdorff, definições 2.3 e 2.5, respectivamente, mais detalhes sobre essas definições podem ser consultados em [6].

Definição 2.3. *A dimensão topológica de um conjunto é um inteiro definido recursivamente: a dimensão é 0 se o conjunto é totalmente desconexo, 1 se cada ponto tem vizinhança arbitrariamente pequena com fronteira de dimensão 0, e assim sucessivamente.*

Definição 2.4. *Seja U um subconjunto qualquer não vazio de \mathbb{R}^n . Denote por $|U|$ o diâmetro de U , ou seja, a maior distância entre dois pontos de U . Considere $\delta > 0$ e $\{U_i\}$ uma δ -cobertura para U , i. e., $U \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ com $0 \leq |U_i| \leq \delta$ e seja $s > 0$, defina:*

$$H_{\delta}^s(U) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura para } U \right\}$$

Fazendo δ tender a 0, tem-se que o ínfimo $H_{\delta}^s(U)$ se aproxima de um limite, esse limite será a medida de Hausdorff s -dimensional.

$$H^s(U) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(U)$$

Para qualquer subconjunto U de \mathbb{R}^n e $\delta < 1$ tem-se que $H_{\delta}^s(U)$ é não crescente em relação à s , então $H^s(U)$ é também não crescente. Além disso, para algum $t > s$ e $\{U_i\}$ uma δ -cobertura tem-se:

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

Ao tomar o ínfimo tem-se $H_{\delta}^t(U) \leq \delta^{t-s} H_{\delta}^s(U)$ e, então, tomando o limite para $\delta \rightarrow 0$ tem-se $H^s(U) < \infty$ portanto $H^t(U) = 0$, para $t > s$. Traçando o gráfico de s por $H^s(U)$,

como na figura 2.1, percebe-se que para algum valor de s a medida de Hausdorff do conjunto U salta de infinito para zero, esse valor em que ocorre o salto é a Dimensão de Hausdorff do conjunto U .

Definição 2.5. A dimensão de Hausdorff para um conjunto U não vazio de \mathbb{R}^n será:

$$\dim_{\text{H}} U = \inf\{s \geq 0 : H^s(U) = 0\} = \sup\{s : H^s(U) = \infty\}$$

Definição 2.6. Fractal é um conjunto no qual a dimensão Hausdorff-Besicovith excede estritamente a dimensão topológica.

Contudo, alguns autores, como [6] e [4], definem fractal por meio de uma lista de características, as comumente encontradas são: autossimilaridade, a parte se assemelha ao todo; complexidade infinita, cada ampliação de um fractal permite observar detalhes que não eram vistos antes; e dimensão fractal ou dimensão não inteira [4]. As duas primeiras características auxiliam a identificar um possível fractal, antes de se calcular a dimensão dele por qualquer definição de dimensão, além de fornecer uma explicação acessível para aqueles que não têm intimidade com qualquer definição de dimensão.

O conjunto de Cantor do terço médio, um dos fractais mais conhecidos e de fácil construção, será aqui usado para introduzir conceitos fundamentais desse tipo de geometria. A construção desse conjunto de Cantor é feita a partir de um segmento de reta unitário, do qual é retirado o terço médio e assim sucessivamente, como na figura 2.2, ao observá-la, percebe-se que ao selecionar uma parte da imagem, o resultado é semelhante ao todo.

Definição 2.7. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tem medida nula se, para todo $\epsilon > 0$, existe uma coleção enumerável de intervalos abertos O_n com a propriedade que A está contida na união de todos os intervalos O_n e a soma dos comprimentos de todos os intervalos é menor ou igual a ϵ . Mais precisamente, se $|O_n|$ se refere ao comprimento do intervalo O_n , tem-se:

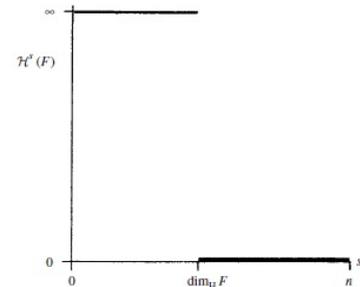


Figura 2.1: Gráfico de s por $H^s(U)$

Fonte: [6]

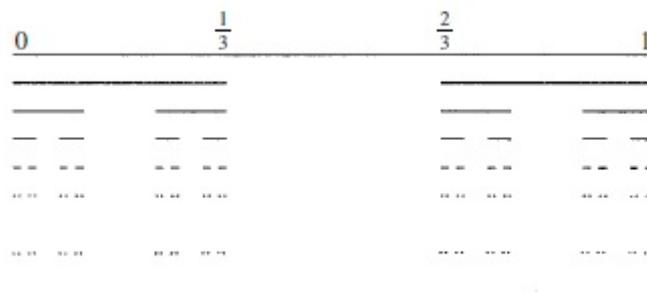


Figura 2.2: Conjunto de Cantor
Fonte:[6]

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |O_n| \leq \epsilon$$

Proposição 2.8. *O conjunto de Cantor tem medida nula.*

Demonstração. O conjunto de Cantor na primeira iterada tem 2 intervalos de tamanho $1/3$, na segunda $4 = 2^2$ com tamanho $1/9 = (1/3)^2$, na n -ésima iterada é composto por 2^n intervalos de tamanho $(1/3)^n$. A soma dos comprimentos dos intervalos restantes pode assumir valor tão pequeno quanto se queira, bastando tomar n suficientemente grande, de modo que o conjunto de Cantor possui medida nula. \square

Por construção, após uma iterada retira-se um terço dos pontos do conjunto de Cantor, devido a isso pode-se pensar que em algum momento ele se tornará vazio, porém note que os pontos $0, 1/3, 2/3, \dots$, pontos extremos de cada intervalo removido, nunca são retirados. Além disso, pontos que em sua representação ternária possuem apenas os algarismos 0 e 2 também não são retirados em nenhuma iterada.

Teorema 2.9. *O conjunto de Cantor consiste de todos os números no intervalo $[0, 1]$ que podem ser escritos em base 3 usando apenas os algarismos 0 e 2.*

O teorema 2.9 garante ainda que existe uma infinidade não enumerável de pontos no conjunto de Cantor, uma vez que existe uma infinidade de pontos com a propriedade exposta no teorema. Assim, não existe uma bijeção entre os números naturais e o conjunto de Cantor.

Para provar a não enumerabilidade considere que para cada natural n existe um número do conjunto de Cantor $r_n = .a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots$, no qual a_{ij} é 0 ou 2. Em seguida tome o número $r = b_1b_2b_3\dots$, de modo que b_i seja 0 se a_{ii} é 2 e, se a_{ii} for 0, b_i será 2. Ou seja, a escolha dos b_i 's é feita de maneira que r_n e r sejam diferentes na n -ésima casa. Agora, note que r está no conjunto de Cantor por ser composto apenas de 0 ou

2, mas r não está listado na sequência r_n , pois ao comparar cada r_n com r nota-se que há pelo menos uma casa de r que não coincide com r_n .

Uma forma de calcular a dimensão de um fractal é por meio da chamada dimensão *box-counting* (dimensão da contagem de caixas) que, de maneira simplista, consiste em se cobrir o objeto com caixas e contar quantas delas são necessárias para isso, as caixas são de acordo com a dimensão topológica do objeto analisado. Portanto, se o objeto tem dimensão topológica 1, as caixas são intervalos, se a dimensão é 2, as caixas são quadrados e assim segue.

Considere o intervalo $A = [0, 1]$ e uma malha de intervalos de tamanho $1/n$. Ao recobrir o intervalo A com essa malha, a quantidade de intersecções será n . Para $B = [0, 1] \times [0, 1]$ são necessárias n^2 caixas de uma malha com quadrados de lado $1/n$. Já para $C = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ são necessárias n^3 caixas de lado $1/n$. Repare que o expoente da quantidade de caixas aumenta conforme a dimensão do objeto. A quantidade de caixas para recobrir um objeto não ultrapassa $(1/\epsilon)^d$, assim é possível tomar $N(\epsilon) = (1/\epsilon)^d$, no qual $N(\epsilon)$ representa a quantidade de caixas que recobrem um objeto.

Como o interesse é d , usando-se as propriedades de logaritmo chega-se a:

$$d = \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}, \quad (2.1)$$

Como ϵ pode ser escolhido arbitrariamente, é preciso fazê-lo tender a zero, portanto a dimensão box-counting será o limite de 2.1, como segue:

Definição 2.10. *Um conjunto limitado S em \mathbb{R}^n tem dimensão box-counting*

$$\text{boxdim}(S) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

quando o limite existir.

Assim, tendo definido o que é a dimensão box-counting, é possível calcular a dimensão box-counting do conjunto de Cantor: escolha as caixas para recobrir como os próprios intervalos que compõem o conjunto, logo cada caixa, a cada iterada, tem tamanho $\epsilon = \frac{1}{3^n}$, com $n \rightarrow \infty$ e, então, cada malha possui 2^n caixas, portanto:

$$\text{boxdim}(C) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 2}{n \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309\dots$$

A segunda igualdade da linha anterior, foi tomada conforme o teorema 4.15 de [4], que afirma: é suficiente checar $\epsilon = b_n$, quando $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln b_{n+1}}{\ln b_n} = d$.

2.3 Bacias de atração com fronteiras fractais

Tendo sido apresentados os fractais e as bacias de atração, agora é tempo de unir esses dois objetos matemáticos para explorar o comportamento que ocorre na região que limita duas ou mais bacias de atração.

A figura 2.3 mostra um sistema com dois pontos atrativos, A e B, conseqüentemente, há uma bacia de atração correspondente a cada ponto, sendo a curva Σ o limitante das bacias. Mas o que ocorre com os pontos que formam a curva Σ , ou seja, eles são atraídos para qual das bacias? E com os pontos que estão à uma distância tão pequena quanto se queira da curva Σ ?

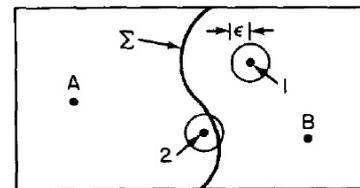


Figura 2.3: Sistema com dois pontos atrativos.

Fonte: [5]

Suponha que os pontos 1 e 2 são condições iniciais escolhidas aleatoriamente dentro de um círculo de raio ϵ incerto. A condição inicial 1, vai, sem dúvidas, ser atraída para a bacia B, pois o círculo que a contém está inteiramente contida nesta bacia. Já a condição inicial 2 pode ser atraída para ambas as bacias, uma vez que, o círculo em que está contida, cruza a fronteira das bacias.

Denote, então, por $f(\epsilon)$ a fração das condições iniciais que são incertas, ou seja, que podem ser atraídas para ambas as bacias com um erro ϵ . No exemplo da figura 2.3, as condições iniciais com essas características estão a uma distância menor ou igual a 2ϵ da fronteira Σ , portanto $f(\epsilon)$ é proporcional a ϵ . Por outro lado, quando a bacia possui fronteira que atende às características de um fractal, a fração $f(\epsilon)$ será proporcional a ϵ^p , sendo $p > 0$ dependente da dimensão box-counting do conjunto fronteiro e p é denominado *expoente de incerteza*.

A dependência de p com a dimensão fractal do conjunto se dá pela regra $p = D - d$, na qual D é a dimensão topológica que o conjunto está inserido (0 no caso do conjunto de Cantor do terço médio) e d é a dimensão fractal (box-counting). Essa regra advém do fato de que, considerando cubos de lado ϵ , o volume da região incerta do conjunto é da ordem do volume total de todas as caixas de dimensão D e lado ϵ requeridas ($N(\epsilon)$) para recobrir o conjunto. Como o volume dessas caixas é ϵ^D , o volume incerto é $\epsilon^D N(\epsilon)$. Da definição da dimensão box-counting é possível concluir que $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-d}$, com isso estima-se que o volume incerto é da ordem de $\epsilon^D N(\epsilon) \sim \epsilon^{D-d}$, sendo assim

$$p = D - d.$$

Esse resultado é assegurado pelo seguinte teorema, cuja demonstração e mais detalhes podem ser consultados em [5].

Teorema 2.11. *A fração incerta f da região finita de um espaço de fase D -dimensional associado com um erro de condições iniciais ϵ obedece*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln f(\epsilon)}{\ln(\epsilon)} = p$$

se, e somente se, a fronteira da bacia tem dimensão de capacidade $d = D - p$.

Antes de apresentar um exemplo do que foi explanado acima, é importante introduzir o conceito de invariância de um conjunto sob um mapa unidimensional. Exemplo do que venha a ser isso é o intervalo $[0, 1]$ sob os mapas da tenda e logístico com parâmetro $a = 4$.

Definição 2.12. *Seja um mapa f em I . Um conjunto $A \subset I$ é invariante sob o mapa f se $f(A) \subseteq A$.*

Agora considere o mapa (2.2) abaixo, representado graficamente pela figura 2.4(a).

$$F(x) = \begin{cases} 5x + 4, & x \leq -0,4 \\ -5x, & -0,4 \leq x \leq 0,4 \\ 5x - 4, & x \geq 0,4 \end{cases} \quad (2.2)$$

Este mapa apresenta três diferentes bacias de atração, são elas: B_- , bacia dos pontos atraídos para menos infinito; B_+ , bacia dos pontos atraídos para mais infinito; e, por fim, o conjunto invariante J , de todos os pontos que permanecem em $[-1, 1]$ em todas as iteradas de f .

Para definir quais os pontos que pertencem a cada bacia, divida o intervalo $[-1, 1]$ em cinco subintervalos, $[-1; -0,6]$, $[-0,6; -0,2]$, $[-0,2; 0,2]$, $[0,2; 0,6]$ e $[0,6; 1]$. Os intervalos $[-0,6; -0,2]$ e $[0,2; 0,6]$ pertencem às bacias B_- e B_+ , respectivamente, como é possível observar no gráfico da figura 2.4(a) (as pontas que ultrapassam o intervalo $[-1, 1]$ no eixo y corresponde a esses subintervalos). Os outros três intervalos, na primeira iterada, permanecem em $[-1, 1]$. Na segunda, terceira, quarta etc, iteradas o comportamento se repete, ou seja, a cada iterada o intervalo em questão se divide em outros cinco, dois deles têm imagem em menos ou mais infinito e os outros três permanecem em $[-1, 1]$, compondo, assim, um conjunto invariante sob esse mapa.

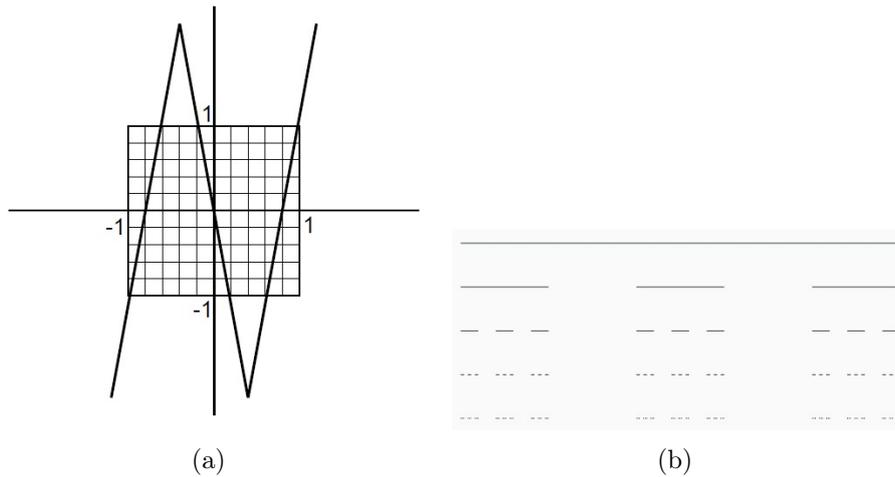


Figura 2.4: Mapa linear com bacias de fronteira fractal e conjunto de Cantor criado pela equação 2.2 , respectivamente.

Fonte: [4]

Geometricamente o conjunto J se assemelha ao conjunto de Cantor do terço médio, com a diferença de que a unidade é dividida em cinco partes, não em três, e, então, são retiradas duas delas como na figura 2.4(b). Da mesma maneira que foi calculada a dimensão box-counting do conjunto de Cantor do terço médio, é possível calcular a dimensão desse novo conjunto, sendo 3^n a quantidade de caixas necessárias para recobrir os intervalos de tamanho $\epsilon = 5^{-n}$, assim:

$$\begin{aligned}
 \text{boxdim}(J) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon^{-1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln 3^n}{\ln 5^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n(\ln 3)}{n(\ln 5)} \\
 &= \frac{\ln 3}{\ln 5}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Note que o conjunto J é a fronteira entre as bacias B_- e B_+ , e a cada iterada a quantidade de pontos ϵ -incertos é refinada de modo proporcional a ϵ^p , sendo $p = 1 - \frac{\ln 3}{\ln 5}$.

3 Propriedade de Wada em mapas unidimensionais

3.1 Propriedade de Wada

No capítulo anterior foi definido o que são bacias de atração bem como o que é a fronteira entre duas bacias. Esta parte do trabalho visa, então, a tratar de um tipo especial de bacia de atração que é a Bacia de Wada e, a partir dela, definir a propriedade de Wada para um sistema dinâmico, além de apresentar um método efetivo para se verificar a existência dessa propriedade em mapas unidimensionais. Os resultados dessa seção baseiam-se no artigo [1].

Conforme a definição 2.1, a bacia de atração de um ponto x é o conjunto de todos os pontos que são atraídos para x . Pode ocorrer de uma bacia ser formada por conjuntos disjuntos, motivando assim a definição 3.1. Em 3.2 está a definição de fronteira de duas bacias de atração.

Definição 3.1. *A bacia imediata de uma órbita Q é a união de todos os intervalos na bacia de Q que contém algum ponto da órbita de Q .*

Definição 3.2. *A fronteira $\partial\bar{B}$ de duas bacias é formada por todos os pontos tais que dada uma vizinhança aberta qualquer de qualquer ponto, $\partial\bar{B}$ contém pontos de ambas as bacias.*

A figura 3.1 mostra a função $V(x)$ e as bacias de atração dos pontos $-x_0$ e x_0 sob o sistema dinâmico $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \frac{dV}{dx}$, região branca e região hachurada, respectivamente.

3 Propriedade de Wada em mapas unidimensionais

Note que a linha que delimita as duas bacias é uma curva suave e para qualquer ponto pertencente à essa curva, qualquer vizinhança dele contém pontos das duas bacias.

Definição 3.3. *Ponto de Wada* é um ponto x tal que toda vizinhança aberta de x possui intersecção não vazia com pelo menos três bacias de atração.

Definição 3.4. A bacia B será uma **Bacia de Wada** se todo ponto da fronteira de B for um ponto de Wada. A fronteira dessa bacia é chamada de *fronteira da bacia de Wada*.

Definição 3.5. Diz-se que um sistema possui a **propriedade de Wada** quando possui no mínimo três bacias de atração e todas as fronteiras dessas bacias coincidem.

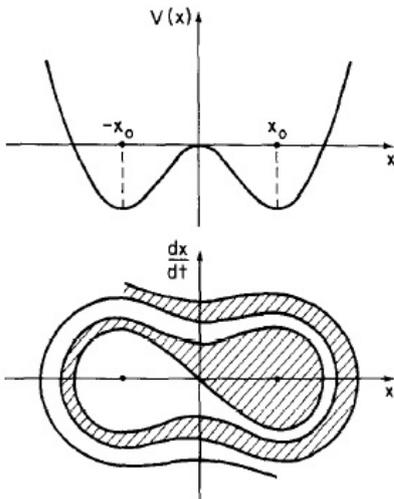


Figura 3.1: Função $V(x)$ e bacias de atração dos pontos $-x_0$ e x_0 .

Fonte: [5]

Nesta seção, diz-se que uma bacia B possui fronteira fractal se a fronteira for um conjunto de Cantor. A fronteira necessariamente é um conjunto compacto, que não contém intervalos, e de medida nula [8]. De modo geral, todo conjunto de Cantor é fractal, mas nem todo fractal é um conjunto de Cantor. Contudo, para a classe de mapas que será tratada aqui, as fronteiras entre bacias são construídas iterativamente à maneira usual dos conjuntos de Cantor, o que justifica a definição de fractal como Cantor.

Uma fronteira fractal não necessariamente será uma fronteira de Wada, mas uma fronteira de Wada é uma fronteira fractal.

Por exemplo, na figura 3.2 está o mapa da tenda de parâmetro 3, conforme o mapa é iterado as condições iniciais são atraídas para a bacia do infinito ou permanecem no conjunto de Cantor que delimita a bacia do infinito, apesar da fronteira dessa bacia ser um fractal não há bacias suficientes para o mapa ter a propriedade de Wada.

Além disso, se um mapa tem a propriedade de Wada então todas as bacias do sistema são de Wada, entretanto, se toda bacia do sistema for de Wada não é imediato que o sistema tenha a propriedade de Wada, um exemplo é um sistema formado por dois subsistemas disjuntos nos quais cada um tem a propriedade de Wada, mas a união não resulta em um novo sistema com a propriedade, pois as fronteiras de todas as bacias não coincidem.

Considere uma família f_μ de mapas a um parâmetro, um parâmetro crítico μ_0 , com $x_0, x \in I$. Abaixo segue a definição de bifurcação tangente, nomeada em outras literaturas como bifurcação sela-nó ou bifurcação supercrítica e subcrítica.

Definição 3.6. Diz-se que o mapa f_μ tem **bifurcação tangente criadora** de um ponto fixo (periódico) em uma vizinhança de x_0 quando o mapa f_μ não tem pontos fixos (periódicos) em uma pequena vizinhança de x_0 para $\mu_0 - \epsilon < \mu < \mu_0$ e tem dois pontos fixos (periódicos) em uma pequena vizinhança de x_0 para $\mu_0 < \mu < \mu_0 + \epsilon$, no qual $0 < \epsilon \ll 1$.

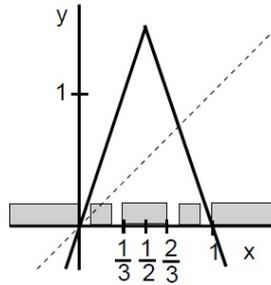


Figura 3.2: Mapa da tenda com parâmetro 3
Fonte: [4]

Definição 3.7. Diz-se que o mapa f_μ tem **bifurcação tangente destruidora** de ponto fixo (periódico) em uma vizinhança de x_0 quando o mapa f_μ tem dois pontos fixos (periódicos) em uma pequena vizinhança de x_0 para $\mu_0 - \epsilon < \mu < \mu_0$ e não tem pontos fixos (periódicos) em uma pequena vizinhança de x_0 para $\mu_0 < \mu < \mu_0 + \epsilon$, no qual $0 < \epsilon \ll 1$.

Definição 3.8. Diz-se que o mapa f_μ tem **bifurcação tangente** no parâmetro crítico μ_0 em uma vizinhança de x se o mapa f_μ tem uma bifurcação tangente criadora ou destruidora de ponto fixo (periódico).

Definição 3.9 (Derivada de Schwarz). Seja $F : I \rightarrow I$ um mapa com até a terceira derivada contínua, sendo $F'(x) \neq 0$. A derivada de Schwarz é dada por:

$$S_F(x) = \frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''(x)}{F'(x)} \right)^2$$

Diz-se que F tem derivada de Schwarz negativa se $S_F(x) < 0, \forall x \in I$ com $F'(x) \neq 0$.

No contexto de mapas unidimensionais, é comum estudar aqueles que possuem Derivada de Schwarz negativa devido a resultados do teorema de Singer e outros resultados

3 Propriedade de Wada em mapas unidimensionais

provados por Guckenheimer, mais informações sobre tais resultados e sobre a dinâmica de mapas unidimensionais com Derivada de Schwarz positiva podem ser encontradas em [9].

A derivada de Schwarz não é invariante por conjugação, como contraexemplo tem-se os mapas logístico de parâmetro 4 e mapa da tenda, explorado no capítulo 1. Apesar deles serem conjugados, a derivada de Schwarz do primeiro é $-\frac{6}{(1-2x)^2}$, enquanto a do segundo é 0, pois a derivada do mapa da tenda se anula a partir da segunda derivada. Apesar da derivada de Schwarz não ser invariante por conjugação, a propriedade de Wada o é, como mostrada na seção 3.5

As propriedades abaixo referem-se à mapas como na definição 3.9 e com derivada de Schwarz negativa:

Propriedade 3.10. *A composição de dois mapas com derivada de Schwarz negativa resulta em um terceiro mapa com derivada de Schwarz negativa.*

Demonstração. Sejam f e g dois mapas com a derivada de Schwarz negativa. Pela regra da cadeia segue que:

$$\begin{aligned}(f \circ g)' &= f'(g(x))g'(x) \\ (f \circ g)'' &= f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x) \\ (f \circ g)''' &= f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g''(x)g'(x) + f'(g(x))g'''(x)\end{aligned}$$

Calculando as parcelas da derivada de Schwarz e fazendo $g(x) = u$:

$$\begin{aligned}\frac{(f \circ g)'''}{(f \circ g)'} &= \frac{f'''(u)(g'(x))^2 + 3f''(u)g''(x)}{f'(u)} + \frac{g'''(x)}{g'(x)} \text{ e} \\ -\frac{3}{2} \left(\frac{(f \circ g)''}{(f \circ g)'} \right)^2 &= -\frac{3}{2} \left(\frac{(f''(u))^2(g'(x))^2}{(f'(u))^2} + 2\frac{f''(u)g''(x)}{f'(u)} + \frac{(g''(x))^2}{(g'(x))^2} \right)\end{aligned}$$

Somando as parcelas acima:

$$S_{(f \circ g)}(x) = \left(\frac{f'''(u)}{f'(u)} + \frac{3}{2} \left(\frac{f''(u)(g'(x))}{f'(u)} \right)^2 \right) (g'(x))^2 + \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g''(x)}{g'(x)} \right)^2$$

$$S_{(f \circ g)}(x) = S_f(u)(g'(x))^2 + S_g(x)$$

Logo $S_{(f \circ g)}(x) < 0$. □

Propriedade 3.11. *Se um mapa F tem derivada de Schwarz negativa então, para cada $n \in \mathbb{N}$, a n -ésima iterada do mapa também tem derivada de Schwarz negativa.*

Demonstração. Esta propriedade será provada usando indução finita. Fazendo $g = f$ em 3.10, tem-se que vale para $n = 2$. Suponha que vale para $n = k$, então $S_{(f^k)}(x) < 0$, portanto é preciso provar que vale para $n = k + 1$. Assim, substituindo g por f^k em 3.10, chega-se em:

$$S_{(f \circ f^k)}(x) = S_f(f^k(x))((f^k)'(x))^2 + S_{(f^k)}(x)$$

Portanto, $S_{(f^{k+1})}(x) < 0$, para todo $x \in I$. □

Propriedade 3.12. *Se F tem derivada de Schwarz negativa e se I é um intervalo compacto, então a bacia de um ponto periódico estável possui um ponto crítico de F ou um extremo do intervalo I .*

Demonstração. A demonstração dessa propriedade será feita por meio de cinco resultados, como segue:

1. Se $F \in C^3$ e tem derivada de Schwarz negativa, então $|F'|$ não possui mínimo local positivo em I .

Demonstração. Se $|F'|$ tem um extremo em y , $y \in I$ então $F''(y) = 0$ e $S^F(y) < 0$ implica que $F'''(y)$ e $F'(y)$ tem sinais opostos. Em particular, isso mostra que se $|F'(y)| = 1$, então por um dos lados de y , $|F'| < 1$, localmente. Assim cada ponto fixo $y \neq \pm 1$ com $|F'(y)| = 1$ é estável em pelo menos um dos lados. □

2. Seja agora $F \in C^3$ com finitos pontos críticos e $S_F < 0, \forall x \in I$. Então F tem apenas finitos pontos de período n para cada inteiro $n \geq 1$

Demonstração. Seja $g = F^n$ e suponha $g(x) = x$ para infinitos x . Então pelo teorema do valor médio, $g'(x) = 1$ para infinitos x . Por 3.11 e pelo item anterior, $|g'|$ não tem mínimo local positivo, e, portanto, se anula infinitamente. Isso contradiz a hipótese de que $|F|$ tem finitos pontos críticos e, conseqüentemente, g possui finitos pontos críticos. □

3. Se $a < b < c$ são pontos fixos consecutivos de $g = F^n$ e $[a, c]$ não contém ponto crítico de g , então $g'(b) > 1$.

Demonstração. Pelo teorema do valor médio, existem u, v , $a < u < b < v < c$ tais que $g'(u) = g'(v) = 1$. Se $g'(x) > 0$ em $[a, c]$, então $g'(b) > 1$ pelo item 1. □

3 Propriedade de Wada em mapas unidimensionais

4. Assuma $x \in I$ é um ponto fixo estável para $g = F^n$ e $|g'(x)| < 1$, além disso assumamos $I = [0, 1]$. Defina a variedade estável de x como o conjunto de pontos y tais que $g^m(y) \rightarrow x$ quando $m \rightarrow \infty$, e a variedade semilocal estável de x como a componente conexa da variedade estável de x , que contém x . Se x é ponto interior de I , existe um intervalo aberto (r, s) , ou na forma $[0, s)$ ou $(r, 1]$. Considere, primeiro, o caso (r, s) . g mapeia a variedade semilocal estável de x em si mesma mas não r ou s , pois r e s não estão na variedade estável. Há apenas umas das três possibilidades abaixo:

(i) $g(r) = r$ e $g(s) = s$

(ii) $g(r) = s$ e $g(s) = r$

(iii) $g(r) = g(s)$ ($= r$ ou s)

No caso (iii), g tem um ponto crítico em (r, s) , pelo teorema de Rolle. No caso (i), se g não tem ponto crítico em $[r, s]$, isso contradiz o item 4 acima, com $r = a$, $x = b$ e $s = c$. Similarmente, g deve ter um ponto crítico no caso (ii), pelo item 4, para g^2 . Portanto em todos os casos, g tem ponto crítico em $[r, s]$, que é atraído para x .

Mas se g tem um ponto crítico p em (r, s) e $F^n = g$, então um ponto crítico de F é mapeado em p .

Agora considere o caso quando a variedade semilocal estável é $[0, s)$. Então por definição, o ponto 0 é atraído para x , e o argumento é similar para $(r, 1]$. Isso mostra a propriedade 3.12 em todos os casos quando $|g'(x)| < 1$, exceto para $x = 1$ ou $x = -1$. Mas então não há o que provar.

5. Seja $F^n = g$ e $g(x) = x$, $|g'(x)| = 1$. Considerando g^2 ao invés de g , se necessário, pode-se assumir, sem perder generalidade, que $g'(x) = 1$. Se $x = 1$ ou $x = -1$ não há o que provar. Se $x \in (0, 1)$, há, pelo item 2, uma vizinhança (r, s) de x contendo nenhum outro ponto fixo de g . Ou $g(y) > y, \forall y \in (r, x)$ ou $g(y) < y, \forall y \in (x, s)$ de outra forma $g'(y) > 1$ deveria ter soluções em (r, s) em ambos os lados de x e g' deveria ter um mínimo local positivo. Então assumamos, por definição, $g(y) > y, \forall y \in (r, x)$. No valor mínimo d de y para o qual $g(y) \geq y$, tem-se $g(d) = d$ (ou $d = 0$ levando a atração ao ponto extremo). Nesse ponto $g'(d) \geq 1$, e como existe um ponto $w \in (d, x)$ em que $g'(w) = 1$, temos a afirmação do item 1.

Isso completa a prova para a propriedade 3.12.

□

Propriedade 3.13. *Seja $W \subset I$ compacto tal que o interior de W é não vazio e não contém nenhum ponto crítico de F . Se F tem derivada de Schwarz negativa, então $|F'|$ restrito ao intervalo W assume valor mínimo na fronteira de W .*

Demonstração. Seja $W \subset I$ compacto cujo interior é não vazio e não contém pontos críticos de f . Assim, tem-se que $f'(x) > 0, \forall x \in \text{Int}(W)$ ou $f'(x) < 0, \forall x \in \text{Int}(W)$.

Primeiro considere $f'(x) > 0, \forall x \in \text{Int}(W)$. Seja $m = \min\{f'(x) : x \in W\}$. Suponha que $f'(z) > m$ para cada $z \in \partial\bar{W}$. Seja $[a, b]$ uma componente do conjunto $\{x \in W : f'(x) = m\}$.

Seja $\epsilon > 0$ tal que $[a - \epsilon, b + \epsilon] \subset \text{Int}(W)$, e $m < f'(x) < f'(z)$ e $f''(x) \neq 0, \forall x \in [a - \epsilon, a] \cup (b, b + \epsilon]$, $z \in \partial\bar{W}$. Tal ϵ existe, do contrário $[a, b]$ não poderia ser uma componente de $\{x \in W : f'(x) = m\}$.

Seja α_1 a inclinação da reta l_1 que passa por $(a - \epsilon, f(a - \epsilon))$ e $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$; α_2 a inclinação da reta l_2 que passa por $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ e $(b + \epsilon, f(b + \epsilon))$. Seja $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $(x_1, f(x_1))$ e $(x_4, f(x_4))$, com $\alpha - \epsilon \leq x_1 < x_4 \leq b + \epsilon$, a interseção dos pontos de l_α com o gráfico de f , com $l_\alpha = l_1$ se $\alpha = \alpha_1$ e $l_\alpha = l_2$ se $\alpha = \alpha_2$.

Seja $\delta > 0$ tal que $m + 2\delta \leq \alpha$. Tome l_3 a reta que passa por $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ com inclinação $m + \delta$. Seja $(x_2, f(x_2))$ e $(x_3, f(x_3))$, com $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, a interseção de l_3 com o gráfico de f .

Das construções acima segue que: $\frac{f(x_4)-f(x_1)}{x_4-x_1} = \alpha$, $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = m+\delta$, $\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} > \alpha$ e $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > \alpha$.

Como $m + \delta < m + 2\delta \leq \alpha$, obtém-se:

$$\frac{f(x_4) - f(x_1)}{x_4 - x_1} \cdot \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \cdot \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} \cdot \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \alpha(m+\delta) - \alpha \cdot \alpha < \alpha^2 - \alpha^2 = 0,$$

o que implica:

$$\frac{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_4 - x_3)(x_2 - x_1)} > \frac{(f(x_4) - f(x_1))(f(x_3) - f(x_2))}{(f(x_4) - f(x_3))(f(x_2) - f(x_1))} \quad (3.1)$$

Conforme a propriedade R, inerente a mapas com derivada de Schwarz negativa e definida pela inequação 3.2 abaixo, mais informações sobre tal propriedade pode ser encontrada em [10] e como $S_f(x) \leq 0, \forall x \in \text{Int}(W)$, tem-se:

$$\frac{(y_4 - y_1)(y_3 - y_2)}{(y_4 - y_3)(y_2 - y_1)} \leq \frac{(f(y_4) - f(y_1))(f(y_3) - f(y_2))}{(f(y_4) - f(y_3))(f(y_2) - f(y_1))} \quad (3.2)$$

3 Propriedade de Wada em mapas unidimensionais

para todo $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \text{Int}(W)$ com $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$. Como 3.1 contradiz 3.2, conclui-se que f' assume valor mínimo em $\partial\overline{W}$.

Agora considere o caso $f'(x) < 0, \forall x \in \partial\overline{W}$. Para $g = -f$, tem-se $S_f(x) = S_g(x), \forall x \in \partial\overline{W}$. Com o mesmo procedimento feito para provar que f tem valor mínimo em $\partial\overline{W}$, prova-se que $g' = -f'$ possui valor máximo em $\partial\overline{W}$.

Portanto, $|f'|$ assume valor mínimo na fronteira de W . □

Propriedade 3.14. *Assuma que F tem derivada de Schwarz negativa. Seja Q uma órbita periódica de período m de F . Então:*

- a) se $m > 3$, então a bacia imediata de Q contém pelo menos um ponto crítico de F ;
- b) se a bacia imediata de Q não contiver nenhum ponto crítico de F , então $m = 1$ ou 2 .

Propriedade 3.15. *Assuma que F tem derivada de Schwarz negativa. Seja q um ponto periódico estável de F tal que F tem pontos periódicos de ambos os lados de q . Então a bacia imediata da órbita de q contém pelo menos um ponto crítico de F .*

A observação da propriedade de Wada no contexto de Sistemas Dinâmicos se deu no início do anos 1990. Breban e Nusse estabeleceram um critério que usa recursos numericamente verificáveis para estudar quando um mapa possui a propriedade de Wada. Para definir tal critério, considere uma família $F_\mu : I \rightarrow I$ de mapas a um parâmetro de classe C^3 com derivada de Schwarz negativa. Além dessas condições, considere que F_μ atenda as hipóteses abaixo:

- a) todo ponto atrativo de F_μ é um ponto fixo;
- b) F_μ tem pelo menos dois pontos fixos atrativos e no máximo três;
- c) no parâmetro de valor μ_0 , F_μ tem bifurcação tangente criadora de ponto fixo numa vizinhança de x_0 ;
- d) para algum $0 < \delta < 1$ e para todo $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$, todos os pontos críticos de F_μ estão contidos nas bacias de atração.

Com base nessa família de mapas, Breban e Nusse [1] estabeleceram o seguinte critério para verificar a existência da propriedade de Wada:

Critério para a Propriedade de Wada: F_μ tem a propriedade de Wada para $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$ se, e somente se, a matriz de cobertura $A_{\text{core}}(F_{\mu_0})$ de F_{μ_0} é primitiva.

A definição de matriz primitiva está na definição 3.16, já o conceito de matriz de cobertura diz respeito a como subintervalos de I cobrem uns aos outros quando aplicado o mapa. A sua definição apropriada está na seção 3.4.

Definição 3.16. *Uma matriz A é primitiva se, e somente se, existe um número natural m tal que A^m é positiva.*

3.2 Mapa Logístico

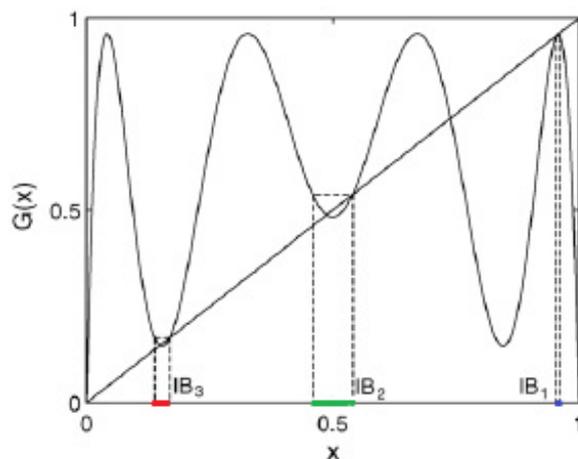


Figura 3.3: Gráfico de $G(x) = g^3(x)$.

Fonte: [1]

Antes de estabelecer esse critério como um teorema e prová-lo, essa seção apresenta um exemplo, baseado em [1], para o qual o critério funciona e no qual as principais técnicas utilizadas na demonstração do teorema são ilustradas.

O exemplo é o mapa logístico g , de $[0, 1]$ em $[0, 1]$, de parâmetro $\mu = 3,84$. Esse mapa possui terceira derivada contínua e derivada de Schwarz negativa para qualquer $x \in [0, 1] - \{\frac{1}{2}\}$, além de possuir uma órbita estável de período 3.

Considerando, então, o mapa $G(x) = g^3(x)$, G possui três atratores que são pontos fixos, atendendo a condição (a) do critério e, por 3.11, G possui derivada de Schwarz negativa. Como $g(0) = 0$ e $g'(0) > 1$, o ponto 0 é ponto fixo instável de g e não pertence à bacia de atração da órbita periódica. Por fim, esses dois fatos implicam que g não possui outra órbita estável. Conseqüentemente, G possui apenas 3 atratores (condição (b) atendida).

A figura 3.3 mostra o gráfico de $G(x)$, bem como as bacias imediatas dos pontos fixos estáveis nomeadas da direita para a esquerda por IB_k , $1 \leq k \leq 3$, sendo bacia imediata a união dos intervalos que contenha algum ponto da órbita do ponto fixo atrativo, como na definição 3.1. Atribuindo cores para essas bacias tem-se B_1 azul, logo IB_1 é azul; B_2 verde, então IB_2 é verde e B_3 vermelha, logo IB_3 é vermelha. Fazendo um processo iterativo para delimitar as bacias de atração desse mapa chega-se na figura 3.4.

Enumere os pontos críticos do mapa $G(x)$ por $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ e c_7 , da esquerda para a direita, assim, $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5 < c_6 < c_7$ e, como escrito anteriormente,

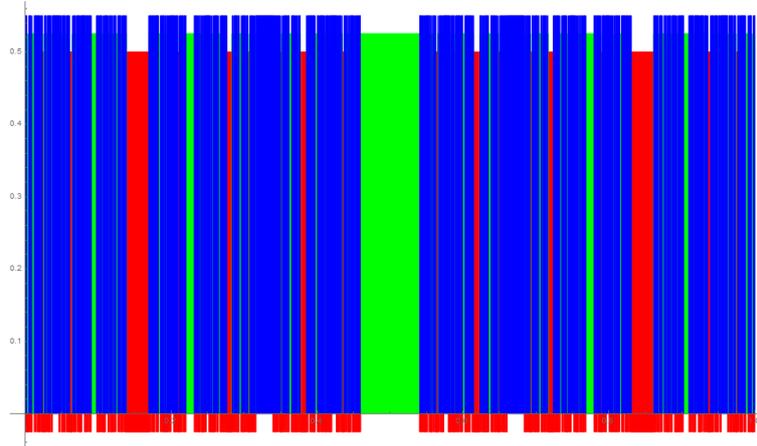


Figura 3.4: Bacias de atração do mapa logístico com parâmetro $\alpha = 3,84$
 Fonte: Elaborada pela autora.

todos eles estão nas bacias de atração. Tem-se, então, que $G(c_1) = G(c_3) = G(c_5) = G(c_7) \in IB_1$, $G(c_2) = G(c_6) \in IB_3$ e $G(c_4) \in IB_2$.

G aplicada aos intervalos $[0, c_1]$, $[c_1, c_2]$ e $[c_7, 1]$ cobrem $[c_2, c_7]$, em particular cobrem $[c_2, c_7] \setminus (IB_1 \cup IB_2 \cup IB_3)$, e os pontos críticos são mapeados em $(IB_1 \cup IB_2 \cup IB_3)$. Assim, pode-se considerar a fronteira das bacias apenas nos cinco intervalos J_i com $1 \leq i \leq 5$, como mostra a figura 3.5.

Agora, atribua as letras¹ b , g e r para os pontos fixos instáveis das bacias B_1 , B_2 e B_3 respectivamente, como na figura 3.5, esses pontos serão os extremos das respectivas bacias imediatas e, portanto, $r < g < b$. Observando a figura 3.5, e pelo fato de G ser contínua, é possível notar que $G(J_1) = [r, b]$, $G(J_2) = [g, b]$, $G(J_3) = [g, b]$, $G(J_4) = [r, b]$ e $G(J_5) = [r, b]$, por consequência disso $G(J_1) \supset J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 \cup J_5$, $G(J_2) \supset J_3 \cup J_4 \cup J_5$, $G(J_3) \supset J_3 \cup J_4 \cup J_5$, $G(J_4) \supset J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 \cup J_5$ e $G(J_5) \supset J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 \cup J_5$.

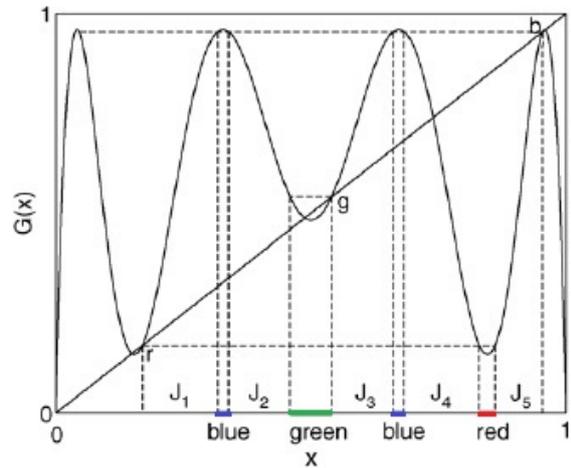


Figura 3.5: Gráfico de $G(x) = g^3(x)$ com os intervalos J_i , $1 \leq i \leq 5$.

Fonte: [1]

Com as informações do parágrafo acima é possível construir uma matriz, quadrada de ordem 5, atribuindo o valor 0 para quando $G(J_i)$ não contiver o intervalo J_i , $1 \leq i \leq 5$ e 1 para quando contiver. Então a matriz

¹As letras b , g e r representam as iniciais das palavras azul, verde e vermelho em inglês, respectivamente.

fica como segue. Note que a matriz é primitiva de ordem 2, ou seja, A_G^2 possui todas as entradas positivas.

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Com a finalidade de provar que o mapa G possui a propriedade de Wada, é necessário definir alguns conjuntos que vão delimitar o que são as bacias de atração e o que é a fronteira delas. Assim, o conjunto $D_0 = [r, b] \setminus \cup_{i=1}^5 J_i$ consiste de 4 intervalos abertos e é a união das bacias de atração. Seja $C_1 = \cup_{i=1}^5 J_i$ o conjunto dos pontos que inicialmente estão em algum J_i . Agora, usando indução, defina os seguintes conjuntos, que representam o conjunto dos pontos cujas órbitas saem dos J_i e vão para alguma das bacias em alguma iterada n , n inteiro positivo, e o conjunto dos pontos que ficam em J_i na n -ésima iterada, respectivamente:

$$D_n = \{x \in C_n : G(x) \in D_{n-1}\}$$

$$C_{n+1} = \{x \in C_n : G(x) \in C_n\}.$$

Por fim, seja $C_\infty = \{x \in [r, b] : G^k(x) \in C_1, \text{ para cada } k \geq 0\}$ o conjunto dos pontos que, não importa a iterada, não saem dos J_i . Esse é um conjunto de Cantor com medida de Lebesgue nula [1], pág. 57.

Seja $p \in C_\infty$, deve-se mostrar que p é um ponto de Wada, ou seja, que para qualquer $\epsilon > 0$ o intervalo $(p - \epsilon, p + \epsilon)$ possui intersecção não vazia com as três bacias de atração do mapa G . Para isso, usando a continuidade do mapa G e a primitividade da matriz A_G defina a seguinte propriedade, adotando para $n > 0$, $D_n^b = D_n \cap B_1$, $D_n^g = D_n \cap B_2$ e $D_n^r = D_n \cap B_3$.

Propriedade 3.17 (Propriedade das Três Cores). *Para $n \in \mathbb{N}$, para cada componente K de C_n , existe uma componente U^b de $D_n^b \cup D_{n+1}^b$, uma componente U^g de $D_n^g \cup D_{n+1}^g$ e uma componente U^r de $D_n^r \cup D_{n+1}^r$, tal que $U^b \subset K$, $U^g \subset K$ e $U^r \subset K$.*

Aqui, usou-se a primitividade da matriz A_G para garantir que sob um número mínimo de iteradas a componente K de C_n contenha intervalo de cada uma das bacias de atração e, como a matriz é primitiva de ordem 2, são necessárias pelo menos duas iteradas para que a propriedade seja válida.

3 Propriedade de Wada em mapas unidimensionais

Como argumentado anteriormente, G possui derivada de Schwarz negativa devido a g possuir. Quando aplicada a propriedade 3.13, tem-se que G^2 é expansiva em C_2 , ou seja, existe $\delta > 0$ tal que $|(G^2)'(x)| \geq 1 + \delta$ para todo $x \in C_2$, o que garante que os comprimentos das componentes de C_n tendem a zero conforme n vai para infinito.

Seja $p \in C_\infty$ e $\epsilon > 0$. Como os comprimentos de C_n tendem a zero conforme $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}$, tome uma componente W de C_n tal que $p \in W \subset (p - \epsilon, p + \epsilon)$. Segue da propriedade das três cores 3.17 que p é um ponto de Wada. Como são três bacias tem-se $\partial\overline{B}_1 \cap [r, b] = \partial\overline{B}_2 \cap [r, b] = \partial\overline{B}_3 \cap [r, b]$.

Seja $C'_\infty = \{x \in [0, 1] / \exists k \in \mathbb{N} : G^m(x) \in C_1, \forall m \geq k\}$ o conjunto de todos os pontos de $[0, 1]$ que não saem de C_1 não importa a iterada. Esse conjunto é a fronteira das bacias de atração, de fato: seja $x \in C'_\infty$ qualquer, então existe k inteiro positivo tal que $G^m(x) \in C_1, \forall m \geq k$, então $G^k(x) \in C_\infty$ e pela continuidade de G segue que $x \in C_\infty$.

Por fim, seja p um ponto qualquer de qualquer uma das fronteiras das bacias de atração, então existe $m > 0$ inteiro de modo que $G^m(p) \in C_\infty$. Pela arbitrariedade de p , segue que as três fronteiras coincidem e portanto o mapa G possui a propriedade de Wada.

3.3 Mapa Logístico Modificado

Nesta seção, o critério visto na seção anterior é aplicado a outro mapa, o que constitui uma pequena contribuição original.

A fim de verificar se o critério funciona em outro mapa além do mapa logístico, foram feitos testes com a família de mapas $s(x) = rx(1 - x^2)$, a princípio com o parâmetro $r = 2,55$. Essa escolha foi feita verificando se $s^3 = S$ possuía gráfico parecido com o gráfico de G , figura 3.3, em algum intervalo real, se a derivada de Schwarz era negativa para qualquer x , em que $s'(x) \neq 0$, nesse intervalo e se os pontos críticos da função S possuíam imagens iguais nos picos e, ao menos, dois vales, como ocorre em G .

Para o mapa S com parâmetro 2,55 essas verificações foram coerentes com o esperado, todavia ao verificar as outras hipóteses determinadas pelo critério, notou-se que o teste falhava para a derivada nos pontos fixos, eles não apresentam derivada menor do que um, assim ajustou-se o parâmetro para $r = 2,46$.

O gráfico de S com $r = 2,46$ está na figura 3.6(a), já a figura 3.6(b) apresenta os gráficos para S com parâmetros 2,44, 2,45 e 2,46, respectivamente. Observando esta figura tende-se a concluir que o gráfico do mapa tangencia a reta identidade em $r = 2.4504$, caracterizando uma bifurcação tangente. Além disso, fazendo um processo

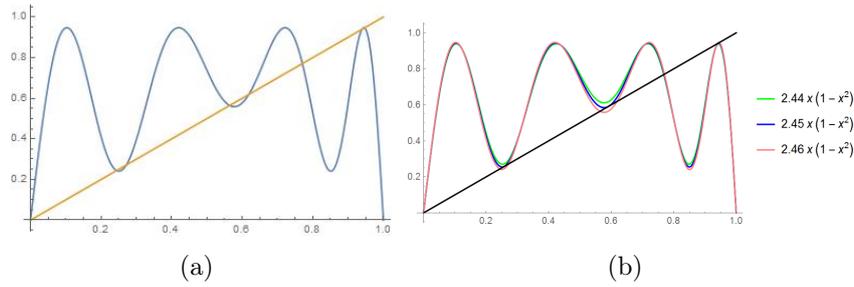


Figura 3.6: (a) Gráfico de $S = s^3$; (b) Gráfico da terceira iterada de $s(x) = rx(1-x^2)$ com três diferentes parâmetros.

Fonte: Elaborada pela autora.

iterativo para delimitar as bacias do mapa S chega-se no gráfico da figura 3.8, que mostra o mesmo padrão do mapa logístico de parâmetro $a = 3,84$ na figura 3.4.

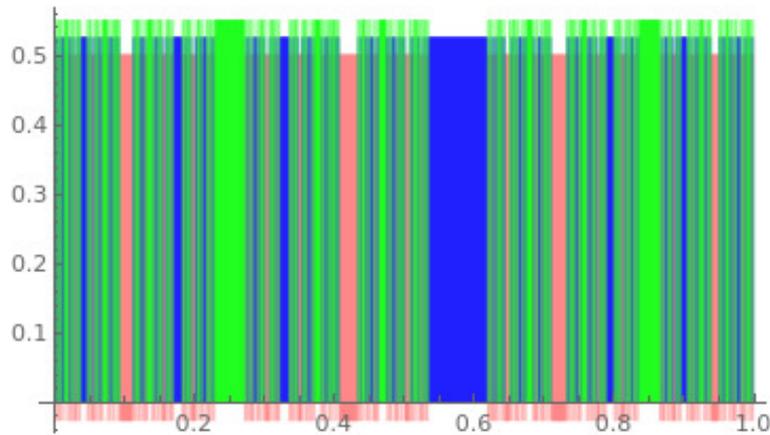


Figura 3.8: Bacias de atração do mapa logístico modificado
Fonte: Elaborada pela autora.

O exposto no último parágrafo indica que existe bifurcação tangente criadora de ponto fixo, ou seja, essa família de mapas atende a hipótese c do critério. A figura 3.7 mostra que o mapa $s(x) = 2,46x(1-x^2)$ possui derivada de Schwarz negativa para $x \in [0, 1]$, exceto para um ponto crítico (semelhante para G) e pela propriedade 3.11, S também a possui.

Fazendo o teste da derivada para verificar se a órbita é atrativa ou repulsora nos pontos fixos, resulta em três pontos fixos de S com derivada em módulo igual a $0,914585$, ou seja, esses pontos formam uma órbita de período três em s e são pontos fixos atrativos de S , o que implica em mais um critério atendido. Calculando $s(0)$ e

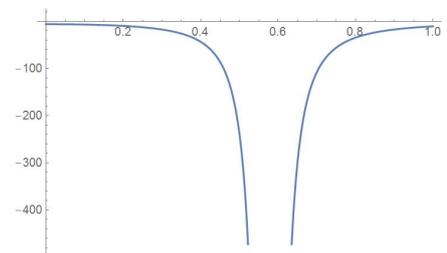


Figura 3.7: Gráfico da derivada de Schwarz: $s(x) = 2,46x(1-x^2)$.

Fonte: Elaborada pela autora.

$s'(0)$ chega-se em 0 e 2,46, respectivamente, o que, pela propriedade 3.12, implica não haver outros atratores além dos mencionados no início do parágrafo.

Além disso, por iteração numérica, nota-se que as órbitas dos pontos críticos são atraídas para os pontos fixos atrativos. Portanto, essas órbitas ficam presas dentro das bacias de atração.

Por fim, fazendo as mesmas nomeações do mapa G para o mapa S , ou seja, delimitando as bacias de atração pelos pontos fixos instáveis e chamando-os de b , g e r , do maior para o menor, calculando a imagem dos intervalos J_i que estão entre os intervalos que compõe as bacias imediatas atrativas, conclui-se que $S(J_i)$ cobre os J_i da mesma maneira que $G(J_i)$ cobre, fazendo com que a matriz A_S de cobertura do mapa S seja idêntica à matriz A_G , portanto, as conclusões para G são idênticas para S .

3.4 Demonstração do Teorema

Nas seções anteriores foi definida e exemplificada a propriedade de Wada e foi feito um esboço do que seria o critério para verificar se um mapa possui a propriedade. Esta seção objetiva estabelecer tal esboço como um teorema e prová-lo para qualquer família de mapas que atendam as mesmas condições que o mapa logístico e o mapa logístico modificado atendem. Aqui, volta-se a usar a referência [1]

Antes de formular o teorema, será preciso definir a matriz de cobertura A_{core} de um mapa F e quatro propriedades que ajudarão na prova do teorema. Para isso, seja $F: I \rightarrow I$ um mapa C^3 com derivada de Schwarz negativa, no qual:

- a) cada atrator seja um ponto fixo;
- b) cada ponto crítico esteja contido em alguma bacia de atração de F ;
- c) cada ponto periódico de F seja um ponto hiperbólico (um ponto periódico $q \in I$ é hiperbólico $\Leftrightarrow F^n(q) = q$ e $|(F^n)'(q)| \neq 1$).

Seja o conjunto D_0 a união das bacias imediatas dos pontos atrativos de F e seja C_1 o complementar de D_0 em I , ou seja, $C_1 = I \setminus D_0$. Por indução, defina os seguintes conjuntos, para n inteiro positivo:

$$D_n = \{x \in C_n : F(x) \in D_{n-1}\}$$

$$C_{n+1} = \{x \in C_n : F(x) \in C_n\}$$

$$C_\infty = \{x \in I : F^k(x) \in C_1, \text{ para cada } k \geq 0\}$$

Sendo D_n o conjunto dos pontos que estão em C_1 na $(n - 1)$ -ésima iterada e que na n -ésima estão em em alguma bacia imediata de F ; C_{n+1} o conjunto dos pontos que permanecem em C_1 na n -ésima iterada; e, por fim, C_∞ o conjunto dos pontos que estão em C_1 em qualquer iterada.

Propriedade 3.18 (Propriedade de Captura). *Existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que cada ponto crítico de F está contido no conjunto $\bigcup_{i=n}^m D_i$, isto é, se $F'(c) = 0$ então $c \in \bigcup_{i=n}^m D_i$. O menor m para o qual esta propriedade é válida será chamado número de captura.*

Propriedade 3.19 (Propriedade de Expansão). *Seja m o menor número para a propriedade de captura. Se cada ponto periódico de F é hiperbólico, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|(F^N)'(x)| > 1$ para todo $x \in C_{N+m}$.*

Propriedade 3.20 (Propriedade de Invasão). *Seja m e N como nas propriedades de captura e expansão. Para cada inteiro $n \leq N + m$ e para cada componente C de C_n , existe uma componente D de $\bigcup_{i=n}^{n+m} D_i$ tal que $D \subset C$.*

Propriedade 3.21 (Propriedade Medida Zero). *A medida de Lebesgue de C_∞ é zero.*

Nomeie r o ponto extremo à direita da bacia imediata mais à esquerda e b para o extremo mais à esquerda da bacia imediata mais à direita do mapa F , como foi feito no mapa logístico.

Seja m o número de captura do mapa F , e N como na propriedade de expansão e considere F em C_{N+m} . Como F é expansivo em C_{N+m} , C_{N+m} não contém pontos críticos de F . Denote por N_m o número de intervalos em $C_{N+m} \cap [r, b]$ e esses intervalos por $J_i (1 \leq i \leq N_m)$.

Definição 3.22. *A matriz de cobertura de F é a matriz $N_m \times N_m$, $A_{core}[F] = [a_{ik}]_{1 \leq i, k \leq N_m}$, sendo a_{ik} o número de vezes que o intervalo J_i cobre o intervalo J_k , $1 \leq i, k \leq N_m$. Portanto, a matriz de cobertura de F é definida como $a_{ik} = 0 \Leftrightarrow F(J_i) \cap F(J_k) = \emptyset, 1 \leq i, k \leq N_m$ e $a_{ik} = 1 \Leftrightarrow F(J_i) \cap F(J_k) \neq \emptyset, 1 \leq i, k \leq N_m$, assim se $F(J_i) \cap F(J_k) \neq \emptyset$ então $F(J_i) \supset J_k$.*

Usando a definição 3.22 para calcular a matriz de cobertura A_{core} para o mapa G da seção 3.1, obtém-se uma matriz diferente daquela apresentada anteriormente. Para calcular o número N_m de G considere a figura 3.9, que mostra os conjuntos C_1 e C_2 , C_1 foi encontrado retirando as bacias imediatas do intervalo $[0, 1]$ e para encontrar C_2

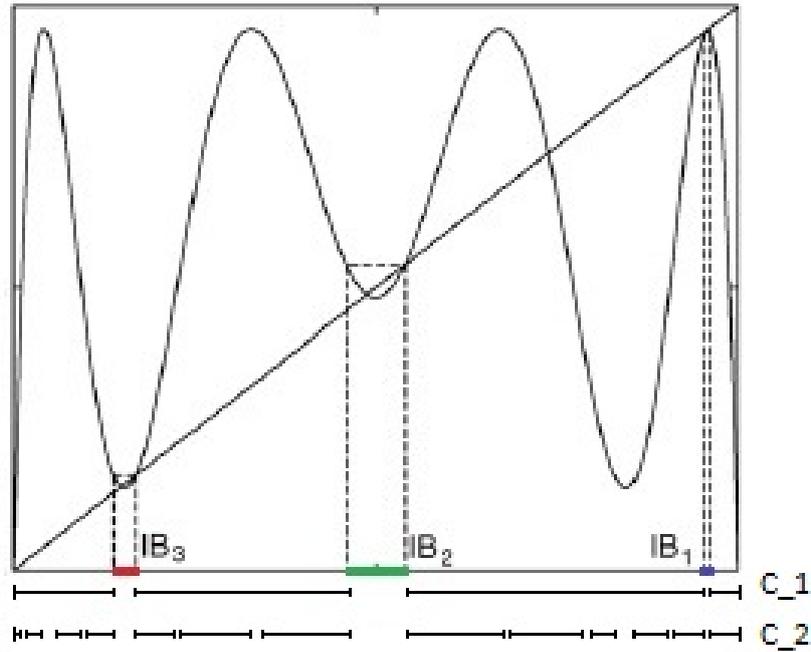


Figura 3.9: Conjunto C_1 e C_2 para $G = g^3$.
 Fonte: Elaborada pela autora.

retirou-se os intervalos que possuem imagem nas bacias. Como escrito acima, N_m é a quantidade de interseções de C_2 com $[r, b]$, que é 8, nesse caso. Assim a matriz $A_{\text{core}}[G]$ é de ordem 8, segue abaixo:

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora que todo o necessário foi definido, é possível estabelecer o Teorema do critério para a propriedade de Wada.

Teorema 3.23. *Seja $F_\mu : I \rightarrow I$ um família de C^3 -mapa a um parâmetro com derivada de Schwarz negativa. Assuma que*

- a) *cada atrator de F_μ seja um ponto fixo;*
- b) *F_μ tem pelo menos dois pontos fixos atrativos e no máximo três;*

c) no parâmetro de valor μ_0 , F_μ tem uma bifurcação tangente criadora de ponto fixo numa vizinhança de x_0 ;

d) e para $0 < \delta < 1$ (δ deve ser pequeno) e para cada $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$, todos os pontos críticos de F_μ estão contidos nas bacias de atração.

Então, F_μ tem a propriedade de Wada para $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta \Leftrightarrow$ a matriz de cobertura $A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$ de F_{μ_0} é primitiva.

Demonstração. Seja F_μ uma família de mapas a um parâmetro como no teorema e assumamos que essa família satisfaz as condições (a-d). Para $\mu_0 - \delta < \mu < \mu_0 + \delta$, denote as bacias de atrações dos dois pontos fixos, que já existiam e persistem quando a bifurcação ocorre, por $B_1(\mu)$ e $B_2(\mu)$ e por $B_3(\mu)$ a bacia do ponto fixo que é criada com a bifurcação para $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$.

Para $\mu_0 - \delta \leq \mu < \mu_0 + \delta$, denote por $D_0(\mu)$ a união das bacias imediatas dos pontos atrativos de F_μ e seja $C_1(\mu)$ o complementar de $D_0(\mu)$ em I , ou seja, $C_1(\mu) = I \setminus D_0(\mu)$. Por indução defina os seguintes conjuntos, para $n \in \mathbb{N}$: $D_n(\mu) = \{x \in C_n(\mu) : F_\mu(x) \in D_{n-1}(\mu)\}$ o conjunto dos pontos que estão em $C_1(\mu)$ na $(n-1)$ -ésima iterada e que na n -ésima estão em alguma bacia imediata de F_μ ; $C_{n+1}(\mu) = \{x \in C_n(\mu) : F_\mu(x) \in C_n(\mu)\}$ o conjunto dos pontos que permanecem em $C_1(\mu)$ na n -ésima iterada; e, $C_\infty(\mu) = \{x \in I : F_\mu^k(x) \in C_1(\mu), \text{ para cada } k \geq 0\}$ o conjunto dos pontos que estão em $C_1(\mu)$ em qualquer iterada.

Por conveniência adote $D_n^{[1]}(\mu) = D_n(\mu) \cap B_1(\mu)$, $D_n^{[2]}(\mu) = D_n(\mu) \cap B_2(\mu)$, se $\mu_0 - \delta \leq \mu < \mu_0 + \delta$ e $D_n^{[3]}(\mu) = D_n(\mu) \cap B_3(\mu)$, se $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$. Pela condição (d) todos os pontos críticos de F_μ , para $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$, estão contidos nas bacias de atração de F_μ . Seja $\delta > 0$ tal que o número de captura m de F_μ seja constante e $A_{\text{core}}[F_\mu] = A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$.

Para $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$ denote por r_μ o extremo a direita da bacia imediata mais à esquerda e por b_μ o extremo a esquerda da bacia imediata mais à direita.

A primeira implicação será demonstrada por contradição. Para isso serão usados resultados que estão no apêndice A, os quais garantem que a matriz é fortemente conexa se, e somente se, for irredutível e possuir elemento não negativo em sua diagonal. Se isso acontecer, então a matriz será primitiva.

\implies Assuma que F_μ tem a propriedade de Wada para $\mu_0 < \mu < \mu_0 + \delta$. Isso implica que para $\mu_0 < \mu < \mu_0 + \delta$, $\partial \overline{B_1(\mu_0)} = \partial \overline{B_2(\mu_0)} = \partial \overline{B_3(\mu_0)}$.

Seja $\mu_0 < \mu < \mu_0 + \delta$ dado. Suponha que a matriz $A_{\text{core}}[F_\mu]$ não é primitiva, conseqüentemente $A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$ também não será pois $A_{\text{core}}[F_\mu] = A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$. Como o

3 Propriedade de Wada em mapas unidimensionais

mapa F_μ tem três pontos fixos estáveis e é contínuo, existe pelo menos um intervalo J_r que contém um ponto fixo de F_μ , então $F_\mu(J_r) \supset J_r$, segue que pelo menos um elemento da diagonal da matriz é positivo e então o traço da matriz é positivo. Com isso tem-se que a matriz $A_{\text{core}}[F_\mu]$ é redutível, uma vez que não é primitiva e possui traço positivo. Por consequência, existe J_i e J_k tal que $F_\mu^n(J_i) \cap \text{Int}(J_k) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, no qual $1 \leq i, k \leq N_m$.

Pela propriedade de invasão, existe uma componente D de $\bigcup_{i=0}^m D_{N+m+i}$ tal que $D \subset J_k$, o que implica que as três fronteiras não coincidem. Isso contradiz a afirmação inicial $\partial \overline{B_1(\mu_0)} = \partial \overline{B_2(\mu_0)} = \partial \overline{B_3(\mu_0)}$. Portanto, $A_{\text{core}}[F_\mu]$ é primitiva, e $A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$ também o é, pois $A_{\text{core}}[F_\mu] = A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$.

\Leftarrow Assuma que a matriz $A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$ é primitiva, então cada entrada da N_m -ésima potência da matriz $A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$ é positiva.

Quer-se mostrar que para todo $p \in C_\infty$ e cada $\epsilon > 0$, o intervalo $(p - \epsilon, p + \epsilon)$ tem interseção não vazia com as bacias $B_1(\mu)$, $B_2(\mu)$ e $B_3(\mu)$. Da continuidade de F_μ e da primitividade da matriz $A_{\text{core}}[F_\mu] = A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$ para $\mu_0 < \mu < \mu_0 + \delta$ segue:

Propriedade 3.24 (Propriedade das Três Bacias). *Seja $\mu_0 < \mu < \mu_0 + \delta$ fixo. Para $n \in \mathbb{N}$, para cada componente K de $C_n(\mu) \cap [r_\mu, b_\mu]$, existe uma componente U^1 de $\bigcup_{i=n}^{n+m} D_i^{[1]} \cap [r_\mu, b_\mu]$, uma componente U^2 de $\bigcup_{i=n}^{n+m} D_i^{[2]} \cap [r_\mu, b_\mu]$ e uma componente U^3 de $\bigcup_{i=n}^{n+m} D_i^{[3]} \cap [r_\mu, b_\mu]$, tal que $U^1 \subset K$, $U^2 \subset K$ e $U^3 \subset K$.*

Como o mapa F_μ (para todo μ) tem derivada de Schwarz negativa, por hipótese, tem-se que todas as iteradas desse mapa tem derivada de Schwarz negativa. Seja $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$ arbitrariamente fixado. Pela propriedade de expansão tem-se que a $N[\mu]$ -ésima iterada de F_μ é expansiva em $C_{N[\mu]}$, ou seja, existe $\xi > 1$ tal que $|(F_\mu^N)'(x)| \geq \xi$ para todo $x \in C_{N[\mu]}$, implicando que os comprimentos de $C_n(\mu)$ vão para zero conforme n vai para infinito. Esse comportamento segue também da propriedade de medida-zero.

Seja $p \in C_\infty(\mu) \cap [r_\mu, b_\mu]$ e $\epsilon > 0$. Como os comprimentos de $C_n(\mu)$ tendem a zero conforme $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}$, tome uma componente W de $C_n(\mu)$, para algum $n \in \mathbb{N}$ apropriadamente escolhido, tal que $p \in W \subset (p - \epsilon, p + \epsilon)$. Segue da propriedade das três cores 3.24 que p é um ponto de Wada. Como são três bacias tem-se $\partial \overline{B_1(\mu)} \cap [r_\mu, b_\mu] = \partial \overline{B_2(\mu)} \cap [r_\mu, b_\mu] = \partial \overline{B_3(\mu)} \cap [r_\mu, b_\mu]$.

Seja $C'_\infty(\mu) = \{x \in I / \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : F_\mu^m(x) \in C_1(\mu), \forall m \geq k\}$ o conjunto de todos os pontos de I que não saem de $C_1(\mu)$ não importa a iterada. Esse conjunto é a fronteira das bacias de atração, de fato: seja $x \in C'_\infty(\mu)$ qualquer, então existe k inteiro positivo tal que $F_\mu^m(x) \in C_1(\mu), \forall m \geq k$, então $F_\mu^m(x) \in C_\infty(\mu)$ e pela continuidade de F_μ segue que $x \in C_\infty(\mu)$.

Por fim, seja $p \in I$ um ponto qualquer de qualquer uma das fronteiras das bacias de atração, então existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ inteiro de modo que $F_\mu^m(x) \in C_\infty(\mu) \cap [r_\mu, b_\mu]$. Pela arbitrariedade de p segue que as três fronteiras coincidem e portanto o mapa F_μ possui a propriedade de Wada.

□

Corolário 3.25. *Seja F_μ uma família de mapas a um parâmetro como no teorema 3.23, e denote as bacias de atração de dois pontos fixos atrativos que existem antes de μ_0 por $B_1(\mu_0)$ e $B_2(\mu_0)$. Então, F_μ tem a propriedade de Wada para $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta \Leftrightarrow x_0$ é comum à fronteira de $B_1(\mu_0)$ e $B_2(\mu_0)$, ou seja, $x_0 \in \overline{\partial B_1(\mu_0)} = \overline{\partial B_2(\mu_0)}$.*

Demonstração. A demonstração será feita apenas para a volta. Seja F_μ uma família de mapas como no teorema 3.23 e seja $x_0 \in I$ tal que $x_0 \in \overline{\partial B_1(\mu)} = \overline{\partial B_2(\mu)}$, ou seja, x_0 é ponto de fronteira das bacias $B_1(\mu)$ e $B_2(\mu)$, além disso, conforme a hipótese (c) do teorema, a bifurcação ocorre em x_0 . Em outras palavras, x_0 é ponto de tangência para o parâmetro μ_0 , ou seja, x_0 é ponto fixo de F_{μ_0} e x_0 é atrativo por um de seus lados. Então existe um conjunto de pontos que se aproximam de x_0 , os quais formam uma bacia de atração $B_3(\mu_0)$. Como $x_0 \in \overline{\partial B_1(\mu)} = \overline{\partial B_2(\mu)}$, tem-se de imediato que qualquer intervalo aberto $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, intersecta três bacias, portanto x_0 é ponto de Wada. Por resultados em [8], todos os pontos da fronteira de $B_3(\mu_0)$ são pontos de Wada, consequentemente, $B_3(\mu_0)$ é bacia de Wada.

□

3.5 Conjugação e a Propriedade de Wada

Proposição 3.26. *A propriedade de Wada é invariante por conjugação.*

Demonstração. Sejam $f : U \rightarrow U$ e $g : V \rightarrow V$ dois mapas conjugados. Então existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ tal que $h(f(x)) = g(h(x))$ ou $f(x) = h^{-1}(g(h(x)))$.

Suponha que f possua a propriedade de Wada, i.e., f possui pelo menos 3 bacias de atração e todas as fronteiras dessas bacias coincidem. Por simplicidade, considere o caso que f tenha 3 bacias de atração.

Pelo teorema 1.9 da seção 1.3 sabe-se que a estabilidade do mapa g é idêntica à do mapa f , pois $(g^k)'(h(x)) = (f^k)'(x)$, se $h'(x)$ existe e é diferente de 0 para qualquer ponto na órbita de x . Então se f possui 3 pontos atrativos, g também os possui.

Inicialmente deve-se mostrar que a imagem por conjugação de uma bacia é uma bacia. De fato, considere um ponto \mathbf{p} periódico atrativo do mapa f , então a bacia de atração de \mathbf{p} , conforme definição 2.1, é o conjunto de todos os \mathbf{x} tais que $|f^k(\mathbf{x}) - f^k(\mathbf{p})| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Como f e g são conjugados, tem-se $f^k(\mathbf{x}) = h^{-1}(g^k(h(\mathbf{x})))$ e $f^k(\mathbf{p}) = h^{-1}(g^k(h(\mathbf{p})))$, logo $|f^k(\mathbf{x}) - f^k(\mathbf{p})| = |h^{-1}(g^k(h(\mathbf{x}))) - h^{-1}(g^k(h(\mathbf{p})))| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, a conjugação de uma bacia de atração é uma bacia de atração.

Para se completar a demonstração, deve-se mostrar que qualquer ponto \mathbf{y} que esteja na fronteira de duas bacias do mapa g está na fronteira da terceira bacia. Assim, considere qualquer $A \subset V$ vizinhança de um ponto $\mathbf{y} \in V$. Tem-se que $A \cap \partial \overline{B_1} \neq \emptyset$ e $A \cap \partial \overline{B_2} \neq \emptyset$.

Como f e g são conjugados, existe $\mathbf{x} \in U$ tal que $h(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ e $f(\mathbf{x}) = h^{-1}(g(h(\mathbf{x})))$. Dada A uma vizinhança arbitrária de \mathbf{y} , pela continuidade de h , $h^{-1}(g(h(A)))$ é aberto e por conta da imagem por conjugação de uma bacia ser uma bacia de atração, $h^{-1}(g(h(A)))$ possui intersecção não vazia com duas das bacias de atração de f . Porém, como f tem a propriedade de Wada, $h^{-1}(g(h(A)))$ intersecta, também, a terceira bacia de f . Assim, novamente pela propriedade que a imagem por conjugação de uma bacia é uma bacia de atração temos que $h(\mathbf{x})$ intersecta também a terceira bacia e logo $h(\mathbf{x})$ é um ponto de Wada.

Então pela arbitrariedade de \mathbf{y} e de A , segue que qualquer $\mathbf{y} \in V$ que esteja na fronteira de duas bacias está na fronteira da terceira bacia. Portanto, g tem a propriedade de Wada. \square

3.6 O caso com mais de três bacias de atração

O artigo [1] estabelece um critério apenas para o caso com três bacias de atração, assim um questionamento que pode ser levantado é: seria possível estendê-lo para mapas com mais de três bacias? Para responder tal pergunta, foi selecionado, dentro da família de mapas logísticos, a partir do diagrama de bifurcação, um parâmetro que resultasse em uma órbita periódica atrativa de período quatro. O parâmetro encontrado foi o 3,9605.

$$q(x) = 3,9605x(1 - x)$$

Antes de verificar se o mapa encontrado atende todas as hipóteses estabelecidas

pelo Teorema, verificou-se como é o comportamento das condições iniciais em $[0, 1]$ em relação aos atratores, ou seja, foi analisado para qual dos atratores as condições iniciais se aproximam ao iterar o mapa diversas vezes. Esse processo resultou na figura 3.10, cada uma das cores representa um dos atratores e, aparentemente, são de Wada, pois, pela imagem, há indícios que as fronteiras coincidem e a figura se parece com as figuras 3.4 do mapa logístico de parâmetro 3,84 e com a figura 3.8 do mapa logístico modificado.

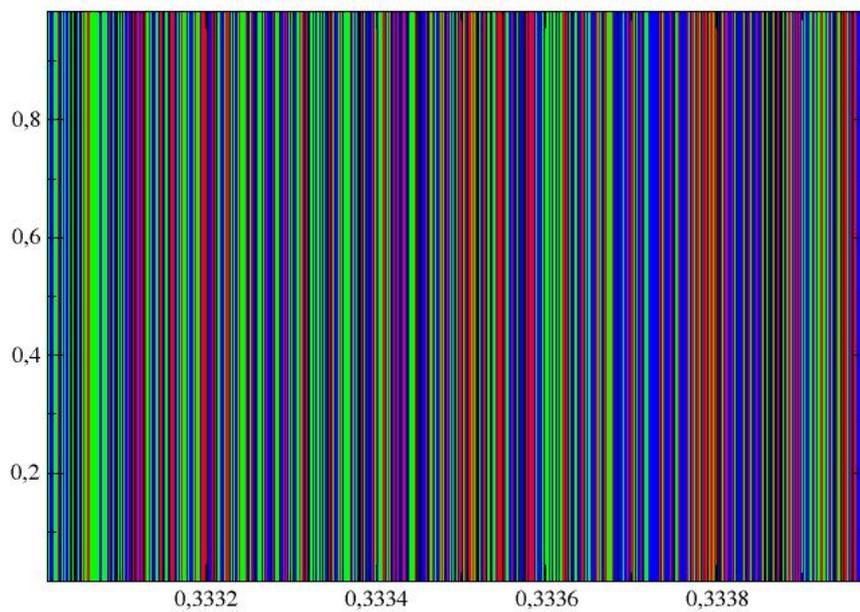


Figura 3.10: Comportamento das condições iniciais em $[0, 1]$ para o mapa logístico de parâmetro 3,9605.

Fonte: Elaborada pela autora.

No entanto, é necessário provar que o mapa atende as condições do critério e que o critério é válido para esse mapa com quatro bacias. Assim, o primeiro passo é testar se esse mapa atende às hipóteses do critério e, depois, verificar se a matriz de cobertura é primitiva e que as fronteiras coincidem.

Conforme o teorema 3.23 o mapa precisa ser C^3 e ter derivada de Schwarz negativa, dois critérios atendidos pelo mapa logístico de parâmetro 3,9605, uma vez que é um polinômio e tem derivada de Schwarz igual a $-\frac{6}{(1-2x)^2}$. Todos os atratores precisam ser pontos fixos, como a primeira iterada fornece uma órbita de período quatro, basta tomar a quarta iterada, fazendo $Q = q^4$, como feito com o mapa $G = g^3$. A bifurcação

3 Propriedade de Wada em mapas unidimensionais

tangente criadora de ponto fixo ocorre no intervalo $(3,96; 3,9605)$, como mostra a figura 3.11.

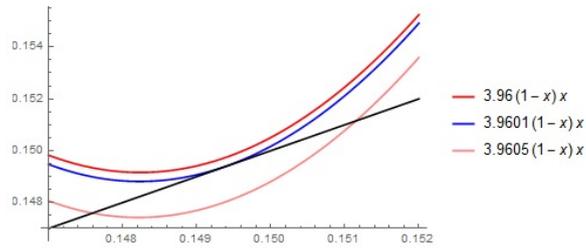


Figura 3.11: Bifurcação tangente no intervalo $(3,96, 3,9605)$

Fonte: Elaborada pela autora.

Como exposto no parágrafo acima, o mapa logístico de parâmetro $3,9605$ atende três das quatro hipóteses estabelecida pelo critério. A hipótese não atendida é a que determina que o mapa deve ter no máximo três pontos fixos atrativos, condição que se quer retirar.

A matriz de cobertura $A_{\text{core}}[Q]$, segue abaixo, é primitiva de ordem 2, essa matriz foi obtida contando o número N_m de intervalos em $C_{N+m} \cap [r, b]$, como feito com o mapa $G = g^3$. Nesse caso, como no logístico de parâmetro $3,84$, $N = m = 1$, pois m é o menor número para o qual os pontos críticos de Q estão nas bacias de Q e N é um natural tal que $|(F^N)'(x)| > 1$ em C_{N+m} . Então foram contados quantas vezes C_2 intersecta $[r, b]$, que resultou em $N_m = 31$.

3 Propriedade de Wada em mapas unidimensionais

quatro bacias de atração. Note que todos os argumentos podem ser adaptados para considerar quatro bacias de atração, ou ainda, considerar k bacias de atração. Portanto, o teorema 3.23 pode ser estendido para um mapa com k bacias de atração, como segue:

Teorema 3.27. *Seja $F_\mu : I \rightarrow I$ um família de C^3 -mapa a um parâmetro com derivada de Schwarz negativa. Assuma que*

- a) *cada atrator de F_μ seja um ponto fixo;*
- b) *F_μ tem $k \geq 3$ pontos fixos atrativos;*
- c) *no parâmetro de valor μ_0 , F_μ tem uma bifurcação tangente criadora de ponto fixo numa vizinhança de x_0 ;*
- d) *e para $0 < \delta < 1$ (δ deve ser pequeno) e para cada $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$, todos os pontos críticos de F_μ estão contidos nas bacias de atração.*

Então, F_μ tem a propriedade de Wada para $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta \Leftrightarrow$ a matriz de cobertura $A_{core}[F_{\mu_0}]$ de F_{μ_0} é primitiva.

Demonstração. Seja F_μ uma família de mapas a um parâmetro como no teorema e assumamos que essa família satisfaz as condições (a-d). Para $\mu_0 - \delta \leq \mu < \mu_0 + \delta$, denotemos as bacias de atração dos pontos fixos, que já existiam e persistem quando a bifurcação ocorre, por $B_1(\mu)$, $B_2(\mu)$, ..., $B_{k-1}(\mu)$ e por $B_k(\mu)$ a bacia do ponto fixo que é criada com a bifurcação para $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$.

Para $\mu_0 - \delta \leq \mu < \mu_0 + \delta$ denotemos por $D_0(\mu)$ a união das bacias imediatas dos pontos atrativos de F_μ e seja $C_1(\mu)$ o complementar de $D_0(\mu)$ em I , ou seja, $C_1(\mu) = I \setminus D_0(\mu)$. Por indução definamos os seguintes conjuntos, para $n \in \mathbb{N}$: $D_n(\mu) = \{x \in C_n(\mu) : F_\mu(x) \in D_{n-1}(\mu)\}$ o conjunto dos pontos que estão em $C_1(\mu)$ na $(n-1)$ -ésima iterada e que na n -ésima estão em alguma bacia imediata de F_μ ; $C_{n+1}(\mu) = \{x \in C_n(\mu) : F_\mu(x) \in C_n(\mu)\}$ o conjunto dos pontos que permanecem em $C_1(\mu)$ na n -ésima iterada; e, $C_\infty(\mu) = \{x \in I : F_\mu^t(x) \in C_1(\mu), \text{ para cada } t \geq 0\}$ o conjunto dos pontos que estão em $C_1(\mu)$ em qualquer iterada.

Por conveniência adote $D_n^{[1]}(\mu) = D_n(\mu) \cap B_1(\mu)$, ..., $D_n^{[k-1]}(\mu) = D_n(\mu) \cap B_{k-1}(\mu)$, se $\mu_0 - \delta \leq \mu < \mu_0 + \delta$ e $D_n^{[k]}(\mu) = D_n(\mu) \cap B_k(\mu)$, se $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$. Pela condição (d) todos os pontos críticos de F_μ , para $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$, estão contidos nas bacias de atração de F_μ . Seja $\delta > 0$ tal que o número de captura m de F_μ seja constante e $A_{core}[F_\mu] = A_{core}[F_{\mu_0}]$.

Para $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$ denotemos por r_μ o extremo a direita da bacia imediata mais à esquerda e por b_μ o extremo a esquerda da bacia imediata mais à direita.

3.6 O caso com mais de três bacias de atração

A primeira implicação será demonstrada por contradição, para isso considere que a matriz é fortemente conexa se, e somente se, for irredutível e possuir elemento não negativo em sua diagonal, se isso acontecer então a matriz será primitiva.

\implies Assuma que F_μ tem a propriedade de Wada para $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$. Isso implica que para $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$, $\partial\overline{B_1(\mu_0)} = \partial\overline{B_2(\mu_0)} = \dots = \partial\overline{B_k(\mu_0)}$.

Seja $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$ dado. Suponha que a matriz $A_{\text{core}}[F_\mu]$ não é primitiva, conseqüentemente $A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$ também não será pois $A_{\text{core}}[F_\mu] = A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$. Como o mapa F_μ tem k pontos fixos estáveis e é contínuo, existe pelo menos um intervalo J_r que contém um ponto fixo de F_μ , então $F_\mu(J_r) \supset J_r$. Segue que pelo menos um elemento da diagonal da matriz é positivo e então o traço da matriz é positivo. Com isso tem-se que a matriz $A_{\text{core}}[F_\mu]$ é redutível, uma vez que não é primitiva e possui traço positivo. Por conseqüência, existe J_i e J_j tal que $F_n^t(J_i) \cap \text{Int}(J_j) = \emptyset$ para cada $t \in \mathbb{N}$, no qual $1 \leq i, j \leq N_m$.

Pela propriedade de invasão, existe uma componente D de $\bigcup_{i=0}^m D_{N+m+i}$ tal que $D \subset J_j$, o que implica que as fronteiras não coincidem. Isso contradiz a afirmação inicial $\partial\overline{B_1(\mu_0)} = \partial\overline{B_2(\mu_0)} = \dots = \partial\overline{B_k(\mu_0)}$. Portanto, $A_{\text{core}}[F_\mu]$ é primitiva, e $A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$ também o é, pois $A_{\text{core}}[F_\mu] = A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$.

\Leftarrow Assuma que a matriz $A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$ é primitiva, então cada entrada da N_m -ésima potência da matriz $A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$ é positiva.

Quer-se mostrar que para todo $p \in C_\infty$ e cada $\epsilon > 0$, o intervalo $(p - \epsilon, p + \epsilon)$ tem interseção não vazia com as bacias $B_1(\mu)$, $B_2(\mu)$, ..., $B_{k-1}(\mu)$ e $B_k(\mu)$. Da continuidade de F_μ e da primitividade da matriz $A_{\text{core}}[F_\mu] = A_{\text{core}}[F_{\mu_0}]$ para $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$ segue a propriedade de invasão 3.20.

Como o mapa F_μ (para todo μ) tem derivada de Schwarz negativa, pela propriedade 3.11 tem-se que todas as iteradas desse mapa tem derivada de Schwarz negativa. Seja $\mu_0 \leq \mu < \mu_0 + \delta$ arbitrariamente fixado. Pela propriedade de expansão tem-se que a $N[\mu]$ -ésima iterada de F_μ é expansiva em $C_{N[\mu]}$, ou seja, existe $\xi > 1$ tal que $|(F_\mu^N)'(x)| \geq \xi$ para todo $x \in C_{N[\mu]}$, implicando que os comprimentos de $C_n(\mu)$ vão para zero conforme n vai para infinito. Esse comportamento segue também da propriedade de Medida Zero.

Seja $p \in C_\infty(\mu) \cup [r_\mu, b_\mu]$ e $\epsilon > 0$. Como os comprimentos de $C_n(\mu)$ tendem a zero conforme $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}$, tome W uma componente de $C_n(\mu)$, para algum $n \in \mathbb{N}$ apropriadamente escolhido, tal que $p \in W \subset (p - \epsilon, p + \epsilon)$. Segue da propriedade de invasão 3.20 que p é um ponto de Wada. Como são três bacias tem-se $\partial\overline{B_1(\mu)} \cap [r_\mu, b_\mu] = \dots = \partial\overline{B_{k-1}(\mu)} \cap [r_\mu, b_\mu] = \partial\overline{B_k(\mu)} \cap [r_\mu, b_\mu]$.

3 Propriedade de Wada em mapas unidimensionais

Seja $C'_\infty(\mu) = \{x \in I / \exists t \in \mathbb{N} \cup \{0\} : F_\mu^m(x) \in C_1(\mu), \forall m \geq t\}$ o conjunto de todos os pontos de I que não saem de $C_1(\mu)$ não importa a iterada. Esse conjunto é a fronteira das bacias de atração, de fato: seja $x \in C'_\infty(\mu)$ qualquer, então existe k inteiro positivo tal que $F_\mu^m(x) \in C_1(\mu), \forall m \geq k$, então $F_\mu^m(x) \in C_\infty(\mu)$ e pela continuidade de F_μ segue que $x \in C_\infty(\mu)$.

Por fim, seja $p \in I$ um ponto qualquer de qualquer uma das fronteiras das bacias de atração, então existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ inteiro de modo que $F_\mu^m(x) \in C_\infty(\mu) \cap [r_\mu, b_\mu]$. Pela arbitrariedade de p segue que as três fronteiras coincidem e portanto o mapa F_μ possui a propriedade de Wada.

□

4 Considerações Finais

Esta dissertação apresentou o critério, introduzido em [1], para se determinar se mapas unidimensionais com derivada de Schwarz negativa e com três atratores possuem a propriedade de Wada.

Construímos um novo mapa para o qual o critério é válido. Este possui dinâmica semelhante à do mapa apresentado no artigo [1], de modo que todas as conclusões exploradas no artigo puderam ser estendidas a esse novo mapa. Provamos, também, que a propriedade de Wada é invariante por conjugação e que é possível estender o critério para mapas com quatro ou mais bacias de atração, ou seja, a hipótese de ter no máximo três atratores foi substituída por $k \geq 3$ atratores.

A invariância por conjugação permite estender imediatamente a propriedade de Wada ao mapa conjugado. A extensão do critério para mapas com quatro ou mais bacias é importante pelo fato de que existem muitos mapas com mais de três atratores.

O critério apresentado, de certa maneira, está limitado a um conjunto de mapas que possuem dinâmica semelhante. Uma possibilidade para trabalhos futuros é modificar as hipóteses do critério de forma que mapas com outros comportamentos possam ser abrangidos. Exemplos de modificação seriam remover a hipótese de o mapa ter derivada de Schwarz negativa e substituir a bifurcação tangente criadora de ponto fixo por outro tipo de bifurcação.

A

Matrizes Irredutíveis

Na seção 3.4 foram usados resultados sobre matrizes irredutíveis. Abaixo apresentamos os principais resultados utilizados. Para maiores detalhes e demonstrações, veja [11].

Definição A.1. Uma matriz não negativa A é irredutível se, e somente se, para cada (i, j) existe um número natural q tal que $a_{ij}^q > 0$.

Definição A.2. O grafo $G(A)$ associado à uma matriz A de ordem n , consiste de n vértices P_1, P_2, \dots, P_n dos quais saem setas de P_i para P_j se, e somente se, $a_{ij} \neq 0$.

Exemplo A.3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O grafo $G(A)$ associado à matriz A é:

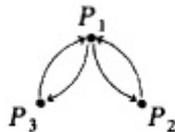


Figura A.1: Grafo associado à matriz A .

Definição A.4. Um grafo é fortemente conexo se para qualquer par (P_i, P_j) de vértices de G , existe uma sequência de setas (caminho) que leva de P_i para P_j .

Como $a_{ij}^q > 0$ se, e somente se, existe uma sequência de q setas que leva de P_i para P_j , segue o seguinte resultado:

Teorema A.5. A matriz A é irredutível se, e somente se, $G(A)$ é fortemente conexo.

Definição A.6. Uma matriz A é primitiva se, e somente se, existe um número natural m tal que A^m é positiva.

Corolário A.7. Um matriz irredutível é primitiva se seu traço for positivo.

Bibliografia

- [1] Romulus Breban e Helena E. Nusse. «On the creation of Wada basins in interval maps through fixed point tangent bifurcation». Em: **Physica D: Nonlinear Phenomena Volume 207, Issue 2, June 2005, Pages 52-63** (2005).
- [2] David Sweet, Edward Ott e James A. Yorke. «Topology in chaotic scattering». Em: **Nature Volume 399, May 1999, Pages 315-316** (1999).
- [3] Judy Kennedy e James A. Yorke. «Basins of Wada». Em: **Physica D: Nonlinear Phenomena Volume 51, Issue 1-3, August 1991, Pages 213-225** (1991).
- [4] Kathleen T. Alligood, Tim D. Dauer e James A. Yorke. **CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems**. Springer, 1996.
- [5] Steven W. McDonald et al. «Fractal Basin Boundaries». Em: **Physica D: Nonlinear Phenomena Volume 17, Issue 2, October 1985, Pages 125-153** (1985).
- [6] Falconer Kenneth. **Fractal Geometr: Mathematical Foundations and Applications**. Wiley, 1990.
- [7] Benoit B. Mandelbrot. **The Fractal Geometry of Nature**. W. H. Freeman e Company, 1977.
- [8] Helena E. Nusse. «Asymptotically Periodic Behavior in the Dynamics of Chaotic Mappings». Em: **SIAM Journal on Applied Mathematics Volume 47, June 1987, Pages 498-515** (1987).
- [9] Henrique Oliveira e Sousa J. Ramos. «On Iterated Positive Schwarzian Derivative Maps». Em: **International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 13, No 7, 1673-1681** (2003).
- [10] Pierre Collet e Jean-Pierre Eckmann. **Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems**. Birkhäuser, 1980.
- [11] Abraham Berman e Robert J. Plemmons. **Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences**. Siam, 1994.

Bibliografia

- [12] Robert L. Devaney. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.**
Addison-Wesley Publishing Company, 1948.