



TONE RAMOS REIS SANTANA

O Problema Isoperimétrico para Espaços de Lens

Santo André, 2020



Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Tone Ramos Reis Santana

O Problema Isoperimétrico para Espaços de Lens

Orientador: Prof. Dr. Stefano Nardulli

Coorientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO TONE RAMOS REIS SANTANA,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. STEFANO NARDULLI.

Santo André, 2020

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Reis Santana, Tone Ramos

O Problema Isoperimétrico para Espaços de Lens / Tone Ramos
Reis Santana. — 2020.

68 fls.

Orientador: Stefano Nardulli

Coorientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa
de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2020.

1. Problema Isoperimétrico. 2. Variedades Riemannianas. 3.
Espaços de Lens. I. Nardulli, Stefano. II. Fabiano da Silva, Márcio.
III. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020. IV. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) orientador(a).

Santo André/ SP

13 de março de 2020

Assinatura do(a) autor(a):

Tereza Ramos Reis Santana

Assinatura do(a) orientador(a):

Márcio Fabiano da Silva



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, TONE RAMOS REIS SANTANA realizada em 18 de Fevereiro de 2020:

Prof.(a) GLAUCIO TERRA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) MARCUS ANTONIO MENDONÇA MARROCOS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) ALEXANDRE LYMBERPOULOS
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) FABIANO GUSTAVO BRAGA BRITO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) STEFANO NARDULLI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) MARCIO FABIANO DA SILVA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura



Universidade Federal do ABC

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à Maria José, Gustavo Fárias e Greisse Quintino.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe Maria da Glória, que por mais difíceis que fossem as circunstâncias, sempre me deu apoio.

Agradeço à Maria José e Gustavo Fárias pelo empenho empreendido comigo.

Agradeço imensamente à Greisse Quintino pelo companheirismo, paciência e motivação.

Agradeço também à turma do café: Denis, Diego e Michael pela amizade e pela partilha intelectual.

Agradeço ao meu orientador, Stefano Nardulli, pela paciência e por ter proporcionado momentos excepcionais no desenvolvimento deste trabalho e por ser uma excelente pessoa e professor.

Agradeço também ao meu coorientador, Márcio Fabiano, pela paciência e contribuição acadêmica fundamentais para a conclusão deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar o problema isoperimétrico nos espaços de Lens $L(p, q)$, dada por C. Viana em [Via19]. Mais precisamente, prova-se que as superfícies isoperimétricas em $L(p, q)$ são esferas geodésicas ou quocientes de toros de Clifford.

Palavras-chave: Problema Isoperimétrico, Variedade Riemanniana, Espaço de Lens.

ABSTRACT

The aim of this work is to study the isoperimetric problem in the Lens spaces $L(p, q)$ solved by C. Viana in [Via19]. More precisely, it is proved that the isoperimetric surfaces are either geodesic spheres or quotients of Clifford tori.

Keywords: Isoperimetric Problem, Riemannian Manifold, Lens Space.

CONTEÚDO

1	ASPECTOS GEOMÉTRICOS DOS ESPAÇOS DE LENS	5
1.1	Espaços de Lens	5
1.2	Orbifold	10
1.3	Toro de Clifford	12
1.4	A fibração de Hopf e os espaços de Lens	12
2	ISOPERIMETRIA E ESTABILIDADE	17
2.1	Problema Isoperimétrico Riemanniano	17
2.2	Perfil isoperimétrico e regularidade	21
2.3	Estabilidade	24
2.4	Distância de Hausdorff	26
2.5	Distância de Gromov-Hausdorff	28
2.6	Convergência de Gromov-Hausdorff	29
2.7	O caso não compacto	30
2.8	Convergência de Variedades	31
3	RESULTADOS PRINCIPAIS	35
3.1	Alguns aspectos dos espaços de Lens	35
3.2	Problema isoperimétrico em $L(p, q)$	37
4	APÊNDICE	41
4.1	Medida e dimensão de Hausdorff	41
4.2	Variedades	46
4.3	Espaço tangente e Métrica Riemanniana	48
4.4	Imersão, Mergulho e Subvariedade	52
4.5	Campos de Vetores e Colchete de Lie	53
4.6	Conexões Afins e Conexões Riemannianas	55
4.7	Curvaturas	59
4.8	Isometrias, Isometrias Locais	61
	Referência Bibliográfica	65

INTRODUÇÃO

O primeiro a empregar técnicas do cálculo integral e diferencial para obter propriedades de superfícies foi Carl Friedrich Gauss. Ele publicou, em 1828, o trabalho "General Investigations of Curved Surface", no qual descobre objetos intrínsecos da superfície, a curvatura sendo o principal deles, o resultado é hoje conhecido como o Teorema Egregium de Gauss. Até então o conceito de geometria era o estabelecido por Euclides em sua obra "Os Elementos". Com seu trabalho Gauss ajudou a responder a pergunta: o que é uma geometria? Bernhard Riemann, aluno brilhante de Gauss, demonstrou a possibilidade de haver diversas geometrias além da euclidiana. Hoje diferentes geometrias são conhecidas. Entretanto, poucos problemas geométricos são estudados em diferentes campos da geometria, isso ocorre devido a dificuldade de generalização. Nesse contexto, o problema isoperimétrico é passível de generalização, pois pode ser estudado em diferentes geometrias.

O problema isoperimétrico em sua abordagem simples consiste no seguinte:

Dado um comprimento $L > 0$, encontrar, dentre todas as curvas do plano de comprimento L , aquela que engloba a maior área.

Para esse problema existe uma versão equivalente, que consiste em:

Dada uma área $A > 0$, encontrar, dentre todas as curvas que englobam esta área, a que tem menor perímetro.

Este problema teve sua origem na Grécia Antiga, no século IX a.C. Surgiu na história da Rainha Dido, que foi apresentada na Eneida do poeta romano Virgílio.

Dido (ou Elisa) era uma princesa fenícia da cidade de Tiro, às margens do Mediterrâneo, localizada onde hoje é o Líbano. Seu irmão, o rei Pigmalião, assassinou seu marido, o grande sacerdote Arquebas, para tomar seus tesouros. Temendo sua própria morte, Dido então fugiu em um navio com um grande número de seguidores dispostos a fundar uma nova cidade, "Qart Hadash" (Cartago). No lugar escolhido para ser Cartago (norte da África, também às margens do Mediterrâneo onde hoje é a Tunísia) tentou comprar terras do rei local, para que pudessem se estabelecer. O acordo feito

com o rei foi que só teria em terras o que pudesse abranger com a pele de um boi. Dido ordenou aos seus seguidores para cortar a pele do boi em tiras tão finas quanto possível, emendar todas e englobar num semicírculo um terreno beirando o mar.

As referências históricas do problema isoperimétrico não se limitam somente a literatura. Durante a Idade Média era comum a construção de muros de proteção circulares ou semicirculares para as cidades. Como os muros eram feitos de pedras, sua construção era cara e trabalhosa, assim, ao utilizar o resultado do problema isoperimétrico, já conhecido na época, otimizava-se a área cercada, para uma quantidade fixa de material.

Segundo Blasjö [Blå05] a primeira solução do problema isoperimétrico foi exibida por Zenodorus quando demonstrou que o círculo de comprimento L tem área maior do que qualquer polígono plano de comprimento L . Esta solução apresentada por Zenodorus foi parcial, pois faltava demonstrar a existência de solução do problema isoperimétrico, que ocorreu somente em 1870 quando Weierstrass apresentou uma solução completa. Ela aparece como corolário nos estudos da teoria de “Cálculo das Variações”, sendo o problema isoperimétrico, um dos problemas abordados. Outros matemáticos, após Weierstrass obtiveram provas mais concisas do problema, como o alemão Erhard Schmidt, em 1939 que pode ser encontrada em [DC90]; uma outra demonstração proposta por Adolf Hurwitz, em 1902, fez uso essencial das séries de Fourier e pode ser encontrada em [Ara98].

O problema isoperimétrico pode ser estudado com interesses variados, por exemplo, pode ser investigado para classificar regiões isoperimétricas no espaço ou obter solução para um problema de otimização (variacional), dentre outros. Em [Via19], referência principal deste trabalho, é de interesse do autor classificar as soluções do problema isoperimétrico, isto é, além de resolver o problema o autor exibe as soluções. As perguntas que Celso Viana fez foram as seguintes: dado um inteiro positivo $t < \text{vol}(M)$, onde $\text{vol}(M)$ é o volume da variedade Riemanniana M , existe uma hipersuperfície compacta $\Sigma \subset M$ que engloba uma região Ω de volume $\text{vol}(\Omega) = t$ que tem área $A(\Sigma)$ mínima? Que objeto geométrico é essa hipersuperfície? Para responder essas perguntas, Celso Viana formulou e demonstrou o seguinte teorema: existe um inteiro não negativo p_0 tal que para todo $p \geq p_0$ e $q \geq 1$ as superfícies isoperimétricas em $L(p, q)$ são esferas geodésicas ou quocientes de toros de Clliford.

Alguns trabalhos excepcionais que contribuíram fortemente para a teoria que envolve o problema isoperimétrico e que são referências fundamentais para este trabalho, além do citado anteriormente [Via19] de Celso Viana, são: [FN14] de Abraham Munoz Flores

e Stefano Nardulli, [Pan83] de Christophe Bavard e Pierre Pansu, [Mor03a] de Frank Morgan, [Ros01] de Antonio Ros, [RR92] de Manuel Ritoré e Antonio Ros, [Gro81a] de Mikhael Gromov, [BDCE12] de João Lucas Barbosa e Manfredo Do Carmo e Jost Eschenburg, dentre outros.

Para abordarmos o teorema formulado por Celso Viana 3.3, objeto deste trabalho, apresentamos inicialmente no Capítulo 1 os aspectos geométricos dos espaços de Lens, que consistem em conceitos básicos, ou seja, apresentação dos espaços de Lens, orbifolds, toro de Clifford e fibração de Hopf. Além disso, demonstramos que o espaço de Lens $L(p, q)$ é uma variedade Riemanniana compacta. No Capítulo 2 abordamos resultados e conceitos mais técnicos da teoria, como funções de variação limitada, conjuntos de perímetro localmente finito, propriedades de perfil isoperimétrico, propriedades de regularidades, dentre outros. O Capítulo 3 é dedicado ao resultado principal 3.3 de Celso Viana, que consiste em apresentar o teorema e os resultados utilizados na demonstração. Por fim, no apêndice apresentamos a teoria de Geometria Riemanniana necessária para entender essa dissertação.

1

ASPECTOS GEOMÉTRICOS DOS ESPAÇOS DE LENS

1.1 ESPAÇOS DE LENS

Nesta seção apresentaremos uma definição dos espaços de Lens $L(p, q)$, que é construído de modo puramente algébrico, como também pode ser vista em [Kos80], referência principal nesta seção. Mostraremos aqui que $L(p, q)$ é uma variedade Riemanniana compacta, essa condição é fundamental para abordarmos o Problema Isoperimétrico em $L(p, q)$.

Para tais objetivos, consideramos a esfera S^3 dada por

$$S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$$

e o grupo aditivo $\mathbb{Z}_p$. Seja $q \in \mathbb{Z}$ fixo tal que $0 < q < p$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$. Considere também a ação de $\mathbb{Z}_p$ em S^3 dada por

$$m \bullet (z_0, z_1) = (e^{\frac{2\pi i m}{p}} z_0, e^{\frac{2\pi i q m}{p}} z_1),$$

sendo $m \in \mathbb{Z}_p$ e $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2$.

A ação definida acima é uma ação de grupo. De fato, sendo 0 o elemento neutro de $\mathbb{Z}_p$, $m, n \in \mathbb{Z}_p$, $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2$ quaisquer, temos

$$0 \bullet (z_0, z_1) = (e^{\frac{2\pi i 0}{p}} z_0, e^{\frac{2\pi i q 0}{p}} z_1) = (z_0, z_1)$$

$$\begin{aligned} m \bullet (n \bullet (z_0, z_1)) &= m \bullet (e^{\frac{2\pi i n}{p}} z_0, e^{\frac{2\pi i q n}{p}} z_1) \\ &= (e^{\frac{2\pi i m}{p}} e^{\frac{2\pi i n}{p}} z_0, e^{\frac{2\pi i q m}{p}} e^{\frac{2\pi i q n}{p}} z_1) \\ &= e^{\frac{2\pi i (m+n)}{p}} z_0, e^{\frac{2\pi i q (m+n)}{p}} z_1 \\ &= (m+n) \bullet (z_0, z_1). \end{aligned}$$

Por último, verificaremos que a ação está bem definida:

$$\overline{m_1} = \overline{m_2} \Rightarrow m_1 \cong m_2 \pmod{p} \Rightarrow p | m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\cos \left(\frac{2\pi(m_1 - m_2)}{p} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi(m_1 - m_2)}{p} \right) \right) = 1 \\ &\Rightarrow e^{\frac{2\pi i(m_1 - m_2)}{p}} = 1 \Rightarrow e^{\frac{2\pi i m_1}{p}} = e^{\frac{2\pi i m_2}{p}}. \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$e^{\frac{2\pi i q m_1}{p}} = e^{\frac{2\pi i q m_2}{p}},$$

donde concluimos que

$$m_1 \bullet (z_0, z_1) = m_2 \bullet (z_0, z_1),$$

como queríamos.

A propriedade a seguir, embora seja básica, é de extrema importância para a definição dos espaços de Lens.

Proposição 1.1. *Sejam G um grupo e X um conjunto. Uma ação ϕ de G em X define a seguinte relação de equivalência em X :*

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tal que } x = g \bullet y.$$

Demonstração. Para todo $x \in X$, temos que $x = e_G \bullet x$, de modo que a propriedade simétrica é válida. Sejam $x, y \in G$ tal que $x = g \bullet y$ para algum $g \in G$. Como G é grupo e a aplicação ϕ está definida para todo o conjunto G , temos $y = g^{-1} \bullet x$; logo, a reflexividade é satisfeita. Para concluir, supomos que $x = g \bullet y$ e $y = h \bullet z$. Então, $x = g \bullet (h \bullet z) = (gh) \bullet z$. Como gh é um elemento de G , concluimos que a relação é transitiva. Portanto, a proposição está provada. $\square$

Definição 1.2. *Seja $\phi : G \times X \longrightarrow X$ uma ação de um grupo G sobre um conjunto X e $x \in X$ um elemento qualquer, definimos a **órbita** de x , denotada por O_x ou Orbit_x , como sendo*

$$\text{Orbit}_x = \{g \bullet x : g \in G\}.$$

Analisando a classe de equivalência de x determinada pela relação de equivalência dada na Proposição 1.1, vemos que

$$\begin{aligned} [x] &= \{y \in X : y \sim x\} \\ &= \{y \in X : \exists g \in G \text{ tal que } y = g \bullet x\} \\ &= \{g \bullet x : g \in G\} = \text{Orbit}_x. \end{aligned}$$

Definição 1.3. O espaço $S^3/\mathbb{Z}_p$ com respeito à ação do grupo aditivo $\mathbb{Z}_p$ sobre S^3 , determinada pela relação de equivalência dada na Proposição 1.1, é chamado **espaço de Lens**, que é denotado por $L(p, q)$.

Ou seja, o espaço órbita $S^3/\mathbb{Z}_p$ é o espaço de Lens. Na sequência, veremos dois exemplos básicos.

1. Afirmamos que $L(1, 0) \cong S^3$. Sendo x um elemento qualquer de S^3 , observamos que sua órbita é $O_x = \{x\}$, logo, segue a afirmação.
2. Afirmamos que $L(2, 1) \cong \mathbb{RP}^3$. De fato, sendo $(z_0, z_1), (z'_0, z'_1) \in S^3$, temos que (z_0, z_1) é identificado com (z'_0, z'_1)

$$\Leftrightarrow (z'_0, z'_1) = (e^{\frac{2\pi i n}{2}} z_0, e^{\frac{2\pi i 1 \cdot n}{2}} z_1), \text{ para } n \in \mathbb{Z}_2$$

$$\Leftrightarrow (z'_0, z'_1) = (e^{\pi i n} z_0, e^{\pi i n} z_1) \text{ para } n = 0 \text{ ou } n = 1$$

$$\Leftrightarrow (z'_0, z'_1) = (z_0, z_1) \text{ ou } (z'_0, z'_1) = -(z_0, z_1), \text{ isto é, forem iguais ou antípodas em } S^3, \text{ como queríamos.}$$

Definição 1.4. Se G age no espaço topológico X e para cada $g \in G$ a aplicação $\phi_g : X \rightarrow X$ dada por $\phi_g(x) = g \bullet x$ é um homeomorfismo, então dizemos que X é um **G -espaço**.

Esta definição é útil principalmente no contexto da teoria de topologia algébrica e será de grande utilidade para concluirmos que os espaços de Lens são uma variedade topológica compacta. As definições apresentadas a seguir são importantes para obtermos tanto a estrutura topológica da variedade, como também a estrutura diferenciável.

Definição 1.5. Sendo G um grupo e X um conjunto, dizemos que G **age livremente** sobre M se $g \bullet x = x$ para algum $x \in X$, então $g = e$.

Definição 1.6. Uma ação de um grupo G sobre um conjunto M é dita **propriamente descontínua** quando ela satisfaz a seguinte propriedade: "para todo $x \in M$, existe $U \subset M$, vizinhança de x , tal que $U \cap g \bullet (U) = \emptyset$ para todo $g \neq 0$ ", onde $g \bullet (U) = \{g \bullet y : y \in U\}$.

Teorema 1.7. Se G é um grupo finito agindo livremente em um G -espaço Hausdorff X então a ação de G em X é propriamente descontínua.

Demonstração. Seja $G = \{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ um grupo finito com elemento neutro $e = g_0$. Como X é Hausdorff, existem vizinhanças abertas $U_0, U_1, \dots, U_n$ de $g_0 \bullet x, g_1 \bullet x, \dots, g_n \bullet x$, respectivamente, com $U_0 \cap U_j = \emptyset$ para $j = 1, 2, \dots, n$. Tomemos $U = \bigcap_{j=0}^n g_j^{-1} \bullet U_j$, que corresponde à intersecção finita das imagens inversas dos abertos U_j pelo homeomorfismo $\phi_{g_j^{-1}}$ dado na Definição 1.4. Dessa forma, U é uma vizinhança aberta de x .

Agora, notemos que $g_i \bullet U = \bigcap_{j=0}^n g_i \bullet (g_j^{-1} \bullet U_j) \subset U_i$ e

$$\begin{aligned} g_i \bullet U \cap g_j \bullet U &= g_j \bullet \left((g_j^{-1} g_i \bullet U) \cap U \right) \\ &= g_j \bullet (g_k \bullet U \cap U) \quad (\text{para algum } k) \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

pois, $g_k \bullet U_k \subset U_k$ e $U \subset U_0$. Portanto, a ação de G em X é propriamente descontínua. $\square$

Proposição 1.8. *Se X é um G -espaço compacto e Hausdorff com G finito então X/G é compacto e Hausdorff.*

Demonstração. Seja a aplicação $\rho : X \rightarrow X/G$ dada por $\rho(x) = [x]$, ou seja, a aplicação projeção. Como X/G é o espaço quociente munido da topologia quociente, então ρ é automaticamente contínua. Assim, como M é compacto e a aplicação quociente ρ é sobrejetora, temos que $\rho(M) = M/G$ é compacto.

Agora, mostraremos que M/G é Hausdorff. Considere $[x_1], [x_2] \in M/G$ e $[x_1] \neq [x_2]$. Então, $g_1 \bullet x_1 \neq g_2 \bullet x_2$ para todos $g_1, g_2 \in G$; assim, $\rho^{-1}([x_1]) = \{g \bullet x_1 : g \in G\}$ e $\rho^{-1}([x_2]) = \{g \bullet x_2 : g \in G\}$ são subconjuntos disjuntos e finitos de M . Como M é Hausdorff, existem abertos U_1 e U_2 disjuntos tais que $\rho^{-1}([x_1]) \subset U_1$ e $\rho^{-1}([x_2]) \subset U_2$. Mas, $\rho^{-1}\rho(M - U_i) = \bigcup_{g \in G} g \bullet (M - U_i) = \bigcup_{g \in G} \phi_g(M - U_i)$, então $\rho^{-1}(\rho(M - U_i))$ é a união finita de conjuntos fechados para $i = 1, 2$, pois ϕ_g é um homeomorfismo para todo $g \in G$, logo é fechado em M . Dessa forma, $\rho(M - U_i)$ é fechado em M/G e $W_i = M/G - \rho(M - U_i)$ é um conjunto aberto em M/G , para $i = 1, 2$. Portanto, $\rho^{-1}([x_i]) \subset U_i \Rightarrow [x_i] \notin \rho(M - U_i) \Rightarrow [x_i] \in W_i$ para $i = 1, 2$.

Afirmamos que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. De fato,

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= (M/G - \rho(M - U_1)) \cap (M/G - \rho(M - U_2)) \\ &= M/G - (\rho(M - U_1) \cap \rho(M - U_2)) \\ &= M/G - (\rho(M - (U_1 \cap U_2))) \\ &= M/G - \rho(M) = \emptyset. \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado. $\square$

Teorema 1.9. *Se G é um grupo finito agindo livremente em um G -espaço M , onde M é uma n -variedade compacta, então M/G é uma n -variedade compacta.*

Demonstração. Como M é uma n -variedade, então é Hausdorff, assim pelo resultado anterior, concluímos que M/G é Hausdorff e compacto.

Mostraremos que para cada ponto de M/G existe um aberto que é homeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^n$. Para isso, seja $G = \{g_0 = e, g_1, \dots, g_m\}$. Dado $[x] \in M/G$ temos que $x \in M$ com $\rho(x) = [x]$. Como G age livremente em X , temos que $g_m \bullet x = x \Rightarrow g_m = e \Rightarrow m = 0$. Podemos usar a propriedade Hausdorff e obter abertos $U_0, \dots, U_m$ de $g_0 \bullet x, g_1 \bullet x, \dots, g_m \bullet x$, respectivamente, com $U_0 \cap U_i = \emptyset$ para $i = 1, \dots, m$. Então $x \in \bigcap_{i=0}^m \phi_{g_i}^{-1}(U_i) = U$ é um aberto de M . Como M é uma n -variedade então x sempre tem alguma vizinhança aberta W_x em M tal que W_x é homeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^n$, com $h : W_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ sendo o homeomorfismo. Assim, $W_x \cap U$ é aberto em W_x e $h(W_x \cap U)$ é aberto de $\mathbb{R}^n$. Além disso, $h(x) \in h(W_x \cap U)$, logo existe $\epsilon > 0$ tal que $N_\epsilon(h(x)) \subset h(W_x \cap U)$. Dessa forma, temos que

$$V_x = h^{-1}(N_\epsilon(h(x))) \cong N_\epsilon(h(x)),$$

onde $N_\epsilon(h(x))$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e V_x é uma vizinhança aberta de x em U .

Afirmamos que $(\rho|_{V_x}) : V_x \rightarrow \rho|_{V_x}(V_x)$ é um homeomorfismo. Primeiro mostraremos a injetividade,

$$(\rho|_{V_x})(x_1) = (\rho|_{V_x})(x_2) \Rightarrow [x_1] = [x_2],$$

então existe $g_k \in G$ tal que $x_1 = g_k \bullet x_2$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in V_x \subset U &\Rightarrow x_1 \in g_0^{-1} \bullet U_0 = U_0; \quad x_2 \in g_k^{-1} \bullet U_k \\ (x_1 = g_k \bullet x_2 \Rightarrow x_2 = g_k^{-1} \bullet x_1, \quad x_2 \in g_k^{-1} \bullet U_k &\Rightarrow x_1 \in U_k), \end{aligned}$$

então $x_1 = g_k \bullet x_2 \in U_0 \cap U_k$. Como $U_0 \cap U_k = \emptyset$, para $k = 1, \dots, m$, isso é possível somente se $g_k = e$, isto é, $x_1 = x_2$. A sobrejetividade de $(\rho|_{V_x})$ segue por definição.

Note que $(\rho|_{V_x})$ é contínua, pois é a restrição de uma função contínua $\rho : X \rightarrow X/G$. Como X é um G -espaço, a projeção canônica $\rho : X \rightarrow X/G$ é uma aplicação aberta.

Assim, ρ restrita a uma conjunto aberto é uma aplicação aberta. Como $(\rho|_{V_x})$ é uma aplicação contínua e aberta, concluímos que é um homeomorfismo. Portanto, $\rho(V_x) \cong V_x \cong N_\epsilon(h(x))$. $\square$

Nosso próximo objetivo é obter uma estrutura diferenciável em M/G (ou $M/\sim$). Como a ação é propriamente descontínua, consequência do fato da ação ser livre e do teorema 1.7, temos que para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que

$g(U) \cap U = \emptyset$, para todo $g \neq e$. Seja uma parametrização $x : V \rightarrow x(V) \subset U$ ao redor de p . Temos que $\pi|_U$ é injetiva, logo, $\pi \circ x : V \rightarrow M/G$ é injetiva. Agora, consideraremos $A = \{x_\alpha, V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ o subconjunto do atlas maximal de M , onde I percorre parametrizações x como a que foi definida anteriormente. Por esta construção, temos que estas funções tornam o conjunto $B = (\pi \circ x_\alpha, V_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família cujas imagens das aplicações $\pi \circ x_\alpha$ cobrem M/G . Sendo $\alpha, \gamma \in I$ e fazendo a composição das funções diferenciáveis $(\pi \circ x_\alpha)^{-1}$ e $\pi \circ x_\beta$, temos $x_\alpha^{-1} \circ \pi^{-1} \circ \pi \circ x_\beta = x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ claramente diferenciável. Portanto, temos uma estrutura diferenciável em M/G .

Segue do Teorema de Heine-Borel que S^3 é compacta. Sabemos que S^3 é uma variedade. O conjunto $\mathbb{Z}_p$ é um grupo finito agindo livremente em S^3 ($\mathbb{Z}_p$ -espaço), logo, pelo teorema 1.9, concluímos que $L(p, q)$ é uma 3- variedade compacta. Pela estrutura diferenciável que é possível colocar em um espaço do tipo M/G , podemos afirmar que o espaço $L(p, q)$ é uma variedade diferenciável compacta.

O lema que apresentaremos a seguir é importante para a formulação do Teorema de Celso Viana.

Lema 1.10. *São homeomorfos os seguintes espaços de Lens:*

$$L(p, q) \cong L(p, -q) \cong L(-p, q) \cong L(-p, -q).$$

Demonstração. Claramente, $\frac{2\pi(-q)}{-p} = \frac{2\pi q}{p}$ e $\frac{2\pi(-q)}{p} = \frac{2\pi q}{-p}$. Desse modo, $L(-p, -q) = L(p, q)$ e $L(-p, q) = L(p, -q)$. É possível escolhermos um hiperplano Π adequadamente de modo que o traço de $L(p, -q)$ seja a imagem pela reflexão em relação a Π do traço de $L(p, q)$, isto é, de modo que $\frac{2\pi q}{p}$ em $L(p, q)$ corresponda a $-\frac{2\pi q}{p} = \frac{2\pi(-q)}{p}$ em $L(p, -q)$. Assim, $L(p, q) \cong L(p, -q)$. Portanto, segue o resultado. $\square$

1.2 ORBIFOLD

Esta seção é dedicada ao estudo das orbifolds que pode ser vistas como uma generalização do conceito de variedades. As referências desta seção são [ALRo7] e [CJ19].

Definição 1.11. *Uma carta orbifold de dimensão n em um espaço topológico X é uma tripla $(\bar{U}, G, \pi)$, onde*

1. $\bar{U}$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$;

2. G é um grupo finito de homeomorfismos de $\bar{U}$;
3. $\pi : \bar{U} \rightarrow X$ é uma aplicação definida por $\pi \circ \rho$, onde $\rho : \bar{U} \rightarrow \bar{U}/G$ é a projeção canônica (ou mapa de órbitas) e $\bar{\pi} : \bar{U}/G \rightarrow X$ é uma aplicação que induz um homeomorfismo de $\bar{U}/G$ sobre um aberto U de X .

Sejam $(\bar{U}_\alpha, G_\alpha, \pi_\alpha)$ e $(\bar{U}_\beta, G_\beta, \pi_\beta)$ duas cartas orbifolds. Um *mergulho* $\lambda : (\bar{U}_\alpha, G_\alpha, \pi_\alpha) \rightarrow (\bar{U}_\beta, G_\beta, \pi_\beta)$ entre duas cartas orbifolds é um mergulho suave $\lambda : \bar{U}_\alpha \rightarrow \bar{U}_\beta$ tal que $\pi_\beta \circ \lambda = \pi_\alpha$.

Novamente, sejam $(\bar{U}_\alpha, G_\alpha, \pi_\alpha)$ e $(\bar{U}_\beta, G_\beta, \pi_\beta)$ duas cartas orbifolds e $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, onde $U_\alpha = \pi(\bar{U}_\alpha)$ e $U_\beta = \pi(\bar{U}_\beta)$. Dizemos que estas duas cartas são *compatíveis* se existem uma vizinhança aberta $V \subset U_\alpha \cap U_\beta$ de x e uma carta orbifold $(\bar{V}, H, \phi)$ com $\phi(\bar{V}) = V$ para as quais existem dois mergulhos $\lambda_i : (\bar{V}, H, \phi) \rightarrow (\bar{U}_i, G_i, \pi_i)$ com $i \in \{\alpha, \beta\}$.

Definição 1.12. Um **atlas orbifold** de dimensão n é uma família $B = \{(\bar{U}_\alpha, G_\alpha, \pi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de cartas orbifolds n dimensionais compatíveis que cobrem X .

Definição 1.13. Uma **orbifold** O de dimensão n é um espaço Hausdorff paracompacto X_O com um atlas orbifold B_O de dimensão n .

Observamos que uma variedade (topológica) nada mais é que uma orbifold em que cada G_α é o grupo trivial, de modo que $\bar{U}_\alpha$ e U_α são homeomorfas.

Definição 1.14. Seja M uma variedade diferenciável munida de uma ação de um grupo G . Dizemos que um aberto $S \subset M$ é G -**estável** se para todo $g \in G$, tem-se $g \bullet S = S$ ou $(g \bullet S) \cap S = \emptyset$.

Observamos que se S é G -estável, vemos que $G_S := \{g \in G \mid g \bullet S = S\}$ é um subgrupo de G .

Proposição 1.15. Se M é uma variedade e G é um grupo com uma ação propriamente descontínua em M , então M/G tem a estrutura de uma orbifold.

Demonstração. Ver [CJ19] capítulo 1 seção 1.5. □

1.3 TORO DE CLIFFORD

Sendo r_1, r_2 números reais positivos, consideremos em $\mathbb{R}^2$ as seguintes circunferências $S_1(r_1)$ e $S_2(r_2)$ de raios r_1 e r_2 , respectivamente,

$$\begin{aligned} S_1(r_1) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = r_1^2\} \\ S_2(r_2) &= \{(x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2 : x_3^2 + x_4^2 = r_2^2\}. \end{aligned}$$

Definimos o *Toro de Clifford* em $\mathbb{R}^4$ como sendo o produto cartesiano de $S_1(r_1)$ e $S_2(r_2)$:

$$S_1(r_1) \times S_2(r_2) := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r_1^2 + r_2^2\}.$$

Quando $r_1 = r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, o Toro de Clifford

$$S_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

é um subconjunto da esfera S^3 de raio 1.

Uma parametrização deste Toro de Clifford é

$$S_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

Quando $r_2 = \sqrt{1 - r_1^2}$, como no caso anterior, o subconjunto de $S^3(1) = S^3$ dado por $S_1(r_1) \times S_2(r_2)$ é chamado de *Toro plano (flat, ou seja, tem curvatura seccional k constante e $k = 0$)*. Em vista do Teorema da Rigidez [Che19, p.49], podemos apresentar uma definição equivalente para os toros (de Clifford) planos, como a seguir:

Definição 1.16. Para cada $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, definimos o **Toro de Clifford** T_θ como sendo o conjunto

$$T_\theta = S^1(\cos(\theta)) \times S^1(\sin(\theta)) \subset S^3.$$

Observe que para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $T_{\frac{\pi}{4}}$ é o único T_θ que é uma superfície mínima em S^3 .

1.4 A FIBRAÇÃO DE HOPF E OS ESPAÇOS DE LENS

Agora, apresentaremos a fibração de Hopf de S^3 que foi definida e estudada por Heinz Hopf em 1931. Na sequência, apresentaremos alguns aspectos importantes da fibração de Hopf nos espaços de Lens.

Vendo $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ como subconjunto de $\mathbb{C}^2$ e identificando o espaço projetivo complexo com a esfera S^2 como

$$[z, w] \in \mathbb{C}P^1 \rightarrow \frac{1}{|z|^2 + |w|^2} (|z|^2 - |w|^2, 2z\bar{w}) \in S^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C},$$

podemos definir a fibração de Hopf de S^3 para $S^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ como a seguir.

Definição 1.17. *A fibração de Hopf é a aplicação $\pi : S^3 \rightarrow S^2$, restrição da projeção $\mathbb{C}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1$, dada por*

$$\pi(z, w) = (|z|^2 - |w|^2, 2z\bar{w}).$$

Como foi observado por F. Wilhelm, a fibração de Hopf também pode ser definida como sendo a aplicação $h : S^3(1) \rightarrow S^2(\frac{1}{2})$ dada por

$$h(z, w) = \left(\frac{1}{2} (|z|^2 - |w|^2), z\bar{w} \right).$$

Observamos que o conjunto $Im(h) \subset S^2(\frac{1}{2})$. De fato,

$$\begin{aligned} |h(z, w)|^2 &= \left| \left(\frac{1}{2} (|z|^2 - |w|^2), z\bar{w} \right) \right|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} (|z|^2 - |w|^2) \right)^2 + |z\bar{w}|^2 \\ &= \frac{1}{4} (|z|^4 - 2|z|^2|w|^2 + |w|^4) + |z|^2|w|^2 \\ &= \frac{1}{4} (|z|^4 + 2|z|^2|w|^2 + |w|^4) \\ &= \frac{1}{4} (|z|^2 + |w|^2)^2 = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

pois, $(z, w) \in S^3(1)$. Portanto, $|h(z, w)| = \frac{1}{2}$. Concluimos que $h(S^3(1)) \subset S^2(\frac{1}{2})$. Vamos mostrar que a fibração de Hopf é uma submersão Riemanniana, ou seja, h é uma submersão e para cada $(z, w) \in S^3(1)$ a diferencial $Dh|_{(z, w)} : T_{(z, w)}S^3(1) \rightarrow T_{h((z, w))}S^2(\frac{1}{2})$ é uma isometria linear. Para isso, observamos que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda(-\bar{w}, \bar{z})$ é um vetor tangente a $S^3(1)$ no ponto (z, w) e está no (hiper)plano $(z, w) + \lambda(-\bar{w}, \bar{z})$. Desse modo, podemos restringir h ao (hiper)plano $(z, w) + \lambda(-\bar{w}, \bar{z})$ como segue

$$\begin{aligned} h(z - \lambda\bar{w}, w + \lambda\bar{z}) &= \left(\frac{1}{2} (|w + \lambda\bar{z}|^2 - |z - \lambda\bar{w}|^2), (z - \lambda\bar{w})(\overline{w + \lambda\bar{z}}) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} (|w|^2 + \bar{\lambda}wz + \overline{\lambda z w} + |\lambda|^2|z|^2) - (|z|^2 - \bar{\lambda}z w - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overline{\lambda zw} + |\lambda|^2 |w|^2), (z - \lambda \bar{w})(\bar{w} + \bar{\lambda} z))) \\
& = \left(\frac{1}{2}(|w|^2 - |z|^2 + 2(\bar{\lambda} zw + \overline{\lambda zw}) + |\lambda|^2(|z|^2 - |w|^2), \right. \\
& \quad \left. z\bar{w} + \bar{\lambda} z^2 - \lambda \bar{w}^2 - |\lambda|^2 \bar{w} z)\right) \\
& = (2\operatorname{Re}(\bar{\lambda} zw) + \frac{1}{2}(|\lambda|^2 - 1)(|z|^2 - |w|^2), z\bar{w} + \bar{\lambda} z^2 - \lambda \bar{w}^2 - |\lambda|^2 \bar{w} z) \\
& = (2\operatorname{Re}(\bar{\lambda} zw), \bar{\lambda} z^2 - \lambda \bar{w}^2) + (1 - |\lambda|^2) \left(\frac{1}{2}(|w|^2 - |z|^2), z\bar{w}\right) \\
& = (2\operatorname{Re}(\bar{\lambda} zw), \bar{\lambda} z^2 - \lambda \bar{w}^2) + (1 - |\lambda|^2) h(z, w).
\end{aligned}$$

Observamos que o termo que multiplica $h(z, w)$ na expressão acima é constante em λ . Assim, se c é uma curva qualquer no plano $(z, w) + \lambda(-\bar{w}, \bar{z})$, a diferencial Dh calculada num ponto (z, w) de c , na direção do vetor tangente $(-\lambda \bar{w}, \lambda \bar{z})$ a c em (z, w) é dada por

$$Dh|_{(z,w)}(-\lambda \bar{w}, \lambda \bar{z}) = (2\operatorname{Re}(\bar{\lambda} zw), \bar{\lambda} z^2 - \lambda \bar{w}^2).$$

Para terminarmos, afirmamos que $Dh|_{(z,w)}$ é a isometria canônica para todo $(z, w) \in T_{(z,w)}\mathbb{S}^3(1)$. De fato,

$$\begin{aligned}
|Dh|_{(z,w)}(-\lambda \bar{w}, \lambda \bar{z})|^2 &= |2\operatorname{Re}(\bar{\lambda} zw)|^2 + |\bar{\lambda} z^2 - \lambda \bar{w}^2|^2 \\
&= |\bar{\lambda} zw + \overline{\lambda zw}|^2 + |\bar{\lambda} z^2 - \lambda \bar{w}^2|^2 \\
&= (\bar{\lambda} zw + \lambda \bar{z} \bar{w})(\lambda \bar{z} \bar{w} + \bar{\lambda} zw) + (\bar{\lambda} z^2 - \lambda \bar{w}^2)(\lambda \bar{z}^2 - \bar{\lambda} \bar{w}^2) \\
&= 2|\lambda|^2 |z|^2 |w|^2 + \bar{\lambda}^2 z^2 w^2 + \lambda^2 \bar{z}^2 \bar{w}^2 + (|\lambda|^2 |z|^4 - \bar{\lambda}^2 z^2 w^2 - \lambda^2 \bar{z}^2 \bar{w}^2 + |\lambda|^2 |w|^4) \\
&= |\lambda|^2 (|z|^2 + |w|^2)^2 = |\lambda|^2 \\
&= |\lambda|^2 (|\bar{w}|^2 + |\bar{z}|^2)^2 \\
&= |\lambda(\bar{w}, \bar{z})|^2 \\
&= |(-\lambda \bar{w}, \lambda \bar{z})|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, segue a afirmação.

Podemos estender a fibração de Hopf para os espaços de Lens. Para isso, consideramos o grupo cíclico $\Gamma_p = \left\langle e^{\frac{2\pi(q-1)}{p}} \right\rangle$ agindo em $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ da seguinte maneira:

$$e^{\frac{2\pi(q-1)}{p}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \lambda \rightarrow e^{\frac{2\pi(q-1)}{p}} \cdot \lambda,$$

de modo que o ponto $\{\infty\}$ é levado no ponto $\{\infty\}$ por esta ação. Por conveniência de escrita, omitimos $\{\infty\}$. Sabemos que $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ são espaços topológicos e que a aplicação de Hopf $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ é contínua.

Consideremos a relação de equivalência $\sim$ em S^3 que usamos para definir os espaços de Lens $L(p, q)$. Ou seja, se z_1, z_2, w_1, w_2 são números complexos, temos que $(z_1, w_1) \sim (z_2, w_2) \Leftrightarrow \exists g_1, g_2 \in \mathbb{Z}_p$ tais que

$$e^{\frac{2\pi i g_1}{p}} z_1 = z_2, \quad e^{\frac{2\pi i g_2}{p}} w_1 = w_2.$$

Neste caso, observamos que a aplicação de Hopf está bem definida, pois

$$\begin{aligned} h(z_2, w_2) &= \left(\frac{1}{2} (|w_2|^2 - |z_2|^2), z_2 \bar{w}_2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(\left| e^{\frac{2\pi i g_2}{p}} w_1 \right|^2 - \left| e^{\frac{2\pi i g_1}{p}} z_1 \right|^2 \right), e^{\frac{2\pi i g_1}{p}} z_1 e^{\frac{2\pi i g_2}{p}} \bar{w}_1 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(\left| e^{\frac{2\pi i g_2}{p}} \right|^2 |w_1|^2 - \left| e^{\frac{2\pi i g_1}{p}} \right|^2 |z_1|^2 \right), e^{\frac{2\pi i g_1}{p}} z_1 e^{\frac{2\pi i g_2}{p}} \bar{w}_1 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} (|w_1|^2 - |z_1|^2), z_1 \bar{w}_1 \right) = h(z_1, w_1). \end{aligned}$$

Faremos uso do seguinte resultado clássico de Topologia, que envolve a topologia quociente.

Teorema 1.18. *Sejam M e N espaços topológicos e $f : M \rightarrow N$ uma função contínua. Seja também $\sim$ uma relação de equivalência em M . Existe uma função contínua $g : M/\sim \rightarrow N$ se, e somente se, $x \sim y$ implica que $f(x) = f(y)$.*

Concluimos que existe uma função contínua $g : L(p, q) \rightarrow S^2(\frac{1}{2})$ tal que a aplicação de Hopf $h = g \circ \pi$. Dessa forma, sendo $\pi_1 : S^2(\frac{1}{2}) \rightarrow S^2(\frac{1}{2})/\Gamma_p$, a projeção, temos a fibração de Hopf $h : L(p, q) \rightarrow S^2(\frac{1}{2})/\Gamma_p$ definida do seguinte modo: para quaisquer $[z], [w] \in L(p, q)$ temos

$$h([z], [w]) = \left(\frac{1}{2} (|[w]|^2 - |[z]|^2), [z] \overline{[w]} \right).$$

Segue da Proposição 1.15 que o espaço $S^2(\frac{1}{2})/\Gamma_p$ é uma orbifold de dimensão 2.

2

ISOPERIMETRIA E ESTABILIDADE

Neste capítulo abordaremos conjuntos de perímetro finito em variedades Riemannianas.

2.1 PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO RIEMANNIANO

As referências desta seção são [MPPP07], [FN14] e [Chao1].

Definição 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n , com métrica g de classe C^∞ . Sejam $\Omega \subseteq M$, $dVol_g$ a medida Riemanniana associada a g ,*

$$u \in L^1(\Omega, g) := \left\{ f : M \rightarrow \mathbb{R} : c_{f, \Omega} = \int_{\Omega} |f| dVol_g < \infty \right\}.$$

*$u \in L^1_{loc}(M, g)$, se para todo $\Omega \Subset M$ resulta $u \in L^1(\Omega, g)$. Dizemos que u é uma função de **variação localmente limitada** e escrevemos $u \in BV_{loc}(M, g)$, se para qualquer aberto $U \Subset M$ vale*

$$|Du|_g(U) := \sup_{\substack{X \in \mathfrak{X}_c^\infty(U) \\ \|X\|_g \leq 1}} \left\{ \int_U (\operatorname{div}_g X) u dVol_g \right\} < \infty,$$

onde para todo subconjunto aberto $V \subseteq M$, $\mathfrak{X}_c^\infty(V)$ denota o conjunto de todos os campos infinitamente diferenciáveis de V com suporte compacto.

*Dizemos que $u \in L^1(M, g)$ é uma função de **variação limitada**, que denotamos por $u \in BV(M, g)$, se tivermos*

$$|Du|_g := \sup_{\substack{X \in \mathfrak{X}_c^\infty(M) \\ \|X\|_g \leq 1}} \left\{ \int_M (\operatorname{div}_g X) u dVol_g \right\} < \infty.$$

Observação 1. $L^1_{loc}(M, g)$ é um subespaço próprio de $L^1(M, g)$.

Definição 2.2. Dizemos que $\Omega \subseteq M$ é um **conjunto de perímetro localmente finito**, se $\mathbb{1}_\Omega \in BV_{loc}(M, g)$. Dizemos que Ω é um **conjunto de perímetro finito**, se $\mathbb{1}_\Omega \in BV(M, g)$. Para todo aberto $U \subseteq M$ denotamos com

$$\mathcal{P}_g(\Omega, U) := |D\mathbb{1}_\Omega|_g(U),$$

o **g-perímetro de Ω em U** . Definimos $\mathcal{P}_g(\Omega) := \mathcal{P}_g(\Omega, M)$. Dizemos que $\mathcal{P}_g(\Omega)$ é o **g-perímetro de Ω** (ou simplesmente, o **perímetro de Ω**). $\mathcal{P}_g(\Omega, \cdot)$ define uma função com domínio a topologia de M que pode ser estendida a medida sobre todos os Borelianos como uma medida regular e logo estendida a uma medida definida em toda a σ -álgebra completamente da σ -álgebra dos Borelianos de M . Tal medida denotada $\mathcal{P}_g(\Omega, \cdot)$ é dita **medida perímetro de Ω** .

Teorema 2.3. Sejam M compacta e g_1, g_2 métricas Riemannianas em M . Então $BV(M, g_1) = BV(M, g_2)$.

Observação 2. Se M é compacta (sem bordo) então $BV_{loc}(M, g) = BV(M, g)$.

Definição 2.4. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, definimos a função

$$I_M : [0, Vol_g(M)) \rightarrow [0, \infty[$$

chamada função **perfil isoperimétrico** da maneira seguinte: para todo $v \in [0, Vol_g(M))$ vale

$$I_M(v) = \inf \{ A_g(\partial\Omega) \mid \Omega \Subset M, \Omega \text{ aberto, } \partial\Omega \text{ suave e } Vol_g(\Omega) = v \},$$

onde $Vol_g(\Omega)$ é a medida Riemanniana induzida por g sobre M , $A_g(\partial\Omega)$ é a área de $\partial\Omega$ ou é a medida de Hausdorff $\mathcal{H}_g^{n-1}(\partial\Omega)$ induzida pela métrica

$$d_g(x, y) = \inf \left\{ \ell(\gamma) \mid \gamma \text{ é } C^1 \text{ por partes e } \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ com } \gamma(0) = x \text{ e } \gamma(1) = y \right\},$$

onde

$$\ell(\gamma) := \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_g dt.$$

Observação 3. A igualdade $A_g(\partial\Omega) = \mathcal{H}_g^{n-1}(\partial\Omega)$ é verdadeira, porém não é trivial, para mais detalhes consulte [Chao1].

Teorema 2.5. Se $\partial\Omega$ é de classe C^2 , então $\mathcal{P}_g(\Omega) = \mathcal{H}_g^{n-1}(\partial\Omega) = A_g(\partial\Omega)$, onde A_g é a medida Riemanniana de $(\partial\Omega, g|_{\partial\Omega})$. Então

$$\int_M \chi_\Omega \operatorname{div}_g(X) dVol_g = \int_\Omega \operatorname{div}_g(X) dVol_g$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Omega \cap \text{supp}(X)} \langle X, \hat{v}_{ext} \rangle dVol_g \leq \int_{\partial\Omega \cap \text{supp}(X)} |\langle X, \hat{v}_{ext} \rangle| dVol_g|_{\partial\Omega} \\
&\leq \int_{\partial\Omega} \|X\|_g \underbrace{\|\hat{v}_{ext}\|_g}_{=1} dVol_g|_{\partial\Omega} \\
&\leq A_g(\partial\Omega).
\end{aligned}$$

Para ver a demonstração uma boa referência é [Chao1].

Se queremos adotar o ponto de vista do método direto do Cálculo das Variações para encontrar os minimizantes para o problema isoperimétrico, naturalmente somos conduzidos a considerar uma família maior de conjuntos admissíveis, isto é, a família dos conjuntos de perímetro finito, pois na topologia natural em que A_g é semicontínua inferiormente (i.e., a topologia flat em dimensão maximal, ou equivalentemente a topologia L^1_{loc}), vale que

$$\hat{\tau}_M := \overline{\{\Omega \Subset M : \Omega \text{ é aberto, limitado e } \partial\Omega \in C^\infty\}}_{L^1_{loc}} = \text{"Conj.per.finito em } M\text{"}.$$

Antes de passarmos à Proposição 2.7 precisamos do seguinte lema, que trata da aproximação, em topologia L^1 , de um conjunto de perímetro finito para conjuntos abertos, limitados, a bordo suave e com o mesmo volume.

Lema 2.6 (Flores e Nardulli [FN14]). *Para todo $v \in (0, Vol_g(\Omega))$, temos que quaisquer $\Omega \in \hat{\tau}_M$, $Vol_g(\Omega) = v$, existe sequência $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tais que $\Omega_j \Subset M$, Ω_j é aberto, $\partial\Omega_j \in C^\infty$, $Vol_g(\Omega_j) = v$, $Vol_g(\Omega_j \triangle \Omega) \rightarrow 0$ e $\mathcal{P}_g(\Omega_j) \rightarrow \mathcal{P}_g(\Omega)$.*

Proposição 2.7. *Seja $v \in (0, Vol_g(\Omega))$, então $I_M^*(v) := \inf\{\mathcal{P}_g(\Omega) : \Omega \in \hat{\tau}_M, Vol_g(\Omega) = v\} = I_M(v)$.*

Demonstração. O caso $I_M^* \leq I_M$ é trivial. Dado um $\epsilon > 0$, temos que,

$$I_M^*(v) \leq \mathcal{P}(\Omega_\epsilon) + \epsilon = \lim \mathcal{P}(\Omega_j) + \epsilon.$$

Para o caso $I_M(v) \leq I_M^*(v)$, seja Ω_j sequência minimizante para $I_M^*(v)$, isto é, $(\Omega_j)_j$ sequência em $\hat{\tau}_M$, $Vol_g(\Omega_j) = v$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\Omega_j) = I_M^*(v)$. Então, para todo $k \geq 1$, existem Ω_k com $Vol_g(\Omega_k) = v$, $\partial\Omega_k \in C^\infty$ tais que

$$\begin{aligned}
I_M^*(v) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\Omega_j) \\
&\geq \mathcal{P}(\Omega_{jk}) - \frac{1}{k} \\
&\geq I_M(v) - \frac{1}{k}, \forall k \geq 1
\end{aligned}$$

via o Lema de aproximação a volume constante, mais precisamente o Lema 2.6. $\square$

Definição 2.8. Seja Ω conjunto de perímetro finito. Dizemos que Ω é uma **região isoperimétrica de volume** v , se $\text{Vol}_g(\Omega) = v$ e $\mathcal{P}_g(\Omega) = I_M(v)$.

Definição 2.9. Chamaremos de **variedade Riemanniana fechada** (M, g) uma variedade Riemanniana de classe C^∞ , completa, compacta e sem bordo e dv_g representa a medida Riemanniana canônica. Além disso, adotaremos as seguintes notações:

- α_n designa, para todo $n > 0$, o volume Riemanniano da esfera unitária do espaço Euclidiano $(\mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|_2)$, munido da métrica canônica induzida pelo espaço ambiente. Esta sequência $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verifica a relação de recorrência seguinte, $\alpha_0 = 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n \int_0^\pi (\cos t)^n dt.$$

- ω_n representa, para todo $n > 1$, o volume da bola unitária euclidiana e está relacionado com α_n pela seguinte fórmula:

$$\omega_n = \frac{\alpha_n}{n+1}$$

Definimos a constante isoperimétrica euclidiana sendo

$$\gamma_n = \frac{\alpha_{n-1}}{\omega_n^{\frac{n-1}{n}}}.$$

- M_δ^n é o espaço simplesmente conexo de dimensão n ($n \geq 2$) de curvatura seccional constante δ ($\delta \in \mathbb{R}$). Para os valores de δ que são 0, 1 e -1 , temos seu espaço correspondente $(\mathbb{R}^n, \text{can})$, $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ e $(\mathbb{H}^n, \text{can})$. Os espaços M_δ^n são chamados de espaços modelos.

Considere a equação diferencial

$$y'' + \delta y = 0$$

onde δ é um número real qualquer. Denotamos c_δ (respectivamente s_δ) as soluções desta equação com as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ (resp. $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$). Para todo $t \in \mathbb{R}$ temos

$$c_\delta(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\delta}t) & \text{se } \delta > 0 \\ 1 & \text{se } \delta = 0 \\ \cosh(\sqrt{-\delta}t) & \text{se } \delta < 0 \end{cases}$$

$$s_\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sin(\sqrt{\delta}t) & \text{se } \delta > 0 \\ t & \text{se } \delta = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\delta}} \sinh(\sqrt{-\delta}t) & \text{se } \delta < 0. \end{cases}$$

Estas duas funções estão relacionadas pela igualdade $c_\delta(u)^2 + \delta s_\delta(u)^2 = 1$. Denotamos por I_δ o intervalo maximal de extremidade fechada a esquerda em 0 sobre a função s_δ é estritamente positiva.

$$I_\delta = \begin{cases} (0, \pi\sqrt{\delta}) & \text{se } \delta > 0 \\ (0, \infty) & \text{se } \delta \leq 0. \end{cases}$$

Para todo $r \in I_\delta$ denotamos por $\cot_\delta$ a seguinte razão

$$\cot_\delta(r) := \frac{c_\delta(r)}{s_\delta(r)}$$

e $V_{n,\delta}(r)$ o volume Riemanniano das bolas geodésicas de raio r em M_δ^n .

$$V_{n,\delta}(r) = \alpha_{n-1} \int_0^r s_\delta(u)^{n-1} du.$$

Lembramos que o volume Riemanniano $(n-1)$ -dimensional do bordo de uma bola geodésica de raio r é igual a derivada de $V_{n,\delta}(r)$ em relação ao raio r .

O conhecimento das soluções do problema isoperimétrico em M_n^δ ($\delta \leq 0$) permite acessar implicitamente seu perfil isoperimétrico:

$$\forall r \in [0, +\infty[, \quad I_{M_n^\delta}(V_{n,\delta}(r)) = V'_{n,\delta}(r),$$

e

$$\forall r \in [0, +\infty[, \quad I_{M_n^\delta} \left(\alpha_{n-1} \int_0^r s_\delta(u)^{n-1} du \right) = s_\delta(r)^{n-1}.$$

Quando $\delta = 0$ esta relação pode ser explicitada,

$$\forall V \in [0, +\infty[, \quad I_{(\mathbb{R}^n, \text{can})}(V) = \gamma_n V^{\frac{n-1}{n}}.$$

onde γ_n é a constante isoperimétrica euclidiana. No caso de dimensão 2 com $\delta = -1$ temos

$$\forall V \in [0, +\infty[, \quad I_{(\mathbb{H}^2, \text{can})}(V) = \sqrt{V(4\pi + V)}.$$

2.2 PERFIL ISOPERIMÉTRICO E REGULARIDADE

O próximo resultado garante a continuidade do perfil isoperimétrico.

Teorema 2.10 (Flores e Nardulli [FN14, Teo. 2]). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com $\text{Ric}_g \geq (n-1)k$ e $\text{Vol}_g(B_g(p, 1)) \geq v_0 > 0$. Então I_M é contínua em $[0, \text{Vol}_g(M)]$.*

A seguir, apresentaremos as propriedades diferenciais do perfil isoperimétrico dadas pela primeira vez em [BP86].

Proposição 2.11. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta n -dimensional de classe C^∞ .*

(i) *O perfil isoperimétrico I_M admite primeira e segunda derivada no seguinte sentido: existe uma função suave L tal que $I_M - L$ seja concavo. Se $I_M(v)$ é afetado por uma corrente T , e se I_M é diferenciável em v , então $I'_M(v)$ é a curvatura média (constante) de ∂T .*

(ii) *Suponha que T é uma subvariedade com bordo suave ($n \leq 7$). Então,*

$$I_M(v)^2 I''_M(v) + \int_{\partial T} \text{Ricci} + |B|^2 \leq 0, \quad (1)$$

onde B é a segunda forma fundamental de ∂T , Ricci é a curvatura de Ricci de (M, g) de um vetor normal a ∂T .

(iii) *Para $n = 2$, $Q(v) := I(v)^2$. Seja k um limite inferior da curvatura de (M, g) . Então a desigualdade 1 toma a forma*

$$Q''(v) \leq -2k.$$

Além disso, o lema 5 em [Hsi92] faz as seguintes afirmações

Lema 1. *Para qualquer valor $v_0 > 0$, existem as derivadas a esquerda e a direita de I_M em v_0 , ou seja,*

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta v \rightarrow 0^-} \frac{1}{\Delta v} [I_M(v_0 + \Delta v) - I_M(v_0)] &= D_- I_M(v_0) \\ \lim_{\Delta v \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta v} [I_M(v_0 + \Delta v) - I_M(v_0)] &= D_+ I_M(v_0), \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} D_- I_M(v_0) &= \max\{H(\partial\Omega) : \Omega \text{ isoperimétrica e } |\Omega| = v_0\} \\ D_+ I_M(v_0) &= \min\{H(\partial\Omega) : \Omega \text{ isoperimétrica e } |\Omega| = v_0\}. \end{aligned}$$

Onde H é a curvatura média.

Lema 2. *Se v_0 é um ponto diferenciável de I_M e Ω_0 é uma região isoperimétrica com $|\Omega_0| = v_0$. Então, $H(\partial\Omega_0) = I'_M(v_0)$.*

Assim, em [Via19], seja Ω uma região isoperimétrica em M , H a curvatura média de $\Sigma = \partial\Omega$ e considere $v \in (0, |M|)$ tal que $|\Omega| = v$. Como as derivadas a direita e a esquerda de I_M em v existem; podemos reescrever a equação 1 com relação a região isoperimétrica Ω . Além disso, podemos apresentar a seguinte relação:

$$D_+ I_M(v) \leq 2H \leq D_- I_M(v).$$

E com respeito a 1,

$$I_M(v)^2 I_M''(v) + \int_{\Sigma} (\text{Ricci}_g(N, N) + |B|^2) d_{\Sigma} \leq 0.$$

A regularidade é um conceito de extrema importância para abordarmos o problema isoperimétrico, pelo menos é que se espera das soluções para alguns espaços, por exemplo, no plano as curvas com "bicos" ou pontas gastam muitas curvas para delimitar pouca área, além do mais, também pode ser um critério para a unicidade das soluções, no caso do $\mathbb{R}^3$ as esferas "normais" e as esferas "cabeludas" (curvas para dentro ou para fora) com mesmo volume são soluções para o mesmo problema isoperimétrico, logo, adicionando a hipótese de regularidade para este caso ganhamos a unicidade já que as esferas cabeludas não são regulares. Uma solução para este tipo de problema, [Mor03b] apresenta o seguinte resultado.

Corolário 2.12. *(Regularidade em baixas dimensões) Para $n \leq 6$, seja Σ uma hipersuperfície isoperimétrica n -dimensional em uma variedade M com $C^{k-1, \alpha}$ ($k \geq 1, 0 < \alpha < 1$) e métrica Riemanniana Lipschitz. Então Σ é localmente uma subvariedade $C^{k, \alpha}$. (Se $n = 1$ e $k = 1$, então Σ é $C^{1,1}$). Se a métrica é analítica real então Σ é analítica real.*

A existência de hipersuperfícies isoperimétricas em variedades compactas decorre de resultados de teoria da medida geométrica. Assim, em [Ros01] é apresentado o seguinte teorema.

Teorema 2.13. *Se M é uma variedade Riemanniana compacta sem bordo de dimensão 3, então, para qualquer v , com $0 < v < \text{Vol}_g(M)$, existe uma região compacta $\Omega \subset M$ cujo bordo $\partial\Omega$ é uma superfície suave com curvatura média constante mergulhada em M , que resolve o problema isoperimétrico, e $v = \text{Vol}(\Omega)$.*

2.3 ESTABILIDADE

Nesta seção definiremos estabilidade, apresentaremos a variação de uma imersão, primeira e segunda variação da área. As referências desta seção são [BdC12], [BDCE12] e [RR92].

Seja $\Omega \subset M$, onde M é uma variedade Riemanniana. Faremos variações para $\Sigma = \partial\Omega$, que mantenham o volume de Ω fixo.

Definição 2.14. *Uma variação da imersão $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ é uma aplicação diferenciável $X : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \rightarrow M$, tal que*

- (i) *para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ a aplicação $x_t : \Sigma \rightarrow M$ definida por $x_t(p) = X(t, p)$ é uma imersão;*
- (ii) *para $t = 0$ as imersões x_0 e x são iguais;*
- (iii) *$x_t|_{\partial\Sigma} = x|_{\partial\Sigma}$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.*

O *campo variacional* relacionado a variação X em um ponto p é definido como segue:

$$E(p) = \left. \frac{\partial x_t}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial X}{\partial t}(t, p) \right|_{t=0}.$$

O vetor $N(p)$ é um *vetor normal* a $x_0(\Sigma)$ em $x_0(p)$.

As funções *área* e *volume* associadas a variação X são dadas por

$$A(t) = \int_{\Sigma} d\Sigma_t \quad \text{e} \quad V(t) = \int_{[0,t] \times \Sigma} X^* dM,$$

onde $d\Sigma_t$ é o elemento de volume de Σ na métrica induzida por x_t , e dM é o elemento de volume da variedade M .

Definição 2.15. *Uma variação preserva volume quando $V(t) = V(0)$ para todo t . E uma variação é dita normal se E é paralelo a N .*

Teorema 2.16. (Fórmula da Primeira Variação da Área)

$$\frac{dA}{dt}(0) = - \int_{\Sigma} n H f d\Sigma$$

onde H é a curvatura média da imersão x e $f = \langle E, N \rangle$.

O leitor interessado em uma boa demonstração pode consultar [Law80].

Proposição 2.17. (*Primeira Variação do Volume*)

$$\frac{dV}{dt}(0) = \int_{\Sigma} f d\Sigma.$$

Considerando a imersão e a variação da imersão acima com suporte compacto, podemos escrever:

$$H_0 = A^{-1} \int_{\Sigma} H d\Sigma, \quad A = A(0),$$

então podemos definir $J : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$J(t) = A(t) + nH_0V(t).$$

Proposição 2.18. *Para uma imersão $x : \Sigma \rightarrow M$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) x tem curvatura média constante H_0 ;
- (ii) para toda variação que preserva volume, $A'(0) = 0$;
- (iii) para toda variação, $J'(0) = 0$.

Os pontos críticos de A e J são hipersuperfícies de curvatura média constante. As hipersuperfície isoperimétricas são pontos críticos do funcional área para toda variação que preserva volume. Assim, as hipersuperfícies isoperimétricas tem curvatura média constante.

A relação entre (ii) e (iii) para a segunda variação não são equivalentes. Isso foi apontado em [Bol18]. Uma relação entre $A''(0)$ e $J''(0)$ pode ser dada fazendo: $A''(0) \geq 0$ se, e somente se, $J''(0) \geq 0$, com variações de suporte compacto e satisfazendo

$$\int_{\Sigma} f d\Sigma = 0.$$

Proposição 2.19. *Seja $x : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão com curvatura média constante H . E X uma variação de x . Então, $J''(0)$ depende somente de f é dado por*

$$J''(0)(f) = \int_{\Sigma} (-f \Delta f - (\text{Ricci}(N) + |B|^2)f^2 d\Sigma),$$

onde Δ é o laplaciano na métrica induzida em Σ , $|B|$ é a norma da segunda forma fundamental da imersão x , e $R = n\text{Ricci}(N)$, onde $\text{Ricci}_M(N)$ é a curvatura de Ricci (normalizada) de M na direção N .

Definição 2.20. *Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta. Considere $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante. Dizemos que a imersão x é estável se $A''(0) \geq 0$ para toda variação de x que preserva volume.*

Portanto, podemos dizer que uma superfície $\Sigma \subset M$ é estável se tem curvatura média constante e

$$I(f, f) = - \int_{\Sigma} (|\Delta f|^2 - (\text{Ric}(N) + |B|^2)) f^2 d_{\Sigma} \geq 0,$$

N é um campo de vetores normal unitário ao longo de Σ e B é a segunda forma fundamental da imersão x . A curvatura média de Σ é H , é definida por $2H = \text{tr}(B)$.

Teorema 2.21. (Ros-Ritoré [RR92]) *Seja (M, g) uma variedade de dimensão três com curvatura de Ricci positiva. Se $x : \Sigma \rightarrow M^3$ é uma imersão cmc estável e compacta, então $g(\Sigma) \leq 3$. Além disso, se $g(\Sigma) = 2$ ou $g(\Sigma) = 3$, então*

$$\left(\frac{1}{2} \inf_{\Sigma} \text{Ric}_M + H^2 \right) |\Sigma| \leq 2\pi.$$

Teorema 2.22. *Seja Σ uma região isoperimétrica em um espaço-forma 3-dimensional $M(c)$ com curvatura constante c .*

- (i) *Se Σ tem gênero 0, então Σ é uma esfera umbílica;*
- (ii) *Se o gênero de Σ é 1, então Σ é plana (flat).*

Proposição 2.23. *Seja $x : \Sigma \rightarrow M^3$ uma imersão estável de cmc, com curvatura média constante H . Suponha o espaço M da forma S^3/G . Então,*

- (1) *Se $g(\Sigma) = 2$ ou $g(\Sigma) = 3$, então $(1 + H^2) |\Sigma| \leq 2\pi$;*
- (2) *Se $g(\Sigma) = 2$ ou $g(\Sigma) = 3$ e $|G| \leq 4$, então x é um mergulho. Além disso, se $|G| \leq 6$, então o pullback de Σ , através da aplicação cobertura $\Pi : S^3 \rightarrow M^3$, é conexo;*
- (3) *Se $|G| = 2$ ou $|G| = 3$ então a $g(\Sigma) = 1$ ou $g(\Sigma) = 2$.*

2.4 DISTÂNCIA DE HAUSDORFF

Esta seção é dedicada a distância de Hausdorff, que de modo geral calcula a "distância" entre conjuntos de um espaço métrico no seguinte sentido: calcula a distância

máxima de um determinado ponto de um conjunto para um ponto mais próximo do outro conjunto. As referências desta seção são: [Fuk90], [Gro81a] e [Gro81b].

Definição 2.24. Definimos a **Distância de Hausdorff** entre dois subconjuntos A e B de um espaço métrico (X, d) por

$$d_H^X(A, B) := \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) \right\} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b) \right\} \\ &= \inf \{ \varepsilon \geq 0 : A \subset U_\varepsilon(B), B \subset U_\varepsilon(A) \} \end{aligned} \quad (3)$$

onde $U_\varepsilon(A) = \{z : d(z, A) \leq \varepsilon\}$.

A distância de Hausdorff pode apresentar algumas patologias como podemos ver a seguir.

1. A distância de Hausdorff não é uma métrica nos subconjuntos de X . De fato, seja B um subconjunto próprio denso de X . Então, $d_H^X(B, X) = 0$, pois $U_\varepsilon(B) \supset X$ para todo $\varepsilon > 0$.
2. d_H^X nem sempre é finito, por exemplo, $d_H^{\mathbb{R}}(\{0\}, \mathbb{R}) = \infty$ ou $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) : y = x\}$, $B = \{(x, y) : y = -x\}$.

Proposição 2.25. Seja X um espaço métrico. Então,

1. d_H^X é uma semi-métrica em 2^X (o conjunto de todos subconjuntos de X).
2. $d_H^X(A, \overline{A}) = 0$ para qualquer $A \subset X$ onde $\overline{A}$ é o fecho de A .
3. Se A e B são subconjuntos fechados de X e $d_H^X(A, B) = 0$ então $A = B$.
4. Se A, B e C são subconjuntos de X então $d_H^X(A, C) \leq d_H^X(A, B) + d_H^X(B, C)$.

Assim, o conjunto de subconjuntos fechados de X com a medida de Hausdorff é um espaço métrico.

2.5 DISTÂNCIA DE GROMOV-HAUSDORFF

Nesta seção apresentaremos a definição de distância de Gromov-Hausdorff que foi abordada pela primeira vez em 1975 por David Edwards em [Edw75], mais tarde em 1981 foi generalizada por Gromov em [Gro81b] e [Gro81a], referências principais desta seção.

Definição 2.26. *Sejam X, Y espaços métricos. A distância de Gromov-Hausdorff, denotada por d_{GH} , é definida pela seguinte relação. Para um $r > 0$, $d_{GH}(X, Y) < r$ se, e somente se, existe um espaço métrico Z e subespaços X' e Y' de Z isométricos a X e Y , respectivamente, tal que $d_H^Z(X', Y') < r$. Em outras palavras, $d_{GH}(X, Y)$ é o ínfimo positivo de r de modo que Z , X' e Y' existem. A notação d_H^Z é a distância de Hausdorff entre subconjuntos de Z .*

Uma definição equivalente é a seguinte.

Definição 2.27. *Sejam X, Y espaços métricos. Então, definimos*

$$d_{GH}(X, Y) = \inf_{Z, f, g} d_H^Z(f(X), g(Y))$$

onde $f : X \rightarrow Z$ e $g : Y \rightarrow Z$ são mergulhos isométricos (preservam a distância) para o espaço métrico (Z, d) .

Observação 4. $f(X), g(Y)$ (ou X' e Y') na definição acima são considerados com a restrição da métrica do espaço ambiente Z , em oposição à métrica intrínseca induzida.

Exemplo. Se X é uma esfera com sua métrica Riemanniana, não se pode ter $Z = \mathbb{R}^3$ e $X' = S^2 \subset \mathbb{R}^3$. X e X' são isométricos munido-se X' da distância intrínseca, mas não como subespaço métrico de $\mathbb{R}^3$.

Temos que X e Y são isométricos se, e somente se, $d_{GH}(X, Y) = 0$.

Proposição 2.28. *A distância de Gromov-Hausdorff d_{GH} é uma métrica no conjunto de classes de espaços isométricos.*

Exemplo. Se $X = S^1 \times [0, 1]$ e $Y = [0, 1]$ então $d_{GH}(X, Y) = \frac{\pi}{2}$.

Observação 5. 1. Se X, Y são conjuntos compactos então $d_{GH}(X, Y) < \infty$. De fato, seja $Z = X \cup Y$ com a métrica que satisfaz $d(X, Y) = \sup\{\text{diam}(X), \text{diam}(Y)\}$.

2. Dois espaços métricos com diâmetros finitos podem ser separados por distância zero de Gromov-Hausdorff sem ser isométricos. Por exemplo, sejam $X = [0, 1]$ e $Y = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Então, sendo $Z = X$, e como as isometrias são as identidades concluímos que $d_H^Z(X, Y) = 0$.
3. Mesmo para domínios muito simples em $\mathbb{R}^n$ a distância Gromov-Hausdorff não é realizada por mergulhos no espaço euclidiano.

2.6 CONVERGÊNCIA DE GROMOV-HAUSDORFF

Nesta seção o texto segue as referências: [Gro81b] e [Sor10].

Definição 2.29. Dizemos que uma sequência $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ de espaços métricos compactos **convergem** para um espaço métrico compacto X se $d_{GH}(X_n, X) \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$. Denotamos por $X_n \xrightarrow{GH} X$. Neste caso, o conjunto X é chamado de **limite de Gromov-Hausdorff** de $\{X_n\}$.

d_{GH} é uma métrica no conjunto de classes de espaços isométricos.

Observação 6. Para subespaços no mesmo espaço métrico, a distância Gromov-Hausdorff por definição não é maior que a distância Hausdorff. Assim, a convergência de Hausdorff implica na convergência de Gromov-Hausdorff, mas a volta não vale.

Para entender melhor como funciona a convergência Gromov-Hausdorff, considere o seguinte exemplo, retirado de [Sor10].

Seja $X_i = S^1 \times S_{1/i}^1$, e $X = S^1$, onde $S_{1/i}^1$ na esfera de raio $\frac{1}{i}$, vamos provar que $d_{GH}(X_i, X) \rightarrow 0$. Fazendo $Z_i = X_i$ e mergulhando isometricamente X em Z_i por $\phi_i : X \rightarrow Z_i, x \mapsto (x, \frac{\pi}{i}x)$. Então, $d_{GH}(X_i, X) \leq d_H^{Z_i}(X_i, \phi_i(X)) = \frac{\pi}{i} \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$. Outros exemplos são:

1. Seja (X, d) um espaço métrico. Considere $\lambda > 0$, seja λX e denotaremos por $(X, \lambda d)$. Se $\text{diam} X < \infty$ então $\lambda X \xrightarrow{GH} \{ \text{um ponto} \}$ quando $\lambda \rightarrow 0$.
2. $d_{GH}(\lambda X, \mu X) = \frac{1}{2}|\lambda - \mu|X$.
3. Considere a seguinte sequência

$$D_1 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, D_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, D_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \xrightarrow{GH} D$$

Fonte: Adaptada de Christina Sormani (2010, p. 12).

onde (D, d) é o quadrado unitário com a métrica d dada por $\|(x, y)\| = |x| + |y|$.

Os limites de Gromov-Hausdorff de variedades Riemannianas são espaços métricos geodésicos, ou seja, a distância entre qualquer par de pontos é igual ao comprimento da menor curva entre eles.

2.7 O CASO NÃO COMPACTO

Quando os espaços não são compactos, semelhante ao que acontece para sequências de funções contínuas, é muito útil introduzir uma noção análoga na convergência uniforme em conjuntos compactos. Diferentes definições, porém, todas equivalentes podem ser encontradas em M. Bridson e A. Haefliger [BH13], referência principal desta seção.

Definição 2.30. *Considere uma sequência de espaços métricos X_n com pontos base $x_n \in X_n$. A sequência de espaços pontuados (X_n, x_n) converge para (X, x) se, para cada $r > 0$ a sequência de bolas fechadas $\overline{B}(x_n, r)$ (com métricas induzidas) converge para $\overline{B}(x, r) \subset X$ na métrica Gromov-Hausdorff.*

No próximo exemplo é abordada a importância de escolher uma sequência de espaços pontuados.

Exemplo. Considere a sequência de círculos $C_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - ie_2| = i^2\} = \{x^2 + (y - i)^2 = i^2\} \subset \mathbb{R}^2$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Para $r > 0$ fixo, as bolas (fechadas) de raios r centradas na origem $0 \in C_i$, se parecem com a bola correspondente em $\mathbb{R}$, ou seja, o intervalo $[-r, r]$. Podemos dizer que C_i converge para $\mathbb{R}$ quando $i \rightarrow \infty$. Porém, $d_{GH}(C_i, \mathbb{R}) = \infty$.

Então, $\overline{B}(0, r) \subset C_i \rightarrow [-r, r]$. Temos que $\overline{B}(0, r)^{C_i} \xrightarrow{GH} \overline{B}(0, r)^{\mathbb{R}}$. Nós esperamos que $d_{GH}(C_i, \mathbb{R}) \rightarrow 0$ mas, isso não é verdade, pois $d_{GH}(C_i, \mathbb{R}) = \infty$ para todo i . De fato, se $\text{diam} X < \infty$ então

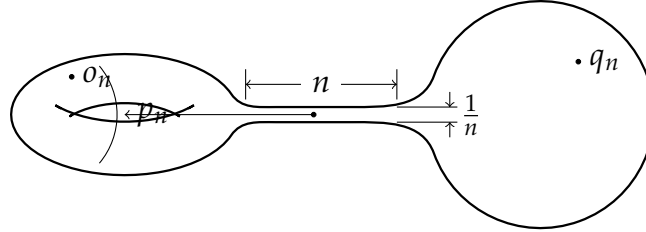
$$d_{GH}(X, Y) \geq \frac{1}{2} |\text{diam} X - \text{diam} Y|$$

tomando $X = C_i$ então $\text{diam} C_i = \pi i$, $Y = \mathbb{R}$ então $\text{diam} Y = \infty$, então para todo i temos que

$$d_{GH}(C_i, \mathbb{R}) \geq \infty.$$

Se considerarmos a família de círculos pontuais $(C_i, 0)$, temos que $(C_i, 0) \xrightarrow{GH} (\mathbb{R}, 0)$. A escolha do ponto de base é de extrema importância, para entendermos melhor,

considere a seguinte sequência de intervalos $\{[0, 2n]\}$. Dependendo de como fazemos a escolha de pontos distintos podemos ter diferentes espaços limites, isto é, se fazemos a sequência de espaços pontuais $\{[0, 2n], 0\}$ converge para o espaço pontual $(\mathbb{R}_{\geq 0}, 0)$. Mas a sequência $\{[0, 2n], n\}$ converge para o espaço pontual $(\mathbb{R}, 0)$. Mais um exemplo presente em [Fuk90]. Sejam X_n , o_n , p_n , e q_n como na próxima imagem,



Fonte: Adaptada de Kenji Fukaya (1990, p. 162).

note que

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n, o_n) = (\mathbb{S}^2 - \{\text{ponto}\}, \text{ponto})$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n, p_n) = (\mathbb{R}, 0)$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n, q_n) = (\mathbb{T}^2 - \{\text{ponto}\}, \text{ponto})$.

Observe que neste exemplo, os pontos de base diferentes implica que a sequência de espaço pontuais converge para espaços limites diferentes. Podemos vê que se escolhermos qualquer variedade Riemanniana (M, g) de dimensão n e $p \in M$. Então

$$\lim_{R \rightarrow \infty} ((M, Rg), p) = (\mathbb{R}^n, O)$$

para qualquer $p \in M$.

2.8 CONVERGÊNCIA DE VARIEDADES

Nesta seção apresentaremos os principais resultados da teoria de convergência de variedades.

Em 1967 J. Cheeger no seu trabalho [Che67] provou o seguinte Teorema.

Teorema 2.31. *Seja $\mathcal{M}(n, \Lambda, d, v)$ um conjunto de variedades Riemanniana de dimensão n , com curvatura seccional $|Sec| < \Lambda$, diâmetro $\text{diam}(M) < d$ e volume $\text{Vol}(M) > v$. Existem somente finitos tipos de difeomorfismos de variedades em $\mathcal{M}(n, \Lambda, D, v)$.*

Teorema 2.32 (Teorema Paracompacto de Gromov). *Seja $\mathcal{M}(n, k, v, D)$ o conjunto de variedades Riemanniana compactas de dimensão n e volume maior que v , diâmetro menor que D , e curvatura Ricci maior que $(n - 1)k$. Então, $\mathcal{M}(n, k, v, D)$ é paracompacto na topologia de Gromov-Hausdorff pontual.*

Considere uma sequência de cones truncados suaves em $\mathbb{R}^n$ convergindo para um cone equipado com a estrutura de espaço de comprimento induzido. Este exemplo mostra que somente podemos ter compacidade, pode ocorrer que o espaço métrico limite não é um variedade Riemanniana. Isso é, uma singularidade que pode surgir no limite, isso aconteceu neste exemplo devido ao fato de que a curvatura não permanece limitada. Sendo assim, devemos restringir nossa atenção à sequência com curvatura seccional limitada, ou seja, $|\text{sec}| \leq k$. Agora, se tomarmos uma sequência de toros planos se tornando mais finos, reduzindo um de seu raio, até colapsar em um círculo S^1 . Aqui, satisfaz a condição da curvatura seccional ($\text{sec} = 0$) e diâmetro limitado, mas o espaço limite é de dimensão baixa, aqui o volume da sequência vai para zero. M. Gromov, em 1981 estendeu esse resultado para provar a pré-compactação na topologia de Lipschitz.

Teorema 2.33 (Gromov's $C^{1,1}$ -precompactness Thm. 8.20 of [Gro81b]). *Com relação à topologia Lipchitz (e topologia Gromov-Hausdorff) $\mathcal{M}(n, d, \Lambda, v)$ é relativamente compacto. Qualquer sequência de manifolds $\{M_i\} \in \mathcal{M}(n, \Lambda, d, v)$ tem uma subsequência que converge para uma variedade diferenciável com uma métrica C^0 , e uma função distância $C^{1,1}$.*

Em 1987 esse teorema foi melhorado independentemente por S. Peters [Pet84] e Greene-Wu [GW88].

Teorema 2.34 ($C^{1,\alpha}$ -precompactness Greene-Wu-Peters). *O espaço $\mathcal{M}(n, \Lambda, d, v)$ é paracompacto na topologia Lipschitz. Qualquer sequência de manifolds $\{M_i\} \in \mathcal{M}(n, \Lambda, d, v)$ tem uma subsequência convergente para uma variedade diferenciável com uma métrica $C^{1,\alpha}$.*

É importante perceber que, não se pode esperar mais do que convergência C^2 ou esperar um limite C^2 para g . Considere o exemplo trivial de um cilindro com duas tampas hemisféricas. O cilindro com duas tampas hemisféricas pode ser obtido como limite de Gromov-Hausdorff de superfícies em $\mathcal{M}(2, \Lambda, d, v)$ mas o limite não é C^2 , caso contrário, a curvatura seccional teria que ser contínua, porque depende da segunda derivada da métrica.

Observação 7. *A hipótese $\text{Vol}(M) \geq v$ pode ser substituída por $\text{inj}_M \geq i_0$ (ver Teorema 2.1 e Corolário 2.2 de [Che70]). A notação inj_M é o raio de injetividade de M , para mais detalhes ver o capítulo 3.*

Definição 2.35. *Seja $\{(M_i, g_i)\}$ ser uma sequência de variedades Riemannianas n dimensional. A sequência converge no $C^{1,\alpha}$ -topologia para uma $C^{1,\alpha}$ -variedade (M, g) se M é uma C^∞ variedade tal que para algum atlas fixado $C^{1,\alpha}$ em M compatível com o sua estrutura C^∞ , g é $C^{1,\alpha}$, e Existe um difeomorfismo $\phi_i : M_i \rightarrow M$, com $\phi_i^* g_i \rightarrow g$ com a norma $C^{1,\alpha}$.*

O seguinte teorema de Anderson pode ser visto como uma generalização dos teoremas acima.

Teorema 2.36 (Teorema 1.1 de [And90]). *A classe de n -variedades M Riemanniana compacta, conexa satisfazendo $|\text{Ric}(M)| \leq k$, $\text{inj}(M) \geq i > 0$ e $\text{diam}(M) \leq D$, é paracompacto na $C^{1,\alpha}$ -topologia.*

Definição 2.37. *Uma sequência de variedades Riemanniana pontuadas (M_i, g_i, x_i) ((M_i, g_i) variedades Riemanniana com pontos $x_i \in M_i$) é dita convergente no sentido de Cheeger–Gromov para uma variedade Riemanniana pontual (M, g, x) com i tendendo ao ∞ se satisfazer as seguintes condições:*

- (i) *Se existe uma "cobertura" de M por conjuntos compactos, ou seja, $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i = M$; com as propriedades $\Omega_i \subset M$ e $\overline{\Omega_i} \subset \Omega_{i+1}$;*
- (ii) *Existe uma família de aplicações suaves $\phi_i : \Omega_i \rightarrow M_i$ que são difeomorfas às suas imagens de modo que $\phi_i(x) = x_i$ para todo i e $\phi_i^*(g_i) \rightarrow g$ na topologia C^∞ .*

3

RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste capítulo inicialmente apresentaremos resultados das propriedades dos espaços de Lens, e por fim o Teorema de Celso Viana. A referência para todo o capítulo é [Via19].

3.1 ALGUNS ASPECTOS DOS ESPAÇOS DE LENS

Inicialmente iremos definir o raio de injetividade de uma variedade Riemanniana (M, g) , na sequência abordaremos alguns aspectos do raio de injetividade do espaço de Lens $L(p, q)$.

Para definirmos o raio de injetividade devemos considerar a bola $B(0, r) := \{v \in T_p M : g_p(v, v) < r\} \subset T_p M$. Para um $r > 0$ suficientemente pequeno a aplicação exponencial é um difeomorfismo desse conjunto para $B(p, r) := \{q \in M : d_g(p, q) < r\}$.

Definição 3.1. O raio de injetividade de uma variedade Riemanniana (M, g) é

$$\text{inj}(M, g) = \inf_{p \in M} \text{inj}_p(M, g),$$

onde $\text{inj}_p(M, g)$ é o raio de injetividade em p , definido por

$$\text{inj}_p(M, g) = \sup\{r : \exp_p \text{ é um difeomorfismo em } B_0(r) \subset T_p M\}.$$

Em outras palavras, o raio de injetividade de uma variedade é o menor dos raios de injetividade em todos os pontos. Um raio de injetividade em um ponto é o maior dos raios r de uma bola para o qual a aplicação exponencial é injetiva.

O raio de injetividade mede o tamanho da maior bola em torno de p de modo que a geodésica radial tenha o comportamento da geodésica em $\mathbb{R}^n$.

Para todo $x \in L(p, q)$ o raio de injetividade de $L(p, q)$ em x satisfaz, $L(p, q) \geq \frac{\pi}{p}$. Com igualdade apenas em pontos nas fibras críticas. Em geral, não é verdade que $\text{inj}(L(p, q), x) = O(\frac{1}{p})$. Mas, ocorre no seguinte caso.

Lema 3. Se $x \in T_{\frac{\pi}{4}}/\mathbb{Z}_p \subset L(p, q)$ e o diâmetro de $T_{\frac{\pi}{4}}/\mathbb{Z}_p$ em $L(p, q)$ é limitado por baixo, então $\text{inj}_x L(p, q) = O(\frac{1}{p})$.

Denotaremos por $\mathbb{Z}_p^q$ para representar a ação de $\mathbb{Z}_p$ em $\mathbb{S}^3$ que depende de q . Como a ação usada para definir $L(p, q)$.

Para obter certas informações de alguns "objetos" matemáticos, as vezes usar um sistema de coordenadas apropriado pode facilitar a empreitada, no caso do espaço de Lens o sistema de coordenadas toroidal é apropriado.

Definição 3.2. Sejam x, y, z e w as coordenadas usual em $\mathbb{R}^4$. Então, a esfera $\mathbb{S}^3$ é dada por $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$. As coordenadas χ, θ e φ parametrizam a esfera $\mathbb{S}^3$ como segue:

$$\begin{aligned} x &= \cos \chi \cos \theta \\ y &= \cos \chi \sin \theta \\ z &= \sin \chi \cos \varphi \\ w &= \sin \chi \sin \varphi \end{aligned}$$

para

$$\begin{aligned} 0 &\leq \chi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Para cada $0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{2}$ as coordenadas θ e φ percorre um toro. Os casos excepcionais ocorrem quando $\chi = 0$ e $\chi = \frac{\pi}{2}$ que os montes de toros colapsam nos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $z^2 + w^2 = 1$, respectivamente.

Podemos reescrevendo de outra forma, fazendo, para cada $0 \leq r \leq \frac{\pi}{2}$ a aplicação $\varphi_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_r$ definida por

$$T_r(u, v) = (\cos(r)e^{2\pi i u}, \sin(r)e^{2\pi i v}) \in \mathbb{S}^3.$$

Assim, podemos redefinir a ação $(\mathbb{Z}_p^q)$ de $\mathbb{Z}_p$ em $\mathbb{S}^3$, como uma ação de $\mathbb{Z}_p^q$ em T_r como segue:

$$\begin{aligned} k \bullet (\cos(r)e^{2\pi i u}, \sin(r)e^{2\pi i v}) &= \left(e^{\frac{2\pi i k}{p}} \cos(r)e^{2\pi i u}, e^{\frac{2\pi i q k}{p}} \sin(r)e^{2\pi i v} \right) \\ &= \left(\cos(r)e^{2\pi i \left(\frac{k}{p} + u\right)}, \sin(r)e^{2\pi i \left(\frac{qk}{p} + v\right)} \right). \end{aligned}$$

Essa ação corresponde a seguinte ação em $\mathbb{R}^2$,

$$k \bullet (u, v) = \left(u + \frac{k}{p}, v + \frac{kq}{p} \right).$$

A órbita nessas coordenadas de um ponto $(z_0, w_0) = \varphi(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \in T_r$ é dada por

$$\text{Orb}_{p,q}(z_0, w_0) = \left\{ \left(m + \frac{k}{p}, n + \frac{kq}{p} \right) : m, n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Lema 4. *Seja $\{L(p, q)\}_{p \in \mathbb{N}}$ uma sequência de espaços de Lens, existem $b, m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ e uma subsequência $\{L(p_l, q_l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$ tal que satisfaz uma das seguintes afirmações:*

- (i) *Para cada $(z_0, w_0) \in T_r$, $\varphi_r(\text{Orb}_{p_l q_l}(z_0, w_0))$ torna-se denso em T_r com $l \rightarrow \infty$.*
- (ii) *$(\text{Orb}_{p_l q_l}(z_0, w_0))$ está contida em b curvas integrais de*

$$X(z, w) = (m_0 \sqrt{-1}z, n_0 \sqrt{-1}w) \in \chi(\mathbb{S}^2).$$

O próximo lema é um resultado de Viana sobre convergência de Cheeger-Gromov para espaços de Lens.

Lema 5. *Seja $(L(p, q), p^2 g_{\mathbb{S}^3}, x_p)$ uma sequência de espaços de Lens. Então, existe uma variedade 3-dimensional (M, δ, x_∞) plana de classificação no máximo um tal que passando para alguma subsequência*

$$(L(p, q), p^2 g_{\mathbb{S}^3}, x_p) \xrightarrow{C-G} (M, \delta, x_\infty).$$

3.2 PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO EM $L(p, q)$

Essa seção é dedicada a apresentação do resultado de Celso Viana.

Teorema 3.3. (Celso Viana) *Existe um inteiro não negativo p_0 tal que para todo $p \geq p_0$ e $q \geq 1$ as superfícies isoperimétricas em $L(p, q)$ são esferas geodésicas ou quocientes de toros de Clifford.*

Ideia da demonstração: No capítulo 1 mostramos que o espaço de Lens é uma variedade compacta de dimensão 3, dessa forma, pelo teorema 2.13 temos que existem

hipersuperfícies isoperimétricas em $L(p, q)$, em outras palavras, é garantida a existência da solução do problema isoperimétrico para o espaço de Lens.

Novamente da condição da compacidade da variedade $L(p, q)$ juntamente com: a curvatura de Ricci positiva, todas as variações de regiões isoperimétricas que preservam volume são estáveis e de curvatura média constante; assim, segue do teorema 2.21 que o gênero de uma região isoperimétrica em $L(p, q)$ é menor ou igual a 3, isto é, $g(\Sigma) \leq 3$.

Lema 6. *Seja $(L(p, q), p^2 g_{S^3}, x_p) \rightarrow (M, \delta, x_\infty)$ como no lema 5 e seja Σ_p uma superfície isoperimétrica em $L(p, q)$ tal que $x_p \in \Sigma_p$ e $g(\Sigma_p) \geq 1$. Então existe uma constante $c > 0$ tal que $|A_{\Sigma_p}|_{p^2 g_{S^3}} \leq c$.*

Fazendo uso do lema anterior e de outras propriedades Viana mostra o seguinte lema.

Lema 7. *Para p suficientemente grande existem v_p e $\epsilon_p > 0$ tal que $I_{L(p, q)}$ é dado pelo perfil de esferas em $(0, v_p]$ e pelo perfil de toros planos em $[v_p, v_p + \epsilon_p)$. Além disso, se Σ_p é uma superfície isoperimétrica tal que $I_{L(p, q)}(v_p) = |\Sigma_p|$, então $g(\Sigma_p) = 0$ ou $g(\Sigma_p) = 1$.*

Pelo resultado 2.22 sabe-se que se Σ_p tem gênero 0 então a região isoperimétrica é uma esfera geodésica. Por outro lado, se Σ_p tem gênero 1 é plana (flat), logo, é o quociente do toro de Clifford. Dessa forma, o teorema fica resolvido para qualquer região isoperimétrica que divida $L(p, q)$ em duas regiões de volumes diferentes. Esse fato é consequência do lema anterior. Assim, para concluir a prova, basta provar que as regiões isoperimétricas que dividem $L(p, q)$ em duas regiões de mesmo volume são toros planos (flat). E se essas regiões tiverem gênero 1, pelo resultado 2.22 as regiões estão caracterizadas. Com essa ideia Viana formula e prova a seguinte afirmação.

Afirmação 1. *O teorema 3.3 segue se mostrarmos que as superfícies isoperimétricas que separam $L(p, q)$ em duas regiões de mesmo volume são toros.*

Agora, só falta mostrar que essas regiões isoperimétricas tem gênero 1. Para isso, Viana faz uma prova por absurdo. Assume que existe uma sequência infinita de espaços de Lens $L(p, q)$ contendo uma região isoperimétrica Σ_p de gênero maior ou igual que 2, para cada p . E Σ_p satisfazendo a afirmação 1. Pelo lema 5 existe uma variedade (M, δ, x_∞) plana (flat) de dimensão 3 tal que $(L(p, q), p^2 g_{S^3}, x_p) \xrightarrow{C-G} (M, \delta, x_\infty)$. A partir deste ponto Viana usa técnicas sofisticadas que exigem a necessidade da criação do lema e da afirmação a seguir para concluir a prova. Para mais detalhes, consulte [Via19].

Lema 8. *Existe uma superfície propriamente contida $\Sigma_\infty \subset M$ tal que $(\Sigma_p, x_p) \rightarrow (\Sigma_\infty, x_\infty)$ com multiplicidade um. Além disso, Σ_∞ é totalmente geodésica e perpendicular ao fibrado canônico de M .*

Afirmção 2. *Essa configuração não pode ser um limite de superfícies isoperimétricas.*

4

APÊNDICE

4.1 MEDIDA E DIMENSÃO DE HAUSDORFF

Nesta seção nos dedicamos a construção da medida de Hausdorff. Antes de defini-la enunciaremos dois resultados que descrevem procedimentos para a construção de medidas exteriores. Nos apoiaremos nesses resultados para desenvolver o objetivo dessa seção. Uma ótima referência para a teoria que segue abaixo é [Chao1] Capítulo 4.

No decorrer do texto o conjunto M quando mencionado é sempre não vazio.

Definição 4.1. *Seja M um conjunto. Uma coleção $C \subset \mathbb{P}(M)$ (o conjunto de todos os subconjuntos de M) de subconjuntos de M é dita uma σ -álgebra em M quando as seguintes condições são satisfeitas,*

1. $\emptyset \in C$ e $M \in C$;
2. Se $A \in C$ então $A^c = M - A \in C$;
3. Se $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma coleção arbitrária enumerável de elementos de C então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in C$.

Um conjunto M que possui uma σ -álgebra é chamado de espaço *mensurável*. Um subconjunto A de M que pertence a uma σ -álgebra C é dito conjunto mensurável (em relação à σ -álgebra C).

Definição 4.2. *Seja M um conjunto. Suponha que C é uma σ -álgebra de M . Uma **medida** em M é uma função $\mu : C \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ que satisfaz as seguintes condições,*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Se a coleção $\{A_n \in C : n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável e disjunta então

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Definição 4.3. Seja M um conjunto. Uma função $\bar{\mu} : \mathbb{P}(M) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ que satisfaz as condições

1. $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$;
2. Se $A \subset B$ então $\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B)$;
3. Se $A_n, n \in \mathbb{N}$ é qualquer coleção enumerável de subconjuntos de M então

$$\bar{\mu} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(A_n);$$

é dita uma **medida exterior** em M .

Proposição 4.4. Se $\bar{\mu}_i$, com $i \in I$, for uma família de medidas exteriores em M então $\bar{\mu} := \sup_{i \in I} \bar{\mu}_i$ é uma medida exterior em M .

Demonstração. Para todo $i \in I$, tem-se $\bar{\mu}_i(\emptyset) = 0$, pois $\bar{\mu}_i$ é medida exterior para cada $i \in I$; claramente $\bar{\mu}(\emptyset) = \sup\{\bar{\mu}_i(\emptyset) : i \in I\} = 0$. Agora, suponha A, B subconjuntos de M com a propriedade $A \subset B$. Como $\bar{\mu}_i(A) \leq \bar{\mu}_i(B)$ para todo $i \in I$, logo, $\bar{\mu}(A) = \sup\{\bar{\mu}_i(A) : i \in I\} \leq \sup\{\bar{\mu}_i(B) : i \in I\} = \bar{\mu}(B)$. Para concluirmos, seja $A_n, n \in \mathbb{N}$ qualquer coleção enumerável de subconjuntos de M . Assim sendo,

$$\bar{\mu}_i \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\mu}_i(A_n)$$

para todo $i \in I$, pois $\bar{\mu}_i$ é medida exterior para cada $i \in I$. Logo,

$$\bar{\mu} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sup_{i \in I} \left\{ \bar{\mu}_i \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right\} \leq \sup_{i \in I} \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\mu}_i(A_n) \right\} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(A_n).$$

□

Proposição 4.5. Seja M um conjunto. Seja Δ um subconjunto não vazio de $\mathbb{P}(M)$, com $\emptyset \in \Delta$. Considere Θ_Δ a família de todos os subconjunto contáveis de Δ . Seja h uma função positiva definida em Δ e com a propriedade de $h(\emptyset) = 0$. Defina a função $H : \Theta_\Delta \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ por

$$H(R) := \sum_{R_n \in \Delta} h(R_n),$$

onde $R = \{R_n \in \Delta : n \in \mathbb{N}\} \in \Theta_\Delta$. Então

1. $H(\{\emptyset\}) = 0$;

2. Se $R_n \in \Theta_\Delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$H\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} H(R_n).$$

Demonstração. Note que $H(\{\emptyset\}) = h(\emptyset) = 0$. Agora, seja $R_n \in \Theta_\Delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $R_n = \{R_{nm} \in \Delta : m \in \mathbb{N}\}$. Portanto,

$$H\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n\right) = \sum h(R_{nm}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} h(R_{nm}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} H(R_n),$$

onde a segunda somatória está operando elementos distintos de Δ . Logo, segue o resultado. $\square$

Teorema 4.6. *Seja M um conjunto. Suponha que a coleção não vazia $\Delta \subset \mathbb{P}(M)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\emptyset \in \Delta$;
2. Dado Θ_Δ a coleção de todos os subconjuntos enumerável de Δ . Existe uma função positiva $H : \Theta_\Delta \rightarrow \mathbb{R} + \cup \{\infty\}$ satisfazendo
 - (i) $H(\{\emptyset\}) = 0$;
 - (ii) Se $R_n \in \Theta_\Delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$H\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} H(R_n);$$

3. Para todo $A \subset M$ existe pelo menos uma cobertura enumerável por elementos de Δ . Denotamos por $C_\Delta(A) \in \Theta_\Delta$ o conjunto de todos os recobrimentos enumeráveis de A .

Assim sendo, definimos a aplicação $\bar{\mu} : \mathbb{P}(M) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ dada por

$$\bar{\mu}(A) \equiv \bar{\mu}_\Delta(A) := \inf\{H(R) : R \in C_\Delta(A)\}.$$

Essa aplicação é uma medida exterior em M .

Demonstração. Como $\emptyset$ é coberto por $\{\emptyset\}$ segue que $\bar{\mu}(\emptyset) = \inf H(\{\emptyset\}) = 0$. Agora, sejam A e B subconjuntos de M com a propriedade $A \subset B$. Então, $C_\Delta(B) \subset C_\Delta(A)$. Logo,

$$\bar{\mu}(A) = \inf_{R \in C_\Delta(A)} \{H(R)\} \leq \inf_{R \in C_\Delta(B)} \{H(R)\} = \bar{\mu}(B).$$

Por fim, seja $A_i, i \in \mathbb{N}$ uma coleção enumerável de subconjuntos de M . Provaremos que

$$H\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} H(R_n).$$

Note que para um subconjunto A de M , temos que $\bar{\mu}(A) = \inf\{H(R) : R \in C_\Delta(A)\}$. Dessa forma, dado um número real a podemos ter $R \in C_\Delta(A)$ tal que pela definição de ínfimo $H(R) \leq \bar{\mu}(A) + a$. Fixando $\epsilon > 0$ para cada $b \in \mathbb{N}$ existe um $R_b \in C_\Delta(A_b)$ tal que

$$H(R_b) \leq \bar{\mu}(A_b) + \frac{\epsilon}{2^b}.$$

Note que se $\{R_b : b \in \mathbb{N}\}$ for uma coleção enumerável de elementos de C_Δ , então a união $\bigcup_{b \in \mathbb{N}} R_b$ é elemento de $C_\Delta(A)$. Assim, a coleção $I = \bigcup_{b \in \mathbb{N}} R_b$ é também uma coleção contável de conjuntos que cobrem o conjunto $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ e portanto, pertencem a $C_\Delta(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)$. Assim,

$$H\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} H(R_n) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_b) + \frac{\epsilon}{2^b}\right) = \sum_{b \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(A_b) + \epsilon.$$

Como,

$$I \in C_\Delta\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$$

então

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \inf\left\{H(R), R \in C_\Delta\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)\right\} \leq H(I) \leq \sum_{b \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(A_b) + \epsilon,$$

para todo $\epsilon > 0$. Logo,

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{b \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(A_b).$$

Portanto, $\bar{\mu}$ é uma medida exterior. □

Seja (M, d) um espaço métrico. Seja A um subconjunto de M . Definimos o *diâmetro* de A na métrica d por

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\},$$

ou seja, é a maior distância possível entre pontos de E , segundo a métrica d .

Suponha que o conjunto M possua a seguinte propriedade P : para todo $\delta > 0$ e para todo $A \subset M$ existe pelo menos uma cobertura enumerável por elementos cujo diâmetro é menor ou igual a δ .

Seja s um número real não negativo. Para qualquer $\delta > 0$, vamos fazer as seguintes definições,

1. $\Delta_\delta := \{R \subset M : \text{diam}(R) \leq \delta\}$, temos que $\emptyset \in \Delta_\delta$;
2. A função positiva $h_s : \Delta_\delta \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ dada por $h_s(R) = \text{diam}(R)^s$, para cada $R \in \Delta_\delta$; definimos também que $h_s(\emptyset) = 0$.
3. Para cada $A \in M$ uma família $C_{\Delta_\delta}(A)$ de recobrimentos contáveis por elementos de Δ_δ .

Essas afirmações satisfazem as hipóteses da proposição 4.5; de fato, do item 1 e da propriedade P temos a garantia da existência Θ_Δ , assim, pelo item 2 podemos definir uma função $H_s : \Theta_{\Delta_\delta} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ da seguinte forma, para cada $R = \{R_n \in \Delta_\delta : n \in \mathbb{N}\} \in \Theta_{\Delta_\delta}$

$$H_s(R) := \sum_{R_n \in \Delta_\delta} h_s(R_n),$$

como na proposição 4.5, conseqüentemente, temos

1. $H(\{\emptyset\}) = 0$;
2. Se $R_n \in \Theta_\Delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$H\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} H(R_n).$$

Tendo isso e pelo item 3 das nossas afirmações, temos as hipóteses do teorema 4.6. Portanto, a função $\bar{\mu}_H^{\delta,s} : \mathbb{P}(M) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ definida por

$$\bar{\mu}_H^{\delta,s}(A) := \inf\{H_s(R) : R \in C_{\Delta_\delta}(A)\} := \inf\left\{\sum_{R_n \in R} h_s(R_n) : R \in C_{\Delta_\delta}(A)\right\}$$

é uma medida exterior em M . Pela proposição 4.4 a aplicação $\bar{\mu}_H^s : \mathbb{P}(M) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ dada por

$$\bar{\mu}_H^s(A) := \sup_{\delta > 0} \inf\{H_s(R) : R \in C_{\Delta_\delta}(A)\} := \sup_{\delta > 0} \inf\left\{\sum_{R_n \in R} h_s(R_n) : R \in C_{\Delta_\delta}(A)\right\}$$

é uma medida exterior em M , denominada *medida exterior de Hausdorff de dimensão s* .

4.2 VARIEDADES

Nesta seção apresentaremos a definição de variedades diferenciáveis, mas, antes disso, abordaremos os conceitos básicos fundamentais que envolve esta definição. Uma observação importante para o entendimento do conteúdo que vem a seguir é que o termo diferenciável é visto como sendo de classe C^∞ . As referências desta seção e de todas as outras a seguir são: [Car92] e [DO19].

Definição 4.7. (Cartas) *Seja M um conjunto qualquer. Dizemos que o par (U, φ) é uma **carta** (ou um **sistema de coordenadas**) n -dimensional em M , quando a função $\varphi : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ é uma bijeção e o conjunto $\varphi(U)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ para algum n .*

Definição 4.8. (Compatibilidade) *Dizemos que duas cartas (U, φ) e (V, ψ) são **compatíveis** se os subconjuntos $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$ e a função de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo.*

No caso da aplicação vazia convencionamos que sempre é um difeomorfismo, sendo assim, (U, φ) e (V, ψ) são compatíveis quando $U \cap V = \emptyset$.

Definição 4.9. *Seja M um conjunto. Um **atlas de dimensão n** em M é uma família $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ cartas tal que*

1. $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ (cobertura de M);
2. Para todos os índices $i, j \in I$, as cartas (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) são compatíveis.

No exemplo a seguir exibiremos um atlas para a esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Exemplo. Seja S^2 a esfera unitária, ou seja, $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Sejam $n = (1, 0, 0)$ e $s = (0, 0, -1)$; estes pontos são o polo norte e o polo sul de S^2 , respectivamente. Assim, definimos

$$U_+ = S^2 - \{s\}, \quad U_- = S^2 - \{n\}.$$

Sejam $\varphi_+ : U_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\varphi_- : U_- \rightarrow \mathbb{R}^2$ dados por $p \mapsto \varphi_+(p)$ e $p \mapsto \varphi_-(p)$ as projeções estereográficas do polo norte e polo sul, respectivamente. Para (x, y, z) temos

$$\varphi_+(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \quad \varphi_-(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

As aplicações φ_+ e φ_- são bijeções. E

$$\varphi_+^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + (u^2 + v^2)}, \frac{2v}{1 + (u^2 + v^2)}, \frac{1 - (u^2 + v^2)}{1 + (u^2 + v^2)} \right)$$

e

$$\varphi_-^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + (u^2 + v^2)}, \frac{2v}{1 + (u^2 + v^2)}, \frac{(u^2 + v^2) - 1}{1 + (u^2 + v^2)} \right)$$

são as inversas de φ_+ e φ_- , respectivamente. Note que $\varphi_+(U_+ \cap U_-) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Por fim, a aplicação de transição entre as duas cartas é dada por

$$(\varphi_- \circ \varphi_+^{-1})(u, v) = \frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}$$

claramente é diferenciável em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Portanto, $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,2}$ é um atlas para S^2 .

Uma carta (U, φ) em M é compatível com um atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de dimensão n em M se (U, φ) é compatível com cada carta (U_i, φ_i) de $\mathcal{A}$.

Definição 4.10. Uma atlas $\mathcal{A}$ num conjunto M é dito **maximal** se $\mathcal{A}$ não está propriamente contido em nenhum atlas em M .

Definição 4.11. Dizemos que o par $(M^n, \mathcal{A})$ é uma **variedade diferenciável de dimensão n** , se M é um conjunto qualquer e $\mathcal{A}$ é um atlas maximal em M e a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em M é Hausdorff com base enumerável.

Exemplo. A esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de raio 1 é uma variedade diferenciável de dimensão n . Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno de $\mathbb{R}^{n+1}$. Dados $u \in S^n$ então a projeção estereográfica de vértice u é a bijeção:

$$p_u : S^n - \{u\} \rightarrow u^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, u \rangle = 0\},$$

definida por

$$p_u(x) = u - \frac{x - u}{\langle x, u \rangle - 1}, \quad x \in S^n - \{u\}.$$

Onde,

$$p_u^{-1}(v) = u + 2 \frac{v - u}{\|v - u\|^2},$$

é a inversa da aplicação p_u . Na expressão, $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana de $\mathbb{R}^{n+1}$. Escolhendo um isomorfismo qualquer $T_u \rightarrow u^\perp \rightarrow \mathbb{R}^n$, claramente $T_u \circ p_u : S^n - \{u\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma carta em S^n . Dados u_1 e u_2 em S^n tranquilamente podemos obter uma função de φ_{u_1} para φ_{u_2} que seja diferenciável. Assim, o conjunto $\mathcal{A} := \{\varphi_u : u \in S^n\}$ é um atlas diferenciável e de dimensão n em S^n . Portanto, segue a afirmação.

4.3 ESPAÇO TANGENTE E MÉTRICA RIEMANNIANA

Nesta seção iremos definir espaço tangente, métrica riemanniana e variedade Riemanniana.

Definição 4.12. Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ em uma variedade M é dita **suave (diferenciável)** se para toda carta (U, φ) a composição

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

é suave. Denotamos por $C^\infty(M)$ o conjunto de *todas as funções suaves* em M .

Definição 4.13. Seja M uma variedade diferenciável. Uma **curva (diferenciável)** sobre M é uma aplicação diferenciável da forma $\alpha : I \rightarrow M$. O conjunto $I = (-\epsilon, \epsilon)$ é um aberto de $\mathbb{R}$.

Definição 4.14. Seja M uma variedade. Suponha uma curva $\alpha : I \rightarrow M$ satisfazendo $\alpha(0) = p$, e considere $D = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável em } p\}$. Um **vetor tangente a curva α em $t = 0$ (ou vetor tangente em p)** é uma aplicação $\alpha'(0) : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0).f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Definição 4.15. O conjunto formado por todos os vetores tangente em p é chamado de **espaço tangente de M em p** . Denotamos este conjunto por $T_p M$.

Escolhendo uma parametrização $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ em $p = x^{-1}(q)$, com $q = (x_1, \dots, x_n) \in x(U)$ e uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, podemos representar a função f em termos da parametrização x fazendo a seguinte identificação

$$f(x_1, \dots, x_n) := f \circ x^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f \circ x^{-1}(q) = f(p).$$

Se $\alpha : I \rightarrow M$ é uma curva sobre M então $x \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva sobre $\mathbb{R}^n$, assim,

$$x \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

é uma identificação da curva α na parametrização x . Portanto, fazendo a restrição de f a curva α , temos

$$\begin{aligned} f \circ \alpha(t) &= f \circ x^{-1} \circ x \circ \alpha(t) \\ &= f \circ x^{-1}(x \circ \alpha(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f \circ x^{-1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\
&= f(x_1(t), \dots, x_n(t)).
\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos obter a expressão de $\alpha'(0).f$ na parametrização x , ou seja,

$$\begin{aligned}
\alpha'(0).f &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{df(x_1(t), \dots, x_n(t))}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\alpha(0)} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\alpha(0)} \right) f.
\end{aligned}$$

Portanto, o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expressado na parametrização x por

$$\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p.$$

Definição 4.16. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ entre variedades é dita **suave** em $p \in M$ se existem cartas coordenadas (U, φ) de p e (V, ψ) de $f(p)$ tal que $f(U) \subset V$ e a composição

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

é suave. A função f é uma **aplicação suave** de M para N se é suave em todo $p \in M$.

Definição 4.17. Seja $f : M_1^n \rightarrow M_2^m$ aplicação diferenciável. Para cada par $(p; v) \in M_1 \times T_p M_1$ escolha uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$ tal que $(\alpha(0); \alpha'(0)) = (p; v)$ e defina a curva sobre M_2 , $\beta = f \circ \alpha$. Defina também a aplicação $df_p : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$ por $df_p.(v) = \beta'(0)$. Tal aplicação é dita **diferencial** de f em p .

Definição 4.18. A aplicação $f : M_1^n \rightarrow M_2^m$ é dita um **difeomorfismo** se for inversível e satisfaz a propriedade: f e f^{-1} são diferenciáveis.

Analogamente, uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ é um **homeomorfismo** se é invertível, com a inversa contínua.

Afirmção 3. O espaço $\mathbb{CP}^1$ é difeomorfo a esfera $\mathbb{S}^2$.

Demonstração. Sabemos que $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} / \sim$, coma $\sim$ sendo a relação: (z_1, z_2) e $(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \in \mathbb{C}^2$ estão relacionados se, somente se, existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $(z_1, z_2) = \lambda(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$. Assim,

$$\mathbb{CP}^1 = \{[(z_1, z_2)] : z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ com } (z_1, z_2) \neq 0\}.$$

Onde, $[(z_1, z_2)]$ é a classe de equivalência de (z_1, z_2) que é dada por

$$[(z_1, z_2)] = \{(\lambda z_1, \lambda z_2) : \lambda \neq 0\}.$$

Agora, defina $U := \mathbb{CP}^1 - \{[0, 1]\}$ e $V := \mathbb{CP}^1 - \{[1, 0]\}$. Note que U e V são conjuntos abertos, de fato, $\mathbb{CP}^1$ é variedade, logo é Hausdorff, assim, cada ponto $[x, y]$ é fechado em $\mathbb{CP}^1$, portanto, seque a afirmação. Além disso, U e V cobrem $\mathbb{CP}^1$ e estão associados ao atlas $A = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ dado por:

- $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^2$ onde

$$[(z_1, z_2)] \rightarrow \frac{z_2}{z_1} \cong \left(\operatorname{Re} \left(\frac{z_2}{z_1} \right), \operatorname{Im} \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \right) \in \mathbb{R}^2;$$

- $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^2$ com

$$[(z_1, z_2)] \rightarrow \frac{z_1}{z_2} \cong \left(\operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_2} \right), \operatorname{Im} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \right) \in \mathbb{R}^2.$$

Vamos verificar que φ e ψ estão bem definidas e que são cartas.

Note que se $[(z_1, z_2)] \in U$ então $z_1 \neq 0$, pois, caso $z_1 = 0$, teríamos $z_2 \neq 0$, e $[(z_1, z_2)] = \left[\left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{z_2} \right) \right] = [(0, 1)] \notin U$. Se $(\lambda z_1, \lambda z_2), \lambda \neq 0$, é outro representante de $[(z_1, z_2)] \in U$ então $\varphi(\lambda z_1, \lambda z_2) = \frac{\lambda z_2}{\lambda z_1} = \frac{z_2}{z_1} = \varphi(z_1, z_2)$, o que implica que φ está bem definida.

Para o próximo passo, considere a identificação $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $z_i \xrightarrow{\sim} (x_i, y_i) = (\operatorname{Re}(z_i), \operatorname{Im}(z_i))$ então

$$\varphi((z_1, z_2)) = \left(\frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} \right) \left(\frac{x_1 - iy_1}{x_1 - iy_1} \right) = \frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2)}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{(x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_1^2 + y_1^2} i.$$

Observe também que todo $z \in \mathbb{C}$ é da forma $z = \frac{z_2}{z_1}$ para alguns $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ com $z_1 \neq 0$ e como $[(z_1, z_2)] = [(1, \frac{z_2}{z_1})] \in U$ então φ pode ser vista como $\varphi([1, z]) = z$, sendo que $(1, z)$ é o único representante de $[(z_1, z_2)] \in U$ com a primeira coordenada igual a 1. Logo,

$$\varphi([1, z]) = \varphi([1, \bar{z}]) \Rightarrow z = \bar{z} \Rightarrow (1, z) = (1, \bar{z}) \Rightarrow [(1, z)] = [(1, \bar{z})].$$

Portanto, φ é injetiva e $\varphi(U) = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Analogamente, ψ está bem definida, é injetiva e satisfaz $\psi([(z, 1)]) = z$, com $\psi(V) = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Agora, vamos analisar as transições $\psi \circ \varphi^{-1}$ e $\varphi^{-1} \circ \psi$. Temos

$$\varphi(U \cap V) = \psi(U \cap V) = \mathbb{C} - \{0\} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\},$$

pois, $[(z_1, z_2)] \in U \cap V$ se, somente se, $z_1 \neq 0$ e $z_2 \neq 0$. Então, $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ com $z \rightarrow \psi([1, z]) = \psi([\frac{1}{z}, 1]) = \frac{1}{z}$. Analogamente, $\varphi \circ \psi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$. Assim sendo, note que a função $\mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ com $z \rightarrow \frac{1}{z}$, pode ser vista em $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ com $(x, y) \rightarrow (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$, onde $\frac{x}{x^2+y^2} = \text{Re}(\frac{1}{z})$ e $\frac{-y}{x^2+y^2} = \text{Im}(\frac{1}{z})$, é diferenciável. Como queríamos verificar.

Também podemos cobrir S^2 com as projeções estereográficas $\{\varphi_N, \varphi_S\}$, ou seja, as aplicações $\varphi_N : S^2 - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ com $(a, b, c) \rightarrow (\frac{a}{1+c}, \frac{b}{1+c})$ e $\varphi_S : S^2 - \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ com $(a, b, c) \rightarrow (\frac{a}{1+c}, \frac{-b}{1+c})$. Com transições: $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ com $(a, b) \rightarrow (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$. Por fim, basta verificarmos que a aplicação $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow S^2$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_N^{-1}(z), & \text{se } x = \varphi^{-1}(z) \\ \varphi_S^{-1}(z), & \text{se } x = \psi^{-1}(z) \end{cases}$$

é um difeomorfismo. Primeiramente afirmamos que f está bem definida. De fato, se $\varphi^{-1}(z) = \psi^{-1}(\bar{z})$ então $z = \varphi \circ \psi^{-1}(\bar{z}) = \bar{z}^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(\bar{z})$, assim, $\varphi_N^{-1}(z) = \varphi_S^{-1}(\bar{z})$, logo, $f(\varphi^{-1}(z)) = f(\psi^{-1}(\bar{z}))$. Como queríamos.

Agora, verificaremos que f é diferenciável. Seja $[(z_1, z_2)] \in \mathbb{CP}^1$, então $[(z_1, z_2)] = \varphi^{-1}(z)$ ou $[(z_1, z_2)] = \psi^{-1}(z)$, para algum $z \in \mathbb{C}$. Se $[(z_1, z_2)] = \varphi^{-1}(z)$ então considere $\varphi_N \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $z \rightarrow \varphi_N(f(\varphi^{-1}(z))) = \varphi_N(\varphi_N^{-1}(z)) = z$, a aplicação identidade é diferenciável em todo ponto. Para o caso $[(z_1, z_2)] = \psi^{-1}(z)$, é análogo ao anterior.

Para $f^{-1} : S^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ dado por

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \varphi^{-1}(z), & \text{se } x = \varphi_N^{-1}(z) \\ \psi^{-1}(z), & \text{se } x = \varphi_S^{-1}(z) \end{cases}$$

é similar a f e tem representações locais $\varphi \circ f \circ \varphi_N^{-1} = \text{id}_{\mathbb{C}}$ e $\psi \circ f^{-1} \circ \varphi_S^{-1} = \text{id}_{\mathbb{C}}$ diferenciáveis. Portanto, $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$. $\square$

Definição 4.19. Seja M uma variedade diferenciável. Uma **métrica riemanniana** é uma aplicação g que associa cada ponto $p \in M$ a um produto interno $g(p) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ onde cada função $g_{ij} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, construída a partir de uma parametrização $x : G \rightarrow U$, dada por $g_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$ diferenciável. As funções g_{ij} são ditas a expressão da métrica riemanniana na parametrização x .

Definição 4.20. Uma **variedade riemanniana** é uma variedade diferenciável M que admite uma métrica riemanniana g e é denotada por (M, g) (ou simplesmente M se estiver explícito a métrica do contexto em questão).

4.4 IMERSÃO, MERGULHO E SUBVARIEDADE

Para a definição que faremos a seguir faça sentido considere as variedades M e N com dimensão m e n , respectivamente, e $m \leq n$.

Definição 4.21. *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Dizemos que a aplicação suave $f : M \rightarrow N$ é uma **imersão** no ponto $x \in M$ se a diferencial de f no ponto x é injetiva, ou seja, a aplicação $df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ é injetiva. Naturalmente, quando $df(x)$ for injetiva para todo $x \in M$ a aplicação f é uma imersão.*

Exemplo. A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $t \rightarrow (\sin(t), \sin(2t))$ é uma imersão. De fato, para todo $t \in \mathbb{R}$ temos $d_t f \equiv f'(t) \neq 0$.

Definição 4.22. *Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é um **mergulho** se é uma imersão e $f : M \rightarrow f(M) \subset N$ é um homeomorfismo, onde $f(M)$ é um subespaço topológico. Se $M \subset N$ e a aplicação $i : M \rightarrow N$ é um mergulho então dizemos que M é uma **subvariedade** de N .*

Teorema 4.23. *Seja $f : M^m \rightarrow N^n$ uma imersão. Para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $V \subset M$ tal que $f|_V$ é um mergulho.*

Demonstração. Este resultado é consequência do teorema da aplicação inversa, porém não de forma tão imediata.

Primeiro tomamos parametrizações (x, U) e (y, V) sobre $p \in M$ e $f(p) \in N$, respectivamente. Defina $q = x^{-1}(p)$. Então $\tilde{f} := y^{-1} \circ f \circ x : U \rightarrow V$ é uma aplicação de variáveis reais e determina a expressão de f nas parametrizações x e y . Representando $(x_1, \dots, x_m)$ como sendo as coordenadas em $\mathbb{R}^m$ e $(y_1, \dots, y_n)$ as coordenadas em $\mathbb{R}$, podemos escrever:

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_m) = (y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)) \quad (4)$$

Como f é uma imersão então seu diferencial é uma aplicação linear injetiva em cada ponto (incluindo o ponto p). Assim, a partir das parametrizações x e y , podemos ver a matriz df_p como a matriz de $d\tilde{f}_p$ dada por $A = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(q) \right]_{ij}$. Pela injetividade de df_p , das n linhas da matriz A , há m delas tal que a submatriz associada $m \times m$, digamos B , é também sobrejetiva e, portanto, inversível. Podemos supor S.P.G. que tal fato ocorre para as primeiras m linhas. Considere agora $k = n - m$ e $g : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por:

$$g(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_k) = (y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_m(x_1, \dots, x_m), y_{m+1}(x_1, \dots, x_m) + t_1, \dots, y_n(x_1, \dots, x_m) + t_k). \quad (5)$$

Enxergamos $(t_1, \dots, t_k)$ como coordenadas em $\mathbb{R}^k$. Temos que a restrição de g a U coincide com $\bar{f}$ (ou seja, quando olhamos somente as primeiras m coordenadas) e o domínio de g é um aberto em $\mathbb{R}^n$. Assim, essa construção determina que $dg_q = dg(q, t_1, \dots, t_k)$ é uma matriz constituída por dois blocos em diagonal. O primeiro deles é exatamente a submatriz B e o segundo é uma matriz identidade. Logo, o determinante coincide com o determinante de B e daí temos dg_q inversível para todo ponto da forma $(q, t_1, \dots, t_k)$, sendo assim, podemos aplicar o teorema da aplicação inversa (tomemos $(q, t_1, \dots, t_k) = (q, 0)$, já que funciona para todo ponto desta forma). Assim, existem vizinhanças W e Z de $(q, 0)$ e $g(q, 0)$, respectivamente, tais que $g : W \rightarrow Z$ é difeomorfismo. Tomando $W_1 = W \cap U \times 0$ temos que a restrição $g|_{W_1}$ coincide com $\bar{f}$ restrito a W_1 (ou seja, quando olhamos apenas as m primeiras coordenadas de um ponto em W_1 , o que é natural já que as coordenadas restantes são nulas). Portanto, tal restrição é um difeomorfismo sobre sua imagem e, conseqüentemente, um mergulho. Como queríamos mostrar. $\square$

Definição 4.24. *Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que M é **orientável** se existe uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que para quaisquer cartas (U_α, x_α) e (U_β, x_β) temos $x_\alpha \cap x_\beta \neq \emptyset$ e a diferencial da mudança de coordenadas $d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)$ tem determinante positivo.*

A escolha de uma estrutura diferenciável é chamada de orientação. Se tal estrutura diferenciável não existe, dizemos que a variedade é não orientável.

4.5 CAMPOS DE VETORES E COLCHETE DE LIE

Definição 4.25. *Um **campo vetorial** ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ sobre M é uma aplicação da forma $V : I \rightarrow TM$ que satisfaz $V(t) \in T_{c(t)}M, \forall t \in I$. Em geral, trabalhamos com V diferenciável.*

O campo $dc \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$, indicado por $\frac{dc}{dt}$ é chamado **campo velocidade** de c .

O espaço de todos os campos de vetores em M é denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

Sejam $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} eY = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ pertencentes a $\mathfrak{X}(M)$. Então $[X, Y] := XY - YX$ pertence a $\mathfrak{X}(M)$. De fato,

$$\begin{aligned} XY(f) &= X \left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_j X \left(b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_j \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_j \sum_i a_i \left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= \sum_j \sum_i \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_j \sum_i a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$YX(f) = \sum_i \sum_j \left(b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \sum_j b_j a_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Sendo assim, usando o teorema de Schwartz, obtemos

$$XY(f) - YX(f) = \sum_j \sum_i \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Isso mostra que $[X, Y]$ é um campo de vetores.

O campo de vetores $[X, Y]$ é chamado de **Colchete de Lie**.

Definição 4.26. Considere $c : I \rightarrow M$ uma curva sobre M . Dizemos que a imagem $c[a, b]$ com $[a, b] \subset I$ é um segmento em c e seu **comprimento** é dado por

$$L([a, b]; c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt.$$

Definição 4.27. Seja $R \subset U$, onde $U \subset M$. Considere R uma região aberta, conexa e contida na imagem de uma parametrização $x : \hat{U} \rightarrow U$ em M . O **volume** de R é dado por:

$$\text{vol}(R) = \int_{x^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \cdots dx_n,$$

onde g_{ij} expressa a métrica na parametrização x . O volume está bem definido, pois é uma consequência imediata do Teorema de Mudança de Variáveis para integrais múltiplas.

Um resultado interessante é que sempre existe g tal que (M, g) é variedade riemanniana.

D

4.6 CONEXÕES AFINS E CONEXÕES RIEMANNIANAS

Definição 4.28. Uma **conexão afim** é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, da forma $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$, em que $\mathfrak{X}(M) = \{X : X \text{ é campo de vetores diferenciável sobre } M\}$ e tal que $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $\forall f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis, e as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
- (ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
- (iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

Suponha que numa vizinhança local U da variedade M identificada a partir de uma parametrização $z = \bar{U} \rightarrow U$ tenhamos campos coordenados $Z_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$, $1 \leq j \leq m$, que obtemos expressões locais $X = \sum_{i=1}^m x_i Z_i$ e $Y = \sum_{i=1}^m y_i Z_i$ em U , para os campos X e Y , respectivamente. Assim, sobre U temos $\nabla_{\sum_i x_i Z_i} \sum_j y_j Z_j$. Usando as propriedades de ∇ , obtemos

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^m x_i y_j \nabla_{Z_i} Z_j + \sum_{i,j=1}^m x_i Z_i(y_j) Z_j$$

Quando necessário podemos ajustar U de modo que também podemos expressar os campos $\nabla_{Z_i} Z_j$ localmente como $\nabla_{Z_i} Z_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k Z_k$ para certas funções diferenciáveis Γ_{ij}^k (conhecidas como **símbolos de Christoffel**). Assim sendo, temos

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i,j=1}^m x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) Z_k.$$

Da expressão acima podemos concluir que para calcular $\nabla_X Y$ num dado ponto p só depende de $x_i(p), y_k(p)$ e das derivadas das funções y_k na direção de X no ponto p dadas por $X(y_k)(p)$, com $1 \leq i, k \leq m$.

Proposição 4.29. Seja M munida de uma conexão afim ∇ . Existe uma única aplicação $V \rightarrow \frac{DV}{dt}$ onde V e $\frac{DV}{dt}$ são campos sobre uma mesma curva $c : I \longrightarrow M$, fixada, satisfazendo:

- (i) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;
- (ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ com f função real diferenciável em I ;
- (iii) Se $V(t) = Y(c(t))$, algum $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$.

Acima, $\frac{DV}{dt}$ é chamada *derivada covariante* de V ao longo de c . Além disso, dizemos que V é um *campo paralelo* quando $\frac{DV}{dt} \equiv 0$.

Demonstração. Assumimos a existência da aplicação. Iremos mostrar a unicidade. Dado um sistema de coordenadas $x : \bar{U} \rightarrow U$ interceptando a curva c e fornecendo $(x_1(t), \dots, x_m(t))$ como a expressão local de $c(t)$, podemos identificar a noção de campos coordenados locais sobre c , escrevendo $X_j(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{c(t)}$, $1 \leq j \leq m$. Dessa forma, expressamos um dado campo V sobre a curva c , localmente, por $V = \sum_{j=1}^m v_j X_j$ para certas funções reais v_j diferenciáveis. Assim sendo, por (i) e (ii), temos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{j=1}^m v_j \frac{DX_j}{dt}.$$

Além disso, usando (iii), para $1 \leq j \leq m$, temos

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{dc/dt} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{dx_i}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Desse modo, chegamos à expressão

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i,j=1}^m v_j \frac{dx_i}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Portanto, $\frac{DV}{dt}$ só depende do campo V , logo, segue a unicidade. A existência não é difícil de verificar, se definimos $\frac{DV}{dt}$ a partir da expressão anterior, usando cada sistema de coordenada e notando que para sistemas de coordenadas distintos, a expressão coincide na intersecção, temos as propriedades (i), (ii) e (iii) satisfeitas. Portanto, segue o resultado. $\square$

Proposição 4.30. *Seja M um variedade riemanniana munida de uma conexão afim ∇ . Considere uma curva $c : I \rightarrow M$ e um vetor tangente $V_0 \in T_{c(t_0)}M$. Então existe um único campo paralelo V (sobre c) tal que $V(t_0) = V_0$.*

O campo V mencionado anteriormente é dito **transporte paralelo** de V_0 ao longo de c .

Demonstração. Assuma que o resultado vale para o caso em que a curva esteja contida numa vizinhança coordenada. Dado $t_1 \in I$ (assuma $t_1 > t_0$), temos por compacidade que $c([t_0, t_1])$ pode ser coberto por um número finito de vizinhanças coordenadas. Como em cada um desses V pode ser definido de forma única e V coincide nas intersecções não vazias, então podemos definir V ao longo de $[t_0, t_1]$ e, por fim, garantir a construção

única em I . Vamos provar então que a proposição é válida se $c(I) \subset U$, alguma vizinhança U parametrizada por $x : \bar{U} \rightarrow U$. Podemos identificar c em coordenadas por $x^{-1} \circ c(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, os campos coordenados x_j e um dado campo sobre c , $V = \sum_{j=1}^m v_j X_j$ como na proposição anterior. Então, Basta garantirmos que existem funções $v_j, 1 \leq j \leq m$, unicamente determinadas, tais que $\frac{DV}{dt} = 0$ e $V(t_0) = V_0$. Se escrevemos $V_0 = \sum_{j=1}^m v_j^0 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{c(t_0)}$, então teríamos que ter $v_j(t_0) = v_j^0$ e

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i,j=1}^m v_j \frac{dx_i}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^m v_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) X_k,$$

onde Γ_{ij}^k satisfazem $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$. Assim sendo, os v_k são soluções $y_k, 1 \leq k \leq m$, do sistema de m equações diferenciais dado por:

$$\frac{dy_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^m y_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0, \quad 1 \leq k \leq m,$$

tendo como condições iniciais tendo como condições iniciais $y_k(t_0) = v_j^0$. Logo, temos existência e unicidade garantidas. $\square$

Definição 4.31. *Seja M uma variedade com métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e uma conexão afim ∇ . Seja c uma curva em M . Se qualquer par de campos paralelos (P, P') que satisfaz $\langle P, P' \rangle = cte$ então dizemos que ∇ é **compatível** com $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

Proposição 4.32. *Uma conexão ∇ em M é compatível com $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ se, e só se, dada uma curva c sobre M e um par de campos arbitrário (V, W) sobre esta curva vale a relação $\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Dados P e P' campos paralelos sobre uma curva c fixada temos $\frac{DP}{dt} = \frac{DP'}{dt} = 0$. Logo, usando a hipótese, temos $\frac{d}{dt} \langle P, P' \rangle = 0$, ou seja, $\langle P, P' \rangle = cte$.

($\Rightarrow$) Dada uma curva $c : I \rightarrow M$ e fixado $t_0 \in I$, tome $\{P_i(t_0)\}_{i=1}^m$ uma base g -ortonormal de $T_{c(t_0)}M$. Segue da proposição anterior que, para cada $i \in 1, \dots, m$, o vetor $P_i(t_0)$ admite transporte paralelo ao longo de c , digamos via campo paralelo P_i . Assim, pela hipótese, dado $t \in I$, temos $\{P_i(t)\}_{i=1}^m$ uma base g -ortonormal de $T_{c(t)}M$. Se V e W são campos arbitrários sobre c , podemos expressá-los por $V = \sum_{i=1}^m v_i P_i$ e $W = \sum_{i=1}^m w_i P_i$, com $v_i, w_i \in C^\infty(I)$. Usando a propriedade (ii) da proposição 4.29 junto

ao fato que os campos P_i são paralelos, temos que $\frac{DV}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{dv_i}{dt} P_i e \frac{DW}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{dw_i}{dt} P_i$. Logo,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle &= \sum_{i,j=1}^m \frac{dv_i}{dt} w_j \langle P_i, P_j \rangle + \sum_{i,j=1}^m v_i \frac{dw_j}{dt} \langle P_i, P_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^m \frac{d}{dt} (v_i w_j) \delta_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} (v_k w_k) \\ &= \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle \end{aligned}$$

□

Corolário 4.33. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ se, e somente se, $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Dada uma curva c com campos V e W arbitrários, tome X como sendo o campo velocidade de c . Daí construa Y e Z campos em M que induzem V e W respectivamente (ou seja, $Y(c(t)) = V(t)$ e $Z(c(t)) = W(t)$, para todo t) Usando a propriedade (iii) da proposição 4.29 temos que a identidade $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ é justamente a identidade $\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle$ e daí segue do resultado anterior que ∇ é compatível com g .

($\Rightarrow$) Dado $p \in M$, construa $c : I \rightarrow M$ uma curva com $c(t_0) = p$ e $c'(t_0) = X(p)$. Temos que c induz naturalmente em Y e W campos definidos em I sobre esta mesma curva. Novamente usando os mesmos resultados e propriedades da ida, temos que $X(p)\langle Y, Z \rangle = \left. \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle \right|_{t=t_0} = \langle \nabla_{X(p)} Y, Z \rangle_p + \langle Y, \nabla_{X(p)} Z \rangle_p$. □

Definição 4.34. Uma conexão afim ∇ em M é dita **simétrica** se $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Teorema 4.35. Toda variedade riemanniana admite uma única conexão afim simétrica e compatível com a métrica dada.

Demonstração. Assuma a existência de tal ∇ . Do corolário anterior, temos as identidades:

$$(A) \quad X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

$$(B) \quad Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle$$

$$(C) \quad Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle$$

Fazendo (A) + (B) – (C), temos

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle.$$

Isolando o termo $\langle Z, \nabla_Y X \rangle$ na equação acima, vemos que ∇ é unicamente determinado pela métrica dada. Além disso, tal expressão nos fornece uma regra para a construção da conexão. $\square$

A conexão como no teorema anterior, ou seja, simétrica e compatível com a métrica da variedade é chamada de *conexão de Levi-Civita*.

4.7 CURVATURAS

Definição 4.36. O tensor curvatura (*tensor riemanniano*) de M é a aplicação trilinear $R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Usando a regra de Leibniz prova-se que R é um $C^\infty(M)$ –trilinear. Como para conexão, prova-se que $R(X, Y)Z$ em p depende apenas dos valores $X(p)$, $Y(p)$ e $Z(p)$ e não dos campos. Portanto o tensor curvatura R é um $(1, 3)$ -tensor,

$$R_p : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M.$$

Proposição 4.37. O tensor curvatura satisfaz as seguintes propriedades algébricas:

- (i) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$;
- (ii) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$;
- (iii) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (*primeira identidade de Bianchi*);
- (iv) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$.

Demonstração. A propriedade (i) segue diretamente da definição de R . O item (ii) é equivalente a $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$, que iremos provar agora,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle &= X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle \\ \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle &= Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle \end{aligned}$$

e

$$\langle \nabla_{[X,Y]}Z, Z \rangle = \frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, Z \rangle &= X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle - Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2}X(Y\langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2}Y(X\langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z \rangle - \frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z \rangle = 0. \end{aligned}$$

Para o item (iii), denotamos por $S(X, Y, Z)$ a soma cíclica

$$S(X, Y, Z) = R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y,$$

temos

$$\begin{aligned} S(X, Y, Z) &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X \\ &\quad - \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\ &= \nabla_X (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y (\nabla_Z X - \nabla_X Z) \\ &= \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Z (\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[Z,X]}Y \\ &= \nabla_X [Y, Z] - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y [Z, X] - \nabla_{[Y,Z]}X \\ &\quad + \nabla_Z [X, Y] - \nabla_{[Z,X]}Y \\ &= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0. \end{aligned}$$

Por fim, para o item (iv), usando o item (iii) obtemos

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(Y, Z)X, W \rangle + \langle R(Z, X)Y, W \rangle &= 0 \\ \langle R(Y, Z)W, X \rangle + \langle R(Z, W)Y, X \rangle + \langle R(W, Y)Z, X \rangle &= 0 \\ \langle R(Z, W)X, Z \rangle + \langle R(W, X)Z, Y \rangle + \langle R(X, Z)W, Y \rangle &= 0 \\ \langle R(W, X)Y, Z \rangle + \langle R(X, Y)W, Z \rangle + \langle R(Y, W)X, Z \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Somando, fica

$$\langle R(X, Z)W, Y \rangle + \langle R(W, Y)X, Z \rangle = 0,$$

como queríamos. □

Definição 4.38. *Seja $\sigma \subset T_p M$ um espaço de dimensão 2 gerado por $X, Y \in T_p M$. Então, a curvatura seccional em σ é definida por*

$$K(\sigma) = K(X, Y) = \frac{g(R(X, Y)X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}.$$

Definição 4.39. O tensor de Ricci no ponto $p \in M$, $Ric : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, é definido por

$$Ric_p(X, Y) = tr(Z \rightarrow R(X, \cdot)Y)$$

onde tr é a aplicação traço. Seja $X = Z_n$ um vetor unitário em $T_p M$. Tomemos uma base $\beta = \{Z_1, \dots, Z_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a X , sendo assim, fazemos as seguintes definições.

Definição 4.40. A curvatura de Ricci é dada por

$$Ric_p(X) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(X, Z_i) Z_i, x \rangle, i = 1, \dots, n-1.$$

Definição 4.41. A curvatura escalar é dada por

$$S(p) = \frac{1}{n} \sum_j Ric_p(z_j).$$

A curvatura de Ricci e a curvatura escalar não dependem das correspondentes bases ortonormais, como pode ser visto em [dCR05] na página 108, assim estão bem definidas. Novamente considerando a base ortonormal β , temos

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} K(x, z_i).$$

Assim sendo, se uma variedade Riemanniana M tem curvatura seccional não-negativa então a curvatura de Ricci também é não-negativa.

Exemplo. A curvatura seccional da esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é constante igual a 1, para mais detalhes ver [Car92] página 132.

4.8 ISOMETRIAS, ISOMETRIAS LOCAIS

Definição 4.42. Considere um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ entre variedades riemannianas tal que:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p \cdot (u), df_p \cdot (v) \rangle_{f(p)}, \forall p \in M; \forall u, v \in T_p M.$$

Dizemos que M e N são *isométricas* e que f é uma *isometria*.

Se as condições acima forem satisfeitas apenas para a aplicação $f : U \rightarrow f(U)$, onde U é uma vizinhança de p , dizemos que f é uma isometria local em p . Se todo ponto $p \in M$ admitir isometria local, então M e N são ditas localmente isométricas.

Se $\varphi : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo então para qualquer campo de vetores X em M , o campo de vetores φ_*X em N , chamado de *push-forward* de X , é dado por

$$(\varphi_*X)_q = d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}X\left(\varphi^{-1}(q)\right), \quad \text{para todo } q \in N$$

ou equivalentemente,

$$(\varphi_*X)_{\varphi(p)} = d\varphi_pX(p) \quad \text{para todo } p \in M.$$

Para qualquer função suave $h : N \rightarrow \mathbb{R}$ e para qualquer $q \in N$, temos

$$X_*(h)_q = X(h \circ \varphi)_{\varphi^{-1}(q)},$$

ou

$$X_*(h)_{\varphi(p)} = X(h \circ \varphi)_p.$$

É natural esperar que as isometrias preservem todos os conceitos riemannianos "naturais".

Proposição 4.43. *Se $\varphi : M \rightarrow N$ é uma isometria, então*

$$\varphi_*(\nabla_X Y) = \nabla_{\varphi_*X}(\varphi_*Y), \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

Onde $\nabla_X Y$ é a conexão Levi-Civita induzida pela métrica em M e similarmente em N .

Como corolário da Proposição 4.43, a curvatura induzida pela conexão é preservada; isso é,

$$\varphi_*R(X, Y)Z = R(\varphi_*X, \varphi_*Y)\varphi_*Z.$$

Além disso, também são preservados o transporte paralelo, a derivada covariante de um campo vetorial ao longo de uma curva, a aplicação exponencial, a curvatura seccional, a curvatura de Ricci e geodésicas

Proposição 4.44. *Se $\varphi : M \rightarrow N$ é uma isometria local então os seguintes conceitos são preservados:*

(i) *A derivada covariante de campos de vetores ao longo de uma curva γ ; isso é*

$$d\varphi_{\gamma(t)} \frac{DX}{dt} = \frac{D\varphi_*X}{dt}$$

*para qualquer campo de vetores X ao longo de γ , com $(\varphi_*X)(t) = d\varphi_{\gamma(t)}Y(t)$ para todo t .*

- (ii) *Translação paralela ao longo da curva.* Se P_γ é o transporte paralelo ao longo da curva γ e se $P_{\varphi \circ \gamma}$ é o transporte paralelo ao longo da curva $\varphi \circ \gamma$, então

$$d\varphi_{\gamma(1)} \circ P_\gamma = P_{\varphi \circ \gamma} \circ d\varphi_{\gamma(0)}.$$

- (iii) *Geodésicas.* Se γ é uma geodésica em M , então $\varphi \circ \gamma$ é uma geodésica em N . Assim, se γ_v é a única geodésica com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'_v(0) = v$ então

$$\varphi \circ \gamma_v = \gamma_{d\varphi_p v},$$

onde ambos os lados estão definidos. Observe que o domínio de $\gamma_{d\varphi_p v}$ pode ser estritamente maior que o domínio de γ_v . Por exemplo, considere a inclusão de um disco aberto em $\mathbb{R}^2$.

- (iv) *Aplicação exponencial.* Temos

$$\varphi \circ \exp_p = \exp_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p,$$

onde ambos os lados estão definidos.

- (v) *Tensor de curvatura Riemanniano.* Temos

$$d\varphi_p R(x, y)z = R(d\varphi_p x, d\varphi_p y) d\varphi_p z$$

para todo $x, y, z \in T_p M$.

- (vi) *Curvatura seccional, Ricci e escalar.* Temos

$$K(d\varphi_p x, d\varphi_p y) = K(x, y)_p,$$

para todos os vetores linearmente independentes $x, y \in T_p M$;

$$\text{Ricc}(d\varphi_p x, d\varphi_p y) = \text{Ricc}(x, y)_p,$$

para todos os vetores $x, y \in T_p M$;

$$S_M = S_N \circ \varphi,$$

onde S_M é a curvatura escalar em M e S_N é a curvatura escalar em N .

BIBLIOGRAFIA

- [ALRo7] Alejandro Adem, Johann Leida, and Yongbin Ruan. *Orbifolds and stringy topology*, volume 171. Cambridge University Press, 2007.
- [And90] Michael T Anderson. Convergence and rigidity of manifolds under ricci curvature bounds. *Inventiones mathematicae*, 102(1):429–445, 1990.
- [Ara98] Paulo Ventura Araújo. *Geometria diferencial*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998.
- [BdC12] Joao Lucas Barbosa and Manfredo do Carmo. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. In *Manfredo P. do Carmo–Selected Papers*, pages 221–235. Springer, 2012.
- [BDCE12] J Lucas Barbosa, Manfredo Do Carmo, and Jost Eschenburg. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in riemannian manifolds. In *Manfredo P. do Carmo–Selected Papers*, pages 291–306. Springer, 2012.
- [BH13] Martin R Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Blå05] Viktor Blåsjö. The isoperimetric problem. *The American Mathematical Monthly*, 112(6):526–566, 2005.
- [Bol18] Oskar Bolza. *Lectures on the Calculus of Variations*. Courier Dover Publications, 2018.
- [BP86] Christophe Bavard and Pierre Pansu. Sur le volume minimal de. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 19(4):479–490, 1986.
- [Car92] Manfredo Perdigao do Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [Cha01] Isaac Chavel. *Isoperimetric inequalities: differential geometric and analytic perspectives*, volume 145. Cambridge University Press, 2001.

- [Che67] Jeff Cheeger. Comparison and finiteness theorems for riemannian manifolds. *PhD Thesis, Princeton University*, 1967.
- [Che70] Jeff Cheeger. Finiteness theorems for riemannian manifolds. *American Journal of Mathematics*, 92(1):61–74, 1970.
- [Che19] Bang-yen Chen. *Geometry of submanifolds*. Courier Dover Publications, 2019.
- [CJ19] Francisco C Caramello Jr. Introduction to orbifolds. *arXiv preprint arXiv:1909.08699*, 2019.
- [DC90] Manfredo Perdigão Do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Editorial, 1990.
- [dCR05] MP do Carmo and Geometria Riemanniana. Impa (projeto euclides), 3a. edição. *Rio de Janeiro*, 1, 2005.
- [DO19] Diego Sousa De Oliveira. *Teoria Espectral do Laplaciano em Grupos de Lie Compactos*. Tese de Mestrado. UFABC, 2019.
- [Edw75] David A Edwards. The structure of superspace. In *Studies in topology*, pages 121–133. Elsevier, 1975.
- [FN14] Abraham Munoz Flores and Stefano Nardulli. Continuity and differentiability properties of the isoperimetric profile in complete noncompact riemannian manifolds with bounded geometry. *arXiv preprint arXiv:1404.3245*, 2014.
- [Fuk90] Kenji Fukaya. Hausdorff convergence of riemannian manifolds and its applications. In *Recent topics in differential and analytic geometry*, pages 143–238. Elsevier, 1990.
- [Gro81a] Michael Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps (with an appendix by jacques tits). *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 53:53–78, 1981.
- [Gro81b] Mikhael Gromov. Structures métriques pour les variétés riemanniennes. *Textes Mathématiques [Mathematical Texts]*, 1, 1981.
- [GW88] Robert Greene and Hung-Hsi Wu. Lipschitz convergence of riemannian manifolds. *Pacific journal of mathematics*, 131(1):119–141, 1988.

- [Hsi92] Wu-Yi Hsiang. On-soap bubbles and isoperimetric regions in non-compact symmetric spaces, i. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 44(2):151–175, 1992.
- [Kos80] Czes Kosniowski. *A first course in algebraic topology*. CUP Archive, 1980.
- [Law80] H. Blaine Lawson. *Lectures on minimal submanifolds*. Berkeley, CA : Publish or Perish, 1980. (Mathematics lecture series ; 9).
- [Mor03a] Frank Morgan. Regularity of isoperimetric hypersurfaces in riemannian manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 355(12):5041–5052, 2003.
- [Mor03b] Frank Morgan. Regularity of isoperimetric hypersurfaces in riemannian manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 355(12):5041–5052, 2003.
- [MPPP07] Michele Miranda, Diego Pallara, Fabio Paronetto, and Marc Preunkert. Heat semigroup and functions of bounded variation on riemannian manifolds. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2007(613):99–119, 2007.
- [Pan83] Pierre Pansu. Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 3(3):415–445, 1983.
- [Pet84] Stefan Peters. Cheeger’s finiteness theorem for diffeomorphism classes of riemannian manifolds. *J. für die reine und angewandte Mathematik*, 349:77–82, 1984.
- [Ros01] Antonio Ros. The isoperimetric and willmore problems. *Contemporary Mathematics*, 288:149–161, 2001.
- [RR92] Manuel Ritoré and Antonio Ros. Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric problem in three space forms. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 67(1):293–305, 1992.
- [Sor10] Christina Sormani. How riemannian manifolds converge: A survey. *arXiv preprint arXiv:1006.0411*, 2010.

- [Via19] Celso Viana. The isoperimetric problem for lens spaces. *Mathematische Annalen*, 374(1-2):475–497, 2019.