



Universidade Federal do ABC

SANTIAGO DAVID CARLOSAMA

Polítopos de Gelfand-Tsetlin associados com módulos de relações

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Santo André, 2019



Universidade Federal do ABC

Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Santiago David Carlosama

Polítopos de Gelfand-Tsetlin associados com módulos de relações

Orientador: Prof. Dr. Luis Enrique Ramírez

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO SANTIAGO DAVID CARLOSAMA,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. LUIS ENRIQUE RAMÍREZ.

Santo André, 2019

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Carlosama, Santiago David
Polítopos de Gelfand-Tsetlin associados a módulos de relações /
Santiago David Carlosama. — 2019.

71 fls. : il.

Orientador: Luis Enrique Ramírez

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa
de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2019.

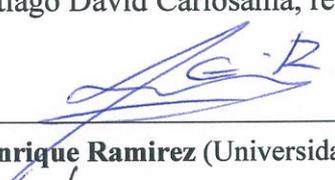
1. Polítopos. 2. Álgebras de Lie. 3. Módulos. I. Ramírez, Luis
Enrique. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019. III.
Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
ppg.matematica@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Santiago David Carlosama, realizada em 26 de março de 2019:



Prof.(a) Dr.(a) **Luis Enrique Ramirez** (Universidade Federal do ABC) – Presidente



Prof.(a) Dr.(a) **Kostiantyn Iusenko** (Universidade de São Paulo) – Membro Titular



Prof.(a) Dr.(a) **Nazar Arakelian** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Cristian Favio Coletti** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

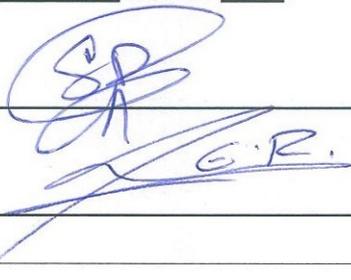
Prof.(a) Dr.(a) **Germán Alonso Benitez Monsalve** (Universidade Federal do Amazonas) – Membro Suplente

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 09 de abril de 2019.

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____



A minha mãe, irmã e os meus sobrinhos, que com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida profissional.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe Barbara Carlosama, que com seu esforço, amor e dedicação me apoiou incondicionalmente sempre que eu precisei e me ensinou a importância do estudo. Ela é minha maior inspiração.

Ao Professor Luis Enrique Ramírez, pela orientação, paciência e incentivos que ajudaram na elaboração desta dissertação. Agradeço aos professores Nazar Arakelian, Kostiantyn Iusenko e Cristian Coletti que foram parte da banca e que com seus comentários e sugestões ajudaram no desenvolvimento do trabalho.

Meus agradecimentos aos amigos, companheiros de trabalhos e irmãos na amizade que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes na minha vida com certeza.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que me deram a oportunidade de fazer o curso e pelo ambiente criativo e amigável que proporciona.

Por último, agradeço o auxílio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) a minha pesquisa.

Mudanças são necessárias,
elas limpam nossa alma,
elas nos fazem voar para coisas boas,
nos consertam o mundo.
Mudança nos faz bem.
— Rafael Cabaliere

RESUMO

Neste trabalho vamos estudar a relação entre módulos da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$ e polítopos construídos a partir de tabelas as quais estarão associadas a um conjunto de relações. Para estudar esta relação, estudamos os conceitos básicos de álgebras de Lie, focando no caso de álgebras de Lie semi-simples e as propriedades de seus módulos, principalmente na caracterização dos módulos de dimensão finita. No caso da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$ estudamos o teorema de Gelfand-Tsetlin o qual mostra bases indexadas por tabelas standard para módulos de dimensão finita irredutíveis. Em seguida, estudamos os conjuntos de relações e definimos tabelas e poliedros associados a um conjunto de relações qualquer. Como primeiro resultado, mostramos que para um conjunto de relações particular (não necessariamente standard) podemos encontrar tabelas com certas condições, cuja quantidade é igual à dimensão de um módulo de dimensão finita irredutível em $\mathfrak{gl}(n - 1)$. O seguinte resultado nos permite calcular a dimensão da face minimal de um poliedro que contem uma tabela dada. Estas definições e resultados são generalizações de resultados sobre polítopos os quais foram estudados em [LM04] e onde como aplicação do último resultado se dá uma resposta à conjectura de Berenstein-Kirillov.

Palavras-chave: Álgebras de Lie, Polítopos, representações, $\mathfrak{gl}(n)$ -módulos, bases de Gelfand-Tsetlin.

ABSTRACT

In this dissertation we will study the relation between modules for the Lie algebra $\mathfrak{gl}(n)$ and polytopes constructed from tableaux which will be associated with a set of relations. To study this relation, we studied the basic concepts of Lie algebras, focusing on the case of semi-simple Lie algebras and the properties of their modules, mainly on the characterization of the finite-dimensional modules. In the case of Lie algebra $\mathfrak{gl}(n)$ and the Gelfand-Tsetlin theorem which shows basis consisting of standard tableaux for simple finite-dimensional modules. Then we study the sets of relations and define tableaux and polyhedra associated with any set of relations. As a first result, we show that for a particular set of relations (not necessarily standard) we can find tableaux with certain conditions, whose quantity is equal to the dimension of a simple finite-dimensional module in $\mathfrak{gl}(n - 1)$. The following result allows us to calculate the dimension of the minimal face of a polyhedron containing a given tableau. These definitions and results are generalizations about polytopes results which were studied in [LM04] and where as an application of the latter result they give a response to the Berenstein-Kirillov conjecture.

Keywords: Lie algebras, Polytopes, representations, $\mathfrak{gl}(n)$ -modules, Gelfand-Tsetlin basis.

CONTEÚDO

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Definições e exemplos	3
1.2 Representações de álgebras de Lie	7
1.3 Subálgebras de Cartan	12
1.4 Sistemas simples de raízes	18
2 Módulos de dimensão finita para álgebras semi-simples	23
2.1 A álgebra $\mathfrak{sl}(2)$	23
2.2 Classificação de módulos irredutíveis de dimensão finita para $\mathfrak{sl}(2)$	25
2.3 Grupos de Weyl e Pesos integrais	28
2.4 Álgebra Envelopante Universal	31
2.5 Módulos de peso máximo e teorema de caracterização de módulos de dimensão finita para álgebras de Lie semi-simples	37
2.6 Teorema de Gelfand-Tsetlin	41
3 Poliedros associados a conjuntos de relações	47
3.1 Conjuntos de Relações	47
3.2 Poliedros associados com conjuntos de relações	51
3.3 Faces de \mathcal{C} -poliedros	54
4 Polítopos de Gelfand-Tsetlin	59
4.1 Definições e exemplos	59
4.2 Resultados importantes e suas consequências	61
Referência Bibliográfica	71

INTRODUÇÃO

Esta dissertação tem como objetivo principal o estudo de polítopos e de forma mais geral o estudo de poliedros associados a certos módulos sobre a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$. Principalmente queremos generalizar a construção de polítopos de Gelfand-Tsetlin associados a módulos de dimensão finita.

O desenvolvimento da dissertação é da forma usual. Depois de enunciar os conceitos preliminares, focaremos em resultados particulares, porém importantes, os quais serão demonstrados sempre que for necessário.

Para estudar a associação que queremos foi preciso estudar grande parte da teoria básica das álgebras de Lie. No primeiro capítulo baseado no livro *Álgebras de Lie* de L. San Martin [SM10], vamos nos concentrar nas noções básicas de álgebras de Lie em geral, tais como, subálgebras, representações e sua relação com módulos, álgebras simples e semi-simples. Além disso, enunciaremos resultados relacionados com a forma de Cartan-Killing, subálgebras de Cartan e decomposição da álgebra pela representação adjunta da subálgebra de Cartan. Depois disso, focaremos nosso estudo nas álgebras semi-simples e seus sistemas de raízes. Todos esses resultados serão usados nos capítulos subsequentes no estudo dos módulos. É importante notar que nesta dissertação em geral vamos a usar módulos ao invés de representações.

No segundo capítulo, baseado em [Maz10] e [Hu08], vamos dar uma descrição dos módulos irredutíveis de dimensão finita para $\mathfrak{sl}(2)$, uma descrição dos pesos integrais e a definição de uma das ferramentas fundamentais para o estudo de módulos: a *álgebra envelopante universal*. Usando a álgebra universal, definiremos os módulos de Verma com os quais podemos construir módulos de dimensão finita. Também vamos enunciar resultados importantes sobre módulos de dimensão finita para álgebras de Lie semi-simples e uma caracterização dos módulos de dimensão finita. Depois disto, enunciaremos o teorema de Gelfand-Tsetlin para $\mathfrak{gl}(n)$ o qual dá bases explícitas e fórmulas para todos os módulos irredutíveis de dimensão finita e terminaremos o capítulo com a construção de tabelas de Young semi-standard, as quais estão em uma relação bijetora com alguns elementos de bases dos espaços de peso de módulos irredutíveis de dimensão finita para $\mathfrak{gl}(n)$.

No terceiro capítulo introduzimos o conceito de *conjuntos de relações* e o conceito de poliedro associado a tabelas, as quais estarão associadas aos conjuntos de relações. Além disto, vamos dar umas outras definições e resultados importantes sobre os poliedros os quais serão de utilidade para obter bases de módulos de dimensão finita e mostrar o resultado mais importante do capítulo, o qual nos permitira caracterizar a dimensão da face minimal de uma determinada tabela. Deve-se notar que as definições e resultados deste capítulo generalizam os conceitos dados no capítulo a seguir. Em base a leitura feita no artigo [LM04], no capítulo 4 vamos dar definições, exemplos e resultados importantes sobre polítopos de Gelfand-Tsetlin que são um caso particular de poliedros e com os quais podemos caracterizar pontos em alguma face do polítopo. Em particular, daremos uma caracterização de vértices para certos polítopos de Gelfand-Tsetlin. Para finalizar o capítulo, se da uma resposta à conjetura de Berenstein-Kirillov. Estes resultados serão de muita utilidade para o estudo da associação que queremos ter entre polítopos e módulos.

1

PRELIMINARES

Este primeiro capítulo baseado em [SM10], é introdutório e serve para expor as definições e conceitos básicos sobre as álgebras de Lie. Vamos enunciar alguns resultados e exemplos importantes e fixar a notação necessária para os capítulos subsequentes. Em geral, nesta dissertação vamos trabalhar com o corpo de escalares dos complexos, i.e, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ a menos que se fale o contrário.

1.1 DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Vamos começar a dissertação com a definição do que é uma álgebra de Lie.

Definição 1.1.1. *Um espaço vetorial \mathfrak{g} munido de um produto (colchete)*

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

é chamado de álgebra de Lie se o produto satisfaz as seguintes propriedades:

1. *É bilinear.*
2. *É anti-simétrico, isto é $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ (o que implica $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ e é equivalente se o corpo de escalares não é de característica dois).*
3. *Satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,*

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Em seguida, vamos apresentar alguns exemplos de álgebras de Lie.

Exemplo 1.1.2. *Seja V um espaço vetorial qualquer. Se definimos*

$$[,] : V \times V \longrightarrow V$$

como sendo $[X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in V$, então $(V, [,])$ é a álgebra de Lie trivial sobre V .

Exemplo 1.1.3. Seja (A, \cdot) uma álgebra associativa. Definimos o produto

$$\begin{aligned} [,] : A \times A &\longrightarrow A \\ (X, Y) &\mapsto X \cdot Y - Y \cdot X. \end{aligned}$$

Vamos provar que esse produto satisfaz a Definição 1.1.1. Sejam $X, Y, Z \in A$. Então

$$\begin{aligned} 1. \quad [X + Y, Z] &= (X + Y) \cdot Z - Z \cdot (X + Y) = X \cdot Z + Y \cdot Z - Z \cdot X - Z \cdot Y \\ &= X \cdot Z - Z \cdot X + Y \cdot Z - Z \cdot Y = [X, Z] + [Y, Z] \\ [X, Y + Z] &= X \cdot (Y + Z) - (Y + Z) \cdot X = X \cdot Y + X \cdot Z - Y \cdot X - Z \cdot X \\ &= X \cdot Y - Y \cdot X + X \cdot Z - Z \cdot X = [X, Y] + [X, Z] \end{aligned}$$

Isto significa que o produto é bilinear.

$$2. \quad [X, X] = X \cdot X - X \cdot X = 0, \text{ ou seja, o produto é anti-simétrico.}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] &= \\ &= [X, Y \cdot Z - Z \cdot Y] + [Z, X \cdot Y - Y \cdot X] + [Y, Z \cdot X - X \cdot Z] \\ &= X \cdot (Y \cdot Z - Z \cdot Y) - (Y \cdot Z - Z \cdot Y) \cdot X + Z \cdot (X \cdot Y - Y \cdot X) \\ &\quad - (X \cdot Y - Y \cdot X) \cdot Z + Y \cdot (Z \cdot X - X \cdot Z) - (Z \cdot X - X \cdot Z) \cdot Y \\ &= X \cdot (Y \cdot Z) - X \cdot (Z \cdot Y) - (Y \cdot Z) \cdot X + (Z \cdot Y) \cdot X + Z \cdot (X \cdot Y) - Z \cdot (Y \cdot X) \\ &\quad - (X \cdot Y) \cdot Z + (Y \cdot X) \cdot Z + Y \cdot (Z \cdot X) - Y \cdot (X \cdot Z) - (Z \cdot X) \cdot Y + (X \cdot Z) \cdot Y \\ &= 0 \quad (\text{pois } A \text{ é associativa}). \end{aligned}$$

Isto quer dizer que se satisfaz a identidade de Jacobi.

Portanto, $(A, [,])$ é uma álgebra de Lie e será denotada por $A^{(-)}$.

Assim, sendo V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} (não necessariamente de dimensão finita), denotamos por $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie:

$$\text{End}(V)^{(-)},$$

onde $\text{End}(V) = \{f : V \rightarrow V \text{ linear}\}$, munida da composição usual de morfismos.

Exemplo 1.1.4. Seja $n \in \mathbb{N}$, por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ denotaremos a álgebra das matrizes com entradas em \mathbb{C} de tamanho $n \times n$. Neste caso, esta álgebra será indicada somente por $\mathfrak{gl}(n)$, e $(\mathfrak{gl}(n), [,])$ será a álgebra de Lie, onde

$$\begin{aligned} [,] : \mathfrak{gl}(n) \times \mathfrak{gl}(n) &\longrightarrow \mathfrak{gl}(n) \\ (A, B) &\mapsto AB - BA. \end{aligned}$$

Observação 1.1.5. Note que $\mathfrak{gl}(n)$ tem base $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ como espaço vetorial e a seguinte relação é satisfeita:

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}.$$

Isto implica que todo elemento de $\mathfrak{gl}(n)$ pode ser obtido usando colchetes sucessivos de elementos do conjunto $B = \{E_{k,k+1}, E_{k+1,k}, E_{l,l}\}$, onde $k = 1, \dots, n-1$ e $l = 1, \dots, n$. Isto implica que, B é base para $\mathfrak{gl}(n)$ como álgebra de Lie.

Esta última álgebra será nosso principal objeto de estudo nos últimos capítulos da dissertação.

Agora, de forma natural pode-se introduzir o conceito de subálgebra e ideal.

Definição 1.1.6. Um subespaço vetorial \mathfrak{h} de \mathfrak{g} que é fechado pelo colchete, ou seja, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ se $X, Y \in \mathfrak{h}$ é chamado subálgebra de \mathfrak{g} . Se \mathfrak{h} satisfaz $\forall Y \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}, [X, Y] \in \mathfrak{h}$, então \mathfrak{h} é chamado de ideal de \mathfrak{g} .

Vejam alguns exemplos de subálgebras de $\mathfrak{gl}(n)$.

Exemplo 1.1.7. Subálgebras de $\mathfrak{gl}(n)$

1. $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n) : \text{tr}X = 0\}$. Como no caso de $\mathfrak{gl}(n)$, estas álgebras serão denotadas por $\mathfrak{sl}(n)$.
2. O subespaço das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal

$$\left\{ X \in \mathfrak{gl}(n) : X = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma subálgebra.

3. O subespaço das matrizes diagonais

$$\left\{ X \in \mathfrak{gl}(n) : X = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \right\}$$

é uma subálgebra.

Introduzimos o conceito de centro de uma álgebra de Lie o qual será usado mais para frente para decompor $\mathfrak{gl}(n)$ como uma soma direta de subespaços invariantes.

Definição 1.1.8. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Definimos o centro de \mathfrak{g} como sendo o conjunto*

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0, \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Exemplo 1.1.9. *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$. Afirmamos que $Z(\mathfrak{gl}(n)) = \{\lambda Id : \lambda \in \mathbb{C}\}$. De fato, sejam $A \in Z(\mathfrak{gl}(n))$ e $B \in \mathfrak{gl}(n)$ uma matriz diagonal com $b_{ii} = \lambda_i$ onde $\lambda_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$. Temos que $AB = BA$ pois $A \in Z(\mathfrak{gl}(n))$. Assim, olhando as componentes de cada produto temos que $(AB)_{ij} = a_{ij}\lambda_j$ e $(BA)_{ij} = a_{ij}\lambda_i$. Isto implica que, para cada $i \neq j$*

$$\begin{aligned} 0 &= a_{ij}\lambda_j - a_{ij}\lambda_i \\ &= a_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) \end{aligned}$$

como $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$, temos que $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$. Portanto A é uma matriz diagonal. Agora, seja $X \in \mathfrak{gl}(n)$ tal que $x_{ij} \neq 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Usando o mesmo procedimento anterior temos que

$$\begin{aligned} 0 &= a_{ii}x_{ij} - a_{jj}x_{ij} \\ &= (a_{ii} - a_{jj})x_{ij}. \end{aligned}$$

Assim, como $x_{ij} \neq 0$ para $i \neq j$ temos que $a_{ii} = a_{jj}$, ou seja, as componentes da matriz diagonal A são todas iguais. Mostrando assim que a afirmação é verdadeira.

Observação 1.1.10. *Seja $A \in \mathfrak{gl}(n)$. Se $\text{tr}(A) = 0$ então temos que $A \in \mathfrak{sl}(n)$. Caso $\text{tr}(A) \neq 0$ podemos escrever A como segue*

$$A = \frac{\text{tr}(A)}{n} Id + \left(A - \frac{\text{tr}(A)}{n} Id \right)$$

pela linearidade da função traço temos que $\text{tr} \left(A - \frac{\text{tr}(A)}{n} Id \right) = 0$ ou seja, $\left(A - \frac{\text{tr}(A)}{n} Id \right) \in \mathfrak{sl}(n)$. Além disto, é claro que $\mathfrak{sl}(n) \cap Z(\mathfrak{gl}(n)) = \{0\}$. Daqui podemos concluir que

$$\mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{sl}(n) \oplus Z(\mathfrak{gl}(n)).$$

1.2 REPRESENTAÇÕES DE ÁLGEBRAS DE LIE

Um dos conceitos mais importantes em álgebras de Lie é o conceito de representação sobre um espaço vetorial. Para isto precisamos definir o que é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Definição 1.2.1. *Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} duas álgebras de Lie. Dizemos que uma aplicação linear*

$$\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$$

é um homomorfismo de álgebras de Lie se

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)], \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Um homomorfismo bijetor é chamado de isomorfismo.

Relacionado com os homomorfismos existe o seguinte teorema de isomorfismo.

Teorema 1.2.2. *Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} duas álgebras de Lie e $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um homomorfismo. Então*

$$\mathfrak{g}/\text{Ker}\psi \simeq \text{Im}\psi.$$

O isomorfismo é dado por $\bar{X} \in \mathfrak{g}/\text{Ker}\psi \mapsto \psi(X) \in \text{Im}\psi$.

Exemplo 1.2.3. *Considere o homomorfismo*

$$\begin{aligned} \tau : \mathfrak{gl}(n) &\rightarrow Z(\mathfrak{gl}(n)) \\ X &\mapsto \text{tr}(X)\text{Id}. \end{aligned}$$

Tal homomorfismo é sobrejetor. Além disso, temos que $\text{Ker}\tau = \mathfrak{sl}(n)$ pois, os únicos elementos com traço zero são os elementos de $\mathfrak{sl}(n)$. Assim, aplicando o teorema anterior temos que

$$\mathfrak{gl}(n)/\mathfrak{sl}(n) \simeq Z(\mathfrak{gl}(n)).$$

Agora, podemos definir o que é uma representação de uma álgebra de Lie.

Definição 1.2.4. *Uma representação de \mathfrak{g} em V é um homomorfismo de álgebras de Lie*

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

isto é, para $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $a \in \mathbb{C}$ se satisfaz

1. $\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$

2. $\rho(\alpha X) = \alpha \rho(X)$
3. $\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X)$

A dimensão da representação é $\dim(V)$. Denotamos tal representação por (ρ, V) , mas na maioria das vezes denotaremos somente por ρ . Vamos ver um exemplo importante de representação.

Exemplo 1.2.5. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie, podemos construir uma representação de \mathfrak{g} no espaço vetorial \mathfrak{g} via*

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\mapsto ad(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

Vamos provar que de fato ad satisfaz a Definição 1.2.4. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ e $c \in \mathbb{C}$. Então

1. $ad(X+Y)(Z) = [X+Y, Z]$
 $= [X, Z] + [Y, Z]$ (por $[\cdot, \cdot]$ ser bilinear)
 $= ad(X)(Z) + ad(Y)(Z)$.
2. $ad(cX)(Y) = [cX, Y] = c[X, Y] = c ad(X)(Y)$.
3. $ad([X, Y])(Z) = [[X, Y], Z]$
 $= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]]$
 $= ad(X)ad(Y)(Z) - ad(Y)ad(X)(Z)$
 $= (ad(X)ad(Y) - ad(Y)ad(X))(Z)$.

Portanto, ad satisfaz a Definição 1.2.4. Assim, (ad, \mathfrak{g}) é uma representação de \mathfrak{g} em \mathfrak{g} .

Esta representação que é denominada *representação adjunta* será uma ferramenta muito útil no estudo das álgebras de Lie e usada ao longo da dissertação. Definimos a continuação o conceito de módulo.

Definição 1.2.6. *Seja \mathfrak{g} álgebra de Lie. Um espaço vetorial V munido com um produto*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathfrak{g} \times V &\rightarrow V \\ (X, v) &\mapsto X \cdot v \end{aligned}$$

é um módulo sobre \mathfrak{g} se

1. $(X + Y) \cdot v = X \cdot v + Y \cdot v$
2. $X \cdot (v + u) = X \cdot v + X \cdot u$
3. $(\alpha X) \cdot v = X \cdot (\alpha v) = \alpha (X \cdot v)$
4. $[X, Y] \cdot v = X \cdot (Y \cdot v) - Y \cdot (X \cdot v)$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, $v, u \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

Observação 1.2.7. Os conceitos de módulo e representação são equivalentes e morfismos entre representações correspondem com morfismos entre módulos.

Seja (V, \cdot) um \mathfrak{g} -módulo, definimos

$$\begin{aligned} \rho_V : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ X &\mapsto \rho_V(X) : V \rightarrow V \\ v &\mapsto X \cdot v. \end{aligned}$$

ρ_V definido dessa forma é uma representação de \mathfrak{g} .

Seja ρ uma representação de \mathfrak{g} em V . Definimos uma ação de \mathfrak{g} em V dada por:

$$\begin{aligned} \circ : \mathfrak{g} \times V &\rightarrow V \\ (X, v) &\mapsto X \circ v = \rho(X)v. \end{aligned}$$

Com esse produto, V é um módulo o qual denotaremos por V_ρ .

Com isso fixo, considere a representação ρ_{V_ρ} definida por:

$$\begin{aligned} \rho_{V_\rho} : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(V_\rho) \\ X &\mapsto \rho_{V_\rho}(X) : V_\rho \rightarrow V_\rho \\ v &\mapsto X \circ v = \rho(X)v, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho_{V_\rho}(X)v = \rho(X)v.$$

Como $v \in V$ e $X \in \mathfrak{g}$ são arbitrários, então podemos concluir que

$$\rho_{V_\rho} = \rho.$$

Agora, considere o módulo V_{ρ_V} com produto $*$ definido por:

$$\begin{aligned} * : \mathfrak{g} \times V &\rightarrow V \\ (X, v) &\mapsto X * v = \rho_V(X)v = X \cdot v, \end{aligned}$$

ou seja, V_{ρ_V} e V tem o mesmo produto. Portanto eles são iguais. Isto mostra que, as categorias de módulos e representações são equivalentes.

Observação 1.2.8. *Pela Observação 1.1.10 sabemos que a álgebra $\mathfrak{gl}(n)$ pode ser escrita como*

$$\mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{sl}(n) \oplus Z(\mathfrak{gl}(n)).$$

portanto, para estudar representações ou módulos de $\mathfrak{sl}(n)$ é suficiente estudar representações ou módulos de $\mathfrak{gl}(n)$.

Vamos estudar agora a decomposição de representações.

Definição 1.2.9. *Seja (ρ, V) uma representação de \mathfrak{g} . Um subespaço vetorial W de V é dito ρ -invariante se*

$$\rho(X) \cdot W \in W, \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

(ρ, V) é chamada irredutível se os únicos subespaços ρ -invariantes são $\{0\}$ e V . Assim, a representação (ρ, V) é dita completamente redutível (ou semi-simples) se existe $k \geq 1$ tal que

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

com V_i ρ -invariantes irredutíveis. Do mesmo jeito, dizemos que um \mathfrak{g} -módulo (V, \cdot) é irredutível se seus únicos submódulos são $\{0\}$ e (V, \cdot) .

Um resultado bastante utilizado para determinar a redutibilidade de representações é a proposição a seguir (Ver Prop. 1.7, [SM10]).

Proposição 1.2.10. *Suponha que $\dim(V) < \infty$, então ρ é completamente redutível se e somente se todo subespaço invariante admite um complementar invariante, isto é,*

$$\begin{aligned} \forall W \subset V \text{ invariante, } \exists W_1 \text{ invariante tal que} \\ V = W \oplus W_1. \end{aligned}$$

Introduz-se agora o conceito de derivação.

Definição 1.2.11. *Uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é uma derivação da álgebra de Lie \mathfrak{g} se satisfaz*

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Exemplo 1.2.12. As adjuntas dos elementos de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} são derivações. De fato, pela identidade de Jacobi temos que

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$$

ou seja,

$$ad(X)[Y, Z] = [ad(X)Y, Z] + [Y, ad(X)Z].$$

isto mostra que, $ad(X)$ é uma derivação.

A seguinte definição nos permite diferenciar estruturalmente as álgebras de Lie.

Definição 1.2.13. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $A, B \subset \mathfrak{g}$, considere o conjunto

$$[A, B] := \text{span} \{ [X, Y] \mid X \in A, Y \in B \}.$$

Assim, temos as seguintes definições

1. \mathfrak{g} é chamada solúvel se existe k tal que

$$\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\},$$

onde $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$. Note que usando a identidade de Jacobi pode-se mostrar que esses subespaços são ideais de \mathfrak{g} .

2. \mathfrak{g} é nilpotente se existe k tal que

$$\mathfrak{g}^k = \{0\}$$

onde $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]$. Como o produto de ideais é um ideal, temos que todos os \mathfrak{g}^k são ideais.

3. Definimos o radical solúvel de \mathfrak{g} como sendo o ideal solúvel que contém todos os ideais solúveis. Este ideal é denotado por $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. A existência desse ideal é garantida na Proposição 1.28 de [SM10].

4. \mathfrak{g} é dita semi-simples se $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

5. \mathfrak{g} é dita simples se

- Os únicos ideais de \mathfrak{g} são $\{0\}$ e \mathfrak{g} .

- $\dim(\mathfrak{g}) \geq 2$.

Observação 1.2.14. *Toda álgebra simples é semi-simples. De fato, seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie com $\dim(\mathfrak{g}) \geq 2$ e tal que não possui ideais não triviais. Como $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é um ideal, então ele deve ser $\{0\}$ ou \mathfrak{g} . Se $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, então não temos nada que provar. Se $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, então temos que \mathfrak{g} é solúvel, portanto, $\mathfrak{g}^{(1)} \neq \mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}^{(1)}$ é um ideal, então $\mathfrak{g}^{(1)} = \{0\}$, isto é, \mathfrak{g} é abeliana. Como $\dim(\mathfrak{g}) \geq 2$, então temos que todo subespaço de \mathfrak{g} é um ideal, mas isto é uma contradição pois \mathfrak{g} não possui ideais não triviais. Logo, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ não é possível, provando assim que toda álgebra simples é semi-simples.*

Exemplo 1.2.15. *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$. Afirmamos que seu centro $Z(\mathfrak{gl}(n))$ é um ideal solúvel. De fato, considere $A, B \in Z(\mathfrak{gl}(n))$, então*

$$\begin{aligned} [A, B] &= AB - BA \\ &= AB - AB = 0. \end{aligned}$$

Isto implica que $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$, ou seja, $\mathfrak{gl}(n)$ não é semi-simples. Mas, pode ser provado que a subálgebra $\mathfrak{sl}(n)$ é de fato uma álgebra simples.

1.3 SUBÁLGEBRAS DE CARTAN

Nesta seção vamos considerar sempre \mathfrak{g} como sendo uma álgebra de Lie de dimensão finita. As vezes, pode não ser fácil encontrar o radical para uma álgebra de Lie \mathfrak{g} . A forma de Cartan-Killing de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é uma forma bilinear que atua como um instrumento que nos permite investigar, através dos critérios de Cartan, a solubilidade e semisimplicidade de \mathfrak{g} . Antes de mostrarmos estes critérios vamos definir a forma de Cartan-Killing começando com o seguinte resultado.

Proposição 1.3.1. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de \mathfrak{g} . Então*

$$\begin{aligned} \beta_\rho : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (X, Y) &\mapsto \beta_\rho(X, Y) = \text{tr}(\rho(X)\rho(Y)) \end{aligned}$$

define uma forma bilinear simétrica em \mathfrak{g} .

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\beta_\rho(\alpha X + Y, Z) &= \text{tr}(\rho(\alpha X + Y)\rho(Z)) = \text{tr}((\alpha\rho(X) + \rho(Y))\rho(Z)) \\
&= \text{tr}(\alpha\rho(X)\rho(Z) + \rho(Y)\rho(Z)) = \text{tr}(\alpha\rho(X)\rho(Z)) + \text{tr}(\rho(Y)\rho(Z)) \\
&= \alpha\text{tr}(\rho(X)\rho(Z)) + \text{tr}(\rho(Y)\rho(Z)) \\
&= \alpha\beta_\rho(X, Z) + \beta_\rho(Y, Z).
\end{aligned}$$

Do mesmo jeito se mostra que $\beta_\rho(X, \alpha Y + Z) = \alpha\beta_\rho(X, Y) + \beta_\rho(X, Z)$.

Por tanto β_ρ é uma forma bilinear. □

No caso que $\rho = ad$, a forma é chamada de **forma de Cartan-Killing** e é denotada por:

$$\langle X, Y \rangle := \beta_{ad}(X, Y) = \text{tr}(ad(X)ad(Y))$$

Propriedades da forma de Cartan-Killing.

1. $\langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle = 0$.
2. $\langle \phi(X), \phi(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$ para todo automorfismo ϕ de \mathfrak{g} .
3. $\langle DX, Y \rangle + \langle X, DY \rangle = 0$ para toda derivação D de \mathfrak{g} .

Demonstração.

1. $\langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle$

$$\begin{aligned}
&= \text{tr}(ad([X, Y])ad(Z) + ad(Y)ad([X, Z])) \\
&= \text{tr}((ad(X)ad(Y) - ad(Y)ad(X))ad(Z) + ad(Y)(ad(X)ad(Z) - ad(Z)ad(X))) \\
&= \text{tr}(ad(X)ad(Y)ad(Z) - ad(Y)ad(Z)ad(X)) \\
&= \text{tr}([ad(X), ad(Y)ad(Z)]) = 0
\end{aligned}$$

2. Vamos provar primeiro que $ad(\phi(X)) = \phi ad(X) \phi^{-1}$

$ad(\phi(X))(Y) = [\phi(X), Y]$, por outro lado temos que

$$\phi ad(X) \phi^{-1}(Y) = \phi ad(X)(\phi^{-1}(Y)) = \phi[X, \phi^{-1}(Y)]$$

$$= [\phi(X), \phi\phi^{-1}(Y)] = [\phi(X), Y] \text{ assim, temos o requerido.}$$

Agora, temos que

$$\langle \phi(X), \phi(Y) \rangle = \text{tr}(ad(\phi(X))ad(\phi(Y)))$$

$$= \text{tr}(\phi ad(X) \phi^{-1} \phi ad(Y) \phi^{-1})$$

$$= \langle X, Y \rangle$$

3. Vejamos primeiro que $ad(D(X)) = [D, ad(X)]$

$$ad(D(X))(Y) = [D(X), Y], \text{ por outro lado}$$

$$[D, ad(X)](Y) = Dad(X)(Y) - ad(X)D(Y)$$

$$= D[X, Y] - [X, D(Y)]$$

$$= [D(X), Y] + [X, D(Y)] - [X, D(Y)] = [D(X), Y]$$

assim, obtemos o requerido.

Agora

$$\langle DX, Y \rangle + \langle X, DY \rangle = tr(ad(DX)ad(Y)) + tr(ad(X)ad(DY))$$

$$= tr(ad(DX)ad(Y) + ad(X)ad(DY))$$

$$= tr([D, ad(X)]ad(Y) + ad(X)[D, ad(Y)])$$

$$= tr(Dad(X)ad(Y) - ad(X)Dad(Y) + ad(X)Dad(Y) - ad(X)ad(Y)D)$$

$$= tr([D, ad(X)ad(Y)]) = 0$$

□

O seguinte teorema caracteriza as álgebras solúveis e as álgebras semi-simples em termos da sua forma de Cartan-Killing. Em geral, eles são conhecidos como os critérios de Cartan e sua demonstração pode ser encontrada em [[SM10], Teoremas 3.7 e 3.8].

Teorema 1.3.2. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Então*

1. \mathfrak{g} é solúvel se sua forma de Cartan-Killing é identicamente nula.
2. \mathfrak{g} é semi-simples se e somente se a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} é não degenerada.

Exemplo 1.3.3. *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$, sua forma de Cartan-Killing é*

$$\langle X, Y \rangle = 2n \operatorname{tr}(XY) - 2 \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(Y).$$

Assim, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é degenerada, pois para $X = Id$ e Y qualquer, $\langle X, Y \rangle = 0$.

Mas, a restrição da forma de Cartan-Killing a $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(n)$ é não degenerada, pois

$$\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{s}} = 2n \operatorname{tr}(XY)$$

e se $\text{tr}(XY) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{s}$ então $Y = 0$.

O seguinte teorema cuja demonstração está em [[SM10], Teorema 3.10], mostra que as álgebras semi-simples podem ser obtidas a partir de ideais simples.

Teorema 1.3.4. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra semi-simples, então \mathfrak{g} se decompõe como a soma direta de subespaços vetoriais*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$$

com \mathfrak{g}_i , $i = 1, \dots, s$, ideais simples. Nessa decomposição $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ se $i \neq j$. Além disso

1. O ortogonal \mathfrak{g}_i^\perp de uma componente simples, em relação à forma de Cartan-Killing, é a soma das demais componentes.
2. Os ideais de \mathfrak{g} são somas de algumas dessas componentes.
3. A decomposição é única (a menos de permutação dos índices).

Agora introduzimos o conceito de subálgebra de Cartan o qual nos permite decompor uma álgebra de Lie como uma soma direta de certos subespaços.

Definição 1.3.5. *Uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} é uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ que satisfaz*

1. \mathfrak{h} é nilpotente.
2. O normalizador de \mathfrak{h} em \mathfrak{g} coincide com \mathfrak{h} , ou seja

$$n_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(X)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}\} = \mathfrak{h}.$$

Isto é, se $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ então $X \in \mathfrak{h}$.

Exemplo 1.3.6. *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ e considere o conjunto*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{gl}(n) : X \text{ é diagonal}\}.$$

Sejam $X, Y \in \mathfrak{h}$, é claro que $XY = \text{diag}\{x_{11}y_{11}, \dots, x_{nn}y_{nn}\}$ e $YX = \text{diag}\{y_{11}x_{11}, \dots, y_{nn}x_{nn}\}$. Assim temos que $[X, Y] = 0$. Isto mostra que \mathfrak{h} é uma subálgebra nilpotente.

Agora, sejam $Z \in \mathfrak{g}$ e $X \in \mathfrak{h}$ tal que $[Z, X] \in \mathfrak{h}$. Isto é $ZX - XZ$ é diagonal. Olhando as componentes de cada um dos produtos temos que $(ZX)_{ij} = z_{ij}x_{jj}$ e $(XZ)_{ij} = z_{ij}x_{ii}$. Isto implica que para $i \neq j$

$$\begin{aligned} 0 &= z_{ij}x_{jj} - z_{ij}x_{ii} \\ &= z_{ij}(x_{jj} - x_{ii}). \end{aligned}$$

Como $x_{jj} - x_{ii}$ não necessariamente é zero, temos que $z_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$, ou seja, Z é diagonal. Em consequência $n_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Portanto \mathfrak{h} é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{gl}(n)$.

Agora, para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, denotamos por \mathfrak{g}_α o auto-espço generalizado de \mathbf{ad} , isto é,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : (ad(H) - \alpha(H))^k X = 0, \forall H \in \mathfrak{h}, \text{ e algum } k \geq 0\}.$$

Dizemos que α é um peso se $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$. Os pesos não nulos são chamados de raízes e os espaços \mathfrak{g}_α serão chamados de subespaços de raízes.

Usando estes subespaços pode-se obter uma decomposição de uma álgebra de Lie semi-simples em subespaços invariantes pela ação de \mathfrak{h} o qual pode ser visto no seguinte resultado (Ver Teorema 4.3 e seção 6.2, [SM10]).

Teorema 1.3.7. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples e \mathfrak{h} uma subálgebra de Cartan. Então*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_k}$$

com $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ raízes de \mathfrak{h} .

Um conjunto de pesos satisfazendo isto será chamado conjunto de raízes de \mathfrak{h} e será denotado por Φ . Mostramos a continuação alguns resultados importantes sobre o conjunto de raízes e a forma de Cartan-Killing (Ver Corolário 6.4 e Proposições 6.5, 6.6, 6.7 de [SM10]).

Proposição 1.3.8. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples, \mathfrak{h} uma subálgebra de Cartan e Φ um conjunto de raízes de \mathfrak{h} . Então*

1. A restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a \mathfrak{h} é não degenerada
2. Se α é raiz, então $-\alpha$ também é raiz.
3. Para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\langle X, Y \rangle \neq 0$.
4. Para todo $H \in \mathfrak{h}$ e todo peso α , $ad(H)|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \alpha(H)Id$ e as transformações lineares $ad(H)$, $H \in \mathfrak{h}$ são diagonalizáveis.
5. \mathfrak{h} é abeliana.
6. Φ gera \mathfrak{h}^* , isto é, $H = 0$ se $\beta(H) = 0$ para todo $\beta \in \Phi$.

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma forma bilinear, podemos definir a forma de Cartan-Killing para \mathfrak{h}^* . Definimos uma aplicação $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$ por

$$H \mapsto \alpha_H(\cdot) = \langle H, \cdot \rangle.$$

Como a forma de Cartan-Killing restrita \mathfrak{h} é não degenerada, a aplicação é um isomorfismo. Assim, para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ a imagem inversa do isomorfismo é denotada por H_α , isto é, H_α é definido por

$$\langle H_\alpha, H \rangle = \alpha(H) \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}.$$

Dito isto, podemos definir a forma de Cartan-Killing para \mathfrak{h}^* como segue

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha)$$

se $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$. Pelo isomorfismo entre \mathfrak{h} e \mathfrak{h}^* cada raiz define um número finito de elementos do tipo H_α . Pela proposição anterior temos que o conjunto de raízes Φ gera \mathfrak{h}^* e assim temos que o conjunto $\{H_\alpha : \alpha \text{ raiz}\}$ gera \mathfrak{h} .

O seguinte lema fornece uma primeira descrição da decomposição de \mathfrak{g} em espaços de raízes de \mathfrak{h} .

Lema 1.3.9. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e α, β raízes. Então*

1. *Se $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, então $[X, Y] = \langle X, Y \rangle H_\alpha$.*
2. *Para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[X, Y] = H_\alpha$.*
3. *Existe $q_{\beta\alpha}$ tal que*

$$\langle \beta, \alpha \rangle = q_{\beta\alpha} \langle \alpha, \alpha \rangle,$$

com $q_{\beta\alpha}$ racional.

4. *Para toda raiz α , $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$. Portanto, $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Q}$ para todas as raízes α, β .*
5. *$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ para toda raiz α .*
6. *Os únicos múltiplos inteiros de uma raiz α que são raízes são α e $-\alpha$.*

A partir do lema anterior, podemos considerar em \mathfrak{g} subálgebras isomorfas a $\mathfrak{sl}(2)$.

Proposição 1.3.10. *Dada uma raiz α , e o subespaço $\mathfrak{h}(\alpha)$ de \mathfrak{h} gerado por H_α , o subespaço*

$$S_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h}(\alpha) \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

é uma subálgebra de \mathfrak{g} isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$.

Demonstração. Seja $H'_\alpha \in \mathfrak{h}(\alpha)$ definido por

$$H'_\alpha = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha.$$

Pelo item 1 do Lema 1.3.9 temos que existem $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tais que

$$\langle X_\alpha, Y_\alpha \rangle = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

Como $\alpha(H'_\alpha) = 2$, se satisfaz o seguinte

$$\begin{aligned} [H'_\alpha, X_\alpha] &= \alpha(H'_\alpha)X_\alpha = 2X_\alpha \\ [H'_\alpha, Y_\alpha] &= -\alpha(H'_\alpha)Y_\alpha = -2Y_\alpha \\ [X_\alpha, Y_\alpha] &= \langle X_\alpha, Y_\alpha \rangle H_\alpha = H'_\alpha \end{aligned}$$

Assim, tomando $\{X, H, Y\}$ como a base canônica de $\mathfrak{sl}(2)$ (Ver Definição 2.1.1) e com o isomorfismo dado por

$$X \leftrightarrow X_\alpha \quad H \leftrightarrow H'_\alpha \quad Y \leftrightarrow Y_\alpha$$

se mostra que S_α é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$. □

1.4 SISTEMAS SIMPLES DE RAÍZES

Vamos ver alguns resultados importantes os quais serão necessários para encontrar bases especiais de \mathfrak{h} e \mathfrak{h}^* as quais chamaremos de sistemas simples de raízes. Demonstrações dos resultados a continuação podem se encontrar em [[SM10], Seção 6.4]. Precisamos fixar uma ordem para bases de um espaço vetorial como segue.

Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} e $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ uma base ordenada de V . Sejam $v, w \in V$ escritos como

$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + \dots + a_lv_l \\ w &= b_1v_1 + \dots + b_lv_l. \end{aligned}$$

A ordem lexicográfica em V em relação a essa base é definida por $v \leq w$, se $v = w$ ou se $a_i < b_i$, com i sendo o primeiro índice em que as coordenadas de v e w são diferentes. Ao munir o espaço V com um produto interno sobre \mathbb{Q} , então a ordem lexicográfica satisfaz o seguinte lema que é usado para construir sistemas simples de raízes.

Lema 1.4.1. *Seja V um espaço vetorial e tome a ordem lexicográfica em V dada pela base ordenada $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$. Se um subconjunto $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ de V satisfaz*

1. $w_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, m$,
2. $\langle w_i, w_j \rangle \leq 0$ para $i \neq j$.

Então, $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ é linearmente independente.

Demonstração. Suponha por absurdo que,

$$w_m = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_{m-1} w_{m-1}.$$

Se para todo $1 \leq i \leq m-1$ os $a_i \leq 0$, então temos que $a_i w_i \leq 0$ pois, os $w_i > 0$ e portanto tem-se que $w_m \leq 0$, o que é uma contradição. Assim, pelo menos um dos coeficientes é positivo. Agora, podemos escrever w_m como segue

$$w_m = w^+ + w^-,$$

onde w^+ é a soma dos elementos na combinação de w_m em que os coeficientes são positivos e w^- é a soma dos elementos em que os coeficientes são negativos. Pelo anterior é claro que $w^+ \neq 0$ e também temos que se satisfaz

$$\langle w_m, w^+ \rangle = \langle w_m, \sum_i a_i w_i \rangle = \sum_i a_i \langle w_m, w_i \rangle.$$

Como os $a_i > 0$ e por hipótese temos que $\langle w_m, w_i \rangle \leq 0$, então

$$\langle w_m, w^+ \rangle \leq 0.$$

Por outro lado, sendo $w^+ = \sum b_i w_i$ e $w^- = \sum c_j w_j$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle w_m, w^+ \rangle &= \langle w^+ + w^-, w^+ \rangle \\ &= \langle w^+, w^+ \rangle + \langle w^-, w^+ \rangle \\ &= \langle w^+, w^+ \rangle + \sum b_i c_j \langle w_i, w_j \rangle. \end{aligned}$$

Como $b_i > 0$, $c_j < 0$ e $\langle w_i, w_j \rangle \leq 0$, então

$$\sum b_i c_j \langle w_i, w_j \rangle \geq 0.$$

Além disso, como $\langle w^+, w^+ \rangle > 0$, podemos concluir que $\langle w_m, w^+ \rangle > 0$.

Isto é uma contradição. Portanto w_m não pode ser escrito dessa forma, o que mostra que $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ é um conjunto linearmente independente. \square

Para o caso de álgebras de Lie, vamos tomar o espaço vetorial V como sendo o dual do subespaço racional da subálgebra de Cartan \mathfrak{h} , o qual é definido como segue

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} = \{a_1 H_{\alpha_1} + \cdots + a_k H_{\alpha_k} : a_i \in \mathbb{Q} \text{ e } \alpha_i \in \Phi\},$$

onde Φ é um conjunto de raízes de \mathfrak{h} . Respeito ao conjunto $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ temos a seguinte proposição.

Proposição 1.4.2.

1. $\dim \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} = \dim \mathfrak{h}$.
2. A forma de Cartan-Killing restrita a $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ é um produto interno.

Assim, podemos fixar uma ordem lexicográfica dada por uma base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ e definir o conceito de raiz simples.

Definição 1.4.3. *Seja $\alpha \in \Phi$ uma raiz. Dizemos que α é simples se respeito à ordem fixada, $\alpha > 0$ e não existem $\beta, \gamma \in \Phi$ positivas tal que*

$$\alpha = \beta + \gamma.$$

O conjunto das raízes simples será notado por Δ .

O lema a seguir tem como objetivo mostrar que Δ é de fato uma base $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$, usando o Lema 1.4.1.

Lema 1.4.4. *Sejam \mathfrak{h} uma subálgebra de Cartan e Φ um conjunto de raízes de \mathfrak{h} . Então*

1. O conjunto de raízes simples Δ é não vazio.
2. Se $\alpha, \beta \in \Delta$ e $\alpha \neq \beta$ então $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$.
3. Δ é um conjunto linearmente independente.
4. Seja $\beta \in \Phi$ com $\beta > 0$. Então β pode ser escrita de maneira única como

$$\beta = n_1 \alpha_1 + \cdots + n_l \alpha_l,$$

onde os n_i são inteiros positivos.

Em conjunto cada item do lema mostra que Δ é uma base para $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$. Tendo isto estabelecido, podemos definir o que é um sistema simples de raízes.

Definição 1.4.5. Um conjunto $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ tal que Δ é base de $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$ e toda raiz β pode ser escrita como

$$\beta = n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l$$

com $n_i \in \mathbb{Z}$ e todos de mesmo sinal, é chamado **sistema simples de raízes**.

Observação 1.4.6. Ao fixar um sistema simples de raízes podemos considerar os conjuntos

$$\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi : \alpha > 0\} \text{ e } \Phi^- = \{\alpha \in \Phi : \alpha < 0\},$$

de raízes positivas e negativas respectivamente. Assim, pela Definição 1.3.7 temos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$$

onde

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha \text{ e } \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Exemplo 1.4.7. Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n)$. O conjunto $\{E_{ij}, E_{ii} - E_{jj} : 1 \leq i \neq j \leq n\}$ é um conjunto gerador de $\mathfrak{sl}(n)$. O conjunto \mathfrak{h} de matrizes diagonais com traço zero é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(n)$ e tem base $\{E_{ii} - E_{i+1,i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$. Agora, seja $H \in \mathfrak{h}$ definido como

$$H = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$$

com $a_1 + \dots + a_n = 0$. Então para $i \neq j$ temos

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(E_{ij}) &= (a_i - a_j)E_{ij}, \\ \text{ad}(H)(E_{ii} - E_{jj}) &= 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que as raízes de \mathfrak{h} são funcionais lineares $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$, onde λ_i é dado por

$$\lambda_i : H \mapsto a_i,$$

e os espaços de raízes correspondentes são os subespaços de dimensão um, gerados por E_{ij} com $i \neq j$. Considere o conjunto de raízes $\Delta = \{\alpha_{12}, \dots, \alpha_{i,i+1}, \dots, \alpha_{n-1,n}\}$. Vamos provar que Δ é um sistema simples de raízes. De fato, seja α_{ij} uma raiz de \mathfrak{h} com $i < j$. Então

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \lambda_i - \lambda_j \\ &= \lambda_i - \lambda_{i+1} + \lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} + \dots + \lambda_{j-1} - \lambda_j \\ &= \alpha_{i,i+1} + \dots + \alpha_{j-1,j} \end{aligned}$$

portanto, α_{ij} se escreve como combinação linear dos elementos de Δ com coeficientes iguais a um. Como $\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$, então qualquer raiz é escrita como combinação de elementos de Δ . Além disso, o número de elementos em Δ coincide com a dimensão de \mathfrak{h} . Isto garante que Δ é um sistema simples de raízes.

Assim, podemos definir o conjunto de raízes positivas como sendo o conjunto

$$\Phi^+ = \{\alpha_{ij} : i < j\}$$

e portanto, \mathfrak{n}^+ é a subálgebra das matrizes triangulares estritamente superiores e \mathfrak{n}^- será a subálgebra das matrizes triangulares estritamente inferiores.

2

MÓDULOS DE DIMENSÃO FINITA PARA ÁLGEBRAS SEMI-SIMPLES

Para estudarmos as álgebras semi-simples vamos primeiramente analisar os módulos irredutíveis da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$. A importância desse estudo deve-se ao fato que a toda raiz da representação adjunta de uma subálgebra de Cartan está associada uma subálgebra de dimensão três isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$. Os primeiros resultados e teoria apresentada neste capítulo podem-se ver com mais detalhe em [[Maz10], Capítulo 1].

2.1 A ÁLGEBRA $\mathfrak{sl}(2)$

Começamos com a definição da álgebra $\mathfrak{sl}(2)$ e logo dar uma análise completa dos seus módulos de dimensão finita.

Definição 2.1.1. *A álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$ é o espaço vetorial de todas as matrizes complexas 2×2 com traço zero, isto é*

$$\mathfrak{sl}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C}; a + d = 0 \right\},$$

onde a operação bilinear é dada por

$$[A, B] = AB - BA$$

com AB denotando a multiplicação usual das matrizes A e B .

Uma base para $\mathfrak{sl}(2)$ é o conjunto $\{X, Y, H\}$, onde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

o qual satisfaz

$$[X, Y] = H, [H, X] = 2X, [H, Y] = -2Y.$$

Os elementos de base de $\mathfrak{sl}(2)$ satisfazem o seguinte lema.

Lema 2.1.2. *Para qualquer $Z \in \mathfrak{sl}(2)$ temos que*

1. $[X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = [H, Z]$
2. $[H, [X, Z]] - [X, [H, Z]] = [2X, Z]$
3. $[H, [Y, Z]] - [Y, [H, Z]] = [-2Y, Z]$

Demonstração.

1. Para $Z \in \mathfrak{sl}(2)$ temos que

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] &= [X, [Y, Z]] + [Y, -[X, Z]] \\ &= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = -[Z, [X, Y]] \quad (\text{por Jacobi}) \\ &= [[X, Y], Z] = [H, Z] \end{aligned}$$

2. e 3. se mostram de forma semelhante.

□

Agora, definimos o objeto central deste capítulo: os $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos.

Definição 2.1.3. *Um $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo é um espaço vetorial V junto com três operadores lineares $E = E_V, F = F_V$ e $Z = Z_V$ em V os quais satisfazem*

$$EF - FE = Z, \quad ZE - EZ = 2E, \quad ZF - FZ = -2F$$

de onde obtemos

$$EF = Z + FE, \quad ZE = E(Z + 2), \quad ZF = F(Z - 2)$$

Definição 2.1.4. *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ e V um \mathfrak{g} -módulo. $W \subset V$ é chamado de submódulo de V sempre que seja invariante com respeito à ação de E_V, F_V, Z_V , isto é*

$$E_V W \subset W, \quad F_V W \subset W, \quad Z_V W \subset W.$$

V sempre tem dois submódulos triviais, ele mesmo e $\{0\}$. Qualquer outro submódulo diferente desses dois é chamado de submódulo próprio. Um módulo que tem só os submódulos triviais é chamado de irredutível.

2.2 CLASSIFICAÇÃO DE MÓDULOS IRREDUTÍVEIS DE DIMENSÃO FINITA PARA $\mathfrak{sl}(2)$

Nesta seção vamos considerar $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$. Esta seção contém uma classificação dos \mathfrak{g} -módulos irredutíveis de dimensão finita.

Seja $V \neq 0$, um \mathfrak{g} -módulo. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ definimos os conjuntos

$$V_\lambda = \left\{ v \in V : (H - \lambda)^k v = 0, \text{ para algum } k \in \mathbb{N} \right\} \text{ e}$$

$$V(\lambda) = \{ v \in V : Hv = \lambda v \}$$

chamados de auto-espacos generalizados associados a λ . Esses subespaços satisfazem o seguinte lema.

Lema 2.2.1. *Seja $\lambda \in \mathbb{C}$*

1. $XV_\lambda \subset V_{\lambda+2}$ e $XV(\lambda) \subset V(\lambda+2)$
2. $YV_\lambda \subset V_{\lambda-2}$ e $YV(\lambda) \subset V(\lambda-2)$
3. $HV_\lambda \subset V_\lambda$ e $HV(\lambda) \subset V(\lambda)$

Demonstração.

1. Seja $v \in V_\lambda$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $(H - \lambda)^k v = 0$. Assim temos que

$$\begin{aligned} (H - (\lambda + 2))^k (X(v)) &= (H - (\lambda + 2))^k Xv \\ &= (H - (\lambda + 2))^{k-1} (H - (\lambda + 2)) Xv \\ &= (H - (\lambda + 2))^{k-1} X(H + 2 - (\lambda + 2))v \\ &\quad \vdots \\ &= X(H + 2 - (\lambda + 2))^k v = X(H - \lambda)^k v = 0 \end{aligned}$$

logo temos a primeira parte. Agora, seja $v \in V(\lambda)$, assim temos

$$\begin{aligned} HX(v) &= HXv = X(H + 2)v \\ &= XHv + 2Xv = \lambda Xv + 2Xv \\ &= (\lambda + 2)Xv \end{aligned}$$

assim temos a segunda parte.

2. É semelhante à parte 1
3. É óbvia pela definição.

□

Agora, considere o conjunto $W = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V(\lambda) \subset V$, do Lema 2.2.1 se tem o seguinte corolário.

Corolário 2.2.2. *W é um submódulo de V, em particular temos que $W = V$ se V é um módulo irredutível.*

Usando o corolário anterior, se V é módulo irredutível, temos que

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V(\lambda) \quad (1)$$

Como V é de dimensão finita, a decomposição anterior deve ser finita, no sentido de que só um número finito de $V(\lambda)$ são não nulos. Assim, podemos fixar algum $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $V(\mu) \neq \{0\}$ e $V(\mu + 2k) = \{0\}$ para todo $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Seja $v \in V(\mu)$, $v \neq 0$. Como $V(\mu - 2k) = \{0\}$ para algum $k \in \mathbb{N}$, do Lema 2.2.1(2), temos que existe um $n \in \mathbb{N}$ mínimo, tal que $Y^n v = 0$. Agora para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ definimos

$$Y^i v = v_i \quad \text{e} \quad v_0 = v$$

Pela igualdade dada em (1), temos que os v_i são linearmente independentes e satisfazem o seguinte resultado.

Lema 2.2.3. *As ações de X, H sobre os v_i são dadas por:*

1. $Hv_i = (\mu - 2i)v_i$.
2. $Xv_0 = 0$, $Xv_i = i(\mu - i + 1)v_{i-1}$ e $\mu = n - 1$.

Demonstração.

1. Pelo Lema 2.2.1 temos que

$$\begin{aligned} HY^i v &= HY(Y^{i-1})v = Y(H-2)(Y^{i-1})v \\ &= YH(Y^{i-1})v - 2Y^i v = Y^2 H(Y^{i-2})v - 2(2Y^i v) \\ &\quad \vdots \\ &= Y^i H v - i(2Y^i v) = Y^i \mu v - 2iY^i v \\ &= \mu Y^i v - 2iY^i v = (\mu - 2i)v_i \end{aligned}$$

isto é

$$Hv_i = (\mu - 2i) v_i, \forall i$$

2. • Temos que $Xv \in V(\mu + 2)$ e $V(\mu + 2) = \{0\}$, portanto $Xv = 0$
- Vamos provar que $Xv_i = i(\mu - i + 1) v_{i-1}$ por indução sobre i . Para $i = 1$, temos que

$$Xv_1 = XYv = (YX + H)v = YXv + Hv = Y \cdot 0 + \mu v = \mu v_0$$

portanto se satisfaz a igualdade. Vamos supor que se satisfaz para $i - 1$ e vamos provar para i

$$\begin{aligned} Xv_i &= XYv_{i-1} = (YX + H)v_{i-1} = YXv_{i-1} + Hv_{i-1} \\ &= (i - 1)(\mu - i + 2)Yv_{i-2} + (\mu - 2(i - 1))v_{i-1} \\ &= (i - 1)(\mu - i + 2)v_{i-1} + (\mu - 2i + 2)v_{i-1} \\ &= (i\mu - i^2 + 2i - \mu + i - 2 + \mu - 2i + 2)v_{i-1} \\ &= (i\mu - i^2 + i)v_{i-1} = i(\mu - i + 1)v_{i-1}. \end{aligned}$$

- Vamos provar que $\mu = n - 1$. Sabemos que

$$0 = Xv_n = n(\mu - n + 1)v_{n-1}.$$

Como $v_{n-1} \neq 0$, então temos que $n(\mu - n + 1) = 0$. Daqui temos que $\mu - n + 1 = 0$, ou seja, $\mu = n - 1$.

Logo, o requerido é satisfeito. □

Corolário 2.2.4. *Seja $N = \text{span} \{v_i : i = 0, 1, \dots, n - 1\}$. Então, N é submódulo de V . Em particular $N = V$ pois V é um módulo irredutível.*

Definição 2.2.5. *Um vetor $v \in V(\mu)$ satisfazendo as mesmas propriedades de v_0 é chamado de vetor maximal.*

Observação 2.2.6. *As ações de X, Y, H sobre os v_i definem uma estrutura de \mathfrak{g} -módulo, já que*

$$\begin{aligned} (XY - YX)v_i &= XYv_i - YXv_i = Xv_{i+1} - Y(i(n - i))v_{i-1} \\ &= (i + 1)(n - (i + 1))v_i - i(n - 1)v_i \\ &= (in - i^2 - i + n - i - 1 - in + i^2)v_i \\ &= (n - 1 - 2i)v_i = Hv_i \end{aligned}$$

Portanto, $XY - YX = H$. O fato de $HX - XH = 2X$ e $HY - YH = -2Y$ se mostra de forma semelhante. Vamos denotar o anterior \mathfrak{g} -módulo por $V^{(n)}$.

Teorema 2.2.7. (Classificação de módulos irredutíveis de dimensão finita)

1. Para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ o módulo $V^{(n)}$ é um \mathfrak{g} -módulo irredutível de dimensão n .
2. Para qualquer $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ temos que $V^{(n)} \simeq V^{(m)}$ se e somente se $n = m$.
3. Seja V um \mathfrak{g} -módulo irredutível de dimensão finita n , então $V \simeq V^{(n)}$.

Demonstração.

1. Seja $M \subset V^{(n)}$, $M \neq \{0\}$ um submódulo e seja $v \in M$, $v \neq 0$. Além disso, temos que $X^n v = 0$ e em particular $X^n M = 0$, portanto

$$M \cap (\text{Ker } X) \neq \emptyset$$

Agora, pelo Lema 2.2.3 temos que $\text{Ker } X = v_0$. Logo, aplicando Y em v_0 obtemos os outros v_i com $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Portanto

$$M = V^{(n)}$$

Em consequência $V^{(n)}$ é um \mathfrak{g} -módulo irredutível de dimensão n .

2. (\Rightarrow) Como $V^{(n)} \simeq V^{(m)}$ temos que $\dim V^{(n)} = \dim V^{(m)}$ o que implica que $n = m$.
(\Leftarrow) Óbvio.
3. É claro por 1.

□

2.3 GRUPOS DE WEYL E PESOS INTEGRAIS

Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em [[Hu72], Capítulos 9, 10 e 13] e em [[Hu08], Capítulo 0].

Começamos definindo o conceito de reflexões que são os objetos com os quais vai ser definido um grupo de Weyl.

Definição 2.3.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} com produto interno. Dado um elemento não nulo $\alpha \in V$, uma reflexão $r : V \rightarrow V$ é uma transformação linear invertível que satisfaz*

1. $r(\alpha) = -\alpha$.
2. O conjunto $F_r = \{\beta \in V : r(\beta) = \beta\}$ dos pontos fixos de r é um hiperplano de V .

É claro que r restrito a F_r é a identidade e como $r(\alpha) = -\alpha$, então temos que $r^2 = Id$.

Definição 2.3.2. *Uma reflexão em V com respeito a um elemento não nulo $\alpha \in V$ é definida pela fórmula*

$$r_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha,$$

onde, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno em V .

No caso de álgebras de Lie, $V = \mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$ e o produto interno corresponde à forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$.

Definição 2.3.3. *Fixando um sistema de raízes Φ , definimos o grupo de Weyl de Φ como o grupo gerado pelas reflexões r_α com $\alpha \in \Phi$. Denotaremos o grupo por W . Se $\alpha \in \Delta$, com Δ sendo um sistema simples de raízes, dizemos que r_α é uma reflexão simples.*

Escrevemos $\ell(w) = m$, se $w = r_1 r_2 \cdots r_m$, onde as r_i são reflexões simples e m é tão pequeno como possível.

Agora, vamos definir uma ordem parcial para W . Seja S o conjunto das reflexões simples s_α (com $\alpha \in \Delta$), então o conjunto T de todas as reflexões em W é definido por

$$T := \bigcup_{w \in W} w S w^{-1}.$$

Para $w, w' \in W$ e $t \in T$, escrevemos $w' \xrightarrow{t} w$ se $w = tw'$ e $\ell(w') < \ell(w)$. Neste caso, escrevemos $w' \longrightarrow w$ se $w' \xrightarrow{t} w$ para algum $t \in T$.

Estendemos essa relação a uma ordem parcial de W definindo $w' < w$, isto significa que

$$w' = w_0 \longrightarrow w_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_n = w$$

para alguns $w_1, \dots, w_{n-1} \in W$.

Agora, vamos definir o conceito de peso integral dominante. Mas para isto precisamos dos seguintes conceitos.

Definição 2.3.4. *Seja Φ um conjunto de raízes. Definimos a co-raiz de uma raiz $\alpha \in \Phi$ como sendo*

$$\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

O conjunto das co-raízes $\{\alpha^\vee : \alpha \in \Phi\}$ é chamado de dual de Φ .

Com a notação usada na Seção 1.3, temos que

$$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle := \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \beta(h_\alpha),$$

para todo $\beta \in \Phi$ e $h_\alpha = \frac{2h'_\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ com $h'_\alpha \in \mathfrak{h}$.

Definição 2.3.5. *Seja Δ um sistema simples de raízes. Então o conjunto*

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta\},$$

é denominado *reticulado¹ de pesos integrais associado a Φ* .

Para um sistema simples de raízes Δ fixo, existe uma ordem parcial em Λ definida por $\mu \leq \lambda$ se e somente se $\lambda - \mu \in \Gamma$, onde $\Gamma \subset \Lambda$ é o conjunto de combinações lineares com coeficientes em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ de raízes simples.

Se $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$, então o conjunto $\Delta^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_\ell^\vee\}$ é uma base para \mathfrak{h}^* . Assim, o grupo Λ tem posto ℓ , e uma base $\{\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_\ell\}$ cujos elementos satisfazem $\langle \overline{w}_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$. Essa base existe pois é a base dual de $\{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_\ell^\vee\}$ respeito à forma de Cartan-Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em \mathfrak{h}^* .

Definição 2.3.6. *Os elementos de um conjunto $\{\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_\ell\}$ satisfazendo $\langle \overline{w}_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$, são chamados de pesos fundamentais. O conjunto de combinações lineares de pesos fundamentais com coeficientes em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, denotado por Λ^+ , ou seja, o conjunto*

$$\Lambda^+ := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : \lambda = \sum_{i=1}^{\ell} m_i \overline{w}_i, m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\},$$

é chamado, *conjunto de pesos integrais dominantes*. *Daqui, podemos dizer que se λ é dominante, então $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0$ e dizemos que λ é fortemente dominante se $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$.*

¹ Um reticulado é uma estrutura $L = (L, R)$ tal que L é parcialmente ordenado por R e para cada dois elementos a, b de L existe supremo e ínfimo de $\{a, b\}$.

Lema 2.3.7. *Seja $\lambda \in \Lambda^+$. Então*

1. *O número de pesos dominantes $\mu < \lambda$ é finita.*
2. *Para qualquer $w \in W$, $w\lambda \leq \lambda$.*

Exemplo 2.3.8. *Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$ e sua subálgebra de Cartan \mathfrak{h} dada em 1.3.6. Os pesos fundamentais para $\mathfrak{gl}(n)$ são dados por*

$$\bar{w}_i = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i,$$

onde $\mu_i \in \mathfrak{h}^*$ é dado por

$$\mu_i : H = \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\} \mapsto b_i.$$

Assim, os pesos integrais dominantes de $\mathfrak{gl}(n)$ são dados por

$$\lambda = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \cdots + \alpha_n\mu_n,$$

onde os $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$.

Tomando a base $\{E_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\}$ de \mathfrak{h} e avaliando λ em cada E_{ii} temos que

$$\begin{aligned} \lambda(E_{ii}) &= \alpha_1\mu_1(E_{ii}) + \alpha_2\mu_2(E_{ii}) + \cdots + \alpha_n\mu_n(E_{ii}) \\ &= \alpha_i\mu_i(E_{ii}) \\ &= \alpha_i. \end{aligned}$$

Assim, denotando $\lambda(E_{ii})$ por λ_i , podemos identificar λ como uma n -upla $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tal que

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

2.4 ÁLGEBRA ENVELOPANTE UNIVERSAL

Nesta seção vamos associar a uma álgebra de Lie \mathfrak{g} uma álgebra associativa U com unidade. Esta álgebra associativa será usada no seguinte capítulo para construção de certos módulos. Para a construção desta álgebra precisamos da álgebra tensorial de \mathfrak{g} a qual definiremos a continuação.

Definição 2.4.1. A álgebra tensorial de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} denotada por $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ é uma álgebra associativa definida como

$$\mathcal{T}(\mathfrak{g}) = \sum_{k=0}^{\infty} \bigotimes^k \mathfrak{g},$$

onde seus elementos são combinações lineares finitas de monômios da forma

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_k.$$

Proposição 2.4.2. Seja A uma álgebra associativa com unidade e $f : \mathfrak{g} \rightarrow A$ uma aplicação linear. Então existe um único homomorfismo de álgebras $\bar{f} : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ tal que $f = \bar{f} \circ i$, onde $i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ é a inclusão de $\mathfrak{g} = \bigotimes^1 \mathfrak{g}$ em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$.

Com isto dito, podemos definir uma das ferramentas fundamentais para o estudo e construção de módulos : A Álgebra Envelopante Universal

Definição 2.4.3. Uma Álgebra Envelopante Universal de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é um par (U, θ) , onde U é uma álgebra associativa com unidade, $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow U$ é uma aplicação linear e para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ se satisfaz

1. $\theta([X, Y]) = \theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X)$.
2. Para qualquer álgebra associativa A com unidade e para qualquer aplicação linear $j : \mathfrak{g} \rightarrow A$ satisfazendo

$$j([X, Y]) = j(X)j(Y) - j(Y)j(X),$$

existe um único homomorfismo de álgebras $\phi : U \rightarrow A$ tal que $\phi \circ \theta = j$.

Em outras palavras, U é uma Álgebra Envelopante Universal se para as aplicações definidas, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{j} & A \\ \theta \downarrow & \nearrow \phi & \\ U & & \end{array}$$

Proposição 2.4.4. *Para qualquer álgebra de Lie \mathfrak{g} , existe uma única álgebra envelopante universal (U, θ) a menos de isomorfismos.*

Demonstração. Unicidade: Suponha que \mathfrak{g} tem duas álgebras envelopantes universais (U, θ) e (U', θ') . Por definição temos que para cada álgebra associativa A existe um único $\eta_A : U \rightarrow A$, em particular, tomando $A = U'$, obtemos um único homomorfismo de álgebras $\eta : U \rightarrow U'$. Fazendo o mesmo para U' e tomando $A = U$ temos que existe um único homomorfismo de álgebras $\phi : U' \rightarrow U$. Composto esses dois homomorfismos obtém-se que $\eta \circ \phi = 1_{U'}$ e $\phi \circ \eta = 1_U$, isto mostra que esses homomorfismos definem isomorfismos entre U' e U . Isto garante a unicidade da álgebra envelopante universal.

Existência: Considere a álgebra tensorial $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} dada na Definição 2.4.1 e considere o quociente $\mathcal{T}(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$, onde \mathcal{I} é o ideal bilateral gerado por elementos da forma $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$, com $X, Y \in \mathfrak{g}$. Vamos mostrar que $U = \mathcal{T}(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$ é a álgebra envelopante universal. Seja $\pi : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow U$ o homomorfismo canônico. Claramente $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}(\mathfrak{g})$, assim, π leva $\bigotimes_0 \mathfrak{g} = \mathbb{C}$ isomorficamente em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$ e portanto U contém pelo menos escalares. Agora, seja $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow U$ a restrição de π a $\mathfrak{g} \subset \mathcal{T}(\mathfrak{g})$. Claramente θ satisfaz $\theta([X, Y]) = \theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X)$, assim temos provado que se satisfaz (1) da Definição 2.4.3. Seja A qualquer álgebra associativa com unidade e $j : \mathfrak{g} \rightarrow A$ uma aplicação linear que satisfaz $j([X, Y]) = j(X)j(Y) - j(Y)j(X)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. A Proposição 2.4.2 garante a existência de um homomorfismo de álgebras $\psi : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ tal que $\psi \circ i = j$, onde i é como na proposição. Se segue disto e da definição de j que $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \in \text{Ker}(\psi)$, pois

$$\psi(X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]) = j(X)j(Y) - j(Y)j(X) - j([X, Y]) = 0.$$

Assim $\mathcal{I} \subset \text{Ker}(\psi)$ e o homomorfismo ainda existe para U , em outras palavras, ψ induz um homomorfismo $\phi : U \rightarrow A$ tal que $\phi \circ \theta = j$. A unicidade deste homomorfismo vem da unicidade de ψ , provando assim a parte (2) de definição. Portanto, $U = \mathcal{T}(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$ é uma álgebra envelopante universal. \square

Desde agora denotaremos a álgebra envelopante universal por $U(\mathfrak{g})$. Esta álgebra é importante pois, as categorias de módulos sobre \mathfrak{g} e módulos sobre $U(\mathfrak{g})$ são equivalentes. Assim, podemos passar de estudar módulos em uma álgebra não associativa a estudá-los em uma associativa preservando suas propriedades.

Exemplo 2.4.5. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie abeliana, ou seja, $[X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Assim, o ideal bilateral \mathcal{J} gerado por $X \otimes Y - Y \otimes X$ coincide com o ideal \mathcal{I} mostrado na*

proposição anterior. Logo $\mathcal{T}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$ é uma álgebra envelopante universal. Em geral, para qualquer \mathfrak{g} , $\mathcal{T}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$ é chamada álgebra simétrica de \mathfrak{g} .

O teorema a continuação é um resultado central sobre álgebras envelopantes universais, pois fornece bases para $U(\mathfrak{g})$ ordenando monômios de acordo com a ordem de alguma de base de \mathfrak{g} (Ver Teorema 10.1 em [SM10]).

Teorema 2.4.6. (Poincaré-Birkhoff-Witt) *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\{X_i\}_{i \in J}$ uma base de \mathfrak{g} ordenada, então os monômios do tipo*

$$X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_k} \quad \text{com } i_1 \leq \cdots \leq i_k$$

formam uma base de $U(\mathfrak{g})$. Em particular, se $\dim(\mathfrak{g}) < \infty$ e

$$\beta = \{X_1, \dots, X_n\}$$

uma base ordenada de \mathfrak{g} , então os monômios

$$X_1^{m_1} \otimes \cdots \otimes X_n^{m_n}$$

com $m_i \geq 0$, formam uma base de $U(\mathfrak{g})$.

Demonstração. Vamos provar primeiro que o conjunto dos monômios ordenados é um conjunto gerador. Seja $m = X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_k}$ um monômio não necessariamente ordenado e $d(m)$ o número de pares i_j, i_l com $j \leq l$ tais que $i_j > i_l$, ou seja, $d(m)$ é o número de pares fora de ordem no monômio. Vamos fazer indução sobre k (a ordem de m) e $d(m)$. Se $d(m) = 0$ não temos nada a provar pois neste caso m está bem ordenado. Caso contrario, começando com um par $i_j > i_l$ com $j \leq l$ e tomando sucessivamente os elementos a partir de X_{i_j} , podemos chegar em algum índice r tal que $i_r > i_{r+1}$. Assim, podemos reescrever m como segue:

$$\begin{aligned} X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r} \otimes X_{i_{r+1}} \otimes \cdots \otimes X_{i_k} &= X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_{r+1}} \otimes X_{i_r} \otimes \cdots \otimes X_{i_k} \\ &+ X_{i_1} \otimes \cdots \otimes [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}] \otimes \cdots \otimes X_{i_k} \end{aligned} \quad (2)$$

Nessa igualdade, o primeiro termo do segundo membro é um monômio m' da mesma ordem que m mas com $d(m') < d(m)$ e o segundo termo é um monômio de ordem menor do que m . Aplica-se sucessivamente o processo aos novos monômios até obter monômios ordenados, ou seja, m será o resultado de uma soma de monômios ordenados como requerido.

Agora precisamos provar que o conjunto dos monômios ordenados é linearmente

independente. Seja \mathcal{T}_0 o subespaço de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ gerado pelos monômios ordenados de acordo com a base de \mathfrak{g} . Temos que provar que $\mathcal{T}_0 \cap \mathcal{I} = \{0\}$, pois caso contrario existiria um monômio que é combinação linear de outros monômios. Para provar que aquela intersecção é nula, construímos uma transformação linear

$$\sigma : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g})$$

tal que

1. σ se anula em \mathcal{I} ,
2. restrita a \mathcal{T}_0 , σ é a identidade.

Fazendo novamente indução sobre a ordem k de m e sobre $d(m)$, definimos $\sigma(m) = m$ sempre que a ordem k seja zero ou um, ou se $d(m) = 0$, pois nestes casos m está ordenado. Caso contrario, usamos a igualdade dada em (2) para definir $\sigma(m)$ como segue:

$$\begin{aligned} \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r} \otimes X_{i_{r+1}} \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) &= \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_{r+1}} \otimes X_{i_r} \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}] \otimes \cdots \otimes X_{i_k}). \end{aligned} \quad (3)$$

Esta definição de $\sigma(m)$ depende, até agora, da escolha do índice r . Assim, falta provar que

- a) σ se anula em \mathcal{I} .
- b) A expressão para $\sigma(m)$ dada em (3) independe do índice r .

Sabemos que \mathcal{I} é gerado por elementos da forma

$$z = p \otimes (X_i \otimes X_j - X_j \otimes X_i - [X_i, X_j]) \otimes q$$

onde X_i, X_j são elementos da base de \mathfrak{g} com $i \neq j$ e p, q são monômios em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$. Se $i > j$ então temos que

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \sigma(p \otimes X_i \otimes X_j \otimes q) - \sigma(p \otimes X_j \otimes X_i \otimes q) - \sigma(p \otimes [X_i, X_j] \otimes q) \\ &= \sigma(p \otimes X_j \otimes X_i \otimes q) + \sigma(p \otimes [X_i, X_j] \otimes q) - \sigma(p \otimes X_j \otimes X_i \otimes q) - \sigma(p \otimes [X_i, X_j] \otimes q) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se $j > i$, podemos provar de forma semelhante que $\sigma(z) = 0$. Isto prova a).

Agora, seja s um outro índice em m tal que $i_s > i_{s+1}$. Vamos mostrar que $\sigma(m)$ não se altera ao usar s ao invés de r em sua definição. Se $k \leq 1$ ou $d(m) = 0$, não temos nada que mostrar. Caso contrario, temos dois casos.

Caso I $\{s, s + 1\}$ não intersecta $\{r, r + 1\}$. Assim, uma forma de escrever m é

$$X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_{r+1}} \otimes X_{i_r} \otimes \cdots \otimes X_{i_{s+1}} \otimes X_{i_s} \otimes X_{i_k}$$

Então usando a comutação em i_r e logo em i_s obtemos que

$$\begin{aligned} \sigma(m) &= \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_{r+1}} \otimes X_{i_r} \otimes \cdots \otimes X_{i_{s+1}} \otimes X_{i_s} \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}] \otimes \cdots \otimes X_{i_{s+1}} \otimes X_{i_s} \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_{r+1}} \otimes X_{i_r} \otimes \cdots \otimes [X_{i_s}, X_{i_{s+1}}] \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}] \otimes \cdots \otimes [X_{i_s}, X_{i_{s+1}}] \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \end{aligned}$$

Obtemos a mesma expressão se usamos primeiro a comutação em i_s e logo em i_r . Assim, podemos usar indução sobre k e $d(m)$ para mostrar o requerido em este caso.

Caso II $\{s, s+1\}$ intersecta $\{r, r+1\}$. Assumindo que $s = r+1$, escrevemos m como

$$X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r} \otimes X_{i_{r+1}} \otimes X_{i_{r+2}} \otimes \cdots \otimes X_{i_k}$$

com $i_r > i_{r+1} > i_{r+2}$. Começando com a comutação entre $X_{i_{r+1}}$ e $X_{i_{r+2}}$ e usando indução, $\sigma(m)$ é dada por

$$\begin{aligned} \sigma(m) &= \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_{r+2}} \otimes X_{i_{r+1}} \otimes X_{i_r} \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r} \otimes [X_{i_{r+1}}, X_{i_{r+2}}] \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes [X_{i_r}, X_{i_{r+2}}] \otimes X_{i_{r+1}} \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_{r+2}} \otimes [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}] \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \end{aligned}$$

Por outro lado, começando com a comutação entre X_{i_r} e $X_{i_{r+1}}$ e usando indução, $\sigma(m)$ é dada por

$$\begin{aligned} \sigma(m) &= \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_{r+2}} \otimes X_{i_{r+1}} \otimes X_{i_r} \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes [X_{i_{r+1}}, X_{i_{r+2}}] \otimes X_{i_r} \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_{r+1}} \otimes [X_{i_r}, X_{i_{r+2}}] \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}] \otimes X_{i_{r+2}} \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução nos termos com colchete obtemos que

$$\begin{aligned} \sigma(m) &= \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_{r+2}} \otimes X_{i_{r+1}} \otimes X_{i_r} \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r} \otimes [X_{i_{r+1}}, X_{i_{r+2}}] \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes [X_{i_r}, X_{i_{r+2}}] \otimes X_{i_{r+1}} \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_{r+2}} \otimes [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}] \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes [X_{i_r} [X_{i_{r+1}}, X_{i_{r+2}}]] \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes [X_{i_{r+1}} [X_{i_{r+2}}, X_{i_r}]] \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \\ &+ \sigma(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes [X_{i_{r+2}} [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}]] \otimes \cdots \otimes X_{i_k}) \end{aligned}$$

Os últimos três termos da expressão se anulam pela identidade de Jacobi de \mathfrak{g} , mostrando assim a parte b). Logo, o conjunto de monômios ordenados é linearmente independente e portanto formam uma base para $U(\mathfrak{g})$, finalizando a demonstração. \square

Observação 2.4.7. Tendo em conta a notação da Observação 1.4.6 e o Teorema PBW temos uma decomposição de $U(\mathfrak{g})$ em subálgebras como segue

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^+) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}^-).$$

2.5 MÓDULOS DE PESO MÁXIMO E TEOREMA DE CARACTERIZAÇÃO DE MÓDULOS DE DIMENSÃO FINITA PARA ÁLGEBRAS DE LIE SEMI-SIMPLES

Estamos interessados no estudo de módulos de \mathfrak{g} (ou $U(\mathfrak{g})$), não necessariamente de dimensão finita. Nosso objeto de estudo será o conjunto de todos os $U(\mathfrak{g})$ -módulos.

Pela seção 2.3, temos uma ideia de peso para o caso de dimensão finita, vamos ampliar a ideia de peso no caso de dimensão infinita.

Definição 2.5.1. Seja M um $U(\mathfrak{g})$ -módulo. Para cada $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, o conjunto

$$M_\lambda := \{v \in M : h \cdot v = \lambda(h)v \forall h \in \mathfrak{h}\},$$

é denominado espaço de peso em relação a \mathfrak{h} . Se $M_\lambda \neq 0$, então dizemos que λ é um peso de M . A multiplicidade de λ em M é definida como $\dim M_\lambda$ (possivelmente infinito).

Definição 2.5.2. Definimos o conjunto dos pesos em M , como sendo o conjunto

$$\Phi(M) := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : M_\lambda \neq 0\}$$

Podemos verificar que os vetores de peso associados a pesos distintos são linearmente independentes. Portanto a soma $\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$ é uma soma direta e não necessariamente é M . Porém, focaremos no caso em que M é essa soma. Dessa forma, chamamos M um módulo de peso.

Vamos caracterizar os módulos de dimensão finita, através dos módulos de Verma. Para definir esses módulos precisamos de alguns conceitos e resultados que mostraremos a continuação.

Definição 2.5.3. *Sejam M um $U(\mathfrak{g})$ -módulo e $v^+ \in M$ um vetor não nulo.*

1. *Dizemos que v^+ é um vetor maximal de peso $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ se, $v^+ \in M_\lambda$ e $\mathfrak{n}^+ \cdot v^+ = 0$.*
2. *M é chamado de **módulo de peso máximo**, de peso λ , se v^+ é um vetor maximal de peso λ , tal que $M = U(\mathfrak{g}) \cdot v^+$. Pelo teorema PBW, tal módulo satisfaz $M = U(\mathfrak{n}^-) \cdot v^+$.*

Teorema 2.5.4. *(Ver Teorema da seção 1.2 de [Hu08]) Seja M um módulo de peso máximo, de peso $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ gerado por um vetor maximal v^+ . Fixamos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ raízes positivas ordenadas e escolhemos correspondentes vetores $y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$. Então*

1. *M é gerado pelos vetores $y_1^{i_1} \cdots y_m^{i_m} \cdot v^+$, com $i_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, tendo respectivos pesos $\lambda - \sum i_j \alpha_j$. Portanto, M é um \mathfrak{h} -módulo semi-simples.*
2. *Para cada peso μ de M , temos que $\dim M_\mu < \infty$ e $\dim M_\lambda = 1$.*
3. *Cada quociente de M não nulo é de novo um módulo de peso máximo de peso λ .*
4. *Cada submódulo de M é um módulo de peso. Um submódulo gerado por um vetor maximal de peso $\mu < \lambda$ é próprio. Em particular, se M é irredutível os vetores maximais são todos múltiplos de v^+ .*
5. *M tem um único submódulo maximal e um único quociente irredutível.*

Vamos definir os módulos de Verma. Para isso precisamos de uma subálgebra de Borel que é $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h}$ e da seguinte definição.

Definição 2.5.5. *Sejam $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $h \in \mathfrak{h}$ e $x \in \mathfrak{n}^+$, definimos o \mathfrak{b} -módulo \mathbb{C}_λ como segue:*

$$\mathbb{C}_\lambda = \{v \in M : (h + x) \cdot v = \lambda(h)v\},$$

o qual tem dimensão um, e é gerado por v^+ .

Definição 2.5.6. *Definimos o módulo de Verma de peso máximo λ como o conjunto*

$$M(\lambda) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda,$$

o qual tem uma estrutura de $U(\mathfrak{g})$ -módulo. Pelo Teorema PBW, temos que $M(\lambda) \cong U(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathbb{C}_\lambda$.

Proposição 2.5.7. *Seja $M(\lambda)$ um módulo de Verma. Então*

1. (*Propriedade Universal*)

Para qualquer módulo de peso máximo M de peso λ , existe um homomorfismo sobrejetor $\phi : M(\lambda) \rightarrow M$.

2. *O módulo de Verma $M(\lambda)$ tem um único submódulo maximal $N(\lambda)$, isto é, o quociente $M(\lambda)/N(\lambda)$ é irredutível. Denotaremos esse quociente por $L(\lambda)$.*

Lema 2.5.8. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples. Se L é um \mathfrak{g} -módulo irredutível, então $L \simeq L(\lambda)$ para algum $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.*

Lema 2.5.9. *Suponha $S_i = \text{span}\{x_i, y_i, h_i\}$ a álgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$ como na definição 1.3.10. Então para todo $k \geq 0$ e $1 \leq i, j \leq \ell$ temos que*

a) $[x_j, y_i^{k+1}] = 0$ para todo $i \neq j$.

b) $[h_j, y_i^{k+1}] = -(k+1)\alpha_i(h_j)y_i^{k+1}$.

c) $[x_i, y_i^{k+1}] = -(k+1)y_i^k(k \cdot 1 - h_i)$.

Lema 2.5.10. *Sejam v^+ um vetor maximal de peso λ em $L(\lambda)$ e $m_i = \lambda(h_i)$. Então $y_i^{m_i+1} \cdot v^+ = 0$.*

O seguinte teorema caracteriza os módulos de dimensão finita em termos de seu peso máximo λ e é um dos resultados mais importantes da teoria de representações de álgebras semi-simples (Ver seções 21.1, 21.2 de [Hu72] e seção 1.6 de [Hu08]).

Teorema 2.5.11. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples. Então o módulo irredutível $L(\lambda)$ é de dimensão finita se e somente se $\lambda \in \Lambda^+$, ou seja, λ é um peso integral dominante.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que $\dim L(\lambda) < \infty$. Seja $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ um sistema simples de raízes e v^+ o vetor maximal de peso λ de $L(\lambda)$. Para cada $\alpha_i \in \Delta$, seja $S_i \subset \mathfrak{g}$ a subálgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$ como na Definição 1.3.10, ou seja, $S_i = \text{span}\{x_i, y_i, h_i\}$.

Assim, para cada $1 \leq i \leq \ell$ temos que v^+ é autovetor de h_i e $x_i \cdot v^+ = 0$. Isto implica que v^+ é vetor maximal de S_i , por tanto podemos ver $L(\lambda)$ como um $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo. Assim, pelo Corolário 2.2.4 temos que $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Como $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e sendo $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_\ell\}$ a base de \mathfrak{h}^* de pesos fundamentais, temos que

$$\lambda = a_1 \bar{w}_1 + \dots + a_n \bar{w}_\ell.$$

Logo, para cada $1 \leq i \leq \ell$ obtém-se que

$$\begin{aligned}\lambda(h_i) &= a_1 \overline{w_1}(h_i) + \cdots + a_n \overline{w_\ell}(h_i) \\ &= a_1 \langle \overline{w_1}, \alpha_i^\vee \rangle + \cdots + a_n \langle \overline{w_\ell}, \alpha_i^\vee \rangle \\ &= a_i.\end{aligned}$$

Isto implica que, para cada $1 \leq i \leq \ell$, $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Portanto $\lambda \in \Lambda^+$.

(\Leftarrow) Agora suponha que $\lambda \in \Lambda^+$. Vamos provar que $L(\lambda)$ tem dimensão finita por passos.

1. Vamos provar que $L(\lambda)$ contem um S_i -submódulo de dimensão finita.

Sejam v^+ o vetor maximal de peso λ de $L(\lambda)$ e $S_i = \text{span}\{x_i, y_i, h_i\}$. Considere o conjunto $W = \text{span}\{v^+, y_i \cdot v^+, \dots, y_i^{m_i} \cdot v^+\}$. Pelo Lema 2.5.10, $y_i \cdot W \subset W$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}h_i \cdot (y_i^k \cdot v^+) &= [h_i, y_i^k] \cdot v^+ + y_i^k \cdot (h_i \cdot v^+) \\ &= -k\alpha_i(h_i)y_i^k \cdot v^+ + m_i y_i^k \cdot v^+ \\ &= (m_i - 2k)y_i^k \cdot v^+.\end{aligned}$$

Isto implica que $h_i \cdot W \subset W$. Também temos que

$$\begin{aligned}x_i \cdot (y_i^k \cdot v^+) &= [x_i, y_i^k] \cdot v^+ + y_i^k \cdot (x_i \cdot v^+) \\ &= -k y_i^{k-1} ((k-1) \cdot 1 - h_i) \cdot v^+ + 0 \\ &= -k(k-1)y_i^{k-1} \cdot v^+ + k m_i y_i^{k-1} \cdot v^+ \\ &= k(m_i - k + 1)y_i^{k-1} \cdot v^+\end{aligned}$$

Isto implica que $x_i \cdot W \subset W$. Portanto $S_i \cdot W \subset W$, ou seja W é invariante pela ação de S_i , então W é um S_i -submódulo de $L(\lambda)$ de dimensão $m_i + 1$.

2. Agora vamos provar que $L(\lambda)$ é a soma de todos seus S_i -submódulos de dimensão finita. Denotamos essa soma por M . Pelo passo anterior temos que $M \neq \{0\}$. Por outro lado, seja N um S_i -submódulo qualquer de $L(\lambda)$ e considere o conjunto $N' = \text{span}\{x \cdot N : x \in \mathfrak{g}\}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}x_i \cdot (x \cdot N) &= [x_i, x] \cdot N + x \cdot (x_i \cdot N) \subset x \cdot N, \\ y_i \cdot (x \cdot N) &= [y_i, x] \cdot N + x \cdot (y_i \cdot N) \subset x \cdot N, \\ h_i \cdot (x \cdot N) &= [h_i, x] \cdot N + x \cdot (h_i \cdot N) \subset x \cdot N.\end{aligned}$$

Portanto, N' é S_i -invariante, como N é arbitrário, temos que M é um S_i -submódulo de $L(\lambda)$. Como $L(\lambda)$ é irredutível então se segue que $M = L(\lambda)$.

3. Pelo passo anterior temos que cada $v \in L(\lambda)$ está em um S_i -submódulo de dimensão finita, isto implica que x_i, y_i atuam em $L(\lambda)$ como operadores nilpotentes. Assim, para $\varphi : U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End } L(\lambda)$ temos que $\varphi(x_i)$ e $\varphi(y_i)$ são operadores nilpotentes em $L(\lambda)$. Considerando o automorfismo $\tau_i = e^{\varphi(x_i)} e^{\varphi(-y_i)} e^{\varphi(x_i)}$ se pode mostrar que, se μ é um peso qualquer de $L(\lambda)$, então $\tau_i(L(\lambda)_\mu) = L(\lambda)_{r_i\mu}$ com r_i uma reflexão simples.
4. Como τ_i é um isomorfismo, então $\dim L(\lambda)_\mu = \dim L(\lambda)_{r_i\mu}$ e como o grupo de Weyl W é gerado pelas reflexões simples r_i , então temos que para todo $w \in W$, $\dim L(\lambda)_\mu = \dim L(\lambda)_{w\mu}$.
5. Como λ é um peso integral dominante, temos por Lema 2.3.7 que todos os pesos de $L(\lambda)$ são W -conjugados de pesos integrais dominantes $\mu \leq \lambda$ e além disso existe uma quantidade finita deles.
6. Por Teorema 2.5.4, temos que $\dim L(\lambda)_\mu < \infty$, e como os $\mu \leq \lambda$ são finitos, pode-se concluir que $\dim L(\lambda) < \infty$.

□

Observação 2.5.12. *Seja $L(\lambda)$ um módulo irredutível de dimensão finita em $\mathfrak{gl}(n)$. Logo, λ é um peso integral dominante e pelo Exemplo 2.3.8 temos que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ onde,*

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

2.6 TEOREMA DE GELFAND-TSETLIN

Nesta seção descreveremos bases explícitas para módulos irredutíveis de $\mathfrak{gl}(n)$ as quais são compostas por certos elementos que chamaremos de tabelas standard e que a sua vez estão em uma correspondência bijetora com uns outros elementos que chamaremos tabelas de Young semi-standard. Começamos definindo o que é uma tabela standard.

Definição 2.6.1. *Para um vetor $X = (\lambda_{ij})$ em $\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ denotamos por $T(X)$ a seguinte arranjo com entradas $\{\lambda_{ij} : 1 \leq j \leq i \leq n\}$*

$$\begin{array}{cccccc}
\lambda_{n1} & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \lambda_{nn} \\
& & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\
& & & \lambda_{31} & & \lambda_{32} & & \lambda_{33} & \\
& & & & \lambda_{21} & & \lambda_{22} & & \\
& & & & & \lambda_{11} & & &
\end{array}$$

e o chamamos de tabela de Gelfand-Tsetlin de altura n . Uma tabela de Gelfand-Tsetlin de altura n é chamada de *standard* se

$$\begin{aligned}
\lambda_{ki} - \lambda_{k-1,i} &\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
\lambda_{k-1,i} - \lambda_{k,i+1} &\in \mathbb{Z}_{\geq 0}
\end{aligned} \tag{4}$$

para $i = 1, \dots, k-1$ e $k = 2, \dots, n$.

O seguinte teorema que pode ser visto em [Mol06] e em uma outra versão em [GT50], descreve como são as bases para o módulo irredutível $L(\lambda)$.

Teorema 2.6.2. *Seja $L(\lambda)$ um módulo irredutível de dimensão finita em $\mathfrak{gl}(n)$ de peso máximo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, então existe uma base de $L(\lambda)$ parametrizada por tabelas standard com linha superior fixa λ_{nj} . Além disso, a ação dos geradores de $\mathfrak{gl}(n)$ em $L(\lambda)$ é dada pelas formulas de Gelfand-Tsetlin*

$$\begin{aligned}
E_{k,k+1}(T(X)) &= - \sum_{i=1}^k \left(\frac{\prod_{j=1}^{k+1} (l_{ki} - l_{k+1,j})}{\prod_{j \neq i}^k (l_{ki} - l_{kj})} \right) T(X + \delta^{ki}), \\
E_{k+1,k}(T(X)) &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{\prod_{j=1}^{k-1} (l_{ki} - l_{k-1,j})}{\prod_{j \neq i}^k (l_{ki} - l_{kj})} \right) T(X - \delta^{ki}), \\
E_{kk}(T(X)) &= \left(\sum_{i=1}^k \lambda_{ki} - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{k-1,i} \right) T(X),
\end{aligned} \tag{5}$$

onde, $l_{ki} = \lambda_{ki} - i + 1$. Além disso, se $T(X \pm \delta^{ki})$ não é standard então o coeficiente é considerado como zero por definição.

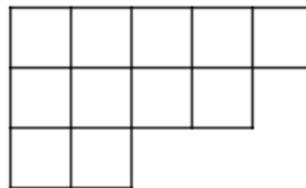
Corolário 2.6.3. *Cada subespaço de peso $L(\lambda)_{\mu}$, tem uma base de tabelas standard com linha superior fixa λ_{nj} e onde os autovalores dos E_{ii} para cada uma destas tabelas são fixos, mais ainda, os μ_i são esses autovalores, ou seja,*

$$\mu_i = \sum_{j=1}^i \lambda_{ij} - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{i-1,j}.$$

Vamos ver a continuação como são construídas as tabelas de Young e como é sua relação com a base do módulo irredutível $L(\lambda)$.

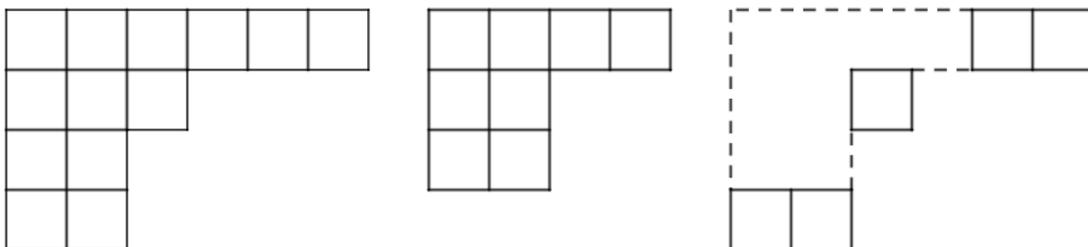
Definição 2.6.4. Definimos um Diagrama de Young como sendo uma coleção finita de caixas organizadas em linhas que estão organizadas de esquerda à direita, com o tamanho da linha i sendo maior ou igual que o tamanho da linha j se $i < j$. Um Diagrama de Young associado com $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é um diagrama com n -linhas e λ_i caixas na fila i . Denotamos o diagrama por DY_λ .

Exemplo 2.6.5. Para $\lambda = (5, 4, 2)$ o Diagrama de Young DY_λ associado é



Definição 2.6.6. Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ com $n \geq r$. Associado a λ e μ podemos construir dois diagramas de Young DY_λ e DY_μ . Suponha que o diagrama DY_μ está contido no diagrama DY_λ , ou seja, cada caixa de DY_μ é também caixa de DY_λ . Assim podemos definir o diagrama DY_λ/DY_μ como sendo o diagrama de todas as caixas em DY_λ que não são caixas de DY_μ .

Exemplo 2.6.7. Sejam $\lambda = (6, 3, 2, 2)$ e $\mu = (4, 2, 2, 0)$. Então os diagramas DY_λ , DY_μ e DY_λ/DY_μ são respectivamente



Definição 2.6.8. Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ tais que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \mu_1 + \dots + \mu_n$. Uma Tabela de Young Semi-Standard de forma λ e contido μ é uma tabela obtida preenchendo de esquerda a direita e de acima para baixo as caixas de um diagrama de Young

associado com λ com os números $1, 2, \dots, n$ de forma que o número i aparece μ_i -vezes e tal que as entradas em cada coluna são estritamente crescentes e em cada fila podem ser iguais ou aumentar. Denotamos o conjunto de tabelas de Young Semi-Standard por $SSYT(\lambda, \mu)$.

Exemplo 2.6.9. Sejam $\lambda = (8, 5, 4)$ e $\mu = (6, 4, 7)$. Então uma Tabela de Young Semi-Standard em $SSYT(\lambda, \mu)$ é

1	1	1	1	1	1	3	3
2	2	2	2	3			
3	3	3	3				

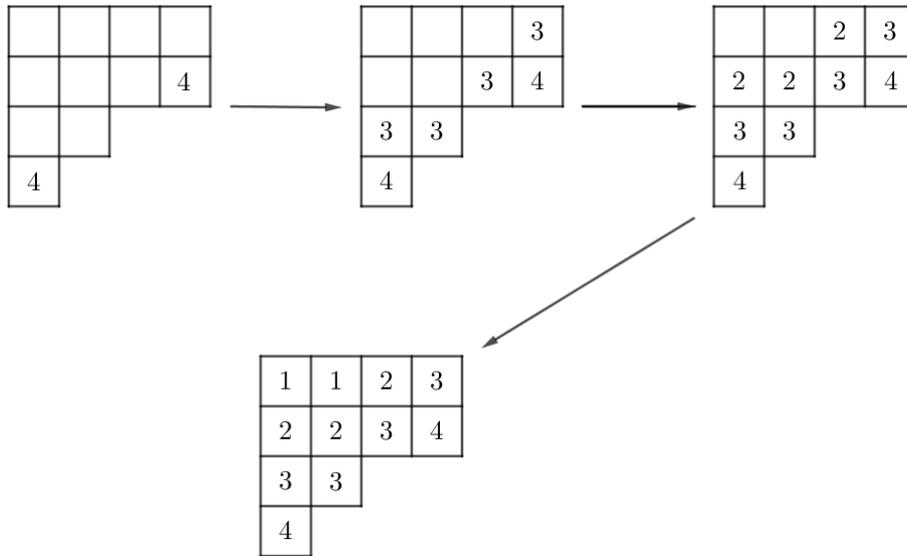
A seguinte proposição nos permite relacionar tabelas de Young semi-standard com uma base de tabelas standard para o subespaço de peso $L(\lambda)_\mu$.

Proposição 2.6.10. Os elementos de $SSYT(\lambda, \mu)$ estão em uma correspondência bijetora com as tabelas standard da base de $L(\lambda)_\mu$.

Demonstração. Seja $T(X)$ uma tabela standard na base de $L(\lambda)_\mu$. Vamos construir uma tabela de Young semi-standard. Seja $\lambda^{(j)}$ a j -upla associada à j -linha em $T(X)$, assim $\lambda^{(j)} = (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jj})$. Pelas relações dadas na Definição 2.6.1 temos que para cada $1 \leq j \leq n$, o diagrama $DY_{\lambda^{(j-1)}}$ está contido no diagrama $DY_{\lambda^{(j)}}$, mais ainda, o diagrama $DY_{\lambda^{(j)}}/DY_{\lambda^{(j-1)}}$ tem exatamente μ_j caixas. Assim, colocando um j em cada uma das caixas de $DY_{\lambda^{(j)}}/DY_{\lambda^{(j-1)}}$, e começando em $j = n$ e descendo até $j = 1$ obtemos uma tabela de Young semi-standard em $SSYT(\lambda, \mu)$. Agora, dada uma tabela de Young semi-standard em $SSYT(\lambda, \mu)$ vamos construir uma tabela standard $T(X)$ na base de $L(\lambda)_\mu$. Seja DY_λ o diagrama associado com a tabela de Young dada e $\lambda^{(j)}$ uma j -upla. Definimos o diagrama $DY_{\lambda^{(j)}}$ como o diagrama contido em DY_λ associado com os números $1, \dots, j$ na tabela de Young dada. Assim, construímos $T(X)$ de modo que as entradas na linha j são as componentes de $\lambda^{(j)}$. Daqui é claro que a linha superior em $T(X)$ tem entradas λ_{nj} e como o diagrama $DY_{\lambda^{(j)}}/DY_{\lambda^{(j-1)}}$ tem exatamente μ_j caixas, temos que $T(X)$ é a tabela standard requerida. Portanto existe a bijeção mencionada. \square

Exemplo 2.6.11. Seja $\lambda = (4, 4, 2, 1)$ e $\mu = (2, 3, 4, 2)$

4 4 2 1
 4 3 2
 3 2
 2



3

POLIEDROS ASSOCIADOS A CONJUNTOS DE RELAÇÕES

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de poliedro associado a tabelas as quais serão definidas a traves de certos conjuntos que chamaremos *conjuntos de relações* os quais foram estudados no artigo [FRZ19]. Além disso, mostraremos alguns resultados importantes os quais nos permitiram encontrar bases explícitas para $\mathfrak{gl}(n)$ -módulos irredutíveis e caracterizar a dimensão da cara minimal de uma tabela em um determinado poliedro.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja X_n o conjunto das matrizes triangulares inferiores $(x_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n}$ com $x_{ij} \in \mathbb{R}$, assim X_n herda a estrutura de \mathbb{R} -espaço vetorial com o isomorfismo $X_n \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. De agora em adiante vamos representar as matrizes como segue:

$$\begin{array}{ccccccc} x_{n1} & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & x_{nn} \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ & & x_{31} & & x_{32} & & x_{33} & & \\ & & & x_{21} & & x_{22} & & & \\ & & & & x_{11} & & & & \end{array}$$

3.1 CONJUNTOS DE RELAÇÕES

Seja $\mathfrak{A} := \{(i, j) : 1 \leq j \leq i \leq n\}$ e considere os conjuntos

$$\mathcal{R}^+ := \{((i+1, j), (i, t)) \mid 1 \leq j \leq i \leq n-1, 1 \leq t \leq i\}$$

$$\mathcal{R}^- := \{((i, j), (i+1, s)) \mid 1 \leq j \leq i \leq n-1, 1 \leq s \leq i+1\}$$

$$\mathcal{R}^0 := \{((n, i), (n, j)) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

Vamos considerar $\mathcal{R} := \mathcal{R}^- \cup \mathcal{R}^0 \cup \mathcal{R}^+ \subset \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$. Assim, a partir de agora qualquer $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$ é chamado *conjunto de relações*. A continuação vamos definir alguns conjuntos de relações importantes.

Definição 3.1.1.

1. Considere o conjunto $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1^+ \cup \mathcal{C}_1^-$ onde

$$\mathcal{C}_1^+ = \{((i+1, j), (i, j)) : 1 \leq j \leq i \leq n-1\} \text{ e}$$

$$\mathcal{C}_1^- = \{((i, j), (i+1, j+1)) : 1 \leq j \leq i \leq n-1\}.$$

O conjunto \mathcal{C}_1 é um conjunto de relações e é conhecido como o conjunto de relações standard.

2. Considere o conjunto $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2^+ \cup \mathcal{C}_2^-$ onde

$$\mathcal{C}_2^+ = \{((i+1, j), (i, j)) : 2 \leq j \leq i \leq n-1\} \text{ e}$$

$$\mathcal{C}_2^- = \{((i, j), (i+1, j+1)) : 2 \leq j \leq i \leq n-1\}.$$

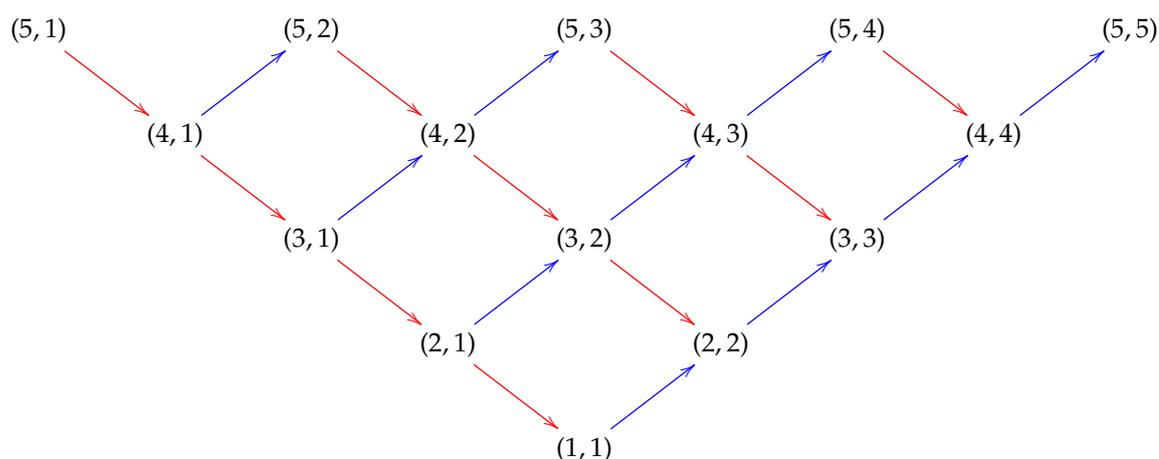
Este conjunto é um conjunto de relações.

Estes conjuntos serão usados na construção de tabelas standard e portanto na construção de bases para $\mathfrak{gl}(n)$ -módulos irreduzíveis dadas no Teorema 2.6.2.

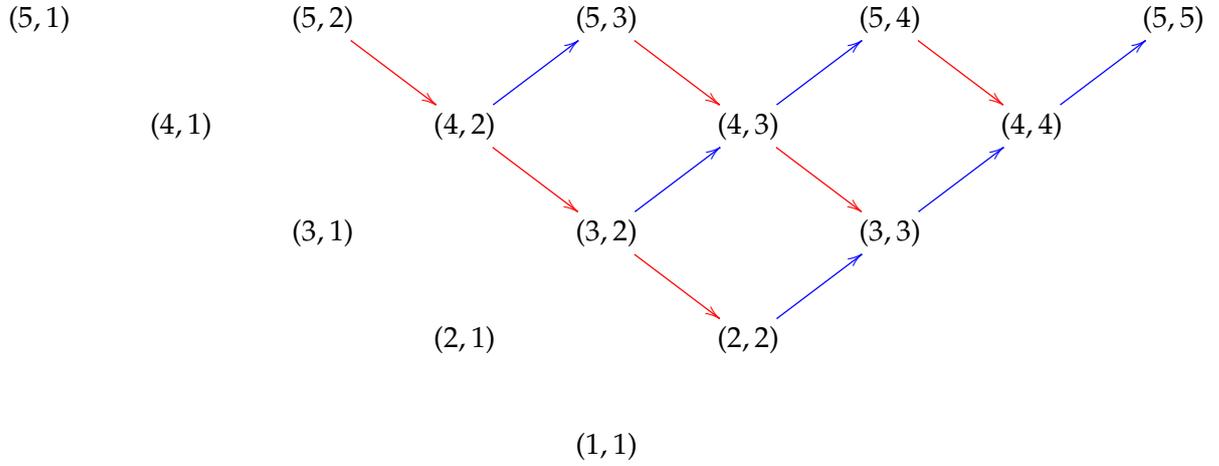
Associado com qualquer $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$ pode-se construir um grafo dirigido $G(\mathcal{C})$ com conjunto de vértices \mathfrak{N} e uma flecha indo de (i, j) para (r, s) se e somente se $((i, j), (r, s)) \in \mathcal{C}$.

Exemplo 3.1.2.

1. Considere o conjunto de relações standard \mathcal{C}_1 . Para $n = 5$, \mathcal{C}_1 tem grafo dirigido associado:



2. Considere o conjunto de relações \mathcal{C}_2 . Para $n = 5$, \mathcal{C}_2 tem grafo dirigido associado:



Definição 3.1.3. Seja \mathcal{C} um conjunto de relações qualquer.

1. Dizemos que (i, j) e (r, s) estão relacionados se existe uma flecha indo de (i, j) para (r, s) ou indo de (r, s) para (i, j) e denotamos tal relação por \leftrightarrow .
2. Por $\mathfrak{V}(\mathcal{C})$ denotamos o subconjunto de \mathfrak{V} de todos os (i, j) tais que $(i, j) \leftrightarrow (r, s)$ para algum $(r, s) \in \mathfrak{V}$, ou seja,

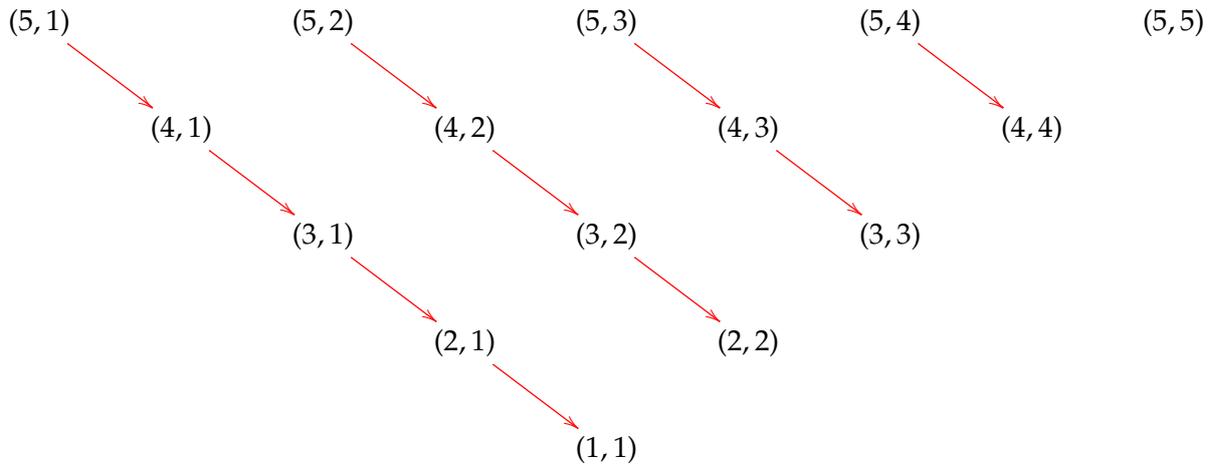
$$\mathfrak{V}(\mathcal{C}) = \{(i, j) \in \mathfrak{V} : (i, j) \leftrightarrow (r, s), \text{ para algum } (r, s) \in \mathfrak{V}\}.$$

3. Dados $(i, j), (r, s) \in \mathfrak{V}$ escrevemos $(i, j) \succeq (r, s)$ se existe um caminho em $G(\mathcal{C})$ começando em (i, j) e terminando em (r, s) .

Agora vamos definir o que é uma tabela associada a um conjunto de relações. Para isto, vamos usar duas definições uma mais geral que a outra.

Definição 3.1.4. Seja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$ um conjunto de relações. Uma \mathcal{C} -tabela é uma matriz $X = (x_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n} \in X_n$ tal que X satisfaz o conjunto de relações \mathcal{C} , isto é: se $x_{ij} - x_{rs} \geq 0$ para cada $((i, j), (r, s)) \in \mathcal{C}$.

Exemplo 3.1.5. Considere o conjunto de relações $\mathcal{C}_1^+ = \{((i + 1, j), (i, j)) : 1 \leq j \leq i \leq n - 1\}$. Para $n = 5$, esse conjunto de relações tem grafo dirigido associado:



Então, a seguinte tabela é uma C_1^+ -tabela

5	4	4	2	1
	3	2	3	$\frac{1}{2}$
	1	1	2	
		0	$\frac{1}{3}$	
			-1	

A seguinte definição é um caso particular da anterior, mas, generaliza a Definição 4.1.1 de tabela standard.

Definição 3.1.6. *Seja $C \subseteq \mathcal{R}$ um conjunto de relações. Uma C -tabela positiva é uma matriz $X = (x_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n} \in X_n$ tal que*

- $x_{ij} \geq 0$ se $(i, j) \in \mathfrak{B}(C)$.
- X satisfaz o conjunto de relações C , isto é: se $x_{ij} - x_{rs} \geq 0$ para cada $((i, j), (r, s)) \in C$.
- Para cada $(i, j) \in \mathfrak{B}(C)$, $(i, j) \succeq (n, r)$ para algum $1 \leq r \leq n$.

Exemplo 3.1.7. *Considere o conjunto de relações C_2 cujo grafo dirigido associado pode ser visto no item 2 do Exemplo 3.1.2. Logo, a seguinte tabela é uma C_2 -tabela positiva*

$\frac{1}{2}$	4	2	1	0
	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
		$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
			$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
				$\frac{2}{9}$

3.2 POLIEDROS ASSOCIADOS COM CONJUNTOS DE RELAÇÕES

Agora que temos definido as \mathcal{C} -tabelas, podemos definir um poliedro associado a estas tabelas.

Definição 3.2.1. *Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$ um conjunto de relações. Um \mathcal{C} -poliedro $P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu) \subset X_n$ é o conjunto de \mathcal{C} -tabelas $X = (x_{ij})$ que satisfazem*

- $x_{nj} = \lambda_j$ para $1 \leq j \leq n$
- $x_{11} = \mu_1$ e $\sum_{j=1}^i x_{ij} - \sum_{j=1}^{i-1} x_{i-1,j} = \mu_i$, para $2 \leq i \leq n$.

O \mathcal{C} -poliedro $P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$ será chamado de \mathcal{C} -poliedro positivo se for construído a partir de \mathcal{C} -tabelas positivas.

Lema 3.2.2. *Seja X uma \mathcal{C} -tabela em $P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$. Então para cada $y \in X_n$ tal que $X \pm y \in P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$ se satisfaz que $\sum_{j=1}^i y_{ij} = 0$ para $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração. Seja $y \in X_n$ tal que $X \pm y \in P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$. Logo $X \pm y$ satisfaz

- $x_{nj} + y_{nj} = \lambda_j$, para $1 \leq j \leq n$;
- $x_{11} + y_{11} = \mu_1$, e $\sum_{j=1}^i (x_{ij} + y_{ij}) - \sum_{j=1}^{i-1} (x_{i-1,j} + y_{i-1,j}) = \mu_i$, para $2 \leq i \leq n$.

Como $X \in P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$ então é fácil ver que $y_{11} = y_{nj} = 0$ para $1 \leq j \leq n$ e por tanto $\sum_{j=1}^i y_{ij} = 0$ é satisfeita para $i = 1$ e $i = n$. Agora temos que

$$\begin{aligned} \mu_i &= \sum_{j=1}^i (x_{ij} + y_{ij}) - \sum_{j=1}^{i-1} (x_{i-1,j} + y_{i-1,j}) \\ &= \sum_{j=1}^i x_{ij} + \sum_{j=1}^i y_{ij} - \sum_{j=1}^{i-1} x_{i-1,j} - \sum_{j=1}^{i-1} y_{i-1,j} \\ &= \sum_{j=1}^i x_{ij} - \sum_{j=1}^{i-1} x_{i-1,j} + \sum_{j=1}^i y_{ij} - \sum_{j=1}^{i-1} y_{i-1,j}, \end{aligned}$$

como $X \in P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$ então $\sum_{j=1}^i x_{ij} - \sum_{j=1}^{i-1} x_{i-1,j} = \mu_i$, logo obtemos que

$$\sum_{j=1}^i y_{ij} - \sum_{j=1}^{i-1} y_{i-1,j} = 0.$$

Vamos a provar $\sum_{j=1}^i y_{ij} = 0$ por indução sobre i . Seja $i = 2$, então

$$0 = \sum_{j=1}^2 y_{2j} - \sum_{j=1}^1 y_{1,j} = \sum_{j=1}^2 y_{2j} - y_{11} = \sum_{j=1}^2 y_{2j}$$

pois como foi mostrado acima, $y_{11} = 0$ e portanto a igualdade é satisfeita para $i = 2$. Suponhamos que se satisfaz para $1 \leq i \leq n - 2$ e provemos que se satisfaz para $i + 1$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{i+1} y_{i+1,j} - \sum_{j=1}^i y_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{i+1} y_{i+1,j} - 0 && \text{(por hipótese de indução)} \\ &= \sum_{j=1}^{i+1} y_{i+1,j} \end{aligned}$$

Portanto, para $1 \leq i \leq n$ se satisfaz $\sum_{j=1}^i y_{ij} = 0$ como requerido. \square

Lema 3.2.3. *Considere o conjunto de relações \mathcal{C}_2 dado na Definição 3.1.1. Sejam $\lambda \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^{n-1}$ e X uma \mathcal{C}_2 -tabela positiva em $P_{\mathcal{C}_2}(\lambda, \mu)$ tal que, $x_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ se $(i, j) \in \mathfrak{V}(\mathcal{C}_2)$. O número de $Y \in X_n \cap \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ tais que, $X + Y \in P_{\mathcal{C}_2}(\lambda, \mu)$ é igual à dimensão do $\mathfrak{gl}(n - 1)$ -módulo irredutível $L(\tilde{\lambda})$ onde $\tilde{\lambda} = (\lambda_2, \dots, \lambda_n)$.*

Demonstração. Sejam X uma \mathcal{C}_2 -tabela positiva e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ como na hipótese. Assim, temos que para $i \geq 2$, $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, isto quer dizer que, existe um número finito de maneiras nas quais se podem somar inteiros aos x_{ij} nas posições $(i, j) \in \mathfrak{V}(\mathcal{C}_2)$, tal que o conjunto de relações é satisfeito. Além disto, precisamos subtrair a mesma quantidade somada em cada fila, isto para garantir que as novas tabelas estejam em $P_{\mathcal{C}_2}(\lambda, \mu)$. Subtrair pode ser feito nas posições $(i, 1)$. Isto é garantido pelo fato de que em cada fila i existe unicamente o vértice $(i, 1) \notin \mathfrak{V}(\mathcal{C}_2)$. Portanto, existem m tabelas em X_n tal que ao ser somadas com X formam \mathcal{C}_2 -tabelas positivas. Sejam $Y^1, \dots, Y^m \in X_n$ todas as tabelas satisfazendo o anterior mencionado, isto é, para cada $1 \leq s \leq m$, $X + Y^s$ esta no poliedro positivo $P_{\mathcal{C}_2}(\lambda, \mu)$. Se olhamos $(X + Y^s)|_{\mathfrak{V}(\mathcal{C}_2)}$ temos m tabelas com linha superior fixa $(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Estas tabelas são standard pois, satisfazem as desigualdades

dadas na Definição 2.6.1 e pelo Teorema 2.6.2 temos que estas tabelas são uma base para $L(\tilde{\lambda})$ com $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{n-1}) = (\lambda_2, \dots, \lambda_n)$ mostrando o requerido. \square

Exemplo 3.2.4. Sejam $\lambda = (\frac{1}{2}, 7, 5, 4)$, $\mu = (1, \frac{23}{4}, \frac{47}{12}, \frac{35}{6})$ e X a C_2 -tabela em $P_{C_2}(\lambda, \mu)$ dada por

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 7 & 5 & 4 \\ & \frac{2}{3} & 6 & 4 \\ & & \frac{7}{4} & 5 \\ & & & 1 \end{array}$$

Algumas das C_2 -tabelas em $P_{C_2}(\lambda, \mu)$ obtidas por meio de X e que satisfazem as condições do lema são

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 7 & 5 & 4 \\ -\frac{1}{3} & 7 & 4 & \\ & \frac{3}{4} & 6 & \\ & & 1 & \end{array} = \begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 7 & 5 & 4 \\ \frac{2}{3} & 6 & 4 & \\ & \frac{7}{4} & 5 & \\ & & 1 & \end{array} + \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \\ & -1 & 1 & \\ & & 0 & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 7 & 5 & 4 \\ -\frac{4}{3} & 7 & 5 & \\ & \frac{3}{4} & 6 & \\ & & 1 & \end{array} = \begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 7 & 5 & 4 \\ \frac{2}{3} & 6 & 4 & \\ & \frac{7}{4} & 5 & \\ & & 1 & \end{array} + \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & \\ & -1 & 1 & \\ & & 0 & \end{array}$$

Podemos obter um total de 15 C_2 -tabelas satisfazendo as condições do lema. Fazendo a restrição a $\mathfrak{B}(C_2)$ obtemos o conjunto

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & & 7 \\ & 5 & & 5 \end{array}, \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & & 7 \\ & 5 & & 5 \end{array}, \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & & 7 \\ & 5 & & 5 \end{array}, \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & & 6 \\ & 5 & & 5 \end{array}, \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & & 6 \\ & 6 & & 6 \end{array}, \right.$$

$$\left. \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & & 7 \\ & 5 & & 6 \end{array}, \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & & 7 \\ & 6 & & 6 \end{array}, \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & & 7 \\ & 6 & & 6 \end{array}, \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & & 6 \\ & 6 & & 6 \end{array}, \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & & 6 \\ & 4 & & 4 \end{array}, \right.$$

$$\left. \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & & 7 \\ & 4 & & 5 \end{array}, \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & & 7 \\ & 4 & & 5 \end{array}, \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & & 7 \\ & 5 & & 7 \end{array}, \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & & 7 \\ & 7 & & 7 \end{array}, \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & & 7 \\ & 7 & & 7 \end{array} \right\},$$

o qual é uma base de $L(\tilde{\lambda})$ onde $\tilde{\lambda} = (7, 5, 4)$.

3.3 FACES DE \mathcal{C} -POLIEDROS

Agora, para o estudo dos poliedros, precisamos definir o conceito de face. Para isto, precisaremos do seguinte conceito.

Definição 3.3.1. *Seja N um hiperplano de X_n . Dizemos que N é um hiperplano suporte de um \mathcal{C} -poliedro $P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$, se algum dos dois semi-espacos fechados de N contem $P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$.*

Definição 3.3.2. *Seja $F \subset P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$. Dizemos que F é uma **face** de $P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$ se*

$$F = P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu) \cap N,$$

onde N é um hiperplano suporte de $P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$.

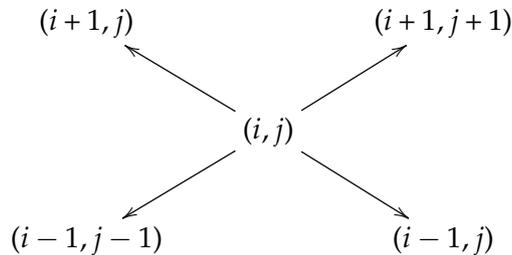
Assim, um vértice será uma face de dimensão 0, uma aresta será uma face de dimensão 1 e chamaremos de faceta a uma face de dimensão $\dim(P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)) - 1$.

Definição 3.3.3. *Seja X uma \mathcal{C} -tabela em $P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$. Dizemos que X esta contida em uma face F de dimensão k , se existe um subespaço linear $H \in X_n$ com base $\{v_1, \dots, v_k\}$, tal que $H + X \subset F$, ou seja, para todo $1 \leq i \leq k$, $X \pm v_i$ são \mathcal{C} -tabelas contidas em F , em particular, contidas em $P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$. No caso em que k é maximal, dizemos que F é **face minimal** para X .*

Definição 3.3.4. *Dada uma \mathcal{C} -tabela $X \in X_n$, o mosaico¹ \mathcal{M} de X é a partição do conjunto $\mathfrak{W} := \{(i, j) : 1 \leq j \leq i \leq n\}$ em subconjuntos chamados telhas², de modo que, cada $(i, j) \notin \mathfrak{W}(\mathcal{C})$ forma uma telha e dizemos que, $((i, j), (r, s)) \in \mathcal{C}$ estão na mesma telha se*

- $x_{ij} = x_{rs}$ e
- $(r, s) \in \{(i+1, j+1), (i+1, j), (i-1, j), (i-1, j-1)\}$.

Isto é, se (r, s) é algum dos pontos do seguinte diagrama



Além disso, definimos as telhas livres M_1, M_2, \dots, M_s como sendo as telhas em \mathcal{M} que não tem interseção com $(1, 1)$ e (n, j) para $1 \leq j \leq n$. Na Figura 1 temos uma \mathcal{C}_1^+ -tabela e uma \mathcal{C}_2 -tabela cada uma associada a seu respectivo mosaico.

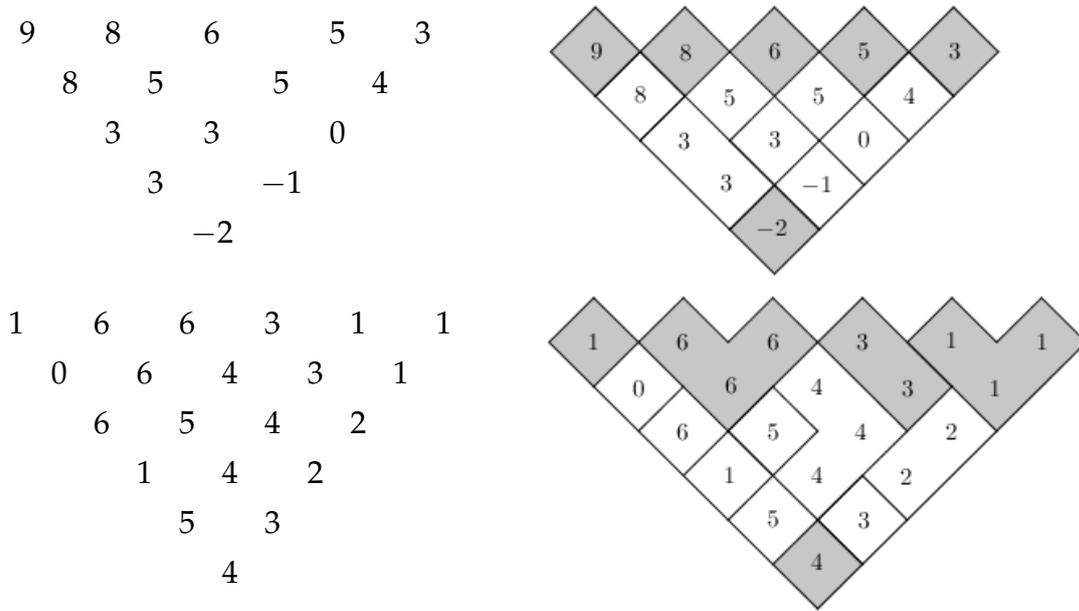


Figura 1: Mosaicos de \mathcal{C} -tabelas

Definição 3.3.5. Dada uma \mathcal{C} -tabela X com mosaico \mathcal{M} e telhas livres M_1, M_2, \dots, M_s , definimos a matriz mosaico $A_{\mathcal{M}}$ como sendo a matriz

$$(a_{ik})_{2 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq s} \text{ onde } a_{ik} = \#\{j : (i, j) \in M_k\}.$$

Para \mathcal{C} -tabelas sem telhas livres, vamos associar $A_{\mathcal{M}}$ como sendo a matriz identidade de ordem $n - 2 \times n - 2$.

Exemplo 3.3.6. Para a \mathcal{C}_1^+ -tabela e a \mathcal{C}_2 -tabela com seus respectivos mosaicos dados na Figura 1, temos que suas matrizes mosaico associadas $A_{\mathcal{M}_1}$ e $A_{\mathcal{M}_2}$ são respectivamente:

$$A_{\mathcal{M}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{M}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 tradução de palavra tiling

2 tradução de palavra tiles

Lema 3.3.7. *A dimensão do kernel de $A_{\mathcal{M}}$ não depende da ordem em que as telhas livres são enumeradas.*

Demonstração. Seja \mathcal{M} o mosaico de uma \mathcal{C} -tabela X com s telhas livres M_1, M_2, \dots, M_s e seja $A_{\mathcal{M}}$ sua matriz associada. Considere $M_{\sigma(1)}, M_{\sigma(2)}, \dots, M_{\sigma(s)}$ uma permutação da ordem de enumeração das telhas livres e seja $\tilde{A}_{\mathcal{M}}$ sua matriz associada. Por definição temos que

$$A_{\mathcal{M}} = (a_{ik})_{2 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq s} \quad \text{onde } a_{ik} = \#\{j : (i, j) \in M_k\},$$

e

$$\tilde{A}_{\mathcal{M}} = (b_{ik})_{2 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq s} \quad \text{onde } b_{ik} = \#\{j : (i, j) \in M_{\sigma(k)}\}.$$

Daqui é fácil observar que $b_{ik} = a_{i\sigma(k)}$. Isto quer dizer que, $\tilde{A}_{\mathcal{M}}$ é obtida via uma permutação das colunas de $A_{\mathcal{M}}$ e portanto seu kernel respectivo tem a mesma dimensão. \square

Assim, sem perda de generalidade as *telhas livres* serão enumeradas de esquerda a direita e de baixo para cima.

O seguinte teorema é uma generalização do Teorema 1.5 em [LM04] para polítopos de Gelfand-Tsetlin (ver Corolário 4.2.1).

Teorema 3.3.8. *Sejam \mathcal{C} um conjunto de relações, X uma \mathcal{C} -tabela positiva e \mathcal{M} seu mosaico associado. Então, a dimensão do kernel de $A_{\mathcal{M}}$ é igual à dimensão da face minimal do \mathcal{C} -poliedro positivo contendo X .*

Demonstração. Seja X a \mathcal{C} -tabela positiva no \mathcal{C} -poliedro positivo $P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu) \subset X_n$ e \mathcal{M} seu mosaico associado. Sejam s o número de telhas livres em \mathcal{M} e $\{\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(d)}\}$ uma base para $\ker A_{\mathcal{M}}$. Já que podemos multiplicar a base por qualquer escalar não nulo, podemos assumir que

$$|\varepsilon_k^{(m)}| < \frac{1}{2} \min \{|x_{ij} - x_{rl}| : x_{ij} \neq x_{rl}\}, \quad \text{para } 1 \leq m \leq d, 1 \leq k \leq s,$$

onde $\varepsilon_k^{(m)}$ é a k -ésima coordenada de $\varepsilon^{(m)}$. Seja $H \subset X_n$ um subespaço linear de X_n como na Definição 3.3.3. Definimos a aplicação linear

$$\begin{aligned} \psi : \ker A_{\mathcal{M}} &\rightarrow X_n \\ \varepsilon^{(m)} &\mapsto \mathbf{y}^{(m)}, \end{aligned}$$

onde

$$y_{ij}^{(m)} = \begin{cases} \varepsilon_k^{(m)} & \text{se } (i, j) \in M_k, \\ 0 & \text{se } (i, j) \notin M_k, \forall 1 \leq k \leq s. \end{cases}$$

Assim, $X + y^{(m)}$ é o resultado da adição de $\varepsilon_k^{(m)}$ a cada entrada na k -ésima telha livre de X para $1 \leq k \leq s$. Vamos provar que $\{y^{(1)}, \dots, y^{(d)}\}$ é uma base para H .

É claro que $y_{i1}^{(m)} = y_{nj}^{(m)} = 0$, para $1 \leq i, j \leq n$, pois $(i, 1)$ e (n, j) não pertencem a nenhuma telha livre. Vamos provar que $X \pm y^{(m)}$ são \mathcal{C} -tabelas positivas. Primeiramente, vamos mostrar que $x_{ij} \pm y_{ij}^{(m)} \geq 0$ para $(i, j) \in \mathfrak{A}(\mathcal{C})$. Então, seja $(i, j) \in \mathfrak{A}(\mathcal{C})$. Se $(i, j) \notin M_k$ para todo k , então $y_{ij}^{(m)} = 0$ e portanto obtemos que $x_{ij} \pm y_{ij}^{(m)} = x_{ij} \geq 0$. Agora seja $(i, j) \in M_k$ para algum $1 \leq k \leq s$. Então, usando a condição 3 da Definição 3.1.6 temos

$$\begin{aligned} \pm y_{ij}^{(m)} &= \pm \varepsilon_k^{(m)} \leq |\varepsilon_k^{(m)}| < \frac{1}{2} \min \{ |x_{rt} - x_{lz}| : x_{rt} \neq x_{lz} \} \\ &\leq |x_{ij} - x_{n,r}| = x_{ij} - x_{n,r} \leq x_{ij} \end{aligned} \tag{6}$$

Assim, temos que $x_{ij} \pm y_{ij}^{(m)} \geq 0$ para $(i, j) \in \mathfrak{A}(\mathcal{C})$. Agora vamos provar que se satisfaz o conjunto de relações. Seja $((i, j), (r, s)) \in \mathcal{C}$, então temos que

$$\begin{aligned} \pm (y_{ij}^{(m)} - y_{rs}^{(m)}) &\leq |y_{ij}^{(m)} - y_{rs}^{(m)}| \leq |y_{ij}^{(m)}| + |y_{rs}^{(m)}| \leq 2\varepsilon_{\bar{k}}^{(m)} \\ &= 2|\varepsilon_{\bar{k}}^{(m)}| < \min \{ |x_{pt} - x_{lz}| : x_{pt} \neq x_{lz} \} \\ &\leq |x_{ij} - x_{rs}| = x_{ij} - x_{rs} \end{aligned}$$

onde $\varepsilon_{\bar{k}}^{(m)} = \max \{ \varepsilon_k^{(m)} : 1 \leq k \leq s \}$. Daqui obtemos que $x_{ij} - x_{rs} \pm (y_{ij}^{(m)} - y_{rs}^{(m)}) \geq 0$, ou seja, $X \pm y^{(m)}$ satisfazem o conjunto de relações e portanto são \mathcal{C} -tabelas positivas. Ao somar as componentes das linhas de $y^{(m)}$ temos que

$$\sum_{j=1}^i y_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^s a_{ik} \varepsilon_k^{(m)},$$

onde $a_{ik} = \# \{ j : (i, j) \in M_k \}$. A última soma é simplesmente o produto ponto de $\varepsilon^{(m)}$ com a linha i de $A_{\mathcal{M}}$ e como $\varepsilon^{(m)} \in \ker A_{\mathcal{M}}$ temos que essa soma é zero, i.e, a soma das linhas de $y^{(m)}$ é sempre zero.

Em conjunto, essas propriedades nos dizem que $X \pm y^{(m)} \in P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$, ou seja, eles são extremos de um segmento contido em $P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$ que contem X . Portanto $y^{(1)}, \dots, y^{(d)} \in H$. O fato dos $y^{(1)}, \dots, y^{(d)}$ ser linearmente independentes, segue do fato que os $\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(d)}$ são linearmente independentes. Logo, só falta provar que $\{y^{(1)}, \dots, y^{(d)}\}$ gera H .

Seja $y \in H$ tal que $X \pm y \in P_{\mathcal{C}}(\lambda, \mu)$. Vamos construir um $\varepsilon \in \ker A_{\mathcal{M}}$ tal que $\varphi(\varepsilon) = y$. Note que

- $y_{ij} = 0$ se $(i, j) \in \{(1, 1), (n, t) : 1 \leq t \leq n\}$,
- cada linha em y tem soma zero,
- se (i, j) e (r, l) estão na mesma telha, então $y_{ij} = y_{rl}$.

As duas primeiras propriedades vem do fato que $X \pm y \in P_C(\lambda, \mu)$ e do Lema 3.2.2. Para ver que a ultima propriedade é valida, vamos tomar primeiro o caso em que $(i, j), (r, l) \notin \mathfrak{B}(C)$, como (i, j) e (r, l) estão na mesma telha, então $(i, j) = (r, l)$, ou seja, $y_{ij} = y_{rl}$. Agora no caso que $((i, j), (r, l)) \in C$ temos que

$$x_{ij} + y_{ij} - x_{rl} - y_{rl} \geq 0 \quad \text{e} \quad x_{ij} - y_{ij} - x_{rl} + y_{rl} \geq 0$$

ou

$$x_{rl} + y_{rl} - x_{ij} - y_{ij} \geq 0 \quad \text{e} \quad x_{rl} - y_{rl} - x_{ij} + y_{ij} \geq 0.$$

Agora, como (i, j) e (r, l) estão na mesma telha temos que $x_{ij} = x_{rl}$ e portanto, nos dois casos vamos obter que $y_{ij} = y_{rl}$ obtendo o requerido. Daqui é claro que, se $(i, j) \notin M_k$ para todo k , então $y_{ij} = 0$.

Assim, para $1 \leq k \leq s$ e cada (i, j) na telha livre M_k , fazemos $\varepsilon_k = y_{ij}$ e logo nas condições anteriores sobre y , escrevemos $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ o qual satisfaz $\varepsilon \in \ker A_M$ e $\varphi(\varepsilon) = y$.

Portanto, as coordenadas de ε com respeito à base $\{\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(d)}\}$ de $\ker A_M$, serão também as coordenadas de y respeito a $\{y^{(1)}, \dots, y^{(d)}\}$. Em particular $\{y^{(1)}, \dots, y^{(d)}\}$ é base de H como requerido. \square

Observação 3.3.9. O teorema anterior é valido para uma C -tabela em um $P_C(\lambda, \mu)$ qualquer. A demonstração para este caso é semelhante à anterior demonstração, com exceção da prova de $x_{ij} \pm y_{ij}^{(m)} \geq 0$ feita em (6) a qual não é necessária neste caso pois $x_{ij} \pm y_{ij}^{(m)}$ pode ser qualquer número real.

4

POLÍTOPOS DE GELFAND-TSETLIN

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de polítopo de Gelfand-Tsetlin associado a tabelas standard e alguns resultados importantes os quais nos permitirão caracterizar vértices de um polítopo dado. Estes resultados estão baseados em [LM04].

4.1 DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Nesta seção vamos trabalhar com o conjunto de relações \mathcal{C}_1 e os conceitos de \mathcal{C}_1 -tabela positiva, \mathcal{C}_1 -poliedro positivo e outros conceitos e resultados dados no capítulo anterior, mas vistos no conjunto de relações \mathcal{C}_1 .

Definição 4.1.1. *Uma **tabela standard** é uma matriz triangular inferior $x = (x_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n} \in X_n$ satisfazendo as seguintes desigualdades:*

- $x_{ij} \geq 0$ para $1 \leq j \leq i \leq n$, e
- $x_{i+1,j} \geq x_{ij} \geq x_{i+1,j+1}$, para $1 \leq j \leq i \leq n - 1$.

Note que estas tabelas standard vem da Definição 2.6.1 mas as condições em (4) foram levemente modificadas pois neste capítulo vamos trabalhar sobre \mathbb{R} . Denotaremos a **tabela standard** por $T(x)$ e vamos representa-lá como no capítulo 3. Assim temos que as entradas localizadas abaixo da fila superior são menores que seu vizinho superior esquerdo, mas maiores que seu vizinho superior direito. Neste caso as filas são contadas de baixo para cima. Em outras palavras, as tabelas standard satisfazem as condições dadas na Definição 3.1.1 com o conjunto de relações standard \mathcal{C}_1 , ou seja, as tabelas standard $T(x)$ são \mathcal{C}_1 -tabelas positivas.

Definição 4.1.2. *Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^n$, o polítopo de Gelfand-Tsetlin (ou GT-polítopo) $GT(\lambda, \mu) \subset X_n$ é o polítopo convexo¹ de **tabelas standard** $T(x)$ satisfazendo as condições da Definição 3.2.1, em outras palavras, um GT-polítopo é um \mathcal{C}_1 -poliedro positivo $P_{\mathcal{C}_1}(\lambda, \mu)$ com $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^n$.*

¹ Um polítopo convexo é definido como uma interseção de um número finito de semiespaços.

A importância dos GT -polítopos vem do fato que, o número de tabelas standard com entradas inteiras no GT -polítopo $GT(\lambda, \mu)$ é igual à dimensão do espaço de peso μ do $\mathfrak{gl}(n)$ -módulo irredutível $L(\lambda)$ de peso máximo λ .

Observação 4.1.3. Note que os μ_i são exatamente os autovalores da subálgebra de Cartan na realização (5) do Teorema de Gelfand-Tsetlin.

Os conceitos de hiperplano suporte e face de um GT -polítopo podem ser definidos da mesma maneira que no capítulo anterior.

Definição 4.1.4. Seja $T(x)$ uma tabela standard em $GT(\lambda, \mu)$. Dizemos que $T(x)$ esta contida em uma face F de dimensão p , se existe um subespaço linear $H \in X_n$ com base $\{v_1, \dots, v_p\}$ e p , tal que $H + T(x) \subset F$, ou seja, para todo $1 \leq i \leq p$, $T(x) \pm v_i$ são tabelas standard e estão contidas em F , em particular contidas em $GT(\lambda, \mu)$. No caso em que p é maximal, dizemos que F é face minimal para $T(x)$

Corolário 4.1.5. Seja $T(x)$ uma tabela standard em $GT(\lambda, \mu)$. Então para cada $y \in X_n$ tal que $T(x) \pm y \in GT(\lambda, \mu)$ se satisfaz que $\sum_{j=1}^i y_{ij} = 0$ para $1 \leq i \leq n$.

Demonstração. Tome o conjunto de relações \mathcal{C}_1 na demonstração do Lema 3.2.2. □

Definição 4.1.6. Dada uma *tabela standard* $T(x)$, o *mosaico* \mathcal{M} , as *telhas*, *telhas livres* e a *matriz mosaico*, serão definidas da mesma maneira que nas Definições 3.3.4 e 3.3.5 aplicadas a \mathcal{C}_1 -tabelas.

Na Figura 2 temos duas tabelas standard e seus respectivos mosaicos.

Exemplo 4.1.7. Dadas as tabelas standard e seus mosaicos correspondentes na Figura 2, as matrizes mosaico associadas são respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

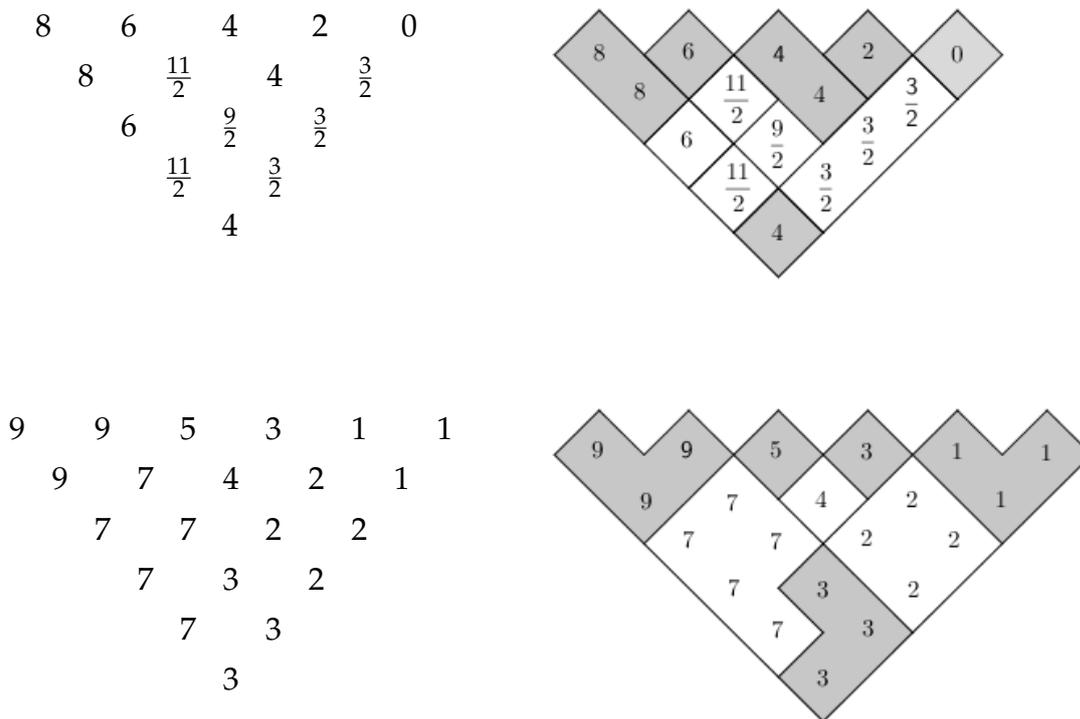


Figura 2: Mosaicos de tabelas standard

4.2 RESULTADOS IMPORTANTES E SUAS CONSEQUÊNCIAS

O seguinte corolário é um resultado importante que caracteriza os pontos nas faces s -dimensionais de um GT -polítopo (Ver Teorema 1.5, [LM04]). Assim, dado qualquer ponto em um GT -polítopo, podemos conhecer onde o ponto está contido, mais ainda, como veremos mais adiante, isto permite uma caracterização dos vértices do GT -polítopo respeito das suas entradas.

Corolário 4.2.1. (Do Teorema 3.3.8) *Suponha que \mathcal{M} é o mosaico de uma tabela standard $T(x)$. Então a dimensão do kernel de $A_{\mathcal{M}}$ é igual à dimensão da face minimal do GT -polítopo contendo $T(x)$.*

Demonstração. Tome o conjunto de relações \mathcal{C}_1 na demonstração do Teorema 3.3.8. \square

Como um corolário deste resultado, temos o seguinte critério que nos permite conhecer se um ponto de um GT -polítopo é um vértice ou não.

Corolário 4.2.2. (Ver Corolário 1.6, [LM04]) Se $T(x) \in GT(\lambda, \mu)$ tem mosaico \mathcal{M} contendo s telhas livres, então as seguintes condições são equivalentes:

- $T(x)$ é um vértice de $GT(\lambda, \mu)$, e
- $A_{\mathcal{M}}$ tem kernel trivial.

Exemplo 4.2.3. Seja $T(x)$ a tabela standard

$$\begin{array}{ccccc} 8 & 6 & 4 & 2 & 0 \\ & 8 & \frac{11}{2} & 4 & \frac{3}{2} \\ & & 6 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ & & & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} \\ & & & & 4 \end{array}$$

da Figura 2, com matriz mosaico

$$A_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma base do $\ker A_{\mathcal{M}}$ é dada por

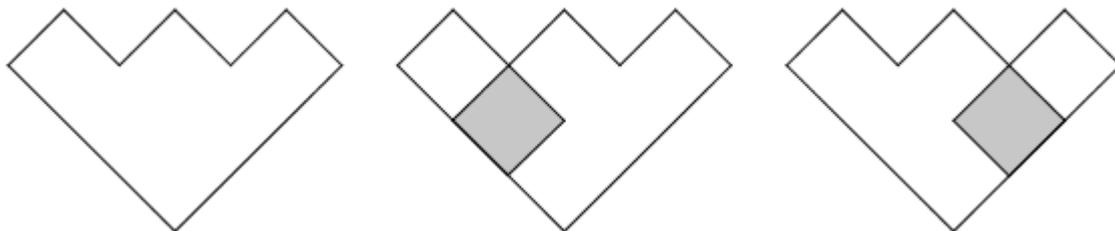
$$(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}) = \left\{ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \right\}.$$

Assim, $T(x)$ se encontra em uma face de dimensão 2 de $GT(\lambda, \mu)$, onde $\lambda = (6, 5, 3, 2, 0)$ e $\mu = (4, 1, 4, 5, 2)$.

Em [LM04] é estudada a conjectura de Berenstein e Kirillov: "Todos os vértices de um GT -polítopo $GT(\lambda, \mu) \subset X_n$ tem entradas inteiras", e é mostrado que para $n \leq 4$ a conjectura é válida, mas existem contra-exemplos para $n \geq 5$. A seguir apresentamos uma nova demonstração para o caso $n \leq 4$ e os detalhes da construção de contra-exemplos para $n \geq 5$.

Proposição 4.2.4. Quando $n \leq 4$, cada vértice de um GT -polítopo em X_n tem entradas inteiras.

Demonstração. Para o caso $n \leq 2$ não temos nada que provar. Vamos ver o caso $n = 3$. Seja $T(x) \in X_3$ um vértice. Pelo Corolário 4.2.2, $A_{\mathcal{M}}$ tem kernel trivial, ou seja, $A_{\mathcal{M}} = (1)$. Isto acontece se o mosaico M é da forma



Isto é, quando não tem telhas livres ou tem uma única telha livre na posição $(2, 1)$ ou $(2, 2)$. As demais são telhas associadas à linha superior ou inferior da tabela e portanto suas entradas são inteiros maiores ou iguais que zero. No caso em que não temos telhas livres o resultado é óbvio. Para os outros casos vamos fazer a soma do μ_2 de onde obtemos que

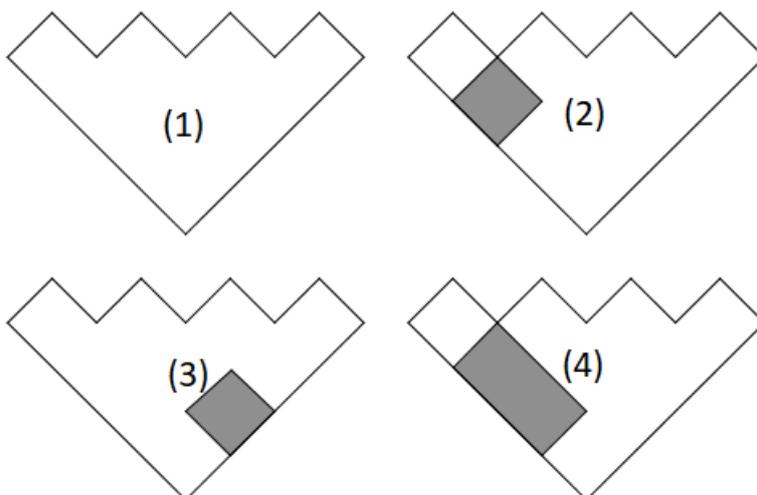
$$x_{21} = \mu_2 - x_{22} + x_{11} \quad \text{ou} \quad x_{22} = \mu_2 - x_{21} + x_{11}$$

Assim, temos que as entradas para qualquer vértice $T(x) \in X_3$ são inteiras.

Vamos ver o caso $n = 4$. Seja $T(x) \in X_4$ um vértice. Pelo Corolário 4.2.2, $A_{\mathcal{M}}$ tem kernel trivial. Assim, quando $A_{\mathcal{M}}$ é uma matriz 2×1 suas únicas possibilidades são:

$$A_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Isto acontece se o mosaico M é por exemplo da forma (2), (3), (4)



Para $T(x)$ com mosaico (1) não temos nada a provar. Para $T(x)$ com mosaico (2) temos que

$$\mu_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} - x_{21} - x_{22},$$

de onde obtemos que

$$x_{31} = \mu_3 - x_{32} - x_{33} + x_{21} + x_{22}.$$

Assim, temos que todas as entradas em vértices com mosaico (2) são inteiros. Para vértices com mosaicos (3) ou (4) temos que

$$\mu_2 = x_{21} + x_{22} - x_{11},$$

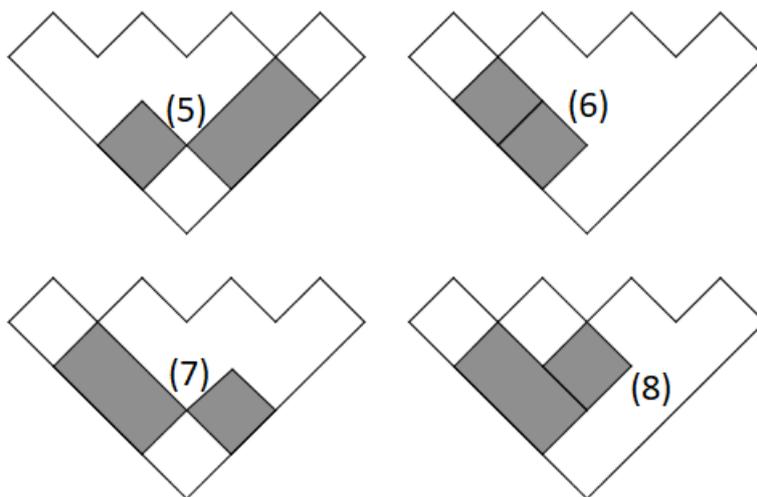
de onde se obtém que

$$x_{22} = \mu_2 - x_{21} + x_{11} \text{ ou } x_{21} = \mu_2 - x_{22} + x_{11}$$

respetivamente. Assim, temos que todas as entradas em $T(x)$ com mosaico (3) ou (4) são inteiros. Agora, se $A_{\mathcal{M}}$ é uma matriz 2×2 suas únicas possibilidades são:

$$A_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Isto acontece se o mosaico M é por exemplo da forma (5), (6), (7), (8) respetivamente.



Para vértices com mosaico (5), (7) ou (8) temos que

$$\mu_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} - x_{21} - x_{22},$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned}
 &x_{21} = -\mu_3 + x_{31} + x_{32} + x_{33} - x_{22} \\
 \text{ou} \quad &x_{22} = -\mu_3 + x_{31} + x_{32} + x_{33} - x_{21} \\
 \text{ou} \quad &x_{32} = \mu_3 - x_{31} - x_{33} + x_{21} + x_{22}.
 \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$x_{21} = -\mu_3 + x_{31} + x_{32} \quad \text{ou} \quad x_{22} = -\mu_3 + x_{32} + x_{33} \quad \text{ou} \quad x_{32} = \mu_3 - x_{33} + x_{22}$$

respetivamente. Para provar que as entradas que faltam são inteiros basta aplicar o mesmo procedimento que para vértices como mosaico (4). Para o caso em que $T(x)$ tem mosaico (6) basta aplicar primeiro o procedimento para vértices com mosaico (3) e logo para vértices como mosaico (2). Logo, qualquer vértice em um GT -polítopo em X_n com $n \leq 4$ tem entradas inteiras. \square

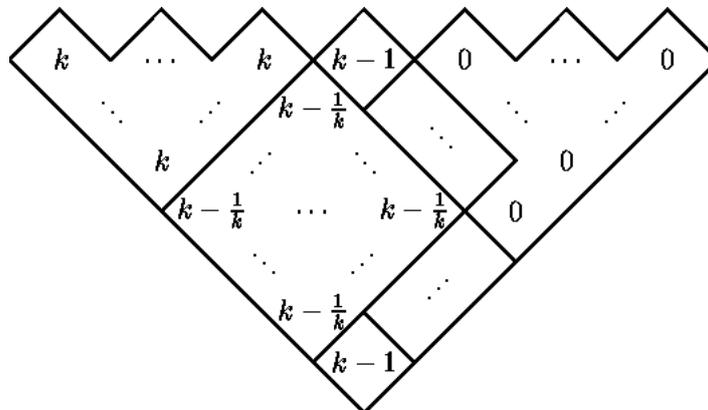
A seguinte proposição (Ver Prop. 2.4, [LM04]) da contra-exemplos para a conjectura de Berenstein-Kirillov.

Proposição 4.2.5. *Para um inteiro positivo $k \geq 2$, seja $\lambda = (k^k, k - 1, 0^k)$ e $\mu = ((k - 1)^{k+1}, 1^k)$, então um vértice de $GT(\lambda, \mu) \subset X_{2k+1}$ contem entradas com denominador k .*

Demonstração. Definimos $x^{(k)} \in X_{2k+1}$ por

$$x_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \frac{(k-i+1)(k-1)}{k} & \text{se } 1 \leq j = i \leq k+1, \\ k - \frac{1}{k} & \text{se } 1 \leq j < i \leq k+1, \\ k & \text{se } k+1 < i \leq 2k+1 \text{ e } 1 \leq j < i-k, \\ k - \frac{1}{k} & \text{se } k+1 < i \leq 2k+1 \text{ e } i-k \leq j \leq k, \\ \frac{(i-k-1)(k-1)}{k} & \text{se } k+1 < i \leq 2k+1 \text{ e } j = k+1, \\ 0 & \text{se } k+1 < i \leq 2k+1 \text{ e } k+1 < j \leq 2k+1. \end{cases}$$

Assim, temos que o mosaico dessa tabela é



donde



são em total $2(k-2)$ telhas livres, cada uma delas associada a um a (i, j) diferente. Agora vamos mostrar que de fato $x^{(k)}$ é uma tabela standard e um vértice de $GT(\lambda, \mu)$. É claro pela definição de $x^{(k)}$ que os $x_{ij}^{(k)} \geq 0$.

Além disso, com o mosaico mostrado acima, temos que $x_{i+1,j}^{(k)} \geq x_{ij}^{(k)} \geq x_{i+1,j+1}^{(k)}$ para a maioria das entradas, só vamos verificar para aquelas telhas que não tem um valor fixo, isto é, quando $1 \leq j = i \leq k+1$ e $k+1 < i \leq 2k$ e $j = k+1$.

- $1 \leq j = i \leq k+1$

Se $i = j = 1$ então

$$x_{ij}^{(k)} = x_{11}^{(k)} = k-1; \quad x_{i+1,j}^{(k)} = x_{21}^{(k)} = k - \frac{1}{k} \quad e$$

$$x_{i+1,j+1}^{(k)} = x_{22}^{(k)} = \frac{(k-1)(k-1)}{k} = k-2 + \frac{1}{k},$$

logo, $x_{21}^{(k)} > x_{11}^{(k)} > x_{22}^{(k)}$.

Mais geral, se $1 \leq j = i < k+1$, temos que

$$x_{ij}^{(k)} = x_{ii}^{(k)} = \frac{(k-i+1)(k-1)}{k} = k-i + \frac{i}{k} - \frac{1}{k},$$

$$x_{i+1,j}^{(k)} = x_{i+1,i}^{(k)} = k - \frac{1}{k},$$

$$x_{i+1,j+1}^{(k)} = x_{i+1,i+1}^{(k)} = \frac{(k-i)(k-1)}{k} = k-i-1 + \frac{i}{k}.$$

Comparando as expressões, temos que

$$x_{i+1,j}^{(k)} \geq x_{ij}^{(k)} \geq x_{i+1,j+1}^{(k)}.$$

Por último, se $i = j = k+1$

$$x_{ij}^{(k)} = x_{k+1,k+1}^{(k)} = x_{i+1,j+1}^{(k)} = x_{k+2,k+2}^{(k)} = 0$$

$$x_{i+1,j}^{(k)} = x_{k+2,k+1}^{(k)} = \frac{(k+2-k-1)(k-1)}{k} = \frac{k-1}{k},$$

obtendo que $x_{k+2,k+1}^{(k)} > x_{k+1,k+1}^{(k)} = x_{k+2,k+2}^{(k)}$. Portanto, para $1 \leq j = i \leq k+1$ obtemos o requerido.

- $k+1 < i \leq 2k$ e $j = k+1$.

É claro que $x_{ij}^{(k)} \geq x_{i+1,j+1}^{(k)}$ pois neste caso $x_{i+1,j+1}^{(k)} = 0$.

Vamos provar que $x_{i+1,j}^{(k)} \geq x_{ij}^{(k)}$.

Por definição, temos que

$$x_{ij}^{(k)} = \frac{(i-k-1)(k-1)}{k} = \frac{(i-k)(k-1) - (k-1)}{k},$$

$$x_{i+1,j}^{(k)} = \frac{(i+1-k-1)(k-1)}{k} = \frac{(i-k)(k-1)}{k},$$

daqui obtemos o requerido.

Agora, vamos provar que $x_{i-1,j-1}^{(k)} \geq x_{ij}^{(k)}$. Assim, temos que $j-1 = k$ e $k+1 \leq i-1 \leq 2k$.

Se $i-1 = k+1$, temos que

$$x_{ij}^{(k)} = x_{k+2,k+1}^{(k)} = \frac{(k+2-k-1)(k-1)}{k} = \frac{k-1}{k},$$

$$x_{i-1,j-1}^{(k)} = x_{k+1,k}^{(k)} = k - \frac{1}{k},$$

logo, $x_{k+1,k}^{(k)} > x_{k+2,k+1}^{(k)}$.

Agora, se $k+1 < i-1 \leq 2k$, temos

$$x_{ij}^{(k)} = \frac{(i-k-1)(k-1)}{k} = i - k - \frac{i-1}{k},$$

$$x_{i-1,j-1}^{(k)} = x_{i-1,k}^{(k)} = k - \frac{1}{k},$$

já que $k+1 < i-1 \leq 2k$, então, $x_{i-1,j-1}^{(k)} \geq x_{ij}^{(k)}$ como precisamos. Em consequência, temos que $x^{(k)}$ é uma tabela standard.

Agora vamos verificar que $\mathbf{x}^{(k)} \in GT(\lambda, \mu)$.

Pela construção de $\mathbf{x}^{(k)}$, é claro que $\lambda = (k^k, k-1, 0^k)$. Vamos ver quais são os μ_i .

$$\mu_1 = x_{11}^{(k)} = k-1, \quad \mu_2 = x_{21}^{(k)} + x_{22}^{(k)} - x_{11}^{(k)} = k - \frac{1}{k} + \frac{k^2 - 2k + 1}{k} - (k-1) = k-1.$$

Mais geral, para $2 \leq i \leq k+1$, temos que

$$\begin{aligned} \mu_i &= (i-1) \left(k - \frac{1}{k} \right) + \frac{(k-i+1)(k-1)}{k} - \left[(i-2) \left(k - \frac{1}{k} \right) + \frac{(k-(i-1)+1)(k-1)}{k} \right] \\ &= i \left(k - \frac{1}{k} \right) - \left(k - \frac{1}{k} \right) + \frac{(k-i+1)(k-1)}{k} - i \left(k - \frac{1}{k} \right) + 2 \left(k - \frac{1}{k} \right) - \frac{(k-i+1+1)(k-1)}{k} \\ &= k - \frac{1}{k} + \frac{(k-i+1)(k-1)}{k} - \left[\frac{(k-i+1)(k-1) + (k-1)}{k} \right] \\ &= k - \frac{1}{k} + \frac{(k-i+1)(k-1)}{k} - \frac{(k-i+1)(k-1)}{k} - \frac{(k-1)}{k} = k-1. \end{aligned}$$

Portanto, $\mu_i = k-1$, para todo $1 \leq i \leq k+1$.

Agora, para $k+2 \leq i \leq 2k+1$, temos que

$$\begin{aligned} \mu_i &= (i-k-1)k + (2k+1-i) \left(k - \frac{1}{k} \right) + \frac{(i-k-1)(k-1)}{k} \\ &\quad - \left[(i-k-2)k + (2k+2-i) \left(k - \frac{1}{k} \right) + \frac{(i-k-2)(k-1)}{k} \right] \\ &= (i-k-1)k + (2k+1-i) \left(k - \frac{1}{k} \right) + \frac{(i-k-1)(k-1)}{k} \\ &\quad - (i-k-1)k + k - (2k+1-i) \left(k - \frac{1}{k} \right) - \left(k - \frac{1}{k} \right) - \frac{(i-k-1)(k-1)}{k} + \frac{(k-1)}{k} \\ &= k - \left(k - \frac{1}{k} \right) + \frac{k-1}{k} = k - k + \frac{1}{k} + 1 - \frac{1}{k} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, $\mu = ((k-1)^{k+1}, 1^k)$, ou seja, $\mathbf{x}^{(k)} \in GT(\lambda, \mu)$.

Para saber se $\mathbf{x}^{(k)}$ é um vértice, vamos ver sua matriz mosaico associada a qual é

$$A_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k-1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A_{\mathcal{M}} = (-1)^{k+1}k \neq 0$, i.e, $A_{\mathcal{M}}$ tem kernel trivial, então temos que $\mathbf{x}^{(k)}$ é um vértice de $GT(\lambda, \mu)$. \square

Observação 4.2.6. A proposição anterior da vértices em X_n , com $n \geq 5$ ímpar. Para o caso $n \geq 5$ par, considere o vértice $\mathbf{x}^{(k)} \in X_{2k+1}$ construído na proposição anterior e a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : X_{2k+1} &\rightarrow X_{2k+2} \\ \mathbf{x}^{(k)} &\mapsto \mathbf{y}^{(k)} \end{aligned}$$

onde

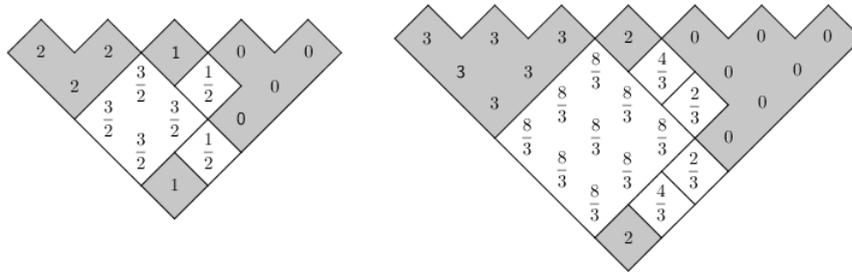
$$y_{ij}^{(k)} = \begin{cases} x_{i-1,j}^{(k)} & \text{se } 1 \leq j < i \leq 2k+2, \\ 0 & \text{se } 1 \leq i = j \leq 2k+2. \end{cases}$$

Assim definida, a tabela $\mathbf{y}^{(k)}$ é standard e esta contida em $GT(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ com $\tilde{\lambda} = (k^k, k-1, 0^{k+1})$ e $\tilde{\mu} = (0, (k-1)^{k+1}, 1^k)$. Além disso, sua matriz mosaico associada é dada por

$$A_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & k-1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente, $\det A_{\mathcal{M}} \neq 0$, ou seja, $A_{\mathcal{M}}$ tem kernel trivial, portanto $y^{(k)}$ é um vértice em X_{2k+2} .

Exemplos 4.2.7. Para $k = 2$ e $k = 3$, temos que $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ tem mosaicos respectivos dados na seguinte figura.



Suas matrizes mosaico respectivas são

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essas matrizes tem kernel trivial, portanto $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ são vértices com entradas racionais de polítopos em X_5 e X_7 respectivamente.

BIBLIOGRAFIA

- [FRZ19] Futorny V., Ramírez L.E, Zhang J., *Combinatorial construction of Gelfand-Tsetlin modules for $\mathfrak{gl}(n)$* . Advances in Mathematics, Vol. 343 (2019), 681 – 711.
- [GT50] Gelfand I., Tsetlin M., *Finite dimensional representations of the group of unimodular matrices*. Doklady Akad. Nauk USSR 71(1950), 825 – 828.
- [Hu72] Humphreys J.E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer Verlag, New York, 1972.
- [Hu08] Humphreys J.E., *Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category O*. American Mathematical Society, Providence, RI (2008).
- [LM04] De Loera J.A. and McAllister T.B., *Vertices of Gelfand-Tsetlin Polytopes*. Discrete & Computational Geometry, 2004.
- [Maz10] Mazorchuk V., *Lectures on $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -modules*. Imperial College Press, London, 2010.
- [Maz03] Mazorchuk V., *Quantum deformation and tableaux realization of simple dense $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ -modules*. Journal of Algebra and Its Applications, 2003.
- [Mol06] Molev A., *Gelfand-Tsetlin bases for classical Lie algebras*. Handbook of Algebra, Vol. 4, (M.Hazewinkel, Ed.), Elsevier, 2006.
- [SM10] San Martin, L.A.B., *Álgebras de Lie*. Editora de Unicamp, 2010.