

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Denis Araujo Luiz

**MODELOS DE DISSEMINAÇÃO DE
RUMORES**

Santo André, SP
2024



Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Denis Araujo Luiz

Modelos de disseminação de rumores

Orientador: Prof. Dr. Cristian Favio Coletti

Tese de doutorado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Doutor em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE
DEFENDIDA PELO ALUNO DENIS ARAUJO LUIZ,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. CRISTIAN FAVIO COLETTI.

Santo André, 2024

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Araujo Luiz, Denis

Modelos de disseminação de rumores / Denis Araujo Luiz. — 2024.

120 fls.

Orientação de: Cristian Favio Coletti

Tese (Doutorado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2024.

1. Modelos de rumores. 2. Não-Markoviano. 3. Simetrias. 4. Gerador Infinitesimal. 5. Dimensão infinita. I. Coletti, Cristian Favio. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2024. III. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

Ata de Defesa de Tese de Doutorado e Folha de Assinaturas

No dia 27 de Setembro de 2024 às 16:00, no local: Auditório 801 no 8º andar do Bloco B do Campus Santo André da Universidade Federal do ABC, realizou-se a Defesa da Tese de Doutorado, que constou da apresentação do trabalho intitulado " **Modelos de disseminação de rumores**" de autoria do candidato, **DENIS ARAUJO LUIZ**, RA nº 23202010276, discente do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da UFABC, sob orientação do Profº **CRISTIAN FAVIO COLETTI**. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o candidato foi considerado aprovado pela Banca Examinadora.

E, para constar, foi lavrada a presente ata e folha de assinaturas assinada pelos membros da Banca.

Documento assinado digitalmente
 **CRISTIAN FAVIO COLETTI**
Data: 30/09/2024 11:05:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. CRISTIAN FAVIO COLETTI, UFABC
Presidente - Interno ao Programa

Documento assinado digitalmente
 **FABIO PRATES MACHADO**
Data: 30/09/2024 11:29:42-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. FABIO PRATES MACHADO
Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

Documento assinado digitalmente
 **ELCIO LEBENSZTAYN**
Data: 30/09/2024 14:08:39-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. ELCIO LEBENSZTAYN
Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

Documento assinado digitalmente
 **ANATOLI IAMBARTSEV**
Data: 30/09/2024 15:15:10-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. ANATOLI YAMBARTSEV
Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

Documento assinado digitalmente
 **VALDIVINO VARGAS JUNIOR**
Data: 30/09/2024 18:28:00-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. VALDIVINO VARGAS JUNIOR
Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

UFABC - Fundação Universidade Federal do ABC

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) orientador(a).



Documento assinado digitalmente
DENIS ARAUJO LUIZ
Data: 24/10/2024 01:51:55-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>



Documento assinado digitalmente
CRISTIAN FAVIO COLETTI
Data: 24/10/2024 11:54:59-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Assinatura do(a) Autor(a)

Assinatura do(a) Orientador(a)

DEDICATÓRIA

Por ser o que sou e por poder ser o que sou, dedico esta tese à minha mãe.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe e ao meu pai, pelo amor, confiança e paciência.

Ao Cristian pela amizade, confiança, ensinamentos, cafés, piadas de humor duvidoso e pela orientação.

Ao meu irmão Danilo, por ser um grande amigo de fábrica.

À Thais e ao Pietro, por tudo.

Aos meus amigos que cresceram comigo e também eram do meu time, Caio, Caique, Danilo, Daniel, Elvis, Mota, Rodrigo e Tatá.

Aos meus amigos que tenho desde a escola, Caike, Ivan e Rafa.

À Bibi e à Camilinha, pela amizade muito além do BC&T.

Aos professores da UFABC com quem aprendi e também fiz amizade, e para não deixar nenhum de lado, uso o critério de ter me pago ou feito um café para aparecer aqui: a Aleja, o Daniel, o Jeferson, o Grisi, o Marrocos, a Sandra e o Stefano.

Aos professores Márcio Fabiano e Edson Iriarte, pois lá atrás esses me fizeram acreditar que eu poderia ser um matemático.

Aos professores da UdeA, sobretudo Alex, Morán, Piedrahita e Roldán, com quem pude discutir matemática, tomar cafés (*un tinto o qué?*) e ser acolhido no período em que estive na Colômbia.

Ao Lucas, pela matemática que me ensinou, pela amizade, por me salvar com hospedagem nos congressos e por estar na intersecção de todos grupos de amigos

abaixo.

Àquele grupinho que começou no mestrado e manteve amizade até hoje: Diego (que coincidentemente é o matemático mais brilhante que já conheci), Michael e Tone Ramos.

Ao pessoal do +1café, em especial o Colucci e o Thiago.

Aos meus colegas de laboratório com quem pude compartilhar bons momentos também fora de lá, sobretudo Aline e Denilson.

Ao Marcos Forte, que infelizmente só fui ter contato no final do doutorado, pelas boas conversas, discussões e até desabafos.

Aos demais funcionários e estudantes da UFABC, que não foram citados e que fazem a universidade funcionar.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro do Projeto #2022/08948-2.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"Calma, Maricotinha, nada é tão grave quanto a gente supõe, nem tão suposto quanto a gente agrava."

— A Vaca Voadora, Edy Lima.

RESUMO

Estudamos três modelos de rumores. No primeiro propomos um modelo não-markoviano de rumores no grafo completo e exibimos uma lei dos grandes números funcional e um teorema central do limite funcional. O segundo modelo é uma generalização do trabalho de Rada et al. (2021), que cai em um problema de dimensão infinita e mostramos uma lei forte dos grandes números a partir da releitura de um teorema para dimensão finita. No terceiro, propomos uma generalização do modelo de Daley-Kendall e obtemos uma equação de Itô a partir do limite de uma família de geradores infinitesimais de uma sequência de Cadeias de Markov e estudamos as simetrias de Lie de tal equação.

Palavras-chave: Modelos de Rumores, Não-Markoviano, Simetrias, espaços de dimensão infinita

ABSTRACT

We study three rumor models. First, we propose a non-Markovian rumor model on the complete graph and exhibit a functional law of large numbers and a functional central limit theorem. The second one is a generalization of Rada et al. (2021), which leads to an infinite-dimensional problem. We show a strong law of large numbers by extending a theorem originally for the finite-dimensional case. The third model is a sequence of continuous-time Markov chains which is a generalization of the Daley-Kendall's model. For this model, we obtain an Itô equation from the limit of the infinitesimal generators of the sequence of Markov Chains and investigate its random Lie-point symmetries.

Keywords: Rumor models, non-Markovian, symmetries, infinite-dimensional spaces

CONTEÚDO

1	Introdução	1
2	Modelo não-markoviano de rumores	7
2.1	Modelo simplificado	7
2.2	Modelo não-Markoviano	10
2.2.1	Proporções limite do modelo	13
2.2.2	Flutuações das proporções limite	15
2.3	Provas	17
2.3.1	Lei dos Grandes Números Funcional	20
2.3.2	Teorema Central do Limite Funcional	24
3	Modelos com compartimentos aleatórios	35
3.1	Modelo de k -espalhamento de Maki e Thompson	35
3.1.1	O modelo	36
3.1.2	Proporção de indivíduos que não ouviram o rumor	37
3.1.3	Flutuação entre as proporções e seus valores limites	38
3.2	Modelos de rumores com fases aleatórias	39
3.2.1	Modelos de classes aleatórias	40
3.3	Provas	42
3.3.1	Lei dos Grandes Números para sequências aleatórias em ℓ_p	42
3.3.2	Demonstração do Teorema 3.6	45
4	Simetrias de modelos de rumores	49
4.1	Modelo de Daley–Kendall	49
4.2	Modelo de rumores com retorno de espalhadores	50
4.3	Provas	54
4.3.1	Resultados para o modelo DKR	54
4.3.2	Gerador infinitesimal e equação de Itô	57
5	Conclusões	65
5.1	Nossos resultados	65
5.2	Trabalhos futuros	66
A	Processos Estocásticos	69

A.1	Convergência de medidas de probabilidade	69
A.1.1	Convergência fraca em espaços métricos	69
A.1.2	O espaço de funções contínuas $C[0, 1]$	72
A.1.3	O espaço $D[0, 1]$	75
A.1.4	O espaço $D[0, \infty)$	83
A.2	Processos Markovianos	84
A.3	Intensidade Estocástica	87
B	Simetrias de equações de Itô	89
B.1	Simetrias de equações diferenciais ordinárias	89
B.1.1	Geometria Diferencial	90
B.2	Equações Diferenciais Estocásticas e Simetrias	94
B.2.1	Simetria de Equações de Itô	95
	Referência Bibliográfica	97

1

INTRODUÇÃO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A problemática sobre a disseminação de rumores surge naturalmente no contexto das ciências sociais aplicadas, com ramificações em diversos temas como Política, Economia ou mesmo Saúde Pública. No campo da Política, os autores de [35] concluíram empiricamente que rumores políticos podem afetar diretamente no processo eleitoral. Em [15], investigam as características próprias dos rumores financeiros em comparação com rumores sobre outros assuntos. O excesso de informação e sua relação com a pandemia de COVID-19 são estudados em [26]. Além disso, [29] analisa as implicações práticas do provérbio “compre os rumores, venda as notícias” na tomada de decisões financeiras. Assim, a necessidade de explorar a complexidade da propagação de rumores torna-se óbvia.

Inicialmente, rumores eram considerados em modelos epidemiológicos, como o chamado modelo SIR - um modelo que considera os indivíduos em uma população como suscetíveis, infectados ou recuperados. Esses modelos fornecem boas analogias para descrever a disseminação de um rumor se entendermos rumores como infecções e indivíduos disseminadores como indivíduos infectados, mas o ponto divergente nessa análise é que duas pessoas infectadas não afetam a infecção uma da outra enquanto que dois indivíduos disseminadores deveriam afetar a disseminação alheia uma vez que se encontrem [14].

Em 1964, Daley e Kendall [6] introduziram o que é comumente referido como o modelo clássico de propagação de rumores - o modelo DK. Sua análise pioneira e a extensa literatura recente referenciando-o destacam sua importância. O modelo consiste em uma população fechada homogeneamente misturada de $n + 1$ indivíduos divididos em três classes: *ignorantes* (desconhecem o rumor), *disseminadores* (propagam ativamente o rumor) e *contidos* (sabem do rumor mas cessaram sua disseminação após encontrar alguém que já o ouviu). Denote o número de ignorantes, disseminadores

e reprimidores no tempo t por $X^n(t)$, $Y^n(t)$ e $Z^n(t)$, respectivamente, e assuma que $X^n(t) + Y^n(t) + Z^n(t) = n + 1$. Usualmente, assume-se $X^n(0) = n$, $Y^n(0) = 1$ e $Z^n(0) = 0$. O processo $(X^n(t), Y^n(t))_{t \geq 0}$ forma uma Cadeia de Markov a Tempo Contínuo (CTMC) com transições e taxas associadas especificadas por:

Transição	Taxa	
$(-1, 1)$	$X^n Y^n$	(1)
$(0, -2)$	$\binom{Y^n}{2}$	
$(0, -1)$	$Y^n(n + 1 - X^n - Y^n)$.	

Pode-se derivar um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias que conduz ao limite determinístico (em n) de $\frac{1}{n}(X^n, Y^n)$ (Cap. 11, [9]):

$$\begin{aligned} x' &= -xy \\ y' &= y(2x - 1). \end{aligned} \tag{2}$$

Vale notar que a propriedade Markoviana é preservada pelo sistema de EDOs, no sentido que o passado não influencia a disseminação do rumor ao longo do tempo.

Algumas propostas foram feitas para modificar a dinâmica do rumor preservando as ideias essenciais de Daley e Kendall. Uma das mais consideradas na literatura é a célebre proposta de Maki e Thompson de 1973 [19] - o modelo MT. Este modelo é na verdade uma simplificação do anterior, pois suprime as duas transições possíveis de disseminador para contido do modelo DK em apenas uma. Maki e Thompson propuseram um modelo estocástico que assintoticamente é muito próximo ao modelo DK mas com menor complexidade, e é por isso que este modelo se tornou tão popular quanto o primeiro e ainda inspira novos modelos nos dias atuais.

Em 1987, Watson [34] investigou o tamanho do rumor, isto é, o número final de indivíduos que ouvem o rumor, para o modelo DK e o modelo MT. Sua abordagem, baseada em aproximações determinísticas e estocásticas, encontrou resultados assintóticos para a distribuição desse tamanho e tornou possível comparar ambos os modelos. No mesmo sentido, Pearce (2000) [25] investigou as proporções do rumor via equações de Kolmogorov para uma generalização que compreende o modelo DK e o modelo MT como casos particulares.

No caso determinístico, Thompson et al. em 2003 [32] propuseram um modelo que modifica o sistema de EDOs (2) e supõe a disseminação do rumor em dois grupos diferentes de pessoas - ativas e passivas, embora ainda estejam divididas nas três classes de indivíduos do modelo DK. Nesse cenário, os indivíduos passivos interagem

com menos pessoas e os indivíduos ativos (populares) têm um grande poder de disseminação. Os autores calculam numericamente o número básico de reprodução, R_0 , para a disseminação do rumor e encontraram algumas ações que poderiam controlar o tamanho do surto. Em 2008, Kawachi [13] propôs outro modelo determinístico por meio de um sistema muito parecido com (2), mas ele segue uma abordagem analítica para discutir um número básico de reprodução, um equilíbrio livre de rumores e um equilíbrio endêmico de rumores, e analisar as propriedades de estabilidade da disseminação do rumor.

O modelo de Nekovee et al em 2007 [22] trouxe a ideia de rumores para redes sociais complexas ao investigar equações de campo médio por meio de soluções numéricas e analíticas para o comportamento da disseminação em diferentes redes. De Arruda et al. em 2014 [7] investigaram rumores no contexto de redes complexas para encontrar os disseminadores mais influentes. Sua análise é baseada em medidas de centralidade e, para esse fim, propuseram uma generalização da acessibilidade de caminhada aleatória como outra medida de centralidade. Em comparação com outras medidas, a que foi proposta é mais eficiente no caso de redes espaciais.

O trabalho de Agliari et al. em 2017 [1] traz uma versão do modelo MT para redes de mundo pequeno (*small world network*). Os autores mostraram que a rede exibe uma transição de fase no número final de reprimidos a partir do parâmetro de rede: o aumento do número de vizinhos no grafo regular inicial pode fazer o rumor se sair melhor.

Lebensztayn, Machado e Rodríguez [16] propuseram em 2011 um modelo estocástico com outra classe - os indivíduos desinteressados, que representam indivíduos que não propagam o rumor após ouvi-lo. Essa modificação tornou a análise mais realista, pois nem todos que conhecem o rumor deveriam propagá-lo em algum momento, além disso, o trabalho trouxe resultados assintóticos que generalizam o modelo clássico. O modelo estocástico proposto por Rada et al. em 2021 [27] generalizou o modelo MT introduzindo a ideia de evolução do rumor do ponto de vista de cada indivíduo: é necessário ouvir o rumor algumas vezes antes de propagá-lo. Sua análise foca nas proporções finais, ou seja, quando o surto termina.

Nos últimos anos, há um número crescente de citações dos trabalhos de Daley e Kendall e de Maki e Thompson, veja por exemplo [36, 33, 10, 5, 12, 17] e referências aí contidas. Além disso, a tese de doutorado de Pablo M. Rodríguez é um excelente guia para o estudo moderno de rumores [20].

Nosso trabalho aborda três problemas estudados durante o período de doutorado. O primeiro é uma proposta de modelo de espalhamento de rumores não-Markoviano, onde fazemos uma análise da convergência do campo médio. O segundo é uma proposta de generalização ao trabalho de [27], onde supomos que o número de vezes que um indivíduo precisa ouvir o rumor para espalhá-lo é aleatório e assim o problema é levar técnicas de dimensão finita para o caso de dimensão infinita. O terceiro é um modelo de espalhamento de rumores Markoviano onde são estudadas algumas noções de simetria de equações de Itô, apresentadas em [11].

ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No Capítulo 2, introduzimos um modelo simplificado, um *toy model*, para intuir o modelo de rumores que vamos propor (Seção 2.1). Este modelo introdutório é uma Cadeia de Markov com dependência de densidade. Mostramos que neste caso podemos aplicar imediatamente as ferramentas em [9] e obter uma lei dos grandes números e um teorema central do limite. Propomos então um modelo mais complexo que generaliza o anterior incorporando propriedades de memória e enunciamos os principais resultados obtidos (Seção 2.2). Por fim, na Seção 2.3 demonstramos os resultados principais para o modelo.

No Capítulo 3 estudamos uma generalização do modelo em [27]. Na Seção 3.1 apresentamos o modelo e resultados obtidos no trabalho original, onde o ambiente é um espaço de dimensão finita. Na Seção 3.2 trazemos uma generalização do modelo anterior, onde o ambiente passa a ser um espaço de dimensão infinita. Na Seção 3.3 fazemos uma generalização da técnica usada no trabalho original e aplicamos ao nosso caso.

No Capítulo 4 estudamos simetrias de uma generalização do modelo de Daley e Kendall no caso difusivo, isto é, onde o modelo é dado por meio de uma equação de Itô. Na Seção 4.1 apresentamos o modelo de Daley e Kendall de proporções e mostramos porque este não é interessante para a nossa análise. Na Seção 4.2 propomos um modelo que assintoticamente generaliza o modelo de Daley e Kendall e sua equação de Itô. Por fim, na Seção 4.3 demonstramos os resultados.

No Capítulo 5 trazemos um compilado de possibilidades futuras a partir dos problemas aqui apresentados.

No Apêndice A trazemos algumas definições e resultados gerais em processos estocásticos. A Seção A.1 traz noções de convergência de medidas e espaço de càdlàg. A Seção A.2 traz definições e resultados em Processos Markovianos e a Seção A.3 traz definições e resultados gerais sobre Intensidade Estocástica.

No Apêndice B trazemos uma noção de simetria de Lie. Na Seção B.1 mostramos brevemente uma formalização geométrica do problema para o caso determinístico. Na Seção B.2 mostramos que o caso estocástico é uma extensão natural do caso determinístico e mostramos a ideia central do trabalho [11] para obter simetrias de equações de Itô.

2

MODELO NÃO-MARKOVIANO DE RUMORES

O cerne da proposta é um modelo de espalhamento de rumores não-Markoviano, isto é, a modelagem do espalhamento de um rumor que dependa do passado. Para elucidar o problema, traremos antes um modelo Markoviano, isto é, sem memória, que deixa imediata a ideia das transições. Então generalizamos para o caso não-Markoviano, onde temos de empregar técnicas de convergência mais sofisticadas. O modelo não-Markoviano foi estudado em [4].

No que segue, considere uma população homogeneamente mista de tamanho n . Diremos que um modelo de disseminação de rumores com contestadores é tal que cada indivíduo pode pertencer a uma das quatro classes: inativos, passivos, espalhadores ou contestadores. Denotemos por $X^n(t)$, $W^n(t)$, $Y^n(t)$ e $Z^n(t)$ o número de indivíduos pertencentes a essas classes no tempo t , respectivamente.

No modelo, o rumor pode ser pensado como uma *fake news*, isto é, um rumor que é falso sendo disseminado pela classe de espalhadores, onde indivíduos contestadores refutam o rumor, indivíduos inativos desconhecem o rumor e indivíduos passivos sabem a respeito do rumor mas não concordam nem discordam da informação sendo transmitida.

2.1 MODELO SIMPLIFICADO

Sejam α, η, θ e ζ constantes não negativas e $\beta \in [0, 1)$. A dinâmica do modelo é como segue: um indivíduo inativo torna-se passivo ao encontrar um espalhador com taxa λ ; com taxa η , um indivíduo passivo toma uma decisão: com probabilidade β torna-se espalhador, caso contrário torna-se contestador; um indivíduo espalhador torna-se contestador ao encontrar com um contestador com taxa α ; com taxa θ , um indivíduo espalhador torna-se inativo; e com taxa ζ um indivíduo contestador torna-se inativo.

Seja a Cadeia de Markov $\mathcal{R}^n = \{\mathcal{R}^n(t)\}_{t \geq 0} = \{(X^n(t), W^n(t), Y^n(t))\}_{t \geq 0} \subset \mathbb{Z}^3$ com as seguintes transições:

Incremento	Taxa
$\ell_1 := -e_1 + e_2$	$\lambda \frac{1}{n} X^n(t) Y^n(t)$
$\ell_2 := -e_2 + e_3$	$\beta \eta W^n(t)$
$\ell_3 := -e_2$	$(1 - \beta) \eta W^n(t)$
$\ell_4 := -e_3$	$\alpha \frac{1}{n} Y^n(t) (n - X^n(t) - W^n(t) - Y^n(t))$
$\ell_5 := -e_3 + e_1$	$\theta Y^n(t)$
$\ell_6 := e_1$	$\zeta (n - X^n(t) - W^n(t) - Y^n(t))$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^3 visto como espaço vetorial. Seja $E = \{(x, w, y) \in \mathbb{R}^3 : x, w, y \geq 0, x + w + y \leq 1\}$ e tome $E_n = E \cap \{kn^{-1} : k \in \mathbb{Z}^3\}$. Definimos as seguintes funções em E_n :

$$\begin{aligned}
 r_{\ell_1}(x, w, y) &:= \lambda xy \\
 r_{\ell_2}(x, w, y) &:= \beta \eta w \\
 r_{\ell_3}(x, w, y) &:= (1 - \beta) \eta w \\
 r_{\ell_4}(x, w, y) &:= \alpha y (1 - x - w - y) \\
 r_{\ell_5}(x, w, y) &:= \theta y \\
 r_{\ell_6}(x, w, y) &:= \zeta (1 - x - w - y)
 \end{aligned}$$

que representam as taxas da Cadeia de Markov $\bar{\mathcal{R}}^n$ reescaladas linearmente em n , isto é, o produto de cada uma das taxas por n^{-1} . Na Figura 1 apresentamos um esquema com as transições desta Cadeia de Markov.

Considere a Cadeia de Markov das proporções $\bar{\mathcal{R}}^n(t) := \frac{1}{n} \mathcal{R}^n(t)$. Podemos obter seu comportamento esperado assintótico, isto é, o comportamento de $\mathbb{E}[\bar{\mathcal{R}}^n(t)]$ quando $n \rightarrow \infty$, por meio de uma equação diferencial ordinária. De fato, tome $\bar{X}^n(t) := \frac{1}{n} X^n(t)$, $\bar{W}^n(t) := \frac{1}{n} W^n(t)$ e $\bar{Y}^n(t) := \frac{1}{n} Y^n(t)$. Temos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\bar{X}^n(t+h) - \bar{X}^n(t)] &= h(-\lambda \bar{X}^n(t) \bar{Y}^n(t) + \theta \bar{Y}^n(t) + \zeta(1 - \bar{X}^n(t) - \bar{W}^n(t) - \bar{Y}^n(t))) + o(h) \\
 \mathbb{E}[\bar{W}^n(t+h) - \bar{W}^n(t)] &= h(\lambda \bar{X}^n(t) \bar{Y}^n(t) - \eta \bar{W}^n(t)) + o(h) \\
 \mathbb{E}[\bar{Y}^n(t+h) - \bar{Y}^n(t)] &= h(\beta \eta \bar{W}^n(t) - \alpha \bar{Y}^n(t) (1 - \bar{X}^n(t) - \bar{W}^n(t) - \bar{Y}^n(t)) - \theta \bar{Y}^n(t)) + o(h).
 \end{aligned}$$

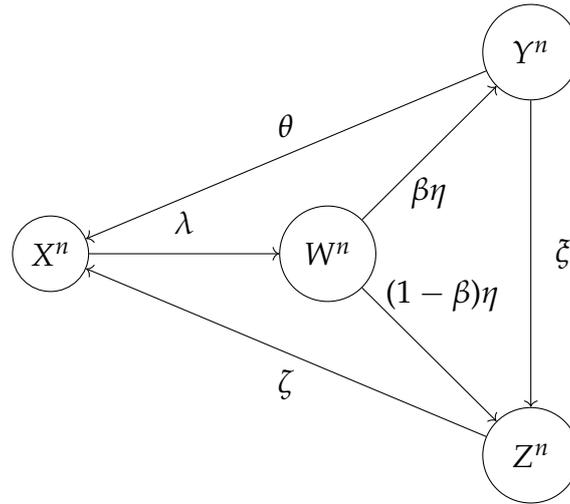


Figura 1: Esquema de transições da Cadeia de Markov \mathcal{R}^n .

Ou seja, o comportamento de $\mathbb{E}[\mathcal{R}^n(t)]$ é descrito pela solução da equação diferencial ordinária:

$$\begin{aligned} x' &= -\lambda xy + \theta y + \zeta(1 - x - w - y) \\ w' &= \lambda xy - \eta w \\ y' &= \beta \eta w - \alpha y(1 - x - w - y) - \theta y \end{aligned} \quad (3)$$

com condição inicial $(x(0), w(0), y(0)) = (\bar{X}^n(0), \bar{W}^n(0), \bar{Y}^n(0))$. Daqui, derivamos uma lei dos grandes números funcional.

Teorema 2.1. *Seja $\bar{Z}^n(t) = 1 - \bar{X}^n(t) - \bar{W}^n(t) - \bar{Y}^n(t)$ e suponha que*

$$\lim_n (\bar{X}^n(0), \bar{W}^n(0), \bar{Y}^n(0)) = (x_0, w_0, y_0) \in \mathbb{R}^3 \quad q.c.$$

Então, quando $n \rightarrow \infty$,

$$(\bar{X}^n(t), \bar{W}^n(t), \bar{Y}^n(t), \bar{Z}^n(t)) \rightarrow (\bar{X}(t), \bar{W}(t), \bar{Y}(t), \bar{Z}(t)) \quad q.c.,$$

onde $\bar{Z}(t) = 1 - \bar{X}(t) - \bar{W}(t) - \bar{Y}(t)$ e $(\bar{X}(t), \bar{W}(t), \bar{Y}(t))$ é solução para o problema de valor inicial (3) com condição de contorno $(x(0), w(0), y(0)) = (\bar{X}(0), \bar{W}(0), \bar{Y}(0))$.

Demonstração. O resultado é obtido aplicando o Teorema 2.1 do Capítulo 11 de [9]. \square

Ainda, podemos mostrar que é válido um teorema central do limite funcional. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$F(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} -\lambda x_1 x_3 + \theta x_3 + \zeta(1 - x_1 - x_2 - x_3) \\ \lambda x_1 x_3 - \eta x_2 \\ \beta \eta x_2 - \alpha x_3(1 - x_1 - x_2 - x_3) - \theta x_3 \end{pmatrix}^T$$

e observe que a equação (3) pode ser escrita numa notação matricial como $X' = F(X)$. Considere a matriz jacobiana de F :

$$\partial F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\lambda x_3 - \zeta & -\zeta & -\lambda x_1 - \zeta \\ \lambda x_3 & -\eta & \lambda x_1 \\ \alpha x_3 & \beta\eta + \alpha x_3 & -\alpha(1 - x_1 - x_2 - 2x_3) - \theta \end{pmatrix}.$$

Para cada $i = 1, \dots, 6$, sejam W_i movimentos brownianos standard. Defina o processo escalado

$$V^n(t) := \sqrt{n} \left((\bar{X}^n(t), \bar{W}^n(t), \bar{Y}^n(t), \bar{Z}^n(t)) - (\bar{X}(t), \bar{W}(t), \bar{Y}(t), \bar{Z}(t)) \right).$$

Teorema 2.2. *Suponha que $V^n(0) \rightarrow V(0)$ quase certamente, onde $V(0)$ é constante. Então $V^n \Rightarrow V = (V^{(1)}, V^{(2)})$, onde:*

$$V^{(1)}(t) = V^{(1)}(0) + \sum_{i=1}^6 \ell_i W_i \left(\int_0^t r_{\ell_i}((\bar{X}(s), \bar{W}(s), \bar{Y}(s))) ds \right) + \int_0^t \partial F((\bar{X}(s), \bar{W}(s), \bar{Y}(s))) V^{(1)}(s) ds$$

e

$$V^{(2)}(t) = -V_1^{(1)}(t) - V_2^{(1)}(t) - V_3^{(1)}(t),$$

onde $V^{(1)} = (V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, V_3^{(1)})$.

Demonstração. O resultado segue do Teorema 2.3 do Capítulo 11 de [9]. □

2.2 MODELO NÃO-MARKOVIANO

No modelo Markoviano apresentado, não temos sazonalidade nos encontros, isto é, do início ao fim do rumor as transições que dependem do encontro entre dois indivíduos têm a mesma taxa. É possível argumentar que o espalhamento do rumor depois de muito tempo deveria ser minimizado ou, ao menos, diferente.

Mais que isso, o tempo que um indivíduo passivo leva para mudar de classe poderia não ter distribuição exponencial, bem como os tempos em que indivíduos espalhadores e contestadores levam para tornar-se inativos. De fato, no contexto de *fake news*, é possível imaginar que o tempo de esquecimento do rumor (ou seja, o tempo que tanto um indivíduo espalhador quanto um indivíduo contestador levam para tornarem-se inativos) pode não ser concentrado no início.

Por fim, no modelo anterior contamos os encontros por meio de processos de Poisson. Podemos supor que os tempos que se passam entre contatos de mesmo tipo são independentes sem terem distribuição exponencial, nem mesmo serem identicamente distribuídos, admitindo assim um caráter "único" para cada encontro.

Dadas essas considerações, definimos o modelo não-Markoviano. Sejam $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ funções mensuráveis e limitadas. A dinâmica do modelo é como segue: um indivíduo inativo encontra um espalhador e, com taxa $\lambda(s)$, torna-se passivo no tempo s . Após um tempo $\eta_i \in \mathbb{R}_+$, o i -ésimo indivíduo passivo toma uma decisão: com probabilidade β torna-se espalhador, caso contrário torna-se contestador. Um indivíduo espalhador encontra com um contestador e é convencido a tornar-se contestador no tempo s com taxa $\alpha(s)$. Após um tempo $\theta_i \in \mathbb{R}_+$, o i -ésimo indivíduo espalhador inativa, isto é, torna-se inativo novamente. Da mesma forma, após um período $\zeta_i \in \mathbb{R}_+$, o i -ésimo indivíduo contestador inativa.

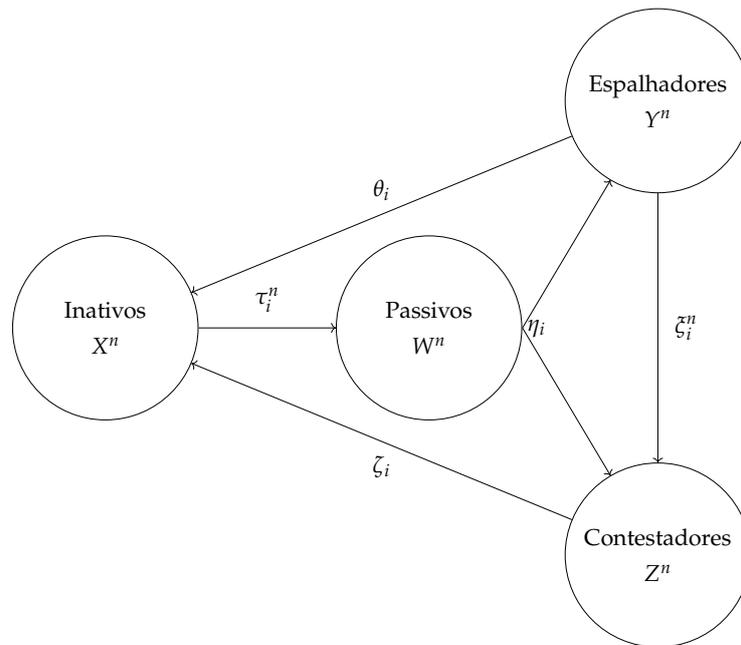


Figura 2: Representação gráfica do modelo: as setas indicam transições possíveis entre duas classes, e as variáveis aleatórias sobre elas denotam o tempo que o i -ésimo indivíduo na classe leva para mudar.

Sejam $(\mathcal{U}_i)_{i \geq 1}$ e $(\mathcal{U}_i^0)_{i \geq 1}$ famílias de variáveis aleatórias uniformes independentes no intervalo $[0, 1]$ mutuamente independentes. Para indivíduos que não começam a dinâmica como inativos no tempo 0, sejam η_i^0, θ_i^0 e ζ_i^0 os tempos análogos aos tempos η_i, θ_i e ζ_i , respectivamente.

O espalhamento do rumor é feito a partir de contatos entre indivíduos espalhadores e indivíduos ignorantes mas é amenizado pelos contatos entre indivíduos espalhadores e indivíduos contestadores. Sejam $A^n(t)$ o processo que conta cada vez que ocorre um encontro entre indivíduos inativos e espalhadores e $B^n(t)$ o processo que conta cada vez que ocorre um encontro entre espalhadores e contestadores até o tempo t . Tome $\mathcal{F}^n = (\mathcal{F}_t^n)_{t \geq 0}$ a filtração dada por

$$\mathcal{F}_t^n = \sigma\{X^n(s), W^n(s), Y^n(s), Z^n(s) : 0 \leq s \leq t\}$$

e suponha que as \mathcal{F}_t^n -intensidades estocásticas de $A^n(t)$ e $B^n(t)$ são $\lambda(t)X^n(t)\frac{Y^n(t)}{n}$ e $\alpha(t)Y^n(t)\frac{Z^n(t)}{n}$, respectivamente. Para maiores detalhes, ver o Apêndice A.3.

Os tempos τ_i^n e ζ_i^n são a i -ésima época de A^n e B^n , respectivamente.

É esperado que os tempos para cada indivíduo ou as escolhas que cada um toma sejam particulares e portanto independentes, isto é, assumimos que $\{\eta_i^0\}$, $\{\theta_i^0\}$, $\{\zeta_i^0\}$, $\{(\eta_i, \theta_i)\}$, $\{(\eta_i, \zeta_i)\}$, $\{\mathcal{U}_i\}$ e $\{(W^n(0), Y^n(0), Z^n(0))\}$ são mutuamente independentes e independentes de $A^n = (A^n(t))_{t \geq 0}$ e também de $B^n = (B^n(t))_{t \geq 0}$. Ainda, assuma que os tempos entre épocas de A^n e B^n são dois a dois independentes.

Dado que o tamanho da população é fixado para cada n , vale que:

$$X^n(t) = n - W^n(t) - Y^n(t) - Z^n(t).$$

Indivíduos passivos são uma “classe de espera” no seguinte sentido: um encontro entre um indivíduo passivo e qualquer outro não muda nada no modelo. Na equação abaixo, o primeiro termo refere-se àqueles que pertencem a esta classe desde o início do rumor e o segundo termo aos que vieram da classe de inativos:

$$W^n(t) = \sum_{i=1}^{W^n(0)} \mathbb{1}(t < \eta_i^0) + \sum_{i=1}^{A^n(t)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i).$$

Os indivíduos que espalham o rumor têm o papel mais importante no modelo, dado que não há espalhamento do rumor (o processo morre) na ausência deste tipo de indivíduos. No lado direito da equação de $Y^n(t)$, (4), o primeiro termo representa aqueles que no início do rumor eram passivos e então tornaram-se espalhadores, o segundo termo representa os que desde o início são espalhadores, o terceiro termo são aqueles que estavam inativos, tornaram-se passivos e então espalhadores e $B^n(t)$

representa os indivíduos que deixaram a classe de espalhadores para tornarem-se contestadores:

$$Y^n(t) = \sum_{j=1}^{W^n(0)} \mathbb{1}(\eta_j^0 \leq t < \eta_j^0 + \theta_j) \mathbb{1}(\mathcal{U}_j^0 \leq \beta) + \sum_{i=1}^{Y^n(0)} \mathbb{1}(t < \theta_i^0) \quad (4a)$$

$$+ \sum_{i=1}^{A^n(t)} \mathbb{1}(\tau_i^n + \eta_i \leq t < \tau_i^n + \eta_i + \theta_i) \mathbb{1}(\mathcal{U}_i \leq \beta) - B^n(t). \quad (4b)$$

A função dos indivíduos contestadores é contestar o indivíduos espalhadores, ou seja, esses indivíduos querem o fim do rumor. Sua dinâmica é muito similar à dinâmica de espalhadores, mas aqui o termo envolvendo $B^n(t)$ representa aqueles indivíduos que deixaram a classe de espalhadores para a classe de contestadores e não ficaram inativos desde então:

$$Z^n(t) = \sum_{j=1}^{W^n(0)} \mathbb{1}(\eta_j^0 \leq t < \eta_j^0 + \zeta_j) \mathbb{1}(\mathcal{U}_j^0 > \beta) + \sum_{i=1}^{Z^n(0)} \mathbb{1}(t < \zeta_i^0) \\ + \sum_{i=1}^{A^n(t)} \mathbb{1}(\tau_i^n + \eta_i \leq t < \tau_i^n + \eta_i + \zeta_i) \mathbb{1}(\mathcal{U}_i > \beta) + \sum_{i=1}^{B^n(t)} \mathbb{1}(t < \zeta_i^n + \zeta_i).$$

Assuma que $(\eta_i^0)_{i \geq 1}$, $(\theta_i^0)_{i \geq 1}$ e $(\zeta_i^0)_{i \geq 1}$ são sequências de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuições F^0 , G^0 e H^0 , respectivamente; $((\eta_i, \theta_i))_{i \geq 1}$ e $((\eta_i, \zeta_i))_{i \geq 1}$ são sequências de vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos com distribuições marginais $G(\cdot|x)$ de θ_i dado $\eta_i = x$ e $H(\cdot|x)$ de ζ_i dado $\eta_i = x$.

2.2.1 Proporções limite do modelo

Investigamos o comportamento assintótico relacionado aos processos descritos na seção anterior.

Primeiro, investigamos os valores esperados das proporções de indivíduos que têm diferentes dinâmicas. Para isso, defina para aqueles que no início do rumor (isto é, em $t = 0$) são passivos

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &:= \int_0^t \int_0^{t-u} \beta G(dv|u) dF_0(u), & \phi_0^\beta(t) &:= \int_0^t \int_0^{t-u} (1 - \beta) H(dv|u) dF_0(u), \\ \psi_0(t) &:= \int_0^t \int_{t-u}^\infty \beta G(dv|u) dF_0(u), & \psi_0^\beta(t) &:= \int_0^t \int_{t-u}^\infty (1 - \beta) H(dv|u) dF_0(u). \end{aligned}$$

Analogamente, defina para indivíduos que estiveram na classe de ignorantes

$$\begin{aligned}\phi(t) &:= \int_0^t \int_0^{t-u} \beta G(dv|u) dF(u), & \phi^\beta(t) &:= \int_0^t \int_0^{t-u} (1-\beta) H(dv|u) dF(u), \\ \psi(t) &:= \int_0^t \int_{t-u}^\infty \beta G(dv|u) dF(u), & \psi^\beta(t) &:= \int_0^t \int_{t-u}^\infty (1-\beta) H(dv|u) dF(u).\end{aligned}$$

Aqui, ϕ está relacionada à proporção de indivíduos que tornaram-se inativos e ψ aos indivíduos que mantêm-se numa classe não-inativa. Ainda, o índice β sobrescrito significa que refere-se à classe de contestadores, caso contrário de espalhadores.

Finalmente, para enunciar nosso primeiro resultado, a Lei dos Grandes Números Funcional, definimos o que chamamos Condição I.

Condição I. Quando $n \rightarrow +\infty$,

$$(\bar{W}^n(0), \bar{Y}^n(0), \bar{Z}^n(0)) \rightarrow (\bar{W}(0), \bar{Y}(0), \bar{Z}(0))$$

em probabilidade. Aqui $\bar{W}(0)$, $\bar{Y}(0)$ e $\bar{Z}(0)$ são constantes positivas tais que $\bar{W}(0) + \bar{Y}(0) + \bar{Z}(0) < 1$. Ainda, tomamos $\bar{X}(0) := 1 - \bar{W}(0) - \bar{Y}(0) - \bar{Z}(0)$.

A Condição I é a hipótese de convergência no instante inicial. Note que impor $\bar{x}(0) > 0$ garante que sempre existem indivíduos inativos no instante inicial, o que não é uma hipótese técnica.

Teorema 2.3 (Lei dos Grandes Números Funcional). *Assuma a Condição I e considere o modelo de disseminação de rumores com contestadores. Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{X}^n, \bar{W}^n, \bar{Y}^n, \bar{Z}^n) = (\bar{X}, \bar{W}, \bar{Y}, \bar{Z}) \quad \text{em } D^4,$$

em probabilidade, onde $(\bar{X}, \bar{W}, \bar{Y}, \bar{Z})$ é a solução para o sistema de equações integrais determinísticas:

$$\bar{X}(t) = 1 - \bar{W}(t) - \bar{Y}(t) - \bar{Z}(t), \tag{5}$$

$$\bar{W}(t) = \bar{W}(0)F_0^c(t) + \int_0^t \lambda(s)F^c(t-s)\bar{X}(s)\bar{Y}(s)ds, \tag{6}$$

$$\bar{Y}(t) = \bar{W}(0)\phi_0(t) + \bar{Y}(0)G_0^c(t) + \int_0^t \lambda(s)\phi(t-s)\bar{X}(s)\bar{Y}(s)ds - \int_0^t \alpha(s)\bar{Y}(s)\bar{Z}(s)ds, \tag{7}$$

$$\bar{Z}(t) = \bar{W}(0)\phi_0^\beta(t) + \bar{Z}(0)H_0^c(t) + \int_0^t \lambda(s)\phi^\beta(t-s)\bar{X}(s)\bar{Y}(s)ds + \int_0^t \alpha(s)H^c(t-s)\bar{Y}(s)\bar{Z}(s)ds. \tag{8}$$

2.2.2 Flutuações das proporções limite

O Teorema 2.3 nos descreve o comportamento assintótico das proporções de cada classe de indivíduos na população. Entretanto, muitas vezes é necessário ter uma melhor compreensão das proporções limite, por exemplo verificando a flutuação das proporções escaladas. Então consideramos os processos ditos em difusão escalada. Sejam:

$$\hat{W}^n(t) := \sqrt{n}(\bar{W}^n(t) - \bar{W}(t)), \hat{Y}^n(t) := \sqrt{n}(\bar{Y}^n(t) - \bar{Y}(t)), \hat{Z}^n(t) := \sqrt{n}(\bar{Z}^n(t) - \bar{Z}(t)) \quad (9)$$

e $\hat{X}^n(t) := -\hat{W}^n(t) - \hat{Y}^n(t) - \hat{Z}^n(t)$ para $t \geq 0$.

Assim como quando investigamos as proporções iniciais limite, é necessário garantir algum controle sobre as flutuações das proporções iniciais limite. Para isso, enunciamos a seguinte condição.

Condição II. Sob a Condição I, existem variáveis aleatórias $\hat{W}(0)$, $\hat{Y}(0)$ e $\hat{Z}(0)$ tais que, quando $n \rightarrow \infty$,

$$(\hat{W}^n(0), \hat{Y}^n(0), \hat{Z}^n(0)) \Rightarrow (\hat{W}(0), \hat{Y}(0), \hat{Z}(0))$$

e $\sup_n \mathbb{E}[\hat{W}^n(0)^2] + \sup_n \mathbb{E}[\hat{Y}^n(0)^2] + \sup_n \mathbb{E}[\hat{Z}^n(0)^2] < \infty$.

Tendo a convergência dos processos em difusão escalada no instante inicial, podemos enunciar o nosso último teorema principal deste capítulo.

Teorema 2.4 (Teorema Central do Limite Funcional). *Sob a Condição II, o modelo de disseminação de rumores com contestadores satisfaz para $n \rightarrow +\infty$,*

$$(\hat{X}^n, \hat{W}^n, \hat{Y}^n, \hat{Z}^n) \Rightarrow (\hat{X}, \hat{W}, \hat{Y}, \hat{Z}) \in D^4$$

onde $(\hat{X}, \hat{W}, \hat{Y}, \hat{Z})$ é a única solução ao seguinte sistema de equações integrais estocásticas de Volterra:

$$\hat{X}(t) = -\hat{W}(t) - \hat{Y}(t) - \hat{Z}(t), \quad (10)$$

$$\hat{W}(t) = \hat{W}(0)F_0^c(t) + \hat{W}_0(t) + \hat{W}_1(t) + \int_0^t \lambda(s)F^c(t-s)(\hat{X}(s)\bar{Y}(s) + \bar{X}(s)\hat{Y}(s))ds, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}(t) = & \hat{W}(0)\phi_0(t) + \hat{Y}(0)G_0^c(t) + \hat{Y}_{0,1}(t) + \hat{Y}_{0,2}(t) + \hat{Y}_1(t) + \hat{Y}_2(t) \\ & + \int_0^t \lambda(s)\psi(t-s)(\hat{X}(s)\bar{Y}(s) + \bar{X}(s)\hat{Y}(s))ds - \int_0^t \alpha(s)(\hat{Y}(s)\bar{Z}(s) + \bar{Y}(s)\hat{Z}(s))ds, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \hat{Z}(t) = & \hat{W}(0)\phi^\beta(t) + \hat{Z}(0)H_0^c(t) + \hat{Z}_{0,1}(t) + \hat{Z}_{0,2}(t) + \hat{Z}_1(t) + \hat{Z}_2(t) \\ & + \int_0^t \lambda(s)\psi^\beta(t-s)(\hat{X}(s)\bar{Y}(s) + \bar{X}(s)\hat{Y}(s))ds + \int_0^t \alpha(s)H^c(t-s)(\hat{Y}(s)\bar{Z}(s) + \bar{Y}(s)\hat{Z}(s))ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Os processos $\hat{W}_0, \hat{W}_1, \hat{Y}_{0,1}, \hat{Y}_{0,2}, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Z}_{0,1}, \hat{Z}_{0,2}, \hat{Z}_1, \hat{Z}_2$ são processos Gaussianos de média zero.

A seguir, caracterizamos as covariâncias entre os processos Gaussianos dados no Teorema 2.4. Para isso, definimos antes o processo $Q^B : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ como:

$$Q^B(t, r) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_i^n \leq r \wedge t) \mathbb{P}(\xi_i^n > r \vee t).$$

Lema 2.5. As covariâncias não-nulas entre os processos do Teorema 2.4 são dadas na Tabela 1.

$\text{Cov}[\hat{W}_0(t), \hat{W}_0(r)]$	$\bar{W}(0)F(r \wedge t)(1 - F(r \vee t))$
$\text{Cov}[\hat{Y}_{0,1}(t), \hat{Y}_{0,1}(r)]$	$\bar{W}(0)\psi_0(r \wedge t)(1 - \psi_0(r \vee t))$
$\text{Cov}[\hat{Y}_{0,2}(t), \hat{Y}_{0,2}(r)]$	$\bar{Y}(0)G(r \wedge t)(1 - G(r \vee t))$
$\text{Cov}[\hat{Z}_{0,1}(t), \hat{Z}_{0,1}(r)]$	$\bar{W}(0)\psi_0^\beta(r \wedge t)(1 - \psi_0^\beta(r \vee t))$
$\text{Cov}[\hat{Z}_{0,2}(t), \hat{Z}_{0,2}(r)]$	$\bar{Z}(0)H(r \wedge t)(1 - H(r \vee t))$
$\text{Cov}[\hat{W}_0(t), \hat{Y}_{0,1}(r)]$	$\bar{W}(0)\mathbb{1}(t \leq r) \int_t^r G(r-s)F(ds) - \bar{W}(0)F_0^c(t)\psi_0(r)$
$\text{Cov}[\hat{W}_0(t), \hat{Z}_{0,1}(r)]$	$\bar{W}(0)\mathbb{1}(t \leq r) \int_t^r H(r-s)F(ds) - \bar{W}(0)F_0^c(t)\psi_0^\beta(r)$
$\text{Cov}[\hat{W}_1(t), \hat{W}_1(r)]$	$\int_0^{r \wedge t} \lambda(s)F^c(r \vee t - s)F(r \wedge t - s)\bar{X}(s)\bar{Y}(s)ds$
$\text{Cov}[\hat{Y}_1(t), \hat{Y}_1(r)]$	$\int_0^{r \wedge t} \lambda(s) \left(\int_0^{r \wedge t} \int_{r \vee t - u}^{r \vee t} \beta G(dv u)F(du) - \psi(r-s)\psi(t-s) \right) \bar{X}(s)\bar{Y}(s)ds$
$\text{Cov}[\hat{Z}_1(t), \hat{Z}_1(r)]$	$\int_0^{r \wedge t} \lambda(s) \left(\int_0^{r \wedge t} \int_{r \vee t - u}^{r \vee t} (1 - \beta)H(dv u)F(du) - \psi^\beta(r-s)\psi^\beta(t-s) \right) \bar{X}(s)\bar{Y}(s)ds$
$\text{Cov}[\hat{W}_1(t), \hat{Y}_1(r)]$	$\mathbb{1}(r > t) \int_0^t \lambda(s) \left(F(t-s)\psi(r-s) - \int_0^{t-s} \int_{r-u-s}^\infty \beta G(dv u)F(du) \right) \bar{X}(s)\bar{Y}(s)ds$
$\text{Cov}[\hat{W}_1(t), \hat{Z}_1(r)]$	$\mathbb{1}(r > t) \int_0^t \lambda(s) \left(F(t-s)\psi^\beta(r-s) - \int_0^{t-s} \int_{r-u-s}^\infty (1 - \beta)H(dv u)F(du) \right) \bar{X}(s)\bar{Y}(s)ds$
$\text{Cov}[\hat{Y}_1(t), \hat{Z}_1(r)]$	$-\int_0^{r \wedge t} \lambda(s)\psi(t-s)\psi^\beta(r-s)\bar{X}(s)\bar{Y}(s)ds$
$\text{Cov}[\hat{Y}_2(t), \hat{Y}_2(r)]$	$Q^B(t, r)$
$\text{Cov}[\hat{Z}_2(t), \hat{Z}_2(r)]$	$\int_0^{r \wedge t} \alpha(s)H^c(t \wedge r - s)H(t \vee r - s)\bar{Y}(s)\bar{Z}(s)ds$
$\text{Cov}[\hat{Y}_2(t), \hat{Z}_2(r)]$	$\mathbb{1}(r > t) \int_0^{t \wedge r} \alpha(s)H^c(r - s)\bar{Y}(s)\bar{Z}(s)ds$

Tabela 1: Covariâncias entre os processos obtidos no Teorema 2.4

2.3 PROVAS

Preliminares

Os processos de contagem do nosso modelo admitem intensidade estocástica (ver Apêndice A.3). Para mostrar os teoremas limite exibidos na Seção 2.2.1 primeiro mostramos rigidez para os nossos processos. Além disso, mostramos que integrais de funções razoáveis com respeito a esses processos de contagem convergem no sentido do Teorema 2.3 e então obtemos o resultado desejado.

Queremos mostrar que no espaço de funções contínuas à direita com limites a esquerda, o espaço de càdlàgs D , nossos processos são rígidos, isto é, a sequência de medidas induzidas pelo processo é relativamente compacta. Para mais detalhes, ver Apêndice A.1.

Teorema 2.6. *Seja $\{C^n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de processos de contagem com \mathcal{F}^n -intensidade estocástica γ_n tal que $\sup_{n \geq 1} n^{-1}\gamma_n$ é limitada quase certamente. Então a sequência $\{\bar{C}^n\}$ é rígida em D .*

Demonstração. Seja $M > 0$ uma cota superior para $\sup_{n \geq 1} n^{-1}\gamma_n$. Fixado $m > 0$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_n \mathbb{P}[\sup_{s \in [0, m]} |\bar{C}^n(s)| \geq a] &\leq \lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_n \frac{\mathbb{E}[\sup_{s \in [0, m]} |\bar{C}^n(s)|]}{a} \\ &\leq \lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_n \frac{\mathbb{E}[|\bar{C}^n(m)|]}{a} \\ &\leq \lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_n \frac{Mm}{a} = 0 \end{aligned}$$

Além disso, para todo ε, η e m , existem δ_0 e n_0 tais que se $\delta \leq \delta_0$ e $n \geq n_0$, e se τ é um tempo de parada de alcance finito para o processo $C^n(t)$ satisfazendo $\tau \leq m$, então

$$\mathbb{P}[|\bar{C}^n(\tau + \delta) - \bar{C}^n(\tau)| \geq \varepsilon] \leq \eta.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|\bar{C}^n(\tau + \delta) - \bar{C}^n(\tau)| \geq \varepsilon] &\leq \frac{\mathbb{E}[|\bar{C}^n(\tau + \delta) - \bar{C}^n(\tau)|]}{\varepsilon} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[\int_{\tau}^{\tau + \delta} n^{-1}\gamma_n(s) ds]}{\varepsilon} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[\int_{\tau}^{\tau + \delta} M ds]}{\varepsilon} \\ &\leq \frac{M\delta}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

O resultado segue do Teorema de Aldous (Teorema A.46). \square

Corolário 2.7. *As sequências de processos de contagem $\{\bar{A}^n\}$ e $\{\bar{B}^n\}$ são rígidas em D .*

Demonstração. Basta observar que as intensidades estocásticas de A^n e B^n estão nas hipóteses do Teorema 2.6. De fato, λ e α são funções positivas e limitadas, e vale que

$$\sup_n \lambda(t) \frac{X^n(t)}{n} \frac{Y^n(t)}{n} \leq \lambda(t), \quad \sup_n \alpha(t) \frac{Y^n(t)}{n} \frac{Z^n(t)}{n} \leq \alpha(t),$$

para todo $t \geq 0$.

O corolário a seguir segue ao tomar o Teorema 2.6 e usar um limitante para as funções λ e α . \square

Corolário 2.8. *Seja $\{C^n\}$ uma sequência de processos de contagem como nas hipóteses do Teorema 2.6. Assuma que $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias mutuamente independentes e independentes de C^n para todo n e que $f : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada. Seja*

$$V^n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{C^n(t)} f(\tau_i^n, t, a_i).$$

Então $\{V^n\}$ é rígida em D

Demonstração. A demonstração do Corolário 2.8 segue exatamente como a demonstração do Teorema 2.6 e por isso é omitida. \square

Teorema 2.9. *Nas condições do Corolário 2.8, $V^n - \mathbb{E}[V^n | C^n]$ converge em probabilidade para 0.*

Demonstração. Precisamos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(\sup_{t \in [0, T]} |V^n(t) - \mathbb{E}[V^n | C^n](t)| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. Observe que

$$\limsup_n \mathbb{P}(\sup_{t \in [0, T]} |V^n(t) - \mathbb{E}[V^n | C^n](t)| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\limsup_n \sup_{t \in [0, T]} |V^n(t) - \mathbb{E}[V^n | C^n](t)| > \varepsilon)$$

e

$$\{\limsup_n \sup_{t \in [0, T]} |V^n(t) - \mathbb{E}[V^n | C^n](t)| > \varepsilon\} \subset \{\sup_{t \in [0, T]} \limsup_n |V^n(t) - \mathbb{E}[V^n | C^n](t)| > \varepsilon\}.$$

De fato, escrevendo $V^n(t) - \mathbb{E}[V^n|C^n](t) = h_n(t)$, temos:

$$\limsup_n \sup_{t \in [0, T]} h_n(t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} \sup_{t \in [0, T]} h_m(t) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} h_m(t) = \limsup_n h_n(t),$$

para todo $t \in [0, T]$. Tomando o supremo em t do lado direito, obtemos a relação de conjuntos desejada. É suficiente, então, mostrar que para cada t ,

$$\limsup_n |V^n(t) - \mathbb{E}[V^n|C^n](t)| = 0. \quad (14)$$

Note que:

$$V^n(t) - \mathbb{E}[V^n|C^n](t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{C^n(t)} \chi_i^n(t)$$

com $\chi_i^n(t) := f(\tau_i^n, t, a_i) - \mathbb{E}[f(\tau_i^n, t, a_i)|C^n(t)]$. Pelo Corolário 2.8, $(V^n - \mathbb{E}[V^n|C^n])_{n \in \mathbb{N}}$ é rígida em D e $\limsup_n |V^n(t) - \mathbb{E}[V^n|C^n](t)|$ converge em probabilidade para cada t fixado. Seja \mathcal{V} o limite quase certo de uma subsequência convergente $(V^{n_k} - \mathbb{E}[V^{n_k}|C^{n_k}])_{n_k}$. Então segue do Teorema de convergência em média de Cèsaro (*Cèsaro mean convergence theorem*) que (Corolário 1.2, [18])

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V^{n_i}(t) - \mathbb{E}[V^{n_i}|C^{n_i}](t) = \mathcal{V}(t)$$

para cada t . Do Lema de Kronecker (Corolário 1.3, [18]) temos que se a seguinte série

$$\sum_{i=1}^k \frac{V^{n_i}(t) - \mathbb{E}[V^{n_i}|C^{n_i}](t)}{i} \quad (15)$$

converge quando $k \rightarrow \infty$, então $\mathcal{V}(t) = 0$. Dado que $(\bar{C}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é rígido e $\mathbb{E}[\chi_i^n(t)] = 0$ para cada i, n e t ,

$$\sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left[\frac{V^{n_i}(t) - \mathbb{E}[V^{n_i}|C^{n_i}](t)}{i} \right] = 0.$$

Se M é um limitante superior de $|f|$, então $|\chi_i^n(t)| \leq 2M$ e

$$\sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left[\frac{(V^{n_i}(t) - \mathbb{E}[V^{n_i}|C^{n_i}](t))^2}{i^2} \right] \leq \sum_{i=1}^k \frac{4M^2 \left(\frac{C^{n_i}(t)}{n_i} \right)^2}{i^2} = 4M^2 \sum_{i=1}^k \frac{(\bar{C}^{n_i}(t))^2}{i^2}. \quad (16)$$

Como (\bar{C}^n) é uma sequência rígida, as séries na equação (16) convergem. Usando o Teorema de duas séries (ver [30, p 386]) temos que a série na equação (15) converge quase certamente. Dado que $\mathcal{V}(t) = 0$, vale a equação (14) e o resultado segue. \square

2.3.1 Lei dos Grandes Números Funcional

Aqui, demonstramos a lei dos grandes números para nosso modelo de rumor, que pode ser vista como um teorema limite das proporções de indivíduos em cada classe quando o tamanho da população tende a infinito.

Demonstração do Teorema 2.3

A prova da lei dos grandes números funcional é dividida em 3 partes. Primeiro, mostramos que as proporções correspondentes à configuração inicial convergem quase certamente para um limite conhecido. Depois mostramos que as proporções correspondentes ao modelo de rumor convergem em probabilidade e identificamos esse limite.

Mostremos as convergências para as proporções iniciais. Seja

$$\bar{W}_0^n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n\bar{W}^n(0)} \mathbb{1}(t < \eta_i^0) \quad \text{and} \quad \check{W}_0^n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor n\bar{W}(0) \rfloor} \mathbb{1}(t < \eta_i^0), \quad t \geq 0.$$

então

$$|\bar{W}_0^n(t) - \check{W}_0^n(t)| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=n\bar{W}^n(0) \wedge \lfloor n\bar{W}(0) \rfloor}^{n\bar{W}^n(0) \vee \lfloor n\bar{W}(0) \rfloor} \mathbb{1}(t < \eta_i^0), \quad t \geq 0.$$

Segue da Condição I e da independência das variáveis aleatórias η_i^0 que

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=n\bar{W}^n(0) \wedge \lfloor n\bar{W}(0) \rfloor}^{n\bar{W}^n(0) \vee \lfloor n\bar{W}(0) \rfloor} \mathbb{1}(t < \eta_i^0) \middle| \mathcal{F}_0^n \right] \leq F_0^c(t) |\bar{W}^n(0) - \bar{W}(0)|$$

converge em probabilidade para zero quando n vai para infinito. Pelo Teorema A.42 temos, para cada $t \geq 0$, que

$$\bar{W}_0^n(t) \rightarrow \bar{W}_0(t) = \bar{W}(0)F_0^c(t) \quad \text{em D quando } n \rightarrow \infty.$$

Ou seja, mostramos que a proporção inicial de indivíduos que começam na classe de passivos e não saem desta classe até o tempo t converge em probabilidade para uma quantidade conhecida. Agora definimos quantidades análogas para outras classes do modelo.

As quantidades

$$\bar{Y}_{0,1}^n(t) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n\bar{W}^n(0)} \mathbb{1}(\eta_j^0 \leq t < \eta_j^0 + \theta_j) \mathbb{1}(\mathcal{U}_j^0 \leq \beta) \quad \text{e} \quad \bar{Y}_{0,2}^n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n\bar{Y}^n(0)} \mathbb{1}(t < \theta_i^0)$$

denotam a proporção de espalhadores no tempo t que no tempo 0 eram ou passivos ou espalhadores. Em ambos os casos, o espalhador mudou de classe no máximo uma vez. As quantidades

$$\bar{Z}_{0,1}^n(t) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n\bar{W}^n(0)} \mathbb{1}(\eta_j^0 \leq t < \eta_j^0 + \zeta_j) \mathbb{1}(\mathcal{U}_j^0 > \beta) \text{ e } \bar{Z}_{0,2}^n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n\bar{Z}^n(0)} \mathbb{1}(t < \zeta_i^0).$$

denotam a proporção de contestadores no tempo t que no tempo 0 eram ou passivos ou contestantes. Em ambos os casos, o indivíduo mudou de classe no máximo uma vez. Em seguida, mostramos a convergência em probabilidade para esses processos.

Lema 2.10. Quando $n \rightarrow \infty$

$$(\bar{Y}_{0,1}^n, \bar{Y}_{0,2}^n, \bar{Z}_{0,1}^n, \bar{Z}_{0,2}^n) \rightarrow (\bar{Y}_{0,1}, \bar{Y}_{0,2}, \bar{Z}_{0,1}, \bar{Z}_{0,2})$$

em probabilidade, onde

$$\bar{Y}_{0,1}(t) = \bar{W}(0)\psi_0(t), \quad \bar{Y}_{0,2}(t) = \bar{Y}(0)G_0^c(t), \quad \bar{Z}_{0,1}(t) = \bar{W}(0)\psi_0^\beta(t), \quad \bar{Z}_{0,2}(t) = \bar{Z}(0)H_0^c(t).$$

Demonstração. A prova é análoga à que foi feita para \bar{W}^n . Apenas precisamos mostrar o resultado para $\bar{Y}_{0,1}^n$ pois para os outros casos é muito similar. Seja

$$\check{Y}_{0,1}^n(t) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\lfloor n\bar{W}(0) \rfloor} \mathbb{1}(\eta_j^0 \leq t < \eta_j^0 + \theta_j) \mathbb{1}(\mathcal{U}_j^0 \leq \beta), \quad t \geq 0.$$

Observe que

$$|\check{Y}_{0,1}^n(t) - \bar{Y}_{0,1}^n(t)| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=n\bar{W}^n(0) \wedge \lfloor n\bar{W}(0) \rfloor}^{n\bar{W}^n(0) \vee \lfloor n\bar{W}(0) \rfloor} \mathbb{1}(\eta_j^0 \leq t < \eta_j^0 + \theta_j) \mathbb{1}(\mathcal{U}_j^0 \leq \beta).$$

Da Condição I e da independência das variáveis aleatórias η_j^0 , θ_j e \mathcal{U}_j^0 vale que:

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=n\bar{W}^n(0) \wedge \lfloor n\bar{W}(0) \rfloor}^{n\bar{W}^n(0) \vee \lfloor n\bar{W}(0) \rfloor} \mathbb{1}(\eta_j^0 \leq t < \eta_j^0 + \theta_j) \mathbb{1}(\mathcal{U}_j^0 \leq \beta) \middle| \mathcal{F}_0^n \right] \leq \psi_0(t) |\bar{W}^n(0) - \bar{W}(0)|.$$

Dado que o lado direito da equação acima converge em probabilidade para zero quando $n \rightarrow \infty$ (Condição I), o Teorema A.42 garante que para cada $t \geq 0$,

$$\bar{Y}_{0,1}^n(t) \rightarrow \bar{Y}_{0,1}(t) = \bar{W}(0)F_0^c(t) \quad \text{em } D \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad \square$$

Agora investigamos o comportamento assintótico de processos onde há interação entre indivíduos. Defina

$$\begin{aligned}\bar{W}_1^n(t) &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n\bar{A}^n(t)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i) \\ \bar{Y}_1^n(t) &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n\bar{A}^n(t)} \mathbb{1}(\tau_i^n + \eta_i \leq t < \tau_i^n + \eta_i + \theta_i) \mathbb{1}(\mathcal{U}_i \leq \beta) \\ \bar{Z}_1^n(t) &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n\bar{A}^n(t)} \mathbb{1}(\tau_i^n + \eta_i \leq t < \tau_i^n + \eta_i + \zeta_i) \mathbb{1}(\mathcal{U}_i > \beta), \\ \bar{Z}_2^n(t) &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n\bar{B}^n(t)} \mathbb{1}(t < \zeta_i^n + \zeta_i).\end{aligned}$$

Lema 2.11. *Temos*

1. $\sup_{t \in [0, T]} |\bar{W}_1^n(t) - \mathbb{E}[\bar{W}_1^n(t) | A^n(t)]| \rightarrow 0,$
2. $\sup_{t \in [0, T]} |\bar{Y}_1^n(t) - \mathbb{E}[\bar{Y}_1^n(t) | A^n(t)]| \rightarrow 0,$
3. $\sup_{t \in [0, T]} |\bar{Z}_1^n(t) - \mathbb{E}[\bar{Z}_1^n(t) | A^n(t)]| \rightarrow 0,$
4. $\sup_{t \in [0, T]} |\bar{Z}_2^n(t) - \mathbb{E}[\bar{Z}_2^n(t) | B^n(t)]| \rightarrow 0,$

em probabilidade, quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Demonstramos a convergência apenas para (1), pois os casos (2)-(4) são similares. Tome

$$V^n(t) := \bar{W}_1^n(t) - \mathbb{E}[\bar{W}_1^n(t) | A^n(t)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n\bar{A}^n(t)} \chi_i^n(t), \quad t \geq 0$$

onde $\chi_i^n(t) = \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i) - F^c(t - \tau_i^n)$. Segue então que (1) é uma aplicação direta do Teorema 2.9. \square

No próximo resultados caracterizamos o limite para os processos acima. Pelo Corolário 2.7, podemos trabalhar com uma subsequência convergente de (\bar{A}^n, \bar{B}^n) . Seja (\bar{A}, \bar{B}) o limite sobre essa subsequência convergente.

Lema 2.12. Quando $n \rightarrow \infty$ vale o seguinte:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_1^n(t)|A^n(t)] &\rightarrow \bar{W}_1(t) := \int_0^t F^c(t-s)d\bar{A}(s), \\ \mathbb{E}[Y_1^n(t)|A^n(t)] &\rightarrow \bar{Y}_1(t) := \int_0^t \psi(t-s)d\bar{A}(s), \\ \mathbb{E}[Z_1^n(t)|A^n(t)] &\rightarrow \bar{Z}_1(t) := \int_0^t \psi^\beta(t-s)d\bar{A}(s), \\ \mathbb{E}[Z_2^n(t)|B^n(t)] &\rightarrow \bar{Z}_2(t) := \int_0^t H^c(t-s)d\bar{B}(t),\end{aligned}$$

em probabilidade.

Demonstração. Demonstramos apenas o primeiro caso, pois a prova para os demais é similar. Pode-se notar que:

$$\mathbb{E}[\bar{W}_1^n(t)|A^n(t)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n\bar{A}^n(t)} F^c(t - \tau_i^n) = \int_0^t F^c(t-s)d\bar{A}^n(s), \quad t \geq 0.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\mathbb{E}[\bar{W}_1^n(t)|A^n(t)] = \bar{A}^n(t) - \int_0^t \bar{A}^n(s)dF^c(t-s).$$

Segue de um argumento de continuidade que

$$\mathbb{E}[\bar{W}_1^n(t)|A^n(t)] = \bar{A}^n(t) - \int_0^t \bar{A}^n(s) dF^c(t-s) \rightarrow \bar{A}(t) - \int_0^t \bar{A}(s) dF^c(t-s) =: \bar{W}_1(t).$$

Novamente, por integração por partes,

$$\bar{W}_1(t) = \int_0^t F^c(t-s)d\bar{A}(s).$$

□

Em outras palavras, mostramos que existem processos estocásticos \tilde{W} , \tilde{Y} e \tilde{Z} em D tais que $(\bar{W}^n, \bar{Y}^n, \bar{Z}^n)$ converge para $(\tilde{W}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ em probabilidade quando $n \rightarrow \infty$, onde

$$\begin{aligned}\tilde{W} &:= \bar{W}_0 + \bar{W}_1 \\ \tilde{Y} &:= \bar{Y}_{0,1} + \bar{Y}_{0,2} + \bar{Y}_1 - \bar{B} \\ \tilde{Z} &:= \bar{Y}_{0,1} + \bar{Y}_{0,2} + \bar{Y}_1 + \bar{Z}_2.\end{aligned}$$

Para finalizar a prova do Teorema 2.3, temos o seguinte lema, cuja prova se encontra na próxima seção.

Lema 2.13. Para $n \rightarrow \infty$,

$$\bar{A}^n(t) - \int_0^t \lambda(s) \frac{X^n(s)}{n} \frac{Y^n(s)}{n} ds \rightarrow 0$$

e

$$\bar{B}^n(t) - \int_0^t \alpha(s) \frac{Y^n(s)}{n} \frac{Z^n(s)}{n} ds \rightarrow 0,$$

em probabilidade.

Dado que $\bar{X}^n = 1 - \bar{W}^n - \bar{Y}^n - \bar{Z}^n$ e os processos estocásticos envolvidos são rígidos, usamos o Lema 2.13 para concluir que $(\tilde{W}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = (\bar{W}, \bar{Y}, \bar{Z})$ onde \bar{W}, \bar{Y} e \bar{Z} são definidos nas equações (6),(7) e (8), respectivamente. Isso conclui a demonstração da Lei dos Grandes Números Funcional.

2.3.2 Teorema Central do Limite Funcional

Nesta subseção nos dedicamos inteiramente à demonstração do Teorema Central do Limite Funcional para nosso modelo.

Prova do Teorema 2.4

Para demonstrar o Teorema 2.4, reescrevemos o sistema de equações integrais (9) dos processos em difusão escalada como segue:

$$\begin{aligned} \hat{W}^n(t) &= \hat{W}^n(0)F_0^c(t) + \hat{W}_0^n(t) + \hat{W}_1^n(t) \\ &\quad + \int_0^t \lambda(s)F^c(t-s)(\hat{X}^n(s)\bar{Y}^n(s) + \bar{X}(s)\hat{Y}^n(s))ds, \\ \hat{Y}^n(t) &= \hat{W}^n(0)\psi_0(t) + \hat{Y}^n(0)G_0^c(t) + \hat{Y}_{0,1}^n(t) + \hat{Y}_{0,2}^n(t) + \hat{Y}_1^n(t) + \hat{Y}_2^n(t) \\ &\quad + \int_0^t \lambda(s)\psi(t-s)(\hat{X}^n(s)\bar{Y}^n(s) + \bar{X}(s)\hat{Y}^n(s))ds \\ &\quad + \int_0^t \alpha(s)(\hat{Y}^n(s)\bar{Z}^n(s) + \bar{Y}(s)\hat{Z}^n(s))ds, \\ \hat{Z}^n(t) &= \hat{W}^n(0)\psi^\beta(t) + \hat{Z}^n(0)H_0^c(t) + \hat{Z}_{0,1}^n(t) + \hat{Z}_{0,2}^n(t) + \hat{Z}_1^n(t) + \hat{Z}_2^n(t) \\ &\quad + \int_0^t \lambda(s)\psi^\beta(t-s)(\hat{X}^n(s)\bar{Y}^n(s) + \bar{X}(s)\hat{Y}^n(s))ds \\ &\quad + \int_0^t \alpha(s)H^c(t-s)(\hat{Y}^n(s)\bar{Z}^n(s) + \bar{Y}(s)\hat{Z}^n(s))ds, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{W}_0^n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{W^n(0)} \left(\mathbb{1}(t < \eta_i^0) - F_0^c(t) \right), \\ \hat{W}_1^n(t) &= \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(t)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i) - \int_0^t \lambda(s) F^c(t-s) \bar{X}^n(s) \bar{Y}^n(s) ds \right)\end{aligned}$$

são processos estocásticos relacionados aos indivíduos passivos convergindo a um ruído branco padrão (ver lemas 2.14 e 2.18). Ainda, temos

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{0,1}^n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{W^n(0)} \left(\mathbb{1}(\eta_j^0 \leq t < \eta_j^0 + \theta_j) \mathbb{1}(\mathcal{U}_j^0 \leq \beta) - \psi_0(t) \right), \\ \hat{Y}_{0,2}^n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{Y^n(0)} \left(\mathbb{1}(t < \theta_i^0) - G_0^c(t) \right), \\ \hat{Y}_1^n(t) &= \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(t)} \mathbb{1}(\tau_i^n + \eta_i \leq t < \tau_i^n + \eta_i + \theta_i) \mathbb{1}(\mathcal{U}_i \leq \beta) - \int_0^t \lambda(s) \psi(t-s) \bar{X}^n(s) \bar{Y}^n(s) ds \right), \\ \hat{Y}_2^n(t) &= \sqrt{n} \left(\bar{B}^n(t) - \int_0^t \alpha(s) \bar{Y}^n(s) \bar{Z}^n(s) ds \right),\end{aligned}$$

que são processos estocásticos relacionados aos indivíduos espalhadores convergindo para um ruído branco padrão. Também,

$$\begin{aligned}\hat{Z}_{0,1}^n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{W^n(0)} \left(\mathbb{1}(\eta_j^0 \leq t < \eta_j^0 + \zeta_j) \mathbb{1}(\mathcal{U}_j^0 > \beta) - \psi_0^\beta(t) \right), \\ \hat{Z}_{0,2}^n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{Z^n(0)} \left(\mathbb{1}(t < \zeta_i^0) - H_0^c(t) \right), \\ \hat{Z}_1^n(t) &= \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(t)} \mathbb{1}(\tau_i^n + \eta_i \leq t < \tau_i^n + \eta_i + \zeta_i) \mathbb{1}(\mathcal{U}_i > \beta) - \int_0^t \lambda(s) \psi^\beta(t-s) \bar{X}^n(s) \bar{Y}^n(s) ds \right), \\ \hat{Z}_2^n(t) &= \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{B^n(t)} \mathbb{1}(t < \zeta_i^n + \zeta_i) - \int_0^t \alpha(s) H^c(t-s) \bar{Y}^n(s) \bar{Z}^n(s) ds \right)\end{aligned}$$

são processos estocásticos relacionados aos indivíduos contestadores convergindo a um ruído branco padrão. A demonstração do teorema então é dividida em quatro partes. Começamos mostrando a convergência fraca para um ruído branco dos processos introduzidos acima sobre as configurações iniciais. Depois, estabelecemos a propriedade de martingal dos processos restantes para outro tipo de ruído branco. Na terceira parte, caracterizamos a variação quadrática destes martingais e mostramos a convergência

fraca para processos gaussianos. Por fim, usando os resultados obtidos nas três primeiras partes, obtemos processos estocásticos rígidos para um sistema de equações integrais. Usando um lema clássico para existência e unicidade de equações integrais, definimos um mapa contínuo no espaço de càdlàg e finalizamos a prova por um argumento de continuidade.

O lema a seguir segue imediatamente do Teorema Teorema A.42, portanto omitimos sua demonstração.

Lema 2.14. *Quando $n \rightarrow \infty$, vale que:*

$$(\hat{W}_0^n, \hat{Y}_{0,1}^n, \hat{Y}_{0,2}^n, \hat{Z}_{0,1}^n, \hat{Z}_{0,2}^n) \Rightarrow (\hat{W}_0, \hat{Y}_{0,1}, \hat{Y}_{0,2}, \hat{Z}_{0,1}, \hat{Z}_{0,2}),$$

onde o processo limite é um processo Gaussiano de média zero com covariâncias não-nulas dadas na Tabela 1.

A seguir, usamos a noção de intensidade estocástica. Referimos ao leitor o Apêndice A para maiores comentários e referências.

Proposição 2.15. *A Tabela 2 relaciona os processos à esquerda com as respectivas intensidades estocásticas à direita.*

Processo	Intensidade Estocástica
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(s)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i)$	$\lambda(s)F^c(t-s)\bar{X}^n(s)\bar{Y}^n(s)$
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(s)} \mathbb{1}(\tau_i^n + \eta_i \leq t < \tau_i^n + \eta_i + \theta_i) \mathbb{1}(\mathcal{U}_i \leq \beta)$	$\lambda(s)\psi(t-s)\bar{X}^n(s)\bar{Y}^n(s)$
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(s)} \mathbb{1}(\tau_i^n + \eta_i \leq t < \tau_i^n + \eta_i + \zeta_i) \mathbb{1}(\mathcal{U}_i > \beta)$	$\lambda(s)\psi^\beta(t-s)\bar{X}^n(s)\bar{Y}^n(s)$
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{B^n(s)} \mathbb{1}(t < \zeta_i^n + \zeta_i)$	$\alpha(s)H^c(t-s)\bar{Y}^n(s)\bar{Z}^n(s)$

Tabela 2: Tabela com intensidade estocástica dos processos calculada para a proposição

Demonstração. Do Teorema A.52 segue que as expressões do lado direito da tabela são \mathcal{F} -progressivas.

Fixe $t \geq 0$ e tome

$$N(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(s)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i).$$

Para um processo integrável C , a propriedade de torre de esperança condicional implica:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty C(s) dN(s) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty C(s) d \mathbb{E}[N(s) | A^n(s)] \right].$$

Note que

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(s)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i) \middle| A^n(s) \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(s)} F^c(t - \tau_i^n) = \int_0^s F^c(t - r) d\bar{A}^n(r).$$

Além disso, como F^c é integrável,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^s F^c(t - r) d\bar{A}^n(r) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^s F^c(t - r) \lambda(r) \bar{X}^n(r) \bar{Y}^n(r) dr \right], \quad (17)$$

para todo $s \geq 0$. Como λ é limitada superiormente por algum $M > 0$ (ver a definição do modelo), temos que a equação (17) é limitada superiormente por Ms .

$$\int_0^s F^c(t - r) \lambda(r) \bar{X}^n(r) \bar{Y}^n(r) dr \leq Ms < \infty,$$

onde $M > 0$ é um limitante superior para λ . Isto mostra a primeira correspondência na Tabela 2. As demais correspondências são demonstradas de maneira inteiramente análoga à primeira. \square

Queremos caracterizar os processos limite. Para isto, o próximo lema será essencial.

Lema 2.16. Os processos $\hat{W}_1^n(t)$, $\hat{Y}_1^n(t)$, $\hat{Y}_2^n(t)$, $\hat{Z}_1^n(t)$ e $\hat{Z}_2^n(t)$ são \mathcal{F}_t^n -martingais locais.

Demonstração. O resultado segue direto da Proposição 2.15 e do item (1) do Teorema A.54. \square

Proposição 2.17. Quando $n \rightarrow \infty$,

$$([\hat{W}_1^n], [\hat{Y}_1^n], [\hat{Y}_2^n], [\hat{Z}_1^n], [\hat{W}_2^n]) \rightarrow ([\hat{W}_1], [\hat{Y}_1], [\hat{Y}_2], [\hat{Z}_1], [\hat{W}_2])$$

em probabilidade, onde

$$[\hat{W}_1](t) = \int_0^t \lambda(s) F^c(t - s) \bar{X}(s) \bar{Y}(s) ds,$$

$$[\hat{Y}_1](t) = \int_0^t \lambda(s) \psi(t - s) \bar{X}(s) \bar{Y}(s) ds,$$

$$[\hat{Y}_2](t) = \int_0^t \alpha(s) \bar{Y}(s) \bar{Z}(s) ds,$$

$$[\hat{Z}_1](t) = \int_0^t \lambda(s) \psi^\beta(t - s) \bar{X}(s) \bar{Y}(s) ds,$$

$$[\hat{Z}_2](t) = \int_0^t \alpha(s) H^c(t - s) \bar{Y}(s) \bar{Z}(s) ds.$$

Demonstração. Mostramos a convergência de $[\hat{W}_1^n]$. A prova para os demais casos é similar. Dado que a variação quadrática de uma integral estocástica com respeito à medida de Lebesgue é zero, temos:

$$[\hat{W}_1](t) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\hat{W}_1^n](t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{A^n(t)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i) \right].$$

Mais, para $t \geq s \geq 0$,

$$\begin{aligned} (\hat{W}_1^n(t) - \hat{W}_1^n(t-s))^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{A^n(t)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{A^n(t-s)} \mathbb{1}(t-s < \tau_i^n + \eta_i) \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=A^n(t-s)}^{A^n(t)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i) \right)^2. \end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{i=A^n(t-s)}^{A^n(t)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i) = \mathbb{1}(t = \tau_{A^n(t)}^n + \eta_{A^n(t)}).$$

Então

$$[\hat{W}_1^n](t) = \sum_{0 \leq s \leq t} \frac{1}{n} \mathbb{1}(s = \tau_{A^n(s)}^n + \eta_{A^n(s)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(t)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i).$$

Aplicando o Teorema 2.3 o resultado segue. \square

Lema 2.18. Quando $n \rightarrow \infty$,

$$(\hat{W}_1^n, \hat{Y}_1^n, \hat{Y}_2^n, \hat{Z}_1^n, \hat{Z}_2^n) \Rightarrow (\hat{W}_1, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Z}_1, \hat{Z}_2)$$

onde $(\hat{W}_1, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Z}_1, \hat{Z}_2)$ é o vetor Gaussiano de média zero com auto-covariâncias dadas na Tabela 1.

Demonstração. A convergência segue da Proposição 2.17 e do Teorema 1.4 em [9, Ch. 7]. As covariâncias entre os processos limite são apresentadas no Teorema 2.5. \square

Agora provamos o Lema 2.13 que foi usado para prova o Teorema 2.3.

Prova do Lema 2.13. Pelo Teorema A.54, ambos os processos,

$$\bar{A}^n(t) - \int_0^t \lambda(s) \bar{X}^n(s) \bar{Y}^n(s) ds \quad \text{e} \quad \bar{B}^n(t) - \int_0^t \alpha(s) \bar{Y}^n(s) \bar{Z}^n(s) ds,$$

são \mathcal{F}_t^n -martingais locais. Além disso, suas variações quadráticas são $n^{-1} \int_0^t \lambda(s) \bar{X}^n(s) \bar{Y}^n(s) ds$ e $n^{-1} \int_0^t \alpha(s) \bar{Y}^n(s) \bar{Z}^n(s) ds$, respectivamente (ver Proposição 2.17). Então aplicamos o Teorema 1.4 em [9, Ch. 7] e isso conclui a demonstração. \square

Usando as equações (10)-(13), Lema 2.14 e Lema 2.18, mostramos que existem processos estocásticos $C_X^n(t)$, $C_Y^n(t)$ e $C_Z^n(t)$ que são rígidos e que existem funções limitadas $\tilde{\lambda}, \tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}\hat{X}^n(t) &= C_X^n(t) + \int_0^t \tilde{\lambda}(s)(\hat{X}^n(s)\bar{Y}^n(s) + \bar{X}(s)\hat{Y}^n(s))ds + \int_0^t \tilde{\alpha}(s)(\hat{Y}^n(s)\bar{Z}^n(s) + \bar{Y}(s)\hat{Z}^n(s))ds \\ \hat{Y}^n(t) &= C_Y^n(t) + \int_0^t \lambda(s)\psi(t-s)(\hat{X}^n(s)\bar{Y}^n(s) + \bar{X}(s)\hat{Y}^n(s))ds \\ &\quad + \int_0^t \alpha(s)(\hat{Y}^n(s)\bar{Z}^n(s) + \bar{Y}(s)\hat{Z}^n(s))ds \\ \hat{Z}^n(t) &= C_Z^n(t) + \int_0^t \lambda(s)\psi^\beta(t-s)(\hat{X}^n(s)\bar{Y}^n(s) + \bar{X}(s)\hat{Y}^n(s))ds \\ &\quad + \int_0^t \alpha(s)H^c(t-s)(\hat{Y}^n(s)\bar{Z}^n(s) + \bar{Y}(s)\hat{Z}^n(s))ds.\end{aligned}$$

O próximo lema é uma extensão imediata do Lema 9.1 de [24].

Lema 2.19. *Seja $\Gamma : D^5 \rightarrow D^3$ o mapa $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ onde*

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= x_1(t) + \int_0^t (\tilde{\lambda}(s)(\phi_1(s)x_4(s) + f_1(s)\phi_2(s)) + \tilde{\alpha}(s)(x_5(s)\phi_2(s) + f_2(s)\phi_3(s)))ds \\ \phi_2(t) &= x_2(t) + \int_0^t \lambda(s)\psi(t-s)(\phi_1(s)x_4(s) + f_1(s)\phi_2(s))ds + \int_0^t \alpha(s)(x_5(s)\phi_2(s) + f_2(s)\phi_3(s))ds \\ \phi_3(t) &= x_3(t) + \int_0^t \lambda(s)\psi^\beta(t-s)(\phi_1(s)x_4(s) + f_1(s)\phi_2(s))ds \\ &\quad + \int_0^t \alpha(s)H^c(t-s)(x_5(s)\phi_2(s) + f_2(s)\phi_3(s))ds,\end{aligned}$$

com f_1 e f_2 sendo funções contínuas. Então existe uma única solução $(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in D^3$ ao sistema de equações integrais acima e Γ é contínuo na topologia de Skorohod. Isto é, se $(x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n, x_5^n) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ em D^5 , com $(x_4, x_5) \in C^2$ então $\Gamma(x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n, x_5^n) \rightarrow \Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ em D^3 quando $n \rightarrow \infty$.

Alguns detalhes da demonstração do lema original que não estão explícitos na demonstração são dados na ideia da prova abaixo. Aqui, considere $\|g\|_T = \sup_{s \in [0, T]} |g(s)|$.

Ideia da prova: Como observado em [24], a existência e unicidade são garantidas pelos teoremas 1.1, 1.2, 2.2 e 2.3 em [21] quando $x_1, x_2, x_3 \in C$. O caso $x_1, x_2, x_3 \in D$ é uma extensão imediata da demonstração desses 4 resultados usando a métrica da topologia de Skhorohod, que usamos abaixo.

A continuidade do mapa Γ , novamente, segue o mesmo caminho usado em [24]. De fato, fixe $T > 0$ e assumamos que existem seqüências $((x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n, x_5^n) : n \geq 1)$ convergentes na topologia J_1 em $D([0, T], \mathbb{R}^5)$: $(x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n, x_5^n) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

quando $n \rightarrow \infty$. Portanto existem homomorfismos $\lambda^n : [0, T] \rightarrow [0, T]$ crescentes em $[0, T]$ tais que $\|Id - \lambda^n\|_{T \rightarrow T} \rightarrow 0$ e $\|x_i^n - x_i \circ \lambda^n\|_{T \rightarrow T} \rightarrow 0$ para $1 \leq i \leq 5$ quando $n \rightarrow \infty$.

Pelo Teorema de Lebesgue, toda função monotônica definida em um intervalo aberto é diferenciável q.t.p., desta forma, podemos assumir que toda λ^n tem derivada $\dot{\lambda}^n$ q.t.p. Assim, podemos assumir $\|\dot{\lambda}^n - 1\|_{T \rightarrow T} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Por fim, sejam

$$\begin{aligned} (\phi_1^n, \phi_2^n, \phi_3^n) &:= \Gamma(x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n, x_5^n) : n \geq 1, \\ (\phi_1, \phi_2, \phi_3) &:= \Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\ c &= \sup_{s \in [0, T]} \{\tilde{\alpha}(s), \tilde{\lambda}(s), \alpha(s), \lambda(s)\}. \end{aligned}$$

Agora fazemos um caso e os demais seguem de maneira idêntica. Temos:

$$\begin{aligned} &|\phi_1^n(t) - \phi_1(\lambda^n t)| \leq \|x_1^n - x_1 \circ \lambda^n\|_T \\ &+ c \left| \int_0^t (\phi_1^n(s)x_4^n(s) + f_1(s)\phi_2^n(s))ds - \int_0^{\lambda^n t} (\phi_1(s)x_4(s) + f_1(s)\phi_2(s))ds \right| \\ &+ c \left| \int_0^t (x_5^n(s)\phi_2^n(s) + f_2(s)\phi_3^n(s))ds - \int_0^{\lambda^n t} (x_5(s)\phi_2(s) + f_2(s)\phi_3(s))ds \right| \\ &= \|x_1^n - x_1 \circ \lambda^n\|_T \\ &+ c \left| \int_0^t (\phi_1^n(s)x_4^n(s) + f_1(s)\phi_2^n(s))ds - \int_0^t (\phi_1(\lambda^n s)x_4(\lambda^n s) + f_1(\lambda^n s)\phi_2(\lambda^n s))\dot{\lambda}^n(s)ds \right| \\ &+ c \left| \int_0^t (x_5^n(s)\phi_2^n(s) + f_2(s)\phi_3^n(s))ds - \int_0^t (x_5(\lambda^n s)\phi_2(\lambda^n s) + f_2(\lambda^n s)\phi_3(\lambda^n s))\dot{\lambda}^n(s)ds \right|. \end{aligned}$$

Após somar e subtrair sucessivas vezes, obtemos uma equação 3-dimensional (para $(\phi_1^n, \phi_2^n, \phi_3^n)(t) - (\phi_1, \phi_2, \phi_3)(\lambda^n t)$) onde podemos aplicar o Lema de Gronwall e obter o resultado. \square

Assim, o Teorema 2.4 segue do Lema 2.19 e do Teorema do mapa contínuo.

Prova do Teorema 2.5

Aqui calculamos as covariâncias apresentadas na Tabela 1. As covariâncias entre os processos estocásticos obtidos no Lema 2.14 são realizadas no Teorema 14.3 de [2].

Dado que os processos estocásticos do Lema 2.14 e os processos estocásticos do Lema 2.18 são independentes, temos de calcular as covariâncias entre os pares de processos obtidos no Lema 2.18. O cálculo destas variâncias é similar, desta forma, calculamos apenas duas das covariâncias.

Lema 2.20. *Vale que:*

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{W}_1(t), \hat{W}_1(r)) &= \int_0^{r \wedge t} \lambda(s) F^c(r \vee t - s) F(r \wedge t - s) \bar{X}(s) \bar{Y}(s) ds \\ \text{Cov}(\hat{W}_1(t), \hat{Y}_1(r)) &= \mathbb{1}(r > t) \int_0^t \lambda(s) \left(F(t - s) \psi(r - s) - \int_0^{t-s} \int_{r-u-s}^{\infty} \beta G(dv|u) F(du) \right) \bar{X}(s) \bar{Y}(s) ds. \end{aligned}$$

Demonstração. Primeiro observe que a existência dos limites

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{W}_1(t), \hat{W}_1(r)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov}(\hat{W}_1^n(t), \hat{W}_1^n(r)) \\ \text{Cov}(\hat{W}_1(t), \hat{Y}_1(r)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov}(\hat{W}_1^n(t), \hat{Y}_1^n(r)) \end{aligned}$$

é garantida pelo Teorema da Convergência Dominada, a desigualdade Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz e a convergência fraca dos processos estocásticos \hat{W}_1^n e \hat{Y}_1^n . Como estes processos estocásticos são Gaussianos de média zero, $\mathbb{E}[\hat{W}_1(t)] = \mathbb{E}[\hat{Y}_1(t)] = 0$ para todo $t \geq 0$.

1. $\text{Cov}(\hat{W}_1(t), \hat{W}_1(r))$

Note que $\text{Cov}(\hat{W}_1(t), \hat{W}_1(r))$ é o limite em n da sequência $\mathbb{E}[\hat{W}_1^n(t) \hat{W}_1^n(r)]$. Escreva:

$$\hat{W}_1^n(t) \hat{W}_1^n(r) = \hat{W}_1(r, t) + \hat{W}_2(r, t) + \hat{W}_3(r, t) + \hat{W}_4(r, t)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{W}_{1,n}(r, t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(t)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i) \sum_{j=1}^{A^n(r)} \mathbb{1}(r < \tau_j^n + \eta_j), \\ \hat{W}_{2,n}(r, t) &= -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{A^n(t)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i) \int_0^r \lambda(s) F^c(r - s) \bar{X}^n(s) \bar{Y}^n(s) ds, \\ \hat{W}_{3,n}(r, t) &= -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{A^n(r)} \mathbb{1}(r < \tau_i^n + \eta_i) \int_0^t \lambda(s) F^c(t - s) \bar{X}^n(s) \bar{Y}^n(s) ds, \\ \hat{W}_{4,n}(r, t) &= n \int_0^t \lambda(s) F^c(t - s) \bar{X}^n(s) \bar{Y}^n(s) ds \int_0^r \lambda(u) F^c(r - u) \bar{X}^n(u) \bar{Y}^n(u) du. \end{aligned}$$

Da independência entre η_i e A^n , a esperança condicional de $\hat{W}_{1,n}(t, r)$ dado $A^n(t \vee r)$ se lê

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{W}_{1,n}(t, r) | A^n(t)] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(t \wedge r)} F^c(t \vee r - \tau_i^n) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(t \wedge r)} F^c(t - \tau_i^n) F^c(r - \tau_i^n) \quad (18) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(t)} F^c(t - \tau_i^n) \sum_{j=1}^{A^n(r)} F^c(r - \tau_j^n). \end{aligned}$$

Do Teorema 2.3 e lemas 2.15, 2.16 e 2.18, é fácil ver que os processos

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{A^n(t)} F^c(t - \tau_i^n) \sum_{i=1}^{A^n(r)} F^c(r - \tau_j^n) \right) + \widehat{W}_{2,n}(t, r)$$

e

$$\widehat{W}_{3,n}(t, r) + \widehat{W}_{4,n}(t, r)$$

convergem para martingais de média zero para cada $t \geq 0$ fixado quando $n \rightarrow \infty$. Aplicando o Teorema 2.3 aos termos restantes na equação (18), concluímos a demonstração.

2. $\text{Cov}(\widehat{W}_1(t)\widehat{Y}_1(r))$

Observe que $\text{Cov}(\widehat{W}_1(t)\widehat{Y}_1(r)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\widehat{W}_1^n(t)\widehat{Y}_1^n(r)]$ e que podemos escrever

$$\widehat{W}_1^n(t)\widehat{Y}_1^n(r) = \widehat{WY}_{1,n}(t, r) + \widehat{WY}_{2,n}(t, r) + \widehat{WY}_{3,n}(t, r) + \widehat{WY}_{4,n}(t, r),$$

onde

$$\widehat{WY}_{1,n}(r, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(t)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i) \sum_{j=1}^{A^n(r)} \mathbb{1}(\tau_j^n + \eta_j \leq r < \tau_j^n + \eta_j + \theta_j) \mathbb{1}(\mathcal{U}_j \leq \beta),$$

$$\widehat{WY}_{2,n}(r, t) = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{A^n(t)} \mathbb{1}(t < \tau_i^n + \eta_i) \int_0^r \lambda(s) \phi(r-s) \bar{X}^n(s) \bar{Y}^n(s) ds,$$

$$\widehat{WY}_{3,n}(r, t) = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{A^n(r)} \mathbb{1}(\tau_j^n + \eta_j \leq r < \tau_j^n + \eta_j + \theta_j) \mathbb{1}(\mathcal{U}_j \leq \beta) \int_0^t \lambda(s) F^c(t-s) \bar{X}^n(s) \bar{Y}^n(s) ds,$$

$$\widehat{WY}_{4,n}(r, t) = n \int_0^t \lambda(s) F^c(t-s) \bar{X}^n(s) \bar{Y}^n(s) ds \int_0^r \lambda(u) \phi(r-u) \bar{X}^n(u) \bar{Y}^n(u) du.$$

Daqui em diante, a demonstração da parte (2) é análoga à demonstração da parte (1). De fato, note que

$$\mathbb{E}[\widehat{WY}_{1,n}(r, t) | A^n(t \vee r)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(t)} \int_{t-\tau_i^n}^{r-\tau_i^n} \int_{r-\tau_i^n-u}^{\infty} \beta G(dv|u) F(du) + \frac{1}{n} \sum_{i \neq j}^{A^n(r)} F^c(t - \tau_i^n) \psi(r - \tau_j^n).$$

Podemos reescrever o lado direito da expressão acima como

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(t)} \left(F(t - \tau_i^n) \psi(r - \tau_i^n) - \int_0^{t-\tau_i^n} \int_{r-u-\tau_i^n}^{\infty} \beta G(dv|u) F(du) \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(t)} F^c(t - \tau_i^n) \sum_{j=1}^{A^n(r)} \psi(r - \tau_j^n).$$

Agora, temos que os processos

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{A^n(t)} F^c(t - \tau_i^n) \sum_{j=1}^{A^n(r)} \psi(r - \tau_j^n) + \widehat{WY}_{2,n}(r, t)$$

e

$$\widehat{WY}_{3,n}(t, r) + \widehat{WY}_{4,n}(t, r)$$

convergem para martingais de média zero para cada $t \geq 0$ fixo quando $n \rightarrow \infty$. Como na primeira parte, concluímos a demonstração aplicando o Teorema 2.3.

□

Enfim, verificamos que $Q^B(t, r)$ está bem definido. De fato, $Q^B(t, r)$ existe para cada $(t, r) \in \mathbb{R}_+^2$ fixo dado que

$$Q^B(t, r) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_i^n \leq t) = \mathbb{E}[\bar{B}^n(t)]$$

e a sequência (\bar{B}^n) é rígida. A prova então está concluída.

3

MODELOS COM COMPARTIMENTOS ALEATÓRIOS

No estudo da disseminação de rumores, podemos nos perguntar se um indivíduo não deveria ter contato com o rumor algumas vezes até lhe dar credibilidade e efetivamente compartilhá-lo.

A partir desta ideia, Rada et al. em [27] introduziram na literatura uma generalização do modelo de Maki–Thompson que emprega a ideia de que indivíduos precisam ter contato um número fixo de vezes até dar credibilidade ao rumor. Nesse trabalho, investigam-se as proporções finais da população, isto é, as proporções de indivíduos em classes representando diferentes papéis com respeito ao rumor quando este acaba.

O problema é que cada indivíduo deveria ter seu próprio critério para dar credibilidade ao rumor, isto é, seu próprio número de vezes, aleatório, que precisa ouvir o rumor até espalhá-lo. A partir deste ponto, propomos um modelo que lida com essa aleatoriedade e investiga as proporções finais da população. Em contraste com [27], neste modelo trabalhamos com um espaço de dimensão infinita e portanto fazemos adaptações nas técnicas empregadas no primeiro, de natureza finito-dimensional.

Primeiro trazemos este modelo já estabelecido na literatura para depois introduzir sua generalização.

3.1 MODELO DE k -ESPALHAMENTO DE MAKI E THOMPSON

Aqui trataremos integralmente o modelo e resultados de [27].

3.1.1 O modelo

Considere uma população de tamanho n misturada homoganeamente, ou represente as interações pelo grafo completo de ordem n . Para um $k \in \mathbb{N}$ fixado, definimos o modelo de k -espalhamento de tipo Maki-Thompson. Aqui teremos regras análogas às regras do modelo de tipo MT e adicionamos novas classes.

Mantemos as classes de indivíduos ignorantes, espalhadores e contidos, mas introduzimos os i -informados, onde $i < k$ denota o número de vezes que um indivíduo desta classe ouviu o rumor (e este não espalha o rumor). Após ouvir k vezes o rumor, um indivíduo passa a espalhar o rumor. As interações entre espalhadores e espalhadores ou espalhadores e contidos mantém-se como no modelo de tipo MT.



Figura 3: Esquema de transições do modelo

Para cada tempo $t \geq 0$, denote o número de indivíduos ignorantes, i -informados, espalhadores e contidos por $X^n(t)$, $Y_i^n(t)$, $Y^n(t)$ e $Z^n(t)$, respectivamente. O modelo de k -espalhamento de tipo Maki-Thompson é, portanto, a Cadeia de Markov a Tempo Contínuo $(k+1)$ -dimensional, $\{(X^n(t), Y_1^n(t), \dots, Y_{k-1}^n(t), Y^n(t))\}_{t \geq 0}$, com as transições dadas por:

Transição	Taxa	
$-e_1 + e_2$	$X^n Y^n$,	
$-e_{i+1} + e_{i+2}$	$Y_i^n Y^n$,	$i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$,
$-e_{k+1}$	$(n-1 - X^n - \sum_{i=1}^{k-1} Y_i^n) Y^n$.	

Aqui, $\{e_1, \dots, e_{k+1}\}$ representa a base canônica de \mathbb{R}^{k+1} .

Os autores assumem convergência das proporções no instante inicial e isso é usual para mostrar rigidez. Isto é, os seguintes limites existem quase certamente:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X^n(0)}{n} &=: x_0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_i^n(0)}{n} &=: y_{i,0}, & i \in \{1, \dots, k-1\} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y^n(0)}{n} &=: y_0. \end{aligned}$$

Ainda, definem a seguinte quantidade,

$$z_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z^n(0)}{n} = 1 - \left(x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} y_{i,0} + y_0 \right).$$

3.1.2 Proporção de indivíduos que não ouviram o rumor

A análise realizada no trabalho leva em conta a absorção do processo, isto é, levam em consideração que o processo morre no sentido de não haver mais transições entre classes e basta que $Y^n(t) = 0$ a partir de um certo tempo para que isso ocorra. Considere o tempo de absorção do processo, definido por

$$\tau^{(n)} := \inf\{t \geq 0 : Y^n(t) = 0\}.$$

A partir de agora, basta olhar para o processo no instante em que ele morre. Isto é, estudar o vetor aleatório $\frac{1}{n}(X^n(\tau^{(n)}), Y_1^n(\tau^{(n)}), \dots, Y_{k-1}^n(\tau^{(n)}))$ e a variável aleatória $Z^n(\tau^{(n)})/n$.

Considere $f : (0, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = y_0 + \rho(0) - \frac{x}{x_0} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\rho(r)}{r!} \left\{ \ln \frac{x_0}{x} \right\}^r - \ln \frac{x_0}{x}, \quad (19)$$

onde, denotando $y_{0,0} := x_0$,

$$\rho(r) := \sum_{j=0}^{k-r-1} (k-j-r+1)y_{j,0},$$

para $r \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Observe que f é contínua em $(0, x_0]$ e que vale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad f(x_0) = y_0 \geq 0.$$

Proposição 3.1. Tome $k \in \mathbb{N}$ e assumo $x_0 \in (0, 1]$. Então f tem ao menos uma raiz no intervalo $(0, x_0]$.

Pela proposição, está bem definida a quantidade

$$x_\infty := x_\infty(k, x_0, y_{1,0}, \dots, y_{k-1,0}, y_0) = \sup\{x \in (0, x_0] : f(x) < 0\}$$

e portanto enunciamos seguinte teorema:

Teorema 3.2. *Vale que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X^n(\tau^{(n)})}{n} = x_\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_i^n(\tau^{(n)})}{n} = y_{i,\infty},$$

onde

$$y_{i,\infty} := \frac{x_\infty}{x_0} \sum_{r=0}^i y_{i-r,0} \frac{(\ln x_0/x_\infty)^r}{r!},$$

para $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Assim como z_0 , fica definido $z_\infty := 1 - (x_\infty + \sum_{i=1}^{k-1} y_{i,\infty})$.

Para o próximo resultado, trazemos algumas notações. Seja I um intervalo e g uma função que esteja definida em I , então $R(g, I)$ denota o número de raízes de g no intervalo I .

Seja m um número inteiro positivo e tome a função gamma inferior incompleta:

$$\gamma(m, t) = \int_0^t u^{m-1} e^{-u} du, \quad t \geq 0.$$

Caracterizamos então, a função f

Teorema 3.3. *Considere f definida em (19). Então valem:*

1. *Considere o modelo de Maki-Thompson de k -espalhamento com condições $x_0 = 1$ e $y_0 = y_{i,0} = 0$ para $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Para $x \in (0, 1]$, vale que*

$$f(x) = \frac{(1+k+\ln x)\gamma(k, -\ln x) - x(-\ln x)^k}{(k-1)!}.$$

Além disso, $R(f, (0, 1]) = 2$. As duas raízes de f são $x_\infty < 1$ e $x_0 = 1$.

2. *Suponha $x_0 < 1$ e $y_{i,0} = 0$ para $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Então $R(f, (0, x_0]) \in \{1, 3\}$.*

3.1.3 Flutuação entre as proporções e seus valores limites

O trabalho ainda faz um tratamento das flutuações num teorema central do limite.

Alguns resultados explícitos são mostrados no caso standard ($x_0 = 1$ e $y_0 = y_{i,0} = 0$ para $i \in \{1, \dots, k-1\}$). De fato, como se trata de um modelo markoviano, basta considerar as condições iniciais. Aqui, um dos problemas do modelo é estimar $\tau^{(n)}$ quando $n \rightarrow \infty$.

Os resultados apresentados são para $k \in \{2, 3\}$, mas os autores mencionam que é possível adaptar os mesmos argumentos para casos menos restritos.

Teorema 3.4. *Considere o modelo de Maki-Thompson de 2-espalhamento standard. Vale que:*

$$x_\infty \approx 0.116586 \quad e \quad y_{1,\infty} \approx 0.250558.$$

Mais, quando $n \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{n} \left(\frac{X^n(\tau^{(n)})}{n} - x_\infty, \frac{Y_1^n(\tau^{(n)})}{n} - y_{1,\infty} \right) \Rightarrow \mathcal{N}_2(0, \Sigma^{(2)}),$$

onde os elementos da matriz de covariância $\Sigma^{(2)}$ são funções racionais de x_∞ e $y_{1,\infty}$.

Teorema 3.5. *Considere o modelo de Maki-Thompson de 3-espalhamento standard. Neste caso,*

$$x_\infty \approx 0.0680169, \quad y_{1,\infty} \approx 0.182829 \quad e \quad y_{2,\infty} \approx 0.245723$$

E quando $n \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{n} \left(\frac{X^n(\tau^{(n)})}{n} - x_\infty, \frac{Y_1^n(\tau^{(n)})}{n} - y_{1,\infty}, \frac{Y_2^n(\tau^{(n)})}{n} - y_{2,\infty} \right) \Rightarrow \mathcal{N}_3(0, \Sigma^{(3)}),$$

onde $\mathcal{N}_3(0, \Sigma^{(3)})$ tem elementos que são funções racionais de x_∞ , $y_{1,\infty}$ e $y_{2,\infty}$.

Observação 1. *O trabalho apresenta apenas resultados numéricos para o caso $k = 3$, mas uma releitura crítica da demonstração mostra que o resultado numérico da matriz $\Sigma^{(3)}$ pode ser obtido também a partir de funções racionais das proporções limite, como enunciamos.*

3.2 MODELOS DE RUMORES COM FASES ALEATÓRIAS

Propomos uma generalização do modelo de rumores com fases ou modelo de Maki-Thompson de k -espalhamento. Neste modelo, cada indivíduo precisa ouvir o rumor um número aleatório de vezes para poder espalhá-lo.

Em contraposição ao modelo original, sortear um número com uma distribuição que não tem suporte finito pode levar a um modelo de dimensão infinita. Em termos de praticidade, é razoável supor que o suporte da distribuição é finito, afinal, não se deve esperar que um indivíduo tenha que ouvir o rumor um número de vezes maior que o tamanho da população para poder espalhá-lo. Mais que isso, o número de vezes que o indivíduo precisa ouvir o rumor sequer deveria depender do tamanho da população.

Ainda assim, há um ganho em supor que a distribuição compreende todos os números naturais. Isso porque podemos tomar distribuições genéricas, como Poisson, que é muito intuitiva na modelagem de problemas reais.

3.2.1 Modelos de classes aleatórias

Denotamos o conjunto de inteiros positivos por \mathbb{N}_* .

Considere uma população fechada de tamanho n homogeneamente misturada. A população é subdividida em um número infinito de classes: **espalhadores** (aqueles que espalham o rumor); **contidos** (aqueles que já conhecem o rumor e não o espalharão); e os k -**ouvintes**, $k \in \mathbb{N}_*$, (aqueles que ouviram o rumor $k - 1$ vezes sem tê-lo espalhado). Note que a partição é infinita dado que k pode assumir qualquer valor inteiro não-negativo. Diremos que 0-ouvintes são **ignorantes**.

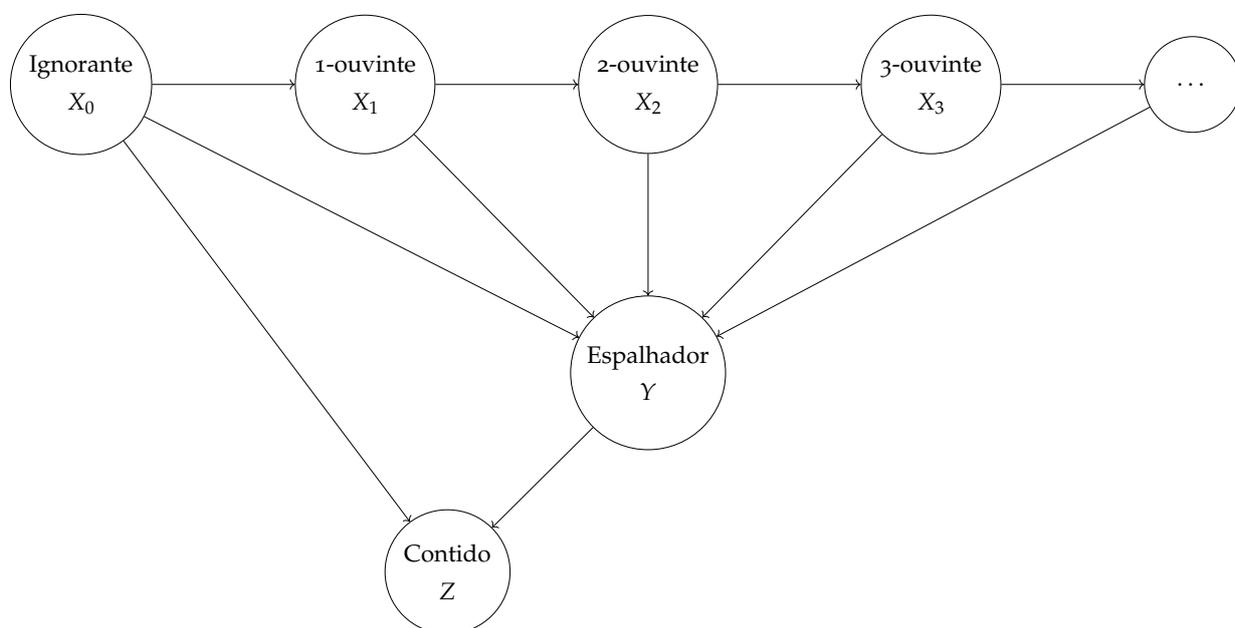


Figura 4: Esquema de transições do modelo

O número de espalhadores, k -ouvintes e contidos no tempo t é denotado por $Y^n(t)$, $X_k^n(t)$ e $Z^n(t)$, respectivamente.

Como o tamanho da população é fixo, $Z^n = n - \sum_{i \geq 1} X_i^n - Y^n$ é unicamente determinado pelas outras classes.

Seja p_i a probabilidade de um indivíduo ter de ouvir o rumor $i \geq 1$ vezes até espalhá-lo, p_0 a probabilidade de um indivíduo não espalhar o rumor quando ouvi-lo, $q_1 = p_1$ e, para $i \geq 2$, $q_i = \frac{p_i}{\sum_{k \geq i} p_k}$ a probabilidade de um indivíduo que já ouviu o rumor $i - 1$

vezes espalhá-lo após um novo contato com o rumor. Temos uma Cadeia de Markov infinito-dimensional $\mathcal{R}^n(t) = (Y^n(t), X_1^n(t), X_2^n(t), \dots)$, $t \geq 0$, em $\mathbb{N}_*^{\mathbb{N}_*}$ com transições:

Transição	Taxa
$-e_1$	$p_0 X_0^n Y^n$,
$-e_1 + e_2$	$(1 - p_0 - p_1) X_0^n Y^n$,
$-e_{i+1} + e_0$	$q_{i+1} X_i^n Y^n$, $i \geq 0$
$-e_{i+1} + e_{i+2}$	$(1 - q_{i+1}) X_i^n Y^n$, $i \geq 1$
$-e_0$	$Y^n (n - 1 - \sum_{i=0}^{\infty} X_i^n)$, $i \geq 1$

Diremos que a proporção inicial do rumor na população é

$$x^0 = (x_0^0, x_1^0, x_2^0, \dots) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (Y^n(0), X_1^n(0), \dots),$$

quando existir o limite quase certamente. Seja $\tau_n = \inf\{t : Y^n(t) < 0\}$.

Teorema 3.6. *Suponha o rumor com condição inicial x^0 , $\liminf q_n > 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + q_n) x_n^0 > 1$. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau_\infty \in (0, \infty)$ quase certamente e*

$$\frac{1}{n} (Y^n(\tau_\infty), X^n(\tau_\infty), X_1^n(\tau_\infty), \dots) \rightarrow (0, x_{1,\infty}, x_{2,\infty}, \dots) \quad q.c.$$

quando $n \rightarrow \infty$, onde

$$x_{\ell,\infty} = \exp(-\tau_\infty) \sum_{k=1}^{\ell} \frac{x_k^0}{(\ell - k)!} \tau_\infty^{\ell - k} \prod_{j=k}^{\ell - 1} (1 - q_j), \quad \ell \geq 1,$$

e τ_∞ resolve em t a equação

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + q_n) \sum_{k=1}^n x_k^0 \frac{\gamma(n - k + 1, t)}{\Gamma(n - k + 1)} \prod_{j=k}^{n-1} (1 - q_j).$$

Observação 2. *A distribuição de Poisson com média $\lambda > 0$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.6, isto é, assumindo*

$$p_n = \frac{\exp(-\lambda) \lambda^n}{n!} \quad \forall n \geq 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 q_n &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n! \sum_{k=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}} \\
 &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n! \left(1 - \frac{\Gamma(n, \lambda)}{\Gamma(n)}\right)} \\
 &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n \gamma(n, \lambda)} \\
 &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{\gamma(n+1, \lambda) + e^{-\lambda} \lambda^n} \\
 &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{\int_0^\lambda s^n e^{-s} ds + e^{-\lambda} \lambda^n} \\
 &\geq \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{\lambda^n + e^{-\lambda} \lambda^n} = \frac{e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}}
 \end{aligned}$$

Observação 3. Se a distribuição $(p_k : k \geq 0)$ for finita, isto é, $p_k = 0$ para todo $k \geq M$, onde M é um certo inteiro positivo, é imediato que o Teorema 3.6 segue de maneira análoga a [27].

3.3 PROVAS

Para provar o Teorema 3.6, estabelecemos uma lei dos grandes números adaptando as ideias apresentadas em Ethier e Kurtz [9, Teorema 11.2.1] de forma a superar a dimensão infinita.

3.3.1 Lei dos Grandes Números para sequências aleatórias em ℓ_p

Aqui usamos noções básicas de Análise Funcional. Um leitor interessado pode conferir [28] ou referências similares para mais detalhes sobre o assunto.

Para $p \geq 1$, seja o espaço das sequências p -somáveis

$$\ell_p := \left\{ x = (x_i)_{i \geq 1} : x_i \in \mathbb{R}, \|x\|_p^p := \sum_{i \geq 1} |x_i|^p < \infty \right\}$$

e o conjunto da sequências de inteiros convergindo para zero

$$c_0(\mathbb{Z}) := \{x = (x_i)_{i \geq 1} \in \ell_p : x_i \in \mathbb{Z}, \forall i \geq 1\} \subset \ell_p.$$

Observação 4. Note que estamos interessados nas sequências quase nulas de inteiros, $c_{00}(\mathbb{Z})$, mas ao herdar a topologia de ℓ_p , verificamos que $c_{00}(\mathbb{Z}) = c_0(\mathbb{Z})$.

Seja $E \subset \ell_p$ um aberto limitado e considere os conjuntos

$$E_n = E \cap \{n^{-1}x : x \in c_0(\mathbb{Z})\}.$$

Seja \mathcal{I} um conjunto enumerável limitado de ℓ_p . Para cada $m \in \mathcal{I}$, seja $\beta_m : \ell_p \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-negativa tal que se $x \in E_n$ e $\beta_m(x) > 0$, então $x + n^{-1}m \in E_n$. Chamaremos tal construção de modelo de dependência de densidade infinito-dimensional.

Assuma que $\tilde{\beta}_m := \sup_{x \in E} \beta_m(x)$ satisfaz

$$\sum_{m \in \mathcal{I}} \|m\|_p \tilde{\beta}_m < \infty. \quad (20)$$

Da condição (20), fica bem definida em E a função $F : \ell_p \rightarrow \ell_p$ definida pontualmente por

$$F(x) = \sum_{m \in \mathcal{I}} m \beta_m(x).$$

Assuma que F é Lipschitz.

Observe que $\beta_m(\gamma(s))$ é integrável sobre $s \in [0, t] \subset A$ sempre que $\gamma : A \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ é uma função contínua à direita com limites à esquerda. Desta forma, fica bem definida a quantidade

$$\int_0^t F(\gamma(s)) ds := \int_0^t \sum_{m \in \mathcal{I}} m \beta_m(\gamma(s)) ds = \sum_{m \in \mathcal{I}} m \int_0^t \beta_m(\gamma(s)) ds \in \ell_p$$

para $[0, t] \subset A$.

Seja $(X^n : n \geq 1)$ a sequência de processos estocásticos em ℓ_p dada por:

$$X^n(t) = X^n(0) + \sum_{m \in \mathcal{I}} mn^{-1} Y_m \left(n \int_0^t \beta_m(X^n(s)) ds \right),$$

para $t \geq 0$, onde $\{Y_m : m \in \mathcal{I}\}$ é uma família de processos de Poisson padrão independentes entre si.

Teorema 3.7. Suponha que $X^n(0) \rightarrow X(0)$ quase certamente quando $n \rightarrow \infty$ e defina

$$X(t) = X(0) + \int_0^t F(X(s)) ds, \quad t \geq 0.$$

Então $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X^n - X\|_p = 0$ quase certamente.

Demonstração. Faremos um análogo à construção clássica de Ethier e Kurtz em [9]. Primeiro escreva

$$X^n(t) = X^n(0) + \sum_{m \in \mathcal{I}} mn^{-1} \tilde{Y}_m \left(n \int_0^t \beta_m(X^n(s)) ds \right) + \int_0^t F(X^n(s)) ds,$$

onde para cada m , $\tilde{Y}_m(u) = Y_m(u) - u$ é um processo de Poisson centrado na sua esperança. Agora observe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \leq v} |n^{-1} \tilde{Y}_m(nu)| = 0 \quad q.c., \quad v \geq 0. \quad (21)$$

Estudamos a parte Poissoniana do processo X^n :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(t) &= \sup_{u \leq v} \left\| X^n(u) - X^n(0) - \int_0^u F(X^n(s)) ds \right\|_p \\ &\leq \sum_{m \in \mathcal{I}} \|m\|_p n^{-1} \sup_{u \leq t} |\tilde{Y}_m(n\tilde{\beta}_m u)| \\ &\leq \sum_{m \in \mathcal{I}} \|m\|_p n^{-1} (Y_m(n\tilde{\beta}_m t) + n\tilde{\beta}_m t). \end{aligned} \quad (22)$$

Pela lei dos grandes números para processos de Poisson, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \in \mathcal{I}} \|m\|_p n^{-1} (Y_m(n\tilde{\beta}_m t) + n\tilde{\beta}_m t) &= \sum_{m \in \mathcal{I}} 2 \|m\|_p \tilde{\beta}_m t \\ &= \sum_{m \in \mathcal{I}} \lim_{n \rightarrow \infty} \|m\|_p n^{-1} (Y_m(n\tilde{\beta}_m t) + n\tilde{\beta}_m t). \end{aligned}$$

Isto é, podemos trocar de ordem o limite e a soma. Fazendo isto na desigualdade (22) e aplicando (21), concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(t) = 0 \quad q.c. \quad (23)$$

Observe que

$$\|X^n(t) - X(t)\|_p \leq \|X^n(0) - X(0)\|_p + \varepsilon_n(t) + \int_0^t M \|X^n(s) - X(s)\|_p ds.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall na expressão acima, obtemos:

$$\|X^n(t) - X(t)\|_p \leq (\|X^n(0) - X(0)\|_p + \varepsilon_n(t)) \exp(Mt).$$

Como consequência de (23), vale para todo $t \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t} \|X^n(s) - X(s)\|_p = 0 \quad q.c.$$

□

3.3.2 Demonstração do Teorema 3.6

Em nosso modelo, trabalhamos $p \geq 1$ fixado, tomamos $E_+ = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_p, \|x\|_p \leq 1, x_i \geq 0\} \subset E = B_1(0)$ (a bola de raio 1 centrada na origem) e consideramos uma condição inicial $x^0 \in E_+$. Pelo Teorema 3.7, existe quase certamente um limite $R(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathcal{R}^n(t)$ para todo $t \geq 0$. Estamos interessados, então, no limite do processo no tempo de absorção.

Demonstração do Teorema 3.6. Observe que $Y^n \geq 0$ portanto $\int_0^t Y^n(s) ds$ é não-decrescente em t . Seja o tempo de absorção do processo $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : Y^n(t) \leq 0\}$ e defina para $0 \leq t \leq \int_0^\infty Y^n(s) ds$ o tempo acelerado:

$$\gamma^n(t) := \inf \left\{ u \in [0, \tau_n) : \int_0^u Y^n(s) ds > t \right\}.$$

Segue que $\int_0^{\gamma^n(t)} Y^n(s) ds = t$. Desta forma, podemos definir a Cadeia de Markov acelerada $\{\tilde{\mathcal{R}}(t)\}_{t \geq 0}$ tal que

$$\tilde{\mathcal{R}}^n(t) := \mathcal{R}^n(\gamma^n(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

Consequentemente, $\tilde{\mathcal{R}}^n$ tem transições:

Transição	Taxa
$\ell_1 = -e_1$	$p_0 \tilde{X}_0^n,$
$\ell_2 = -e_1 + e_2$	$(1 - p_0 - p_1) \tilde{X}_0^n,$
$\ell_{-(i+1)} = -e_{i+1} + e_0$	$q_{i+1} \tilde{X}_i^n, \quad i = 0, \dots$
$\ell_{i+1} = -e_i + e_{i+1}$	$(1 - q_{i+1}) \tilde{X}_i^n, \quad i = 1, \dots$
$\ell_0 = -e_0$	$(n - 1 - \sum_{i=0}^\infty \tilde{X}_i^n).$

Considere as funções

$$\begin{aligned} \beta_{\ell_1}(x_0, x_1, x_2, \dots, \dots) &= p_0 x_1, \\ \beta_{\ell_2}(x_0, x_1, x_2, \dots, \dots) &= (1 - p_0 - p_1) x_1, \\ \beta_{\ell_{-(i+1)}}(x_0, x_1, x_2, \dots, \dots) &= q_i x_i, \quad i = 1, \dots \\ \beta_{\ell_{i+1}}(x_0, x_1, x_2, \dots, \dots) &= (1 - q_i) x_i, \quad i = 2, \dots \\ \beta_{\ell_0}(x_0, x_1, x_2, \dots, \dots) &= \left(1 - \sum_{i=0}^\infty x_i \right), \end{aligned}$$

Definimos o tempo de absorção acelerado $\tilde{\tau}_n := \inf\{t \geq 0 : \tilde{Y}^n(t) \leq 0\}$ e obtemos que

$$\mathcal{R}^n(\tau_n) = \tilde{\mathcal{R}}^n(\tilde{\tau}_n).$$

Para encontrar os limites, definimos o semi-grupo de operadores $G = (G_t : t \geq 0)$ pela relação de recorrência:

$$G_t(x) = x + \int_0^t F(G_s(x)) ds \quad (24)$$

para $x \in \ell_p$.

Para uma condição inicial fixada x^0 , seja $\tau_\infty = \inf\{t \geq 0 : G_t(x^0) \notin E_+\}$ e considere

$$x^\infty = G_{\tau_\infty}(x^0).$$

Podemos definir τ_n da seguinte maneira. Seja $\pi_0 : \ell_p \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção da 0-ésima coordenada, então $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : \pi_0(\mathcal{R}^n(t)) = 0\}$.

Queremos checar que sempre que a condição inicial estiver em E_+ , $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau_\infty$. Isto é, se $x^0 \in E_+$,

$$\tau_\infty = \inf\{t > 0 : G_t(x^0) \in \{x \in \ell_p : x_0 = 0\}\},$$

e o resultado segue pelo Teorema 3.7. Defina $E_0 := \{x \in E_+ : x_0 = 0\}$.

Agora note que fixada a condição inicial x^0 , precisamos apenas das coordenadas $x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0$ para determinar totalmente a trajetória da i -ésima coordenada, para $i \geq 1$. De fato, segue da definição do semi-grupo G , equação (24), com condição inicial x^0 que vale

$$x_1(t) = x_1^0 - \int_0^t x_1(s) ds,$$

cuja solução é $x_1(t) = x_1^0 \exp(-t)$, e para $i \geq 1$,

$$x_{i+1}(t) = x_{i+1}^0 + \int_0^t (q_i x_i(s) - x_{i+1}(s)) ds. \quad (25)$$

Observe que podemos escrever (25) como uma equação diferencial ordinária

$$x'_{i+1} = q_i x_i - x_{i+1}, \quad (26)$$

com condição de contorno $x_j(0) = x_j^0$ para $1 \leq j \leq i$. É fácil ver, portanto, que sempre que $x^0 \in E_+$, $x_i(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Então $x(t + \delta) \notin E_+$ para todo $\delta > 0$ com $x(t) \in E_+$ se e somente se $x(t) \in E_0$. Para finalizar a prova, basta mostrar que $x(t) \in E_0$ implica $x(t + \delta) \notin E_+$ para todo $\delta > 0$.

Resolvendo o sistema (25) ou, equivalentemente, (26), obtemos as soluções:

$$x_m(t) = \exp(-t) \sum_{k=1}^m \frac{x_k^0}{(m-k)!} t^{m-k} \prod_{j=k}^{m-1} (1 - q_j).$$

Fixe $t \geq 0$ e observe que se $\sum_{m=1}^{\infty} x_m(t)$ estiver bem definida, então, pelo lema de Fatou,

$$x_0(t) = -t + \sum_{m=1}^{\infty} (1 + q_m) \int_0^t x_m(s) ds.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^t x_m(s) ds &= \int_0^t \exp(-s) \sum_{k=1}^m \frac{x_k^0}{(m-k)!} s^{m-k} \prod_{j=k}^{m-1} (1 - q_j) \\ &= \sum_{k=1}^m x_k^0 \frac{\gamma(m-k+1, t)}{\Gamma(m-k+1)} \prod_{j=k}^{m-1} (1 - q_j). \end{aligned}$$

Como $x_m(s) \geq 0$ para todo $m \geq 1$,

$$0 \leq \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t x_m(s) ds \leq \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x_m(s) ds,$$

para todo $t \geq 0$.

Decorre de $x^0 \in E_+$ que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x_m(s) ds &= \sum_{k=1}^m x_k^0 \prod_{j=k}^m (1 - q_j) \\ &= \sum_{k=1}^m x_k^0 \frac{\sum_{j \geq m+1} p_j}{\sum_{j \geq k} p_j} \\ &\leq (1 - p_0)^{-1} \sum_{j \geq m+1} p_j. \end{aligned} \tag{27}$$

Ou seja, a condição inicial $x^0 = (0, 1, 0, \dots) = e_1$ é o maior valor possível (em E_+) para a integral acima. Para ver isso, basta notar que em (27) usamos que a soma de x_k^0 em k é menor ou igual a 1, e então uma propriedade de convexidade. Suponha então $x^0 = e_1$ e observe que:

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^t x_{m+1}(s) ds}{\int_0^t x_m(s) ds} &= \frac{\frac{\gamma(m+1, t)}{\Gamma(m+1)} \prod_{j=1}^m (1 - q_j)}{\frac{\gamma(m, t)}{\Gamma(m)} \prod_{j=1}^{m-1} (1 - q_j)} \\ &= \frac{\gamma(m+1, t)(1 - q_m)}{\gamma(m, t)m} \\ &= \frac{\gamma(m+1, t)(1 - q_m)}{\gamma(m+1, t) + \exp(-t)t^m}. \end{aligned}$$

Por hipótese, $\liminf q_m > 0$, portanto a série converge pelo critério de D'Alembert. Assim, usando a convergência (a zero) de $(p_k : k \geq 0)$, temos que

$$x_0(t) = -t + \sum_{m=1}^{\infty} (1 + q_m) \sum_{k=1}^m x_k^0 \frac{\gamma(m - k + 1, t)}{\Gamma(m - k + 1)} \prod_{j=k}^{m-1} (1 - q_j)$$

está bem definida para todo $t \geq 0$. Além disso, dado que a série converge mesmo quando $t \rightarrow \infty$, existe $\tau_{\infty} < \infty$.

Como x_0 é definida como integral de uma série convergente de funções diferenciáveis, esta é diferenciável com

$$x_0' = -1 + \sum_{m=1}^{\infty} (1 + q_m) x_m.$$

Obtemos usando o mesmo critério de convexidade que

$$x_0'(0) = -1 + \sum_{m=1}^{\infty} (1 + q_m) x_m^0 > 0.$$

Isto é, $x_0(t)$ é uma função crescente em $t = 0$, o que conclui a demonstração. □

4

SIMETRIAS DE MODELOS DE RUMORES

Quando se estuda equações diferenciais determinísticas, um dos problema é caracterizar suas simetrias. Isto é, caracterizar mapas que levam soluções em soluções a partir de perturbações em um parâmetro. Exploramos melhor essa noção no Apêndice B.

O trabalho de Gaeta e Quintero [11] traz uma noção que estende o conceito de simetrias para equações de Itô e baseado nele se desenvolve a noção de simetria deste trabalho. Uma possível motivação para isso é encontrar soluções integráveis de equações de Itô, isto é, dada uma equação de Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s,$$

encontrar uma simetria invertível, isto é, um mapa invertível $(t, x) \mapsto (\bar{t}, \bar{x})$ que satisfaça

$$\bar{X}_{\bar{t}} = \bar{X}_0 + \int_0^{\bar{t}} \mu(\bar{s}, \bar{X}_{\bar{s}})d\bar{s} + \int_0^{\bar{t}} \sigma(\bar{s}, \bar{X}_{\bar{s}})dW_{\bar{s}}$$

e torne a equação integrável no sentido de $\mu(\bar{t}, \bar{X}_{\bar{t}}) = \mu(\bar{t})$ e $\sigma(\bar{t}, \bar{X}_{\bar{t}}) = \sigma(\bar{t})$, isto é,

$$\bar{X}_{\bar{t}} = \bar{X}_0 + \int_0^{\bar{t}} \mu(\bar{s})d\bar{s} + \int_0^{\bar{t}} \sigma(\bar{s})dW_{\bar{s}}.$$

Até o presente momento, não há na literatura uma noção de simetria aplicada a modelos estocásticos de disseminação de rumores.

4.1 MODELO DE DALEY–KENDALL

Considere a Cadeia de Markov a Tempo Contínuo do modelo de Daley–Kendall com transições e taxas dadas em (1). Com base nela, trabalharemos com um modelo de proporções.

Nesse modelo de proporções, vamos supor que cada transição tem uma intensidade associada, que é conforme com a definição dada na Introdução. Seja \mathbb{Q}_+ o conjunto dos números racionais não-negativos e considere $\mathbb{Q}_+^2 = \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$.

Definição 4.1. *Seja n um inteiro positivo e considere a Cadeia de Markov a Tempo Contínuo $\tilde{\nu}^n(t) = (x^n(t), y^n(t)) \in \{(x, y) \in \mathbb{Q}_+^2 : x + y \leq 1\}$ com transições:*

<i>Transição</i>	<i>Taxa</i>
$(-1/n, 1/n)$	$n\lambda x^n(t)y^n(t),$
$(0, -2/n)$	$n\beta \binom{ny^n(t)}{2},$
$(0, -1/n)$	$n\gamma y^n(t)(1 - x^n(t) - y^n(t)).$

Nos referimos a esta definição como modelo de Daley–Kendall de proporções no n -ésimo nível (abreviamos como modelo DK).

Observação 5. *Observe que o modelo de Daley–Kendall de proporções goza do mesmo comportamento do modelo original de Daley e Kendall quando reescalado no espaço e no tempo.*

Assim como na Seção 2.1, obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias que descreve o valor esperado do modelo DK. Isto é, obtemos uma equação diferencial ordinária para $\mathbb{E}[\tilde{\nu}^n(t)]$:

$$\begin{cases} x' &= -\lambda xy \\ y' &= \lambda xy - \beta y^2 - \gamma y(1 - x - y) \end{cases} \quad (28)$$

Observe que os pontos de equilíbrio do sistema são $(c, 0)$ para $c \in \mathbb{R}$ e $(0, \frac{\gamma}{\gamma - \beta})$ para $\gamma \neq \beta$.

Nosso interesse é analisar um sistema que admita um estado de equilíbrio cujas coordenadas sejam não-negativas com soma menor ou igual a 1, tal que qualquer trajetória suficientemente próxima a este ponto convirja para ele. Ou seja, queremos um equilíbrio assintoticamente estável.

Lema 4.2. *Os estados de equilíbrio do sistema (28) não são assintoticamente estáveis.*

Ou seja, o lema mostra que o modelo de Daley–Kendal não é interessante para nossa investigação de simetrias e faz-se necessário introduzir um novo modelo.

4.2 MODELO DE RUMORES COM RETORNO DE ESPALHADORES

Propomos uma generalização com uma modificação do modelo DK.

No modelo, indivíduos espalhadores podem tornar-se ignorantes novamente com taxa κ . Isso pode ser interpretado como a perda de memória de um indivíduo.

Ainda, faremos uma pequena modificação na taxa de transição $(0, -2)$ do modelo DK (Definição 4.1) considerando a taxa $\beta \frac{Y^2}{2}$ no lugar de $\beta \binom{Y}{2}$. Note que essa mudança é assintoticamente equivalente no modelo de proporções.

Considere $V^n(t) = (X^n(t), Y^n(t))$ a Cadeia de Markov a Tempo Contínuo no tempo t com transições:

Transição	Taxa	
$(-1, 1)$	$\lambda X(t) \frac{Y(t)}{n},$	
$(0, -2)$	$\beta \frac{Y^n(t) Y^n(t)}{2 n},$	(29)
$(0, -1)$	$\gamma \frac{Y(t)}{n} (n - X(t) - Y(t))$	
$(1, 0)$	$\kappa \left(\frac{1}{n}\right) (n - X(t) - Y(t)).$	

Definimos então o modelo que trabalharemos.

Definição 4.3. *Seja n um número inteiro positivo e considere as Cadeias de Markov a Tempo Contínuo $v_t^n = (x_t^n, y_t^n)$ in $\{(x, y) \in \mathbb{Q}_+^2 : x + y \leq 1\}$ com transições:*

Transição	Taxa
$(-1/n, 1/n)$	$n\lambda xyh + o(h),$
$(0, -2/n)$	$n\beta \left(\frac{y^2}{2}\right) h + o(h),$
$(0, -1/n)$	$n\gamma y(1 - x - y)h + o(h),$
$(1/n, 0)$	$n\kappa(1 - x - y)h + o(h).$

Nos referimos a este como modelo de proporções de Daley Kendall com retorno no n -ésimo nível (abreviamos como modelo DKR).

Como antes, derivamos o sistema de equações diferenciais ordinárias associado ao valor esperado:

$$\begin{cases} x' = \kappa(1 - x - y) - \lambda xy \\ y' = \lambda xy - \beta y^2 - \gamma y(1 - x - y) \end{cases} \quad (30)$$

Teorema 4.4. *O sistema (30) tem como estados de equilíbrio os pontos $(x_0, y_0) = (1, 0)$,*

- $(x_1, y_1) := \left(\frac{\gamma}{\lambda + \gamma}, \frac{\lambda \kappa}{\lambda \kappa + \kappa \gamma + \gamma \lambda}\right)$ se $\beta = \gamma$,
- (x_2, y_2) e (x_3, y_3) se $\beta \neq \gamma$, onde

$$y_i = \frac{\gamma}{\gamma - \beta} - \frac{(\lambda + \gamma)}{\gamma - \beta} x_i, \quad i = 2, 3$$

e

$$x_i = \frac{-(\kappa(\lambda - \beta) - \gamma\lambda) + (-1)^i \sqrt{(\kappa(\lambda - \beta) - \gamma\lambda)^2 + 4\lambda(\lambda + \gamma)\beta\kappa}}{2\lambda(\lambda + \gamma)}, \quad i = 2, 3.$$

Note que estamos lidando com um modelo de proporções, então consideramos a região $\Delta := \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x + y \leq 1\}$. Além disso, estamos interessados em uma noção de medida invariante para a difusão e para tanto, buscamos uma noção de invariância para os *incrementos*. Essa ideia ficará mais clara nos próximos resultados.

Teorema 4.5. *Os seguintes estados de equilíbrio são assintoticamente estáveis e pertencem a Δ :*

1. (x_1, y_1) quando $\beta = \gamma$;
2. (x_2, y_2) quando $\beta > \gamma$ ou quando $\beta < \gamma$ e $\sqrt{\kappa(\gamma - \beta)} \geq \lambda - (\gamma - \beta)$.

Diremos que o **gerador infinitesimal difusivo** associado a uma tal sequência de Cadeias de Markov com geradores L_n será o limite $L := \lim_n L_n$, quando existir.

Teorema 4.6. *Para o modelo DKR (Definição 4.3), o gerador infinitesimal difusivo em torno de um equilíbrio (x_*, y_*) do sistema (30) existe e é dado pontualmente por*

$$\begin{aligned} L(f)((x_*, y_*)) &= -(\kappa(x + y) + \lambda(x_*y + xy_*)) \frac{\partial f}{\partial x} \\ &\quad + (xy_*(\lambda + \gamma) - yy_*(\beta + \gamma)) \frac{\partial f}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{2}(2\lambda x_*y_* + \beta y_*^2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \lambda x_*y_* \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ &\quad - \lambda x_*y_* \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \tag{31}$$

para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Seja ∇^2 o operador Hessiano e \odot o produto de Hadamard, isto é, para duas matrizes reais de mesma ordem, $A = (a_{ij})_{ij}$ e $B = (b_{ij})_{ij}$, $A \odot B = (a_{ij} \cdot b_{ij})_{ij}$. Escrevemos o gerador infinitesimal difusivo do modelo DKR como

$$L = \mu \odot \nabla + (\sigma \sigma^t) \odot \nabla^2,$$

onde

$$\mu = \begin{pmatrix} -(\kappa(x + y) + \lambda(x_*y + xy_*)) \\ (xy_*(\lambda + \gamma) - yy_*(\beta + \gamma)) \end{pmatrix}$$

e

$$\sigma\sigma^t = \begin{pmatrix} \lambda x_* y_* & -\frac{1}{2}\lambda x_* y_* \\ -\frac{1}{2}\lambda x_* y_* & \lambda x_* y_* + \frac{\beta y_*^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Pelo Lema 4.8, que veremos na seção 4.3, podemos considerar a matriz simétrica

$$\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda x_* y_*}{\iota + 2 + \sqrt{4\iota + 3}}} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{4\iota + 3} & -1 \\ -1 & 2 + \sqrt{4\iota + 3} + 2\iota \end{pmatrix},$$

onde $\iota = \frac{\beta y_*}{2\lambda x_*}$. O processo de Feller cujo gerador é L é dado pela equação de Itô

$$dX = \mu dt + \sigma dW. \quad (32)$$

Essa relação segue do Teorema 7.3.3 em [23].

Para o próximo resultado usaremos a notação matricial $(x_1, x_2) = (x, y)$. Seguindo a noção de simetria temporal de uma equação de Itô (ver Apêndice B), obtemos o seguinte.

Teorema 4.7. *Se \mathbf{v} é uma simetria para (32) dada por*

$$\mathbf{v} = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}},$$

então $\tau \equiv k \in \mathbb{R}$ e ξ resolve a equação diferencial ordinária linear homogênea (em t)

$$\xi' = (\nabla \mu) \xi,$$

onde

$$\nabla \mu = \begin{pmatrix} -(\kappa + \lambda y_*) & -(\kappa + \lambda x_*) \\ y_*(\lambda + \gamma) & -y_*(\beta + \gamma) \end{pmatrix}.$$

Observação 6. *Note que $\nabla \mu$ é constante, tem traço negativo e determinante positivo. Portanto, a origem é um equilíbrio assintoticamente estável do sistema e as trajetórias de ξ convergem (em t) para a origem.*

Da observação acima, vemos que a ação de \mathbf{v} na equação de Itô (32) é irrelevante no espaço para um instante arbitrariamente distante, ou seja, as equações simétricas a (32) apresentam um comportamento assintótico equivalente para t suficientemente grande.

4.3 PROVAS

Demonstração do Lema 4.2

Para verificar a estabilidade dos pontos de equilíbrio do modelo DK, escrevemos antes a matriz jacobiana do sistema (28):

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -\lambda y & -\lambda x \\ (\lambda + \gamma)y & (\lambda + \gamma)x + 2(\gamma - \beta)y - \gamma \end{pmatrix}.$$

Para $(c, 0)$, temos:

$$J(c, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda c \\ 0 & (\lambda + \gamma)c - \gamma \end{pmatrix}.$$

Como 0 é autovalor, o equilíbrio não é assintoticamente estável.

Para $(0, \frac{\gamma}{\gamma - \beta})$, temos:

$$J\left(0, \frac{\gamma}{\gamma - \beta}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda\gamma}{\gamma - \beta} & 0 \\ \frac{\gamma(\lambda + \gamma)}{\gamma - \beta} & \gamma \end{pmatrix},$$

que tem $\gamma > 0$ como autovalor, logo o equilíbrio é instável.

□

4.3.1 Resultados para o modelo DKR

Demonstração do Teorema 4.4

Tomemos a equação em y' do sistema (30):

$$y' = y(\lambda x - \beta y - \gamma(1 - x - y)). \quad (33)$$

Como $y = 0$ anula essa equação, verificamos na equação de x' que $(1, 0)$ é ponto de equilíbrio.

Agora suponha $y \neq 0$. Dividindo o lado direito da equação (33) por y e igualando a zero, temos a relação:

$$(\gamma - \beta)y = \gamma - (\gamma + \lambda)x. \quad (34)$$

Agora dividimos em dois casos:

- $\gamma = \beta$ Aqui, obtemos $x = \frac{\gamma}{\gamma + \lambda}$. Substituindo na relação para x' ,

$$x' = \kappa(1 - x - y) - \lambda xy, \quad (35)$$

concluimos que $\left(\frac{\gamma}{\gamma + \lambda}, \frac{\kappa\gamma}{\gamma\lambda + \gamma\kappa + \kappa\lambda}\right)$ é ponto de equilíbrio.

- $\gamma \neq \beta$

Ao substituir a relação (34) para y na equação (35), obtemos um polinômio de segundo grau:

$$\kappa \left(1 - x - \frac{\gamma}{\gamma - \beta} - \frac{\gamma + \lambda}{\gamma - \beta} x \right) - \lambda x \left(\frac{\gamma}{\gamma - \beta} - \frac{\gamma + \lambda}{\gamma - \beta} x \right) = 0.$$

Reescrevendo:

$$\lambda(\gamma + \lambda)x^2 + (\kappa(\lambda - \beta) - \lambda\gamma)x - \kappa\beta = 0$$

obtemos duas soluções:

$$x_2 = \frac{-(\kappa(\lambda - \beta) - \lambda\gamma) + \sqrt{(\kappa(\lambda - \beta) - \lambda\gamma)^2 + 4\lambda(\gamma + \lambda)\kappa\beta}}{2\lambda(\gamma + \lambda)}$$

$$x_3 = \frac{-(\kappa(\lambda - \beta) - \lambda\gamma) - \sqrt{(\kappa(\lambda - \beta) - \lambda\gamma)^2 + 4\lambda(\gamma + \lambda)\kappa\beta}}{2\lambda(\gamma + \lambda)}.$$

□

Demonstração do Teorema 4.5. É imediato que $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Delta$.

Agora suponha $\gamma \neq \beta$. Observemos que para qualquer $a \in \mathbb{R}$ e $b > 0$, vale $0 < a^2 \leq a^2 + b$ portanto $x_3 < 0 < x_2$.

Note que ao manipular a expressão $x_2 \leq 1$ com operações básicas e quadrados, obtemos a equivalência:

$$\beta\kappa \leq \lambda(\lambda + \gamma) + \kappa(\lambda + \beta) - \lambda\gamma, \quad (36)$$

que é equivalente a

$$0 \leq \lambda(\lambda + \kappa)$$

e portanto $x_2 \leq 1$.

A condição $y_2 \geq 0$ implica $\gamma \geq (\lambda + \gamma)x_2$ quando $\gamma > \beta$ e $\gamma \leq (\lambda + \gamma)x_2$ quando $\gamma < \beta$. Com uma manipulação análoga à que fizemos para obter a (36), concluímos que $y_2 \geq 0$.

Para checar que $y_2 \leq 1$, basta verificar se $(\lambda + \gamma)x_2 \geq \beta$ quando $\gamma > \beta$ e se $(\lambda + \gamma)x_2 \leq \beta$ quando $\gamma < \beta$. Novamente, a relação vale repetindo o argumento acima.

Agora verificamos que os equilíbrios de interesse são de fato assintoticamente estáveis. A matriz jacobiana para um equilíbrio arbitrário (x, y) de (30) é

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -(\kappa + \lambda y) & -(\kappa + \lambda x) \\ (\lambda + \gamma)y & (\lambda + \gamma)x + 2(\gamma - \beta)y - \gamma \end{pmatrix} \quad (37)$$

e seu polinômio característico é

$$p^{(x,y)}(e) = -(\kappa + \lambda y + e)((\lambda + \gamma)x + 2(\gamma - \beta)y - \gamma - e) + (\lambda + \gamma)(\kappa + \lambda x)y.$$

Chequemos a estabilidade de cada um dos pontos:

1. Para $(1, 0)$,

$$p^{(1,0)}(e) = -(\kappa + e)((\lambda + \gamma) - \gamma - e).$$

As raízes são $-\kappa$ e λ , logo não é assintoticamente estável.

2. Quando $\beta = \gamma$, checamos (x_1, y_1) :

$$p^{(x_1, y_1)}(e) = e^2 + \left(1 + \frac{\gamma^2}{\lambda\kappa + \gamma\kappa + \lambda\gamma}\right)\kappa e + \lambda\kappa.$$

Como o polinômio é de grau 2 e os coeficientes são positivos, é imediato que uma das raízes tem parte real negativa. A outra raiz é dada por:

$$-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma^2}{\lambda\kappa + \gamma\kappa + \lambda\gamma}\right)\kappa + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{\gamma^2}{\lambda\kappa + \gamma\kappa + \lambda\gamma}\right)^2 \kappa^2 - 4\lambda\kappa}.$$

Note que o termo no quadrado é no máximo $\left(1 + \frac{\gamma^2}{\lambda\kappa + \gamma\kappa + \lambda\gamma}\right)^2 \kappa^2$, portanto a parte real da raiz é negativa. Ou seja, (x_1, y_1) é assintoticamente estável.

3. Para $\beta \neq \gamma$, basta checar para (x_2, y_2) . Note que a matriz jacobiana (37) avaliada no equilíbrio (x_2, y_2) pode ser reescrita como

$$J(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} -(\kappa + \lambda y_2) & -(\kappa + \lambda x_2) \\ (\lambda + \gamma)y_2 & (\gamma - \beta)y_2 \end{pmatrix}.$$

Dado que $y_2 > 0$, o sinal de $\det J(x_2, y_2)$ é o mesmo de $\det J'$, onde

$$J' = \begin{pmatrix} -(\kappa + \lambda y_2) & -(\kappa + \lambda x_2) \\ (\lambda + \gamma) & (\gamma - \beta) \end{pmatrix}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \det J' &= -(\kappa(\gamma - \beta) + \lambda\gamma - \lambda(\lambda + \gamma)x_2) + (\lambda + \gamma)(\kappa + \lambda x_2) \\ &= \kappa(\lambda + \beta) - \lambda\gamma + 2\lambda(\lambda + \gamma)x_2 \\ &= \sqrt{(\kappa(\lambda + \beta) - \lambda\gamma)^2 + 4\lambda(\lambda + \gamma)\beta\kappa} > 0 \end{aligned}$$

e portanto $\det J(x_2, y_2) > 0$. Agora verificamos condições para $\text{Tr } J(x_2, y_2) < 0$. Temos:

$$\begin{aligned}\text{Tr } J(x_2, y_2) &= -(\kappa + \lambda y_2) + (\gamma - \beta)y_2 \\ &= -\kappa + (\gamma - \beta - \lambda)y_2.\end{aligned}$$

Portanto a condição $\text{Tr } J(x_+, y_+) < 0$ é equivalente à condição

$$\begin{aligned}\kappa &\geq \frac{(\gamma - \beta - \lambda)}{\gamma - \beta}(\gamma - (\lambda + \gamma)x_2) \\ 2\kappa\lambda &\geq \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma - \beta}\right) \left(\lambda\gamma + \kappa(\lambda + \beta) - \sqrt{(\kappa(\lambda + \beta) - \gamma\lambda)^2 + 4\lambda(\lambda + \gamma)\beta\kappa}\right).\end{aligned}\quad (38)$$

No lado direito da inequação acima, o termo no argumento da raiz pode ser escrito como:

$$(\gamma\lambda + \kappa(\lambda + \beta))^2 + 4\lambda^2\kappa(\beta - \gamma).\quad (39)$$

É imediato, portanto, que o segundo termo no lado direito da equação (38) é negativo então quando o primeiro termo é positivo, temos $\text{Tr } J(x_+, y_+) < 0$. Essa condição é satisfeita na condição $\gamma < \beta$ e na condição $\gamma > \beta$ e $\lambda \leq \gamma - \beta$.

Agora tratamos do caso $\gamma > \beta$ e $\lambda > \gamma - \beta$.

Da equação (39), o lado direito da equação (38) é limitado superiormente por

$$\left(\frac{\lambda}{\gamma - \beta} - 1\right) 2\lambda\sqrt{\kappa(\gamma - \beta)}$$

e obtemos a condição

$$\sqrt{\kappa} \geq \frac{\lambda - \gamma + \beta}{\sqrt{\gamma - \beta}}. \quad \square$$

4.3.2 Gerador infinitesimal e equação de Itô

Demonstração do Teorema 4.6

Para encontrar o gerador infinitesimal no entorno de um equilíbrio (x_*, y_*) do processo de difusão, usaremos o Teorema A.48. Para tanto, seja \mathbb{Z}_+ o conjunto dos inteiros não-negativos e $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e considere os espaços de estados

$$E_n := \left\{ \sqrt{n} \left(\frac{\tilde{x}}{n} - x_*, \frac{\tilde{y}}{n} - y_* \right) : (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{Z}_+^2, \tilde{x} + \tilde{y} \leq n \right\},$$

onde estão definidas as translações de nossas Cadeias de Markov pelo equilíbrio. Tome $(x, y) \in E_n$ para definir as variáveis:

$$\begin{aligned}(\hat{x}, \hat{y}) &= \left(x_* + \frac{x}{\sqrt{n}}, y_* + \frac{y}{\sqrt{n}} \right) \\(\hat{x}(h), \hat{y}(h)) &= \left(x_* + \frac{X^n(h)}{\sqrt{n}}, y_* + \frac{Y^n(h)}{\sqrt{n}} \right).\end{aligned}$$

Considere $\mathcal{R}^n(t) = (X^n(t), Y^n(t))$ nossa cadeia de Markov no tempo t em E_n e seja $\tilde{\mathcal{R}}^n(t) = (\tilde{X}^n(t), \tilde{Y}^n(t))$ seu mergulho em E , como no Teorema A.48.

Observe que, do Teorema de Hille-Yosida, existe uma relação biunívoca entre o semi-grupo de Feller e seu gerador infinitesimal. Seja $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ uma função real. Temos:

$$\begin{aligned}f(\tilde{\mathcal{R}}^n(t)) &= f(\tilde{\mathcal{R}}^n(0)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{\mathcal{R}}^n(0))(\tilde{X}^n(t) - \tilde{X}^n(0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{\mathcal{R}}^n(0))(\tilde{Y}^n(t) - \tilde{Y}^n(0)) \\&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\tilde{\mathcal{R}}^n(0))(\tilde{X}^n(t) - \tilde{X}^n(0))^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\tilde{\mathcal{R}}^n(0))(\tilde{Y}^n(t) - \tilde{Y}^n(0))^2 \\&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\tilde{\mathcal{R}}^n(0))(\tilde{X}^n(t) - \tilde{X}^n(0))(\tilde{Y}^n(t) - \tilde{Y}^n(0)) + r(\tilde{\mathcal{R}}^n(t)),\end{aligned}$$

onde r é o resto de Taylor de terceira ordem.

Para calcular o gerador infinitesimal L_n do semigrupo, observe que

$$L_n(f)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbb{E}_{(x,y)}^n [f(\tilde{\mathcal{R}}^n(h))] - f(x, y)), \quad (40)$$

onde $\mathbb{E}_{(x,y)}^n$ é a esperança condicional dada a condição inicial $\tilde{\mathcal{R}}^n(0) = (x, y)$.

Ou seja, basta calcular o valor esperado dado $\tilde{\mathcal{R}}^n(0) = (x, y)$ dos polinômios dados na decomposição de Taylor num tempo h e verificar se existem fatores $h^r, \geq 1$, tais que o fator $\frac{1}{h}$ na equação (40) mantenha o limite bem definido em h . Após isso, observar que o limite em $n \rightarrow \infty$ existe.

Seja $(x, y) \in E_n$. Temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{(x,y)}^n[X^n(h) - x] &= \sqrt{n} \mathbb{E}_{(x,y)}^n[\hat{x}(h) - \hat{x}] \\
&= \sqrt{n} \left[\left(-\frac{1}{n} \right) (n\lambda\hat{x}\hat{y}h + o(h)) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{n} \right) (n\kappa(1 - \hat{x} - \hat{y})h + o(h)) \right] \\
&= \sqrt{n} \left[\left(-\frac{1}{n} \right) \left(n\lambda \left(x_* + \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \left(y_* + \frac{y}{\sqrt{n}} \right) h + o(h) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{n} \right) \left(n\kappa \left(1 - \left(x_* + \frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \left(y_* + \frac{y}{\sqrt{n}} \right) \right) h + o(h) \right) \right] \\
&= \sqrt{n} (\kappa(1 - x_* - y_*) - \lambda x_* y_*) h - (\kappa(x + y) + \lambda(x_* y + x y_*)) h \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda x y h + \frac{1}{\sqrt{n}} o(h) \\
&= -(\kappa(x + y) + \lambda(x_* y + x y_*)) h + O\left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right) + n^{-1/2} o(h). \tag{41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{(x,y)}^n[Y^n(h) - y] &= \sqrt{n} \mathbb{E}_{(x,y)}^n[\hat{y}(h) - \hat{y}] \\
&= \sqrt{n} \left(\left(\frac{1}{n} \right) (n\lambda\hat{x}\hat{y}h + o(h)) \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{2}{n} \right) \left(n\beta \frac{\hat{y}^2}{2} h + o(h) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{1}{n} \right) (n\gamma\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y})h + o(h)) \right) \\
&= \sqrt{n} \left[\left(\frac{1}{n} \right) \left(n\lambda \left(x_* + \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \left(y_* + \frac{y}{\sqrt{n}} \right) h + o(h) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{2}{n} \right) \left(n\beta \frac{\left(y_* + \frac{y}{\sqrt{n}} \right)^2}{2} h + o(h) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{1}{n} \right) \left(n\gamma \left(y_* + \frac{y}{\sqrt{n}} \right) \left(1 - \left(x_* + \frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \left(y_* + \frac{y}{\sqrt{n}} \right) \right) h + o(h) \right) \right] \\
&= \sqrt{n} (\lambda x_* y_* - \beta y_*^2 - \gamma y_*(1 - x_* - y_*)) h \\
&\quad + (\lambda x_* y + \lambda x y_* - 2\beta y_* y + \gamma(y_* x - y(1 - x_* - 2y_*))) h \\
&\quad + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) h + n^{-1/2} o(h) \\
&= (\lambda x_* y + \lambda x y_* - 2\beta y_* y + \gamma(y_* x - y(1 - x_* - 2y_*))) h \\
&\quad + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) h + n^{-1/2} o(h) \tag{42}
\end{aligned}$$

Como no caso de equilíbrios assintoticamente estáveis vale que $x_* \neq 0$ e $y_* \neq 0$, $\lambda x_* - \beta y_* - \gamma(1 - x_* - y_*) = 0$, segue que

$$\mathbb{E}_{(x,y)}^n[Y^n(h) - y] = (xy_*(\lambda + \gamma) - yy_*(\beta + \gamma))h + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)h + n^{-1/2}o(h)$$

Agora olhamos para o segundo momento.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(x,y)}^n[(X^n(h) - x)^2] &= n \mathbb{E}_{(x,y)}^n[(\hat{x}(h) - \hat{x})^2] \\ &= n \left[\left(-\frac{1}{n}\right)^2 (n\lambda\hat{x}\hat{y}h + o(h)) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n}\right)^2 (n\kappa(1 - \hat{x} - \hat{y})h + o(h)) \right] \\ &= n \left[\left(-\frac{1}{n}\right)^2 \left(n\lambda \left(x_* + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \left(y_* + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) h + o(h)\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(n\kappa(1 - \left(x_* + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \left(y_* + \frac{y}{\sqrt{n}}\right))h + o(h)\right) \right] \\ &= 2\lambda x_* y_* h + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)h + n^{-1}o(h). \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(x,y)}^n[(Y^n(h) - y)^2] &= n \mathbb{E}_{(x,y)}^n[(\hat{y}(h) - \hat{y})^2] \\ &= n \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 (n\lambda\hat{x}\hat{y}h + o(h)) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{2}{n}\right)^2 \left(n\beta\frac{\hat{y}^2}{2}h + o(h)\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{n}\right)^2 (n\gamma\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y})h + o(h)) \right) \\ &= \lambda\hat{x}y h + 2\beta\hat{y}^2 h + \gamma\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y})h + n^{-1}o(h) \\ &= \lambda \left(x_* + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \left(y_* + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) h + 2\beta \left(y_* + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^2 h \\ &\quad + \gamma \left(y_* + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) \left(1 - \left(x_* + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \left(y_* + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right) h + o\left(\frac{h}{n}\right) \\ &= (2\lambda x_* y_* + \beta y_*^2)h + O(n^{-1/2}) + o\left(\frac{h}{n}\right). \end{aligned} \quad (44)$$

Olhamos para a covariância:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{(x,y)}^n[(X^n(h) - x)(Y^n(h) - y)] &= n \mathbb{E}_{(x,y)}^n[(\hat{x}(h) - \hat{x})(\hat{y}(h) - \hat{y})] \\
&= -n \left(\frac{1}{n}\right)^2 (n\lambda\hat{x}\hat{y}h + o(h)) \\
&= -\lambda \left(x_* + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \left(y_* + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) h + n^{-1}o(h) \\
&= -\lambda x_* y_* h + O(hn^{-1}) + o(hn^{-1}) \tag{45}
\end{aligned}$$

Para os momentos de ordem superior, é imediato que estes são de ordem $O(hn^{-1}) + o(hn^{-1})$. \square

Agora olhamos para a equação de Itô obtida no entorno de um equilíbrio (x_*, y_*) .

Lema 4.8. *Se σ é simétrica, então*

$$\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda x_* y_*}{\iota + 2 + \sqrt{4\iota + 3}}} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{4\iota + 3} & -1 \\ -1 & 2 + \sqrt{4\iota + 3} + 2\iota \end{pmatrix}.$$

com $\iota = \frac{\beta y_*}{2\lambda x_*}$.

Demonstração. Escrevendo

$$\sigma\sigma^t = \begin{pmatrix} \lambda x_* y_* & -\frac{1}{2}\lambda x_* y_* \\ -\frac{1}{2}\lambda x_* y_* & \lambda x_* y_* + \frac{\beta y_*^2}{2} \end{pmatrix} = \lambda x_* y_* \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 + \iota \end{pmatrix} \equiv \lambda x_* y_* M,$$

observe que $\sigma\sigma^t$ é simétrica portanto diagonalizável. O mesmo se aplica para M , portanto escrevemos $M = PDP^{-1}$, onde P é a matriz invertível de autovetores de M e D a matriz diagonal de autovalores de M . Temos:

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} \iota + \sqrt{1 + \iota^2} & \iota - \sqrt{1 + \iota^2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
D &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(2 + \iota - \sqrt{1 + \iota^2}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(2 + \iota + \sqrt{1 + \iota^2}) \end{bmatrix} \\
P^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{1 + \iota^2}} & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\iota}{\sqrt{1 + \iota^2}}\right) \\ -\frac{1}{2\sqrt{1 + \iota^2}} & \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\iota}{\sqrt{1 + \iota^2}}\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Escrevendo \sqrt{D} para denotar a matriz diagonal cujo $\sqrt{D}^2 = D$, obtemos $\sigma = \sqrt{\lambda x_* y_*} P \sqrt{D} P^{-1}$, dado que é simétrica, onde

$$P \sqrt{D} P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{\iota + 2 + \sqrt{4\iota + 3}}} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{4\iota + 3} & -1 \\ -1 & 2 + \sqrt{4\iota + 3} + 2\iota \end{pmatrix}.$$

Sejam σ_1 e σ_2 simétricas tais que $\sigma_1\sigma_1^t = \sigma_2\sigma_2^t = \sigma\sigma^t$. Temos que $\sigma_i\sigma_i^t = \sigma_i^2$, $i = 1, 2$ e que as matrizes comutam, isto é, $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$. Portanto,

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 2\sigma\sigma^t - 2\sigma_1\sigma_2. \quad (46)$$

Como ambas as matrizes são simétricas, a diferença é simétrica, portanto o quadrado é simétrico. Mais que isso, v_i é autovetor de σ_i ($i = 1, 2$) se e somente se é autovetor de $\sigma\sigma^t$. Portanto, os autovetores de $\sigma\sigma^t$ são os mesmos autovetores de $\sigma_1\sigma_2$ (com respectivos autovalores). Isso caracteriza o lado direito da equação (46) como a matriz nula. Da hipótese de simetria das matrizes, $\sigma_1 = \sigma_2$. \square

Note que σ é uma matriz constante, então podemos reescrever o Teorema B.15 da seguinte forma.

Teorema 4.9. *Seja*

$$v = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, \mathbf{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$$

uma simetria aleatória para a equação diferencial ordinária

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma dW_t,$$

onde ambas $\nabla\mu$ e σ são matrizes constantes. Então vale:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \mu_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^2 \xi_j \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{j,k} (\sigma\sigma^t)_{jk} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_j \partial x_k} = \mu_i \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (47)$$

$$\sum_{j=1}^2 \sigma_{jk} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sigma_{ik} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (48)$$

Observação 7. *Se $\det \sigma \neq 0$, da equação (48) podemos assumir que*

$$\xi_i(t, \mathbf{x}) = (ax_i + b_i) + (cx_i + d_i)f(t) \quad (49)$$

para alguma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e constantes $a, b_i, c, d_i \in \mathbb{R}$ e

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = 2 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}.$$

Assim, a equação (47) se escreve como

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^2 \xi_j \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} = 2\mu_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}. \quad (50)$$

Assumimos $\det \sigma \neq 0$. Assim, a equação (49) caracteriza ξ_i e desenvolvemos a equação (50):

$$(cx_i + d_i)f'(t) - \xi \cdot \nabla \mu_i = \mu_i(a + cf(t)).$$

Para simplificar a notação, tome $(x, y) = (x_1, x_2)$. Ao substituir μ da equação (32) nós temos

$$\begin{aligned} (cx + d_1)f'(t) &+ (ax + b_1 + (cx + d_1)f(t))(\kappa + \lambda y_*) \\ &+ (ay + b_2 + (cy + d_2)f(t))(\kappa + \lambda x_*) \\ &= -2(\kappa(x + y) + \lambda(x_*y + xy_*))(a + cf(t)), \\ (cy + d_2)f'(t) &- (ax + b_1 + (cx + d_1)f(t))y_*(\lambda + \gamma) \\ &+ (ay + b_2 + (cy + d_2)f(t))y_*(\beta + \gamma) \\ &= 2(xy_*(\lambda + \gamma) - yy_*(\beta + \gamma))(a + cf(t)). \end{aligned}$$

Vendo a primeira equação como polinômio de primeira ordem em x e y , obtemos

$$\begin{aligned} &x \left(cf'(t) + (a + cf(t))(\kappa + \lambda y_*) \right) + y \left((a + cf(t))(\kappa + \lambda x_*) \right) \\ &+ \left(d_1f'(t) + (b_1 + d_1f(t))(\kappa + \lambda y_*) + (b_2 + d_2f(t))(\kappa + \lambda x_*) \right) \\ &= x \left(-2(\kappa + \lambda y_*)(a + cf(t)) \right) + y \left(-2(\kappa + \lambda x_*)(a + cf(t)) \right). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de y ,

$$(\kappa + \lambda x_*)(a + cf(t)) = -2(\kappa + \lambda x_*)(a + cf(t)).$$

Assim, se $c \neq 0$, obtemos $f(t) = -a/c$. Caso contrário, $c = 0$ implica $a = 0$ e, assim, $f(t) = 0$. Substituindo na equação (49), vemos que ξ é constante (em t), então necessariamente τ é constante.

Juntando esses fatos na equação (49), podemos assumir $\xi_i = f_i(t)$. Além disso, da equação (47),

$$\frac{df_i(t)}{dt} = f_1(t) \frac{\partial \mu_i}{\partial x_1} + f_2(t) \frac{\partial \mu_i}{\partial x_2}$$

Isto é, temos um sistema de equações diferenciais lineares homogêneas de ordem 2.

Demonstração do Teorema 4.7

Basta notar que $\nabla \mu$ e σ são constantes, então aplicar o Teorema 4.9 e Observação 7.

□

5 | CONCLUSÕES

O objetivo desta tese é apresentar alguns dos trabalhos que foram desenvolvidos durante o doutorado, trazendo comentários e algumas passagens que possivelmente não estarão nos trabalhos publicados.

5.1 NOSSOS RESULTADOS

Aqui estão as contribuições principais do trabalho.

No capítulo 2, trazemos modelos de rumores que incorporam a memória. Até onde sabemos, é a primeira vez que foi proposto um modelo de rumores com memória. Para tanto, derivamos uma lei dos grandes números funcional, no sentido de existir uma sistema de equações que governa as proporções limite de uma população quando seu tamanho é arbitrariamente grande. Além disso, estudamos as flutuações desse limite por meio de um teorema do tipo Donsker ou Teorema Central do Limite funcional, onde obtivemos que os ruídos convergem para uma equação integral estocástica de Volterra.

No capítulo 3, propomos a generalização de um modelo de rumores que tem dinâmica de espalhamento baseada em fases: todo indivíduo deve ouvir o rumor um número fixado de vezes para espalhar (ver [27]). Aqui, nosso modelo trouxe a ideia de que cada indivíduo pode ouvir o rumor um número diferente de vezes para então espalhá-lo e também ouvir uma vez para decidir não espalhá-lo. Ao observar o tempo de morte do processo, isto é, o primeiro tempo quando não há espalhadores, podemos investigar as proporções finais da população. Para isso, precisamos derivar uma lei dos grandes números num espaço de dimensão infinita, baseada nas ideias presentes em [9] para o análogo do caso em dimensão finita. Verificamos que a distribuição de Poisson satisfaz as hipóteses do nosso resultado.

No capítulo 4, propomos um modelo baseado no modelo clássico de Daley–Kendall (ver [6]) incorporando a possibilidade de indivíduos contidos voltarem à classe de

ignorantes por meio da perda de memória. Aqui, obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias a partir do valor esperado da sequência de Cadeias de Markov. Consideramos então o gerador infinitesimal de Cadeias de Markov das proporções no entorno de equilíbrios assintoticamente estáveis. Ao calcular o gerador limite, investigamos a equação de Itô relacionada e aplicamos as noções de simetria em [11] na nossa equação. As simetrias obtidas dizem que perturbações na parte espacial são negligenciáveis após um tempo suficientemente grande.

5.2 TRABALHOS FUTUROS

A composição deste compêndio torna necessária a exposição de interesses ou sugestões para trabalhos futuros a partir do que trouxemos nestas páginas. Aqui traremos algumas delas.

O problema de rumores não-markovianos abre margem para uma série de novos trabalhos, entre os quais citamos algumas possibilidades abaixo:

- Investigação das proporções limite do modelo;
- Derivar leis de grandes desvios para o modelo;
- Introdução de novos modelos com dinâmica de contato no grafo completo;
- Introdução do modelo em grafos não-completos;
- Estudo de modelos cuja dinâmica limite não é de Lotka-Volterra.

No problema de compartimentos aleatórios, mostramos que para modelos com dependência de densidade em espaços ℓ^p vale uma lei dos grandes números, daí aplicamos o resultado ao nosso modelo. Nessa linha, alguns desdobramentos podem ser:

- Generalização de modelos similares para casos de dimensão infinita;
- Investigação de princípio de invariância do tipo Donsker para o problema de dimensão infinita;
- Verificação da existência de medidas invariantes para o modelo.

No problema de simetrias, algumas perguntas ficaram em aberto como por exemplo a própria interpretação do que representa uma simetria em termos do rumor. Outro problema é a obtenção analítica da raiz quadrada de uma matriz quadrada, dado que numa matriz de ordem 3 isso pode se tornar tão mais complicado quanto se queira. Citamos alguns tópicos que, assim como esses, emergem naturalmente do problema:

- Existência de simetrias mais gerais para o problema;
- Métodos analíticos para obtenção de simetrias para modelos markovianos de dimensão finita;
- Existência de uma noção de simetria (talvez medidas invariantes) para a Cadeia de Markov que conversem com a simetria para a equação de Itô;
- Aplicação da técnica em modelos cujas simetrias trazem interpretações relevantes.

A

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

O objetivo deste apêndice é cobrir algumas noções em processos estocásticos essenciais ao nosso trabalho.

A.1 CONVERGÊNCIA DE MEDIDAS DE PROBABILIDADE

Aqui, trazemos algumas das ferramentas para compreender o conceito de convergência de medidas de probabilidade, inteiramente baseado no livro de [2].

A.1.1 Convergência fraca em espaços métricos

Seja (X, Σ) um espaço mensurável e considere $\mathcal{P}(X, \Sigma)$ o conjunto das medidas de probabilidade em (X, Σ) . Quando explícitos X e Σ , $\mathcal{P}(X, \Sigma) = \mathcal{P}$.

Seja S um espaço métrico e considere a σ -álgebra dos borelianos \mathcal{B} . Denotamos o conjunto de funções reais contínuas e limitadas de S por $C(S)$.

Definição A.1. Uma sequência de medidas de probabilidade $(P_n)_n$ em S converge *fracamente* a $P \in \mathcal{P}$, escrevemos $P_n \Rightarrow P$, se

$$\int_S f dP_n \rightarrow \int_S f dP \quad \forall f \in C(S).$$

No teorema abaixo, segue a definição de **regular**, que é muito próxima ao conceito de rigidez, que veremos em breve.

Teorema A.2. Toda $P \in \mathcal{P}(S, \mathcal{B})$ é regular, no sentido de que, se $A \in \mathcal{B}$ e $\varepsilon > 0$, então existem um conjunto fechado F e um conjunto aberto G tais que $F \subset A \subset G$ e $P(G \setminus F) < \varepsilon$.

Como consequência, toda $P \in \mathcal{P}(S, \mathcal{B})$ é unicamente determinada pelos valores de $P(F)$ com F conjunto fechado.

Teorema A.3. Duas medidas de probabilidade, P e Q , em (S, \mathcal{B}) coincidem se

$$\int f dP = \int f dQ,$$

para toda $f \in C(S)$.

Rigidez

O conceito de rigidez é quase uma extensão natural do conceito de regularidade. Definimos a seguir.

Definição A.4. $P \in \mathcal{P}$ é rígida se para todo $\varepsilon > 0$ existe um conjunto compacto K tal que $P(K) > 1 - \varepsilon$.

Teorema A.5. Se S é separável e completo, então P é rígida $\forall P \in \mathcal{P}(S, \mathcal{B})$.

Olhamos novamente para a noção de convergência fraca. Por definição e pelo Teorema A.3, ela depende apenas da topologia. Isso significa que duas métricas equivalentes (no sentido de gerar a mesma topologia) mantêm os mesmos limites fracos.

Existem alguns critérios para a convergência fraca. Enunciamos alguns.

Teorema A.6. Sejam $P_n, P \in \mathcal{P}$. Os cinco itens seguintes são equivalentes:

- (i) $P_n \Rightarrow P$.
- (ii) $\lim_n \int f dP_n = \int f dP \quad \forall f \in C(S)$.
- (iii) $\limsup_n P_n(F) \leq P(F)$ para todo fechado F .
- (iv) $\liminf_n P_n(G) \geq P(G)$ para todo aberto G .
- (v) $\lim_n P_n(A) = P(A)$ para todo conjunto A de P -continuidade. Isto é, o limite é válido para todo A tal que a fronteira topológica tem medida P zero: $P(\partial A) = 0$.

Teorema A.7. Seja \mathcal{U} uma subclasse de \mathcal{B} tal que

- (i) \mathcal{U} é fechada para intersecções finitas;
- (ii) todo conjunto aberto em S é união finita ou enumerável de elementos de \mathcal{U} .

Se $P_n(A) \rightarrow P(A)$ para todo $A \in \mathcal{U}$, então $P_n \Rightarrow P$.

Teorema A.8. Vale $P_n \Rightarrow P$ se e somente se cada subsequência (P_{n_k}) admitir uma subsequência $(P_{n_{k_j}})$ tal que $P_{n_{k_j}} \Rightarrow P$.

Convergência em distribuição

Seja X um mapa de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ em um espaço métrico \mathcal{S} . Se X é mensurável com respeito aos borelianos, diremos que X é um elemento aleatório.

O uso de \mathbb{P} para denotar a medida de Ω segue para melhor definir a distribuição de um elemento aleatório. Isto é, a distribuição do elemento aleatório X é a medida de probabilidade $P = \mathbb{P}X^{-1}$ em (Ω, \mathcal{B}) :

$$P(A) = \mathbb{P}(X^{-1}A) = \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \in A\} = P\{X \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}.$$

Definição A.9. Diremos que uma sequência de elementos aleatórios (X_n) converge em **distribuição** ao elemento aleatório X , e escrevemos

$$X_n \Rightarrow X,$$

se as distribuições P_n de X_n convergem fracamente à distribuição P de X :

$$P_n \Rightarrow P.$$

Faremos o abuso de notação $X_n \Rightarrow X$ para denotar a convergência fraca.

Convergência em probabilidade

Considere o espaço métrico (\mathcal{S}, ρ) . Para $a \in \mathcal{S}$, se quando $n \rightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}\{\rho(X_n, a) \geq \varepsilon\} \rightarrow 0,$$

para cada $\varepsilon > 0$, dizemos que X_n converge em probabilidade para a . Aqui, denotaremos esta convergência por $X_n \xrightarrow{P} a$.

Teorema A.10. Se $X_n \Rightarrow X$ e $\rho(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0$, então $Y_n \Rightarrow X$.

Assuma que, para cada n , $Y_n, Y_{1n}, Y_{2n}, \dots$ têm mesmo domínio e \mathcal{S} é separável.

Teorema A.11. Suponha que, para cada u , $X_{un} \Rightarrow X_u$ quando $n \rightarrow \infty$ e que $X_u \Rightarrow X$ quando $u \rightarrow \infty$. Além disso, suponha que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\rho(X_{un}, Y_n) \geq \varepsilon\} = 0,$$

para cada $\varepsilon > 0$. Então $Y_n \Rightarrow X$ quando $n \rightarrow \infty$.

Teorema A.12. If $X_n \Rightarrow X$, então $\mathbb{E}[|X|] \leq \liminf_n \mathbb{E}[|X_n|]$.

Diremos que uma coleção de variáveis aleatórias (X_n) é uniformemente integrável, se

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sup_n \int_{\{|X_n| \geq \alpha\}} |X_n| dP = 0.$$

Teorema A.13. *Suponha $X_n \Rightarrow X$. Se (X_n) é uniformemente integrável, então*

$$\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}[X]; \quad (51)$$

Além disso, se X e X_n são não-negativos e integráveis, então (51) implica que (X_n) é uniformemente integrável.

Teorema de Prohorov

Definição A.14. *Seja Π uma família de medidas de probabilidade em $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$. Diremos que Π é **relativamente compacta** se cada sequência de elementos de Π contiver uma subsequência fracamente convergente; isto é, se toda sequência (P_n) de Π admitir uma subsequência (P_{n_k}) e uma medida de probabilidade Q (definida em $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$) mas não necessariamente contida em Π) tal que $P_{n_k} \Rightarrow Q$.*

Quando estamos nos lidando com a reta real, diremos que uma família de medidas de probabilidade Π em $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ é **relativamente compacta** se e somente se para cada $\varepsilon > 0$ existe um conjunto compacto K tal que $P(K) > 1 - \varepsilon$ para toda $P \in \Pi$.

Agora extendemos a noção de rigidez para famílias de medidas de probabilidade.

Definição A.15. *Uma família de medidas de probabilidade Π num espaço métrico \mathcal{S} é dita **rígida** se para cada $\varepsilon > 0$, existe um compacto K tal que $P(K) > 1 - \varepsilon$ para todo $P \in \Pi$.*

Os teoremas a seguir, devidos a Prohorov, dão condições necessárias e suficientes para a relação entre famílias de medidas rígidas e relativamente compactas em espaços completos e separáveis.

Teorema A.16. *Se Π é rígida, então é relativamente compacta.*

Teorema A.17. *Suponha \mathcal{S} separável e completo. Se Π é relativamente compacta, então é rígida.*

A.1.2 O espaço de funções contínuas $C[0, 1]$

Seja $C[0, 1]$ o espaço de funções reais contínuas com domínio no intervalo $[0, 1]$. Seja ρ a distância em $C[0, 1]$ dada por:

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|.$$

Definimos o módulo de continuidade de um elemento $x \in C[0, 1]$ por:

$$w_x(\delta) = w(x, \delta) = \sup_{|s-t| < \delta} |x(s) - x(t)|, \quad 0 < \delta < 1. \quad (52)$$

Dado que

$$|w_x(\delta) - w_y(\delta)| \leq 2\rho(x, y),$$

$w_x(\delta)$ é contínua, fixado δ , em x . Temos:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w_x(\delta) = 0 \quad \forall x \in C[0, 1].$$

O resultado a seguir é feito no espaço $C = C[0, \infty)$.

Teorema A.18 (Arzelà-Ascoli). *Um subconjunto $A \subset C$ tem fecho compacto se, e somente se,*

$$\sup_{x \in A} |x(0)| < \infty$$

e

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} w_x(\delta) = 0.$$

Abaixo seguem algumas consequências.

Teorema A.19. *Uma sequência de medidas de probabilidade em $C[0, 1]$, $\{P_n\}$, é rígida se, e somente se, valem as duas condições:*

(i) *Para cada $\eta > 0$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$P_n\{x : |x(0)| > a\} \leq \eta, \quad n \geq 1.$$

(ii) *Para cada $\varepsilon > 0$ e η , existem $\delta \in (0, 1)$ e um inteiro n_0 tais que*

$$P_n\{x : w_x(\delta) \geq \varepsilon\} \leq \eta, \quad n \geq n_0.$$

Equivalentemente,

Teorema A.20. *Uma sequência de medidas de probabilidade $\{P_n\}$ é rígida se, e somente se, as condições a seguir são satisfeitas:*

(i) *Para cada $\eta > 0$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$P_n\{x : |x(0)| > a\} \leq \eta, \quad n \geq 1.$$

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$ e η , existem $\delta \in (0, 1)$ e um inteiro n_0 tais que

$$\frac{1}{\delta} P_n \left\{ x : \sup_{t \leq s \leq t+\delta} |x(s) - x(t)| \geq \varepsilon \right\} \leq \eta, \quad n \geq n_0,$$

para todo t .

Com essa caracterização, o teorema a seguir é imediato.

Teorema A.21. *Sejam P_n, P medidas de probabilidade em $(C[0, 1], \mathcal{C}[0, 1])$. Se as distribuições finito-dimensionais de P_n convergem fracamente às distribuições finito-dimensionais de P , e se $\{P_n\}$ é rígida, então $P_n \Rightarrow P$.*

Medida de Wiener

A projeção π_t , com valor $\pi_t(x) = x(t)$ em $x \in C[0, 1]$, é uma variável aleatória em $(C[0, 1], \mathcal{C}[0, 1])$. Denotamos essa variável aleatória por x_t : Para um t fixado, x_t é a função de $C[0, 1]$ com valor $x(t)$ em t . Quando houver uma medida de probabilidade P em $(C[0, 1], \mathcal{C}[0, 1])$, $\{x_t : 0 \leq t \leq 1\}$ será um processo estocástico.

Uma medida de probabilidade em $(C[0, 1], \mathcal{C}[0, 1])$ e que tem papel fundamental na teoria de processos estocásticos é a medida de Wiener, que será denotada por W . Ela tem as seguintes propriedades.

(i) Para cada t , uma variável aleatória x_t é normalmente distribuída sob W com média 0 e variância t :

$$W\{x_t \leq \alpha\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-u^2/2t} du.$$

Se $t = 0$, vale $W\{x_0 = 0\} = 1$.

(ii) O processo estocástico $\{x_t : 0 \leq t \leq 1\}$ tem incrementos independentes sob W : Se

$$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq 1,$$

então as variáveis aleatórias

$$x_{t_1} - x_{t_0}, x_{t_2} - x_{t_1}, \dots, x_{t_k} - x_{t_{k-1}}$$

são independentes sob W .

Teorema A.22. *Existe uma tal medida W em $(C[0, 1], \mathcal{C}[0, 1])$.*

Sejam ξ_1, ξ_2, \dots variáveis aleatórias independentes com média 0 e variância 1, e tome $S_0 = 0$ e $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Defina as funções W_n por:

$$W_n(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt]) \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{[nt]+1}(\omega). \quad (53)$$

Considere o processo limite W . Diremos que W é o elemento aleatório limite da equação (53), mas também a distribuição do mesmo processo limite, no sentido

$$P\{\omega : W(\omega) \in A\} = W(A), \quad A \in \mathcal{C}[0, 1].$$

Portanto, é importante ter atenção quanto ao significado ambíguo de $W_n \Rightarrow W$.

Um elemento aleatório X de $C[0, 1]$ é dito gaussiano se todas suas distribuições finito-dimensionais são distribuições normais. A distribuição de um elemento aleatório gaussiano é unicamente determinada pelas médias $\mathbb{E}[X_t]$ e auto-covariâncias $\mathbb{E}[X_t X_s]$, $0 \leq s, t \leq 1$. Para W ,

$$\mathbb{E}[W_t] = 0, \mathbb{E}[W_s W_t] = s \wedge t.$$

Teorema de Donsker

Escrevamos (53), agora considerando ξ_n variáveis aleatórias arbitrárias:

$$X_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt]) \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \xi_{[nt]+1}(\omega). \quad (54)$$

Teorema A.23. *Suponha que as variáveis aleatórias ξ_n são independentes e identicamente distribuídas com média 0 e variância finita e positiva σ^2 . Então as funções aleatórias X_n definidas em (54) satisfazem*

$$X_n \Rightarrow W.$$

A.1.3 O espaço $D[0, 1]$

Alguns processos estocásticos não têm trajetórias contínuas, como processos de Poisson ou outros processos de salto. Geralmente, quando um processo é construído como combinação linear de funções indicadoras em intervalos, ele pode não ser contínuo, mas ainda goza de boas propriedades e está contido no espaço das funções *càdlàg*, definido abaixo, que traz análogos importantes sobre convergência fraca com o espaço das funções contínuas.

Seja $D[0, 1]$ o espaço de funções reais, $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, que são contínuas à direita e têm limite à esquerda:

(i) Para $0 \leq t < 1$, $x(t+) = \lim_{s \downarrow t} x(s)$ existe e $x(t+) = x(t)$.

(ii) Para $0 < t \leq 1$, $x(t-) = \lim_{s \uparrow t} x(s)$ existe.

O espaço $D[0, 1]$ é dito **espaço càdlàg** (ou espaço de *càdlàgs* ou espaço de funções *càdlàg*). *Càdlàg* é o acrônimo do francês "*continue à droite, limite à gauche*". Em português, "contínua à direita, limite à esquerda."

Uma função x é dita ter descontinuidade de primeiro tipo em t se $x(t+)$ e $x(t-)$ existem mas são diferentes e $x(t)$ está entre ambos. Todas as descontinuidades de elementos em $D[0, 1]$ são do primeiro tipo. Além disso, $C[0, 1] \subset D[0, 1]$.

Para $x \in D[0, 1]$ e $T_0 \subset [0, 1]$, defina:

$$w_x(T_0) = \sup\{|x(t) - x(s)| : s, t \in T_0\}. \quad (55)$$

O módulo de continuidade dado na equação (52) pode ser expresso como:

$$w_x(\delta) = \sup_{0 \leq t \leq 1 - \delta} w_x[t, t + \delta]. \quad (56)$$

Ainda que não garantamos continuidade uniformemente para todos elementos elementos em $D[0, 1]$, diferentemente de $C[0, 1]$, existe um resultado análogo.

Lema A.24. Para todo $x \in D[0, 1]$ e $\varepsilon > 0$, existem pontos t_0, t_1, \dots, t_r tais que

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$$

e

$$w_x[t_{i-1}, t_i] < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

A primeira consequência que observamos é que $x \in D[0, 1]$ é limitada:

$$\sup_t |x(t)| < \infty.$$

Além disso, precisamos de uma noção de módulo de continuidade em $D[0, 1]$ que tenha o mesmo papel do módulo de continuidade definido em $C[0, 1]$. Para $0 < \delta < 1$, seja:

$$w'_x(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{1 \leq i \leq r} w_x[t_{i-1}, t_i], \quad (57)$$

onde o ínfimo é tomado sobre partições finitas de $[0, 1]$, $\{t_i\}$, tais que

- (i) $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$.
- (ii) $t_i - t_{i-1} > \delta, i = 1, 2, \dots, r$.

O Lema A.24 é equivalente a

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w'_x(\delta) = 0$$

valer para todo $x \in D[0, 1]$.

Note que, dado $\delta < \frac{1}{2}$, o intervalo $[0, 1]$ pode ser dividido em subintervalos $[t_{i-1}, t_i)$ com $\delta < t_i - t_{i-1} \leq 2\delta$. Então temos

$$w'_x(\delta) \leq w_x(2\delta), \quad \text{for } \delta < \frac{1}{2}. \tag{58}$$

Observando a equação (58), podemos nos perguntar se a mesma desigualdade vale quando δ está em ambos os argumentos de w_x e w'_x . A resposta é que não porque nem sempre: o ínfimo de w'_x é tomado sobre uma coleção finita de pontos, com os intervalos consecutivos tendo comprimento *maior* que δ . Como existem funções em $D[0, 1]$ com discontinuidades consecutivas separadas por intervalos de tamanho δ , para estes, $w_x(\delta) \neq w'_x(\delta)$.

A topologia J_1 de Skorohod

Seja Λ a classe de mapas estritamente crescentes e contínuos de $[0, 1]$ nele mesmo. Se $\lambda \in \Lambda$, $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(1) = 1$. Definimos, para $x, y \in D[0, 1]$, $d(x, y)$ como:

$$d(x, y) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \sup_t |\lambda t - t| \leq \varepsilon, \quad \sup_t |x(t) - y(\lambda t)| \leq \varepsilon \right\}$$

É fácil ver que d define uma métrica e gera uma topologia dita Topologia J_1 de Skorohod.

O problema é que esta métrica não é completa. Tal fato poderia arruinar a teoria, entretanto existe um contraponto: existe outra métrica que gera a mesma topologia e é completa.

Definamos para $\lambda \in \Lambda$ o número

$$\|\lambda\| = \sup_{t \neq s} \log \left| \frac{\lambda t - \lambda s}{t - s} \right|.$$

Então, definimos a métrica desejada abaixo.

Definição A.25. *Seja $d_0 : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ definida pontualmente por*

$$d_0(x, y) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \|\lambda\| \leq \varepsilon, \quad \sup_t |x(t) - y(\lambda t)| \leq \varepsilon \right\}.$$

Note que as funções $f_1(x) = \log(1 + 2x) - x$ e $f_2(x) = x - \log(1 - 2x)$, ambas satisfazendo $f_1(0) = f_2(0) = 0$ e $f_1'(x), f_2'(x) > 0$ ao menos quando $0 \leq x < 1/4$. Então, a desigualdade abaixo faz sentido:

$$\log 1 - 2\varepsilon < -\varepsilon \leq \log \frac{\lambda t}{t} \leq \varepsilon < \log 1 + 2\varepsilon$$

Segue então que $d(x, y) \leq 2d_0(x, y)$ se $d_0(x, y) < 1/4$. Não há desigualdade na outra direção, mas temos o seguinte lema.

Lema A.26. *Se $d(x, y) < \delta^2$, onde $0 < \delta < \frac{1}{4}$, então $d_0(x, y) \leq 4\delta + w'_x(\delta)$.*

Teorema A.27. *As métricas d e d_0 são equivalentes.*

O ponto importante sobre d_0 é dado a seguir.

Teorema A.28. *O espaço $D[0, 1]$ é completo sob a métrica d_0 .*

Convergência na Topologia de Skorohod não implica convergência uniforme. De fato, seja uma sequência convergente $x_n \rightarrow x$, com $\{\lambda_n\}_n \subset \Lambda$ tal que

$$\begin{aligned} \sup_t |\lambda_n t - t| &\rightarrow 0; \\ \sup_t |x_n(t) - x(\lambda_n t)| &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Contudo, temos

$$|x_n(t) - x(t)| \geq ||x_n(t) - x(\lambda_n t)| - |x(t) - x(\lambda_n t)||$$

e aqui fica claro que se x é descontínua em t , não temos $x_n(t) \rightarrow x(t)$.

Compacidade em $D[0, 1]$

Há duas formas de caracterizar compacidade no espaço $D[0, 1]$. A primeira segue da seção anterior. Pode ser interessante ver as equações (55), (56) e (57).

Teorema A.29. *Um conjunto A tem fecho compacto na topologia de Skorohod se e somente se*

$$\sup_{x \in A} \sup_t \{|x(t)|\} < \infty$$

e

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} w'_x(\delta) = 0.$$

Agora defina, novamente, um novo módulo de continuidade, que nos dá a segunda caracterização de compacidade.

$$w_x''(\delta) = \sup \min\{|x(t) - x(t_1)|, |x(t_2) - x(t)|\},$$

onde o supremo é tomado em t, t_1 e t_2 satisfazendo

$$t_1 \leq t \leq t_2, \quad t_2 - t_1 \leq \delta.$$

Teorema A.30. *Um conjunto A tem fecho compacto na topologia de Skorohod se e somente se*

$$\sup_{x \in A} \sup_t \{|x(t)|\} < \infty$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} w_x''(\delta) = 0 \\ \limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} w_x[0, \delta] = 0 \\ \limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} w_x[1 - \delta, 1] = 0. \end{array} \right.$$

Estamos interessados em caracterizar a σ -álgebra \mathcal{D} de $D[0, 1]$ e as projeções π_{t_0, \dots, t_r} tem um papel importante aqui. Primeiro definimos \mathcal{F}_{T_0} .

Se T_0 é um subconjunto de $[0, 1]$, seja \mathcal{F}_{T_0} a classe de conjuntos $\pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} H$, onde k é arbitrário, t_i são pontos arbitrários de T_0 e $H \in \mathcal{R}^k$.

Teorema A.31. *Se T_0 contém 1 e é denso em $[0, 1]$, então \mathcal{F}_{T_0} gera a topologia $\mathcal{D}[0, 1]$.*

Convergência fraca e rigidez em $D[0, 1]$

Para uma medida de probabilidade P em (D, \mathcal{D}) , seja T_P o conjunto de pontos $t \in [0, 1]$ tais que as projeções π_t são contínuas exceto em pontos formando um conjunto de medida P nula. Os pontos 0 e 1 sempre estão em T_P . Se $0 < t < 1$, então $t \in T_P$ se e somente se $P(J_t) = 0$, onde

$$J_t := \{x : x(t) \neq x(t-)\}$$

é o conjunto de funções x descontínuas em t .

Tomando $J_t(\varepsilon) := \{x : |x(t) - x(t-)| \geq \varepsilon\}$ e fixando $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, pode ter no máximo finitos pontos t tais que $P(J_t(\varepsilon)) > \delta$. Para um ε fixo, portanto, $P(J_t(\varepsilon))$ pode exceder 0 no máximo em enumeráveis pontos t . Dado que $P(J_t(\varepsilon)) \uparrow P(J_t)$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, temos a condição desejada.

Assim: T_P contém 0 e 1 e seu complementar em $[0, 1]$ é no máximo enumerável. Se t_1, \dots, t_k estão todos em T_P , então π_{t_1, \dots, t_k} são contínuas exceto em um conjunto de medida P nula.

Teorema A.32. *Se $\{P_n\}_n$ é rígida e $P_n \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \Rightarrow P \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}$ vale sempre que $t_1, \dots, t_k \in T_P$, então $P_n \Rightarrow P$.*

Há um análogo ao teorema de Arzelá-Ascoli para caracterizar a compacidade.

Teorema A.33. *$\{P_n\}_n$ é rígida se e somente se valem as duas condições:*

(i) *Para todo $\eta > 0$, existe a tal que*

$$P_n \{x : \sup_t |x(t)| > a\} \leq \eta, \quad n \geq 1.$$

(ii) *Para todo $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$, existem $\delta \in (0, 1)$ e um inteiro n_0 tal que*

$$P_n \{x : w'_x(\delta) \geq \varepsilon\} \leq \eta, \quad n \geq n_0$$

Outra forma de caracterizar é a seguinte.

Teorema A.34. *$\{P_n\}_n$ é rígida se e somente se as duas condições valem:*

(i) *Para cada $\eta > 0$, existe a tal que*

$$P_n \{x : \sup_t |x(t)| > a\} \leq \eta, \quad n \geq 1.$$

(ii) *Para cada $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$, existem $\delta \in (0, 1)$, e um inteiro n_0 tal que*

$$\left\{ \begin{array}{l} P_n \{x : w''_x(\delta) \geq \varepsilon\} \leq \eta, \\ P_n \{x : w_x[0, \delta] \geq \varepsilon\} \leq \eta, \\ P_n \{x : w_x[1 - \delta, 1] \geq \varepsilon\} \leq \eta, \end{array} \right. \quad n \geq n_0$$

Outra forma segue.

Teorema A.35. *Suponha que*

$$P_n \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \Rightarrow P \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}$$

vale sempre que $t_1, \dots, t_k \in T_P$. Além disso, suponha que $P(J_1) = 0$. Finalmente, suponha que para cada $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$, existem $\delta \in (0, 1)$, e um inteiro n_0 tais que

$$P_n \{x : w''_x(\delta) \geq \varepsilon\} \leq \eta, \quad n \geq n_0.$$

Então $P_n \Rightarrow P$.

Note que checar se $P(J_1) = 0$ é equivalente ao seguinte limite valer:

$$\lim_{t \rightarrow 1} P\{x : |x(1) - x(t)| > \varepsilon\} = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Teorema A.36. *Suponha que, para todo $\eta > 0$, existe a tal que*

$$P_n\{x : |x(0)| > a\} \leq \eta, \quad n \geq 1.$$

Além disso, suponha que para cada $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$, existem $\delta \in (0, 1)$, e um inteiro n_0 tais que

$$P_n\{x : w_x(\delta) \geq \varepsilon\} \leq \eta, \quad n \geq n_0.$$

Então $\{P_n\}_n$ é rígida, e, se P é o limite fraco de uma subsequência $(P_{n_k})_{n_k}$, então $P(C) = 1$.

Funções aleatórias em $D[0, 1]$

Seja X elemento aleatório de $D[0, 1]$. Escrevemos T_X para T_P , onde P é a distribuição de X . Então T_X contém 0 e 1, e, se $0 < t < 1$, $t \in T_X$ se e somente se $P\{X(t) \neq X(t-)\} = 0$. Escrevemos $w''(X, \delta)$ no lugar de $w'_X(\delta)$.

Teorema A.37. *Suponha que*

$$(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k)) \Rightarrow (X(t_1), \dots, X(t_k))$$

vale sempre que $t_1, \dots, t_k \in T_X$, que $P\{X(1) \neq X(1-)\} = 0$ e que

$$P\{|X_n(t) - X_n(t_1)| \geq \lambda, |X_n(t_2) - X_n(t)| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^{2\gamma}} [F(t_2) - F(t_1)]^{2\alpha} \quad (59)$$

para $t_1 \leq t \leq t_2$ e $n \geq 1$, onde $\gamma \geq 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$, e F é função não-decrescente em $[0, 1]$. Então $X_n \Rightarrow X$.

Agora olhamos para a existência.

Teorema A.38. *Existe em $D[0, 1]$ um elemento aleatório com distribuições finito-dimensionais μ_{t_1, \dots, t_k} , que são consistentes e*

$$\mu_{t_1, t, t_2}\{(\beta_1, \beta, \beta_2) : |\beta - \beta_1| \geq \lambda, |\beta_2 - \beta| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^{2\gamma}} [F(t_2) - F(t_1)]^{2\alpha} \quad (60)$$

para $t_1 \leq t \leq t_2$, onde $\gamma \geq 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$ e F é não decrescente e contínua em $[0, 1]$. Além disso,

$$\lim_{h \downarrow 0} \mu_{t, t+h}\{(\beta_1, \beta_2) : |\beta_1 - \beta_2| \geq \varepsilon\} = 0, \quad 0 \leq t < 1,$$

para $\varepsilon > 0$.

Já a condição (60) pode ser restrita a

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\beta - \beta_1|^\gamma |\beta_2 - \beta|^\gamma d\mu_{t_1, t_2}(\beta, \beta_1, \beta_2) \leq [F(t_2) - F(t_1)]^{2\alpha}.$$

Às vezes o espaço $D[0, 1]$ é mais conveniente para se trabalhar que o próprio espaço $C[0, 1]$. Um exemplo é o Teorema de Donsker. Dadas variáveis aleatórias ξ_1, ξ_2, \dots em (Ω, \mathcal{B}, P) , com somas parciais $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, seja $X_n(\omega)$ a função de $D[0, 1]$ com valores

$$X_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) \quad (61)$$

em t . Dado que $X_n(t)$ é uma variável aleatória, X_n é uma função aleatória, isto é, um elemento aleatório de $D[0, 1]$.

Queremos mostrar que sob certas condições, a distribuição de X_n converge fracamente para a medida de Wiener W . W está definido em $(C[0, 1], \mathcal{C}[0, 1])$, mas se estende facilmente para $(D[0, 1], \mathcal{D}[0, 1])$: Dado que $C[0, 1] \in D[0, 1]$, e que a topologia de Skorohod relativa em $C[0, 1]$ coincide com a topologia uniforme ali, $A \in \mathcal{D}$ implica $A \cap C[0, 1] \in \mathcal{C}[0, 1]$. Podemos, portanto, estender W para (D, \mathcal{D}) atribuindo o valor $W(A \cap C[0, 1])$ para $A \in \mathcal{D}$. Certamente, o suporte de W está em $C[0, 1]$. De agora em diante, interpretamos W como essa medida de probabilidade em $(D[0, 1], \mathcal{D}[0, 1])$ ou como elemento aleatório de $D[0, 1]$ que tem esta distribuição de probabilidade.

Teorema A.39. *Suponha que as variáveis aleatórias ξ_n são independentes e identicamente distribuídas com média 0, com variância positiva e finita σ^2 : $\mathbb{E}[\xi_n] = 0$, $\mathbb{E}[\xi_n^2] = \sigma^2$. Então as funções aleatórias X_n definidas em (61) satisfazem*

$$X_n \Rightarrow W.$$

Teorema A.40. *O Teorema A.39 ainda é válido quando P é substituída por uma medida de probabilidade arbitrária P_0 que é dominada por P .*

Definição A.41. *Sejam ξ_1, ξ_2, \dots variáveis aleatórias com*

$$0 \leq \xi_n(\omega) \leq 1,$$

e seja $F_n(t, \omega)$ a proporção de pontos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ não excedendo t , então $F_n(\cdot, \omega)$ é a função de distribuição empírica.

Tome $Y_n(\omega)$ o elemento de $D[0, 1]$ com valores

$$Y_n(t, \omega) := \sqrt{n} (F_n(t, \omega) - F(t)) \quad (62)$$

no ponto $t \in [0, 1]$, onde F é a função de distribuição empírica comum às variáveis ξ_n . O processo estocástico $\{Y_n(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ é dito Processo Empírico.

Teorema A.42. *Suponha que ξ_n são independentes e têm função de distribuição comum $F(t)$. Se Y_n é definido por (62), então*

$$Y_n \Rightarrow Y,$$

onde Y é o elemento aleatório gaussiano de $D[0, 1]$ que satisfaz

$$\begin{cases} \mathbb{E}[Y(t)] = 0 \\ \mathbb{E}[Y(s)Y(t)] = F(s)(1 - F(t)), \quad s \leq t. \end{cases}$$

A.1.4 O espaço $D[0, \infty)$

O espaço $D = D[0, \infty)$ é o espaço de funções contínuas à direita com limite à esquerda. Segue como extensão natural de $D[0, 1]$. Além disso, podemos tomar o espaço de funções em \mathbb{R}^k contínuas à direita com limite à esquerda e denotamos por D^k . Salvo quando mencionado, $k = 1$.

Ao restringir o módulo de continuidade $w'(x, \delta)$ ao intervalo $[0, m]$, temos:

$$w'_m(x, \delta) = \inf \max_{1 \leq i \leq v} w(x, [t_{i-1}, t_i]),$$

onde o ínfimo é tomado sob partições $\{t_0, \dots, t_v\}$ do intervalo $[0, m]$ tais que $t_i - t_{i-1} > \delta$ para $1 \leq i < v$. Considere a norma do supremo até m

$$\|x\|_m = \sup_{s \in [0, m]} |x(s)|.$$

Teorema A.43. *Uma sequência de medidas de probabilidade em D , $(P_n)_n$, é rígida se, e somente se, valem as duas condições:*

(i) Para cada m ,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_n P_n(x : \|x\|_m \geq a) = 0.$$

(ii) Para cada m e $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_n P_n(x : w'_m(x, \delta) \geq \varepsilon) = 0.$$

Além disso, seja

$$j_m(x) = \sup_{t \leq m} |x(t) - x(t-)|.$$

Corolário A.44. A condição *i* do Teorema A.43 pode ser substituída por uma das condições abaixo.

(i') Para cada t em um conjunto T denso em $[0, \infty)$,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_n P_n(x : |x(t)| \geq a) = 0. \quad (63)$$

(i'') A relação (63) vale para $t = 0$, e para cada m ,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_n P_n(x : j_m(x) \geq a) = 0.$$

Definição A.45. Uma variável aleatória τ é um tempo de parada para um processo X^n se o evento $\{\tau \leq t\}$ estiver na σ -álgebra $\sigma\langle X^n(s) : s \leq t \rangle$. Um tempo de parada τ com alcance é finito é tal que $\tau < \infty$ quase certamente.

Observe que fixado $T \in [0, \infty)$, $\{T \leq t\} \in \sigma\langle X^n(s) : s \leq t \rangle$ para qualquer processo. Isto é, todo processo admite tempos de parada.

Teorema A.46 (Teorema de Aldous). Sejam X^n elementos aleatórios de D , tais que:

- Para cada $m > 0$,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_n \mathbb{P}[\|X^n\|_m \geq a] = 0;$$

- Para todo ε, η , e m , existem δ_0 e um n_0 tais que, se $\delta \leq \delta_0$ e $n \geq n_0$, e se τ é um tempo de parada de alcance finito para X^n satisfazendo $\tau \leq m$, então

$$\mathbb{P}[|X_{\tau+\delta}^n - X_\tau^n| \geq \varepsilon] \leq \eta.$$

Então $\{X^n\}$ é rígida.

A.2 PROCESSOS MARKOVIANOS

Todo o conteúdo desta seção foi retirado de [9].

Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ um processo estocástico definido em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) com valores em E , e seja $\mathcal{F}_t^X = \sigma\langle X(s) : s \leq t \rangle$. Então X é um processo Markoviano se

$$P(X(t+s) \in \Gamma | \mathcal{F}_t^X) = P(X(t+s) \in \Gamma | X(t)), \quad (64)$$

para todo $s, t \geq 0$ e $\Gamma \in \mathcal{B}(E)$. Se $\{\mathcal{G}_t\}$ é uma filtração com $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{G}_t$, $t \geq 0$, então X é um processo Markoviano com respeito a $\{\mathcal{G}_t\}$ se a equação (64) é válida com \mathcal{F}_t^X substituído por \mathcal{G}_t . Note que, além disso, a equação (64) implica

$$\mathbb{E}[f(X(t+s)) | \mathcal{F}_t^X] = \mathbb{E}[f(X(t+s)) | X(t)]$$

para todo $s, t \geq 0$ e $f \in B(E)$. Uma função $Q(t, x, \Gamma)$ definida em $[0, \infty) \times E \times \mathcal{B}(E)$ é uma função de transição homogênea no tempo se

- $Q(t, x, \cdot) \in \mathcal{P}(E)$, $(t, x) \in [0, \infty) \times E$;
- $Q(0, x, \cdot) = \delta_x$, $x \in E$;
- $Q(\cdot, \cdot, \Gamma) \in B([0, \infty) \times E)$, $\Gamma \in \mathcal{B}(E)$,
- e

$$Q(t+s, x, \Gamma) = \int_E P(s, y, \Gamma) P(t, x, dy), \quad s, t \geq 0, x \in E, \Gamma \in \mathcal{B}(E).$$

Uma função de transição $Q(t, x, \Gamma)$ é uma função de transição para um processo de Markov homogêneo no tempo se

$$P(X(t+s) \in \Gamma | \mathcal{F}_t^X) = Q(s, X(t), \Gamma)$$

para todo $s, t \geq 0$ e $\Gamma \in \mathcal{B}(E)$, ou, equivalentemente, se

$$\mathbb{E}[f(X(t+s)) | \mathcal{F}_t^X] = \int_E f(y) Q(s, X(t), dy)$$

para todo $s, t \geq 0$ e $f \in B(E)$.

Uma medida de probabilidade $\nu \in \mathcal{P}(E)$ dada por $\nu(\Gamma) = P(X(0) \in \Gamma)$ é dita distribuição inicial de X .

Uma função de transição para X e a distribuição inicial determinam as distribuições finito-dimensionais de X por:

$$\begin{aligned} & P(X(0) \in \Gamma_0, X(t_1) \in \Gamma_1, \dots, X(t_n) \in \Gamma_n) \\ &= \int_{\Gamma_0} \dots \int_{\Gamma_{n-1}} Q(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, \Gamma_n) Q(t_{n-1} - t_{n-2}, y_{n-2}, dy_{n-1}) \\ & \quad \dots Q(t_1, y_0, dy_1) \nu(dy_0). \end{aligned} \tag{65}$$

Em particular,

Teorema A.47. *Seja $Q(t, x, \Gamma)$ é uma função de transição homogênea no tempo e $\nu \in \mathcal{P}(E)$. Se para cada $t \geq 0$, a medida de probabilidade $\int_E Q(t, x, \cdot) \nu(dx)$ é rígida (o que sempre acontece em espaços completos e separáveis), existe um processo Markoviano X em E com distribuições finito-dimensionais unicamente determinadas por (65).*

Observe que uma função de transição homogênea no tempo, $Q(t, x, \Gamma)$, define um semigrupo de contração, $\{T(t)\}$, em $B(E)$ por

$$T(t)f(x) := \int_E f(y)Q(t, x, dy).$$

Seja $\{T(t)\}$ um semigrupo num subespaço fechado $L \subset B(E)$. Diremos que um processo Markoviano X em E corresponde a $\{T(t)\}$ se

$$\mathbb{E}[f(X(t+s)) | \mathcal{F}_t^X] = T(s)f(X(t)),$$

para todo $s, t \geq 0$ e $f \in L$. Se o semigrupo for definido por uma função de transição homogênea no tempo, então recuperamos a definição inicial de processo de Markov.

Assumimos que E é localmente compacto e consideramos processos Markovianos com semigrupos que são fortemente contínuos no espaço de Banach $\hat{C}(E)$ de funções contínuas se anulando no infinito com norma $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$. Note que $\hat{C}(E) = C(E)$ se E é compacto.

Um operador $L \subset B(E) \times B(E)$ é dito conservativo se seu fecho é o operador $(I, 0)$, onde I é a identidade.

Um semigrupo $\{T(t)\}$ é dito fortemente contínuo se converge para a identidade no sentido de $\lim_{t \downarrow 0} T(t) = I$. Para um semigrupo fortemente contínuo, definimos seu gerador infinitesimal, L , como o seguinte limite quando existir

$$Lf = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(T(t)f - f).$$

O domínio do operador L é o espaço onde tal limite estiver definido.

Um operador contrativo, positivo, fortemente contínuo em $\hat{C}(E)$ cujo gerador é dito **semigrupo de Feller**.

Teorema A.48. *Sejam E, E_1, E_2, \dots espaços métricos com E localmente compacto e separável. Para $n = 1, 2, \dots$, seja $\eta_n : E_n \rightarrow E$ mensurável, e considere $\mu_n(x, \Gamma)$ a função de transição em $E_n \times \mathcal{B}(E_n)$, e suponha que Y_n é um processo Markoviano em E_n correspondendo ao semigrupo $\{T_n(t)\}$ tal que $X_x = \eta_n \circ Y_n$ tem trajetórias em $D_E[0, \infty)$. Defina $\pi_n : B(E) \rightarrow B(E)$ com $\pi_n f = f \circ \eta_n$. Suponha que $\{T(t)\}$ é um semigrupo de Feller em $\hat{C}(E)$ e para cada $f \in \hat{C}(E)$*

e $t \geq 0$, $T_n(t)\pi_n f \rightarrow T(t)f$ (isto é, $\|T_n(t)\pi_n f - \pi_n T(t)f\| \rightarrow 0$). Se $\{X_n(0)\}$ tem distribuição limite $\nu \in \mathcal{P}(E)$, então existe um processo Markoviano X correspondente a $\{T(t)\}$ com distribuição inicial ν e trajetórias em $D_E[0, \infty)$, e $X_n \Rightarrow X$.

A.3 INTENSIDADE ESTOCÁSTICA

O conteúdo deste apêndice pode ser encontrado integralmente em [3]. Daqui em diante, (E, \mathcal{E}) é um espaço topológico e $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$ é uma filtração com $t \in \mathbb{R}_+$. Um processo estocástico $X = (X(t))$ tal que $X(t)$ é \mathcal{F}_t -mensurável para cada t é dito adaptado a \mathcal{F} .

Definição A.49. *Seja $N(t)$ um processo pontual adaptado a uma filtração \mathcal{F}_t , e seja $\gamma(t)$ um processo não-negativo mensurável. Suponha que $\gamma(t)$ é \mathcal{F}_0 mensurável para $t \geq 0$ e que $\int_0^t \gamma(s)ds < \infty$ para quase certamente para $t \geq 0$. Se para todo $0 \leq s \leq t$ e todo $u \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}[e^{iu(N(t)-N(s))} | \mathcal{F}_s] = \exp \left((e^{iu} - 1) \int_s^t \gamma(v)dv \right),$$

então $N(t)$ é dito um \mathcal{F}_t -duplamente estocástico Processo de Poisson ou um \mathcal{F}_t -condicional Processo de Poisson com intensidade (estocástica) $\gamma(t)$.

Teorema A.50. *Seja $N(t)$ um processo pontual adaptado a uma filtração \mathcal{F}_t , e seja $\gamma(t)$ um processo mensurável não-negativo tal que para todo $t \geq 0$,*

- $\gamma(t)$ é \mathcal{F}_0 -mensurável;
- e $\int_0^t \gamma(s)ds < \infty$ quase certamente.

Se vale a igualdade

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty C(s)dN(s) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty C(s)\gamma(s)ds \right]$$

para cada processo não negativo \mathcal{F}_t -previsível $C(t)$, $N(t)$ é um processo de Poisson duplamente estocástico com \mathcal{F}_t -intensidade $\gamma(t)$.

Definição A.51. *Um processo estocástico X em E é dito \mathcal{F} -progressivo se e somente se para cada $t \geq 0$ o mapa $(t, \omega) \mapsto X(t)(\omega)$ de $[0, t] \times \Omega$ em E for $\mathcal{E}/\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -mensurável.*

Teorema A.52. *Se E é um espaço polonês e X é adaptado a \mathcal{F} e contínuo à direita, X é \mathcal{F} -progressivo.*

Definição A.53. *Seja $N(t)$ um processo pontual adaptado a uma filtração \mathcal{F}_t e seja γ um processo não negativo \mathcal{F}_t -progressivo tal que, para todo $t \geq 0$,*

$$\int_0^t \gamma(s)ds < \infty \quad q.c.$$

Se para cada processo não negativo \mathcal{F}_t -previsível $C(t)$, a igualdade

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty C(s)dN(s) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty C(s)\gamma(s)ds \right]$$

se verifica, então diremos que $N(t)$ admite a \mathcal{F}_t -intensidade γ .

Teorema A.54. *Se $N(t)$ admite a \mathcal{F}_t -intensidade $\gamma(t)$ então $N(t)$ é não-explosivo e*

1. $M(t) = N(t) - \int_0^t \gamma(s)ds$ é um \mathcal{F}_t -martingal local;
2. Se $X(t)$ é um processo \mathcal{F}_t -previsível tal que $\mathbb{E}[\int_0^t |X(s)|\gamma(s)ds] < \infty$, $t \geq 0$, então $\int_0^t X(s)dN(s)$ é um \mathcal{F}_t -martingal;
3. Se $X(t)$ é um processo \mathcal{F}_t -previsível tal que $\int_0^t |X(s)|\gamma(s)ds < \infty$ quase certamente para cada $t \geq 0$, então $\int_0^t X(s)dN(s)$ é um \mathcal{F}_t -martingal local.

B | SIMETRIAS DE EQUAÇÕES DE ITÔ

Neste apêndice trazemos alguns conceitos sobre simetrias determinísticas para complementar as noções introduzidas em [11].

B.1 SIMETRIAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem pode ser escrita como

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

onde $F : \mathbb{R}^{2p+1} \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Por exemplo, para $p = 1$ e $F(u, v, w) = v - w$,

$$\frac{dx}{dt} = x, \tag{66}$$

que tem solução $x(t) = x(0) \exp(t)$.

Note que se $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e consideramos $\bar{t} = c \cdot t$ e $\bar{x} = x$, temos uma equação diferencial ordinária que mantém a mesma estrutura da equação (66). De fato, $\bar{x}(\bar{t}) = x(ct)$ e portanto

$$\bar{x}(\bar{t}) = x(ct) = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}.$$

Ou seja,

$$F\left(\bar{t}, \bar{x}, \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\right) = 0.$$

Dizemos que a transformação $(t, x) \mapsto (\bar{t}, \bar{x})$ é uma **simetria** da equação (66).

Pensemos num caso mais geral:

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0. \tag{67}$$

Agora suponha que existem mapas $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ tais que

$$\begin{cases} \bar{t} = f(t, x) \\ \bar{x} = g(t, x) \end{cases} \quad (68)$$

Na notação anterior, agora com as derivadas com respeito a \bar{t} , isto é,

$$\bar{x}' = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}},$$

se vale a relação

$$F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{x}', \dots, \bar{x}^{(n)}) = 0,$$

então (f, g) é dita **simetria** da equação (67).

Traremos noções geométricas para introduzir o conceito de campo em abertos de \mathbb{R}^2 para então definir os geradores das simetrias.

B.1.1 Geometria Diferencial

Esta subseção está contida nos livros clássicos de Geometria Diferencial de Do Carmo [8] e de Spivak [31]. Algumas mudanças de notação foram feitas para manter a concordância.

Definição B.1. Um campo de vetores em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma aplicação que associa a cada ponto $q \in U$ um vetor $w(q) \in \mathbb{R}^2$. O campo de vetores w é diferenciável se, escrevendo $q = (x, y)$ e $w(q) = (a(x, y), b(x, y))$, as funções a e b são diferenciáveis em U .

Geometricamente, a definição corresponde a associar a cada ponto $(x, y) \in U$ um vetor de coordenadas $a(x, y)$ e $b(x, y)$ que variam de maneira diferenciável em relação a (x, y) .

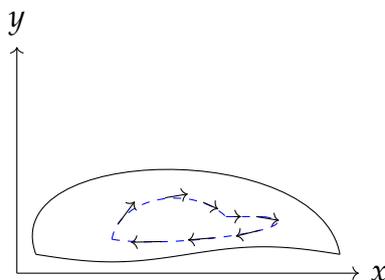


Figura 5: Campo de vetores ao longo de uma curva

Consideramos apenas campos diferenciáveis. Agora note que dado um campo de vetores w , é natural perguntar se existe uma trajetória deste campo, isto é, se existe uma curva parametrizada diferenciável $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, com $t \in I \subset \mathbb{R}$ tal que $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$.

Exemplo B.2. Uma trajetória passando pelo ponto (x_0, y_0) , do campo de vetores $w(x, y) = (x, y)$ é a reta $\alpha(t) = (x_0 e^t, y_0 e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo B.3. Uma trajetória passando pelo ponto (x_0, y_0) , do campo de vetores $w(x, y) = (y, -x)$, é o círculo $\beta(t) = (r \sin(t), r \cos(t))$, $t \in \mathbb{R}$, onde $r^2 = x_0^2 + y_0^2$.

Na linguagem de equações diferenciais ordinárias, diz-se que um campo de vetores w determina um sistema de equações diferenciais,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= b(x, y) \end{aligned} \tag{69}$$

e que uma trajetória de w é uma solução do sistema acima.

O teorema a seguir estabelece uma equivalência quanto à existência e unicidade de soluções do sistema (69).

Teorema B.4. Seja w um campo de vetores em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Dado $p \in U$, existe um trajetória $\alpha : I \rightarrow U$ de w (isto é, $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$, $t \in I$) com $\alpha(0) = p$. Esta trajetória é única no seguinte sentido: Qualquer outra trajetória $\beta : J \rightarrow U$ com $\beta(0) = p$ coincide com α em $I \cap J$.

Além disso, o resultado a seguir verifica a diferenciabilidade das trajetórias com respeito ao ponto de referência no B.4.

Teorema B.5. Seja w um campo de vetores em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para cada $p \in U$ existe uma vizinhança $V \subset U$ de p , um intervalo I , e uma aplicação $\alpha : V \times I \rightarrow U$ tal que

1. Para todo $q \in V$ fixado, a curva $\alpha(q, t)$, $t \in I$, é a trajetória de w passando por q ; isto é,

$$\alpha(q, 0) = q, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(q, t) = w(\alpha(q, t)).$$

2. α é diferenciável.

A aplicação α é chamada de fluxo (local) de w em p . Podemos estender o conceito de campo para ambientes mais gerais.

Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^n$, seu espaço tangente será definido como o $\mathbb{R}_p^n = \{(p, v) : v \in \mathbb{R}^n\}$. Note que a partir de uma função diferenciável $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ temos a transformação jacobiana $Dg : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (isto é, a imagem está no espaço de transformações lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m). Fixado $p \in \mathbb{R}^n$, obtemos outra transformação linear $g_* : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_{f(p)}^m$ definida por:

$$g_*(v_p) = (Dg(p)(v))_{g(p)}.$$

A definição que trazemos a seguir não é a mais geral, mas segue a bibliografia e se encaixa no escopo deste trabalho.

Definição B.6. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^m$ é dito variedade k -dimensional, se todo ponto $x \in M$, existe um aberto U contendo x , um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^m$, e um difeomorfismo $h : U \rightarrow V$ tal que

$$\begin{aligned} h(U \cap M) &= V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \\ &= \{y \in V : y^{k+1} = \dots = y^m = 0\}. \end{aligned}$$

Lema B.7. Se todo ponto $x \in M$ admite a seguinte estrutura: existem um aberto $U \ni x$, um aberto $W \subset \mathbb{R}^k$, e um mapa diferenciável $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que:

1. $f(W) = M \cap U$,
2. a diferencial $Df|_y$ tem posto k para todo $y \in W$,
3. $f^{-1} : f(W) \rightarrow W$ é contínua,

então M é uma variedade k -dimensional.

Um tal mapa f é dito sistema de coordenadas sobre x .

Seja M uma variedade k -dimensional e tome $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas locais em $x = f(a)$. Como Df tem posto k , a transformação linear $f_* : \mathbb{R}_a^k \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ é injetora, e $f_*(\mathbb{R}_a^k)$ é um subespaço vetorial de dimensão k de \mathbb{R}_x^n . Se $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ for outro sistema de coordenadas locais com $x = g(b)$, então

$$g_*(\mathbb{R}_b^k) = f_*(f^{-1} \circ g)_*(\mathbb{R}_b^k) = f_*(\mathbb{R}_a^k).$$

Isto é, o espaço vetorial $f_*(\mathbb{R}_a^k)$ independe da escolha do sistema de coordenadas f . Este espaço será denotado por $T_x M$ e será dito espaço tangente a M no ponto x .

No caso de variedades, um campo de vetores será uma associação de cada ponto $p \in M$ a um vetor no espaço tangente T_pM . Este será dito diferenciável quando uma parametrização \mathbf{x} as componentes a_1, \dots, a_k do campo $a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_k\mathbf{x}_k$ na base $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ forem funções diferenciáveis em p . E será diferenciável em U se for diferenciável em todo ponto $p \in U$.

Definição B.8. *Seja w um campo diferenciável de vetores em um conjunto aberto $U \subset M$ e $p \in U$. Seja $y \in T_pM$. Considere uma curva parametrizada*

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U,$$

com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = y$, e seja $w(t), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a restrição do campo de vetores w à curva α . O vetor obtido pela projeção de $(dw/dt)(0)$ sobre o plano T_pM é chamado a derivada covariante em p do campo de vetores w em relação ao vetor y .

Definição B.9. *Seja $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva parametrizada em M . Um campo de vetores w ao longo de α é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um vetor*

$$w(t) \in T_{\alpha(t)}M.$$

Definição B.10. *Uma curva parametrizada não constante $\gamma : I \rightarrow M$ é chamada geodésica em $t \in I$ se o seu campo de vetores tangentes $\gamma'(t)$ é paralelo ao longo de γ em t , isto é, se a derivada covariante é o vetor zero. Se γ é uma geodésica para todo $t \in I$, então γ é dita curva geodésica.*

Proposição B.11. *Dado um ponto $p \in M$ e um vetor $w \in T_pM$, $w \neq 0$, existe um $\varepsilon > 0$ e uma única geodésica parametrizada $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = w$.*

Denotamos a geodésica da proposição acima por $\gamma(t, w)$.

Lema B.12. *Se a geodésica $\gamma(t, v)$ é definida para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, então a geodésica $\gamma(t, \lambda v)$, $\lambda > 0$, é definida para $t \in (-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda)$ e $\gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v)$.*

Por fim, introduzimos a noção de exponencial, crucial para o desenvolvimento da teoria de simetrias.

Definição B.13. *Se $v \in T_pM$, $v \neq 0$, é tal que $\gamma(|v|, v/|v|) = \gamma(1, v)$ está definido, escrevemos*

$$\exp_p(v) = \gamma(1, v) \quad e \quad \exp_p(0) = p.$$

Geometricamente, a construção corresponde a percorrer (se possível) um comprimento igual a $|v|$ ao longo da geodésica passando por p na direção de v ; o ponto assim obtido é denotado por $\exp_p(v)$.

Recordemos agora a equação (68). Suponha que para cada ε num intervalo I contendo a origem, temos simetrias $\phi(\varepsilon, t, x) = (\bar{t}_\varepsilon, \bar{x}_\varepsilon)$ com a condição $\phi(0, t, x) = (t, x)$ e que para cada $\varepsilon \in I$ satisfazem uma equação diferencial

$$F(\phi(\varepsilon, t, x)) = 0,$$

onde suprimimos as derivadas de ordem superior $(\bar{x}'_\varepsilon, \bar{x}''_\varepsilon, \dots)$ na notação, e que o mapa ϕ é diferenciáveis em ε . Este mapa será dito simetria de Lie.

Uma aproximação de Taylor em torno da origem nos dá:

$$\begin{aligned} (\bar{t}_\varepsilon, \bar{x}_\varepsilon) &= (t, x) + \left. \frac{d\phi}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + r(\varepsilon) \\ &=: (t, x) + (T, X)\varepsilon + r(\varepsilon), \end{aligned}$$

onde $\varepsilon^{-1}\|r(\varepsilon)\| \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Note que (T, X) define um campo. É precisamente com esse tipo de campo que trabalhamos e obtemos simetrias via aplicação exponencial/construção da geodésica no espaço de soluções. Ou seja, dado um campo \mathbf{v} , construímos a família de simetrias $\varphi(\varepsilon) = \exp(\varepsilon\mathbf{v})$ e φ é dito gerador infinitesimal da simetria.

B.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS E SIMETRIAS

Uma maneira alternativa a enxergar problemas de equações diferenciais é enxergá-los como equações integrais. Por exemplo, seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e considere

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (70)$$

Podemos pensar nesse tipo de problema como

$$x(T) - x(0) = \int_0^T f(t, x(t))dt, \quad \forall T \in \mathbb{R}.$$

Como no tratamento das equações de Itô, denotamos a equação acima por:

$$dx = f(t, x)dt.$$

Observe que quando $f(t, x) = f(t)$, a equação (70) é separável, portanto basta integrar para obter soluções. Um problema interessante é buscar simetrias (invertíveis) que tornem a equação separável. Por exemplo, uma simetria $\phi(\varepsilon, t, x) = (\bar{t}_\varepsilon, \bar{x}_\varepsilon)$ tal que

$$d\bar{x}_\varepsilon = f(\bar{t}_\varepsilon, \bar{x}_\varepsilon)d\bar{t}_\varepsilon = f(\bar{t}_\varepsilon)d\bar{t}_\varepsilon$$

e então considerar a solução $x(t)$ a partir da transformação inversa $\phi(-\varepsilon, \bar{t}_\varepsilon, \bar{x}_\varepsilon)$.

A figura 6 traz um esboço do conceito de simetrias para um caso de maior interesse nosso.

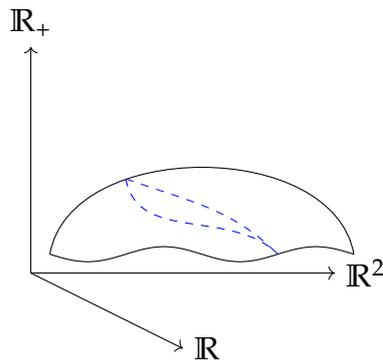


Figura 6: Esquema de uma simetria (curva azul) na variedade definida pelo gráfico de um problema determinístico em $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$.

B.2.1 Simetria de Equações de Itô

Para a equação de Itô, o procedimento é análogo. Seja

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad (71)$$

e um mapa suave $\phi : I \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p$ com $I \subset \mathbb{R}$ aberto contendo a origem. Para não sobrecarregar a notação, fixamos ε e supomos que $\phi(\varepsilon, t, x) = (\bar{t}, \bar{x})$ satisfaz

$$d\bar{x}_{\bar{t}} = \mu(\bar{t}, \bar{x}_{\bar{t}})d\bar{t} + \sigma(\bar{t}, \bar{x}_{\bar{t}})dW_{\bar{t}}.$$

Então diremos que ϕ é uma simetria.

A partir daqui, o truque é usar aproximações da identidade:

$$\bar{t}_\varepsilon \approx t + \varepsilon\tau(t, x)$$

$$\bar{x}_\varepsilon \approx x + \varepsilon\tilde{\zeta}(t, x)$$

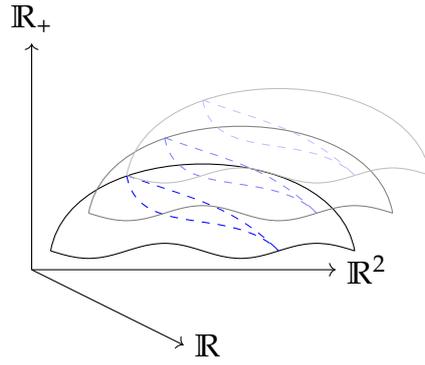


Figura 7: Esboço de simetria no caso estocástico para uma família de variedades definidas por gráficos em $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$.

e então usar as regras do Cálculo de Itô para obter τ e ζ , que corresponderão ao gerador da simetria ϕ :

$$G_\phi = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \zeta \cdot \nabla.$$

A formalização dessas técnicas se dá pelos argumentos da seção anterior via aplicação exponencial.

Trazemos os critérios para determinar simetrias de Gaeta e Quintero em [11], o primeiro supondo $\tau \equiv 0$ e o segundo com $\tau(t, x) = \tau(t)$.

Teorema B.14. *As simetrias pontuais de Lie espaciais para (71) são dadas pelo campo*

$$G_0 = \sum_{i=1}^p \zeta_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde ζ_i satisfaz as equações de determinação de simetrias espaciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \zeta_i + \sum_{j=1}^p \left(\mu_j \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} - \zeta_j \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^p (\sigma \sigma^t)_{jk} \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial x_j \partial x_k} &= 0 \\ \sigma_{j,k} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} - \zeta_j \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_j} &= 0. \end{aligned}$$

Teorema B.15. *As simetrias pontuais de Lie com dependência temporal para (71) são dadas pelo campo*

$$G = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^p \zeta_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde τ e ξ_i satisfazem as equações de determinação de simetrias com dependência temporal:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \xi_i + \sum_{j=1}^p \left(\mu_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \xi_j \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial(\mu_i \tau)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^p (\sigma \sigma^t)_{jk} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_j \partial x_k} &= 0 \\ \sigma_{j,k} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \xi_j \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_j} - \tau \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma_{ik} \frac{\partial \tau}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Observe que a fórmula de Itô desempenha um papel fundamental no cálculo desse tipo de simetrias, entretanto, uma equação simétrica tem o processo de Wiener acelerado (na notação anterior, $W_{\bar{i}}$). O leitor que conferir a referência [11], deve atentar-se ao fato de que o Apêndice A no mesmo trabalho é fundamental para compreender a construção.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. AGLIARI, A. PACHON, P. M. RODRIGUEZ, AND F. TAVANI, *Phase transition for the maki–thompson rumour model on a small-world network*, *Journal of Statistical Physics*, 169 (2017), pp. 846–875.
- [2] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*, *Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, second ed., 1999. A Wiley-Interscience Publication.
- [3] P. BRÈMAUD, *Point processes and queues*, *Springer Series in Statistics*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981. Martingale dynamics.
- [4] C. F. COLETTI AND D. A. LUIZ, *Limit theorems for non-markovian rumor models*, arXiv preprint arXiv:2407.07170, (2024).
- [5] C. F. COLETTI, P. M. RODRÍGUEZ, AND R. B. SCHINAZI, *A spatial stochastic model for rumor transmission*, *Journal of Statistical Physics*, 147 (2012), pp. 375–381.
- [6] D. J. DALEY AND D. G. KENDALL, *Epidemics and rumours*, *Nature*, 204 (1964), pp. 1118–1118.
- [7] G. F. DE ARRUDA, A. L. BARBIERI, P. M. RODRIGUEZ, F. A. RODRIGUES, Y. MORENO, AND L. DA FONTOURA COSTA, *Role of centrality for the identification of influential spreaders in complex networks*, *Physical Review E*, 90 (2014), p. 032812.
- [8] M. P. DO CARMO, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, SBM, 6ed. ed., 2014.
- [9] S. N. ETHIER AND T. G. KURTZ, *Markov processes*, *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986. Characterization and convergence.
- [10] G. FERRAZ DE ARRUDA, F. APARECIDO RODRIGUES, P. MARTÍN RODRÍGUEZ, E. COZZO, AND Y. MORENO, *A general markov chain approach for disease and rumour spreading in complex networks*, *Journal of Complex Networks*, 6 (2018), pp. 215–242.

- [11] G. GAETA AND N. R. QUINTERO, *Lie-point symmetries and stochastic differential equations*, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32 (1999), p. 8485.
- [12] V. V. JUNIOR, P. M. RODRIGUEZ, AND A. SPEROTO, *The maki-thompson rumor model on infinite cayley trees*, *Journal of Statistical Physics*, 181 (2020), pp. 1204–1217.
- [13] K. KAWACHI, *Deterministic models for rumor transmission*, *Nonlinear analysis: Real world applications*, 9 (2008), pp. 1989–2028.
- [14] W. O. KERMACK AND A. G. MCKENDRICK, *A contribution to the mathematical theory of epidemics*, *Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, 115 (1927), pp. 700–721.
- [15] A. J. KIMMEL, *Rumors and the financial marketplace*, *The Journal of Behavioral Finance*, 5 (2004), pp. 134–141.
- [16] E. LEBENSZTAYN, F. P. MACHADO, AND P. M. RODRÍGUEZ, *Limit theorems for a general stochastic rumour model*, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 71 (2011), pp. 1476–1486.
- [17] E. LEBENSZTAYN, F. P. MACHADO, AND P. M. RODRÍGUEZ, *On the behaviour of a rumour process with random stifling*, *Environmental Modelling & Software*, 26 (2011), pp. 517–522.
- [18] A. LINERO AND A. ROSALSKY, *On the Toeplitz lemma, convergence in probability, and mean convergence*, *Stoch. Anal. Appl.*, 31 (2013), pp. 684–694.
- [19] D. P. MAKI AND M. THOMPSON, *Mathematical models and applications*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973. With emphasis on the social, life, and management sciences.
- [20] P. MARTÍN RODRÍGUEZ AND F. P. MACHADO, *Generalizações e teoremas limites para modelos estocásticos de rumores*, (2010).
- [21] R. K. MILLER, *Nonlinear Volterra integral equations*, vol. 468, WA Benjamin Menlo Park, California, 1971.
- [22] M. NEKOVEE, Y. MORENO, G. BIANCONI, AND M. MARSILI, *Theory of rumour spreading in complex social networks*, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 374 (2007), pp. 457–470.

- [23] B. OKSENDAL AND B. OKSENDAL, *Stochastic differential equations*, Springer, 2013.
- [24] G. PANG AND E. PARDOUX, *Functional limit theorems for non-Markovian epidemic models*, *Ann. Appl. Probab.*, 32 (2022), pp. 1615–1665.
- [25] C. E. PEARCE, *The exact solution of the general stochastic rumour*, *Mathematical and Computer Modelling*, 31 (2000), pp. 289–298.
- [26] E. PERTWEE, C. SIMAS, AND H. J. LARSON, *An epidemic of uncertainty: rumors, conspiracy theories and vaccine hesitancy*, *Nature medicine*, 28 (2022), pp. 456–459.
- [27] A. RADA, C. COLETTI, E. LEBENSZTAYN, AND P. M. RODRIGUEZ, *The role of multiple repetitions on the size of a rumor*, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 20 (2021), pp. 1209–1231.
- [28] W. RUDIN, *Functional Analysis*, Mc-Graw-Hill, 2nd ed., 1991.
- [29] A. SAGGU, L. ANTE, AND E. DEMIR, *Anticipatory gains and event-driven losses in blockchain-based fan tokens: Evidence from the fifa world cup*, *Research in International Business and Finance*, (2024), p. 102333.
- [30] A. N. SHIRYAYEV, *Probability*, vol. 95 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1984. Translated from the Russian by R. P. Boas.
- [31] M. SPIVAK, *Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus*, CRC press, 1965.
- [32] K. THOMPSON, R. CASTRO ESTRADA, D. DAUGHERTY, A. CINTRON-ARIAS, ET AL., *A deterministic approach to the spread of rumors*, (2003).
- [33] D. TRPEVSKI, W. K. TANG, AND L. KOCAREV, *Model for rumor spreading over networks*, *Physical Review E*, 81 (2010), p. 056102.
- [34] R. WATSON, *On the size of a rumour*, *Stochastic processes and their applications*, 27 (1987), pp. 141–149.
- [35] B. E. WEEKS AND R. K. GARRETT, *Electoral consequences of political rumors: Motivated reasoning, candidate rumors, and vote choice during the 2008 us presidential election*, *International Journal of Public Opinion Research*, 26 (2014), pp. 401–422.

- [36] L. ZHAO, J. WANG, Y. CHEN, Q. WANG, J. CHENG, AND H. CUI, *Sihr rumor spreading model in social networks*, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391 (2012), pp. 2444–2453.