



Universidade Federal do ABC

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ISABELLA GONÇALVES DE ALVARENGA

# Índice de Conley para Sistemas Dinâmicos Aleatórios

Santo André, 11 de julho de 2025





Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Isabella Gonçalves de Alvarenga

# Índice de Conley para Sistemas Dinâmicos Aleatórios

**Orientador:** Prof. Dr. Daniel Miranda Machado

**Coorientadora:** Prof<sup>a</sup> Dra. Mariana Rodrigues da Silveira

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de  
Matemática, Computação e Cognição para  
obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA ISABELLA GONÇALVES DE ALVARENGA, E TENDO COMO ORIENTADOR O PROF<sup>o</sup> DANIEL MIRANDA MACHADO E COMO COORIENTADORA A PROF<sup>a</sup> MARIANA RODRIGUES DA SILVEIRA.

Santo André, 29 de junho de 2025

**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC**  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Gonçalves de Alvarenga, Isabella  
Índice de Conley para Sistemas Dinâmicos Aleatórios / Isabella  
Gonçalves de Alvarenga. — 2021.

158 fls. : il.

Orientação de: Daniel Miranda Machado  
Coorientação de: Mariana Rodrigues da Silveira

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de  
Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2021.

1. Sistemas Dinâmicos Aleatórios. 2. Homologia. 3. Cohomologia. 4.  
Índice de Conley. I. Miranda Machado, Daniel. II. Rodrigues da Silveira,  
Mariana. III. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2021. IV. Título.



SIGAA - Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas  
UFABC - Fundação Universidade Federal do ABC  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
CNPJ nº 07.722.779/0001-06  
Av. dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP - Brasil  
ppg.matematica@ufabc.edu.br



No dia 10 de Agosto de 2021 às 14:00, Online, realizou-se a Defesa da Dissertação de Mestrado, que constou da apresentação do trabalho intitulado "ÍNDICE DE CONLEY PARA SISTEMAS DINÂMICOS ALEATÓRIOS" de autoria da candidata, ISABELLA GONÇALVES DE ALVARENGA, RA nº 21201910228, discente do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da UFABC. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, a candidata foi considerada Aprovada pela Banca Examinadora.

E, para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Banca.

**Dr. DANIEL MIRANDA MACHADO, UFABC**

Presidente - Interno ao Programa

**Dra. MARIANA GESUALDI VILLOPOUCA**

Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

**Dr. PEDRO JOSÉ CATUOGNO, UNICAMP**

Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

**Dr. CRISTIAN FAVIO COLETTI, UFABC**

Membro Suplente - Examinador(a) Interno ao Programa

**Dr. GUIDO GERSON ESPIRITU LEDESMA, UERJ**

Membro Suplente - Examinador(a) Externo à Instituição



Documento assinado digitalmente  
DANIEL MIRANDA MACHADO  
Data: 11/07/2025 09:33:40-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**UFABC - Fundação Universidade Federal do ABC**

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com anuência do orientador.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

# Resumo:

A teoria de Conley tem como foco estudar conjuntos invariantes de sistemas dinâmicos através de invariantes topológicos do mesmo, como grupos de homotopia, homologia e cohomologia. Este trabalho tem como objetivo apresentar a teoria de Conley para sistemas dinâmicos aleatórios discretos e construir novos exemplos dessa teoria. Para tanto, apresentaremos noções básicas de sistemas dinâmicos discretos e contínuos e seus análogos para o caso de sistemas dinâmicos aleatórios. Definimos os índices de Conley para o caso contínuo e discreto e o índice de Conley aleatório para o caso discreto. Construimos novos exemplos de sistemas dinâmicos aleatórios inclusive através de simulações. Por fim, demonstramos um análogo do Teorema de Sharkovsky.

**Palavras-chaves:** Homologia e Cohomologia, Sistemas dinâmicos, Sistemas Dinâmicos Aleatórios, Índice de Conley.

# Abstract

Conley's theory focuses on studying invariant sets of dynamical systems through topological invariants of this sets, such as groups of homotopy, homology and cohomology. This works aims to present the Conley theory for discrete random dynamical systems and build new examples of this theory. For that, we will present basic notions of discrete and continuous dynamic systems and their analogues for the case of random dynamic systems. We defined the Conley indices for the continuous and discrete case and the random Conley index for the discrete case. At last, we show an analogous of the Sharkovskii's Theorem.

**Keywords:** Homology and Cohomology, Dynamical Systems, Random Dynamical Systems, Conley Index.

# Agradecimentos

Gostaria de começar agradecendo a CAPES pelo financiamento dessa pesquisa. Sem ela, não só essa como várias outras pesquisas seriam impossíveis. O investimento na ciência e na educação é o primeiro passo para uma sociedade mais igualitária. Gostaria também de agradecer a banca pela disponibilidade e pelo interesse. Cada correção e cada dica são de enorme valor para mim. Obrigada por fazerem parte desse projeto.

Gostaria também de agradecer aos meus pais, Luis e Célia, que sempre investiram na minha educação e desde criança me motivavam a estudar. Com certeza esse foi o primeiro passo (e claramente um dos mais importantes) da minha jornada como cientista. Agradeço aos meus avós, aos meus padrinhos e aos meus primos, também por sempre acreditarem que eu seria capaz de aprender tudo que eu quisesse.

Gostaria de agradecer à minha esposa Deborah, que é a minha companheira de vida e nunca me deixou baixar a cabeça frente a qualquer dificuldade. Obrigada por acreditar em mim, acreditar que esse projeto seria possível, e acreditar nos nossos projetos futuros. Obrigada por ouvir cada dúvida minha, cada ensaio, cada agonia e cada felicidade que vieram não só desse projeto, mas de todos os dias que vivemos juntas. Obrigada por ser parte de tudo. Com você a vida fica muito mais leve. Eu sei que a gente já morou em muitos lugares (alguns de qualidade duvidosa), mas a minha casa vai ser sempre aonde você estiver. Obrigada por acreditar em tudo que vamos construir juntas. Você me inspira.

Gostaria de agradecer a Universidade Federal do ABC, lugar que se tornou minha casa nos últimos sete anos. Com toda a certeza foi a escolha mais feliz que já fiz. Assim sendo, agradeço aos idealizadores dessa universidade. Tenho certeza que ela teve um impacto positivo e decisivo não só na minha vida, como a de milhares que passaram por ela e de milhares que ainda vão passar. Agradeço aos funcionários da instituição, dentre eles destaco o pessoal da segurança (que tiveram toda a paciência do mundo em todas as vezes que perdi meu crachá), o pessoal das reitorias de graduação, pós graduação e pesquisa (que sempre responderam meus e-mails prontamente em momentos de desespero) e o pessoal da limpeza (por todas as conversas saindo do Bloco B a noite).

Como já diz a sabedoria popular “ninguém se forma sozinho”, gostaria de agradecer aos meus amigos da desordem. São eles: Ali, Augusto, Burno, Bruno, Betão, Caio, Caíque Sensei, Carol, Carlo, Daniboy, Danihell, Higor e Maurílio. O mundo é pequeno demais para cada um de vocês, e sei que ainda há não enumeráveis cervejas para tomarmos juntos (provavelmente na frente do RU) comemorando o sucesso de cada um. Carlo, ainda vou te pagar tudo que te devo. Agradeço às meninas da matemática, Alex, Bia e Maria, por trazerem luz nos dias sombrios e servirem de inspiração não só pra mim, mas como para todas as outras meninas que querem trilhar esse caminho na matemática. Agradeço também aos meus vizinhos, Bilbo e Well, por transformarem

tardes de café em madrugadas de cerveja e boas conversas. Agradeço a minha amiga que me conhece antes mesmo de eu me conhecer, Pietra, por todos os comentários que sempre me tiram uma risada sincera quando eu já não via mais graça em nada. A todos estes, queria dizer que sem vocês este trabalho teria terminado há pelo menos uns seis meses atrás, mas que ele então de nada valeria.

Gostaria de agradecer também a alguns dos professores da UFABC e pessoas que fazem a UFABC funcionar cujos caminhos cruzaram com o meu. Sei que os encontros iniciais pelas salas de aula e pelos corredores são apenas obra do acaso, mas a vontade de permanecer comigo é esforço de cada um. Hoje tenho a mais profunda honra de chamá-los de amigos. Obrigada Carol, Manu, Cristian, Sandrinha, Ana Lígia, Aleja, Giselda, Jeff, Marrocos, Grisi, Vilela, Rodrigo, Dahisy, Enrique e Maurício. Prometo que cada centavo investido valerá a pena.

Obrigada Guéron, por ser meu coach e por prestar o papel de amigo hétero para falar de futebol. Obrigada por ser pilar fundamental de toda minha rede de apoio, e por ser minha bússola moral. Que a nossa amizade seja maior do que o futebol do Corinthians em 2012 e que ela seja mais duradora que a carreira de Paulo Baier. Obrigada aos meus orientadores, Mari e Dani. Se esse período de mestrado foi com certeza um dos mais felizes da minha vida, vocês dois têm papel fundamental nisso. Obrigada Mari, por todas as conversas sobre matemática, desde quando eu ainda era uma criança aprendendo GA, até o último capítulo desse presente texto (isso até agora, sei que ainda existem muitos trabalhos legais e aleatórios pela frente). Obrigada por estar comigo, por toda ajuda com o doutorado, e obrigada por todos os shots de água com gás no café de madrugada. Falo agora não só por mim, mas tenho certeza que muitas outras pessoas sentem a mesma felicidade que eu só de te encontrar com um sorriso na sua salinha lá no oitavo. Você é incrível.

Obrigada Daniel, por estar comigo desde um pouquinho antes da minha jornada na UFABC começar oficialmente lá naquele projeto de PDPD. Obrigada por ter respondido aquele memorável e-mail em que te pedi orientação. O resto é história. Obrigada principalmente por me ensinar a tomar café, e obrigada por sempre ficar do meu lado. Obrigada por ter me ensinado probabilidade, mas mais do que isso obrigada por ter apostado em mim nas vezes em que nem eu queria mais fazer essa aposta. Você tem o dom de ensinar, é fato, mas mais do que isso você tem o dom de acolher. Obrigada por ter me colocado debaixo da sua asa, agora eu estou pronta para voar um pouquinho. Mas vou voltar antes de você começar a sentir saudades minhas ocupando a sua sala. Pega seus créditos de aula e vêm me visitar (e fazer aqueles risotos que só você sabe, é claro).

Espero um dia voltar para esse lugar para completar a carteirinha falta na minha coleção (a de cor verde).

Até lá, até logo.

# Sumário

|   |           |
|---|-----------|
| Resumo . . . . .  | vi        |
| Abstract . . . . .  | vii       |
| Agradecimentos . . . . .                                  | viii      |
| <b>Introdução</b>   | <b>3</b>  |
| <b>Sistemas Dinâmicos</b>                                 | <b>5</b>  |
| 1 Definições . . . . .                                    | 5         |
| 2 Sistemas Dinâmicos oriundos de EDO's . . . . .          | 9         |
| 2.1 Linearização e Estabilidade . . . . .                 | 10        |
| 2.2 Variedades Estáveis, Instáveis e Centrais . . . . .   | 18        |
| 2.3 Ferraduras de Smale . . . . .                         | 20        |
| 3 Sistemas Dinâmicos Aleatórios . . . . .                 | 23        |
| 3.1 Definições básicas e propriedades . . . . .           | 23        |
| 3.2 Exemplos . . . . .                                    | 31        |
| <b>Índice de Conley</b>                                   | <b>43</b> |
| 1 Índice de Conley Contínuo . . . . .                     | 48        |
| 1.1 Decomposição de Morse . . . . .                       | 48        |
| 1.2 Par-índice . . . . .                                  | 49        |
| 1.3 Definição . . . . .                                   | 52        |
| 2 Índice de Conley Discreto . . . . .                     | 54        |
| 2.1 Par - Filtração . . . . .                             | 56        |
| 2.2 Shift Equivalência . . . . .                          | 61        |
| 2.3 Definição . . . . .                                   | 62        |
| <b>Índice de Conley para SDA</b>                          | <b>65</b> |
| 1 Conjuntos Invariantes Aleatórios . . . . .              | 65        |
| 2 Par-Filtração Aleatório . . . . .                       | 69        |
| 3 Equivalência de Espaços por Shifts Aleatórios . . . . . | 81        |
| 4 Definição e Propriedades . . . . .                      | 91        |
| 5 Exemplos . . . . .                                      | 94        |
| <b>Análogo Aleatório de Sharkovysk</b>                    | <b>98</b> |
| 1 Mapa da Tenda . . . . .                                 | 98        |
| 2 Órbitas Periódicas . . . . .                            | 111       |
| 3 Teorema de Sharkovsky . . . . .                         | 115       |

|                                     |   |            |
|-------------------------------------|---|------------|
| 4                                   | Mapa da Tenda Aleatório . . . . .         | 121        |
| <b>Homotopia</b>                    |   | <b>124</b> |
| 1                                   | Grupo Fundamental . . . . .               | 126        |
| <b>Módulos e Álgebra Homológica</b> |   | <b>129</b> |
| 1                                   | Hom . . . . .                             | 132        |
| <b>Homologia e Cohomologia</b>      |   | <b>135</b> |
| 1                                   | Generalidades . . . . .                   | 135        |
| 2                                   | Homologia Singular e Simplicial . . . . . | 138        |
| 2.1                                 | Homologia Simplicial . . . . .            | 139        |
| 2.2                                 | Homologia Singular . . . . .              | 140        |
| 3                                   | Homologia Relativa . . . . .              | 140        |
| 4                                   | Cohomologia Singular . . . . .            | 141        |
| 5                                   | Cohomologia Relativa . . . . .            | 145        |
| <b>Espaço de Funções</b>            |   | <b>148</b> |
| <b>Códigos</b>                      |   | <b>150</b> |
| <b>Bibliografia</b>                 |   | <b>151</b> |

# Introdução

A teoria do Índice de Conley foi introduzida em 1978 por Charles Conley (Conley, 1978). O objetivo de Conley era construir uma generalização da teoria de Morse para sistemas dinâmicos cujos conjuntos invariantes fossem mais gerais do que singularidades hiperbólicas. Nesse contexto mais geral, o índice de Conley nos dá uma descrição homológica da dinâmica local e, portanto, também leva em consideração a topologia do espaço subjacente.

Conley e posteriormente seus alunos Kurland, Salamon e outros, construíram a teoria do índice inicialmente apenas para sistemas dinâmicos contínuos. Dado um conjunto invariante isolado  $S$  de um fluxo em um espaço métrico localmente compacto, primeiramente o índice de Conley de  $S$  foi definido como o tipo de homotopia de um par de espaços compactos chamado par-índice de  $S$ . Em (Conley, 1978), Conley mostra a existência de um par, que chamaremos de par-índice, e a invariância do índice quando um outro par-índice é utilizado para o mesmo conjunto invariante isolado  $S$ .

Além disso, posteriormente, Conley também introduz o índice homológico, que é a homologia reduzida do quociente  $N/L$ , em que  $(N, L)$  é um par-índice qualquer para  $S$ .

A construção de uma teoria do índice para um sistema dinâmico discreto foi proposta pelo próprio Conley. Contudo, a estratégia de aplicar a mesma definição do caso de sistemas dinâmicos contínuos foi descartada já que era possível construir dois pares-filtração distintos para o mesmo sistema dinâmico discreto cujos espaços quocientes não eram homotopicamente equivalentes. Apresentamos um contraexemplo no Capítulo 3.2.4. Foi apenas em 1988 que Robin e Salamon apresentaram em (Robbin; Salamon, 1988) uma construção do índice de Conley discreto chamada “shape index”.

Posteriormente surgiram outras variações do índice de Conley para sistemas dinâmicos discretos. A construção de Robin e Salamon foi aperfeiçoada por Mrozek em (Mrozek, 1990). O índice de Conley de  $S$  na versão de Mrozek é a redução de Leray do par  $(H^*(P); I(P))$ , onde  $H^*(P)$  é a cohomologia de Alexander-Spanier de um par-índice  $P$  de  $S$  e  $I(P)$  é a aplicação-índice associada a  $P$ , ou seja, o índice construído por Mrozek é um par formado por um módulo graduado e um isomorfismo distinguido. Posteriormente essa versão foi generalizada por Szymczak em (Szymczak, 1995). Em 2000, Franks e Richeson introduziram em (Franks; Richeson, 2000a) uma versão do índice como sendo a classe de shift equivalência de  $h_P(S)$ , em que  $P = (N, L)$  é um par-índice para  $S$ ,  $h_P : N/L \rightarrow N/L$  é a classe de homotopia das aplicações que preservam ponto base em  $N/L$ .

Sobre a teoria de sistemas dinâmicos, consideremos um exemplo bastante interessante: soluções locais de equações diferenciais  $\dot{x}(t) = F(x(t), t)$  em que  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo vetorial dependente do tempo. Poderíamos considerar sobre a equação diferencial uma perturbação  $\dot{x}(t) = F(x(t), t) + w(x, t)$  sendo  $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função qualquer. Embora este problema seja, a

princípio, mais complicado que o inicial, ainda sim teríamos um sistema dinâmico próximo (num sentido teórico) do primeiro. Uma mudança mais radical apareceria se considerássemos um fator aleatório em  $w$ , i.e.,  $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  em que  $\Omega$  é um espaço de probabilidade. Essa é a ideia motivadora da teoria de sistemas dinâmicos aleatórios.

Ao contrário do caso determinístico, em que a definição do índice de Conley é primeiro feita para sistemas dinâmicos contínuos e depois colocada para discretos, no caso de sistemas dinâmicos aleatórios a primeira definição do índice de Conley está colocada apenas para sistemas dinâmicos aleatórios discretos, e só foi estabelecida em 2008 por Zhenxin Liu em (Liu, 2008). Não há ainda publicações sobre uma definição do índice de Conley para o caso de sistemas dinâmicos aleatórios contínuos.

O objetivo maior dessa dissertação é apresentar a teoria de Conley para o caso de sistemas dinâmicos aleatórios discretos e desenvolver exemplos não triviais dessa teoria. Para tanto, seguimos a seguinte estratégia: no Capítulo fazemos um estudo sobre a teoria de sistemas dinâmicos, começando pelos determinísticos e depois passando para sistemas dinâmicos aleatórios. Com a intenção de esclarecer as principais definições relativas a sistemas dinâmicos aleatórios, por várias vezes estabelecemos um análogo entre estas e as definições relativas a sistemas dinâmicos determinísticos, com as quais estamos mais familiarizados. É neste capítulo que apresentamos a maioria dos exemplos que serão tratados nos capítulos 3.2.4 e 2.3 quando iremos calcular os índices de Conley desses sistemas dinâmicos. Ao final da Seção 3 apresentamos alguns exemplos de sistemas dinâmicos aleatórios com simulações de seus comportamentos.

No Capítulo 3.2.4 apresentamos a teoria de Conley como foi estabelecida em sua ordem temporal: na Seção 1 introduzimos o índice de Conley contínuo e calculamos alguns exemplos, e depois na Seção 2 definimos alguns dos índices de Conley discreto. Por fim, no Capítulo 2.3 apresentamos o índice de Conley para sistemas dinâmicos aleatórios discretos tomando cuidado de ressaltar todas as analogias com o capítulo que o precede. Neste mesmo capítulo apresentamos alguns exemplos do cálculo do índice de Conley para estes sistemas perturbados. Estes três capítulos concluem os objetos centrais pesquisados nesta dissertação.

Por fim, no capítulo 5 discutimos o índice de Conley cohomológico reduzido e o índice de Conley homotópico para o sistema dinâmico discreto gerado pelo mapa da tenda, e estabelecemos uma generalização para mapas definidos num compacto satisfazendo certas condições de diferenciabilidade numa vizinhança de pontos periódicos. Com os estudos sobre este sistema dinâmico determinístico, aplicamos as técnicas apresentadas no Capítulo 2.3 para estudar o que aconteceria com estas órbitas periódicas se tais mapas fossem submetidos a pequenas perturbações aleatórias. Como consequência desse estudo, provamos um análogo aleatório do famoso Teorema de Sharkovsky.

# Sistemas Dinâmicos

É natural querermos estudar sistemas que evoluem no tempo seguindo alguma regra de transição. Exemplos que pedem tal modelagem surgem constantemente na ciência, como nos exemplos de dinâmicas populacionais, posição de uma partícula submetida a alguma aceleração, ou em climatologia e economia. A ideia é que o estado atual evolui por alguma regra de transição que nos fornece outro estado do sistema. Essas regras de transição podem depender de alguns parâmetros, como por exemplo o tempo. Isso é, grosseiramente, a intuição de sistemas dinâmicos que é o objeto central desse capítulo.

Nesse capítulo introduzimos o conceito de sistemas dinâmicos e em particular estaremos interessados em extrair propriedades sobre o comportamento assintótico dos mesmos.

O texto que apresentamos nas seções 1 e 2 é baseado nas referências (Devaney, 1989; Jost, 2006; Palis; De Melo, 2012; Arrowsmith; Place; Place *et al.*, 1990) e sugerimos que o leitor interessado em mais detalhes e nas demonstrações consulte tais referências.

## 1 Definições

No que segue, o conjunto  $\mathbb{T}$  de parâmetros de tempo será igual ou a  $\mathbb{R}$  ou a  $\mathbb{Z}$ .

**Definição 0.1.** Um **fluxo** (respectivamente, **semifluxo**) é uma família de mapas  $\{F_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  de um conjunto  $X$  (denominado **espaço de fase**) nele mesmo, tais que, para todo  $t \in \mathbb{T}$  (respectivamente  $t \geq 0$ ) satisfazem:

1.  $F_0 = \text{id}_X$ ;
2.  $F_{t+s} = F_t \circ F_s$  quaisquer que sejam  $t, s \in \mathbb{T}$  (respectivamente para  $t, s \geq 0$ )

O conjunto  $X$  munido de um fluxo ou de um semifluxo é denominado de **sistema dinâmico** e será comumente abreviado por **SD**. Quando não houver confusão sobre o espaço, denotaremos o SD simplesmente pelo fluxo ou pelo semifluxo  $F$ .

Quando o conjunto de parâmetros  $\mathbb{T}$  é o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  dizemos que o sistema dinâmico é **discreto** e se  $\mathbb{T}$  for o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  dizemos que é **contínuo**. Essas serão as escolhas mais usuais de parâmetros  $\mathbb{T}$ .

Um de nossos interesses é estudar a evolução de um estado inicial  $x_0 \in X$  pelo fluxo  $x(t) := F_t(x_0)$ . A ideia é que a cada tempo  $t \in \mathbb{T}$  estaremos atualizando o ponto  $x_0$  através do mapa  $F_t$ .

O mapa  $t \mapsto x(t)$  é denominado **trajetória**, enquanto que o conjunto  $\{x(t) : t \in \mathbb{T}(t \geq 0)\}$  de um SD com estado inicial  $x_0$  é denominado **órbita** ou **linha de fluxo** de  $x_0$ . Na Figura 1, a linha que passa sobre o ponto  $p_i$  é um subconjunto da órbita deste ponto, com  $i \in \{1, \dots, 4\}$ .

Repare que a linha que passa por  $p'_1$  é a mesma linha que passa por  $p_1$ . Ou seja, existe um  $r \geq 0$  tal que  $x(t) = p_1$  e  $x(t+r) = p'_1$ . Segue diretamente da definição que  $p_1$  e  $p'_1$  possuem a mesma órbita.

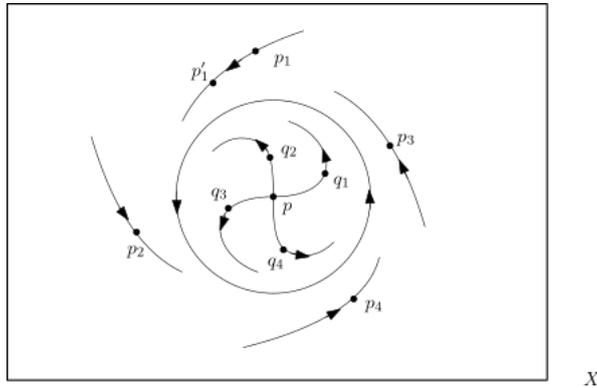


Figura 1: Fluxo sobre um espaço  $X$

Dizemos que o ponto  $x_0$  é **um ponto fixo** ou **ponto estacionário** se  $x(t) = x_0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  ( $t \geq 0$ ). Na Figura 1, o ponto  $p \in X$  é um exemplo de ponto fixo.

Dizemos ainda que a trajetória ou a órbita é dita **periódica** se  $x(t+s) = x(t)$  vale para algum  $s \geq 0$  e para todo  $t \in \mathbb{T}$  ( $t \geq 0$ ). Neste caso, o ponto  $x(t)$  é dito **ponto periódico**, e seu período é o menor  $s$  que satisfaz  $x(t+s) = x(t)$ . Por exemplo, na Figura 1, a órbita circular é um exemplo de órbita periódica.

*Observação 0.2.* Dado um mapa qualquer  $F : X \rightarrow X$ , podemos construir um SD discreto considerando o semifluxo  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definido por  $F_n := F^n$  onde  $F^n$  denota a composição de  $F$   $n$ -vezes.

Assim sendo, a órbita de  $x_0 \in X$  é dada pela união  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n := F^n(x_0)\}$ . Mais ainda, nesta situação, um ponto periódico  $x$  de período  $k \in \mathbb{N}$  é tal que  $F_k(x) = F^k(x) = x$ , i.e., ele é um ponto fixo de  $F^k$ .

**Exemplo 0.3** (Mapa da Tenda). Seja  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Vamos considerar sobre  $I$  um semifluxo dado pelas iteradas do mapa  $T : I \rightarrow I$  em que

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

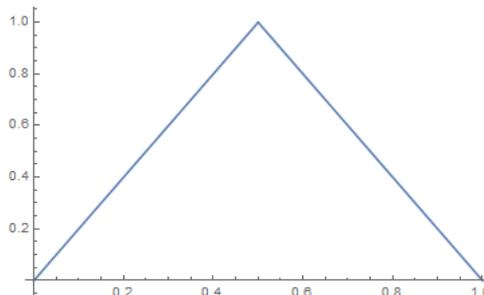


Figura 2: Mapa da tenda

Assim sendo, a órbita de um ponto  $x_0 \in I$  é o conjunto  $\{T^n(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$ . Repare que podemos

associar a esta órbita uma sequência  $\{L, R\}^{\mathbb{N}}$  da seguinte forma: para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , temos que o  $n$ -ésimo termo da sequência associada é  $L$  (respectivamente,  $R$ ) se  $T^n(x_0) \leq \frac{1}{2}$  (respectivamente,  $T^n(x_0) > \frac{1}{2}$ ). Mais discussões sobre esse mapa podem ser encontradas em (Alligood; Sauer; Yorke, 1997).

*Observação 0.4.* Também podemos construir semifluxo discreto para um SD discreto a partir de um SD contínuo. Para tanto, basta consideramos o semifluxo dado pelas iteradas do mapa de tempo 1, isto é, fazemos  $F := F_1$ , e usamos a Observação 0.2.

Se  $F_1$  é inversível, podemos estender essa família de mapas para um fluxo considerando  $F_{-n} = (F^{-1}) \circ \dots \circ (F^{-1})$   $n$ -vezes para  $n > 0$ .

De maneira mais criativa, podemos construir um SD discreto usando o mapa de retorno de Poincaré como apresentado em (Arrowsmith; Place; Place *et al.*, 1990; Jost, 2006).

Repare que a Definição 0.1 é bastante ampla no sentido que  $X$  é um conjunto qualquer. Porém, no que se segue da teoria de sistemas dinâmicos será necessário impor algumas condições sobre  $X$ .

Por exemplo, se quisermos estabelecer alguma relação de distância entre pontos no espaço de fase, precisamos pedir que  $X$  seja um espaço métrico e que os mapas sejam homeomorfismos. Se quisermos falar sobre diferenciabilidade, podemos pedir que  $X$  seja uma variedade e que os mapas sejam difeomorfismos. Mais ainda, se quisermos estudar fenômenos aleatórios, é razoável pedir que  $X$  seja um espaço de probabilidade e que os mapas sejam mensuráveis.

Ainda sem apelar para outras hipóteses sobre  $X$ , podemos estabelecer uma definição que será recorrente na investigação do comportamento assintótico do sistema. Às vezes, a órbita de um ponto permanece numa região particular do espaço de fase, e são esses conjuntos que queremos caracterizar.

**Definição 0.5.** Seja  $F$  um fluxo sobre um conjunto  $X$ . Um conjunto  $A \subset X$  é dito **positivamente invariante** (respectivamente, **negativamente invariante**) por  $F$  se  $F_t(A) \subset A$  (respectivamente,  $F_t(A) \supset A$ ) qualquer que seja  $0 \leq t \in \mathbb{T}$ . Dizemos que ele é **invariante** se  $F_t(A) \subset A$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

**Proposição 0.6.** *Sob as condições da Definição 0.5, temos que:*

- qualquer órbita é um conjunto invariante;
- um conjunto  $S$  é invariante se, e somente se, este é união de órbitas de  $F$ ;
- se  $S$  é invariante sob  $F$ , então também os são  $cl(S)$  e  $S^c$  (em que  $cl(S)$  denota o fecho de  $S$  e  $S^c$  o seu complementar);
- a união e a interseção de qualquer coleção de conjuntos invariantes também é um conjunto invariante.

Formalizada a noção de invariância, podemos ainda considerar os conjuntos cujas órbitas não apenas são invariantes, como também possuem vizinhanças que são atraídas por eles. Aqui, iremos invocar propriedades métricas para discutir conceitos de distância, embora as mesmas definições possam ser colocadas sobre espaços topológicos mais gerais.

**Definição 0.7.** Um conjunto compacto  $\Lambda$  num espaço métrico  $X$  é denominado de **atrator** para o mapa contínuo  $F : X \rightarrow X$  se existe uma vizinhança  $U$  de  $\Lambda$  com  $F(U) \subset U$  e  $\Lambda = \bigcap_{0 \leq t \in \mathbb{T}} F_t(U)$ . Por outro lado, o conjunto  $\Lambda$  é dito **repulsor** se  $\Lambda = \bigcap_{0 \geq t \in \mathbb{T}} F_t(U)$

**Definição 0.8.** O maior conjunto aberto  $U$  satisfazendo a Definição 0.7 é denominado de **bacia de atração** de  $\Lambda$ .

Seguindo por essa direção, podemos caracterizar os conjuntos limites de órbitas. Informalmente, podemos entender os conjuntos limites como o estado para o qual um sistema dinâmico se aproxima após um longo tempo, avançando ou retrocedendo no tempo. Eles são importantes porque podem ser usados para entender o comportamento assintótico de um sistema dinâmico.

**Definição 0.9.** Seja  $\{F_t\}_{t \in \mathbb{T}}$  um fluxo sobre um conjunto  $X$ . Como fizemos antes, defina  $x(t) := F_t(x)$ . Dado  $y \in X$  qualquer, definimos, respectivamente, os **conjuntos limites  $\alpha$ -limite** e  **$\omega$ -limite** de  $y$  por

$$\alpha(y) := \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \overline{y((-\infty, t))}$$

$$\omega(y) := \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \overline{y((t, \infty))}$$

Se  $X$  for um espaço métrico com métrica  $d_X$ , temos que:

$$\alpha(y) = \{z : \text{para todo } \epsilon > 0, \text{ existe um } t \text{ arbitrariamente grande tal que } d_X(y(-t), z) < \epsilon\}$$

$$\omega(y) = \{z : \text{para todo } \epsilon > 0, \text{ existe um } t \text{ arbitrariamente grande tal que } d_X(y(t), z) < \epsilon\}$$

Da Definição 0.9, temos que dado um  $y \in X$ , o conjunto  $\omega(y)$  é composto pelos pontos  $x$  para os quais a relação  $d_X(x, y(t)) < \epsilon$  é satisfeita para infinitos  $t$  independente de  $\epsilon$ . Portanto, um ponto em  $\omega(y)$  não precisa estar necessariamente na órbita de  $y$ , mas a órbita de  $y$  deve conter pontos arbitrariamente próximos de  $\omega(y)$ . Interpretação análoga vale para o conjunto  $\alpha(y)$ . Por fim, vale notar que qualquer ponto na órbita de  $y$  possui os mesmos conjuntos limites que ele.

Na Figura 1, as órbitas de  $p_1, \dots, p_4$  são atraídas pela órbita periódica ao redor de  $p$ . Logo, esta órbita periódica é igual a  $\omega(p_i)$  qualquer que seja  $i \in \{1, \dots, 4\}$ . Por outro lado, os pontos  $q_1, \dots, q_4$  são tais que  $\alpha(q_i) = p$  qualquer que seja  $i \in \{1, \dots, 4\}$ .

Repare também que para órbitas periódicas (em particular para pontos fixos) estes dois conjuntos são a própria órbita. Isso não impede, porém, que estas órbitas sejam ainda os conjuntos limites de outros pontos em  $X$ .

Podemos também enfraquecer a condição de periodicidade dentro do caso de sistemas dinâmicos discretos gerados por um mapa. É o que está caracterizado na seguinte definição.

**Definição 0.10.** Seja  $(X, d_X)$  um espaço métrico e  $F : X \rightarrow X$  um homeomorfismo. Dizemos que um ponto  $x_0 \in X$  é **recorrente por cadeia** se, para todo  $\epsilon > 0$ , existem pontos  $x_1 = x, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x$  com  $n = n(\epsilon)$  tais que  $d_X(F(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$  qualquer que seja  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Na Figura 3, as bolas pontilhadas têm raio  $\epsilon$ . Neste caso, os pontos  $\{x_1 = x, x_2, \dots, x_7\}$  atendem a definição de recorrência por cadeia com este  $\epsilon$  fixado. O ponto  $x$  seria recorrente por cadeia se comportamento análogo valesse para todo  $\epsilon > 0$ .

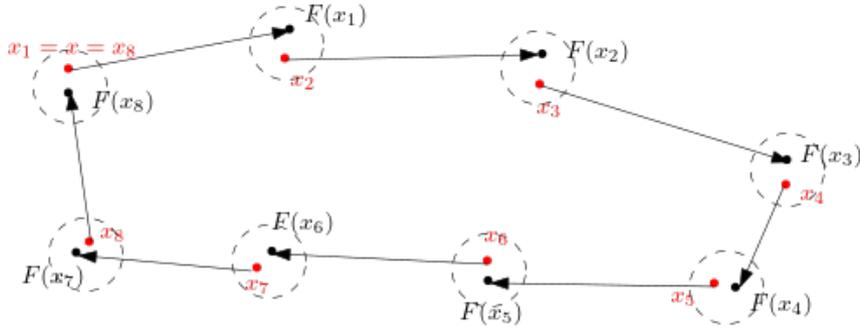


Figura 3: Recorrência por cadeia com  $\epsilon$  fixado e  $n(\epsilon) = 8$

## 2 Sistemas Dinâmicos oriundos de EDO's

O seguinte exemplo é um caso clássico em que construímos um sistema dinâmico a partir de uma equação diferencial ordinária.

**Sistemas de EDO's** Considere  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial dependente do tempo e a equação diferencial ordinária  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$  com condições iniciais  $x(t_0) = x_0$ .

Suponha que essa EDO tenha solução global e única. Nesse caso o fluxo determinado pela EDO é um exemplo de sistema dinâmico. Se denotarmos por  $F_t(x_0) = x(t + t_0)$  onde  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a solução do problema de valor inicial <sup>1</sup> então  $F^t(x_0)$  é um fluxo dependente do tempo. De fato, fazendo  $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  dado por

$$F((x_0, t_0), t) = (F_t(x_0), t + t_0)$$

temos que  $\{F_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  satisfaz a Definição 0.1.

Além do tempo, o sistema dinâmico pode depender de outros fatores que podem mudar, não só quantitativamente, mas qualitativamente o comportamento do sistema. É o que mostra o próximo exemplo:

**Exemplo 0.11.** Adotando a notação  $x \equiv x(t)$  e  $\dot{x} \equiv \frac{d}{dt}x$ . Considere a EDO dada por

$$\dot{x} = -x^3 + \lambda x = x(-x^2 + \lambda) \tag{1}$$

em que  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $x(t) \in \mathbb{R}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Para  $\lambda < 0$ , temos que a Equação 1 satisfaz  $\dot{x} = 0$  apenas quando  $x = 0$ . Portanto, 0 é o único ponto fixo.

Numa vizinhança à esquerda do 0, vale que  $\dot{x} > 0$ . Logo, a função é crescente nessa região e portanto os pontos vão se aproximando do ponto fixo. Já numa vizinhança à direita do 0, temos

<sup>1</sup>Lembrando que aqui estamos restritos às EDO's cujas soluções globais existem e são únicas. Pelo Teorema de Cauchy-Lipschitz, temos que a solução existe e é única numa vizinhança de  $t_0$  desde que  $f$  seja Lipschitz. Mais detalhes sobre intervalos maximais de existência de tais soluções podem ser encontrados em (Perko, 2013).

que  $\dot{x} < 0$ . Disso, segue que a função é decrescente nessa região e portanto os pontos também vão se aproximando do zero. Neste caso, 0 é um ponto fixo atrator.

Para  $\lambda = 0$ , temos exatamente a mesma análise, já que  $\dot{x} = -x^3$ .

Agora, para  $\lambda > 0$  temos que  $\dot{x} = 0$  em três casos: quando  $x = 0$ ,  $x = \sqrt{\lambda}$  e  $x = -\sqrt{\lambda}$ . Numa vizinhança à esquerda de  $-\sqrt{\lambda}$ , temos que  $\dot{x} > 0$ , logo os pontos à esquerda de  $-\sqrt{\lambda}$  estão se aproximando dele; agora entre  $-\sqrt{\lambda}$  e 0 vale que  $\lambda > x^2$ , o que implica que  $(-x^2 + \lambda) > 0$  e portanto  $\dot{x} < 0$ . Assim sendo, a função decresce nesse intervalo. Já entre 0 e  $\sqrt{\lambda}$  temos, por argumento análogo, o comportamento contrário, i.e.,  $\dot{x} > 0$ ; portanto, os pontos crescem nesse intervalo. Por fim, à direita de  $\sqrt{\lambda}$ , temos que  $-x^2 + \lambda < 0$  e portanto  $\dot{x} > 0$ .

Resumidamente, temos o seguinte comportamento:

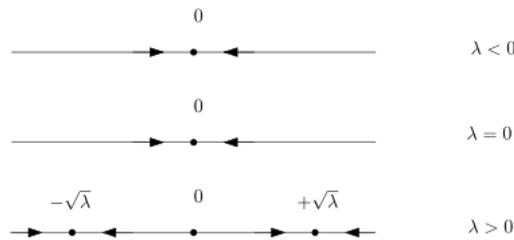


Figura 4: Comportamento do SD determinado pela Equação 1 para diferentes valores de  $\lambda$

Para discutir formalmente o comportamento qualitativo desse sistema, introduziremos as seguintes definições:

**Definição 0.12.** Considere um fluxo com origem na equação diferencial  $\dot{x}(t, \lambda) = f(x(t), t, \lambda)$  com  $x(0) = x_0$ . Dizemos que o ponto fixo  $x_s$  é **estável** se, e somente se, para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que se  $\|x(0) - x_s\| < \delta$ , então para todo  $t \geq 0$  vale que  $\|x(t) - x_s\| < \epsilon$ . Caso contrário, dizemos que o ponto fixo  $x_s$  é **instável**.

Ainda mais, dizemos que o sistema possui uma **bifurcação local** em  $(x_0, \lambda_0)$  se o Jacobiano da matriz  $Df_{(x_0, \lambda_0)}$  possui um autovalor com parte real zero.

Retornando ao Exemplo 0.11, repare que, para os casos  $\lambda < 0$  e  $\lambda = 0$ , o comportamento do sistema é qualitativamente o mesmo, caracterizado por ter o ponto 0 como ponto fixo estável.

Porém, para o caso  $\lambda > 0$ , temos uma mudança abrupta na configuração do sistema: 0 passa a ser ponto fixo instável e surgem dois pontos fixos estáveis ( $-\sqrt{\lambda}$  e  $\sqrt{\lambda}$ ). De outra maneira, nos casos em que o comportamento qualitativo é alterado quando variamos um parâmetro, dizemos que temos uma bifurcação.

## 2.1 Linearização e Estabilidade

A Seção 2 é extremamente interessante pois será a partir das discussões feitas nela sobre SD oriundos de EDO's que construiremos a primeira abordagem qualitativa sobre o estudo de SD. Assim sendo, vamos considerar uma variação dele que dará origem a um exemplo do chamado **fluxo local**.

Para tanto, seja  $f = (f^1, \dots, f^d) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  um mapa de classe  $C^1$  em que  $f^i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  e portanto temos  $f(x_1, \dots, x_d) = (f^1(x_1, \dots, x_d), \dots, f^d(x_1, \dots, x_d))$  qualquer que seja  $(x_1, \dots, x_d) \in$

$\mathbb{R}^d$ . Consideramos o sistema de EDO's dado por

$$\dot{x}^i(t) = f^i(x^1(t), \dots, x^d(t)) \quad \text{para } i = 1, \dots, d \quad (2)$$

com  $x^i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\dot{x}^i = \frac{d}{dt}x^i$  qualquer que seja  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Dizemos que tal sistema de EDO é **autônomo** pois não depende explicitamente de  $t$ .

É verdade que poderíamos também considerar sistemas de EDO **não autônomos**

$$\dot{x}^i = \phi^i(t, x^1(t), \dots, x^d(t)) \quad \text{para } i = 1, \dots, d$$

com dependência explícita de  $t$ ; contudo, eles podem ser transformados em sistemas autônomos introduzindo uma nova variável  $x^{d+1}$  e a equação

$$\dot{x}^{d+1} = f^{d+1}(x^1(t), \dots, x^d(t), x^{d+1}(t)) = 1$$

Observe que sistemas autônomos são invariantes sob a ação de **shifts temporais** no seguinte sentido: sendo  $x_1(t)$  uma solução da Equação 2 com valores iniciais  $x_1(t_1) = \xi$  e  $x_2(t)$  uma solução com os mesmos valores iniciais mas começando em  $t_2$ , i.e.,  $x_2(t_2) = \xi$ , temos que para todo  $t \geq t_2$  vale que  $x_2(t) = x_1(t + t_1 - t_2)$ . Ou seja, embora o comportamento da solução da EDO dependa dos valores iniciais, ele não depende do instante em que ela começa.

Pelo Teorema de Picard-Lindelöf, temos que a Equação 2 define um **fluxo local** no sentido de que, para todo o estado inicial  $x_0$ , existe a solução  $x(t)$  do sistema para algum intervalo  $-T < t < T$  com  $T > 0$ .

Se  $f^i(x_0) = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, d\}$ , então  $x_0$  é um **ponto fixo** ou **ponto estacionário** do **SD local**.

Para investigar o comportamento de um SD numa região ao redor de um ponto fixo, vamos examinar o problema linearizado ao redor de  $x_0$  e depois investigar se esse mesmo comportamento permanece no sistema original.

Sem perda de generalidade, vamos assumir que  $x_0 = 0$ . Logo, queremos estudar o sistema linearizado dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (3)$$

em que

$$A = \left( \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0) \right)_{i,j=1,\dots,d}, \quad x = (x^1, \dots, x^d) \quad (4)$$

A fim de ganharmos alguma intuição sobre esses sistemas, vamos primeiramente estudar o caso  $d = 2$ .

*Caso 1.* Suponha que a matriz  $A$  dada pela Equação 4 tem dois autovalores reais distintos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  e é, portanto, diagonalizável.

Logo, depois de uma mudança de coordenadas, conseguimos reescrever a Equação 3 como

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = \alpha_1 x^1(t) \\ \dot{x}^2(t) = \alpha_2 x^2(t) \end{cases} \implies \begin{cases} x^1(t) = e^{\alpha_1 t} x^1(0) \\ x^2(t) = e^{\alpha_2 t} x^2(0) \end{cases}$$

Se  $\alpha_1, \alpha_2 < 0$ , temos que  $x(t) = (x^1(t), x^2(t)) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  com velocidade exponencial; por outro lado, se  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  temos que  $x(t) = (x^1(t), x^2(t)) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$  com velocidade exponencial. Em ambos os casos, como

$$\frac{(x^1(t))^{\alpha_2}}{(x^2(t))^{\alpha_1}} = \frac{e^{\alpha_1 \alpha_2 t} (x^1(0))^{\alpha_2}}{e^{\alpha_1 \alpha_2 t} (x^2(0))^{\alpha_1}} = C \in \mathbb{R}$$

temos que  $x(t)$  se move pela curva  $(x^1(t))^{\alpha_2} = C(x^2(t))^{\alpha_1}$ .

Se  $\alpha_1, \alpha_2 < 0$ , dizemos que  $x_0$  é um **sorvedouro** ou um **nó**, ou ainda que  $x_0$  é um **ponto fixo estável** para  $t \rightarrow \infty$ . Um exemplo desse comportamento está mostrado na Figura 5.

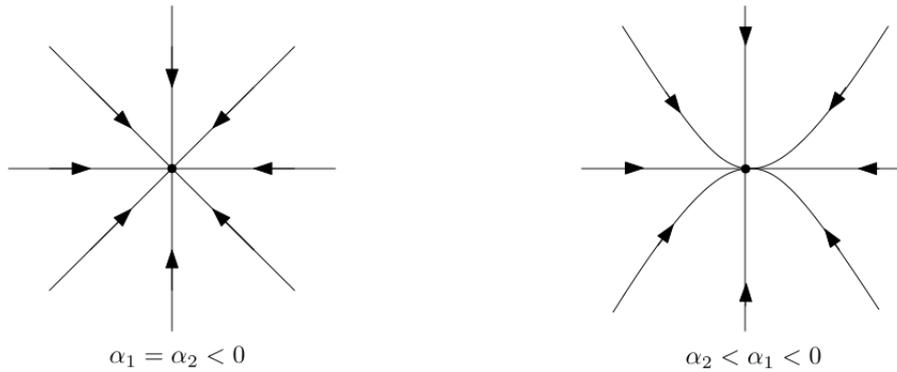


Figura 5: Sorvedouros em  $\mathbb{R}^2$

Por outro lado, se  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ , dizemos que  $x_0$  é uma **fonte** ou que  $x_0$  é um **ponto fixo instável** para  $t \rightarrow \infty$ . Veja a Figura 6.

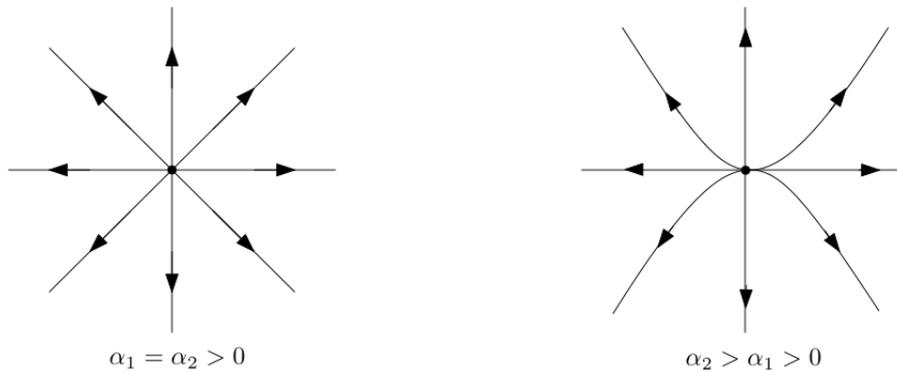


Figura 6: Fontes em  $\mathbb{R}^2$

Observe ainda que esses dois comportamentos são invertidos quando consideramos a mudança  $t \mapsto -t$ .

Por fim, se temos  $\alpha_2 < 0 < \alpha_1$  temos que  $x_0$  não é instável nem estável, já que o  $\omega$ -limite dos pontos do eixo  $x^2$  é  $x_0$  enquanto que as órbitas de todos os demais pontos se afastam de  $x_0$  quando  $t$  cresce. Neste caso, dizemos que  $x_0$  é **ponto de sela**.

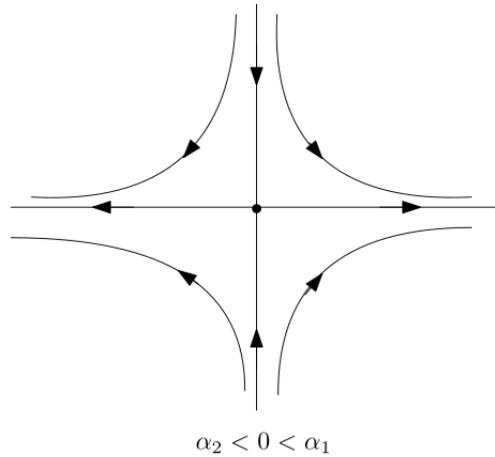


Figura 7: Ponto de sela em  $\mathbb{R}^2$

*Caso 2.* Assuma agora que a matriz  $A$  apresentada na Equação 4 tem dois autovalores complexos conjugados  $\alpha \pm i\nu$ .

Depois de uma mudança de coordenadas, temos que

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \alpha & \nu \\ -\nu & \alpha \end{bmatrix} x(t),$$

o que nos dá que

$$x(t) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\nu t) & \sin(\nu t) \\ -\sin(\nu t) & \cos(\nu t) \end{bmatrix} x_0.$$

Se  $\alpha < 0$ , temos que  $x(t)$  descreve uma trajetória em forma de espiral em direção a  $x_0$ ; se  $\alpha > 0$ ,  $x(t)$  segue uma trajetória em forma de espiral saindo de  $x_0$ . Se  $\alpha = 0$ , temos que  $x(t)$  são trajetórias que circulam o ponto  $x_0$ . Observe que neste último caso, pequenas variações de  $\alpha$  mudam qualitativamente o comportamento do sistema.

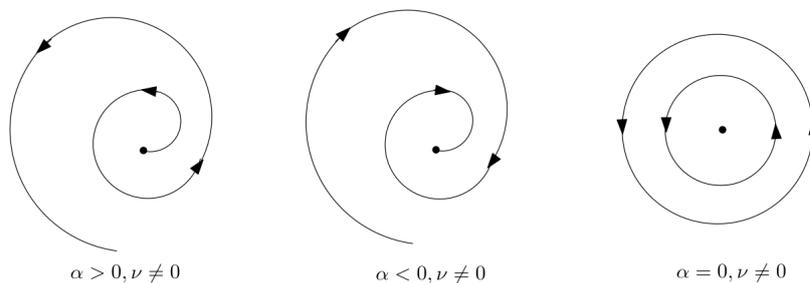


Figura 8: Sistema linearizado em  $\mathbb{R}^2$  para o caso de autovalores distintos complexos conjugados.

É interessante reparar que o caso  $\alpha = 0$  possui um comportamento instável no seguinte sentido: pequenas alterações levam esse sistema a ter um comportamento qualitativo diferente, como nos casos em que  $\alpha \neq 0$ . É um exemplo do que chamamos de comportamento estruturalmente instável. Já quando  $\alpha > 0$  ou  $\alpha < 0$ , existe alguma vizinhança de tamanho  $\epsilon$  para esses valores de modo que o comportamento qualitativo se mantenha, i.e., que ainda tenhamos órbitas em espirais com

os mesmos sentidos antes da perturbação em  $\alpha$  para algum valor em  $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ . Neste caso, temos um exemplo do que é caracterizado como um comportamento estruturalmente estável.

Com esse caso particular em mente, façamos a generalização para o caso  $d$ -dimensional.

**Definição 0.13.** Um ponto fixo  $x_0$  é dito um **ponto hiperbólico** se todos os autovalores do sistema linearizado tem parte real não nula.

O comportamento do sistema linearizado ao redor de um ponto hiperbólico é estruturalmente estável no seguinte sentido: a parte real  $\alpha \neq 0$  de um autovalor nos permite fazer pequenas variações de modo que qualitativamente a dinâmica do sistema se mantenha a mesma. A Figura 8 deixa clara essa intuição.

Observe que todas as definições feitas até agora nesta seção partem da linearização de um SD a tempo contínuo, mais especificamente da solução local de uma EDO. Podemos considerar SD discretos tomando os mapas de tempo 1 desse sistema de EDO's e obteríamos mapas lineares da forma:

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = e^{\alpha} \begin{bmatrix} \cos(\nu) & \sin(\nu) \\ -\sin(\nu) & \cos(\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

em que novamente estamos considerando a linearização ao redor de  $x_0 = 0$  um ponto fixo. Claramente, podemos estender as definições feitas no caso contínuo para o caso discreto de maneira análoga. Em particular, é importante observar que um autovalor 0 no fluxo contínuo linearizado corresponde a um autovalor de valor absoluto 1 no sistema dinâmico discreto. Isso motiva a próxima definição:

**Definição 0.14.** Um mapa linear  $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é chamado de **mapa hiperbólico** se ele tem posto maximal e nenhum dos seus autovalores tem valor absoluto igual a 1.

A Definição 0.14 transpõe a ideia de hiperbolicidade e estruturas estáveis agora para o caso discreto. O posto maximal garante que nenhuma parte do espaço será colapsada, enquanto que, se existissem autovetores de autovalor 1, estes teriam seu comportamento qualitativo modificado com pequenas variações, e portanto o sistema não seria estruturalmente estável.

**Exemplo 0.15 (Fluxos gradientes).** Seja  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  e considere

$$\dot{x}(t) = -DF(x(t)) \tag{5}$$

em que  $D$  representa o gradiente de  $F$ . Assim, observe que partimos de um campo escalar  $F$  e transformamos o mesmo num campo vetorial considerando o gradiente de  $F$ . Em coordenadas, temos

$$\dot{x}^i(t) = -\frac{\partial F(x(t))}{\partial x^i}, \quad i \in \{1, \dots, d\}$$

Observe que  $\frac{d}{dt}F(x(t)) = DF(x(t))\dot{x}(t) = -|\dot{x}(t)|^2$ . Portanto,  $F$  é uma função decrescente em qualquer linha de fluxo e, mais ainda, é estritamente decrescente com exceção dos pontos em que  $DF(x) = 0$ . Os pontos  $x$  satisfazendo tal condição são chamados de **pontos críticos**. Esses pontos são justamente os pontos estacionários do SD definido pela Equação 5.

Vamos considerar agora uma linha de fluxo  $x(t)$ . Tal linha pode ser especificada fazendo  $x(0) = x_0$  para algum  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , ou seja, uma linha de fluxo  $x(t)$  nada mais é do que a órbita de  $x(0)$ . Escrevemos

$$x(\pm\infty) := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t)$$

desde que esse limite exista.

Vamos assumir que a primeira e a segunda derivada de  $F$  são limitadas em  $\mathbb{R}^d$ . Como  $\dot{x}(t) = -DF(x(t))$ , pela regra da cadeia temos que:

$$\ddot{x}(t) = \frac{d}{dt} -DF(x(t)) = -D^2F(x(t))DF(x(t)) = -\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 F(x(t))}{\partial(x^i)^2} \frac{\partial F(x(t))}{\partial x^i}$$

Logo,  $\ddot{x}(t)$  também é limitada e, conseqüentemente,  $\dot{x}(t)$  é Lipschitz. Usando que  $\frac{d}{dt}F(x(t)) = -|\dot{x}(t)|^2$  e o fato de  $F(x(t))$  ser  $C^2$ , temos

$$F(x(t_1)) - F(x(t_2)) = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}F(x(t))dt = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} |DF(x(t))|^2 dt$$

e, portanto, se  $F(x(t))$  é limitada ao longo da linha de fluxo para  $t \rightarrow \infty$ , o fato de  $\dot{x}(t)$  ser Lipschitz implica que, usando  $F(x(t_1)) - F(x(t_2)) = \int_{t_1}^{t_2} |DF(x(t))|^2 dt$ :

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} F(x(t_1)) - F(x(t_2)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{x}(t)|^2 dt$$

e portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{x}(t)|^2 = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} DF(x(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t)$$

isso nos fornece algum indício de que, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $x(t)$  converge a um valor crítico  $x(\infty)$  de  $F$ . Raciocínio análogo vale para  $x(-\infty)$ .

Das considerações que fizemos, podemos concluir pelo menos que se  $F$  é limitada, podemos achar alguma sequência  $t_n \rightarrow \infty$  para a qual  $x(t_n)$  converge para um ponto crítico  $x(\infty)$ . Vamos então agora linearizar o sistema em volta de  $x(\infty)$  que, sem perda de generalidade, será assumido como 0. Logo, temos o problema

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

em que

$$A = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} x(\infty) \right)_{i,j \in \{1, \dots, d\}}$$

Como  $A$  é simétrica, pois  $F$  é  $C^2$ ,  $A$  possui apenas autovalores reais  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  e, depois de uma mudança de coordenadas, o sistema linearizado é dado pela forma :

$$x^i(t) = e^{\alpha_i t} x^i(0) \tag{6}$$

Dizemos que o ponto crítico  $x(\infty)$  é **não degenerado** se os autovalores da Hessiana

$$D^2F(x) = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} x(\infty) \right)_{i,j \in \{1, \dots, d\}}$$

são todos não nulos.

A Equação 6 nos dá que, para o sistema linearizado, a convergência para  $x(\infty)$  se dá ao longo de uma linha de fluxo com velocidade exponencial. É claro que só obtemos essa convergência para  $x(\infty)$  quando os valores iniciais de  $x(0)$  caem numa combinação linear de direções coordenadas de  $x^i$  que correspondem a autovalores  $\alpha_i < 0$ ; a dinâmica faz com que os outros valores assintoticamente se afastem de  $x(\infty)$ .

Podemos nos perguntar se a análise do sistema linearizado do Exemplo 0.15 realmente nos aproxima, ao menos qualitativamente, do sistema original. A resposta nos é dada pelo Teorema 0.17. Mais informações sobre eles podem ser encontradas nas referências (Arrowsmith; Place; Place *et al.*, 1990; Devaney, 1989; Palis; De Melo, 2012).

**Definição 0.16** (Conjugação topológica). Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e considere funções  $f : X \rightarrow X$  e  $g : Y \rightarrow Y$  contínuas. Se existe  $h : Y \rightarrow X$  homeomorfismo tal que  $h$  satisfaz  $h \circ f = g \circ h$ , dizemos que  $f$  e  $g$  são **topologicamente conjugadas**. Neste caso,  $h$  é chamada de **conjugação topológica**.

**Teorema 0.17** (Hartman-Grobmann). *Seja  $F = (F_1, \dots, F_d) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  suave com  $F_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  para todo  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Considere  $x(t)$  uma solução de  $\dot{x}(t) = F(x(t))$  com  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  um ponto crítico hiperbólico, ou seja,  $F(x_0) = 0$  e a matriz do sistema linearizado ao redor de  $x_0$  dada por  $A = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_0) \right)_{i,j \in \{1, \dots, d\}}$  não possui autovalor com parte real nula. Então existe uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  e um homeomorfismo  $h : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que  $h(x_0) = 0$  e, na vizinhança  $V$ , o fluxo  $\dot{x}(t)$  é topologicamente conjugado por  $h$  à sua linearização.*

O Teorema 0.17 nos permite concluir que, no caso de um ponto crítico hiperbólico, a situação é estruturalmente estável numa vizinhança desse ponto no sentido que a existência de uma conjugação topológica garante, qualitativamente, que a dinâmica do sistema original seja a mesma do sistema linearizado.

Assim sendo, quando  $x(\infty)$  é um ponto crítico não degenerado, qualquer linha de fluxo para a qual  $x(\infty)$  ocorre como um ponto de acumulação de fato converge a ele com velocidade exponencial.

Outra consequência da dinâmica original ser qualitativamente a mesma do sistema linearizado numa vizinhança de pontos críticos não degenerados é que eles são isolados. Assim sendo, a situação assintótica é bastante simples nos casos que não existem pontos críticos degenerados e  $F$  é limitada: todo o espaço é convertido pela dinâmica num conjunto discreto de pontos críticos de  $F$ . Se o espaço possui outros invariantes, é também importante entender como são as órbitas que saem de um conjunto invariante e chegam em outro para descrever a dinâmica assintótica.

**Definição 0.18.** Seja  $f : M \rightarrow M$  um mapa continuamente diferenciável em uma variedade diferenciável com um ponto fixo  $y_0 \in M$ . Dizemos que  $y_0$  é um **ponto hiperbólico** se a derivada de  $f$  em  $y_0$ , i.e., o mapa linear

$$Df(y_0) : T_{y_0}M \rightarrow T_{y_0}M$$

no espaço tangente a  $M$  em  $y_0$  é um **mapa linear hiperbólico**.

Analogamente, se  $y_0 \in M$  é um ponto periódico de período  $n$ , i.e.,  $f^n(y_0) = y_0$ , dizemos que  $y_0$  é um **ponto periódico hiperbólico** para  $f$  se  $Df^n(y_0) : T_{y_0}M \rightarrow T_{y_0}M$  é um **mapa linear hiperbólico**.

Uma **órbita (periódica)** é chamada de **(periódica) hiperbólica** se todos os seus pontos são hiperbólicos.

Observe que  $y_0$  é ponto periódico hiperbólico de período  $n$  se, e somente se, é um ponto fixo hiperbólico de  $f^n$ .

**Definição 0.19.** Seja  $f^t : M \rightarrow M$  um fluxo diferenciável com  $t \in \mathbb{T}$  em uma variedade diferenciável  $M$  com uma **órbita periódica**  $\Gamma$  e seja  $y_0 \in \Gamma$  um ponto dessa órbita.

Se  $y_0$  é um **ponto fixo**, ele é chamado de **hiperbólico** se  $Df^t(y_0) : T_{y_0}M \rightarrow T_{y_0}M$  é um **mapa hiperbólico** para todo  $t \neq 0$ .

Se  $y_0$  não é ponto fixo mas sim **ponto periódico** de período  $T > 0$ , ele é chamado de **ponto periódico hiperbólico** se  $Df^T : T_{y_0}M \rightarrow T_{y_0}M$  tem 1 como autovalor simples e não mais autovalores de valor absoluto 1.

A órbita  $\Gamma$  é chamada de **órbita hiperbólica** se todos os pontos são hiperbólicos.

Temos o análogo do Teorema 0.17 agora para o contexto de variedades:

**Teorema 0.20** (Hartman-Grobman para Fluxos em Variedades). *Seja  $p \in M$  um ponto fixo hiperbólico do mapa  $f : M \rightarrow M$  continuamente diferenciável. Então existem vizinhanças  $U_1, U_2$  de  $p$  em  $M$  e também vizinhanças  $V_1, V_2$  de 0 em  $T_pM$  e um homeomorfismo*

$$h : U_1 \cup U_2 \rightarrow V_1 \cup V_2$$

tais que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{f} & U_2 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ V_1 & \xrightarrow{Df(p)} & V_2 \end{array}$$

Agora vamos formalizar a noção de estruturalmente estável como discutimos durante toda esta seção. Para tanto, vamos precisar definir a seguinte topologia num espaço de funções:

**Definição 0.21.** Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos e  $C^l(X, Y)$  o espaço de funções de classe  $C^l$  de  $X$  em  $Y$ , tomando os conjuntos

$$A(K, U) := \{f \in C^l(X, Y) | f(K) \subset U\}$$

em que  $K \subset X$  é compacto e  $U \subset Y$  é aberto como sub-base da topologia. Esta topologia assim definida é chamada de  **$C^l$ -topologia**.

**Definição 0.22.** Sejam  $1 \leq l \leq k \leq \infty$  fixados. Então um mapa de classe  $C^k$  escrito por  $f : M \rightarrow M$ , em que  $M$  é uma variedade diferenciável, é dito ser **estruturalmente estável** se  $f$  possui alguma vizinhança  $\mathcal{U}$  na  $C^l$ -topologia com a propriedade que cada  $g \in \mathcal{U}$  é topologicamente conjugado a  $f$ .

A essência da ideia de estabilidade estrutural é que pequenas variações dos parâmetros que definem o sistema dinâmico podem ser compensadas por uma transformação contínua das variáveis

do sistema, i.e., perturbações dos seus parâmetros não produzem comportamentos qualitativamente diferentes. Em particular, a dinâmica não se afeta com pequenos erros de arredondamento ou ruídos.

Na contramão desse conceito, temos a ideia de bifurcação em que mudanças nos parâmetros do sistema dão origem a novos comportamentos qualitativos. É o que acontece no Exemplo 0.11.

Por fim, o próximo teorema une a noção de estruturalmente estável e de pontos hiperbólicos que discutimos até aqui.

**Teorema 0.23.** *Seja  $p$  um ponto fixo do mapa de classe  $C^1$  escrito por  $f : M \rightarrow M$  em que  $M$  é uma variedade diferenciável. Suponha que  $Df(p) : T_p M \rightarrow T_p M$  tem posto maximal. Então  $f$  é estruturalmente estável em alguma vizinhança de  $p$  se, e somente se,  $p$  é ponto hiperbólico.*

## 2.2 Variedades Estáveis, Instáveis e Centrais

Das discussões que fizemos na Seção 2.1, é razoável sugerir que, para o sistema linearizado ao redor de um ponto crítico, existam direções tais que o ponto crítico é estável e outras direções para as quais ele é instável. Para enunciar o teorema que formaliza essa intuição, comecemos com a seguinte definição:

**Definição 0.24.** *Seja  $f : U \rightarrow M$  um mapa  $C^1$  em que  $M$  é uma variedade diferenciável e  $U$  é uma vizinhança aberta de  $y_0 \in M$ , sendo  $y_0$  um ponto fixo hiperbólico, i.e.,  $f(y_0) = y_0$  e  $Df(y_0)$  não possui autovalores de valor absoluto 1. Vamos considerar o fluxo dado pelas iteradas de  $f$ .*

Definimos o conjunto  $M^s(y_0)$  como os pontos  $x \in U$  tais que  $f^n x \in U$  para todo  $n$  e

$$f^n x \rightarrow y_0 \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (7)$$

e o conjunto  $M^u(y_0)$  como o conjunto dos pontos  $x$  tais que existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U$  com  $f(x_n) = x_{n-1}$  para  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$x_n \rightarrow y_0 \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (8)$$

Como  $y_0$  é um ponto hiperbólico, as condições impostas pelas Equações 7 e 8 podem ser omitidas desde que  $U$  seja escolhido suficientemente pequeno. A intuição por de trás dos conjuntos  $M^s(y_0)$  e  $M^u(y_0)$  é entender quais são os pontos da vizinhança de  $y_0$  que se aproximam deste ponto e quais se afastam, respectivamente.

Para cuidar também de pontos fixos não hiperbólicos, vamos formular os próximos teoremas sob uma condição mais geral, chamada de  **$\rho$ -pseudo-hiperbolicidade**. Nela, a linearização do mapa no ponto fixo  $y_0$  não tem nenhum autovalor com valor absoluto  $\rho$ .

**Teorema 0.25** (Hadamard-Perron sobre variedades estáveis e instáveis). *Seja  $U$  uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^d$  e  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$  com  $f(0) = 0$ .*

*Seja  $\rho > 0$ . Assuma que a derivada  $Df(0)$  não tenha nenhum autovalor de valor absoluto igual a  $\rho$ . Sejam  $V_\rho^s$  e  $V_\rho^u$  os subespaços de  $T_0 \mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d$  correspondentes aos autovalores de valor absoluto menor que  $\rho$  e maior que  $\rho$ , respectivamente, e seja  $A^{s,u} = Df(p)|_{V_\rho^{s,u}}$ .*

*Podemos encontrar uma norma  $\|\cdot\|$  em  $\mathbb{R}^d$  satisfazendo  $\|A^s\| < \rho$  e  $\|(A^u)^{-1}\| < \rho^{-1}$ .*

Para  $R > 0$ , definimos

$$U(R) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < R\}$$

$$U^{s,u}(R) := \{x \in V_\rho^{s,u} : \|x\| < R\}.$$

Se  $\rho \leq 1$ , então para  $R > 0$  suficientemente pequeno, a **variedade estável**

$$M^s(0) := \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}U(\rho^n R) = \{x_0 \in U(R) : f^n x_0 \in U(\rho^n R) \text{ para todo } n\}$$

é o gráfico de um mapa  $C^1$   $\varphi^s : U^s(R) \rightarrow U^u(R)$  com  $\varphi^s(0) = 0$  e  $D\varphi^s(0) = 0$

Se  $\rho \geq 1$ , então para  $R > 0$  suficientemente pequeno, a **variedade instável**

$$\begin{aligned} M^u(0) &:= \bigcap_{n \geq 0} f^n \bigcap_{v=0}^n f^{-v}U(\rho^{v-n}R) \\ &= \{x_0 \in \mathbb{R}^d : \text{existe uma sequência } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d \text{ com } fx_n = x_{n-1} \\ &\quad \text{e } x_n \in U(\rho^{-n}R) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

é o gráfico de um mapa  $C^1$

$$\varphi^u : U^u(R) \rightarrow U^s(R)$$

com  $\varphi^u(0) = 0$  e  $D\varphi^u(0) = 0$

Se  $f$  é de classe  $C^k$ , então também os são os mapas  $\varphi^{s,u}$ .

Ressaltamos que resultado anterior também pode ser generalizado para variedades diferenciáveis finito dimensionais, (Jost, 2006).

As variedades do Teorema 0.25 são unicamente determinadas. Isso não é mais verdade no seguinte teorema:

**Teorema 0.26** (Variedades centro estável e centro instável). *Vamos assumir as mesmas hipóteses do Teorema 0.25. No caso  $\rho \geq 1$ , para  $R > 0$  suficientemente pequeno, existe um mapa diferenciável*

$$\varphi^{0s} : U^s(R) \rightarrow U^u(R)$$

com

$$\varphi^{0s}(0) = 0 \text{ e } D\varphi^{0s}(0) = 0$$

cujos gráficos  $M^{0s}(0)$ , a **variedade centro estável**, é localmente invariante sob  $f$  no sentido

$$fM^{0s}(0) \cap U(r) \subset M^{0s}$$

$$f^{-1}M^{0s}(0) \cap U(R) \subset M^{0s}$$

Além disso,  $M^{0s}(0)$  é localmente atrator para  $f^{-1}$  no sentido de que para  $x_n \in \bigcap_{v=0}^n f^{-v}U(R)$ , a distância entre  $x_n$  e  $M^{0s}(0)$  converge a zero quando  $n \rightarrow \infty$ .

No caso  $\rho \leq 1$ , para  $R > 0$  suficientemente pequeno, existe um mapa diferenciável

$$\varphi^{0u} : U^u(R) \rightarrow U^s(R)$$

com

$$\varphi^{0u}(0) = 0 \text{ e } D\varphi^{0u}(0) = 0$$

cujos gráfico  $M^{0u}(0)$ , a **variedade centro instável**, é localmente invariante pra  $f$  no sentido que

$$fM^{0u}(0) \bigcup U(R) \subset M^{0u}(0)$$

Além do mais,  $M^{0u}(0)$  é localmente atrator para  $f$  no sentido de que para  $x \in \bigcap_{v=0}^n f^{-v}U(R)$ , a distância entre  $f^n x_n$  e  $M^{0u}(0)$  converge a zero quando  $n \rightarrow \infty$ .

Vale também que  $M^{0s}(0)$  contém a variedade estável  $M^s(0)$  e que  $M^{0u}(0)$  contém a variedade instável  $M^u(0)$ .

Para o caso  $\rho = 1$ , a variedade estável (instável) corresponde ao espaço gerado pelos autovetores cujos autovalores da linearização têm valor absoluto menor (maior) que 1; e a variedade centro estável (centro instável) dos que têm valor absoluto menor ou igual (maior ou igual) a 1.

A dinâmica na variedade estável contrai exponencialmente e na variedade instável expande exponencialmente. Assim sendo, as duas podem ser descritas de maneira simples já que ambas correspondem a comportamentos hiperbólicos e, ao menos localmente, a análise é trivial e já discutimos seus aspectos anteriormente.

Portanto, devemos nos concentrar em estudar os casos não triviais que ficam na interseção

$$M^0(0) := M^{0s}(0) \cap M^{0u}(0)$$

chamada de **variedade central**. Ela se refere ao subespaço de  $T^0\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d$  que é gerado pelos autovalores de  $Df(0)$  com valor absoluto 1.

Diferentemente das dinâmicas nas variedades estáveis e instáveis, neste caso é bastante difícil formular teoremas gerais já que o comportamento na variedade central é bastante particular de cada sistema. Numa escala de tempo suficientemente grande, são essas direções da variedade central que capturam os aspectos não triviais do processo dinâmico, já que as direções de expansão e de contração chegam ao equilíbrio numa velocidade exponencial.

Contudo, mesmo em situações em que o espaço de fase tem dimensão infinita, é frequente que a variedade central tenha dimensão finita. Isso significa que a dinâmica pode ser caracterizada completamente por apenas esses finitos graus de liberdade.

Vale observar ainda que os resultados anteriores também podem ser estendidos para sistemas dinâmicos a tempo contínuo.

## 2.3 Ferraduras de Smale

Além do mapa da tenda, um outro exemplo de sistema dinâmico discreto bastante interessante é a Ferradura de Smale. Ela será bastante usada como fonte de exemplos e contraexemplos no Capítulo 3.2.4. Para a sua construção, iremos nos basear especialmente na referência (Alligood; Sauer; Yorke, 1997). Ao leitor interessado, nessa referência aparecem também discussões sobre a propriedade caótica desse mapa.

O mapa da Ferradura de Smale  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um mapa injetivo definido da seguinte forma: considere um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$  dado pelo quadrado  $W = ABCD$  como na Figura 9. Primeiro, o mapa  $h$  contrai uniformemente na direção horizontal. Depois, ele expande uniformemente na direção vertical. Por fim, ele torce como uma ferradura. A contração e a expansão devem ser feitas sob o mesmo fator de intensidade. Fora de  $W$ , a única restrição é que  $h$  seja contínua e injetiva. O mapa  $h$  faz  $h(X) = X^*$  para  $X \in \{A, B, C, D\}$ .

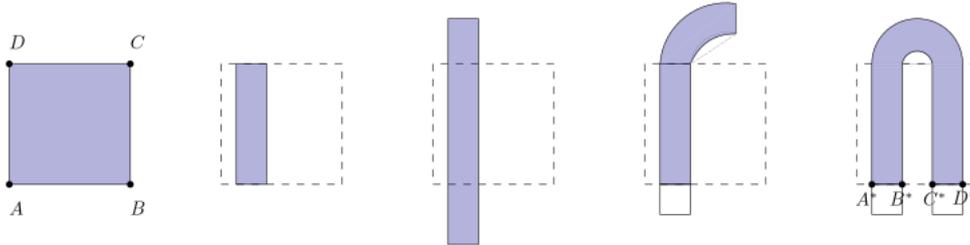


Figura 9: Exemplo de Ferradura de Smale

Estaremos interessados em estudar quais os pontos de  $W$  que permanecem invariantes em  $W$  sob essa dinâmica. Vamos denotar o conjunto desses pontos por  $\Lambda$ .

Note primeiro que os pontos que permanecem invariantes para iteradas positivas devem estar ou no bloco  $V_L$  ou no bloco  $V_R$  de  $W \cap h(W)$ , como mostra a Figura 10.

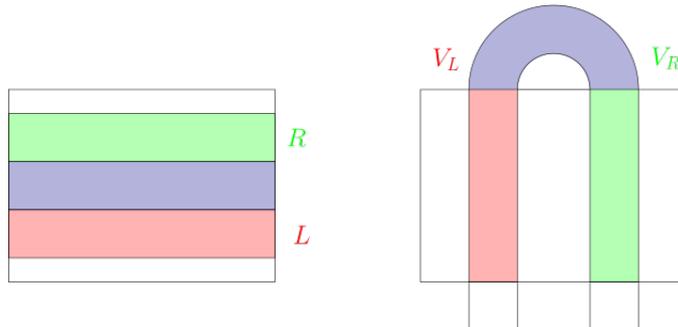


Figura 10: Mapa de tempo 1 da ferradura de Smale

Assim como fizemos no Exemplo 0.3, vamos associar à órbita para frente de cada ponto uma sequência  $\{L, R\}^{\mathbb{N}}$ . Dado um ponto  $x \in W$  que permanece invariante sob essa dinâmica, identificamos a órbita de  $x$  com a sequência  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq 1}$  de forma que  $S_n = L$  (respectivamente,  $S_n = R$ ) se, e somente se,  $h^n(x) \in V_L$  (respectivamente,  $h^n(x) \in V_R$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Os pontos de  $L$  ( $R$ ) são os pontos mapeados para  $V_L$  ( $V_R$ ) quando aplicamos a dinâmica descrita na Figura 9.

Vamos entender o que acontece quando aplicamos novamente o mapa  $h$ . Na Figura 11, temos que os pontos invariantes que estão em  $LL$  ou em  $RL$  são mapeados para  $V_L$ , enquanto que os pontos em  $RR$  e  $LR$  são levados a  $V_R$ .

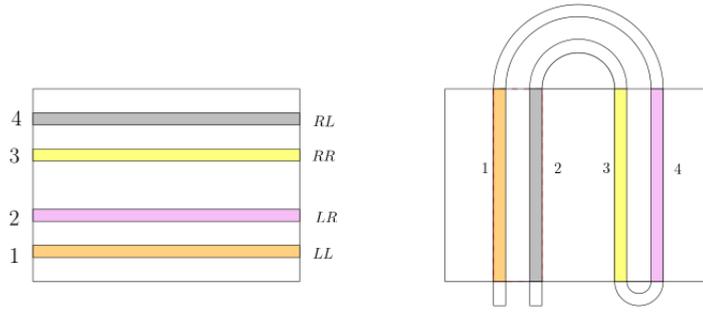


Figura 11: Mapa de tempo 2 da ferradura de Smale

Seguindo essa linha de raciocínio, estamos caracterizando o que acontece nas iterações positivas do mapa  $h$ . Repare que a coleção desses segmentos horizontais quando consideramos as iterações positivas do mapa  $h$  formam um conjunto de Cantor.

Contudo, para caracterizar unicamente os pontos do conjunto invariante, precisamos associar a eles também uma sequência que caracterize o comportamento quando consideramos as iterações negativas, i.e., quais são os pontos  $x \in \Lambda$  tais que  $h^{-1}(x) \in V_L$  ou  $h^{-1}(x) \in V_R$ ? Portanto, o que queremos é estender a sequência  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  para índices em  $\mathbb{Z}$ .

Primeiramente, vamos entender quais são os pontos de  $\Lambda$  que possuem suas pré-imagens  $h^{-1}$  em  $V_L$  e quais deles possuem pré-imagens em  $V_R$ ?

Se a inversa de um ponto  $x \in W$  ainda está em  $W$ ,  $x$  deve estar em  $V_L$  ou em  $V_R$ . Fazendo o procedimento inverso do que fizemos, temos que as pré-imagens de  $V_L$  e  $V_R$  são as linhas horizontais  $L$  e  $R$  como mostra a Figura 10. A Figura 12 mostra os pontos cujos termos  $S_{-1}S_0$  da sequência  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  são iguais a  $LL$ ,  $RL$ ,  $LR$  e  $RR$ .

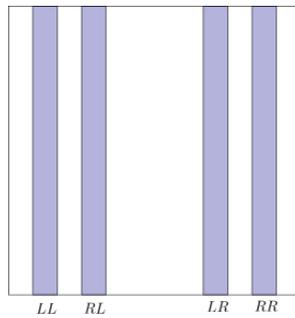


Figura 12: Iterações negativas do mapa da ferradura

Note então que os pontos cujas iterações negativas permanecem invariantes em  $W$  sob a dinâmica formam um conjunto de Cantor nos segmentos verticais.

Portanto, para especificar um ponto em  $\Lambda$  precisamos intersectar as linhas de Cantor horizontais (que caracterizam os pontos invariantes sob as iterações positivas) com as linhas verticais descritas acima. A interseção dos conjuntos de Cantor verticais e horizontais do primeiro passo desse raciocínio está retratada na Figura 13. No conjunto em vermelho estão os pontos de  $\Lambda$  cujas sequências associadas satisfazem  $S_0S_1$  é igual a  $LL$ ,  $RL$ ,  $LR$  ou  $RR$ .

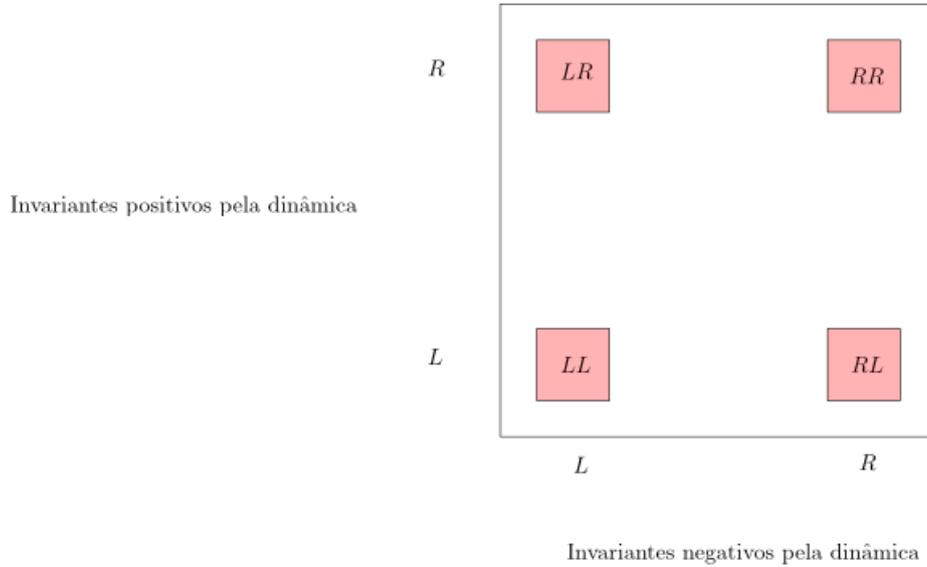


Figura 13: Invariantes positivo e negativos do mapa pela primeira iteração da Ferradura

### 3 Sistemas Dinâmicos Aleatórios

Em algumas situações, para realizar uma modelagem de um SD mais condizente com a realidade, podemos introduzir um fator de aleatoriedade no SD. Por exemplo, para o caso da dinâmica populacional, poderíamos imaginar que mudanças climáticas favoreçam uma espécie em detrimento de outra.

Assim, iremos introduzir um “ruído”, i.e., uma dependência de um fator aleatório num sistema dinâmico. A estratégia para isso é construir, primeiro, um sistema dinâmico  $\theta$  sobre um espaço de probabilidade. Esse sistema dinâmico será responsável pela fonte de aleatoriedade do sistema original. Depois de construído, iremos modificar o sistema dinâmico original para que ele dependa do SD  $\theta$ .

Para esta seção, nos basearemos principalmente nas referências (Liu, 2008) e (Arnold, 1995).

#### 3.1 Definições básicas e propriedades

Sejam  $(N, \mathcal{F}^N)$  um espaço mensurável e  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade. Dizemos que um mapa  $f : \Omega \rightarrow N$  é uma variável aleatória  $N$ -**valuada** se  $f$  é  $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^N)$ -mensurável.

Quando  $X$  é um espaço métrico podemos considerar este como um espaço mensurável se munimos este conjunto com a  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}(X)$ . Nesse caso, dizemos que  $X$  é **espaço métrico mensurável**.

**Definição 0.27.** Seja  $(X, d_X)$  um espaço métrico mensurável. Um **sistema dinâmico aleatório contínuo (SDA)**, denotado por  $\phi$ , consiste de:

1. Um **modelo de ruído**, i.e., um **sistema dinâmico métrico**  $\theta$  sobre um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  com fluxo  $(\theta_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , e tal que a função  $(t, \omega) \mapsto \theta_t \omega$  de  $\mathbb{T} \times \Omega$  em  $\Omega$  é mensurável e deixa  $\mathbb{P}$  invariante, ou seja,  $\theta_t \mathbb{P} = \mathbb{P}$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

2. Um **modelo de sistema perturbado pelo ruído**, i.e., um cociclo  $\phi$  sobre  $\theta$ . De maneira mais detalhada, o que temos é um mapa  $(\mathcal{B}(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(X), \mathcal{B}(X))$  mensurável

$$\phi : \mathbb{T} \times \Omega \times X \rightarrow X$$

$$(t, \omega, x) \mapsto \phi(t, \omega, x)$$

que satisfaz duas propriedades:

a) O mapa  $(t, \cdot, x) \mapsto \phi(t, \cdot, x)$  é contínuo para todo  $\omega \in \Omega$  (ou seja, eliminando o fator de aleatoriedade temos um SD contínuo);

b) (**Propriedade do cociclo positivo**) a família  $\phi(t, \omega, \cdot) = \phi(t, \omega) : X \rightarrow X$  de mapas aleatórios de  $X$  em  $X$  satisfaz a propriedade de cociclo positivo, ou seja:

$$\begin{aligned} \phi(0, \omega) &= \text{id}_X \\ \phi(t+s, \omega) &= \phi(t, \theta_s \omega) \circ \phi(s, \omega) \text{ quaisquer que sejam } t, s \in \mathbb{T} \text{ e } \omega \in \Omega \end{aligned}$$

Se  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  dizemos que o **SDA** é **discreto**.

A ideia intuitiva é que um SDA se move pelo conjunto  $\Omega \times X$  da seguinte maneira: quando  $\omega \in \Omega$  é mudado pelo SD  $\theta$  no tempo  $s$  para  $\theta_s \omega \in \Omega$ , o cociclo  $\phi(s, \omega)$  se move de  $x$  em  $\{\omega\} \times X$  para o ponto  $\phi(s, \omega)(x)$  em  $\{\theta_s \omega\} \times X$ . Note que, além de  $x$  ser levado para  $\phi(s, \omega)$ , também temos a atualização de  $\omega$  sendo levado para  $\theta_s \omega$ .

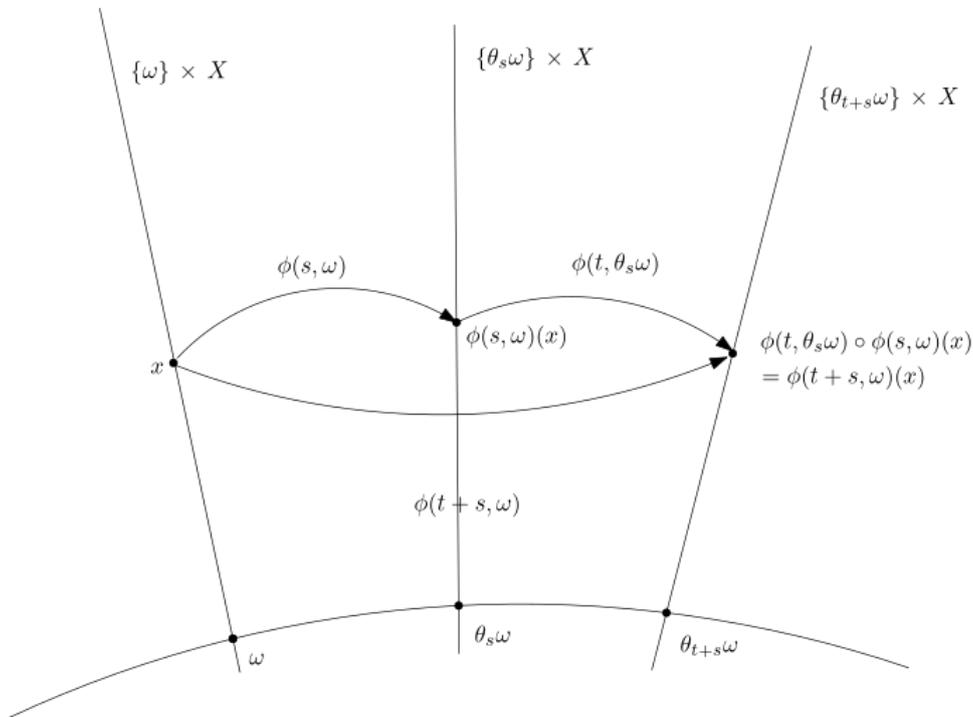


Figura 14: Representação de um SDA

Repare que, se o elemento de  $\Omega$  não fosse atualizado, o que teríamos seria uma dinâmica que

dependeria de um sorteio inicial mas, a partir daí, seguiria como um sistema dinâmico determinístico. Contudo, o que queremos é manter essa perturbação aleatória durante toda a evolução do sistema. Para tanto, devemos também atualizar o elemento de  $\Omega$ , e esta necessidade é atendida pelo SD métrico  $\theta$  que atualiza  $\omega$  para  $\theta_s\omega$ . Ou seja, o SD métrico  $\theta$  é tal que a cada tempo  $t$ , escolhe-se uma  $\theta_t$  para atualizar o evento  $\omega \in \Omega$  para o evento  $\theta_t\omega \in \Omega$ .

*Observação 0.28.* A continuidade atribuída à caracterização de um sistema dinâmico aleatório contínuo não está relacionada com o conjunto de índices temporais  $\mathbb{T}$ , mas sim com a característica de continuidade do mapa  $(t, x) \mapsto \phi(t, \omega, x)$  ser contínuo para todo  $\omega$ . Poderíamos definir de maneira análoga sistemas dinâmicos aleatórios  $C^k$  qualquer que seja  $k \in \mathbb{N}$  e sistemas dinâmicos lineares. Ao leitor interessado, estas definições estão estabelecidas em (Arnold, 1995, Pág. 6).

De maneira análoga à Observação 0.4, definiremos  $\theta := \theta_1$  para denotar o mapa de tempo 1 de  $\theta_n$  um mapa de um modelo de ruído  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{T}})$ .

Assim, dados quaisquer  $n$  e  $\omega$  fixados, e considerando a topologia em  $X$  induzida pela métrica, vale que  $\phi(n, \omega)$  tem inversa  $(\phi(n, \omega))^{-1} = \phi(-n, \theta_n\omega)$  já que, pela propriedade do cociclo,

$$\phi(n, \omega) \circ \phi(-n, \theta_n\omega) = \phi(-n + n, \omega) = \phi(0, \omega) = \text{id}_X$$

e também temos que

$$\phi(-n, \theta_n\omega) \circ \phi(n, \omega) = \text{id}_X$$

Logo,  $\phi(n, \omega) : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo.

Sendo  $\phi$  um SDA discreto e  $\varphi$  o mapa de tempo 1 de  $\phi$ , i.e.,  $\varphi(\omega) = \phi(1, \omega, \cdot) : X \rightarrow X$ , dizemos que  $\varphi$  é o **homeomorfismo aleatório determinado por  $\phi$** .

**Definição 0.29.** Dados um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e um espaço métrico  $X$ , um **homeomorfismo aleatório** é uma função de  $\Omega$  nos homeomorfismos de  $X$  nele mesmo, i.e.,  $\varphi(\omega) : X \rightarrow X$  é homeomorfismo para todo  $\omega \in \Omega$ .

*Observação 0.30.* Por outro lado, se já possuímos um homeomorfismo aleatório  $\varphi$ , podemos gerar um SDA em tempo discreto  $\varphi(n, \omega, x)$  fazendo

$$\phi(n, \omega) = \begin{cases} \varphi(\theta_{n-1}\omega) \circ \cdots \circ \varphi(\omega) & n > 0 \\ \text{id}_X & n = 0 \\ (\varphi(\theta_n\omega))^{-1} \circ \cdots \circ (\varphi(\theta_{-1}\omega))^{-1} & n < 0 \end{cases}$$

e é fácil ver que essa definição satisfaz as propriedades de SDA da Definição 0.27 quando  $\theta : \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow \Omega$  é um fluxo mensurável fixado.

*Observação 0.31.* (Arnold, 1995) Uma família de mapas  $\psi(t, \omega, \cdot) : X \rightarrow X$  que satisfaz todas as condições da Definição 0.27 exceto a da propriedade de ser um **cociclo positivo**, i.e.,  $\psi(t+s, \omega) = \psi(t, \theta_s\omega) \circ \psi(s, \omega)$  quaisquer que sejam  $t, s \in \mathbb{T}$  e  $\omega \in \Omega$ , mas satisfaz

$$\psi(t+s, \omega) = \psi(t, \omega) \circ \psi(s, \theta_t\omega) \text{ quaisquer que sejam } t, s \in \mathbb{T} \text{ e } \omega \in \Omega$$

é denominado de **cociclo negativo**. Como a composição  $\circ$  é uma ação à esquerda de  $X$ , cociclos negativo são de certa forma não naturais, dado que no primeiro passo aplicamos um mapa que

depende do segundo passo.

Porém, cociclos negativos ocorrem tipicamente como composições de cociclos. Por exemplo,  $\phi(t, \omega, \cdot) = \phi(t, \omega) : X \rightarrow X$  é cociclo sobre  $\theta$  como na Definição 0.27 se, e somente, se

$$\psi(t, \omega) := \phi(t, \omega)^{-1}$$

é um cociclo negativo sobre  $\theta$ , sendo  $\phi(t, \omega)^{-1}$  como vimos na Observação 0.28. Além disso, fazendo

$$\chi(t, \omega) := \psi(-t, \omega) = \phi(-t, \omega)^{-1} = \phi(t, \theta(-t)\omega)$$

temos que  $\chi$  é um cociclo negativo sobre  $\theta^{-1}$ .

As diferenças entre o cociclo positivo  $\phi$  como na Definição 0.27 e os cociclos negativo  $\psi$  e  $\chi$  discutidos acima aparecem na discussão do comportamento assintótico do sistema quando  $t \rightarrow \infty$ .

Tendo em mente a imagem da representação de um SDA, temos que  $\phi(t, \omega)$  mapeia  $x \in \{\omega\} \times X$  para  $\phi(t, \omega)(x) \in \{\theta_t \omega\} \times X$  no tempo  $t$ , enquanto que  $\psi(t, \omega)$  mapeia  $x \in \{\theta_t \omega\} \times X$  (que está se movendo com  $t$ ) para  $\psi(t, \omega)(x) \in \{\omega\} \times X$ , o conjunto fixado no tempo 0. Analogamente,  $\chi(t, \omega)$  mapeia  $x \in \{\theta(-t)\omega\} \times X$  para  $\chi(t, \omega)(x) \in \{\omega\} \times X$  no tempo 0.

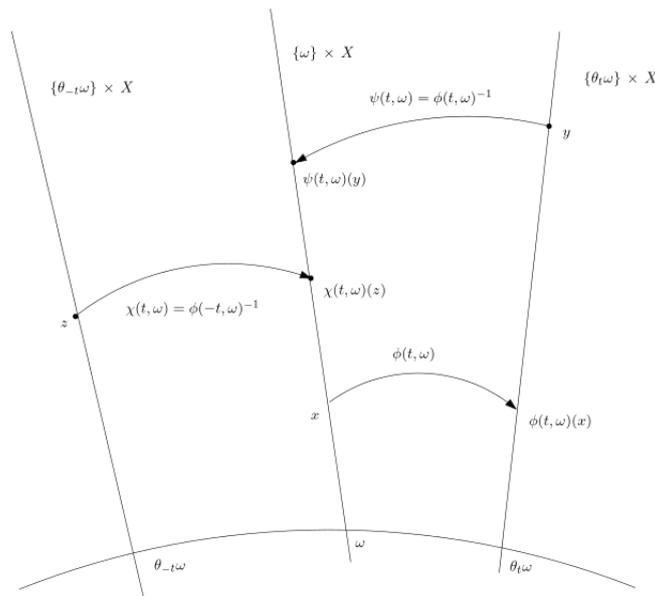


Figura 15: Representação de cociclos positivo e negativo num SDA

Assim sendo, temos uma grande diferença quando movemos os pontos de 0 até  $t$  ou de  $-t$  até 0; apenas no segundo caso podemos garantir que os pontos estarão no mesmo conjunto  $\{\omega\} \times X$  para todo  $t$  e assim podemos estudar este quando  $t \rightarrow \infty$ .

Como mencionado na Seção 1 sobre exigências do conjunto  $X$ , o que pediremos no que segue desta seção e no que diz respeito a SDA é que  $(X, d_X)$  seja um espaço métrico polonês<sup>2</sup> e localmente compacto, claramente considerando a topologia induzida pela métrica sobre  $X$ .

<sup>2</sup>Um espaço métrico é dito polonês se for separável e completo.

**Definição 0.32.** Sendo  $(X, d_X)$  um espaço métrico, definimos:

$$\text{dist}_X(x, B) := \inf_{y \in B} d_X(x, y)$$

e

$$\text{dist}_X(A, B) = \inf_{x \in A} \text{dist}_X(x, B)$$

sendo  $x \in X$  e  $A, B \subset X$ .

**Definição 0.33.** (Liu, 2008; Caraballo; Han, 2017) Seja  $(X, d_X)$  um espaço métrico. Um mapa de  $\Omega \rightarrow \mathcal{P}(X) := \{A | A \subset X\}$  é denominado de **multifunção** de  $\Omega$  em  $X$ .

A multifunção  $D : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$  em que  $\omega \mapsto D(\omega)$  toma valores em subconjuntos fechados (compactos) de  $X$  é dita um **conjunto aleatório fechado (compacto)** se o mapa  $\omega \mapsto \text{dist}_X(x, D(\omega))$  é mensurável para todo  $x \in X$ .

A multifunção  $U : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$  em que  $\omega \mapsto U(\omega)$  toma valores em abertos de  $X$  é dita um **conjunto aleatório aberto** se  $\omega \mapsto U^C(\omega)$  é um conjunto aleatório fechado.

Diremos que a multifunção  $D$  é um **conjunto aleatório** se o mapa  $\omega \mapsto \text{dist}_X(x, D(\omega))$  for mensurável para todo  $x \in X$ .

Por fim, dizemos que uma multifunção é **mensurável** se o mapa  $\omega \mapsto \text{dist}_X(x, D(\omega))$  é mensurável para qualquer  $x \in X$ .

Como é observado em (Crauel, 2002), para uma multifunção  $\omega \mapsto A(\omega)$  qualquer (não necessariamente aberta, fechada ou compacta), a mensurabilidade de  $\omega \mapsto d_X(x, A(\omega))$  (dado um  $x$  qualquer) é equivalente a  $\omega \mapsto \overline{A}(\omega)$  ser um conjunto aleatório fechado.

Os próximos exemplos de conjuntos aleatórios estão feitos em (Molchanov; Molchanov, 2005) e ilustram a Definição 0.33 de maneira bastante concreta.

**Exemplo 0.34.** Seja  $\xi$  uma variável aleatória real, vale que  $X = (-\infty, \xi]$  é um conjunto aleatório fechado na reta.

**Exemplo 0.35.** Se  $\xi_1, \xi_2$  e  $\xi_3$  são três variáveis aleatórias tomando valores em  $\mathbb{R}^d$ , o triângulo de vértices  $\xi_1, \xi_2$  e  $\xi_3$  é um conjunto aleatório fechado.

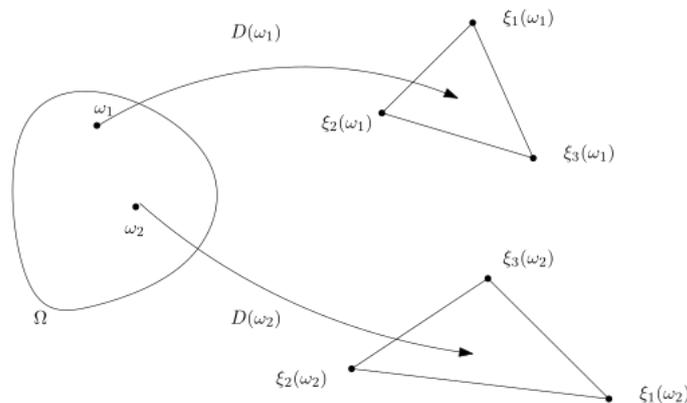


Figura 16: Triângulos como conjuntos aleatórios

**Exemplo 0.36.** Se  $\xi$  é uma variável aleatória em  $\mathbb{R}^d$  e  $\eta$  é uma variável aleatória não negativa, então a bola aleatória  $B_\eta(\xi)$  de raio  $\eta$  e centro em  $\xi$  é um conjunto aleatório fechado.

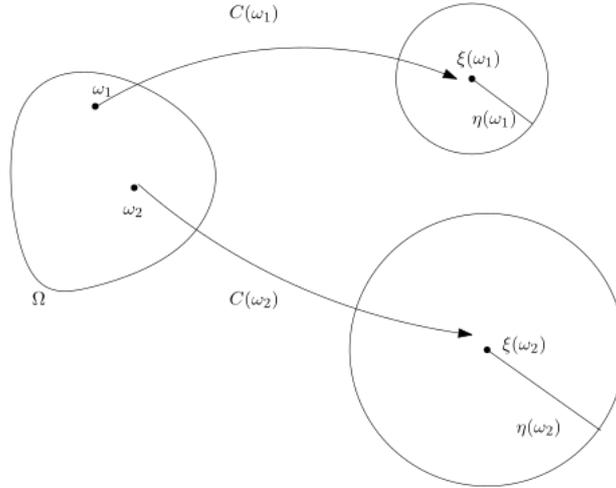


Figura 17: Bolas como conjuntos aleatórios

A próxima definição estabelece o análogo para o caso aleatório da Definição 0.5.

**Definição 0.37.** Um conjunto aleatório  $D$  é dito **invariante positivamente** sob a ação de um SDA  $\phi$  (com ruído  $\theta$ ) se  $\phi(t, \omega)D(\omega) \subset D(\theta_t \omega)$  para todo  $0 \leq t \in \mathbb{T}$  e  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega \in \Omega$ ; ele é dito **invariante negativamente** se  $\phi(t, \omega)D(\omega) \supset D(\theta_t \omega)$  para todo  $0 \leq t \in \mathbb{T}$  e  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega \in \Omega$ .

Por fim, dizemos que ele é **invariante** se  $\phi(t, \omega)D(\omega) = D(\theta_t \omega)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  e  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega \in \Omega$ .

Assim como (Liu, 2008), fazemos breves observações de algumas propriedades de conjuntos aleatórios. Resultados similares e estratégias de demonstrações podem ser encontrados nas referências (Crauel, 2002; Castaing; Valadier, 2006; Arnold, 1995).

**Proposição 0.38.** *Seja  $X$  um espaço métrico completo separável. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se  $D$  é um conjunto aleatório fechado, então também o é o fecho de  $D^C$ .*
2. *Se  $D$  é um conjunto aleatório aberto, então o fecho  $clD$  de  $D$  é um conjunto aleatório fechado.*
3. *Se  $D$  é um conjunto aleatório fechado, então o interior de  $D$   $intD$  é um conjunto aleatório aberto.*
4. *Se  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de conjuntos aleatórios fechados e existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $D_{n_0}$  é um conjunto aleatório compacto, então  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$  é um conjunto aleatório compacto.*
5. *Se  $f : \Omega \times X \rightarrow X$  é uma função tal que  $f(\omega, \cdot)$  é contínua para todo  $\omega$  e  $f(\cdot, x)$  é mensurável para todo  $x$ , então  $\omega \mapsto f(\omega, D(\omega))$  é um conjunto aleatório compacto desde que  $D$  seja um conjunto aleatório compacto.*

6. Se  $D$  é um conjunto aleatório fechado, então  $Gr(D) := \{(\omega, x) : x \in D(\omega)\}$  o gráfico de  $D$  é um subconjunto mensurável de  $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(X)$ ; por outro lado, dado que  $D : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$  tomando valores nos subconjuntos fechados de  $X$ , se  $Gr(D) \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(X)$ , então  $D$  é um conjunto aleatório fechado  $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ -mensurável (em que  $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$  denota o completamento da  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  com respeito a medida  $\mathbb{P}$ ), i.e., os mapas  $\omega \mapsto dist_X(x, D(\omega))$  são  $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ -mensuráveis para qualquer  $x \in X$ .

7. Se  $D$  é um conjunto aleatório fechado  $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$  mensurável, então existe um conjunto aleatório fechado  $\tilde{D}$  mensurável com respeito a  $\mathcal{F}$  tal que  $\tilde{D} = D$  quase certamente.

**Teorema 0.39** (Teorema da Seleção Mensurável). *Seja uma multifunção  $\omega \mapsto D(\omega)$  tomando valores na família de subconjuntos fechados não vazios de um espaço métrico polonês  $X$ . Então  $D$  é um conjunto aleatório fechado se, e somente se, existe uma sequência  $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$  de mapas mensuráveis  $v_n : \Omega \rightarrow X$  tal que*

$$v_n(\omega) \in D(\omega) \text{ e } D(\omega) = cl\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} v_n(\omega)\right) \text{ para todo } \omega \in \Omega$$

*Em particular, se  $D$  é um conjunto aleatório fechado existe uma seleção mensurável, i.e., um mapa mensurável  $v : \Omega \rightarrow X$  tal que  $v(\omega) \in D(\omega)$  para todo  $\omega \in \Omega$ .*

A ideia grosseira por detrás do Teorema da Seleção Mensurável é uma versão do Axioma da Escolha satisfazendo a condição de mensurabilidade.

**Proposição 0.40.** *Suponha que  $v$  é uma medida positiva no espaço mensurável  $(X, \mathcal{F})$ . Seja  $\overline{\mathcal{F}}^v$  o completamento da  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  com respeito a  $v$ . Se  $f$  é uma função  $\overline{\mathcal{F}}^v$  mensurável, então existe uma função  $\mathcal{F}$ -mensurável  $g$  tal que  $f = g$  quase certamente em relação a  $v$ .*

Podemos estabelecer um análogo da Definição 0.7 agora para o caso aleatório. Contudo, precisamos antes de uma definição.

**Definição 0.41.** Dados  $A, B \subset (X, d_X)$  dois subconjuntos de um espaço métrico, definimos a semi métrica de Hausdorff como

$$d(A|B) := \sup_{x \in A} dist_X(x, B)$$

**Definição 0.42.** Dados dois conjuntos aleatórios  $A$  e  $D$ , dizemos que  $A$  **atrai**  $D$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\phi(n, \theta_{-n}\omega)D(\theta_{-n}\omega)|A(\omega)) = 0 \text{ quase certamente}$$

Repare que  $\phi(n, \theta_{-n}\omega)D(\theta_{-n}\omega)$  está na fibra  $\{\omega\} \times X$ , qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ . O mesmo comportamento acontece com os sinais invertidos. É o que mostra a Figura 18.

Esta noção aparecerá inúmeras vezes no que segue do texto.

Essa atração é chamada de **atração pull-back**. Ela implica que a atração fraca, i.e., que a igualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\phi(n, \theta_n\omega)D(\theta_n\omega)|A(\omega)) = 0$$

é satisfeita em probabilidade, como é observado em (Scheutzwow, 2002), embora não garanta a mesma igualdade quase certamente.

Agora vamos definir o análogo da Definição 0.10.

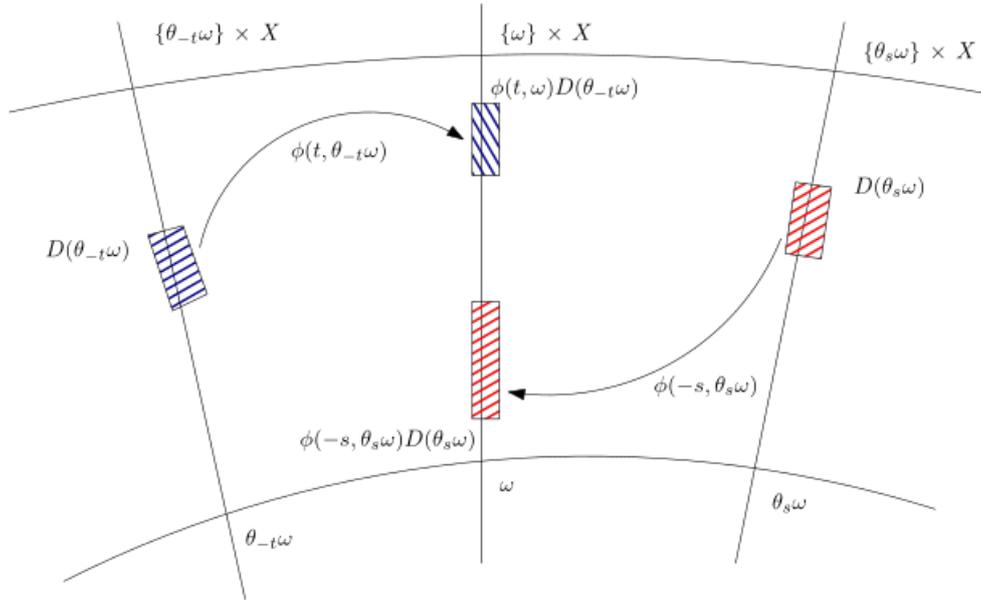


Figura 18: Contravariância nas entradas do SDA.

**Definição 0.43.** Dado um conjunto qualquer  $D$ , denotamos por  $\Omega_D$  o conjunto ômega-limite aleatório de  $D$ , que depende de  $\omega$ , e é definido por

$$\Omega_D(\omega) := \bigcap_{n \geq 0} \text{cl} \left( \bigcup_{k \geq n} \phi(k, \theta_{-k}\omega) D(\theta_{-k}\omega) \right)$$

Temos por trás da Definição 0.43 a ideia de limite superior do conjunto. Assim sendo, os elementos de  $\Omega_D(\omega) \subset X$  podem ser caracterizados como aqueles que aparecem para infinitos  $k \in \mathbb{N}$  no fecho de  $\phi(k, \theta_{-k}\omega) D(\theta_{-k}\omega)$ .

*Observação 0.44.* Pode-se mostrar que, se um conjunto aleatório não vazio  $D$  é atraído para um conjunto aleatório compacto  $A$ , então  $\Omega_D \neq \emptyset$  quase certamente e este é invariante.

**Lema 0.45.** *Sejam  $D_1$  e  $D_2$  dois conjuntos aleatórios. Então vale que*

$$\Omega_{D_1 \cup D_2}(\omega) = \Omega_{D_1}(\omega) \cup \Omega_{D_2}(\omega), \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

para todo  $\omega \in \Omega$ .

*Demonstração.* Pela definição de conjunto ômega limite, temos

$$\Omega_{D_1}(\omega) \cup \Omega_{D_2}(\omega) \subset \Omega_{D_1 \cup D_2}(\omega)$$

então precisamos mostrar apenas a inclusão contrária. Para tanto, dado um  $x \in \Omega_{D_1 \cup D_2}(\omega)$ , existe uma sequência  $t_n \rightarrow \infty$  e  $x_n \in D_1(\theta_{-t_n}\omega) \cup D_2(\theta_{-t_n}\omega)$  tal que

$$\phi(t_n, \theta_{-t_n}\omega)(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

para SDA discretos,  $t_n$  são inteiros. Portanto, existe uma subsequência tal que

$$x_{n_k} \in D_1(\theta_{t_{n_k}}\omega), \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ ou } x_{n_k} \in D_2(\theta_{t_{n_k}}\omega), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e  $\phi(t_{nk}, \theta_{-t_{nk}} \omega) x_{nk} \rightarrow x$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Portanto,  $\Omega_{D_1 \cup D_2} \subset \Omega_{D_1} \cup \Omega_{D_2}$ .  $\square$

As métricas apresentadas acima serviriam apenas para estabelecermos uma topologia em  $X$ . Porém, podemos também definir uma topologia sobre o espaço de variáveis aleatórias  $\mathbb{R}$ -valuadas não negativas, que será bastante útil no Capítulo 2.3.

**Definição 0.46.** Seja  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$  o espaço de variáveis aleatórias não negativas e  $|\cdot|$  a métrica usual de  $\mathbb{R}$ .

- Dados  $x, y \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ , a **métrica aleatória**  $d_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}}(x, y)$  em  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$  entre  $x$  e  $y$  é a variável aleatória  $\omega \mapsto |x(\omega) - y(\omega)|$ . Assim sendo,  $(\mathcal{M}_{\mathbb{R}}, d_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}})$  é um **espaço métrico aleatório**.
- Um conjunto aleatório  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$  é chamado de  **$C^0$ -vizinhança aleatória** de  $x \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$  se existe uma variável aleatória  $r > 0$  tal que  $B_r(x) = \{z \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}} | d_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}}(x, z) < r \text{ } \mathbb{P}\text{-q.c}\} \subset \mathcal{N}$ .
- O par  $(\mathcal{M}_{\mathbb{R}}, \tau_{\mathbb{R}})$  é chamada de **topologia  $C^0$  aleatória** se a topologia  $\tau_{\mathbb{R}}$  em  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$  é a induzida pelas  $C^0$ -vizinhanças aleatórias.

## 3.2 Exemplos

A Subseção 3.2.1, introduzimos um SDA sobre um espaço de fase finito e estudamos sua correspondências com cadeias de Markov a tempo discreto.

Na Subseção 3.2.2, estudaremos o ruído real, que é base fundamental para a construção dos outros exemplos de SDA que seguem. Ele está intimamente relacionado com o SD métrico  $\theta$  que aparece na Definição 0.27, que estabelece o que são SDA.

A Subseção 3.2.3 generaliza as ideias de SD oriundos de EDO's, agora fazendo SDA oriundos de Equações Diferenciais Aleatórias (EDA). A ideia central é perturbar EDO's por um ruído real.

Por fim, na Subseção 3.2.4 iremos estudar o ruído branco, que é uma perturbação aleatória com um processo estocástico subjacente. Ou seja, diferentemente do caso de SDA oriundos de EDA's, introduziremos agora um ruído cuja premissa não vêm exatamente de um ruído real, mas, mais do que isto, vem de uma sequência de variáveis aleatórias cujas distribuições são bastante conhecidas. Para tanto, nos basearemos especialmente nas referências (Caraballo; Han, 2017; Arnold, 1995).

### 3.2.1 Mapas Aleatórios

Uma outra maneira de construir um sistema dinâmico aleatório, talvez até um pouco mais intuitiva, é considerar um sorteio de mapas a serem aplicados sobre o espaço. Ou seja, queremos escolher a cada instante uma função do estado de espaço nele mesmo. Vamos nos basear pelo trabalho desenvolvido em (Ye, 2018).

Dado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , vamos construir um SDA sobre um espaço de fase  $\mathcal{L}$  finito. Assim sendo, sem perda de generalidade, podemos colocar  $\mathcal{L} = \{1, \dots, n\}$ . Queremos então escolher mapas  $\alpha : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ , entendidos como as dinâmicas admissíveis sobre este espaço de fase, de maneira que eles sejam aplicados dependendo de um sorteio. Para tanto, seja  $\mathbf{L}$  uma família qualquer de mapas de  $\mathcal{L}$  em  $\mathcal{L}$  (portanto  $|\mathbf{L}| \leq n^n$ ) e seja  $\mathbb{Q}$  uma medida de probabilidade na  $\sigma$ -álgebra de  $\mathbf{L}$ .

Vamos construir um SDA a tempo discreto sobre  $\mathcal{L}$ . A ideia do que esse sistema representa é a seguinte dinâmica: digamos que o sistema comece em algum espaço  $i_0 \in \mathcal{L}$ ; a partir daí, um mapa  $\alpha_1 \in \mathbf{L}$  é escolhido com probabilidade dada por  $\mathbb{Q}$  e o sistema se move para um estado  $i_1 = \alpha_1(i_0)$ ; de novo, de maneira independente, um mapa  $\alpha_2$  é escolhido de acordo com  $\mathbb{Q}$  e o sistema se move para um estado  $i_2 = \alpha_2(i_1) = (\alpha_2 \circ \alpha_1)(i_0)$ ; e assim por diante. É o que mostra a seguinte figura:

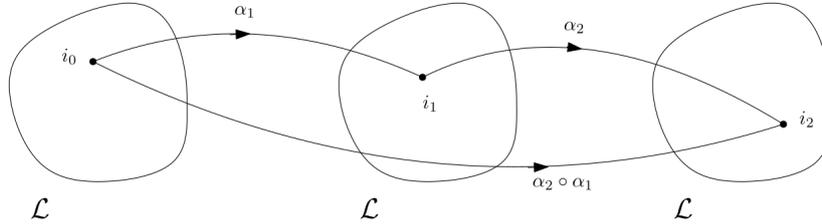


Figura 19: Representação de um mapa aleatório

O estado inicial  $i_0 \in \mathcal{L}$  pode ser fixado ou escolhido através de uma variável aleatória avaliada em  $\mathcal{L}$  independente de todos os mapas em  $\mathbf{L}$ . Construímos então um processo estocástico  $X_t$  a tempo discreto em que  $X_t = \alpha_{t-1} \circ \dots \circ \alpha_0(i_0)$  qualquer que seja  $t \in \mathbb{N}$ .

Para construir o SDA, o espaço  $\Omega$  a ser considerado é o full-shift  $\Omega = \mathbf{L}^{\mathbb{Z}}$  que é o conjunto de todas as sequências infinitas nos dois lados em que cada termo é uma dinâmica admissível, i.e.,

$$\Omega = \{\omega : (\dots, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_1, \dots) : \alpha_k \in \mathbf{L} \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}\}$$

A medida de probabilidade colocada sobre  $\Omega$  é a medida de Bernoulli definida nos cilindros

$$\mathbb{P}([\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k]) = \mathbb{Q}(\alpha_0)\mathbb{Q}(\alpha_1) \dots \mathbb{Q}(\alpha_k)$$

Note que o modo como esta medida é construída nos garante que em cada passo o mapa seja escolhido de maneira independente do passo anterior, e com a mesma distribuição de  $\mathbb{Q}$ .

Já os mapas  $\theta_t$  são shifts para a esquerda por  $t$  elementos, i.e.,  $\theta_t \omega = \alpha_t$ . Definindo o mapa de tempo 1 do SDA  $\phi(1, \omega) = \alpha_0$ , temos que o mapa  $\phi(t, \omega)$  é a composição dos mapas aleatórios independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.)  $\alpha_{t-1} \circ \dots \circ \alpha_0$ . Aplicado num estado inicial  $i \in \mathcal{L}$ , temos um processo estocástico  $X_t(\omega) = \phi(t, \omega)i$ , que claramente é uma cadeia de Markov com probabilidade de transição dada por

$$P(i, j) = \mathbb{Q}(\alpha : \alpha(i) = j) \tag{9}$$

para qualquer  $i \in \mathcal{L}$ .

No contexto de dinâmica estocástica, quando apenas uma trajetória é simulada não há diferença entre um SDA como descrito acima e a cadeia de Markov com matriz de transição dada pela Equação 9. Ou seja, o movimento de um ponto do SDA é uma cadeia de Markov. Contudo, quando estudamos a evolução pelo SDA em questão de dois pontos diferentes, este processo deixa de ser uma cadeia de Markov, já que as sequências  $\{X_t\}$  não são mais independentes. Dessa forma, podemos ver este processo como uma generalização do processo Markoviano.

A seguinte figura mostra três simulações em que consideramos  $\mathcal{L} = \{-3, \dots, 0, \dots, 3\}$  e  $\mathbf{L}$  o conjunto de todas as funções de  $\mathcal{L}$  em  $\mathcal{L}$  equipado com a distribuição uniforme. O eixo das

abscissas representa o tempo do processo e o eixo das ordenadas o estado em  $\mathcal{L}$ .

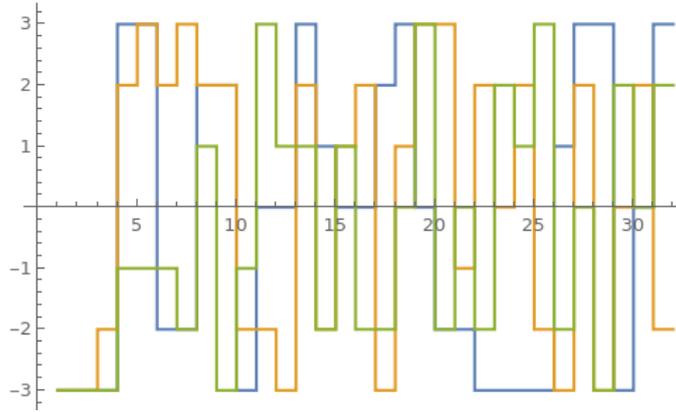


Figura 20: Evoluções de mapas aleatórios em  $\mathcal{L} = \{-3, \dots, 0, \dots, 3\}$

### 3.2.2 Ruídos reais

Considere um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  com um SD métrico  $\theta$  sobre ele tal que  $\theta_t \mathbb{P} = \mathbb{P}$  com  $t \in \mathbb{T}$ . Sendo  $X$  um espaço métrico, vamos considerar um conjunto aleatório  $D$  tal que  $D : \Omega \rightarrow X$ .

**Definição 0.47.** Dizemos que um **ruído real** é um mapa de  $\mathbb{R} \times \Omega$  em  $X$  dado pela composição de um conjunto aleatório  $D$  num SD métrico  $\theta$ , i.e.,  $D(\theta_t \omega)$  com  $t \in \mathbb{T}$  tal que ele é contínuo fixado um  $\omega \in \Omega$  e limitado para todo  $(t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega$ .

A noção de aleatoriedade por caminho surge da seguinte interpretação: o SD métrico  $\theta$  pode ser considerado como um caminho pelo espaço  $\Omega$ . Assim, para cada escolha de  $\omega \in \Omega$  temos uma trajetória dada por  $\mathfrak{C} := \{\theta_t \omega : t \in \mathbb{T}\}$ .

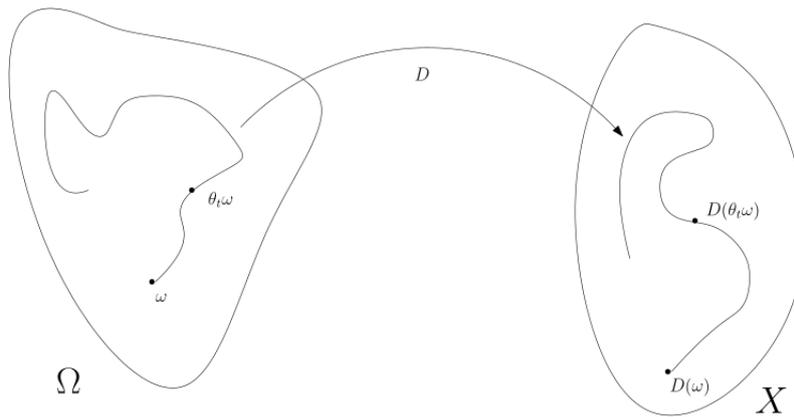


Figura 21: Ruído real

$$\mathbb{R} \times \Omega \xrightarrow{\theta_t \omega} \Omega \xrightarrow{D} X \quad (10)$$

$(t, \omega^*) \mapsto x(t)$

Quando fixamos um  $\omega^* \in \Omega$ , a composição  $(t, \omega^*) \mapsto x = x(t)$  é um mapa da reta na reta e, portanto, faz sentido a propriedade de continuidade.

A necessidade de pedir que  $\theta$  preserve a medida é motivada pela intuição de manter um sorteio que, a cada momento  $t$ , tenha a mesma distribuição de probabilidade do instante inicial. Assim sendo, conforme o tempo passa, a medida de qualquer região de  $\Omega$  se mantém igual.

Vamos apresentar dois exemplos de ruídos reais construídos computacionalmente.

No primeiro, o nosso espaço  $\Omega$  será o subconjunto  $[-1, 1]$  da reta e considere  $c$  e  $\epsilon > 0$  duas constantes reais fixadas. A função  $\theta_t$  em cada momento  $t$  é tal que  $\theta_t(\omega)$  para  $\omega \in [-1, 1]$  é a parte racional de  $\omega + c$ ; já o mapa aleatório  $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $D(\omega) = \epsilon\omega$  qualquer que seja  $\omega \in \Omega$ .

Na simulação mostrada na Figura 22 abaixo, plotamos o ruído descrito acima entre 0 e 3 para 5 diferentes escolhas de  $\omega \in \Omega$  iniciais escolhendo  $c = \frac{\pi}{5}$  e  $\epsilon = 1$ . A estratégia é particionar o intervalo aonde desejamos construir o ruído em  $n$  pedaços, iterar a função  $\theta$   $n$  vezes e interpolar o resultado obtido pelas iterações.

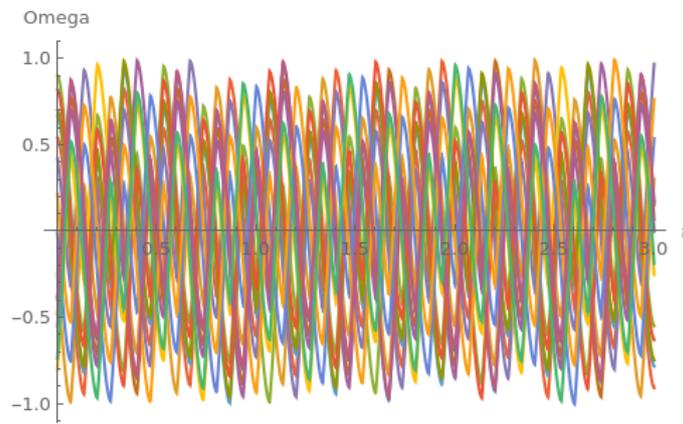


Figura 22: Ruído real tomando valores em  $\Omega = [-1, 1]$  com  $t \in [0, 3]$

Fixado  $n \in \mathbb{N}$ , vamos construir um ruído real que será um polinômio aleatório. Para tanto, considere  $\Omega = [-1, 1]^n$ , i.e., o produto de  $n$  cópias de  $[-1, 1]$ . Equipando  $\Omega$  com a medida de probabilidade uniforme e usando a medida produto, temos uma medida de probabilidade que segue a distribuição uniforme em  $[-1, 1]^n$ .

Seja  $\theta_t(\omega) = \omega$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , para todo  $\omega \in \Omega$ , i.e.,  $\theta_t$  é a função identidade para qualquer  $t \in \mathbb{T}$ . Sendo  $X$  o espaço dos polinômios de grau  $n$  da reta na reta, considere  $D : \Omega \rightarrow X$  dada por

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \omega_i x^i$$

Essa composição determina um ruído real já que  $\mathbb{P}\theta_t = \mathbb{P}$  claramente. A Figura 23 mostra 20 polinômios aleatórios de grau 5 gerados por esse método.

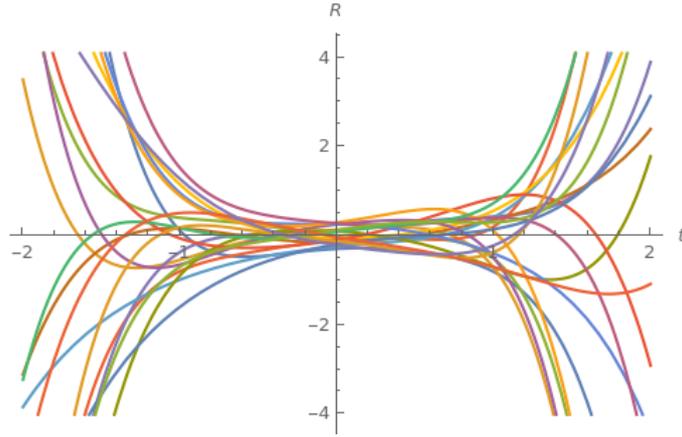


Figura 23: Polinômios aleatórios

### 3.2.3 Equações Diferenciais Aleatórias

De maneira análoga ao clássico exemplo feito na Seção 2 sobre sistemas dinâmicos oriundos de soluções de EDO's da forma  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ , podemos considerar o seguinte problema: uma perturbação sobre  $\dot{x}(t)$ , i.e., faça

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + w(x, t)$$

sendo  $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função qualquer. Repare que este sistema ainda é uma EDO.

Contudo, uma pergunta mais paradigmática a se fazer seria: o que aconteceria se a função  $w$  fosse aleatória? Isto é, o que aconteceria com a evolução do fluxo se a perturbação feita tivesse origem probabilística ao invés de ser totalmente determinada por uma função  $w$  de parâmetros reais?

**Exemplo 0.48.** Seguindo a referência (Arnold, 1995), considere  $\theta$  um SD métrico como na Definição 0.27. Vamos estabelecer uma correspondência um para um entre SDA  $\phi$  sobre  $\theta$  que são absolutamente contínuos com respeito a  $t$  e **equações diferenciais aleatórias (EDA)**.

$$\dot{x}(t) = f(\theta_t \omega, x(t))$$

desviadas por  $\theta$ . A correspondência é dada por

$$\phi(t, \omega)x = x + \int_0^t f(\theta_s \omega, \phi(s, \omega)(x(s))) ds \tag{11}$$

que é válida no caso local para todo  $t \in D(\omega, x)$  um intervalo aberto de  $\mathbb{T}$  contendo 0, e no caso global para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Se a equação 11 é válida, dizemos que

$$t \mapsto \phi(t, \omega, \cdot) : X \rightarrow X$$

**resolve** ou é uma **solução da equação diferencial aleatória (EDA)**  $\dot{x}(t) = f(\theta_t \omega, x(t))$  (às vezes chamada de solução no sentido de Carathéodory), ou ainda que a **EDA gera  $\phi$** .

Note ainda que a Equação 11 implica que  $\phi(0, \omega)x = x$  para todo  $\omega \in \Omega$ .

Se a solução é diferenciável com respeito a  $t$  e satisfaz para  $t \in D(\omega, x)$

$$\frac{d}{dt}\phi(t, \omega)x = f(\theta_t\omega, \phi(t, \omega)x), \quad \phi(0, \omega)x = x$$

ela é chamada de solução clássica de  $\dot{x}(t) = f(\theta_t\omega, x(t))$ . Soluções não clássicas são interessantes pois nos permitem estudar o caso de ruídos descontínuos.

Vamos enunciar agora o Teorema de Existência e Unicidade para o caso de Equações Diferenciais Aleatórias. As definições que caracterizam propriedades sobre o espaço de funções podem ser encontradas no Apêndice 5.

**Teorema 0.49** (Teorema de Existência e Unicidade para solução de EDA's). *Seja  $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma função mensurável, e considere a EDA*

$$\dot{x}(t) = f(\theta_t\omega, x(t)) \tag{12}$$

e, dado um  $\omega \in \Omega$  fixado, faça  $f_\omega(t, x) := f(\theta_t\omega, x)$ . Segue que:

1. Se  $f_\omega \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}, C_b^{k,0})$  para todo  $\omega$  e para algum  $k \geq 1$ , então 12 gera unicamente um SDA  $C^k$   $\phi$  sobre  $\theta$ .
2. Se  $f_\omega \in C_b^{0;k,0}$  para todo  $\omega$  e para algum  $k \geq 1$  então o SDA  $C^k$  de (1) é uma solução clássica de 12.

A demonstração do Teorema 0.49 é análoga a do caso determinístico.

Sobre os exemplos de ruídos reais construídos na Subsecção 3.2.2, apresentaremos sistemas de EDO's perturbados por esses ruídos.

Usando o ruído real construído sobre  $\Omega = [-1, 1]$ , vamos buscar a solução da equação

$$\dot{x}(t) = \sin(x) + D(\theta_t\omega)$$

na reta. A seguinte figura mostra a expressão  $\sin(x) + D(\theta_t\omega)$  com  $t \in [0, 3]$  para 15 valores iniciais de  $\omega \in \Omega$ .

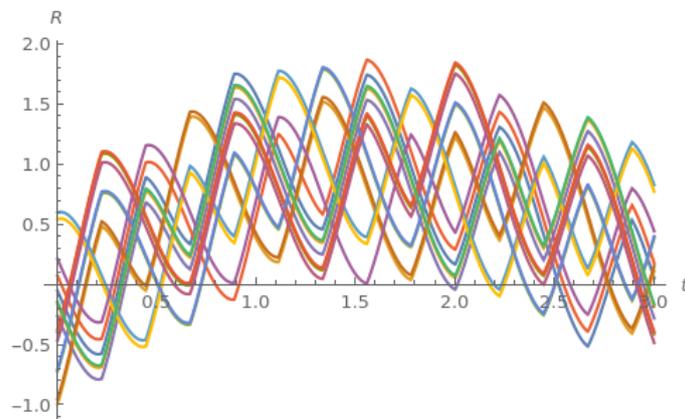


Figura 24: Equação diferencial aleatória  $\dot{x}(t) = \sin(x) + D(\theta_t\omega)$

O plot da solução numérica dessa equação diferencial aleatória está mostrado na figura abaixo.

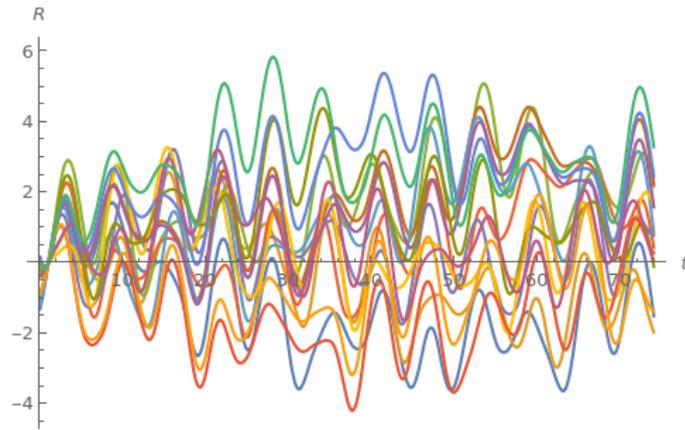


Figura 25: Solução numérica de  $\dot{x}(t) = \sin(x) + D(\theta_t, \omega)$

Agora vamos perturbar  $\sin(x)$  com um polinômio aleatório de grau  $n$ . Na simulação, escolhemos  $n = 5$ . Plotamos a expressão  $\sin(x) + \mathcal{P}(x)$ , em que  $\mathcal{P}(x)$  é o polinômio aleatório descrito pelo ruído real, para 20 polinômios diferentes com  $t \in [-2, 2]$ .

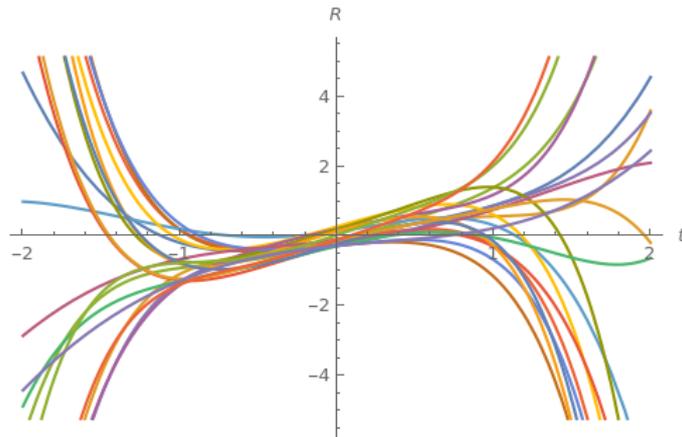


Figura 26: Plot de  $\sin(x) + \mathcal{P}(x)$

A solução de  $\dot{x}(t) = \sin(x) + \mathcal{P}(x)$  na reta para diferentes polinômios aleatórios é mostrada pela figura abaixo.

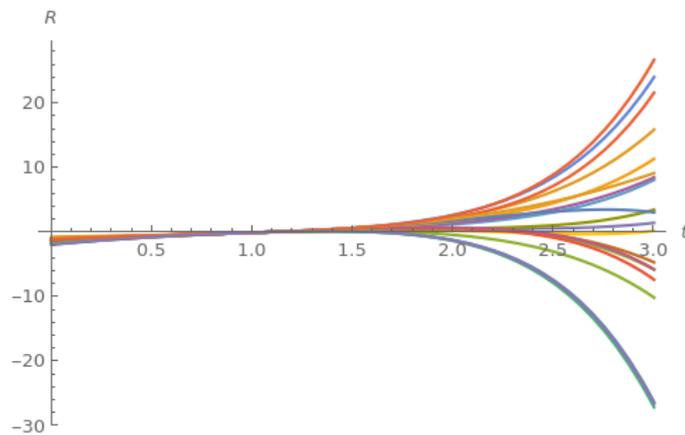


Figura 27: Solução de  $\dot{x}(t) = \sin(x) + \mathcal{P}(x)$  na reta

### 3.2.4 Equações Diferenciais Estocásticas

Discutimos anteriormente na Subseção 3.2.3 equações diferenciais aleatórias que, a grosso modo, consistiam de equações diferenciais perturbadas por um SD sobre um espaço de probabilidade. Agora queremos perturbar sistemas de equações diferenciais não mais por um ruído real, mas sim por um processo estocástico. Embora esta construção possa ser feita para processos estocásticos mais gerais, estaremos interessados em estudar equações diferenciais perturbadas pelo o que chamamos de ruído branco.

Para construir o ruído branco, primeiramente vamos seguir a construção do movimento Browniano (também chamado de processo de Wiener) feita por (Jost, 2006) e por (Durrett, Richard, 1996).

**Definição 0.50.** Um **processo de Wiener** unidimensional ou **movimento Browniano** é um processo estocástico  $\{W(t) = W_t\}_{t \geq 0}$  indexado por reais não negativos com as seguintes propriedades:

1.  $W(0) = 0$ ;
2. Com probabilidade 1, a função  $t \mapsto W(t)$  é contínua em  $t$ ;
3. O processo  $\{W(t)\}_{t \geq 0}$  tem incrementos independentes e estacionários;
4. O incremento  $W(t + s) - W(t)$  tem distribuição normal  $\mathcal{N}(0, t)$ .

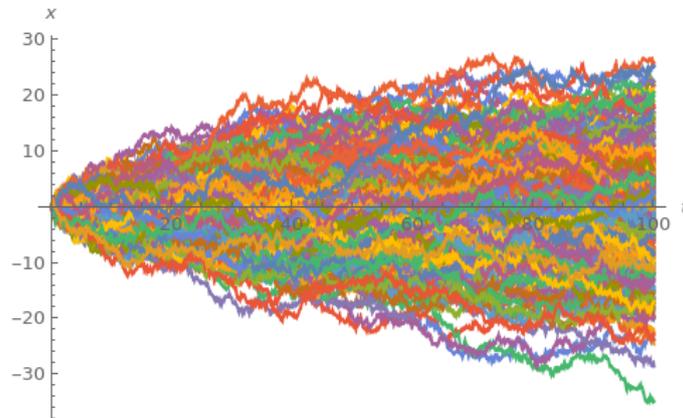


Figura 28: Representação do processo de Wiener.

**Teorema 0.51.** (Durrett, Richard, 1996)

1. O movimento browniano  $(W(t))_{t \geq 0}$  existe.
2. Com probabilidade 1, as trajetórias movimento browniano não são diferenciáveis.

Agora, queremos estudar **equações diferenciais estocásticas (EDE)** dadas por

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + s(x)\eta(t) \tag{13}$$

$$x(0) = 0 \tag{14}$$

em que  $x, s$  e  $f$  tomam valores em  $\mathbb{R}$ . E  $\eta(t) = dB(t)$  é a derivada em distribuição do processo de Wiener e é denominado **ruído branco**. A construção formal do ruído branco está fora do escopo desse trabalho. Sugerimos as referências (Hida, 1980) e (Kallianpur; Karandikar, 1988) para a construção, existência e propriedades do ruído branco.

Para nossos propósitos, interpretaremos a EDE na sua formulação integral:

$$x(t) = \int_0^t f(x(\tau))d\tau + \int_0^t s(x(\tau))dW(\tau) + x_0 \quad (15)$$

E pediremos que uma solução da EDE satisfaça a Equação 15 com probabilidade 1 para todo  $t \geq 0$ .

Precisamos então definir o que  $\int_0^t s(x(\tau))dW(\tau)$  significa. Esta integral é conhecida como **integral de Itô**.

Definiremos a integral  $\int_a^b \xi(\tau)dW(\tau)$  de um processo estocástico  $\xi(t)$ , como o limite quando  $n \rightarrow \infty$  de

$$\sum_{i=1}^n \xi(\bar{t}_i)(W(t_i) - W(t_{i-1})) \quad (16)$$

para  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  e os pontos intermediários  $\bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$  sob a condição natural que  $\max_i(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Em certo sentido, a expressão 16 parece bastante com a integral de Riemann-Stieltjes. Contudo, como  $W(t)$  é quase certamente não diferenciável, o resultado depende fortemente da escolha de  $\bar{t}_i$ . Adotaremos a escolha de Itô fazendo  $\bar{t}_i = t_{i-1}$ .

Para garantir que a integral de Itô está bem definida, precisamos do Teorema 0.53. As propriedades exigidas sobre o integrando estão na próxima definição.

**Definição 0.52.** (Øksendal, 2003) Seja  $(W_t)_{t \geq 0}$  um processo de Wiener. Defina  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{(n)}$  a menor  $\sigma$ -álgebra que contém os conjuntos da forma

$$\{\omega : W_{t_1}(\omega) \in F_1, \dots, W_{t_k}(\omega) \in F_k\}$$

em que  $t_j \leq t$  e  $F_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $j \leq k = 1, 2, \dots$ . Note que a família de  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}_t$  é crescente e  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  para todo  $t$ . Definimos  $\nu = \nu(a, b)$  a classe de funções

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

tais que  $f$  é contínua à esquerda com limite à direita, localmente limitada e satisfaz:

1.  $(t, \omega) \mapsto f(t, \omega)$  é  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}$  mensurável;
2.  $\omega \mapsto f(t, \omega)$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável para todo  $t$ ;
3.  $\mathbb{E}[\int_a^b f(t, \omega)^2 dt] < \infty$ .

**Teorema 0.53.** Se  $f \in \nu$ , então

$$\int_a^b f dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

converge em probabilidade com a condição que  $\max_i(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em (Øksendal, 2003)

Também é interessante considerar a densidade de probabilidade  $h(t, x)$  para  $x(t)$ . Isso significa que para um subconjunto mensurável  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^d$ , a probabilidade de que  $x(t)$  esteja contido em  $B$  é dado por

$$\int_B h(t, y) dy$$

Sob algumas hipóteses de regularidade de  $f$  e  $s$ , a densidade  $h$  satisfaz a **equação de Kolmogorov** ou **equação de Fokker-Planck**:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (a_{ij} h) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x^i} (f_i h)$$

para  $t > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^d$  em que

$$a_{ij}(x) = \sum_{l=1}^d s_{il}(x) s_{jl}(x)$$

**Exemplo 0.54.** Vamos estudar uma perturbação do Exemplo 0.11 dada pela EDE

$$\dot{x} = \lambda x - x^3 + \epsilon^{1/2} \eta$$

em que  $\eta$  é o ruído branco com distribuição Gaussiana de média 0 e variância 1. Queremos entender como que a perturbação com o ruído branco afeta os padrões de bifurcações descritos anteriormente e entender qual o seu comportamento quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Para tanto, vamos definir  $f(x) := \lambda x - x^3$ . Usando a equação de Kolmogorov, temos:

$$-\frac{d}{dx}((\lambda x - x^3)p) + \frac{\epsilon}{2} \frac{d^2}{dx^2} p = 0$$

e uma solução possível é dada por

$$p(x) = c_N \exp\left(\frac{2}{\epsilon} \left(\lambda \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\right) = c_N \exp\left(\int_0^x \frac{2f(\xi)}{\epsilon} d\xi\right)$$

em que  $c_N$  é uma constante de normalização dependendo de  $\lambda$ . Temos três diferentes comportamentos da função para  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  e  $\lambda > 0$ , como mostra a figura abaixo:

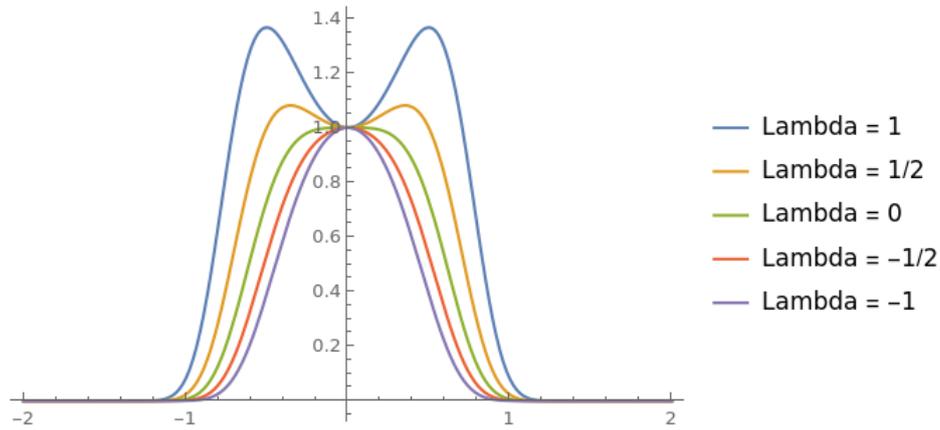


Figura 29: Comportamentos de  $p(x)$  para diferentes valores de  $\lambda$  com  $\epsilon = 0.1$

Temos então uma mudança de comportamento da densidade de probabilidade em  $\lambda = 0$ . Para valores menores ou iguais a este, temos apenas um máximo da função; para valores maiores, dois máximos aparecem.

Estudando o comportamento da função quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , vale que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(x) = \delta(0)$$

para  $\lambda \leq 0$ . É o que está representado nas figuras abaixo:

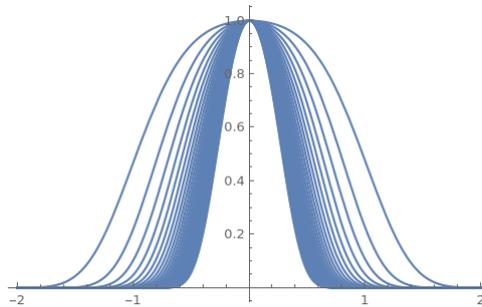


Figura 30: Plots de  $p(x)$  para  $\epsilon = \frac{1}{n}$  com  $n \in \{1, \dots, 30\}$  e  $\lambda = -1$

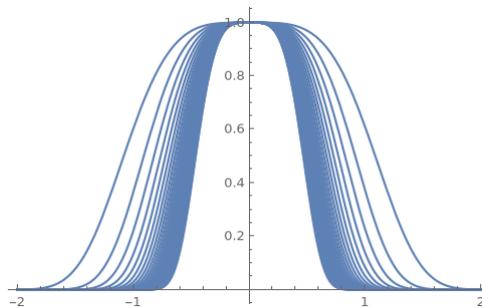


Figura 31: Plots de  $p(x)$  para  $\epsilon = \frac{1}{n}$  com  $n \in \{1, \dots, 30\}$  e  $\lambda = 0$

Para  $\lambda < 0$ , nós usamos a reescala  $y = \epsilon^{-\frac{1}{2}}x$  e obtemos com  $\tilde{p}(y) := p(x)$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{p}(y) = c_N (-\lambda)^{\frac{1}{2}} \exp(\lambda y^2)$$

Já para  $\lambda = 0$ , nós reescalamos agora por  $y = \epsilon^{-\frac{1}{4}}x$  e obtemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{p}(y) = c_N \exp\left(\frac{-y^4}{2}\right)$$

E, portanto, comparando os diferentes fatores de reescala vemos que  $\lambda = 0$  leva a uma amplificação de flutuações da densidade de probabilidade.

Para estudar o comportamento das bifurcações, vamos analisar as simulações feitas. Escolhemos  $\epsilon = 0.1$ ,  $\lambda = 1$  para representar  $\lambda > 0$  e  $\lambda = -1$  para representar  $\lambda < 0$ . Os gráficos das Figuras 32, 33 e 34 correspondem, da esquerda para direita, aos  $x_0$  iguais a  $-2, -1, 0, 1$  e  $2$ . Cada uma das três cores representa uma simulação diferente sob as mesmas condições.

No caso em que  $\lambda > 0$ , a Figura 32, a menos de pequenas flutuações, mostra que temos o mesmo comportamento de bifurcação do caso determinístico, que contava com dois atratores e 0 como ponto fixo instável.

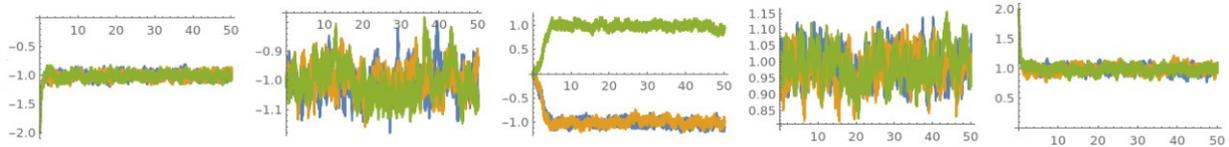


Figura 32: Simulação para o caso  $\lambda > 0$ .

Para o caso em que  $\lambda = 0$ , temos como na situação determinística 0 como um tipo de atrator, também com pequenas flutuações ao redor deste ponto.

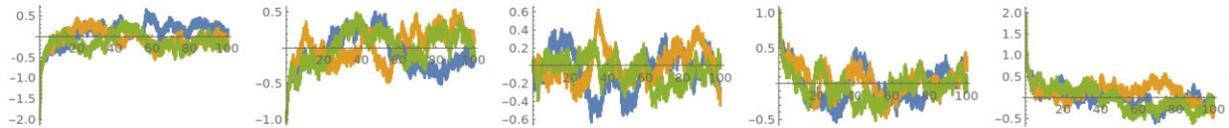


Figura 33: Simulação para o caso  $\lambda = 0$ .

Novamente, a menos das flutuações, no caso em que  $\lambda < 0$ , temos 0 como uma espécie de atrator.

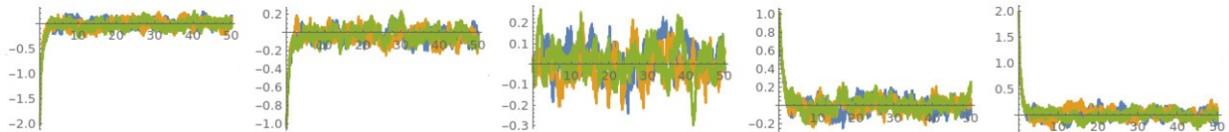


Figura 34: Simulação para o caso  $\lambda < 0$ .

# Índice de Conley

Como motivamos no Capítulo , o que queremos é estudar o estado assintótico de sistemas dinâmicos. Para tanto, depois dos exemplos da Subseção 2.1 em que estudamos a linearização de SD, é razoável esperar que, ao invés de estudar o comportamento a longo prazo de cada um dos pontos do espaço de fase, possamos estudar apenas os conjuntos invariantes e suas vizinhanças sob a ação da dinâmica. Por exemplo, quando estudamos SD oriundos de EDO's, era comum situações em que todos os estados iniciais sejam transformados numa coleção de atratores. Com base nessa colocação, é razoável esperar que são estes atratores que darão uma espécie de classificação de cada um dos pontos do espaço de fase do sistema.

Numa visão quantitativa, a predição das trajetórias pode parecer bastante obscura dada a complexidade computacional do problema. Contudo, num viés qualitativo, o sistema dinâmico pode ser então assintoticamente resumido ao conjunto das componentes conexas dos conjuntos recorrentes por cadeia.

Muito desse estudo qualitativo, especialmente sobre a existência e estrutura de conjuntos invariantes como frisado na referência (Hasselblatt; Katok, 2002), possui quatro dificuldades bastantes recorrentes:

1. Conjuntos invariantes são objetos globais, portanto precisamos obter estimativas globais para o problema;
2. Conjuntos invariantes possuem uma enorme diversidade de diferentes estruturas, algumas das quais são extremamente complicadas (por exemplo estruturas fractais e dinâmicas caóticas);
3. A estrutura de conjuntos invariantes pode mudar drasticamente com respeito a pequenas perturbações;
4. Os pontos de bifurcação podem não ser isolados.

A teoria de Conley (colocada de uma forma mais geral, i.e., além do índice de Conley) a ser apresentada na sequência estuda a relação entre conjuntos invariantes da dinâmica aliado as propriedades topológicas do espaço subjacente. Com isto, como é motivado no trabalho da referência (Jost, 2006), essa teoria estabelece uma abordagem possível para duas perguntas fundamentais:

1. Sobre equivalência: quais são os critérios relevantes ao comparar dois sistemas dinâmicos e considerá-los equivalentes em relação a um comportamento comum?
2. Sobre estabilidade: quando que o comportamento qualitativo é sensível a pequenas perturbações internas ou externas?

A ideia desta teoria é que tanto a topologia do espaço quanto as propriedades qualitativas do sistema dinâmico estão codificadas nos conjuntos invariantes, como é colocado em (Jost, 2006).

Fazendo uma regressão como a colocada em (Hasselblatt; Katok, 2002), dado um sistema dinâmico provar a existência de um ponto fixo (o mais trivial dos conjuntos invariantes) pode ser uma tarefa bastante complicada. A Teoria do Grau é uma ferramenta bastante interessante nesse contexto. Ela pode ser pensada como uma função de uma família de mapas contínuos nos inteiros que satisfaz três propriedades:

1. Ela está definida numa região para a qual não há pontos fixos na fronteira;
2. Se o grau de um mapa é não nulo, então esse mapa possui um ponto fixo;
3. Ela é contínua.

Embora essa função seja de extremo desejo, encontrá-la explicitamente pode ser bastante difícil. Existe um caminho comum para a aplicação dessa teoria que tenta tornar a análise um pouco mais fácil. Um primeiro movimento seria procurar uma família de mapas que saem do mapa originalmente estudado para mapas mais simples, nos quais os pontos críticos são explícitos. A partir daí, escolhemos uma região com pontos fixos de forma que o resultado da função grau seja não nulo. Depois, mostramos que a família contínua de mapas que escolhemos estudar saindo da função original é tal que cada uma dessas funções não possui ponto fixo na fronteira da região. Fazendo isso, como a imagem da função toma valores nos inteiros e ela é contínua, ela não pode mudar através dessas funções escolhidas na família de mapas. Portanto, o grau da função original é o mesmo da função mais simples.

A aplicação da teoria do índice Conley segue um caminho bastante similar. As regiões que estaremos interessados chamam-se vizinhanças isolantes. Começaremos agora a construí-la de fato. Para tanto, vamos considerar um sistema dinâmico sobre  $X$  com fluxo  $\{F_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ . Começaremos com um conceito que usa a ideia de invariância apresentada na Definição 0.5.

**Definição 0.1.** Dado um  $N \subset X$ , o conjunto

$$\text{Inv}(N) := \{y \in N : y(\mathbb{T}) \subset N\}$$

chamado **conjunto invariante maximal** de  $N$ . Assim sendo,  $\text{Inv}(N)$  é constituído pelos pontos de  $N$  cujas trajetórias permanecem dentro de  $N$  para todos os tempos sob o fluxo.

Claramente, vale que  $N \subset X$  é invariante se, e somente se,  $\text{Inv}(N) = N$ .

A maximalidade na Definição 0.1 vem no sentido da inclusão, já que se  $P \subset N$  é invariante, então  $P \subset \text{Inv}(N)$ .

Note que se  $N \subset X$  é compacto, então  $\text{Inv}(N)$  é fechado e, portanto,  $\text{Inv}(N)$  é compacto.

**Exemplo 0.2.** A Figura 1 mostra o conjunto invariante maximal em vermelho para o retângulo  $N$  do mapa apresentado na Seção 2.1.

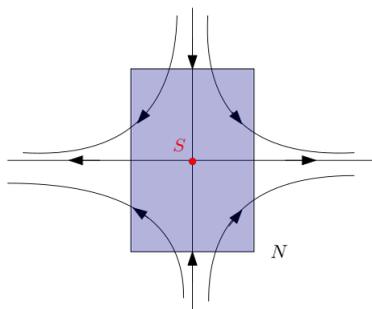


Figura 1: Exemplo conjunto invariante maximal para a sela.

Temos que  $\text{Inv}(N) = \{0\}$  já que, embora os pontos do segmento de reta vertical delimitado por  $N$  fiquem invariantes na dinâmica para frente, suas pré-imagens não estão em  $N$ .

Já se escolhêssemos o retângulo  $N$  de modo que a origem não estivesse contida nele, teríamos que  $\text{Inv}(N) = \emptyset$  mostrado em vermelho na Figura 2:

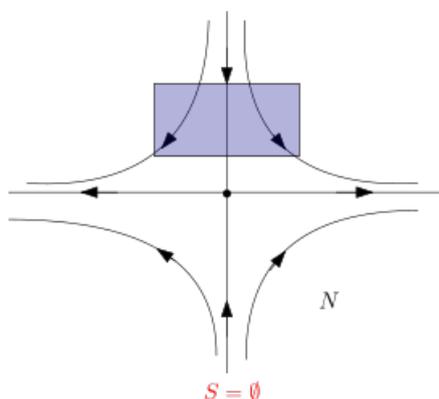


Figura 2: Conjunto invariante maximal vazio

**Exemplo 0.3.** A Figura 3 representa o invariante maximal em vermelho um fluxo apresentado na Seção 2.1, que é formado por um ponto fixo e uniões de órbitas fechadas dentro de  $N$ .

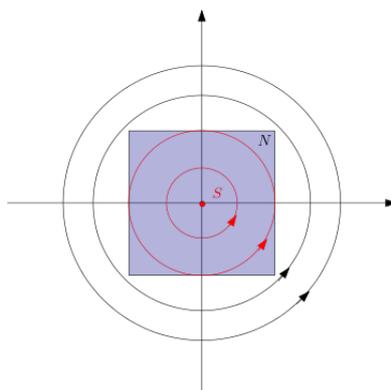


Figura 3: Exemplo de conjunto invariante maximal para órbitas circulares

Repare que o conjunto invariante maximal do quadrado  $N$  é dado pela origem e pelas órbitas circulares cujos raios são menores ou iguais a metade do lado de  $N$ .

Podemos ainda pedir mais uma propriedade sobre  $\text{Inv}(N)$ , é o que está caracterizado na próxima

definição.

**Definição 0.4.** Dizemos que  $S \subset X$  é um **conjunto invariante isolado** se existe uma vizinhança compacta  $N$  de  $S$  em  $X$  tal que  $S \subset \text{int}(N)$  e  $S = \text{Inv}(N)$ . Neste caso, dizemos que  $N$  é uma **vizinhança isolante** de  $S$  em  $X$ .

De outro modo, podemos entender que  $S \subset X$  é um conjunto invariante isolado se  $S$  satisfaz duas propriedades:

1.  $S$  é invariante;
2.  $S$  tem uma vizinhança aberta cujo fecho não tem nenhum conjunto invariante além de  $S$ ;

Na Figura 4 não podemos ter que  $N$  é vizinhança isolante de  $S$ , já que os pontos  $p_1$  e  $p_2$  juntamente com a linha de fluxo que os conecta formam um conjunto invariante que não está em  $S$ , i.e.,  $S$  não é invariante maximal em  $N$ . Note que o conjunto dado pelos pontos  $p_3$  e  $p_4$  e pela linha de fluxo entre eles não seria a priori um impedimento para  $N$  ser vizinhança isolante de  $S$ .

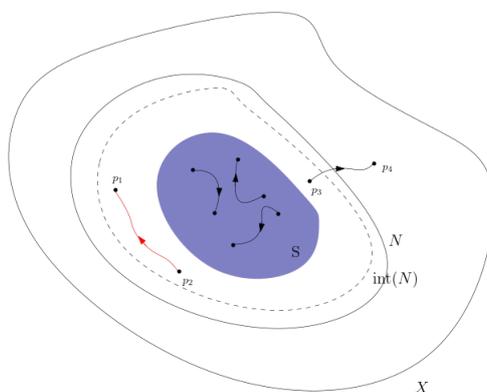


Figura 4:  $S$  conjunto invariante e  $\text{int}(N)$  vizinhança aberta de  $S$ . Os pontos representam pontos fixos do fluxo

**Exemplo 0.5.** O conjunto invariante maximal do Exemplo 0.2 é um conjunto invariante isolado, já que  $S = \{0\} = \text{Inv}(N) \subset \text{int}(N)$ .

**Exemplo 0.6.** O conjunto invariante maximal do Exemplo 0.3 não é um conjunto invariante isolado, já que a órbita circular cujo raio é metade do lado do quadrado é um invariante mas não está contida no interior de  $N$ .

É claro que estaremos interessados nos conjuntos invariantes ao invés das vizinhanças isolantes. Portanto, precisamos de um modo de passar nossa análise do conhecimento das vizinhanças isolantes para esses conjuntos invariantes. É justamente esse o propósito do índice de Conley.

Para motivar sua importância e também justificar suas semelhanças com a teoria do grau, vamos adiantar três propriedades do Índice de Conley como em (Hasselblatt; Katok, 2002). Considere  $\zeta : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$  um fluxo sobre um espaço métrico localmente compacto  $X$ . Temos que:

1. O índice de Conley é um índice nas vizinhanças isolantes. Além disso, se  $N$  e  $N'$  são vizinhanças isolantes para o mesmo conjunto invariante isolado e  $\text{Inv}(N, \zeta) = \text{Inv}(N', \zeta)$ , vale que seus correspondentes índices de Conley são iguais;

2. Se o índice de Conley de uma vizinhança isolante  $N$  é não trivial, então  $\text{Inv}(N) \neq \emptyset$ ;
3. Se  $N$  é uma vizinhança isolante para uma família de fluxos  $\zeta_\lambda$  parametrizada de maneira contínua com  $\lambda \in [0, 1]$ , i.e.,  $\text{Inv}(N, \zeta_\lambda) \subset \text{int}N$  para todo  $\lambda \in [0, 1]$ , então o índice de Conley de  $N$  quando consideramos o fluxo  $\zeta_0$  é o mesmo quando consideramos o fluxo  $\zeta_1$ .

O primeiro garante tranquilidade na escolha da região sobre a qual vamos estudar o potencial conjunto invariante. O segundo mostra como passamos da propriedade da vizinhança isolante para o conjunto invariante. O último, garante que podemos entender a dinâmica do fluxo conhecendo uma dinâmica mais simples dada a continuidade do parâmetro.

Antes de seguirmos com mais definições, é importante ressaltar que as aplicações da teoria do índice Conley são extensas. Por exemplo, dentro da área de topologia, a teoria de Conley foi fundamental para o desenvolvimento da homologia de Floer (e portanto também em resultados sobre números de Betti) e na demonstração da conjectura de Arnold; fora da área topológica, ele pode ser usado numa enorme gama de problemas, como na busca de soluções de equações de ondas viajantes, investigação da estrutura de atratores globais em equações de reação-difusão, busca de soluções periódicas de sistemas Hamiltonianos e para dar uma prova da característica caótica do atrator de Lorenz.

Mais à frente, tanto no Índice de Conley discreto como no contínuo, vamos também usar algumas definições básicas sobre espaços quocientes de um espaço topológico. Elas estão colocadas nas próximas definições.

**Definição 0.7.** Um **espaço pontuado**  $(Y, y_0)$  é um espaço topológico com um ponto base distinguido  $y_0 \in Y$ , denominado **ponto base**.

**Definição 0.8.** Dado um par  $(N, L)$  de espaços topológicos com  $L \subset N$  e  $L \neq \emptyset$ , defina a **relação de equivalência** dada por

$$x \sim y \iff x = y \text{ ou } x, y \in L \tag{1}$$

Denote por  $N/L$  o **espaço pontuado**  $(N/\sim, [L])$  em que  $[L]$  representa a classe de equivalência dos pontos de  $L$  sob a relação dada em 1 e  $N/\sim = \{[x] : x \in N\}$  pode ser identificado com  $(N \setminus L) \cup [L]$ .

Se  $L = \emptyset$ , é uma convenção considerar  $N/L = (N \cup \{*\}, \{*\})$  em que  $\{*\}$  denota a classe de equivalência do conjunto vazio.

Assim sendo, da Definição 0.8, dado um espaço topológico  $X$ , podemos entender o espaço  $X/\emptyset$  como  $(X \sqcup p, p)$  sendo  $p \notin X$  e  $\sqcup$  o símbolo que denota a união disjunta. A Figura 5 ilustra esse conceito.

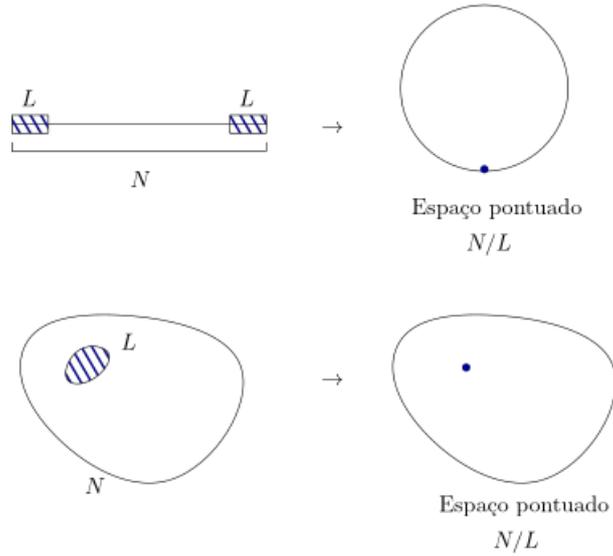


Figura 5: Espaços Pontuados

Também será interessante estabelecermos a união de espaços pontuados, como segue na próxima definição.

**Definição 0.9.** Dados dois espaços pontuados  $(X, x_0)$  e  $(Y, y_0)$  podemos definir a **união** destes como o espaço pontuado dado por

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) := X \sqcup Y / \{x_0, y_0\}$$

Ou seja, estamos “colando” os dois espaços pontuados nos pontos distinguidos  $x_0$  e  $y_0$ .

# 1 Índice de Conley Contínuo

Nesta seção, vamos considerar um sistema dinâmico contínuo sobre um espaço métrico  $(X, d_X)$  e com fluxo  $\{F_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ . Nos basearemos principalmente por (Jost, 2006).

Claramente segue da Definição 0.1 que o próprio conjunto  $X$  é um exemplo de conjunto invariante maximal. Contudo, a menos de casos bastante específicos, existem conjuntos maximais menores (no sentido da inclusão) do que  $X$ . São esses conjuntos que motivam a próxima subseção.

## 1.1 Decomposição de Morse

**Definição 0.10.** Uma **decomposição de Morse** de um conjunto invariante compacto  $N$  é uma coleção finita de subconjuntos  $N_i$  de  $N$  com  $i = 1, \dots, n$  que são compactos e invariantes, chamados de **conjuntos de Morse**. Essa coleção admite uma ordem admissível  $(N_1, \dots, N_n)$  tal que, sempre que

$$y \in N \setminus \bigcup_{i=1}^n N_i$$

existem índices  $i < j$  com  $\alpha(y) \subset N_i$  e  $\omega(y) \subset N_j$  em que  $\alpha(y)$  e  $\omega(y)$  são os mesmos conjuntos da Definição 0.9.

Também definimos para  $i \leq j$  o conjunto

$$N_{ij} := \{y \in N : \alpha(y), \omega(y) \subset N_i \cup N_{i+1} \cup \dots \cup N_j\}$$

É importante notar que a decomposição de Morse não é necessariamente única, e como podemos imaginar algumas decomposições podem nos fornecer mais informações sobre o sistema do que outras. Por exemplo, podemos sempre escolher a decomposição trivial, i.e., fazer  $N_1 = N$ . Contudo, seria interessante buscarmos decomposições mais finas, i.e., com mais conjuntos de Morse.

Vamos concretizar essa discussão no seguinte exemplo:

**Exemplo 0.11.** Seja  $X$  uma subvariedade de  $\mathbb{R}^3$  difeomorfa a  $S^2$  com o fluxo como na Figura 6 sendo  $p_1, p_2, q$  e  $r$  pontos fixo:

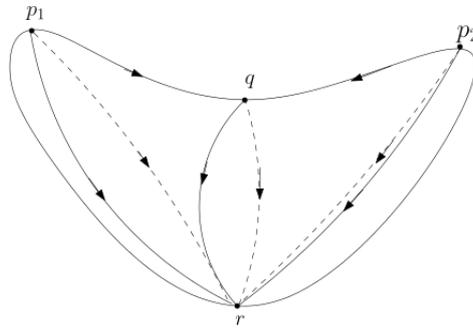


Figura 6: Fluxo em  $X$

Sendo  $N = X$ , i.e., o conjunto dado pelos pontos fixos e pelas linhas de fluxo que os conectam, podemos tomar  $N_1 = \{p_1\}$ ,  $N_2 = \{p_2\}$ ,  $N_3 = \{q\}$  e  $N_4 = \{r\}$  que teríamos uma decomposição de Morse. Outra decomposição possível seria tomar  $N_1 = \{p_1, p_2, q\}$  e  $N_2 = \{r\}$ . Poderíamos ainda tomar  $N_1 = \{p_1, p_2\}$ ,  $N_2 = \{q\}$  e  $N_3 = \{r\}$ .

A essência da decomposição de Morse é que, dado um ponto qualquer que não esteja em nenhum dos seus conjuntos de Morse, seu comportamento assintótico está guardado em algum destes conjuntos  $N_i$  já que temos a propriedade de que existem índices  $i < j$  tais que  $\alpha(y) \subset N_i$  e  $\omega(y) \subset N_j$ . Desse comentário e do fato de  $N_i \subset N$  para qualquer índice  $i$ , fica clara a necessidade de  $N$  ser invariante na Definição 0.10 para que a trajetória assintótica de um  $y \in N$  qualquer não vá embora de  $N$ .

## 1.2 Par-índice

A próxima definição estabelece a matéria prima para a definição do Índice de Conley contínuo propriamente dito. Ela impõe condições para o comportamento do fluxo ao redor de um conjunto invariante isolado.

**Definição 0.12.** Seja  $S$  um conjunto invariante isolado. Dizemos que um par  $(M_0, M_1)$  de conjuntos compactos com  $M_1 \subset M_0$  é um **par-índice** para o conjunto invariante isolado  $S$  se as seguintes condições são válidas:

1.  $\overline{M_0 \setminus M_1}$  é uma vizinhança isolante para  $S$  com  $M_1 \cap S = \emptyset$ ;
2. Se  $y \in M_1$  e  $y([0, t]) \subset M_0$  para um  $t > 0 \in \mathbb{R}$  qualquer, temos que  $y([0, t]) \subset M_1$ ;
3. Se  $y \in M_0$  e  $y(t) \notin M_0$  para algum  $t > 0 \in \mathbb{R}$ , então existe  $0 \leq t_0 < t$  com  $y([0, t_0]) \subset M_0$  e  $y(t_0) \in M_1$ ;

O conjunto  $M_1$  é chamado de **conjunto de saída** de  $M_0$  para o fluxo.

Na Figura 7, temos que  $M_0$  é o quadrado verde e  $M_1$  é o conjunto formado pela união dos dos retângulos indicados; ao centro, em branco, temos o conjunto  $S$ . Assim sendo, vale claramente que  $M_1 \cap S = \emptyset$ .

As linhas de fluxo em azul não contrariam a definição de par-índice, i.e., são trajetórias de pontos que estão em  $\overline{M_0 \setminus M_1}$  e tais que eventualmente saem passando por  $M_1$  e não retornam mais a este conjunto.

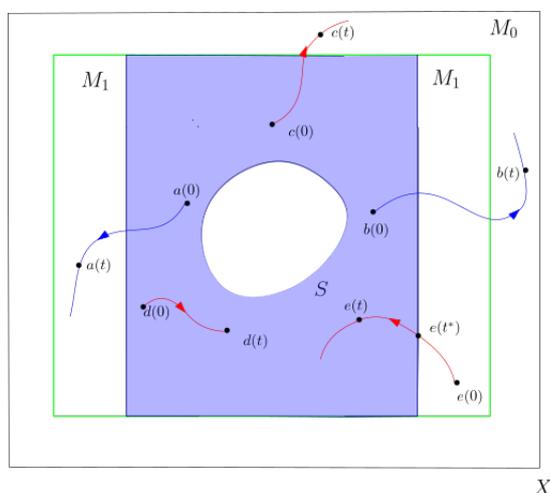


Figura 7:  $S$  é um conjunto invariante isolado mas  $M_1 \subset M_0$  não é par-índice

Agora, vamos discutir as trajetórias em vermelho. Sendo fixos os pontos  $d(0)$  e  $d(t)$ , temos que estes dois juntamente com a linha de fluxo que os conecta forma um conjunto invariante em  $\overline{M_0 \setminus M_1}$  (o conjunto indicado em azul na figura). Logo,  $\overline{M_0 \setminus M_1}$  não é uma vizinhança isolante para  $S$ , pela Definição 0.4. Portanto, não vale o primeiro item da definição de par-índice.

Olhando para a trajetória do ponto  $e \in M_0$ , note que  $e([0, t]) \subset M_0$  mas  $e([0, t]) \not\subset M_1$  já que  $e([t^*, t]) \subset \overline{M_0 \setminus M_1}$  o que não é permitido pelo segundo item da definição acima. Em outras palavras, este item garante que a trajetória de um ponto não pode voltar para  $\overline{M_0 \setminus M_1}$  depois de passar por  $M_1$ .

A trajetória do ponto  $c$  indicada na figura não é permitida pois  $c(t) \notin M_0$  mas não existe um  $t_0 \in [0, t]$  tal que  $c(t_0) \in M_0$ , o que contradiz o terceiro item da Definição 0.12; ou seja, não podemos ter uma trajetória que saia de  $M_0$  sem antes passar por  $M_1$ .

**Exemplo 0.13.** Primeiramente, é interessante notar que o par-índice não é necessariamente único. É o que mostra a Figura 8:

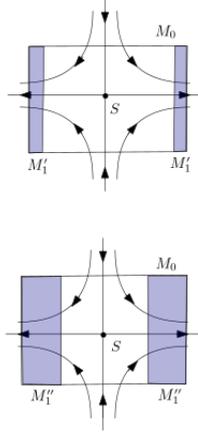


Figura 8: Diferentes par-índices para o mesmo conjunto invariante isolado.

Nela, os pares  $(N, L_1)$  e  $(N, L_2)$ , em que  $L_1$  e  $L_2$  são dados pela união das regiões em azul, são par-índices para  $S = 0$ .

**Exemplo 0.14.** Considere o mesmo SD apresentado no Exemplo 0.11. Na Figura 9, a união das regiões delimitadas pelos traços vermelhos é o conjunto  $M_0$  e a união das faixas brancas entre as linhas vermelhas e as regiões azuis é o conjunto  $M_1$  de forma que  $\overline{M_0 \setminus M_1}$  seja dado simplesmente pelas regiões azuis.

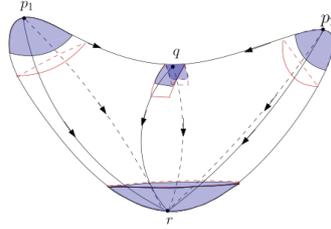


Figura 9: Par-índice do SD em  $X$  para o invariante  $S = \{p_1, p_2, q, r\}$ .

O par  $(M_0, M_1)$  forma então um par-índice para o conjunto invariante isolado  $S = \{p_1, p_2, q, r\}$  já que temos claramente que:

- O conjunto  $\overline{M_0 \setminus M_1}$  é vizinhança isolante para  $S$  e  $M_1 \cap S = \emptyset$ , portanto vale o primeiro item das condições para  $(M_0, M_1)$  atender à Definição 0.12.
- Depois que as trajetórias passam por  $M_1$  elas não retornam à região azul, logo vale o segundo item da Definição 0.12.
- Todas as trajetórias que saem de  $M_0$  passam por  $M_1$ , e assim vale a última exigência da Definição 0.12.

A princípio, estas exigências podem parecer bastante restritivas e a existência de pares índices não parece tão imediata. Assim sendo, o próximo teorema é de extrema importância pois garante a existência de tais conjuntos. Além disso, ele também conecta os conceitos da Subseção 1.1 com a definição de par-índice acima apresentada.

**Teorema 0.15.** *Seja  $S$  um conjunto invariante isolado e  $(N_1, \dots, N_n)$  uma ordem admissível de uma decomposição de Morse de  $S$ . Então existe uma filtração de Morse, i.e., conjuntos compactos*

$$M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n$$

com a propriedade de que, sempre que  $i \leq j$ , temos que

$$(M_{i-1}, M_j)$$

é um par-índice para  $N_{ij}$ . Em particular, vale que  $(M_0, M_n)$  é um par-índice para  $S$ , e  $(M_{i-1}, M_i)$  é um par-índice para  $N_i$ .

### 1.3 Definição

A partir da teoria estabelecida no Capítulo e nas Subseções 1.1 e 1.2, temos as ideias fundamentais para definirmos, primeiramente, o índice de Conley cohomológico e, posteriormente, o índice de Conley. A diferença entre eles é que este último é construído sobre uma invariância do tipo de homotopia do espaço quociente  $M_0/M_1$ , enquanto que o outro se fundamenta na invariância cohomológica deste mesmo espaço.

#### 1.3.1 Índice de Conley cohomológico

**Definição 0.16.** *Seja  $S$  um conjunto invariante isolado e  $(M_0, M_1)$  um par-índice para  $S$ . O índice de Conley cohomológico  $CH^*(S)$  é definido por*

$$CH^*(S) = H^*(M_0, M_1)$$

sendo  $H^*(M_0, M_1)$  a cohomologia relativa do par-índice  $(M_0, M_1)$ .

Note que o índice poderia a priori depender da escolha do par-índice. O próximo teorema garante que isso não é o caso.

**Teorema 0.17.** *O índice de Conley cohomológico  $CH^*(S)$  não depende da escolha do par-índice para  $S$ , i.e., quaisquer dois par-índices para um mesmo conjunto invariante isolado possuem os mesmos grupos de cohomologia.*

**Exemplo 0.18.** Dado um SD qualquer, tome  $S = \emptyset$ . Assim sendo,  $M_0 = M_1 = \emptyset$  são tais que  $(M_0, M_1)$  formam um par-índice para  $S$ . Logo, o espaço quociente  $M_0/M_1$  é um ponto, e, portanto,  $CH^*(\emptyset) = 0$ .

Da contrapositiva, temos que  $CH^*(\emptyset) \neq 0$  implica que  $S \neq \emptyset$ .

**Exemplo 0.19.** Considere um SD sobre  $X$  espaço métrico. Seja  $S = \{p\}$  um ponto fixo hiperbólico de um SD com variedade instável  $V$  de dimensão  $n$ . Dado  $\epsilon > 0$  qualquer, faça  $M_0 = \overline{B_\epsilon(p)} \cap \overline{V}$  e  $M_1 = \overline{(B_{\frac{\epsilon}{2}}(p) \cap V)^C}$  em que o complementar é tomado com relação a  $M_0$ .

## Índice de Conley

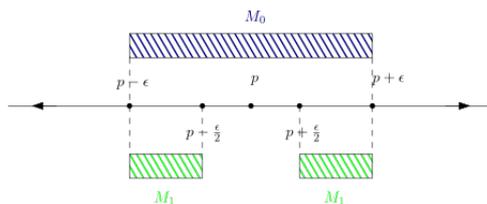


Figura 10:  $M_0$  e  $M_1$  para ponto fixo hiperbólico cuja variedade instável tem dimensão  $n$ .

Temos então que  $(M_0, M_1)$  é um par-índice para  $p$ . De fato,  $\overline{M_0 \setminus M_1}$  é uma vizinhança isolante de  $S$  e  $M_1 \cap S = \emptyset$ . Depois que a órbita de um ponto passa por  $M_1$  ela não retorna para  $M_0$ . Além disso, todos os pontos de  $M_0$  que não são o ponto fixo saem de  $M_0$  passando por  $M_1$ . Portanto, temos que  $M_0/M_1 \cong S^n$ , e assim

$$CH^k(S) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{se } k = n \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

### 1.3.2 Índice de Conley

**Teorema 0.20.** Se  $(M_0, M_1)$  e  $(M'_0, M'_1)$  são dois par-índices para o mesmo conjunto invariante isolado  $S$ , então  $M_0/M_1$  e  $M'_0/M'_1$  são homotopicamente equivalentes.

**Definição 0.21.** O índice de Conley  $h(S)$  de um conjunto invariante isolado  $S$  é definido como o tipo de homotopia do espaço  $[M_0/M_1]$  em que  $(M_0, M_1)$  é um par-índice qualquer para  $S$ .

O Teorema 0.20 é o que garante que a Definição 0.21 está bem colocada.

**Exemplo 0.22.** Vamos calcular na Figura 11 o índice de Conley do Exemplo 0.13. Repare que a escolha do par-índice, como esperávamos, não altera o resultado.

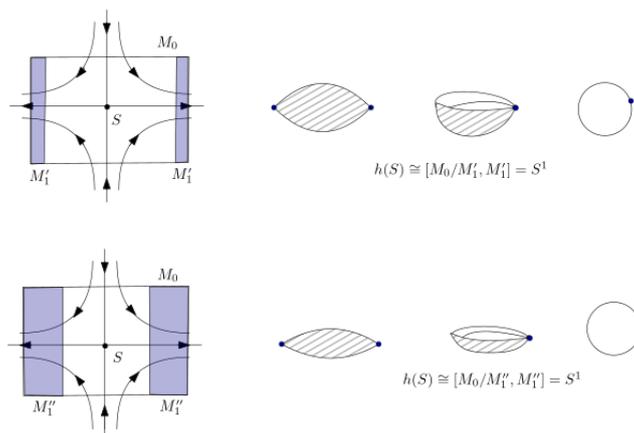


Figura 11: Cálculo do índice de Conley para diferentes par-índices.

**Exemplo 0.23.** Continuando o Exemplo 0.14, a Figura 12 mostra o espaço quociente de cada uma das partes conexas de  $M_0$  e  $M_1$  em cada um dos pontos  $p_1$  e  $p_2$ , na figura chamados simplesmente de  $p$ . Nela,  $M_1$  é a região hachurada e  $M_0$  a união desta com a região azul.

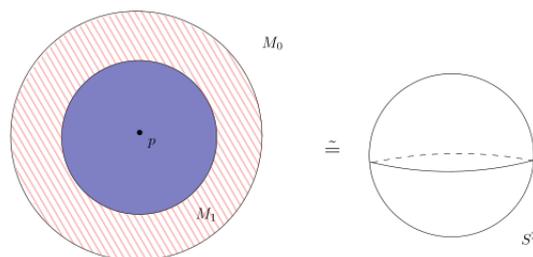


Figura 12: Par-índice para o Exemplo 0.11 em que  $p \in S$ .

Assim sendo,  $M_0/M_1$  é homotopicamente equivalente a  $S^2$ . Logo,

$$CH^k(p) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ,k = 2 \\ 0 & ,\text{caso contrário} \end{cases}$$

Agora, para o ponto  $q$ , temos o par-índice dado como mostra a Figura 13. Logo,  $M_0/M_1$  é homotopicamente equivalente a  $D^1$  e, portanto,

$$CH^k(q) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ,k = 1 \\ 0 & ,\text{caso contrário} \end{cases}$$

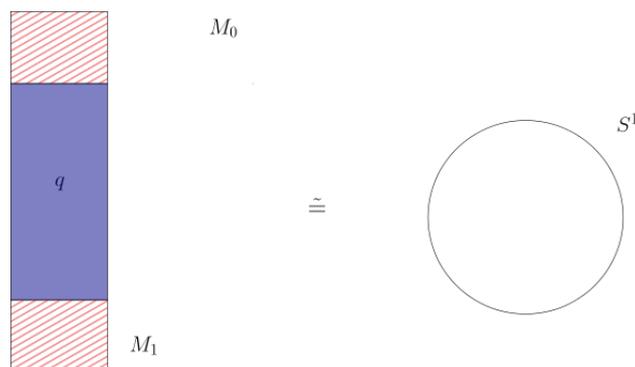


Figura 13: Par-índice para o Exemplo 0.11 em que  $q \in S$ .

Por fim, para o conjunto invariante isolado dado apenas por  $r$ , podemos escolher  $M_0$  como a região delimitada pelas linhas vermelhas ao redor de  $r$  como na Figura 9 e  $M_1 = \emptyset$ . Assim sendo, temos que  $M_0/M_1 = M_0/\emptyset$  é homotopicamente equivalente a um ponto, logo

$$CH^k(r) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ,k = 0 \\ 0 & ,\text{caso contrário} \end{cases}$$

## 2 Índice de Conley Discreto

Para esta seção, nos basearemos especialmente em (Villapouca, 2013). Vamos considerar agora um SD sobre  $(X, d_X)$  espaço métrico localmente compacto com fluxo  $\{f^t\}_{t \in \mathbb{T}}$  dado pelas iteradas de uma aplicação contínua  $f$ .

Note que, não pedimos que os mapas do fluxo sejam homeomorfismos, e, portanto, podemos não ter unicidade nas pré-imagens. Assim sendo, o conjunto invariante maximal introduzido na Definição 0.1 é caracterizado neste contexto do seguinte modo:

$$\text{Inv}(N) = \{x \in N \mid \text{existe } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset N \text{ tal que } x_0 = x \text{ e } f(x_n) = x_{n+1}\}$$

i.e., são os pontos  $x$  para os quais existe uma órbita completa de  $x$  dentro de  $N$ . No caso de homeomorfismos, esta órbita é única e assim temos:

$$\text{Inv}(N) = \{x \in N \mid f^n(x) \in N \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Definimos ainda a seguinte propriedade sobre o conjunto  $N$ :

**Definição 0.24.** Um conjunto compacto  $N$  é chamado de **bloco isolante** se

$$f(N) \cap N \cap f^{-1}(N) \subset \text{int}(N).$$

*Observação 0.25.* Todo bloco isolante  $N$  é uma vizinhança isolante para o conjunto  $S = \text{Inv}(N)$ . De fato, temos que

$$\text{Inv}(N) \subset f(N) \cap N \cap f^{-1}(N) \subset \text{int}(N).$$

A Observação 0.25 é uma ótima estratégia para encontrar vizinhanças isolantes para conjuntos invariantes isolados já que a definição de bloco isolante é, potencialmente, mais fácil de ser verificada.

**Definição 0.26.** Seja  $N$  uma vizinhança isolante de uma aplicação contínua  $f$ . Definimos o **conjunto de saída** de  $N$  como sendo

$$N^- := \{x \in N \mid f(x) \notin \text{int}(N)\}.$$

Repare que este conjunto é diferente do conjunto de saída definido no contexto de par-índice e possui diferenças fundamentais, por exemplo o fato que  $N^-$  é único para cada  $N$  compacto.

A Proposição 0.27 ilustra uma importante propriedade de blocos isolantes.

**Proposição 0.27.** Se  $P_1$  é um bloco isolante, então  $f(P_1^-) \cap \overline{P_1 \setminus P_1^-} = \emptyset$ .

*Demonstração.* Primeiramente, observe que se  $x \in P_1 \setminus P_1^-$ , então  $x \in P_1$  e  $x \notin P_1^-$ , i.e.,  $x \in P_1$  e  $f(x) \in \text{int}(P_1)$ . Logo,  $P_1 \setminus P_1^- \subset P_1 \cap f^{-1}(\text{int}(P_1))$ .

Agora, se  $y \in \overline{P_1 \setminus P_1^-}$ , então, da compacidade, existe uma sequência  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset P_1 \setminus P_1^- \subset f^{-1}(P_1)$  (a última inclusão decorre de  $P_1 \setminus P_1^- \subset P_1 \cap f^{-1}(\text{int}(P_1)) \subset f^{-1}(\text{int}(P_1)) \subset f^{-1}(P_1)$ ) tal que  $y_n \rightarrow y$ . Logo,  $(f(y_n)) \subset P_1$  e, da continuidade,  $f(y_n) \rightarrow f(y)$ . Da compacidade de  $P_1$ , segue que  $f(y) \in P_1$ , i.e.,  $y \in f^{-1}(P_1)$ . Isso mostra que  $\overline{P_1 \setminus P_1^-} \subset P_1 \cap f^{-1}(P_1)$ .

Considere  $y \in f(P_1^-)$ , então  $y = f(x)$  para algum  $x \in P_1^-$  (daqui temos que  $y \in f(P_1)$  pois  $P_1^- \subset P_1$ ), e assim  $y = f(x) \notin \text{int}(P_1)$  o que implica que  $y \in (\text{int}(P_1))^C$ . Garantimos então que  $f(P_1^-) \subset f(P_1) \cap (\text{int}(P_1))^C$ .

Das três inclusões mostradas decorre que  $f(P_1^-) \cap \overline{P_1 \setminus P_1^-} \subset (f(P_1) \cap (\text{int}(P_1))^C) \cap P_1 \cap f^{-1}(P_1) \subset (f(P_1) \cap P_1 \cap f^{-1}(P_1)) \cap (\text{int}(P_1))^C$  e, usando que  $P_1$  é bloco isolante, vale que  $f(P_1) \cap P_1 \cap f^{-1}(P_1) \cap (\text{int}(P_1))^C \subset (\text{int}(P_1)) \cap (\text{int}(P_1))^C = \emptyset$ .  $\square$

## 2.1 Par - Filtração

Vamos estabelecer o análogo para o caso discreto do conceito de par-índice colocado na Definição 0.12.

**Definição 0.28.** Seja  $S$  um conjunto invariante isolado, i.e., existe  $N$  vizinhança isolante ( $N$  satisfaz  $\text{Inv}(N) \subset \text{int}(N)$ ) com  $S = \text{Inv}(N)$ . Suponha que  $L \subset N$  são dois subconjuntos compactos de  $X$  contidos no interior do domínio de  $f$ . O par  $(N, L)$  é denominado um **par - filtração** para  $S$  se  $N$  e  $L$  são ambos os fechos de seus interiores e

1.  $\overline{N \setminus L}$  é uma vizinhança isolante de  $S$ , i.e.,  $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$ ;
2.  $L$  é uma vizinhança de  $N^-$  em  $N$ ;
3.  $f(L) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ .

As motivações para a escolha dessas condições são análogas às do par-índice no caso de um SD contínuo. Como na Figura 14, considere  $S$  o conjunto invariante maximal em  $\overline{N \setminus L}$  sendo  $L \subset N$ . Isto é, pontos de  $S$  permanecem em  $S$  após qualquer quantidade de iterações; mas, para pontos que não estão em  $S$ , digamos  $x$ , existe algum  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $f^k(x) \notin \overline{N \setminus L}$  em razão da maximalidade de  $S$ .

A propriedade  $f(L) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ , implica que depois que um ponto visita o conjunto  $L$  ele não retorna mais para  $\overline{N \setminus L}$ , isto é, comportamentos como nas trajetórias (a) e (b) na Figura 14 não são permitidos. Quando o ponto visita  $L$ , ele pode até ficar uma quantidade de iterações nesse conjunto, mas eventualmente ele escapa pois  $S = \text{Inv}(N)$ . Também temos que, do fato de  $L$  ser vizinhança de  $N^-$ , nenhuma trajetória de pontos de  $N \setminus S$  pode sair de  $N$  sem passar por  $L$ , logo um comportamento como (b) não é permitido.

Se as trajetórias se comportam como na Figura 14 (c), temos um exemplo de par-filtração.

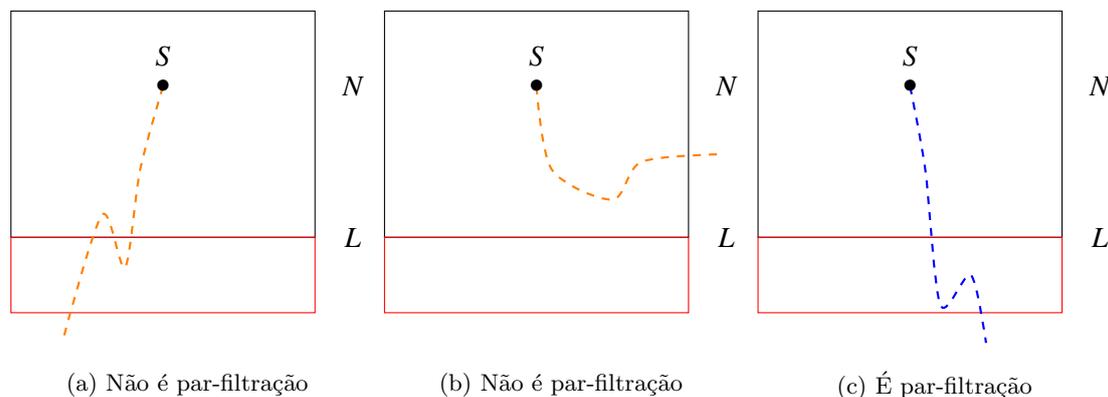


Figura 14: Par-filtração

Assim como o Teorema 0.15, apresentamos um teorema que garante a existência de pares-filtração. O interessante aqui é que, não só a existência está garantida, como também temos uma espécie de estabilidade no sentido que perturbações sobre a função ainda mantém o par-filtração.

**Teorema 0.29.** *Seja  $S$  um conjunto invariante isolado de  $f$ .*

1. *Toda vizinhança de  $S$  contém um bloco isolante  $N$ .*
2. *Se  $L$  é qualquer vizinhança compacta suficientemente pequena de  $N^-$  em  $N$ , então  $(N, L)$  é um par-filtração.*

3. Existe uma vizinhança de  $f$  na topologia  $C^0$  tal que para qualquer  $\tilde{f}$  nesta vizinhança,  $\tilde{S} = \text{Inv}(\tilde{f})$  com relação a  $\tilde{f}$  é um conjunto invariante isolado e  $(N, L)$  é um par-filtração para  $\tilde{S}$ .

É possível garantir não só a existência, mas sim um par-filtração  $(N, L)$  tal que a cohomologia  $H^*(N, L)$  tenha dimensão finita sempre que consideramos uma variedade  $n$ -dimensional, que é o que garante o seguinte teorema:

**Teorema 0.30.** *Seja  $U$  um subconjunto aberto de uma variedade  $n$ -dimensional  $M$  e suponha que  $f : U \rightarrow M$  é uma aplicação contínua com um conjunto invariante isolado  $S$ . Dentro de qualquer vizinhança  $S$  existe um par-filtração  $(N, L)$  tal que  $N$  é uma variedade  $n$ -dimensional com bordo e  $\partial L$  é uma subvariedade de codimensão um de  $M$ . Em particular,  $(N, L)$  é homeomorfo a um par simplicial finito.*

Isso não acontece no seguinte exemplo:

**Exemplo 0.31** (*Hawaiian Earing*). Dado um par-filtração  $(N, L)$ , a cohomologia  $H^*(N, L)$  pode não ser de dimensão finita. Por exemplo, suponha que

$$X = \bigcup_{n>0} \left\{ (x, y) \mid x^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \right\}.$$

O conjunto  $X$  está representado na Figura 15. Se tomarmos  $N = X$  e  $L = \emptyset$ , vale que, independente da aplicação  $f : X \rightarrow X$ ,  $(N, L)$  é um par-filtração com  $H^*(N, L) = H^*(X)$  um espaço de dimensão infinita.

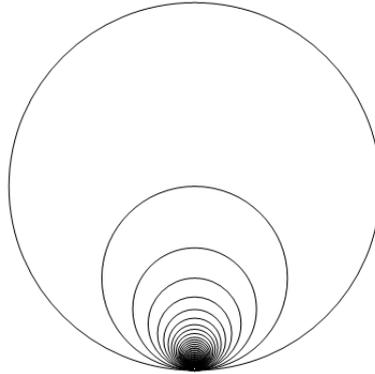


Figura 15: *Hawaiian Earing*

**Exemplo 0.32** (Ferradura de Smale). Seja  $R \subset \mathbb{R}^2$  uma região formada por um quadrado  $Q$  e dois semidiscos  $D_1$  e  $D_2$ . Sejam  $H_0$  e  $H_1$  dois retângulos disjuntos contidos em  $Q$  como na Figura 16. Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo em que  $f(H_0) = V_0$  e  $f(H_1) = V_1$ .

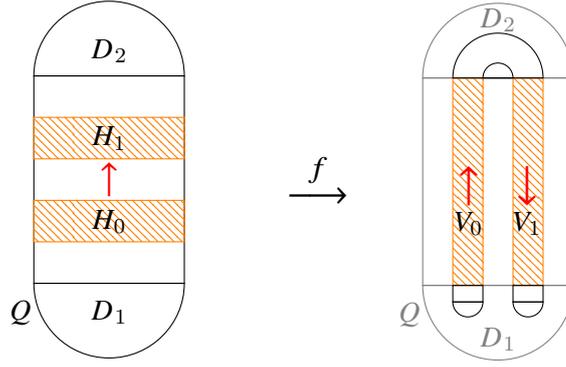


Figura 16: Ferradura de Smale

Como  $f$  é um difeomorfismo, temos que

$$S = \text{Inv}(Q) = \{x \in Q \mid f^n(x) \in Q, \forall n \in \mathbb{Z}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q) = \Lambda.$$

Como o conjunto dos pontos invariantes por  $f$  é um produto de dois conjuntos de Cantor contidos no interior de  $Q$ , i.e.,  $\text{Inv}(N) \subset \text{int}(N)$ , vale que  $Q$  é vizinhança isolante. Assim,  $\Lambda$  é um conjunto invariante isolado pois  $\Lambda = \text{Inv}(Q)$  e  $Q$  é vizinhança isolante.

Agora, considere os seguintes pares:  $N_1 = Q$ ,  $L_1 = \overline{N_1 \setminus (H_0 \cup H_1)}$  e  $N_2 = V_0 \cup V_1$ ,  $L_2 = \overline{(V_0 \cup V_1) \setminus (H_0 \cup H_1)}$ , ilustrados na Figura 17. Vamos provar que  $(N_1, L_1)$  e  $(N_2, L_2)$  são dois pares-filtração para  $\Lambda$ .

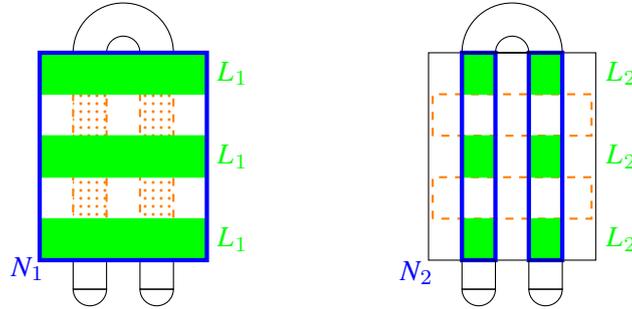


Figura 17: Par-Filtração para  $S$

Claramente vale que  $N_i, L_i$  com  $i \in \{1, 2\}$  são ambos os fechos de seus interiores. Basta agora verificar as outras três propriedades de par-filtração dadas na Definição 0.28. Na primeira, faremos a demonstração completa enquanto que nas outras duas deixaremos apenas as ilustrações.

1. Queremos mostrar que  $\overline{N_i \setminus L_i}$  é uma vizinhança isolante de  $S = \Lambda$  com  $i \in \{1, 2\}$ .

Como  $\overline{N_i \setminus L_i}$  é um subconjunto fechado de um conjunto compacto, vale que ele também é compacto. Agora devemos mostrar que  $\text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i}) \subset \text{int}(\overline{N_i \setminus L_i})$ . Afirimo que  $\text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i}) = \text{Inv}(Q)$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Como  $\overline{N_i \setminus L_i} \subset Q$ , temos que  $\text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i}) \subset \text{Inv}(Q)$ . Para a outra inclusão, suponhamos, por absurdo, que existe um  $x \in \text{Inv}(Q)$  tal que  $x \notin \text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i})$ , i.e.,  $f^n(x) \notin \overline{N_i \setminus L_i}$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ . Logo,  $f^n(x) \notin H_0 \cup H_1$  e assim  $f(f^n(x)) \notin Q$ , i.e.,  $x \notin \text{Inv}(Q)$  e temos um absurdo. Portanto,  $\text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i}) = \text{Inv}(Q)$ . É o que mostra a Figura 18.

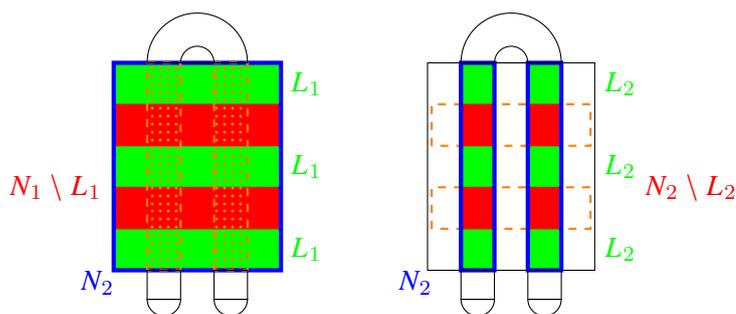


Figura 18:  $\overline{N_i \setminus L_i}$  é vizinhança isolante de  $S$ .

Agora, para mostrar o fato  $\text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i}) \subset \text{int}(\overline{N_i \setminus L_i})$ , suponha, por absurdo, que exista  $x \in \text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i})$  tal que  $x \notin \text{int}(\overline{N_i \setminus L_i})$ , e então  $x \in L_i$ . Logo,  $f(x) \notin Q$  ou  $f^2(x) \notin Q$ , o que implica que  $x \notin \text{Inv}(Q) = \text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i})$ , donde decorre o absurdo. Portanto,  $\text{Inv}(\overline{N_i \setminus L_i}) \subset \text{int}(\overline{N_i \setminus L_i})$  com  $i \in \{1, 2\}$ .

2. Temos que  $L_i$  é uma vizinhança para  $N_i^-$  quando  $i \in \{1, 2\}$ , como mostra a Figura 19.

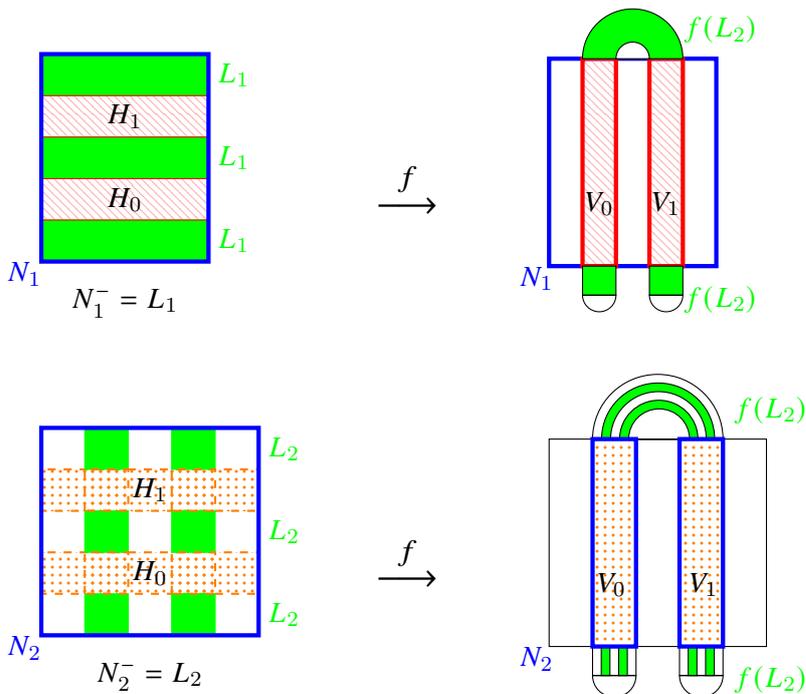


Figura 19:  $L_i$  é o conjunto de saída de  $N_i$ .

3. Temos também que  $f(L_i) \cap \overline{N_i \setminus L_i} = \emptyset$  para  $i \in \{1, 2\}$ , como fica claro na Figura 20.

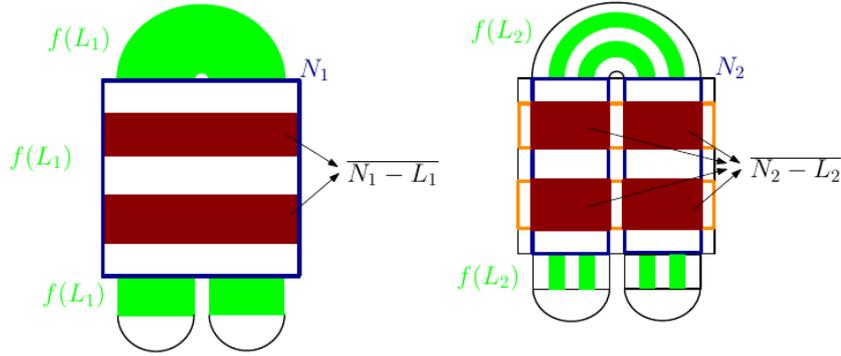


Figura 20:  $f(L_i) \cap \overline{N_i \setminus L_i} = \emptyset$  para  $i \in \{1, 2\}$  (figura retirada de (Villapouca, 2013)).

Portanto,  $(N_1, L_1)$  e  $(N_2, L_2)$  são dois pares-filtração distintos para o conjunto invariante isolado  $S = \Lambda$ .

Note que, como mostra a Figura 21 o espaço pontuado  $N_1/L_1$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $S^1 \vee S^1$  e  $N_2/L_2$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$ , i.e., o tipo de homotopia do espaço pontuado de  $S$  depende da escolha do par-filtração e assim não é um invariante homotópico.

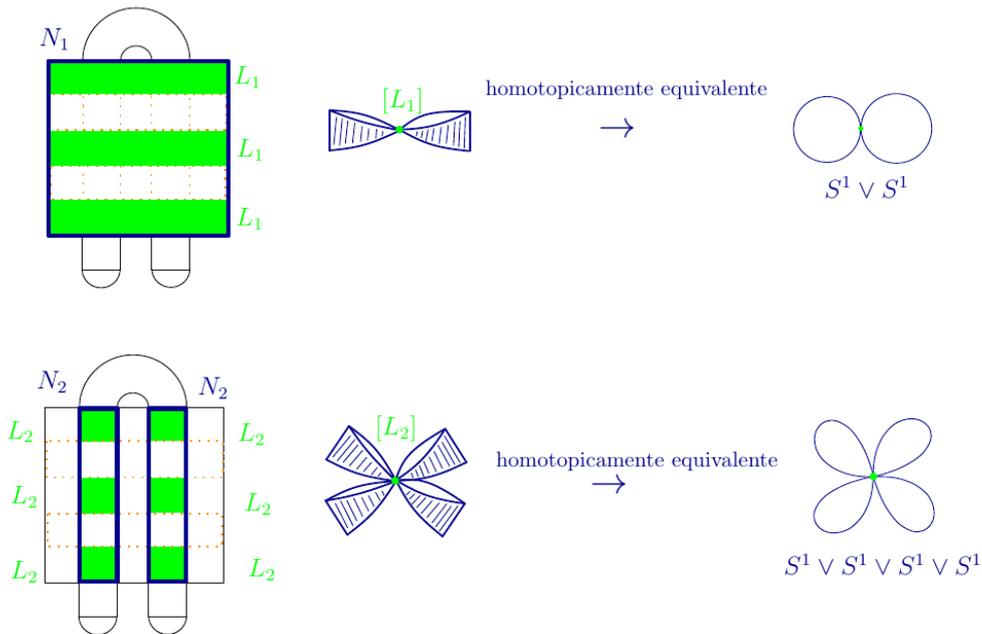


Figura 21: Pares-filtração para  $S$  que tem espaços pontuados distintos (figura retirada de (Villapouca, 2013)).

Portanto, não podemos definir o índice de Conley discreto como fizemos na Definição 0.21 do caso contínuo. Assim sendo, precisamos de um conceito mais abrangente de modo a conseguir a independência do par-filtração para garantir que o índice de Conley discreto fique bem definido.

## 2.2 Shift Equivalência

Nosso objetivo é encontrar um invariante que independa do par-filtração, já que, ao contrário do caso contínuo, no caso discreto o tipo de homotopia do espaço pontuado  $N/L$  pode ser diferente para pares-filtração diferentes.

**Teorema 0.33.** *Seja  $P = (N, L)$  um par-filtração para  $f$  e seja  $N_L$  o espaço quociente  $N/L$  em que o conjunto colapsado  $L$  é denotado por  $[L]$  e é tomado como ponto base. Então  $f$  induz uma aplicação contínua que preserva o ponto base  $f_P : N_L \rightarrow N_L$  com a propriedade que  $[L] \subset \text{int}(f^{-1}([L]))$ .*

*Demonstração.* Seja  $p : N \rightarrow N/L$  a aplicação quociente, i.e.,

$$p(x) = \begin{cases} [x] = [L] & \text{se } x \in L \\ [x] = \{x\} & \text{se } x \notin L \end{cases}$$

e defina  $f_P([L]) = [L]$  e  $f_P(x) = p(f(x))$  caso contrário, onde temos identificado  $N_L \setminus \{[L]\}$  com  $N \setminus L$ . Pela definição de par-filtração,  $f(L) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ . Por isso, se  $K$  é vizinhança suficientemente pequena de  $L$  em  $N$ , então  $f(K) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ . Por isso,  $f_P(x) = [L]$  para todo  $x \in p(K)$ .

É imediato que  $f_P$  é contínua em  $N_L \setminus \{[L]\}$ , visto que é a composição de funções contínuas. Para verificar a continuidade em  $[L]$ , note que se  $\{x_n\}$  é uma sequência em  $N_L \setminus \{[L]\}$  convergindo para  $[L]$ , então  $\{p^{-1}(x_n)\}$  está eventualmente em  $K$ , logo  $\{f_P(x_n)\}$  é uma sequência que é eventualmente constante e igual a  $[L]$ .  $\square$

Denominamos esta aplicação  $f_P$  de **aplicação espaço pontuado** associada a  $P$ .

Ainda estamos carregando o problema de que o tipo de homotopia de  $f_P$  e de  $N_L$  dependem da escolha do par-filtração  $P = (N, L)$ . Queremos definir um objeto que independa da escolha de  $P$ , mas que, ao mesmo tempo, não seja tão restritivo.

Seja  $\mathcal{K}$  uma categoria, i.e., uma classe de objetos junto com uma classe de morfismos que são mapas entre esses objetos, denominados de endomorfismos. Sejam, então,  $X$  e  $X'$  objetos em  $\mathcal{K}$  e  $f : X \rightarrow X$ ,  $g : X' \rightarrow X'$  dois endomorfismos.

**Definição 0.34.** Dizemos que  $(X, f)$  e  $(X', g)$  são **shift equivalentes**, o que denotamos por  $f \sim_s g$ , se existem  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $r : X \rightarrow X'$  e  $s : X' \rightarrow X$  tais que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ X' & \xrightarrow{g} & X' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X' \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ X' & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

comutam, e que as compostas satisfaçam  $r \circ s = g^m$  e  $s \circ r = f^m$ . O inteiro  $m$  é denominado de comprimento.

Considere  $h_P(S)$  a classe de homotopia das aplicações que preservam ponto base em  $N_L$ . Do Teorema 0.33, podemos tomar  $f_P$  como representante de  $h_P(S)$ .

**Teorema 0.35.** *Suponha que  $P_1 = (N_1, L_1)$  e  $P_2 = (N_2, L_2)$  são par-filtração para  $S$ . Então as aplicações induzidas  $f_{P_1}$  e  $f_{P_2}$ , nos correspondentes espaços pontuados, são shift equivalentes.*

Sejam agora  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos pontuados e  $[f] : X \rightarrow X$  e  $[g] : Y \rightarrow Y$  as classes de homotopia das aplicações que preservam o ponto base. Então a definição de shift de equivalência nos diz que  $(X, [f])$  e  $(Y, [g])$  são shift equivalentes se existem classes de homotopia de aplicações  $[r] : X \rightarrow Y$  e  $[s] : Y \rightarrow X$  tais que vale a comutatividade nos diagramas como em 0.34, i.e.,  $[g \circ r] = [r \circ f]$  e  $[s \circ g] = [f \circ s]$ , e também  $[r \circ s] = [g^m]$  e  $[s \circ r] = [f^m]$  para algum  $m \in \mathbb{Z}^+$ .

## 2.3 Definição

Temos agora toda a bagagem teórica para definir os índices de Conley discretos homotópico, homológico, cohomológico e cohomológico reduzido.

**Definição 0.36** (Índice de Conley homotópico). Seja  $S$  um conjunto invariante isolado para uma aplicação contínua  $f$ . O **índice de Conley homotópico** de  $S$ , denotado por  $h(S, f)$ , é a classe de shift de equivalência de  $h_P(S)$  em que  $P = (N, L)$  é um par-filtração para  $S$ .

Isto é, este índice é a classe de shift de equivalência da classe de equivalência de homotopia da aplicação no espaço pontuado associada a  $P$ . Quando não causar confusão, iremos retirar o símbolo  $f$  em  $h(S, f)$ .

A parte mais interessante, assegurada pelo próximo teorema, é que esse índice permanece o mesmo quando submetemos  $f$  a pequenas variações.

**Teorema 0.37.** *Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua com vizinhança isolante  $N$  e  $S = \text{Inv}(N)$  um conjunto invariante isolado. Existe uma vizinhança de  $f$  na  $C^0$ -topologia com a propriedade que  $N$  é uma vizinhança isolante para todo  $\tilde{f}$  nessa vizinhança. Além disso,  $h(S, f) = h(\tilde{S}, \tilde{f})$  em que  $\tilde{S} = \text{Inv}(N, \tilde{f})$ .*

O Teorema 0.38 nos garante que o índice do conjunto vazio é igual a zero.

**Teorema 0.38.** *Se  $h(S) \neq 0$ , então  $S \neq \emptyset$ .*

**Definição 0.39** (Índice de Conley Homológico). Denotaremos por  $\text{Con}_*(S)$  o **índice de Conley homológico** que é definido como a classe de shift equivalência de  $(f_P)_* : H_*(N_L, [L]) \rightarrow H_*(N_L, [L])$  em que  $P = (N, L)$  é um par-filtração para  $S$ .

**Definição 0.40** (Índice de Conley Cohomológico). Denotaremos por  $\text{Con}^*(S)$  o **índice de Conley cohomológico** que é definido como a classe de shift equivalência de  $(f_P)^* : H^*(N_L, [L]) \rightarrow H^*(N_L, [L])$  em que  $P = (N, L)$  é um par-filtração para  $S$ .

O próximo índice de Conley que estamos prestes a definir difere dos anteriores pelo fato de estar associado não apenas a uma classe de equivalência, mas a um par  $(CH^*(S), \chi^*(S))$  em que  $CH^*(S)$  é um espaço vetorial e  $\chi^*(S)$  é um isomorfismo. Assim como antes, considere  $f$  uma aplicação contínua e  $P = (N, L)$  um par-filtração para um conjunto invariante isolado de  $S$ . Escolhendo trabalhar com os grupos de cohomologia tomando coeficientes num corpo, temos que  $H^*(N_L, [L])$  é um espaço vetorial e  $f_P^* : H^*(N_L, [L]) \rightarrow H^*(N_L, [L])$  é uma aplicação linear. Sabe-se que, quando  $R$  é um outro par-filtração, então  $f_P^*$  e  $f_R^*$  diferem apenas nas suas partes nilpotentes. Mais discussões podem ser encontradas nas referências (Villapouca, 2013; Mrozek, 1990; Franks; Richeson, 2000a).

**Definição 0.41** (O Índice de Conley Cohomológico Reduzido). Definimos o índice de Conley cohomológico reduzido de  $S$  como sendo

$$\text{Con}^*(S) = (CH^*(S), \chi^*(S))$$

em que  $CH^*(S) = \bigcap_{n>0} (f_P^*)^n(H^*(N_L, [L]))$  e  $\chi^*(S) : CH^*(S) \rightarrow CH^*(S)$  é o automorfismo induzido por  $f_P^*$ .

**Exemplo 0.42.** (Villapouca, 2013) Voltando ao Exemplo 0.32, considere o par-filtração sendo  $N$  e  $L$  como na Figura 22. Temos que:

$$\begin{aligned} (f_P)^1 : H^1(N_L, [L]) &\longrightarrow H^1(N_L, [L]) \\ [\alpha] + B^1(N_L, [L]) &\longrightarrow (f_P)^\#([\alpha]) + B^1(N_L, [L]) \end{aligned}$$

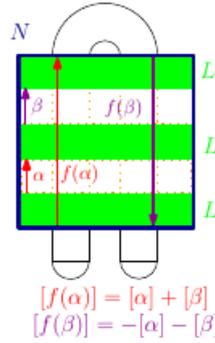


Figura 22: Induzida em cohomologia da aplicação espaço pontuado  $f_P$ . (Villapouca, 2013)

Vamos calcular o índice de Conley cohomológico reduzido para o conjunto invariante isolado  $S = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q) = \text{Inv}(Q)$ . Já observamos que  $N_L$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $S^1 \vee S^1$ . Logo,

$$H^q(N_L, [L]) = H^q(S^1 \vee S^1, *) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & \text{se } q = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A Figura 22 mostra o comportamento dos geradores de  $H^1(N_L, [L])$  e para onde eles foram mapeados com  $(f_P)^1$ . Como para dimensões diferentes de 1 temos que  $H^q(N_L, [L]) = 0$ , então  $(f_P)^q = 0$ . Vamos calcular então a induzida em cohomologia da aplicação no espaço pontuado  $(f_P)^1$  em dimensão 1.

|  |
|--|
| $H^1(N_L, [L]) \approx \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$                           |
| $(f_P)^\#([\alpha]) = f_P([\alpha]) = [f(\alpha)] = [\alpha] + [\beta]$        |
| $(f_P)^\#([\beta]) = f_P([\beta]) = [f(\beta)] = -[\alpha] - [\beta]$          |
| $(f_P)^1([\alpha]) = [\alpha] + [\beta] + B^1(N_L, [L]) = [\alpha] + [\beta]$  |
| $(f_P)^1([\beta]) = -[\alpha] - [\beta] + B^1(N_L, [L]) = -[\alpha] - [\beta]$ |
| $(f_P)^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$                     |

Tabela 1:  $(f_P)^1$  para a induzida (tabela retirada de (Villapouca, 2013)).

## Índice de Conley

Como  $(f_P^1)^2 = 0$ , temos  $CH^1(S) = \bigcap_{n>0} (f_P^1)^n(H^1(N_L, [L])) \subset (f_P^1)^2(H^1(N_L, [L])) = 0$ . Logo,  $CH^1(S) = 0$  e  $\chi^1(S) = 0$ . Portanto,  $\text{Con}^q(S) = (0, 0)$  para todo  $q \in \mathbb{N}$  como mostra a Tabela 1. Um exemplo em que o índice de Conley cohomológico reduzido não é zero será apresentado no Capítulo 5.

# Índice de Conley para SDA

O objetivo deste capítulo é transpor para SD aleatórios os conceitos apresentados no Capítulo 3.2.4 tomando todos os cuidados que os fatores aleatórios pedem. Toda a construção será feita apenas para SDA discretos. Usaremos as notações estabelecidas na Seção 3.

Vamos apresentar os análogos dos conceitos necessários para definir o índice de Conley para sistemas dinâmicos discretos que foram introduzidos na Seção 2, como conjunto invariante isolado, vizinhança isolante, par filtração, etc.

No que segue neste capítulo, nos dedicaremos a estudar um SDA discreto  $\phi$  gerado por um  $\varphi$  homeomorfismo aleatório com ruído  $\theta$  sobre um espaço  $(X, d_X)$  métrico, polonês e localmente compacto. Contudo, algumas proposições independem de  $\varphi$  ser ou não homeomorfismo, e optaremos por demonstrá-las para o caso mais geral. Nestes casos, deixaremos claro que esta hipótese não é necessária. Esta construção está feita apenas em (Liu, 2008).

## 1 Conjuntos Invariantes Aleatórios

**Definição 0.1.** Se  $\varphi$  e um homeomorfismo aleatório e  $k \in \mathbb{Z}$ , usaremos  $\varphi^k$  para

$$\varphi^k(\omega) := \phi(k, \omega)$$

para todo  $\omega$ , em que  $\phi$  é o SDA gerado por  $\varphi$ .

Se  $\varphi$  é um mapa aleatório (não necessariamente um homeomorfismo) e  $0 > k \in \mathbb{Z}$ , a notação  $\varphi^k$  significa  $\varphi^k(\omega)(x) := \{y \in X \mid \varphi^{-k}(\theta_k \omega)(y) = x\}$ .

**Definição 0.2.** Seja  $\phi$  um SDA e seja  $N(\omega)$  um conjunto aleatório compacto de  $X$ . Definimos o **conjunto invariante maximal aleatório** em  $N(\omega)$  como:

$$\text{Inv}(N, \phi)(\omega) := \{x \in N(\omega) \mid \phi(n, \omega, x) \in N(\theta_n \omega) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}$$

qualquer que seja  $\omega \in \Omega$ . Quando não houver confusão sobre o SDA em questão, denotaremos  $\text{Inv}(N, \phi)(\omega)$  apenas por  $\text{Inv}(N)(\omega)$ .

Observe aqui que, ao contrário do caso determinístico, não pedimos que  $\phi(n, \omega, x) \in N(\omega)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , mas sim que ele permaneça na imagem do conjunto aleatório compacto  $N$  aplicado na atualização  $\theta_n \omega$ , ou seja, que permaneça em  $N(\theta_n \omega)$ . A justificativa da maximalidade decorre da própria definição. Na Figura 1, o ponto  $y$  é tal que  $y \notin \text{Inv}(N)$  pois  $\phi(2, \omega, x) \notin N(\theta_2 \omega)$  já o ponto  $x$  ainda é tal que pode pertencer ao conjunto invariante maximal de  $N$ .

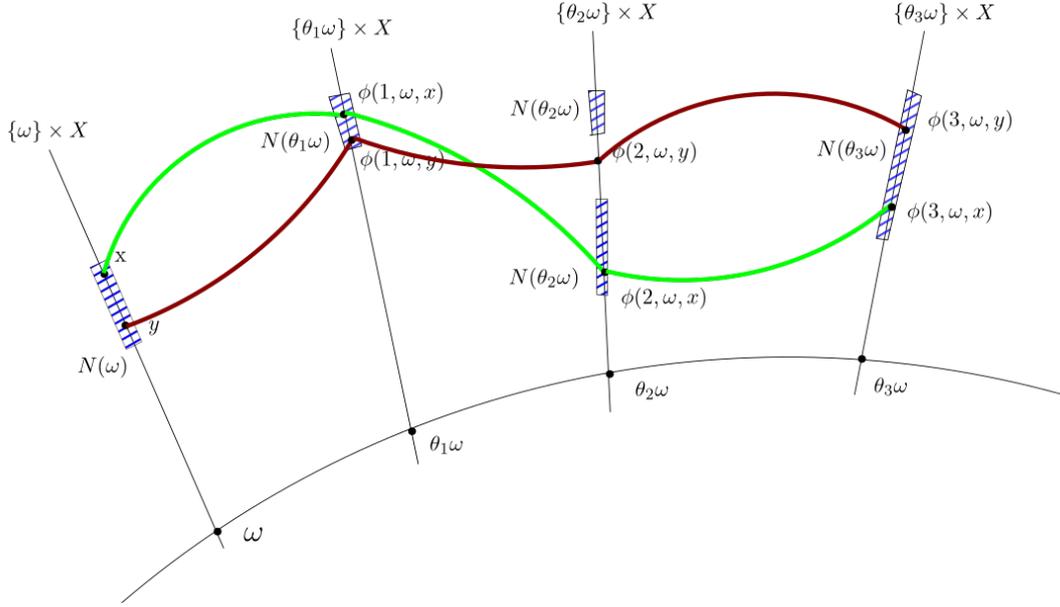


Figura 1: Conjunto Invariante Maximal Aleatório

**Definição 0.3.** Um conjunto compacto aleatório  $N$  é denominado de **vizinhança isolante aleatória** se ele satisfaz  $\text{Inv}(N, \phi) \subset \text{int}(N)$

Note que temos que o interior de um conjunto aleatório é  $\text{int}D(\omega)$  e este conjunto está bem definido pois  $D(\omega) \in \mathcal{P}(X)$ . O fecho de um conjunto aleatório, bem como outras propriedades topológicas de um subconjunto de  $X$ , são definidas de maneira análoga.

Suponha que na Figura 1 o ponto  $x$  seja o único ponto tal que  $\phi(n, \omega, x) \in N(\theta_n \omega)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , i.e.,  $\text{Inv}(N) = \{x\}$ . Neste caso, como na imagem  $x \in \text{int}N(\omega)$ , nós teríamos que  $N$  é uma vizinhança isolante aleatória.

**Definição 0.4.** Um conjunto aleatório  $S$  é denominado de **conjunto invariante isolado aleatório** se existe uma vizinhança isolante aleatória  $N$  tal que  $S(\omega) = \text{Inv}(N, \phi)(\omega)$   $\mathbb{P}$ -quase certamente para todo  $\omega \in \Omega$ .

Novamente na Figura 1 considerando  $S(\omega) = \{x\}$  teríamos que  $S$  é um conjunto invariante isolado aleatório. Note que a escolha deste  $x$  na verdade depende de  $\omega$ , i.e.,  $x = x(\omega)$ ; de fato, se  $\omega_1 \neq \omega_2$  poderíamos ter  $N(\omega_1) \neq N(\omega_2)$  e assim  $x$  poderia não mais satisfazer  $\phi(n, \omega, x) \in N(\theta_n \omega)$  para  $\omega = \omega_2$  (claramente supondo que essa relação era satisfeita para  $\omega = \omega_1$ ).

**Definição 0.5.** Um conjunto aleatório compacto  $N$  é denominado de **bloco isolante aleatório** se

$$\varphi(\theta_{-1}\omega, N(\theta_{-1}\omega)) \cap N(\omega) \cap \varphi^{-1}(\theta\omega, N(\theta\omega)) \subset \text{int}N(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-q.c.} \quad (1)$$

para todo  $\omega \in \Omega$ , sendo  $\varphi(\omega, N(\omega))$  a imagem de  $\varphi(\omega) : N(\omega) \rightarrow X$ , e portanto  $\varphi(\theta_{-1}\omega, N(\theta_{-1}\omega))$  é a imagem de  $\varphi(\theta_{-1}\omega) : N(\theta_{-1}\omega) \rightarrow X$ , e  $\varphi^{-1}(\theta\omega, N(\theta\omega))$  é a imagem de  $\varphi^{-1}(\theta\omega) : N(\theta\omega) \rightarrow X$ .

Observe que foi necessário considerar o cociclo negativo de modo que todos os conjuntos estejam na mesma fibra, conforme observamos na inclusão da Equação 1.

**Definição 0.6.** Dada uma vizinhança isolante aleatória  $N(\omega)$ , o **conjunto de saída de  $N(\omega)$**  é o conjunto aleatório  $N^-(\omega)$ , tal que para todo  $\omega \in \Omega$ ,

$$N^-(\omega) := \{x \in N(\omega) \mid \varphi(\omega)(x) \notin \text{int}N(\theta\omega)\} \text{ } \mathbb{P}\text{-quase certamente}$$

Na Figura 2, o conjunto aleatório  $N(\omega)$  está ilustrado como a união de dois conjuntos aleatórios  $A(\omega)$  e  $B(\omega)$ . O conjunto  $B(\omega)$  é tal que todos os seus pontos são mapeados por  $\varphi(\omega)(\cdot)$  para o interior de  $N(\theta_1\omega)$ ; já os pontos do conjunto  $A(\omega)$  são tais que  $\varphi(\omega)(A(\omega)) \cap \text{int}N(\theta_1\omega) = \emptyset$ . Logo, neste caso temos que  $N^-(\omega) = A(\omega)$ .

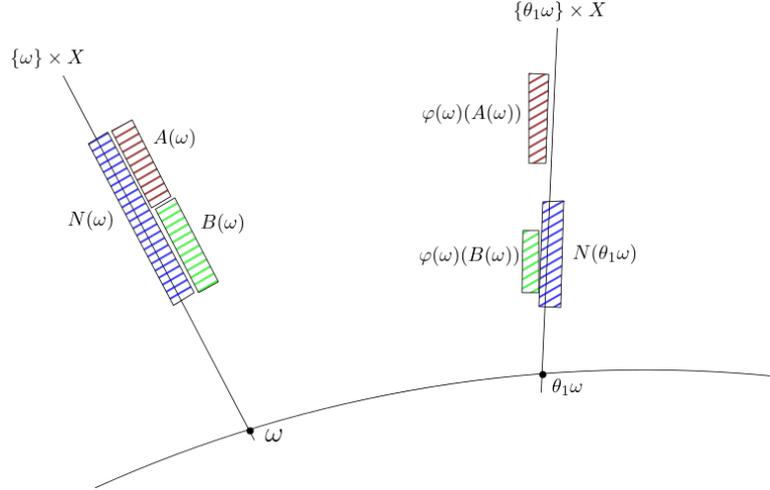


Figura 2: Conjunto de Saída Aleatório

**Proposição 0.7.** Sendo  $\phi$  um SDA discreto gerado por  $\varphi$  mapa aleatório, vale que um bloco isolante aleatório é uma vizinhança isolante aleatória.

*Demonstração.* De fato, seja  $\omega \in \Omega$  qualquer. Temos que se  $x \in \text{Inv}(N, \phi)(\omega)$ , então

$$x \in N(\omega) \text{ e é tal que } \phi(n, \omega, x) \in N(\theta_n\omega) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Em particular, vale que  $x \in N(\omega)$ .

Como  $\phi(1, \omega, x) \in N(\theta_1\omega)$ , usando a Definição 0.1, temos que  $\phi(1, \omega, x) = \varphi^1(\omega)(x) \in N(\theta_1\omega)$ . Logo, como  $\varphi^1(\omega) : X \rightarrow X$  é tal que  $\varphi^1(\omega) : x \mapsto y \in N(\theta_1\omega)$ , logo  $x$  pertence a imagem de  $(\varphi^1(\omega))^{-1} : N(\theta_1\omega) \rightarrow X$ , i.e, pertence a imagem de  $\varphi^{-1}(\theta\omega) : N(\theta\omega) \rightarrow X$ .

Analogamente, como  $\phi(-1, \omega, x) \in N(\theta_{-1}\omega)$ , temos que  $\phi(-1, \omega, x) = \varphi^{-1}(\omega)(x) \in N(\theta_{-1}\omega)$ . Logo, como  $\varphi^{-1}(\omega)(x) = \{y \in X \mid \varphi^{-k}(\theta_k\omega)(y) = x\}$  (usando novamente a Definição 0.1) temos  $\varphi^{-1}(\omega)(x) \in N(\theta_{-1}\omega)$  por hipótese, e assim temos que  $\varphi^{-1}(\omega)(x) = \{y \in X \mid \varphi^{-k}(\theta_k\omega)(y) = x\} \subset N(\theta_{-1}\omega)$ , e portanto  $x$  pertence a imagem de  $\varphi^{-(-1)}(\theta_{-1}\omega) : N(\theta_{-1}\omega) \rightarrow X$ , ou seja,  $x$  pertence a imagem de  $\varphi^{-1}(\theta\omega) : N(\theta\omega) \rightarrow X$ .  $\square$

*Observação 0.8.* A recíproca da Proposição 0.7 não é necessariamente verdadeira.

**Lema 0.9.** Seja  $N$  uma vizinhança isolante aleatória. Seu correspondente conjunto invariante

isolado aleatório  $S = \text{Inv}(N, \phi)$  é dado por, para todo  $\omega \in \Omega$ ,

$$\text{Inv}(N, \phi)(\omega) := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \phi(-n, \theta_n \omega) N(\theta_n \omega) \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

*Demonstração.* Temos que  $\text{Inv}(N, \phi)(\omega) = \{x \in N(\omega) \mid \phi(n, \omega, x) \in N(\theta_n \omega) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}$  pela definição deste conjunto aleatório. Logo, se  $x \in \text{Inv}(N, \phi)(\omega)$ , vale que  $x \in N(\omega)$  e que  $\phi(n, \omega, x) \in N(\theta_n \omega) \forall n \in \mathbb{Z}$ .

Como  $\theta_n : \Omega \rightarrow \Omega$  é um fluxo com  $n \in \mathbb{Z}$ , vale que  $\theta_0 = \text{id}_\Omega$ . Logo,  $x = \phi(0, \omega, x) \in N(\theta_0 \omega) = N(\omega)$  em que a primeira igualdade se dá pois  $\phi(0, \omega) = \text{id}_X$ . Portanto,  $x \in \text{Inv}(N, \phi)(\omega)$  é equivalente a  $\phi(n, \omega, x) \in N(\theta_n \omega)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Como  $\phi(n, \omega) = \varphi^n(\omega)$ , temos que  $\phi(n, \omega)$  é homeomorfismo para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e  $\omega \in \Omega$ . Portanto, temos que  $\phi(n, \omega, x) \in N(\theta_n \omega)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Assim,

$$\phi(n, \omega, x) \in N(\theta_n \omega) \iff y := \varphi^n(\omega)(x) \in N(\theta_n \omega)$$

Da Definição 0.27 temos que  $\phi(n, \omega) \circ \phi(-n, \theta_n \omega) = \varphi^n(\omega) \circ \varphi^{-n}(\theta_n \omega)(x) = \text{id}_X$ , temos que  $\varphi^{-n}(\theta_n \omega)(y) = \phi(-n, \theta_n \omega) = x$ , logo, já que  $y \in N(\theta_n \omega)$ , temos que  $\phi(n, \omega, x) \in N(\theta_n \omega)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  é equivalente a  $x \in \phi(-n, \theta_n \omega) N(\theta_n \omega)$  qualquer que seja  $n \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

*Observação 0.10.* De maneira análoga à demonstração do Lema 0.9 e usando a definição do conjunto de saída aleatório  $N^-$ , podemos mostrar que

$$N^-(\omega) = N(\omega) \cap \varphi^{-1}(\theta \omega, \text{int}^C N(\theta \omega)) \quad \mathbb{P}\text{-q.c}$$

para todo  $\omega \in \Omega$ , em que  $\text{int}^C N(\theta \omega)$  é o complemento de  $\text{int} N(\theta \omega)$  em  $X$ . De fato,  $\varphi(\omega, x) \notin \text{int} N(\theta \omega) \iff y := \varphi(\omega, x) \in \text{int}^C N(\theta \omega)$ . Mas então

$$\varphi^{-1}(\theta \omega)y = \phi(-1, \theta \omega)y = \phi(-1, \theta \omega)\varphi(\omega, x) = \text{id}_X x = x$$

o que nos leva a  $x \in \varphi^{-1}(\theta \omega, \text{int}^C N(\theta \omega))$ .

Pela definição de  $N^-$ , de maneira análoga podemos mostrar que

$$\varphi(\omega, N^-(\omega)) \cap \text{int} N(\theta \omega) = \emptyset, \quad \varphi(\omega, (N \setminus N^-)(\omega)) \subset \text{int} N(\theta \omega) \quad \mathbb{P}\text{-q.c}$$

para todo  $\omega \in \Omega$ .

*Observação 0.11.* Seja  $N$  um conjunto compacto aleatório. A inclusão  $\text{Inv}(N(\omega)) \subset \Omega_N(\omega)$  vale  $\mathbb{P}$ -q.c. De fato, se  $x \in \text{Inv}(N(\omega))$ . Pelo Lema 0.9, para qualquer  $k \in \mathbb{Z}$ , temos  $x \in \phi(k, \theta_{-k} \omega) N(\theta_{-k} \omega)$ , apenas reescrevendo a identidade apresentada no referido lema com  $-n$  representando um inteiro ao invés de  $n$ . Logo, dado qualquer  $n \geq 0$ , temos  $x \in \bigcup_{k \geq n} \phi(k, \theta_{-k} \omega) N(\theta_{-k} \omega)$ , portanto  $\overline{\bigcup_{k \geq n} \phi(k, \theta_{-k} \omega) N(\theta_{-k} \omega)}$  e como  $n$  era qualquer,  $x \in \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{k \geq n} \phi(k, \theta_{-k} \omega) N(\theta_{-k} \omega)}$ , i.e.,  $x \in \Omega_N(\omega)$ .

Agora, claramente temos a seguinte consequência:  $\text{Inv} N = \Omega_N$  se, e somente se,  $\Omega_N \subset N$ . Intuitivamente, podemos entender essa igualdade da seguinte forma: o conjunto invariante maximal  $\text{Inv} N$  coincide com o seu ômega-limite  $\Omega_N$  quando todos os pontos desse conjunto que eventual-

mente saem de  $N$  retornam a ele e não saem mais deste conjunto. Em particular, quando  $N$  é invariante positivamente, temos que  $\Omega_N \subset N$   $\mathbb{P}$ -q.c.

## 2 Par-Filtração Aleatório

**Definição 0.12.** Seja  $N$  uma vizinhança isolante aleatória,  $L(\omega) \subset N(\omega)$  um conjunto compacto aleatório (i.e.,  $L(\omega) \subset N(\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c.) e  $S(\omega)$  o conjunto invariante isolado aleatório dentro de  $N(\omega)$ . Também vamos assumir que  $N(\omega) = \text{cl}(\text{int}N(\omega))$  e  $L(\omega) = \text{cl}(\text{int}L(\omega))$ . Dizemos que  $(N(\omega), L(\omega))$  é um **par-filtração aleatório** para  $S$  se valem as seguintes condições:

- $\text{cl}(N(\omega) \setminus L(\omega))$  é uma vizinhança isolante aleatória de  $S(\omega)$ ;
- $L(\omega)$  é uma vizinhança aleatória de  $N^-(\omega)$  em  $N(\omega)$ ;
- $\varphi(\omega, L(\omega)) \cap \text{cl}(N \setminus L)(\theta\omega) = \emptyset$  para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega$ .

Note que essa definição é muito similar à Definição 0.28 em que estabelecemos o par-filtração para o caso de sistemas dinâmicos determinísticos. As principais diferenças são duas: a primeira diz respeito às igualdades e inclusões de conjuntos aleatórios, já que agora pedimos apenas que elas aconteçam quase certamente; a segunda, reside no fato de que na terceira condição listada na Definição 0.12 devemos nos atentar ao fecho de  $(N \setminus L)$  ser tomado em  $\theta\omega$ , já que  $\varphi(\omega, L(\omega))$  também está na fibra  $\{\theta\omega\} \times X$ .

**Definição 0.13.** Dada uma variável aleatória  $\epsilon(\omega) > 0$  q.c., definimos uma  **$\epsilon$ -cadeia aleatória de comprimento  $n$**  como uma sequência de  $n+1$  variáveis aleatórias valuadas em  $X$ ,  $x_0(\omega), x_1(\omega), \dots, x_n(\omega)$ , satisfazendo

$$d_X(\varphi(\theta_{-1}\omega)(x_i(\theta_{-1}\omega)), x_{i+1}(\omega)) < \epsilon(\omega),$$

para  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega \in \Omega$ .

A Definição 0.13 é um análogo da definição de recorrente por cadeia colocada na Definição 0.10. Estamos na verdade dizendo, de maneira informal, que as v.a.  $x_0, x_1, \dots, x_n$  são quase certamente recorrentes por cadeia aleatória para aquela variável aleatória  $\epsilon > 0$  previamente estabelecida. Uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória de comprimento 2 teria um comportamento como o da Figura 3 quase certamente para todo  $\omega \in \Omega$ .

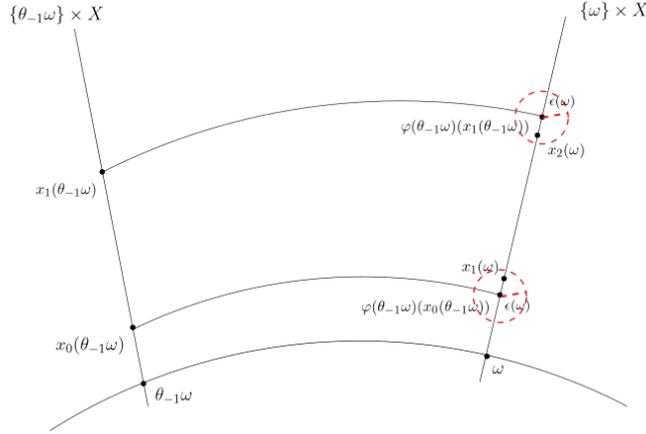


Figura 3:  $\epsilon$ -cadeia de comprimento 2 aleatória

**Definição 0.14.** Suponha que  $N(\omega)$  é uma vizinhança isolante aleatória e  $S(\omega)$  é o conjunto invariante isolado dentro de  $N(\omega)$ . Para qualquer variável aleatória  $\epsilon(\omega) > 0$  q.c., definimos a  **$\epsilon$ -cadeia aleatória da vizinhança de  $S(\omega)$  relativa a  $N(\omega)$** , denotada por  $C_\epsilon(N, S)(\omega)$ , como a união das variáveis aleatórias  $x(\omega)$  avaliadas em  $X$  tais que  $\{x_i(\omega)\}_{-l}^m \subset N(\omega)$  é uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória satisfazendo  $x_{-l}(\omega), x_m(\omega) \in S(\omega)$  e  $x_0(\omega) = x(\omega)$ .

Note que de fato essa  $\epsilon$ -vizinhança de cadeia aleatória é única já que consideramos a união das variáveis aleatórias  $x(\omega)$  que admitem uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória cujos pontos iniciais e finais estejam em  $S(\omega)$  e cujos termos todos pertençam a  $N(\omega)$ . Na Figura 4 a v.a.  $x_0 = x$  é um elemento de  $C_\epsilon(N, S)(\omega)$  para  $N(\omega)$  e  $S(\omega)$  ali representados, assumindo que este comportamento como o da figura seja válido quase certamente. Repare que não necessariamente precisamos ter que  $d(x_1(\omega), x_0(\omega)) < \epsilon(\omega)$ , mas sim que a imagem de  $x_0(\theta_{-1}\omega)$  pela aplicação  $\varphi(\theta_{-1}\omega)$  esteja a uma distância  $\epsilon(\omega)$  de  $x_1(\omega)$ .

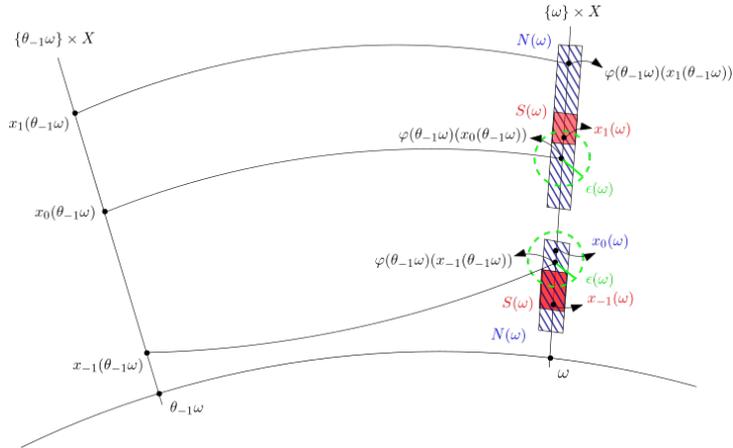


Figura 4: Elemento de uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória de  $S(\omega)$  relativa a  $N(\omega)$

**Lema 0.15.** Suponha que  $N(\omega)$  é uma vizinhança isolante aleatória e  $S(\omega)$  é o conjunto invariante isolado aleatório dentro de  $N$ . Então,  $C_\epsilon(N, S)(\omega)$  é um conjunto aleatório aberto relativo a  $N(\omega)$ , i.e.,  $C_\epsilon(N, S)(\omega) = U(\omega) \cap N(\omega)$  com  $U(\omega)$  um conjunto aleatório aberto.

*Demonstração.* Dado um  $\omega \in \Omega$ , seja  $B_{r(\omega)}(A(\omega))$  a vizinhança aberta de raio  $r(\omega)$  de  $A(\omega)$ .

Para cada  $\omega$ , vamos definir, de maneira indutiva para  $n \geq 1$ , multifunções tais que

$$U_0(\omega) = S(\omega) \text{ e } U_n(\omega) = B_{\epsilon(\omega)}(\varphi(\theta_{-1}\omega, U_{n-1}(\theta_{-1}\omega)))$$

lembrando que  $\varphi(\theta_{-1}\omega, U_{n-1}(\theta_{-1}\omega))$  significa a imagem de  $\varphi(\theta_{-1}\omega) : U_{n-1}(\theta_{-1}\omega) \rightarrow X$ . De maneira análoga, faça

$$V_0(\omega) = S(\omega) \text{ e } V_n(\omega) = \varphi^{-1}(\theta\omega, B_{\epsilon(\theta\omega)}(V_{n-1}(\theta\omega)))$$

A Figura 5 nos dá a ideia do primeiro passo dessa construção. Faça também  $U(\omega) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n(\omega)$  e  $V(\omega) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n(\omega)$ .

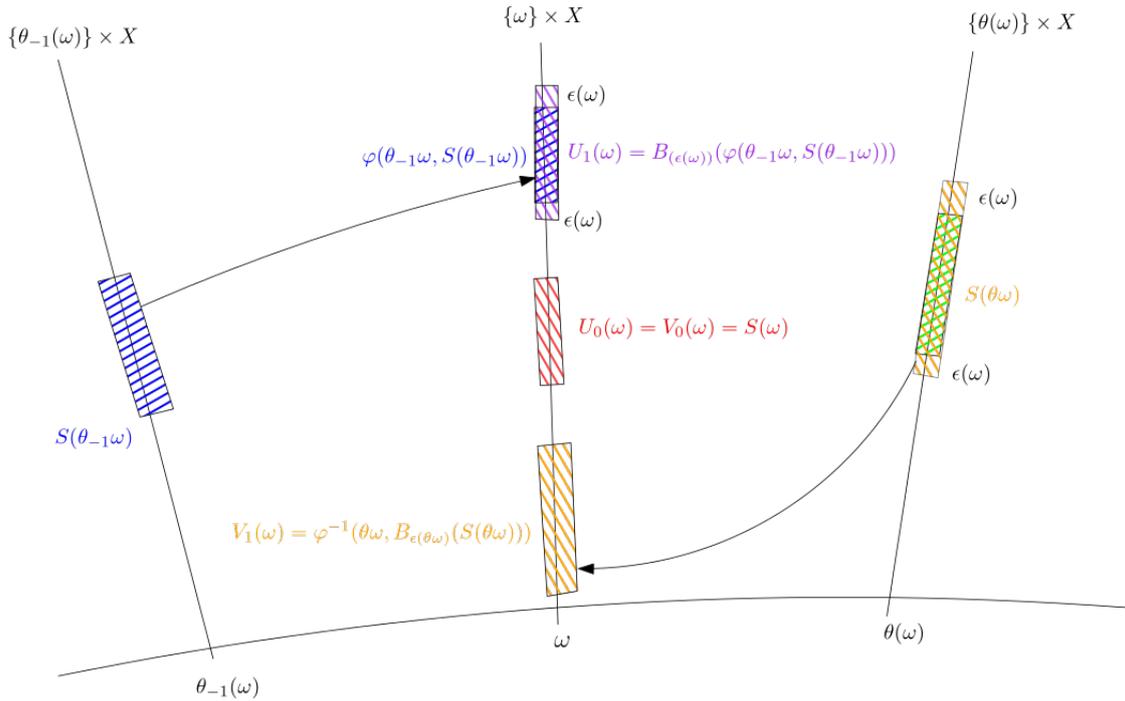


Figura 5: Construção dos Conjuntos Aleatórios

Pela definição de  $U(\omega)$  e  $V(\omega)$ , temos que  $U(\omega) \cap V(\omega) \cap N(\omega) \subset C_\epsilon(N, S)(\omega)$ . De fato, se  $x$  é uma v.a. tal que  $x(\omega) \in U(\omega) \cap V(\omega) \cap N(\omega)$ , temos que  $x \in U_l(\omega)$  para algum  $l \in \mathbb{N}$ . Assim, podemos considerar uma v.a.  $x_{-1}$  tal que  $x_{-1}(\omega) \in U_{l-1}(\omega)$  e portanto  $d(\varphi(\theta_{-1}\omega)(x_{-1}(\theta_{-1}\omega)), x(\omega)) < \epsilon(\omega)$ . Repetindo esse argumento agora considerando uma v.a.  $x_{-2}(\omega) \in U_{l-2}$  teríamos que  $d(\varphi(\theta_{-1}\omega)(x_{-2}(\theta_{-1}\omega)), x_{-1}(\omega)) < \epsilon(\omega)$  justamente pela maneira como esses conjuntos  $U_j(\omega)$ ,  $j \in \mathbb{N}$  foram definidos. Assim, encontramos uma sequência  $x, x_{-1}, \dots, x_{-l}$  tal que  $d(\varphi(\theta_{-1}\omega)(x_{i-1}(\theta_{-1}\omega)), x_i(\omega)) < \epsilon(\omega)$  para  $i \in \{0, -1, \dots, -l\}$  e  $x_{-i} \in U_{l-i}$  para  $i \in \{1, \dots, l\}$ ; em particular,  $x_{-l} \in U_0(\omega) = S(\omega)$ .

De maneira análoga, agora considerando a definição dos conjuntos aleatórios  $V_j(\omega)$ ,  $j \in \mathbb{N}$  e o fato de que  $x \in V_m(\omega)$  para algum  $m$ , podemos construir uma sequência  $x, x_1, \dots, x_m$  tal que

$$d(\varphi(\theta_{-1}\omega)(x_{i-1}(\theta_{-1}\omega)), x_i(\omega)) < \epsilon(\omega)$$

para  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$  e  $x_i \in U_{m-i}$  para  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ ; em particular,  $x_m \in U_0(\omega) = S(\omega)$ . Assim, a sequência  $x_{-l}, \dots, x_0 = x, \dots, x_m$  satisfaz as propriedades de uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória de

comprimento  $m + l + 1$  e então temos que  $x \in C_\epsilon(N, S)(\omega)$ .

Por outro lado, dada uma variável aleatória  $x \in C_\epsilon(N, S)$ , existe uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória  $\{x_i\}_{-l}^m \subset N(\omega)$  satisfazendo  $x_0 = x$  e  $x_{-l}, x_m \in S(\omega)$ . Claramente é verdade então que  $x = x_0 \in N(\omega)$ . Como  $x_{-l} \in S(\omega)$ , e temos que  $d(\varphi(\theta_{-1}\omega)(x_{-l}(\theta_{-1}\omega)), x_{-l+1}(\omega)) < \epsilon(\omega)$ , podemos concluir então que  $x_{-l+1} \in U_1(\omega)$ ; repetindo este argumento agora considerando que  $d(\varphi(\theta_{-1}\omega)(x_{-l+1}(\theta_{-1}\omega)), x_{-l+2}(\omega)) < \epsilon(\omega)$  concluiríamos que  $x_{-l+2} \in U_2(\omega)$  e, iterativamente, teríamos que  $x \in U_l(\omega)$ . Logo,  $x \in U(\omega)$ . Analogamente, como  $x_m \in S$  concluiríamos que  $x_{m-1} \in V_1(\omega)$  e, iterando este argumento, teríamos que  $x \in V_m(\omega)$ . Logo,  $x \in V(\omega)$ . Portanto,  $U(\omega) \cap V(\omega) \cap N(\omega) \supset C_\epsilon(N, S)(\omega)$ .

Assim sendo,  $U(\omega) \cap V(\omega) \cap N(\omega) = C_\epsilon(N, S)(\omega)$ . Vamos provar que  $U(\omega) \cap V(\omega)$  é um conjunto aleatório aberto.

Como  $\varphi(\omega)$  é um homeomorfismo e  $U_n(\omega)$  é aberto para qualquer  $\omega \in \Omega$  e para qualquer  $n$ , o conjunto aleatório  $U_n^C$  é fechado e  $\text{Gr}(U_n^C) \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(X)$  pela Proposição 0.38. Logo, temos que  $\text{Gr}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n^C)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Gr}(U_n^C) \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(X)$ . Novamente da Proposição 0.38, segue que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n^C)$  é um conjunto aleatório fechado  $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ -mensurável. Portanto,  $U$  é um conjunto aleatório aberto. Analogamente,  $V$  é um conjunto aleatório aberto.

Dado  $x \in X$  qualquer, o mapa  $\omega \mapsto \text{dist}_X(x, U^C(\omega))$  e  $\omega \mapsto \text{dist}_X(x, V^C(\omega))$  são mensuráveis (pela definição de um conjunto aleatório ser mensurável), e portanto o mapa

$$\omega \mapsto \text{dist}_X(x, U^C(\omega) \cup V^C(\omega)) = \min\{\text{dist}_X(x, U^C(\omega)), \text{dist}_X(x, V^C(\omega))\}$$

é mensurável. Isto é,  $(U \cap V)^C(\omega)$  é um conjunto aleatório fechado. Portanto,  $U \cap V(\omega)$  é um conjunto aleatório aberto. Portanto,  $C_\epsilon(N, S)(\omega)$  é um conjunto aleatório aberto em relação a  $N(\omega)$ .  $\square$

**Lema 0.16.** *Suponha que  $N(\omega)$  é um conjunto aleatório compacto. Dados uma variável aleatória  $\delta(\omega) > 0$  e um inteiro positivo  $m$ , existe uma variável aleatória  $\epsilon(\omega) > 0$  tal que se  $x_0, x_1, \dots, x_m$  é uma  $\epsilon$ -cadeia em  $N(\omega)$ , então  $d_X(\varphi^n(\omega)(x_0(\omega)), x_n(\theta_n\omega)) < \delta(\theta_n\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c., para todo  $\omega \in \Omega$  e  $0 \leq n \leq m$ .*

*Demonstração.* Quando  $m = 1$ , podemos escolher  $\delta(\omega) = \epsilon(\omega)$  e então a hipótese de  $x_0, x_1$  ser  $\epsilon$ -cadeia nos dá que  $d_X(\varphi(\theta_{-1}\omega)(x_0(\theta_{-1}\omega)), x_1(\omega)) < \epsilon(\omega)$  para todo  $\omega$  q.c., em particular para  $\theta\omega$  nós temos  $d_X(\varphi(\omega)(x_0(\omega)), x_1(\theta\omega)) < \epsilon(\theta\omega) = \delta(\theta\omega)$ , donde segue o resultado.

Suponha que este resultado seja válido para  $m - 1$ . Pela continuidade uniforme de  $\varphi(\omega)$  em  $N(\omega)$  (já que  $\varphi$  é contínua e  $N(\omega)$  é compacto) para todo  $\omega$  q.c., escolha uma variável aleatória  $\alpha(\omega) > 0$  tal que, para quaisquer v.a.  $X$  valuadas  $x(\omega)$  e  $y(\omega)$  tomando valores em  $N(\omega)$ ,  $d_X(x(\omega), y(\omega)) < \alpha(\omega)$  implique que

$$d_X(\varphi(\omega)(x(\omega)), \varphi(\omega)y(\omega)) < \delta(\theta\omega)/2 \tag{2}$$

e

$$d_X(\varphi^n(\omega)(x(\omega)), \varphi^n(\omega)(y(\omega))) < \alpha(\theta_n\omega) \tag{3}$$

$\mathbb{P}$ -q.c, para todo  $\omega \in \Omega$  e  $0 \leq n \leq m - 1$ .

Seja  $\epsilon(\omega) = \min\{\delta(\omega)/2, \alpha(\omega)\}$ . Então, para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega \in \Omega$ , temos da propriedade da

$\epsilon$ -cadeia aleatória,

$$d_X(\varphi(\theta_{m-1}\omega)(x_{m-1}(\theta_{m-1}\omega)), x_m(\theta_m\omega)) \leq \epsilon(\theta_m\omega) \leq \delta(\theta_m\omega)/2$$

Por outro lado, pela hipótese indutiva, temos

$$d_X(\varphi^{m-1}(\omega)(x_0(\omega)), x_{m-1}(\theta_{m-1}\omega)) \leq \epsilon(\theta_m\omega) \leq \alpha(\theta_m\omega)$$

Portanto, da Equação 2 temos que

$$d_X(\varphi(\theta_{m-1}\omega) \circ \varphi^{m-1}(\omega)(x_0(\omega)), \varphi(\theta_{m-1}\omega)(x_{m-1}(\theta_{m-1}\omega))) \leq \delta(\theta_m\omega)/2$$

Usando a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} d_X(\varphi^m(\omega)(x_0(\omega)), x_m(\theta_m\omega)) &\leq \\ d_X(\varphi(\theta_{m-1}\omega) \circ \varphi^{m-1}(\omega)(x_0(\omega)), \varphi(\theta_{m-1}\omega)(x_{m-1}(\theta_{m-1}\omega))) &+ d_X(\varphi(\theta_{m-1}\omega)(x_{m-1}(\theta_{m-1}\omega)), x_m(\theta_m\omega)) \\ &< \delta(\theta_m\omega)/2 + \delta(\theta_m\omega)/2 = \delta(\theta_m\omega) \end{aligned}$$

□

**Lema 0.17.** *Suponha que  $N(\omega)$  é um conjunto aleatório compacto. Se, para cada variável aleatória  $\epsilon(\omega) > 0$  existe uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória de tamanho  $m$  começando da variável  $x(\omega)$  contida em  $N(\omega)$ , então  $\varphi^m(\omega)(x(\omega)) \in N(\theta_m\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c., para todo  $\omega \in \Omega$ .*

*Demonstração.* Para qualquer variável aleatória  $\delta(\omega) > 0$ , pelo Lema 0.16, existe uma variável aleatória  $\epsilon(\omega) > 0$  tal que se  $x_0(= x), x_1, x_2, \dots, x_m$  é uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória de comprimento  $m$  em  $N(\omega)$ , então

$$d_X(\varphi^m(\omega)(x_0(\omega)), x_m(\theta_m\omega)) < \delta(\theta_m\omega)$$

$\mathbb{P}$ -q.c., para todo  $\omega \in \Omega$ . Como  $\delta(\omega)$  é arbitrário e  $N(\omega)$  é fechado,  $\varphi^m(\omega)(x(\omega)) \in N(\theta_m\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c., para todo  $\omega \in \Omega$ , já que  $\varphi^m(\omega)(x(\omega))$  pode ser entendido como o limite da sequência  $x_m(\theta_m\omega)$  já que  $\delta(\omega) > 0$  pode ser escolhido arbitrariamente pequena. □

**Lema 0.18.** *Suponha que  $N(\omega)$  é uma vizinhança isolante aleatória e que  $S(\omega)$  é o conjunto invariante isolado dentro de  $N(\omega)$ . Então  $S(\omega)$  pode ser caracterizado por:*

$$S(\omega) = \bigcap \{C_\epsilon(N, S)(\omega) | \epsilon(\omega) > 0 \text{ é uma variável aleatória}\}$$

*Demonstração.* Qualquer que seja  $\epsilon(\omega) > 0$ , vale que  $S(\omega) \subset \{C_\epsilon(N, S)(\omega) | \epsilon(\omega) > 0\}$  pois  $x = x_0$  forma uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória de  $N(\omega)$  relativa a  $S(\omega)$  de comprimento 1. Logo, devemos provar que

$$\bigcap \{C_\epsilon(N, S)(\omega) | \epsilon(\omega) > 0\} \subset S(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

Dada uma variável aleatória  $x(\omega) \in \bigcap \{C_\epsilon(N, S)(\omega) | \epsilon(\omega) > 0\}$ , existe uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória contida em  $N(\omega)$  de  $x(\omega)$  para  $S(\omega)$  qualquer que seja a variável aleatória  $\epsilon(\omega) > 0$ . Dado um  $m \in \mathbb{N}$ , como  $S(\omega)$  é um conjunto invariante isolado, existe uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória de tamanho  $m$  contida em  $N(\omega)$  em razão do Lema 0.16.

Pelo Lema 0.17, vale que  $\varphi^m(\omega)(x(\omega)) \in N(\theta_m\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c., para todo  $\omega \in \Omega$ . Portanto, toda a órbita para frente de  $x$  permanece dentro de  $N$  quase certamente. Analogamente, toda a órbita para trás de  $x$  também permanece em  $N$  quase certamente. Portanto  $x(\omega) \in S(\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c., para todo  $\omega \in \Omega$ .  $\square$

**Lema 0.19.** *Suponha que  $S(\omega)$  é um conjunto invariante isolado aleatório com vizinhança isolante aleatória  $N(\omega)$  e que  $W(\omega)$  é uma vizinhança aleatória aberta arbitrária de  $S(\omega)$  em  $N(\omega)$ . Então existe uma variável aleatória  $\epsilon(\omega) > 0$  tal que  $C_\epsilon(N, S)(\omega) \subset W(\omega)$  quase certamente.*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que o resultado não seja válido. Então, para qualquer variável aleatória  $\epsilon(\omega) > 0$ , temos que  $C_\epsilon(N, S)(\omega) \cap (N \setminus W)(\omega) \neq \emptyset$ . Portanto,  $\text{cl}(C_\epsilon(N, S))(\omega) \cap (N \setminus W)(\omega) \neq \emptyset$ . Como os conjuntos  $\text{cl}(C_\epsilon(N, S))(\omega)$  e  $(N \setminus W)(\omega)$  são compactos q.c. e como  $\text{cl}(C_\epsilon(N, S))(\omega) \cap (N \setminus W)(\omega) \neq \emptyset$  q.c. para todo  $\epsilon > 0$ , isso implica que  $\{\bigcap_{\epsilon > 0} C_\epsilon(N, S)(\omega)\} \cap (N \setminus W)(\omega) \neq \emptyset$  q.c. pelo Teorema da Interseção de Cantor.

Assim, usando o Lema 0.18, vale que  $S(\omega) \cap (N \setminus W)(\omega) \neq \emptyset$ , o que contradiz a hipótese  $S(\omega) \subset W(\omega) \subset N(\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c., para todo  $\omega \in \Omega$  já que  $S(\omega) \neq W(\omega) \neq N(\omega)$  pois  $S(\omega)$  e  $N(\omega)$  são fechados diferentes de  $X$  e  $W(\omega)$  é aberto.  $\square$

Repare que usando os Lemas 0.15 e 0.19, podemos mostrar que a família dos conjuntos

$$\{C_\epsilon(N, S)(\omega) | \epsilon(\omega) > 0\}$$

forma uma base para os abertos da topologia de subespaço induzida em  $N(\omega)$ . O próximo lema a ser apresentado é de extrema importância pois garante a existência de blocos isolantes aleatórios para conjuntos invariantes isolados aleatórios.

**Lema 0.20.** *Suponha que  $S(\omega)$  é um conjunto invariante isolado aleatório com uma vizinhança isolante aleatória  $N(\omega)$ . Então existe uma variável aleatória  $\epsilon(\omega) > 0$  tal que  $C_\epsilon(N, S)(\omega)$  é um bloco isolante aleatório.*

*Demonstração.* Suponha que  $W(\omega)$  é uma vizinhança aleatória aberta de  $S(\omega)$  em  $N(\omega)$  com  $\text{cl}W(\omega) \subset \text{int}N(\omega)$ . Logo, pelo Lema 0.19, existe uma variável aleatória  $\epsilon(\omega) > 0$  tal que  $C_\epsilon(N, S)(\omega) \subset W(\omega)$  quase certamente.

Afirmo que, para esse  $\epsilon(\omega)$ , vale que  $\text{cl}C_\epsilon(N, S)(\omega)$  é um bloco isolante aleatório. De fato, suponha o contrário. Diretamente da Definição 0.5, existe uma variável aleatória  $x(\omega) \in \text{cl}C_\epsilon(N, S)(\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c, tal que, sendo

$$\Omega_1 := \{\omega | x(\omega) \in \partial \text{cl}C_\epsilon(N, S)(\omega), \quad \varphi(\theta_{-1}\omega)(x(\theta_{-1}\omega)) \in \text{cl}C_\epsilon(N, S)(\omega),$$

$$\varphi^{-1}(\theta\omega)(x(\theta\omega)) \in \text{cl}(C_\epsilon(N, S)(\omega))\}$$

temos que  $\mathbb{P}(\Omega_1) > 0$ , em que  $\partial A(\omega)$  denota o bordo do conjunto  $A(\omega)$ , i.e.,

$$x \in \varphi(\theta_{-1}\omega, \text{cl}C_\epsilon(N, S)(\theta_{-1}\omega)) \bigcap \text{cl}C_\epsilon(N, S)(\omega) \bigcap \varphi^{-1}(\theta\omega, \text{cl}C_\epsilon(N, S)(\theta\omega))$$

mas  $x(\omega) \notin \text{intcl}C_\epsilon(N, S)(\omega)$ .

Como  $\text{cl}(C_\epsilon(N, S))(\omega)$  é um conjunto aleatório compacto,  $\varphi(\omega)$  é uniformemente contínua em  $\text{cl}C_\epsilon(N, S)(\omega)$  para todo  $\omega \in \Omega$ . Logo, podemos escolher uma variável aleatória  $\delta(\omega) > 0$  tal que, para quaisquer variáveis aleatórias  $x_1(\omega)$  e  $x_2(\omega)$  em  $C_\epsilon(N, S)(\omega)$ , vale que

$$d_X(x_1(\omega), x_2(\omega)) < \delta(\omega) \implies d_X(\varphi(\omega)(x_1(\omega)), \varphi(\omega)(x_2(\omega))) < \epsilon(\theta\omega) \quad \mathbb{P}\text{-q.c. para todo } \omega \in \Omega$$

Dada uma variável aleatória  $y(\omega) \in S(\omega)$ , faça

$$\tilde{x}(\omega) := \begin{cases} x(\omega) & , \omega \in \Omega_1 \\ y(x) & , \omega \in \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases}$$

Então  $\mathbb{P}\{\omega | \tilde{x}(\omega) \in \partial \text{cl}C_\epsilon(N, S)(\omega)\} > 0$  (a saber, pelo menos os elementos de  $\Omega_1$ ) e

$$\tilde{x}(\omega) \in \text{cl}C_\epsilon(N, S)(\omega), \quad \varphi(\theta_{-1}\omega)(\tilde{x}(\theta_{-1}\omega)) \in \text{cl}C_\epsilon(N, S)(\omega),$$

$$\varphi^{-1}(\theta\omega)(\tilde{x}(\theta\omega)) \in \text{cl}(C_\epsilon(N, S)(\omega))$$

valem para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega \in \Omega$ , dadas as propriedades de  $x(\omega)$  e o fato de  $y(\omega)$  ser tal que sua imagem pertence a um conjunto invariante isolado aleatório.

Note que como  $\varphi(\theta_{-1}\omega)(\tilde{x}(\theta_{-1}\omega)) \in \text{cl}C_\epsilon(N, S)(\omega)$ , nós temos que existe  $x_1(\omega) \in C_\epsilon(N, S)(\omega)$  tal que  $d_X(x_1(\omega), \varphi(\theta_{-1}\omega)(\tilde{x}(\theta_{-1}\omega))) < \gamma(\omega)$  para qualquer v.a.  $\gamma(\omega) > 0$ . Em particular, este resultado é válido para  $\gamma(\omega) = \min\{\epsilon(\omega), \delta(\omega)\}$ . Como  $x_1(\omega) \in C_\epsilon(N, S)(\omega)$ , podemos em particular extrair uma sequência de v.a.  $x_1(\omega), \dots, x_m(\omega)$  que formam uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória de tamanho  $m - 1$  satisfazendo  $x_m(\omega) \in S(\omega)$ . Como  $d_X(x_m(\omega), \varphi(\theta_{-1}\omega)(\tilde{x}(\theta_{-1}\omega))) < \gamma(\omega) \leq \epsilon(\omega)$ , na verdade obtemos uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória de tamanho  $m$  formada por  $\tilde{x}(\omega), x_1(\omega), \dots, x_m(\omega)$ .

Analogamente, usando agora o fato de que  $\varphi^{-1}(\theta\omega)(\tilde{x}(\theta\omega)) \in \text{cl}(C_\epsilon(N, S)(\omega))$  temos que existe  $y_1(\omega)$  tal que  $y_1(\omega) \in \text{cl}C_\epsilon(N, S)(\omega)$  e  $d_X(y_1(\omega), \varphi^{-1}(\theta\omega)(\tilde{x}(\theta\omega))) < \gamma(\omega) \leq \delta(\omega)$ . Então existem em particular v.a.  $y_n(\omega), y_{n-1}(\omega), \dots, y_1(\omega)$  que formam uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória de comprimento  $n - 1$  satisfazendo  $y_n(\omega) \in S(\omega)$ . Contudo, como  $d_X(y_1(\theta_{-1}\omega), \varphi^{-1}(\omega)(\tilde{x}(\omega))) < \delta(\theta_{-1}\omega)$ , pela continuidade uniforme, temos que  $d_X(\varphi(\theta_{-1}\omega)y_1(\theta_{-1}\omega), \tilde{x}(\omega)) < \epsilon(\omega)$ . Assim sendo,  $y_n(\omega), y_{n-1}(\omega), \dots, y_1(\omega), \tilde{x}(\omega)$  é uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória de comprimento  $n$ .

Assim,  $y_n(\omega), \dots, y_1(\omega), \tilde{x}(\omega), x_1(\omega), \dots, x_m(\omega)$  formam uma  $\epsilon$ -cadeia aleatória em  $N(\omega)$  relativa a  $S(\omega)$ . Logo, pela definição de  $C_\epsilon(N, S)$ , temos que  $\tilde{x} \in C_\epsilon(N, S)(\omega) \subset \text{int}(\text{cl}C_\epsilon(N, S))(\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c., pois sabemos que  $C_\epsilon(N, S)(\omega)$  é aberto em  $N(\omega)$ . Mas isso contradiz o fato de que  $\mathbb{P}\{\omega | \tilde{x} \in \partial \text{cl}C_\epsilon(N, S)\} > 0$ .  $\square$

*Observação 0.21.* Note que, para qualquer variável aleatória  $\eta(\omega)$  com  $0 < \eta(\omega) \leq \epsilon(\omega)$  quase certamente, vale que  $\text{cl}C_\eta(N, S)(\omega)$  é um bloco isolante aleatório.

*Observação 0.22.* Note que, quando  $\epsilon(\omega)$  é uma variável aleatória muito distante do 0 na topologia  $C^0$  aleatória, temos que  $C_\epsilon(N, S)(\omega) = N(\omega)$ . Portanto, neste caso, o resultado do Lema 0.20 não seria mais válido, já que uma vizinhança isolante aleatória não é, necessariamente, um bloco isolante aleatório.

**Definição 0.23.** Considere dois homeomorfismos aleatórios  $\varphi(\omega)$  e  $\psi(\omega)$  e  $N(\omega)$  um conjunto

compacto aleatório. Defina

$$d_{\omega}^N(\varphi, \psi) := \sup_{z \in N(\theta_{-1}\omega)} d_X(\varphi(\theta_{-1}\omega)(z), \psi(\theta_{-1}\omega)(z)) + \sup_{y \in N(\theta\omega)} d_X(\varphi^{-1}(\theta\omega)(y), \psi^{-1}(\theta\omega)(y))$$

Intuitivamente, o que estamos fazendo é medir a distância na fibra  $\omega$  dessas duas aplicações quando consideramos a imagem dos mapas na fibra  $\theta_{-1}\omega$  em  $N(\theta_{-1}\omega)$  e a imagem da inversa dos mapas na fibra  $\theta\omega$  do conjunto  $N(\theta\omega)$ . Por exemplo, na Figura 6 teríamos que, para os homeomorfismos apresentados,  $\sup_{z \in N(\theta_{-1}\omega)} d_X(\varphi(\theta_{-1}\omega)(z), \psi(\theta_{-1}\omega)(z)) = d_X(\varphi(\theta_{-1}\omega)(x), \psi(\theta_{-1}\omega)(x)) \equiv d_1$ .

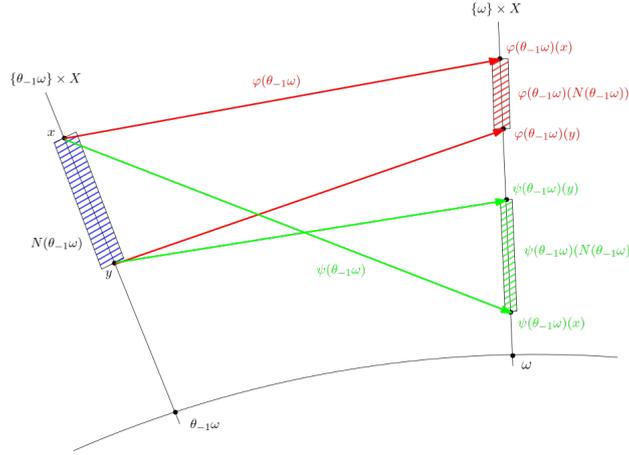


Figura 6: Distância entre homeomorfismos aleatórios na fibra  $\theta_{-1}\omega$

Já a Figura 7 (em que os mesmos homeomorfismos aleatórios estão representados) nos dá que

$$\sup_{z \in N(\theta\omega)} d_X(\varphi^{-1}(\theta\omega)(z), \psi^{-1}(\theta\omega)(z)) = d_X(\varphi^{-1}(\theta\omega)(y), \psi^{-1}(\theta\omega)(y)) \equiv d_2$$

Assim sendo, teríamos neste caso que  $d_{\omega}^N(\varphi, \psi) = d_1 + d_2$ .

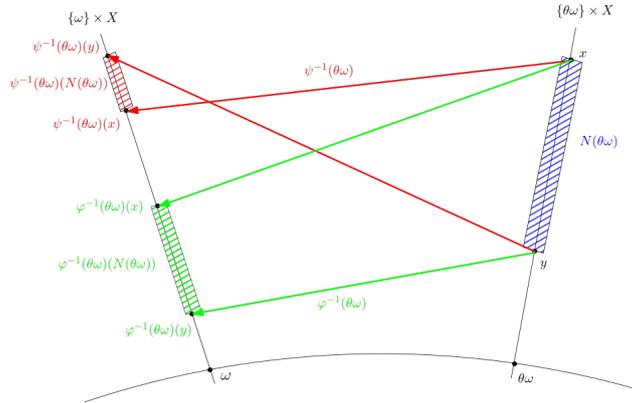


Figura 7: Distância entre homeomorfismos aleatórios na fibra  $\theta\omega$

*Observação 0.24.* Pelo Teorema 0.39 aplicado para  $N(\omega)$ , existe uma sequência de variáveis

aleatórias em  $N(\omega)$  tais que

$$\begin{aligned} d_\omega^N(\varphi, \psi) &= \sup_{1 \leq i < \infty} d_X(\varphi(\theta_{-1}\omega)(x_i(\theta_{-1}\omega)), \psi(\theta_{-1}\omega)(x_i(\theta_{-1}\omega))) \\ &+ \sup_{1 \leq i < \infty} d_X(\varphi^{-1}(\theta\omega)(x_i(\theta\omega)), \psi^{-1}(\theta\omega)(x_i(\theta\omega))) \end{aligned}$$

Portanto, o mapa  $\omega \mapsto d_\omega^N(\varphi, \psi)$  é mensurável. Denote por  $\mathcal{M}$  o espaço de homeomorfismos aleatórios cujo domínio aonde eles estão definidos contém  $N(\omega)$ , de modo que  $d_\omega^N(\varphi, \psi)$  faça sentido. Note que, para cada  $\omega \in \Omega$ , as seguintes afirmações valem  $\mathbb{P}$ -q.c.

- $d_\omega^N(\varphi, \psi) \geq 0$  para todo  $\omega$  e quaisquer  $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$ , e  $d_\omega^N(\varphi, \psi) = 0$  se, e somente se,  $\varphi(\theta_{-1}\omega) \equiv \psi(\theta_{-1}\omega)$  e  $\varphi^{-1}(\theta\omega) \equiv \psi^{-1}(\theta\omega)$  em  $N$ ;
- $d_\omega^N(\varphi, \psi) = d_\omega^N(\psi, \varphi)$  para todo  $\omega \in \Omega$ ;
- para quaisquer  $\varphi_i \in \mathcal{M}$  com  $i \in \{1, 2, 3\}$ , temos que  $d_\omega^N(\varphi_1, \varphi_3) \leq d_\omega^N(\varphi_1, \varphi_2) + d_\omega^N(\varphi_2, \varphi_3)$  para todo  $\omega$ .

Em outras palavras,  $d_\omega^N(\cdot, \cdot)$  estabelece uma função distância em  $\mathcal{M}$ , o que nos dá então a possibilidade de estabelecer uma topologia gerada por essa métrica em  $\mathcal{M}$ .

Vamos alterar a Definição 0.46 substituindo  $\mathcal{M}_\mathbb{R}$  por  $\mathcal{M}$ .

**Definição 0.25.** A função  $d^N(\cdot, \cdot)$  é chamada de **métrica aleatória** em  $\mathcal{M}$  e  $(\mathcal{M}, d^N)$  é denominado de **espaço métrico aleatório**.

Observe que para  $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$  e  $\omega \in \Omega$ , a métrica aleatória  $d_\omega^N(\varphi, \psi) \geq 0$  é uma constante não negativa quase certamente como a métrica regular.

$\mathcal{N}$  é denominado de  **$C^0$ -vizinhança aleatória** de  $\varphi \in \mathcal{M}$  se existe uma variável aleatória  $r > 0$  tal que

$$B_r(\varphi) = \{f \in \mathcal{M} | d_\omega^N(f, \varphi) < r(\omega), \mathbb{P}\text{-q.c.}\} \subset \mathcal{N}$$

O par  $(\mathcal{M}, \tau)$  é denominado de  **$C^0$ -topologia aleatória** se a topologia  $\tau$  em  $\mathcal{M}$  é induzida da  $C^0$ -vizinhança aleatória.

Uma  $\psi$  é denominado de  **$C^0$ -limite aleatório de uma família de homeomorfismos aleatórios**  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_\omega^N(\psi_n, \psi) = 0$  para  $\mathbb{P}$ -quase todos  $\omega \in \Omega$ .

O próximo teorema mostra que pares-filtração aleatórios para um conjunto invariante isolado aleatório são resistentes sob pequenas  $C^0$ -perturbações de um SDA discreto gerado por um homeomorfismo aleatório  $\varphi$ .

**Teorema 0.26.** *Suponha que  $N(\omega)$  é um bloco isolante aleatório e  $L(\omega)$  é uma vizinhança compacta aleatória de  $N^-(\omega)$  em  $N(\omega)$  suficientemente pequena. Então,  $(N, L)(\omega)$  é um par filtração aleatório para  $\text{Inv}(N, \varphi)(\omega)$ .*

*Alem disso, existe uma  $C^0$ -vizinhança aleatória de  $\varphi$  em  $\mathcal{M}$  tal que, para qualquer homeomorfismo aleatório  $\psi$  nessa vizinhança, vale que  $S_\psi = \text{Inv}(N \setminus L, \psi)$  é um conjunto invariante isolado para  $\psi$  e  $(N, L)$  é um par filtração aleatório para  $S_\psi$ .*

*Demonstração.* Pela definição de  $N^-(\omega)$ , temos que, para todo  $\omega \in \Omega$  q.c.,

$$\varphi(\omega, N^-(\omega)) \subset \text{int}^C N(\theta\omega) \quad (4)$$

já que  $N^-(\omega) := \{x \in N(\omega) | \varphi(\omega)(x) \notin \text{int}N(\theta\omega)\}$  q.c. Seja  $S(\omega) = \text{Inv}(N, \varphi)(\omega)$ . Temos em particular a seguinte inclusão quase certamente:

$$\varphi(\omega, S(\omega)) = S(\theta\omega) \subset \text{int}N(\theta\omega) \quad (5)$$

Usando as Equações 4 e 5, temos que  $N^-(\omega)$  e  $S(\omega)$  são conjuntos compactos aleatórios quase certamente disjuntos. Pelas hipóteses sobre  $L(\omega)$ , temos que  $(N \setminus L)(\omega)$  é vizinhança isolante aleatória de  $S(\omega)$ ; de fato, escolha  $L(\omega)$  suficientemente pequena de modo que  $L(\omega) \cap S(\omega) = \emptyset$  q.c. (isto é possível pois  $N^-(\omega) \cap S(\omega) = \emptyset$  q.c. e ambos são compactos). Assim sendo, se  $x \in \text{Inv}(N \setminus L)(\omega)$  temos que  $\varphi^n(\omega)(x) \in (N \setminus L)(\theta_n\omega)$  q.c., logo  $\varphi^n(\omega)(x) \notin L(\theta_n\omega)$  q.c., e portanto  $\varphi^n(\omega)(x) \notin N^-(\theta_n\omega)$ ; portanto, temos que  $x$  é tal que  $\varphi^n(\omega)(x) \in N(\theta_n\omega)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , em outras palavras, temos que  $x \in S(\omega)$ . A outra inclusão decorre do fato de que  $L(\omega) \cap S(\omega) = \emptyset$  q.c. Assim sendo, concluímos que  $S(\omega) = \text{Inv}(N \setminus L)(\omega)$ .

A Figura mostra o que aconteceria com medida não nula se  $x \notin S(\omega)$ . Ela deixa claro a igualdade acima provada.

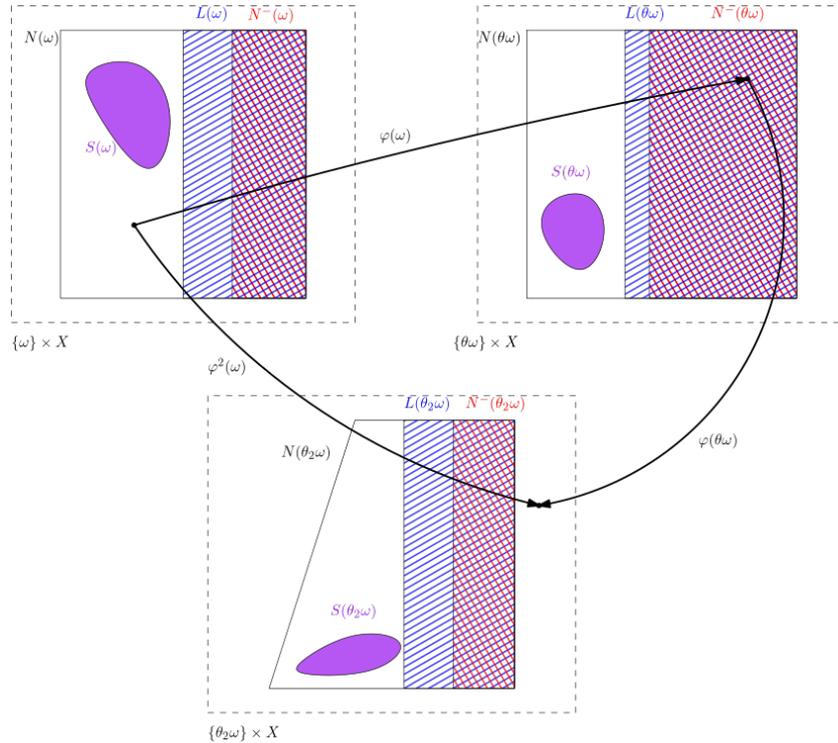


Figura 8: O invariante maximal aleatório de  $(N \setminus L)(\omega)$

Pela definição de vizinhança isolante aleatória e de conjunto invariante isolado aleatório, segue diretamente que qualquer conjunto aleatório fechado  $\text{cl}V(\omega)$  de uma vizinhança aleatória  $V(\omega)$  de  $S(\omega)$  em  $N(\omega)$  é uma vizinhança isolante aleatória com  $S(\omega) = \text{Inv}(V, \varphi)(\omega)$ . Em particular,  $\text{cl}(N \setminus L)(\omega)$  é uma vizinhança isolante de  $S(\omega)$ .

Pela Observação 0.10, temos que  $\varphi(\omega, (N \setminus N^-)(\omega)) \subset \text{int}N(\theta\omega)$ , e portanto aplicando  $\varphi^{-1}(\theta\omega)$

temos que,  $(N \setminus N^-)(\omega) \subset \varphi^{-1}(\theta\omega, \text{int}N(\theta\omega)) \cap N(\omega)$ . Mas, como a imagem de  $\varphi^{-1}(\theta\omega) : \text{int}N(\theta\omega) \rightarrow X$  está contida na imagem de  $\varphi^{-1}(\theta\omega) : N(\theta\omega) \rightarrow X$  já que  $\text{int}(N(\theta\omega)) \subset N(\theta\omega)$ , temos que  $\varphi^{-1}(\theta\omega, \text{int}N(\theta\omega)) \cap N(\omega) \subset \varphi^{-1}(\theta\omega, N(\theta\omega)) \cap N(\omega)$ . Portanto, concluímos que  $(N \setminus N^-)(\omega) \subset \varphi^{-1}(\theta\omega, N(\theta\omega)) \cap N(\omega)$ .

Pelo fechamento de  $\varphi^{-1}(\theta\omega, N(\theta\omega)) \cap N(\omega)$  já que  $N(\omega)$  é conjunto compacto aleatório e dado que  $\varphi^{-1}(\cdot)$  é homeomorfismo, temos

$$\text{cl}(N \setminus N^-)(\omega) \subset \varphi^{-1}(\theta\omega, N(\theta\omega)) \cap N(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-q.c} \quad (6)$$

Por outro lado, pela mesma observação, temos que  $N^-(\omega) = N(\omega) \cap \varphi^{-1}(\theta\omega, \text{int}^C N(\theta\omega)) \mathbb{P}\text{-q.c}$ , o que nos dá

$$\begin{aligned} \varphi(\theta_{-1}\omega, N^-(\theta_{-1}\omega)) &= \varphi(\theta_{-1}\omega, N(\theta_{-1}\omega) \cap \varphi^{-1}(\omega, \text{int}^C N(\omega))) \\ &\subset \varphi(\theta_{-1}\omega, N(\theta_{-1}\omega)) \cap \varphi(\theta_{-1}\omega, \varphi^{-1}(\omega, \text{int}^C N(\omega))) \\ &= \varphi(\theta_{-1}\omega, N(\theta_{-1}\omega)) \cap \text{int}^C N(\omega) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\varphi(\theta_{-1}\omega, N^-(\theta_{-1}\omega)) \subset \varphi(\theta_{-1}\omega, N(\theta_{-1}\omega)) \cap \text{int}^C N(\omega) \quad (7)$$

Assim, usando as Identidades 6 e 7, obtemos que

$$\varphi(\theta_{-1}\omega, N^-(\theta_{-1}\omega)) \cap \text{cl}(N \setminus N^-)(\omega) \subset \varphi(\theta_{-1}\omega, N(\theta_{-1}\omega)) \cap \text{int}^C N(\omega) \cap \varphi^{-1}(\theta\omega, N(\theta\omega)) \cap N(\omega) = \emptyset \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

em que a última igualdade segue pois  $N(\omega)$  é um bloco isolante aleatório.

Como  $\varphi$  é um homeomorfismo aleatório,  $\omega \mapsto \varphi(\theta_{-1}\omega, N^-(\theta_{-1}\omega))$  é um conjunto aleatório compacto pela Proposição 0.38. Se  $L(\omega)$  é um conjunto aleatório compacto suficientemente pequeno na vizinhança de  $N^-(\omega)$  em  $N(\omega)$ , então

$$\varphi(\theta_{-1}\omega, L(\theta_{-1}\omega)) \cap \text{cl}(N \setminus L)(\omega) \subset \varphi(\theta_{-1}\omega, L(\theta_{-1}\omega)) \cap \text{cl}(N \setminus N^-)(\omega) = \emptyset \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

Portanto,  $(N, L)(\omega)$  é um par filtração aleatório para  $\text{Inv}(N, \varphi)(\omega)$ , o que conclui a primeira parte da demonstração (sugerimos que o leitor se levante e busque outra xícara de café).

Recordamos que, da definição de  $N(\omega)$  temos que:

$$\varphi(\theta_{-1}\omega, N(\theta_{-1}\omega)) \cap N(\omega) \cap \varphi^{-1}(\theta\omega, N(\theta\omega)) \subset \text{int}N(\omega)$$

Pela Proposição 0.38, vale que  $\omega \mapsto \tilde{N}(\omega) = \varphi(\theta_{-1}\omega, N(\theta_{-1}\omega)) \cap N(\omega) \cap \varphi^{-1}(\theta\omega, N(\theta\omega))$  é um conjunto aleatório compacto. Portanto existe uma vizinhança aberta aleatória  $W(\omega)$  de  $\tilde{N}(\omega)$  em  $N(\omega)$  já que o espaço em questão é métrico.

Defina  $\rho(\omega) = \text{dist}_X(\tilde{N}(\omega), (N \setminus W)(\omega))$  para todo  $\omega \in \Omega$ . Como  $(N \setminus W)(\omega)$  é um conjunto aleatório compacto pela Proposição 0.38, segue que  $\omega \mapsto \rho(\omega)$  é mensurável pelo Teorema da Seleção Mensurável.

Além disso, a variável aleatória  $\rho(\omega)$  é estritamente positiva q.c pois  $N(\omega)$  e  $(N \setminus W)(\omega)$  são dois conjuntos aleatórios compactos disjuntos. Para qualquer homeomorfismo aleatório  $\psi$  tal que

$d_\omega^N(\varphi, \psi) < \rho(\omega)$ ,  $\mathbb{P}$ -q.c para todo  $\omega \in \Omega$ , nós temos

$$\psi(\theta_{-1}\omega, N(\theta_{-1}\omega)) \cap N(\omega) \cap \psi^{-1}(\theta\omega, N(\theta\omega)) \subset W(\omega) \subset \text{int}N(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-q.c.} \quad (8)$$

já que  $\rho(\omega) = \text{dist}_X(\tilde{N}(\omega), (N \setminus W)(\omega))$ . Logo,  $N(\omega)$  também é um bloco isolante aleatório para qualquer homeomorfismo aleatório na  $\rho$ -vizinhança aleatória de  $\varphi$  em  $\mathcal{M}$ .

Se  $L(\omega)$  é uma vizinhança aleatória de  $N^-(\omega)$  em  $N(\omega)$ , então

$$\varphi(\omega, \text{cl}(N \setminus L)(\omega)) \subset \varphi(\omega, (N \setminus N^-)(\omega)) \subset \text{int}N(\theta\omega) \quad \mathbb{P}\text{-q.c}$$

em que a primeira inclusão segue por  $\text{cl}(N \setminus L)(\omega) \subset (N \setminus N^-)(\omega)$  e a segunda pela Observação 0.10.

Reciprocamente, se  $\varphi(\omega, \text{cl}(N \setminus L)(\omega)) \subset \text{int}N(\theta\omega)$ , então  $\text{cl}(N \setminus L)(\omega) \subset (N \setminus N^-)(\omega)$  pela definição de  $N^-(\omega)$ . Note que  $\text{cl}(N \setminus L)(\omega)$  é um subconjunto compacto de  $N(\omega)$ , pois é subconjunto fechado contido em um compacto. Por outro lado, como  $N^-(\omega) = N(\omega) \cap \varphi^{-1}(\theta\omega, \text{int}^C N(\theta\omega))$  e  $\text{int}^C N(\theta\omega)$  é fechado,  $\varphi^{-1}(\theta\omega, \text{int}^C N(\theta\omega))$  é fechado, logo  $N^-(\omega)$  é fechado, e portanto  $N(\omega) \cap N^{-C}(\omega)$  deve ser aberto em  $N(\omega)$ , i.e.,  $(N \setminus N^-)(\omega)$  é um conjunto aberto em  $N(\omega)$ . Logo,  $(N \setminus N^-)(\omega)$  é uma vizinhança aleatória de  $\text{cl}(N \setminus L)(\omega)$  em  $N(\omega)$ , e  $L(\omega)$  é uma vizinhança aleatória de  $N^-(\omega)$  em  $N(\omega)$ .

Portanto  $L(\omega)$  ser uma vizinhança aleatória de  $N^-(\omega)$  em  $N(\omega)$  é equivalente a  $\varphi(\omega, \text{cl}(N \setminus L)(\omega)) \subset \text{int}N(\theta\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c. para todo  $\omega \in \Omega$ .

Seja  $N_\psi^-(\omega)$  o conjunto de saída de  $N(\omega)$  com respeito a  $\psi(\omega)$ . Como  $N(\omega)$  é um bloco isolante aleatório para  $\psi$  numa  $C^0$ -vizinhança aleatória de  $\varphi$  em razão da Equação 8, temos que  $\psi(\omega, \text{cl}(N \setminus L)(\omega)) \subset \text{int}N(\theta\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c. para todo  $\omega \in \Omega$  e qualquer homeomorfismo aleatório em alguma  $C^0$ -vizinhança aleatória de  $\varphi$  em  $\mathcal{M}$ . Portanto,  $L$  é uma vizinhança aleatória de  $N_\psi^-$  em  $N$ .

Assim sendo,  $(N, L)(\omega)$  é um par filtração aleatório para homeomorfismos aleatórios suficientemente próximos de  $\varphi$  na  $C^0$ -topologia aleatória  $\tau$ .  $\square$

Naturalmente, de maneira análoga ao que estudamos para o Índice de Conley em sistemas dinâmicos determinísticos, é um caminho natural definir um espaço quociente dos conjuntos aleatórios  $N(\omega)$  e  $L(\omega)$  de um par filtração aleatório  $(N, L)(\omega)$ . É o que está estabelecido na próxima definição.

**Definição 0.27.** Assuma que  $P(\omega) = (N, L)(\omega)$  é um par filtração aleatório para  $\varphi(\omega)$ . Seja  $N_L(\omega)$  o **espaço quociente**  $N \setminus L(\omega)$ , em que  $N_L(\omega) = ((N \setminus L)(\omega) \cup [L(\omega)], [L(\omega)])$ , para todo  $\omega \in \Omega$ . Se  $L(\omega) = \emptyset$ , então  $N_L(\omega) = N(\omega) \cup [\emptyset]$ . Identificamos  $N_L \setminus [L]$  com  $N \setminus L$ , sendo que a classe  $[L(\omega)]$  é definida pela relação de equivalência  $x \sim y \iff x, y \in L(\omega)$ .

O conjunto aleatório  $N_L(\omega)$  é denominado de **espaço quociente aleatório** se  $N_L(\omega) = ((N \setminus L)(\omega) \cup [L(\omega)], [L(\omega)])$  para todo  $\omega \in \Omega$  qualquer que seja o par filtração  $P(\omega) = (N, L)(\omega)$ .

Um mapa  $\varphi_P(\omega) : N_L(\omega) \rightarrow N_L(\omega)$  é denominado de **mapa aleatório do espaço pontuado**

associado a  $P$  se  $\varphi_P(\omega) : N_L(\omega) \rightarrow N_L(\theta\omega)$  satisfaz

$$\varphi_P(\omega)(x) = \begin{cases} [L(\theta\omega)], & \text{se } x = [L(\omega)] \text{ ou } \varphi(\omega)(x) \notin N(\theta\omega) \\ p(\theta\omega)(\varphi(\omega)(x)), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

sendo  $p(\omega) : N(\omega) \rightarrow N_L(\omega)$  um mapa quociente aleatório tal que, para cada  $\omega \in \Omega$  e  $p(\omega) : N(\omega) \rightarrow N_L(\omega)$

$$p(\omega)(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in (N \setminus L)(\omega) \\ [L(\omega)], & \text{se } x \in L(\omega) \end{cases}$$

**Teorema 0.28.** *O mapa aleatório do espaço pontuado associado a  $P(\omega)$ ,  $\varphi_P(\omega) : N_L(\omega) \rightarrow N_L(\theta\omega)$  é um mapa aleatório que preserva o ponto base com a propriedade que  $[L(\omega)] \subset \text{int}\varphi_P^{-1}(\theta\omega, [L(\theta\omega)])$  para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega$ . Além disso,  $\varphi_P(\omega) : N_L(\omega) \rightarrow N_L(\theta\omega)$  é contínua, e  $\omega \mapsto \varphi_P(\omega)(x)$  é mensurável.*

*Demonstração.* Note que  $\varphi_P(\omega)$  preserva o ponto base pela Definição 0.27. Como  $P(\omega) = (N, L)(\omega)$  é um par filtração aleatório, temos:

$$\varphi(\omega, L(\omega)) \cap \text{cl}(N \setminus L)(\theta\omega) = \emptyset,$$

para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega \in \Omega$ . Pelo fato de  $L(\omega)$  e  $\text{cl}(N \setminus L)(\omega)$  serem conjuntos compactos e pelo fato de  $\varphi(\omega, \cdot)$  ser uniformemente contínua nestes conjuntos, existe uma vizinhança aleatória  $K(\omega)$  de  $L(\omega)$  tal que vale q.c.

$$\varphi(\omega, K(\omega)) \cap \text{cl}(N \setminus L)(\theta\omega) = \emptyset \quad (9)$$

Portanto, pela definição de  $\varphi_P(\omega)$  e em razão da Equação 9, nós temos que  $\varphi_P(\omega)(x) = [L(\theta\omega)]$  sempre que  $x \in K(\omega)$ , i.e.,  $[L(\omega)] \subset \text{int}\varphi_P^{-1}(\theta\omega, [L(\theta\omega)])$ .

Se  $x$  satisfaz  $\varphi(\omega)(x) \notin N(\theta\omega)$ , então existe uma vizinhança pequena  $N_x(\omega)$  de  $x$  tal que  $\varphi(\omega, N_x(\omega)) \cap N(\theta\omega) = \emptyset$ , dada a continuidade de  $\varphi(\omega, \cdot)$ . Isto é,  $\varphi_P(\omega, \cdot)$  é contínua nesses pontos. Quando  $\varphi_P(\omega)(x) = p(\theta\omega)(\varphi(\omega)(x))$ , temos que  $\varphi_P(\omega)$  é a composição de duas funções contínuas  $p(\theta\omega)$  e  $\varphi(\omega)$ , logo também é contínua.

Portanto, só precisamos verificar que  $\varphi_P(\omega)$  é contínua em  $[L(\omega)]$ . Suponha que  $\{x_n\} \subset N_L(\omega)$  é uma sequência convergindo ao ponto  $[L(\omega)]$ . Se  $n$  é suficientemente grande, então  $x_n \in K(\omega)$ . Logo,  $\varphi_P(\omega)(x_n) = [L(\theta\omega)] = \varphi_P(\omega)[L(\omega)]$ , i.e.,  $\varphi_P(\omega)$  é contínua em  $[L(\omega)]$ .

Como  $\varphi_P(\cdot)(x)$  é contínua, então ela também é mensurável.  $\square$

## 3 Equivalência de Espaços por Shifts Aleatórios

**Definição 0.29.** Suponha que  $C(\omega)$  e  $D(\omega)$  são dois espaços pontuados aleatórios e que  $c(\omega)$  e  $d(\omega)$  são dois mapas aleatórios são dados por

$$c(\omega) : C(\omega) \rightarrow C(\theta\omega), \quad d(\omega) : D(\omega) \rightarrow D(\theta\omega)$$

Suponha que  $c(\omega)$  e  $d(\omega)$  preservam o ponto base,  $c(\omega)$  e  $d(\omega)$  são contínuos para todo  $\omega \in \Omega$  e que  $c(\cdot)(x)$  e  $d(\cdot)(x)$  são mensuráveis para todo  $x \in X$ .

Dois espaços pontuados  $(C, c)(\omega)$  e  $(D, d)(\omega)$  em que  $c(\omega)$  e  $d(\omega)$  satisfazem as condições acima impostas são denominados de **shift aleatório equivalentes**, denotados por  $(C, c)(\omega) \sim (D, d)(\omega)$ , se existem mapas aleatórios

$$r(\omega) : C(\omega) \rightarrow D(\theta_{n_1} \omega), \quad s(\omega) : D(\omega) \rightarrow C(\theta_{n_2} \omega)$$

com mensuráveis  $n_1 = n_1(\omega)$  e  $n_2 = n_2(\omega)$  tomando valores em  $\mathbb{Z}$  tais que  $r(\omega)$  e  $s(\omega)$  preservam o ponto base e os seguintes diagramas são quasi-comutativos:

$$\begin{array}{ccc} C(\omega) & \xrightarrow{c(\omega, \cdot)} & C(\theta\omega) \\ \downarrow r(\omega, \cdot) & \text{(I)} \downarrow r(\theta\omega, \cdot) & \\ D(\theta_{n_1} \omega) & \xrightarrow{d(\theta_{n_1} \omega, \cdot)} & D(\theta_* \omega) \end{array} \quad (10)$$

$$\begin{array}{ccc} D(\omega) & \xrightarrow{d(\omega, \cdot)} & D(\theta\omega) \\ \downarrow s(\omega, \cdot) & \text{(III)} \downarrow s(\theta\omega, \cdot) & \\ C(\theta_{n_2} \omega) & \xrightarrow{c(\theta_{n_2} \omega, \cdot)} & C(\theta_* \omega) \end{array} \quad (11)$$

no sentido que

$$r(\theta_{n_2} \omega) \circ s(\omega) = d^{n_2(\omega) + n_1(\theta_2 \omega)}(\omega) \quad (12)$$

$$s(\theta_{n_1} \omega) \circ r(\omega) = c^{n_1(\omega) + n_2(\theta_1 \omega)}(\omega) \quad (13)$$

sendo

$$\begin{cases} r(\theta\omega, c(\omega, \cdot)) = d^{n_1(\theta\omega) - n_1(\omega)}(\theta_{n_1(\omega) + 1} \omega), d(\theta_{n_1(\omega)} \omega, r(\omega, \cdot)) & n_1(\theta\omega) \geq n_1(\omega) \\ d^{n_1(\omega) - n_1(\theta\omega)}(\theta_{n_1(\theta\omega) + 1} \omega), r((\theta\omega), c(\omega, \cdot)) = d(\theta_{n_1(\omega)} \omega, r(\omega, \cdot)) & n_1(\theta\omega) < n_1(\omega) \end{cases} \quad (14)$$

Aqui, a palavra quasi-comutatividade significa que os dois diagramas acima não são necessariamente comutativos. Por exemplo, para o Diagrama 10, dado um  $\omega \in \Omega$  fixado, temos

$$d(\theta_{n_1} \omega, r(\omega, \cdot)) : C(\omega) \rightarrow D(\theta_{n_1(\omega) + 1} \omega) \quad (15)$$

$$r(\theta\omega, c(\omega, \cdot)) : C(\omega) \rightarrow D(\theta_{n_1(\theta\omega) + 1} \omega) \quad (16)$$

e assim (I) e (II) não mapeiam para o mesmo contradomínio a não ser que  $n_1(\omega) = n_1(\theta\omega)$ , o que não é verdade em geral. Logo, o diagrama não é necessariamente comutativo no sentido usual (e nem mesmo q.c., já que não temos informação sobre a medida do evento  $n_1(\omega) = n_1(\theta\omega)$ ). Com o objetivo de corrigir este problema, precisamos que as relações dadas por 14 sejam importantes. Para simplificar, reescrevemos a primeira identidade de 14 da seguinte maneira:

$$r(\theta\omega, c(\omega, \cdot)) = d^\Delta(\theta_{n_1(\omega) + 1} \omega, d(\theta_{n_1(\omega)} \omega, r(\omega, \cdot)))$$

em que  $d^\Delta$  é o ajuste dado por  $n_1(\theta\omega) - n_1(\omega)$  se  $n_1(\theta\omega) \geq n_1(\omega)$  ou  $n_1(\omega) - n_1(\theta\omega)$  se  $n_1(\theta\omega) < n_1(\omega)$ . A segunda igualdade na Equação 14 pode ser expressada agora por

$$d^\Delta(\theta_{n_1(\omega)+1}\omega, r(\theta\omega, c(\omega, \cdot))) = d(\theta_{n_1(\omega)}\omega, r(\omega, \cdot))$$

Em resumo, a exigência 14 pode ser expressada por

$$r \circ c = d^\Delta \circ d \circ r, \quad d^\Delta \circ r \circ c = d \circ r$$

No diagrama quasi-comutativo,  $D(\theta_*\omega)$ , o destino final de (I) e (II), pode ser igual a  $D(\theta_{n_1(\theta\omega)+1}\omega)$  ou  $D(\theta_{n_1(\omega)+1}\omega)$ . Usando o ajuste acima colocado, temos que  $*$  =  $\max\{n_1(\omega) + 1, n_1(\theta\omega) + 1\}$ . Portanto, partindo de  $C(\omega)$  e usando as composições  $r \circ c$  e  $d \circ r$ , chegamos em  $D(\theta_*\omega)$ .

Analogamente, o segundo diagrama é quasi-comutativo da mesma maneira. As identidades 12 e 13 podem ser expressas por

$$r \circ s = d^* \quad \text{e} \quad s \circ r = c^*$$

respectivamente por abuso de notação (já que os dois símbolos  $*$  são diferentes de  $*$  em  $D(\theta_*\omega)$ )

**Proposição 0.30.** *As equivalências por shifts aleatórios da Definição 0.29 são de fato relações de equivalência.*

*Demonstração.* A simetria e a reflexividade seguem diretamente da Definição 0.29. Basta apenas verificarmos a transitividade.

Assim sendo, suponha que  $(C, c)(\omega) \sim (D, d)(\omega)$  com a notação usada na Definição 0.29 e  $(D, d)(\omega) \sim (E, e)(\omega)$  com as mesmas propriedades, digamos que dadas por

$$r_1(\theta\omega, d(\omega, \cdot)) = e^\Delta(\theta_{n'_1(\omega)+1}\omega, e(\theta_{n'_1}\omega, r_1(\omega, \cdot)))$$

$$s_1(\theta\omega, e(\omega, \cdot)) = d^\Delta(\theta_{n'_2(\omega)+1}\omega, d(\theta_{n'_2(\omega)}\omega, s_1(\omega, \cdot)))$$

$$r_1(\theta_{n'_2(\omega)}\omega) \circ s_1(\omega) = e^{n'_2(\omega)+n'_1(\theta_{n'_2(\omega)}\omega)}(\omega)$$

$$s_1(\theta_{n'_1(\omega)}\omega) \circ r_1(\omega) = d^{n'_1(\omega)+n'_2(\theta_{n'_1(\omega)}\omega)}(\omega)$$

em que  $r_1(\omega) : D(\omega) \rightarrow E(\theta_{n'_1(\omega)}\omega)$  e  $s_1(\omega) : E(\omega) \rightarrow D(\theta_{n'_2(\omega)}\omega)$  são mapas aleatórios que preservam os pontos bases.

Usando a segunda relação de 14, temos que  $d^\Delta \circ r \circ c : C(\omega) \rightarrow D(\theta_*\omega)$  pois  $d^\Delta \circ r \circ c = d \circ r$ . Da definição de  $r_1$ , temos que  $r_1 : D(\theta_*\omega) \rightarrow E(\theta_{[n'_1(\theta_*\omega)+*]}\omega)$ . Por outro lado, usando a primeira relação de 14, temos que  $d^\Delta \circ r : C(\omega) \rightarrow D(\theta_*\omega)$ . Em razão de  $(D, d)(\omega) \sim (E, e)(\omega)$ , temos que  $e \circ r_1 : D(\theta_*\omega) \rightarrow E(\theta_{[n'_1(\theta_*\omega)+*+1]}\omega)$ . Essas relações estão escritas abaixo:

$$C(\omega) \xrightarrow{d^\Delta \circ r \circ c} D(\theta_*\omega) \xrightarrow{r_1} E(\theta_{[n'_1(\theta_*\omega)+*]}\omega)$$

$$C(\omega) \xrightarrow{d^\Delta \circ r} D(\theta_*\omega) \xrightarrow{e \circ r_1} E(\theta_{[n'_1(\theta_*\omega)+*+1]}\omega)$$

Defina  $r_2 = r_1 \circ d^\Delta \circ r$ . Temos então que

$$r_2 \circ c : C(\omega) \rightarrow E(\theta_{[n'_1(\theta_*\omega)+*]}(\omega))$$

$$e \circ r_2 : C(\omega) \rightarrow E(\theta_{[n'_1(\theta_*\omega)+*+1]}(\omega))$$

Assim, usando o fato de  $(C, c)(\omega) \sim (D, d)(\omega)$  e  $(D, d)(\omega) \sim (E, e)(\omega)$  temos o seguinte diagrama quasi-comutativo:

$$\begin{array}{ccc} C(\omega) & \xrightarrow{c(\omega)} & C(\theta\omega) \\ r_2(\omega) \downarrow & & \downarrow r_2(\theta\omega) \\ E(\theta_{n''_1}(\omega)) & \xrightarrow{e(\theta_{n''_1}(\omega))} & E(\theta_{*'}\omega) \end{array}$$

sendo  $n''_1(\omega) = n'_1(\theta_*\omega) + *$  e  $E(\theta_{*'}\omega)$  colocado de maneira análoga a  $D(\theta_*\omega)$ .

Repetindo a construção que fizemos, podemos agora considerar  $s_2 = s \circ d^\Delta \circ s_1$ . Obtemos as seguintes relações:

$$s_2(\theta\omega, e(\omega, \cdot)) = c^\Delta(\theta_{n''_2(\omega)+1}\omega, c(\theta_{n''_2(\omega)}\omega, s_2(\omega, \cdot)))$$

e, portanto, o seguinte diagrama é quasi-comutativo:

$$\begin{array}{ccc} E(\omega) & \xrightarrow{e(\omega)} & E(\theta\omega) \\ s_2(\omega) \downarrow & & \downarrow s_2(\theta\omega) \\ C(\theta_{n''_2(\omega)}\omega) & \xrightarrow{e(\theta_{n''_2(\omega)}\omega)} & C(\theta_{*'}\omega) \end{array}$$

Por fim, devemos verificar que  $r_2 \circ s_2 = e^*$ . Temos que:

$$\begin{aligned} r_2 \circ s_2(\omega, \cdot) &= r_1 \circ d^\Delta \circ (r \circ s) \circ d^\Delta \circ s_1(\omega, \cdot) \\ &= r_1 \circ d^* \circ s_1(\omega, \cdot) \\ &= (r_1 \circ d) \circ d^{*-1} \circ s_1(\omega, \cdot) \\ &= (e^\Delta \circ e \circ r_1) \circ d^{*-1} \circ s_1(\omega, \cdot) \\ &= e^* \circ (r_1 \circ d) \circ d^{*-2} \circ s_1(\omega, \cdot) \\ &= \dots \\ &= e^* \circ r_1 \circ s_1(\omega, \cdot) = e^*(\omega, \cdot) \end{aligned}$$

o que garante  $(C, c) \sim (E, e)$ . □

**Lema 0.31.** *Suponha que  $P'(\omega) = (N, L')(\omega)$  e  $P(\omega) = (N(\omega) \cup L(\omega), L(\omega))$  são dois pares filtração para  $S(\omega)$ ,  $L'(\omega) \subset L(\omega)$  e  $\varphi(\omega, L(\omega)) \subset \text{int}L(\theta\omega)$  quase certamente. Então os mapas aleatórios induzidos  $\varphi_{P'} : N_{L'} \rightarrow N_{L'}$  e  $\varphi_P : (N \cup L)_L \rightarrow (N \cup L)_L$  são equivalentes por shifts aleatórios.*

*Demonstração.* Defina  $Q(\omega) = N(\omega) \cup L(\omega)$  e um mapa aleatório  $r(\omega) : N_{L'}(\omega) \rightarrow Q_L(\omega)$  dado por

$$r(\omega)(x) = \begin{cases} [L(\omega)] & \text{se } x = [L'(\omega)] \\ p(\omega)(x) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

sendo  $p(\omega)$  o mapa quociente  $p(\omega) : Q(\omega) \rightarrow Q_L(\omega)$ , i.e.,  $p(\omega)$  é tal que

$$p(\omega)(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (Q \setminus L)(\omega) \\ [L(\omega)] & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Podemos verificar que  $r(\omega)$  é contínua e  $r(\cdot)(x)$  é mensurável. Além disso, podemos ver que

$$r(\theta\omega, \varphi_{P'}(\omega, \cdot)) = \varphi_P(\omega, r(\omega, \cdot)) \quad (17)$$

De fato, temos que o mapa  $\varphi_P : Q_L(\omega) \rightarrow Q_L(\theta\omega)$  é dado por

$$\varphi_P(\omega, x) = \begin{cases} [L(\theta\omega)] & \text{se } x = [L(\omega)] \text{ ou } \varphi(\omega, x) \notin Q(\theta\omega) \\ p(\theta\omega, \varphi(\omega, x)) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

enquanto que o mapa  $\varphi_{P'} : N_{L'}(\omega) \rightarrow N_{L'}(\theta\omega)$  é dado por

$$\varphi_{P'}(\omega, x) = \begin{cases} [L'(\theta\omega)] & \text{se } x = [L'(\omega)] \text{ ou } \varphi(\omega, x) \notin N(\theta\omega) \\ p'(\theta\omega, \varphi(\omega, x)) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que  $p'(\omega) : N(\omega) \rightarrow N_{L'}(\omega)$  é dado por

$$p'(\omega, x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (N \setminus L')(\omega) \\ [L'(\omega)] & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para mostrar a Equação 17, vamos considerar três casos:

1. Suponha que  $x \in [L'(\omega)]$ . Assim, temos por um lado que  $\varphi_{P'}(\omega, x) = [L'(\theta\omega)]$ , logo

$$r(\theta\omega, \varphi_{P'}(\omega, x)) = r(\theta\omega, [L'(\theta\omega)]) = [L(\theta\omega)]$$

Por outro lado, temos que  $r(\omega, x) = [L(\omega)]$ , logo  $\varphi_P(\omega, r(\omega, x)) = [L(\theta\omega)]$ .

2. Suponha agora que  $x \neq [L'(\omega)]$  mas que  $\varphi(\omega, x) \notin N(\theta\omega)$ . Temos que  $\varphi_{P'}(\omega, x) = [L'(\theta\omega)]$ , e assim  $r(\theta\omega, \varphi_{P'}(\omega, x)) = [L(\theta\omega)]$  como no caso anterior. Contudo, agora temos que  $r(\omega, x) = p(\omega, x)$ . Se tivéssemos que  $x \in (Q \setminus L)(\omega)$ , teríamos que  $x \notin L(\omega)$  e assim, como  $L(\omega)$  é uma vizinhança de  $Q^-(\omega)$ , temos que  $x \notin Q^-(\omega)$ ; logo, não podemos ter  $\varphi(\omega, x) \notin Q(\theta\omega)$  o que implicaria  $\varphi(\omega, x) \notin N(\theta\omega)$ , um absurdo. Logo, devemos ter que  $x \in L(\omega)$ . Portanto,  $p(\omega, x) = [L(\omega)]$  e então  $\varphi_P(\omega, r(\omega, x)) = [L(\theta\omega)]$ .

3. Suponha agora que  $x \neq [L'(\omega)]$  e também que  $\varphi(\omega, x) \in N(\theta\omega)$ . Por um lado, temos que  $\varphi_{P'}(\omega, x) = p'(\theta\omega, \varphi(\omega, x))$ . Vamos considerar dois subcasos: primeiramente, suponha que  $\varphi(\omega, x) \in L'(\theta\omega)$ . Assim, teríamos que  $p'(\theta\omega, \varphi(\omega, x)) = [L'(\theta\omega)]$ ; logo,  $r(\theta\omega, \varphi_{P'}(\omega, x)) = r(\theta\omega)([L'(\theta\omega)]) = [L(\theta\omega)]$ . Caso contrário, teríamos que  $p'(\theta\omega, \varphi(\omega, x)) = \varphi(\omega, x)$  e assim

$$r(\theta\omega, \varphi_{P'}(\omega, x)) = p(\theta\omega, \varphi(\omega, x)) = \varphi(\omega, x)$$

em que a última igualdade segue porque  $\varphi(\omega, x) \notin L'(\theta\omega) \subset L(\theta\omega)$ . Estas são então as

identidades do lado esquerdo da Equação 17. Para estudar a expressão do lado direito, note que  $r(\omega, x) = p(\omega, x)$  já que  $x \neq [L'(\omega)]$ ; mas, justamente porque  $x \neq [L'(\omega)]$ , temos que  $x \notin L'(\omega)$  o que implica que  $x \notin L(\omega)$ . Portanto,  $p(\omega, x) = x$ . Assim sendo, se  $\varphi(\omega, x) \in L'(\theta\omega)$ , temos que  $\varphi(\omega, x) \in L(\theta\omega)$  e portanto  $\varphi_P(\omega, x) = p(\theta\omega, \varphi(\omega, x)) = [L(\theta\omega)]$ ; agora, no segundo subcaso, temos que se  $\varphi(\omega, x) \notin L'(\theta\omega)$ , então  $\varphi_P(\omega, x) = p(\theta\omega, \varphi(\omega, x)) = \varphi(\omega, x)$ .

Vamos mostrar que q.c. existe um inteiro aleatório  $n = n(\omega)$  tal que

$$\mathbb{P}\{\omega | \varphi^k(\omega, (N \cap L)(\omega)) \subset L'(\theta_k\omega), \text{ para algum } k < n(\omega)\} = 1 \quad (18)$$

i.e., em algum momento a interseção de  $N(\omega)$  com  $L(\omega)$  é quase certamente toda mapeada para dentro de  $L'(\omega)$ . Suponha o contrário, i.e., sendo

$$\tilde{\Omega} = \{\omega | \exists x \in (N \setminus L)(\omega) \text{ tal que } \varphi^k(\omega)(x) \in (N \setminus L')(\theta_k\omega), \text{ para todo inteiro } k \geq 0\}$$

vamos assumir então que  $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) > 0$ .

Defina o seguinte conjunto aleatório

$$\tilde{L}(\omega) = \left( \bigcap_{k \geq 0} \varphi^{-k}(\theta_k\omega, (N \setminus L')(\theta_k\omega)) \right) \cap (N \setminus L)(\omega)$$

Intuitivamente, podemos entender  $\tilde{L}(\omega)$  como a interseção de todas as imagens de  $\varphi^{-k}(\theta_k\omega) : (N \setminus L')(\theta_k\omega) \rightarrow X$  com  $(N \setminus L)(\omega)$ , ou seja, são os  $x \in X$  tais que  $x \in (N \setminus L)(\omega)$  e  $x = \varphi^k(\theta_k\omega)(y)$  para algum  $y \in (N \setminus L')$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Logo,  $\tilde{L}(\omega) \neq \emptyset$  se  $\omega \in \tilde{\Omega}$ . Defina, então:

$$\tilde{N}(\omega) = \begin{cases} \tilde{L}(\omega) & \text{se } \omega \in \tilde{\Omega} \\ S(\omega) & \text{se } \omega \in \Omega \setminus \tilde{\Omega} \end{cases}$$

Portanto,  $\varphi^k(\omega, \tilde{N}(\omega)) \subset (N \setminus L')(\theta_k\omega)$  quase certamente para todo inteiro  $k$  não negativo. Logo, sendo  $\Omega_{\tilde{N}}(\omega) = \bigcap_{n \geq 0} \text{cl}(\bigcup_{k \geq n} \varphi^k(\theta_{-k}\omega, \tilde{N}(\theta_{-k}\omega)))$  o conjunto ômega limite de  $\tilde{N}$ , temos que  $\Omega_{\tilde{N}}$  é um conjunto aleatório compacto invariante em  $\text{cl}(N \setminus L')$ .

De fato, se  $\omega \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}$ , temos que  $\tilde{N}(\omega) = S(\omega)$  e logo  $\Omega_{\tilde{N}}(\omega) \subset S(\omega)$  pois  $S(\omega)$  é invariante maximal e portanto  $\Omega_{\tilde{N}}(\omega) \subset \text{cl}(N \setminus L')(\omega)$  dado que  $S(\omega) \subset \text{cl}(N \setminus L')(\omega)$ ; por outro lado, se  $\omega \in \tilde{\Omega}$  temos que para todo  $k \geq 0$  vale que  $x \in \tilde{L}(\omega)$  é tal que  $x = \varphi^k(\theta_k\omega)(y)$  com  $y \in (N \setminus L')(\theta_k\omega)$ , inclusive para  $k = 0$  logo  $x = y$  em  $(N \setminus L')(\omega)$  e portanto  $\tilde{L}(\omega) \subset \text{cl}(N \setminus L')$ .

Temos que  $\Omega_{\tilde{N}}(\omega) \subset S(\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c., já que  $S(\omega)$  é o conjunto invariante maximal dentro de  $\text{cl}(N \setminus L')(\omega)$ . Assim, pela implicação

$$x \in \varphi^k(\theta_{-k}\omega, \tilde{N}(\theta_{-k}\omega)) \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies x \in \bigcap_{n \geq 0} \text{cl}\left(\bigcup_{k \geq n} \varphi^k(\theta_{-k}\omega, \tilde{N}(\theta_{-k}\omega))\right)$$

e pela propriedade que  $\theta_n(\omega)$  tem de preservar a medida de probabilidade, segue que, usando o

fato de que  $\varphi(0, \omega) = \text{Id}_X$  e da hipótese de  $\varphi(\omega, L(\omega)) \subset \text{int}L(\theta\omega)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\omega | \Omega_{\tilde{N}}(\omega) \subset L(\omega)\} &\geq \mathbb{P}\{\omega | \varphi^k(\theta_{-k}\omega, \tilde{N}(\theta_{-k}\omega)) \subset L(\omega), \quad \forall k \in \mathbb{N}\} \\ &= \mathbb{P}\{\omega | \varphi^k(\omega, \tilde{N}(\omega)) \subset L(\theta_k\omega), \quad \forall k \in \mathbb{N}\} \\ &\geq \mathbb{P}\{\omega | \tilde{N}(\omega) \subset L(\omega)\} \\ &= \mathbb{P}(\tilde{\Omega}) > 0 \end{aligned}$$

em que esta última igualdade segue da definição de  $\tilde{N}(\omega)$  e do fato de  $\tilde{L}(\omega) \subset L(\omega)$  para  $\omega \in \tilde{\Omega}$ .

Assim sendo, mostramos que  $\mathbb{P}\{\omega | \Omega_{\tilde{N}}(\omega) \subset L(\omega)\} > 0$ . Como  $\mathbb{P}\{\omega | S(\omega) \subset L(\omega)\} \geq \mathbb{P}\{\omega | \Omega_{\tilde{N}}(\omega) \subset L(\omega)\}$ , temos então que  $\mathbb{P}\{\omega | S(\omega) \subset L(\omega)\} > 0$ . Isso contradiz a hipótese que  $L(\omega) \cap S(\omega) = \emptyset$  para quase todo  $\omega \in \Omega$  em razão de  $L(\omega)$  por definição ser uma vizinhança de  $N^-(\omega)$ .

O inteiro aleatório  $n(\omega)$  pode ser escolhido mensurável. De fato, para cada  $\omega \in \Omega$ , seja  $k(\omega) = \inf\{m \in \mathbb{N} | \varphi^m(\omega, (N \cap L)(\omega)) \subset L'(\theta_m\omega)\}$ . Pela argumentação acima, temos que  $k(\omega)$  é finito. Por argumento análogo ao feito no Lema 3.5 da referência (Liu, 2005) e pela Proposição 0.40, a função  $\omega \mapsto k(\omega)$  é mensurável. Seja  $n(\omega) = k(\omega) + 1$ . Vale naturalmente que a equação 19 é satisfeita para algum  $k < n(\omega)$

$$\varphi^k(\omega, N(\omega) \cap L(\omega)) \subset L'(\theta_k\omega) \quad (19)$$

e a v.a.  $n(\omega)$  assim definida ainda é mensurável.

Definimos o inteiro aleatório  $n$  como  $n(\omega)$  se  $n(\omega) \geq n(\theta\omega)$  e como  $n(\theta\omega)$  se  $n(\omega) < n(\theta\omega)$ . Note que este novo inteiro aleatório ainda satisfaz a relação dada na Equação 19.

Note que  $(Q \setminus L)(\omega) = (N \setminus L)(\omega)$  pois  $Q(\omega) = N(\omega) \cup L(\omega)$ . Definimos um mapa aleatório  $s(\omega) : Q_L(\omega) \rightarrow N_{L'}(\theta_n\omega)$  por

$$s(\omega)(x) = \begin{cases} [L'(\theta_n\omega)] & \text{se } x = [L(\omega)] \\ \varphi_{p'}^n(\omega, p'(\omega)(x)) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que  $p' : N \rightarrow N_{L'}$  é o mapa quociente aleatório e  $n = n(\omega)$ .

Portanto,  $s(\theta\omega, \varphi_P(\omega, \cdot)) = \varphi_{p'}^n(\theta_{n+1}\omega, \varphi_{P'}(\theta_n\omega, s(\omega, \cdot)))$   $\mathbb{P}$ -q.c., de maneira análoga ao raciocínio usado para mostrar a igualdade da Equação 17.

O mapa  $s(\omega)$  é contínuo em  $Q_L(\omega) \setminus [L(\omega)]$ , dado que é a composição de mapas contínuos. Existe uma vizinhança aleatória  $V(\omega)$  de  $L(\omega)$  tal que  $\varphi(\omega, V(\omega)) \subset \text{int}L(\theta\omega)$  já que  $\varphi(\omega)$  é homeomorfismo. Para cada  $x \in V(\omega)$ , com  $n(\omega) \geq n(\theta\omega)$ , obtemos que  $\varphi^k(\omega)(x) \in L'(\theta_k\omega)$  para qualquer  $x \in V(\omega)$  e algum  $k \leq n(\omega)$  usando a relação dada na Equação 19 e, portanto,  $\varphi_{p'}^n(\omega) \circ p'(\omega)(x) = [L'(\theta_n\omega)]$ . Portanto,  $s(\omega)$  também é contínua no ponto  $[L(\omega)]$ . A mensurabilidade de  $s(\cdot, \omega)$  é clara.

Pela definição de  $r(\omega)$  e  $s(\omega)$ , vale para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega$ , que

$$s(\omega, r(\omega \cdot)) = \varphi_{p'}^n(\omega, \cdot), \quad r(\theta_n\omega, s(\omega, \cdot)) = \varphi_{p'}^n(\omega, \cdot)$$

e portanto a equivalência por shifts aleatórios prometida é alcançada.  $\square$

**Lema 0.32.** *Suponha que  $P(\omega) = (N, L)(\omega)$  e  $P'(\omega) = (N', L)(\omega)$  são dois pares filtração para*

$S(\omega)$ , com  $N(\omega) \subset N'(\omega)$  e  $\varphi(\omega, L(\omega)) \subset \text{int}L(\theta\omega)$  quase certamente. Então os mapas aleatórios induzidos  $\varphi_P : N_L \rightarrow N_L$  e  $\varphi_{P'} : N'_L \rightarrow N'_L$  são equivalentes por shifts aleatórios.

*Demonstração.* Defina um mapa aleatório  $r(\omega) : N_L(\omega) \rightarrow N'_L(\omega)$  por

$$r(\omega)(x) = \begin{cases} [L(\omega)] & \text{se } x = [L(\omega)] \\ p'(\omega)(x) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que  $p' : N'(\omega) \rightarrow N'_L(\omega)$  é o mapa quociente aleatório. Temos que  $r(\omega)(\cdot)$  é contínua,  $r(\cdot)(x)$  é mensurável e  $r(\theta\omega, \varphi_P(\omega, \cdot)) = \varphi_{P'}(\omega, r(\omega, \cdot))$  para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega$ . Esses resultados são mostrados de maneira análoga a feita no Lema 0.31.

Como  $L(\omega)$  é uma vizinhança aleatória de  $N^-(\omega)$ ,  $\varphi(\omega, (N \setminus L)(\omega)) \subset \text{int}N(\theta\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c. Portanto, como assumimos que  $\varphi(\omega, L(\omega)) \subset \text{int}L(\theta\omega)$  q.c., temos que  $\varphi(\omega, N(\omega)) \subset \text{int}N(\theta\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c. dado que  $\text{int}L(\theta\omega) \subset \text{int}N(\theta\omega)$  pois  $L(\theta\omega) \subset N(\theta\omega)$ . Neste caso então, temos que  $\Omega_N(\omega)$  ( $\subset \text{int}N(\omega)$ )  $\mathbb{P}$ -q.c., já que  $\varphi(\omega, N(\omega)) \subset \text{int}N(\theta\omega)$  é o conjunto compacto invariante maximal aleatório dentro de  $N(\omega)$ .

Vamos decompor o conjunto aleatório  $(N' \setminus N)(\omega)$  definindo dois conjuntos aleatórios  $N_1(\omega)$  e  $N_2(\omega)$  da seguinte maneira:

$$N_1(\omega) := \{x \mid x \in (N' \setminus N)(\omega), \varphi^k(\omega)(x) \in (N' \setminus L)(\theta_k\omega) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}$$

$$N_2(\omega) := \{x \mid x \in (N' \setminus L)(\omega), \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \varphi^k(\omega)(x) \in L(\theta_k\omega)\}$$

Em outras palavras, os elementos de  $N_1(\omega)$  são os elementos de  $(N' \setminus N)(\omega)$  que em nenhuma iterada  $\varphi^n(\omega)$  são nunca mapeados para  $L(\theta_n\omega)$ ;  $N_2(\omega)$  é apenas o complementar deste conjunto.

Pela definição de  $N_1(\omega)$  e a propriedade de  $\theta_n$  de preservar a medida, obtemos que  $\Omega_{N_1}(\omega) \subset \text{cl}(N' \setminus L)(\omega)$  para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega$ . Pela definição de  $N_2(\omega)$  e a invariância positiva de  $L(\omega)$  da hipótese, i.e., por  $\varphi(\omega, L(\omega)) \subset \text{int}L(\theta\omega)$ , temos que  $\Omega_{N_2}(\omega) \subset L$  para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega$ .

Como  $S(\omega)$  e  $\Omega_L(\omega)$  são os conjuntos invariantes maximais respectivamente em  $\text{cl}(N' \setminus L)(\omega)$  e  $L(\omega)$  (e note que  $\Omega_L(\omega)$  é invariante maximal aleatório em  $L(\omega)$  apenas porque estamos assumindo invariância positiva neste conjunto), temos

$$\Omega_{N' \setminus N}(\omega) = \Omega_{N_1}(\omega) \cup \Omega_{N_2}(\omega) \subset S(\omega) \cup \Omega_L(\omega) \subset \text{int}N(\theta\omega)$$

pelo Lema 0.45. Portanto,

$$\Omega_{N'}(\omega) = \Omega_N(\omega) \cup \Omega_{N' \setminus N}(\omega) \subset \text{int}N(\omega) \tag{20}$$

Logo, existe um inteiro aleatório  $n = n(\omega)$  (de fato,  $n(\omega)$  pode ser escolhido mensurável como na prova do Lema 0.31) tal que

$$\varphi^k(\theta_{-k}\omega, N'(\theta_{-k}\omega)) \subset \text{int}N(\omega) \quad \text{sempre que } k \geq n(\omega) - 1 \tag{21}$$

pela invariância positiva de  $N'(\omega)$  que mostramos na relação 20. De fato, para qualquer conjunto

aleatório invariante positivamente  $D(\omega)$ , temos

$$\varphi^n(\theta_{-n}\cdot, D(\theta_{-n}\cdot)) \subset \varphi^m(\theta_{-m}\cdot, D(\theta_{-m}\cdot)), \quad \text{sempre que } n \geq m$$

Logo, pela propriedade de  $\theta_n$  de preservar a medida, temos

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{\omega \mid \varphi^n(\omega, N'(\omega)) \subset \text{int}N(\theta_n\omega), n \geq n(\omega)\} \\ &= \mathbb{P}\{\omega \mid \varphi^n(\theta_{-n}\omega, N'(\theta_{-n}\omega)) \subset \text{int}N(\omega), n \geq n(\omega)\} = 1 \end{aligned}$$

Vamos ajustar o inteiro  $n = n(\omega)$  aleatório acima de tal forma que  $n(\omega) \geq n(\theta\omega)$  como na prova do Lema 0.31 de modo que ele ainda satisfaça a relação estabelecida na Equação 21. Defina um mapa aleatório  $s(\omega) : N'_L \rightarrow N_L(\theta_n\omega)$  como

$$s(\omega)(x) = \begin{cases} [L(\theta_n\omega)] & \text{se } x = [L(\omega)] \\ p(\theta_n\omega, \varphi^n(\omega)(x)) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com o mapa quociente aleatório  $p(\omega) : N(\omega) \rightarrow N_L(\omega)$ . Note que

$$s(\theta\omega, \varphi_{P'}(\omega, \cdot)) = \varphi_P^\Delta(\theta_{n+1}\omega, \varphi_P(\theta_n\omega, s(\omega, \cdot)))$$

para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega$ , em que esta relação é mostrada de maneira análoga a demonstração feita no Lema 0.31.

Temos que  $s(\omega, \cdot)$  é contínua em  $N'_L(\omega) \setminus [L(\omega)]$  já que ela é a composição de dois mapas contínuos. Como assumimos que  $\varphi(\omega, L(\omega)) \subset \text{int}L(\theta\omega)$  e  $\varphi$  é um homeomorfismo, existe uma vizinhança aleatória  $V(\omega)$  de  $L(\omega)$  tal que  $\varphi(\omega, V(\omega)) \subset \text{int}L(\theta\omega)$ . Pela escolha de  $n(\omega) \geq n(\theta\omega)$ , temos que  $s(\omega, V(\omega)) = [L(\theta_n\omega)]$ , e assim  $s(\omega)$  é contínua em  $[L(\omega)]$ . A função  $s(\cdot)(x)$  é mensurável obviamente.

Pela definição de  $r$  e  $s$ , obtemos que

$$r(\theta_n\omega, s(\omega, \cdot)) = \varphi_{P'}^n(\omega, \cdot), \quad s(\omega, r(\omega, \cdot)) = \varphi_P^n(\omega, \cdot)$$

para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega$ . □

**Teorema 0.33.** *Suponha que  $P(\omega) = (N, L)(\omega)$  e  $P'(\omega) = (N', L')(\omega)$  são dois pares filtrações aleatórios para  $S(\omega)$ . Então os mapas induzidos  $\varphi_P : N_L(\omega) \rightarrow N_L(\omega)$  e  $\varphi_{P'} : N'_{L'}(\omega) \rightarrow N'_{L'}(\omega)$  são equivalentes por shifts aleatórios.*

*Demonstração.* Pelos Lemas 0.19 e 0.20, temos que existe uma variável aleatória  $\epsilon > 0$  tal que

$$\text{cl}(C_\epsilon(N \setminus L, S)(\omega)) = \text{cl}(C_\epsilon(N' \setminus L', S)(\omega)) \subset \text{int}(N(\omega) \setminus L(\omega)) \cap \text{int}(N'(\omega) \setminus L'(\omega)) \quad (22)$$

$\mathbb{P}$ -quase certamente.

Defina  $B(\omega) = \text{cl}(C_\epsilon(N \setminus L, S)(\omega))$ . Assuma que  $B_0(\omega)$  é uma vizinhança aleatória suficientemente pequena de  $B^-(\omega)$  em  $B(\omega)$ , de modo que  $P_0(\omega) = (B, B_0)(\omega)$  é um par filtração aleatório para  $S(\omega)$  pelo Teorema 0.26.

Vamos provar que  $\varphi_P$  e  $\varphi_{P'}$  são shift equivalentes mostrando que  $\varphi_{P_0} \sim \varphi_P$  e  $\varphi_{P_0} \sim \varphi_{P'}$  e aí usamos a Proposição 0.30 para garantir que  $\varphi_P \sim \varphi_{P'}$ . Como provar  $\varphi_{P_0} \sim \varphi_{P'}$  é análogo a mostrar que  $\varphi_{P_0} \sim \varphi_P$ , faremos a demonstração apenas deste último.

Como  $B(\omega) \subset (N \setminus L)(\omega)$ ,  $B(\omega)$  pode ser considerado um subespaço de  $N_L(\omega) \setminus [L(\omega)]$  pela identificação  $N_L(\omega) \setminus [L(\omega)] \cong N(\omega) \setminus L(\omega)$ . Pela definição de  $B^-(\omega)$ , para uma variável aleatória arbitrária  $x(\omega) \in B^-(\omega)$ , não pode existir uma  $\epsilon$ -cadeia de  $\varphi_P(\theta_{-1}\omega)(x(\theta_{-1}\omega))$  para  $S(\omega)$  com probabilidade positiva já que  $\varphi(\omega, x(\omega)) \notin (N \setminus L)(\theta\omega)$  pela definição de  $B^-(\omega)$ , logo  $\varphi(\omega, x(\omega)) \in L(\theta\omega)$  e  $S(\theta\omega) \cap L(\theta\omega) = \emptyset$  pela definição de par filtração. Portanto,  $\Omega_{B^-}(\omega) \cap S(\omega) = \emptyset$   $\mathbb{P}$ -q.c.

Como  $\varphi_P(\omega, \cdot) : N_L(\omega) \rightarrow N_L(\theta\omega)$  e pela compacidade de  $N_L(\omega)$ , obtemos que  $\Omega_{B^-} \neq \emptyset$  e  $\Omega_{B^-}(\omega) \subset N_L(\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c.

Mas existem apenas dois conjuntos invariantes aleatórios em  $N_L(\omega)$  com respeito a  $\varphi_P(\omega)$ , dados por  $S(\omega)$  e  $\{[L(\omega)]\}$ , em. Logo,  $\Omega_{B^-}(\omega) = \{[L(\omega)]\}$ .

Pelo Teorema 0.28, temos que  $[L(\omega)] \subset \text{int}\varphi_P^{-1}(\theta\omega)([L(\theta\omega)])$  para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega$ . Então existe um inteiro aleatório  $n = n(\omega)$  tal que, sendo  $\tilde{L}(\omega) = \text{int}\varphi_P^{-1}(\theta\omega)([L(\theta\omega)])$ , temos que

$$\varphi_P^k(\omega, B^-(\omega)) \subset \tilde{L}(\theta_k\omega), \quad k \geq n(\omega) \text{ } \mathbb{P}\text{-q.c.} \quad (23)$$

pela propriedade de preservar a medida de  $\theta_n$  justamente porque existe um  $n(\omega)$  mensurável tal que:

$$\varphi_P^n(\omega, B^-(\omega)) = [L(\theta_n\omega)], \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

dado que  $\Omega_{B^-}(\omega) = \{[L(\omega)]\}$  e temos ainda a hipótese que  $\varphi(\omega, L(\omega)) \subset \text{int}L(\theta\omega)$ .

Note que o inteiro aleatório  $n = n(\omega)$  pode ser escolhido ainda mensurável e de modo a satisfazer  $n(\omega) \leq n(\theta\omega)$  de maneira similar ao argumento usado no Lema 0.31.

Como  $B_0$  é uma vizinhança suficientemente pequena de  $B^-$ , obtemos

$$\varphi_P^n(\omega, B_0(\omega)) = [L(\theta_n\omega)], \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

Defina um novo conjunto aleatório:

$$K(\omega) = \text{cl}(\text{int}\varphi_P^{-n}(\theta_n\omega, [L(\theta_n\omega)])) \cap N_L(\omega)$$

Como  $[L(\omega)] \subset \text{int}\varphi_P^{-1}(\theta\omega)([L(\theta\omega)])$  e  $n(\omega) \leq n(\theta\omega)$ , temos que  $\varphi_P(\omega, K(\omega)) \subset \text{int}K(\theta\omega)$  para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega$ , e  $B_0(\omega) \subset \text{int}K(\omega)$  pela definição de  $K(\omega)$ .

Seja  $Q(\omega) = (B \cup K, K)(\omega)$  e  $R(\omega) = (N_L, K)(\omega)$ . Então  $Q$  e  $R$  são pares filtração aleatórios para  $S(\omega)$ . Pelo Lema 0.31 obtemos que  $\varphi_{P_0} \sim \varphi_Q$  e pelo Lema 0.32,  $\varphi_Q \sim \varphi_R$ . Logo, nós temos que  $\varphi_{P_0} \sim \varphi_R$  pela Proposição 0.30.

Seja  $\tilde{R}(\omega) = (N(\omega), p^{-1}(\omega), K(\omega))$  com  $p(\omega, \cdot) : N(\omega) \rightarrow N_L(\omega)$  o mapa quociente aleatório. Pelo Lema 0.31, temos que  $\varphi_P \sim \varphi_{\tilde{R}}$ . Identificando os espaços pontuados aleatórios e os mapas aleatórios de espaços pontuados correspondentes  $\tilde{R}$  e  $R$  ( $\varphi_R \sim \varphi_{\tilde{R}}$ ), temos que  $\varphi_P \sim \varphi_R \sim \varphi_{P_0}$ .  $\square$

## 4 Definição e Propriedades

Antes de definir o Índice de Conley aleatório para SDA discretos, vamos definir homotopias aleatórias e continuções aleatórias. O objetivo é mostrar que o índice é invariante sob estas.

**Definição 0.34.** Seja  $C$  um espaço pontuado aleatório e  $f$  um mapa aleatório que preserva o ponto base tal que  $f(\omega) : C(\omega) \rightarrow C(\theta_n\omega)$  é contínuo e  $f(\cdot)(x)$  é mensurável com  $n = n(\omega)$ . Seja  $\mathcal{M}_{C,n}$  o espaço de todos os mapas aleatórios  $g(\omega) : C(\omega) \rightarrow C(\theta_n\omega)$  tal que  $g(\omega)(\cdot)$  é contínua e  $g(\cdot)(x)$  é mensurável com  $n = n(\omega)$ .

Suponha que  $C = N_L$  com  $L \subset N$ . Dado um  $\omega \in \Omega$  fixado qualquer, definimos

$$\tilde{d}_\omega(x, y) := \begin{cases} d_X(x, y) & \text{se } x, y \in (N \setminus L)(\omega) \\ 0 & \text{se } x = y = [L(\omega)] \\ \text{dist}_X(y, L(\omega)) & \text{se } x = [L(\omega)] \text{ e } y \in (N \setminus L)(\omega) \end{cases}$$

Para  $f, g \in \mathcal{M}_{C,n}$ , defina

$$d_\omega(f, g) := \sup_{x \in C(\omega)} \tilde{d}_{\theta_n\omega}(f(\omega)(x), g(\omega)(x))$$

Podemos mostrar que  $\tilde{d}_\omega(\cdot, \cdot)$  é uma métrica no espaço pontuado. Com isso em mente, é claro que:

- $d_\omega(f, g) \geq 0$  para todo  $\omega$  e para todas  $f, g \in \mathcal{M}_{C,n}$ , e  $d_\omega(f, g) = 0$  se, e somente se,  $f(\omega) \equiv g(\omega)$  em  $C$ ;
- $d_\omega(f, g) = d_\omega(g, f)$  para todo  $\omega$ ;
- para quaisquer  $f, g, h \in \mathcal{M}_{C,n}$  e todo  $\omega$ ,  $d_\omega(f, h) \leq d_\omega(f, g) + d_\omega(g, h)$ .

Portanto,  $(\mathcal{M}_{C,n}, d)$  é um espaço métrico aleatório com a topologia induzida pela métrica aleatória da Definição 0.34. Uma família de mapas aleatórios  $\{f_n\} \in \mathcal{M}_{C,n}$  converge a  $f$  na topologia  $C^0$ -aleatória se  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_\omega(f, f_n) = 0$   $\mathbb{P}$ -quase certamente.

**Definição 0.35.** Sejam  $f$  e  $g$  elementos em  $\mathcal{M}_{C,n}$ . Dizemos que  $f$  é **homotopicamente aleatória** a  $g$  ( $f \cong g$ ) se existe um mapa

$$H : [0, 1] \times \Omega \times C \rightarrow C$$

tal que

- $H(\cdot, \omega, \cdot) : [0, 1] \times C(\omega) \rightarrow C(\theta_n\omega)$  é contínuo
- $H(t, \cdot, x) : \Omega \rightarrow C(\theta_n\cdot)$  é mensurável
- $H_t = H(t, \cdot, \cdot)$  preserva o ponto base de  $C$
- $H(0, \cdot, \cdot) = f(\cdot)(\cdot)$

- $H(1, \cdot, \cdot) = g(\cdot)(\cdot)$

**Lema 0.36.** *A homopia aleatória  $\cong$  como na Definição 0.35 é uma relação de equivalência em  $\mathcal{M}_{C,n}$  para um conjunto aleatório compacto  $C$ .*

*Demonstração.* É suficiente mostrar que a homotopia aleatória é transitiva, já que ela é claramente simétrica e também reflexiva (para esta última, basta tomar o mapa  $H_t = H(t, \cdot, \cdot) = f(\cdot)(\cdot)$  qualquer que seja  $t \in [0, 1]$ ).

Se  $F : f \cong g$  e  $G : g \cong h$  são mapas que tornam, respectivamente,  $f$  homotopicamente aleatória a  $g$  e  $g$  homotopicamente aleatória a  $h$ , podemos definir:

$$H(t, \cdot, \cdot) = \begin{cases} F(2t, \cdot, \cdot) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, \cdot, \cdot) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Para qualquer  $\omega \in \Omega$ , o conjunto em que  $F = G$  é  $\{(t, x) \in [0, 1] \times C(\omega) \mid \lambda = \frac{1}{2}, x \in C(\omega)\}$  e esse conjunto de sobreposição é fechado para o conjunto aleatório compacto  $C$ . Pelo lema da colagem, vale que  $H(\cdot, \omega, \cdot)$  é contínua para todo  $\omega \in \Omega$ . Pela definição de  $F, G$  e  $H$ , vale que  $H(t, \cdot, x)$  é mensurável. Portanto,  $f \cong h$ .  $\square$

*Observação 0.37.* O Lema 0.36 não é mais válido caso  $C$  não seja um conjunto aleatório fechado.

**Definição 0.38.** Suponha que  $C$  e  $D$  são dois espaços pontuados aleatórios. Seja  $r$  um mapa aleatório que preserva o ponto base tal que  $r(\omega) : C(\omega) \rightarrow D(\theta\omega)$  é contínuo e  $r(\cdot)(x)$  é mensurável para um inteiro aleatório mensurável  $n = n(\omega)$ .

Seja  $\mathcal{M}_{C,D,n}$  o espaço de mapas aleatórios que preservam o ponto base  $s : C \rightarrow D$  tais que  $s(\omega) : C(\omega) \rightarrow D(\theta_n\omega)$  é contínuo e  $s(\cdot)(x)$  é mensurável para um inteiro mensurável  $n = n(\omega)$ . Analogamente ao que fizemos na Definição 0.35, podemos definir  $r \cong s$  a relação de homotopia aleatória em  $\mathcal{M}_{C,D,n}$ .

Seja  $[c(\omega)] : C(\omega) \rightarrow C(\theta\omega)$  e  $[d(\omega)] : D(\omega) \rightarrow D(\theta\omega)$  classes de equivalências de homotopia aleatórias em  $\mathcal{M}_{C,1}$  e  $\mathcal{M}_{D,1}$ , respectivamente. Dizemos que **as classes de equivalência de homotopias aleatórias  $(C, [c])$  e  $(D, [d])$  são equivalentes por shifts aleatórios** se existem classes de homotopia aleatória  $[r(\omega)] : C(\omega) \rightarrow D(\theta_{n_1}\omega)$  e  $[s(\omega)] : D(\omega) \rightarrow C(\theta_{n_2}\omega)$  em  $\mathcal{M}_{C,D,n_1}$  e  $\mathcal{M}_{C,D,n_2}$ , respectivamente, tais que

$$[r] \circ [c] = [d]^\Delta \circ [d] \circ [r], \quad [s] \circ [d] = [c]^\Delta \circ [c] \circ [s]$$

$$[r] \circ [s] = [d]^*, \quad [s] \circ [r] = [c]^*$$

**Definição 0.39.** Suponha que  $\varphi$  é o mapa de tempo 1 de um SDA discreto,  $S$  é um conjunto invariante isolado para  $\varphi$  e  $P = (N, L)$  é um par filtração aleatório para  $S$ . Seja  $h_P(S, \varphi)$  a classe de homotopia aleatória  $[\varphi_P]$  do espaço pontuado aleatório  $N_L$  com representante  $\varphi_P$ . A classe de shift equivalência de  $h_P(S, \varphi)$ , denotada por  $h(S, \varphi)$ , é dita **Índice de Conley aleatório para  $S$** .

**Teorema 0.40. (Propriedade da Continuação)** *Suponha que  $\varphi_t$ , com  $t \in [0, 1]$  é uma família de homeomorfismos aleatórios, que dependem de maneira contínua (numa vizinhança da  $C^0$ -topologia) de  $t$ . Se  $N$  é uma vizinhança isolante aleatória para cada  $\varphi_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , então o*

Índice de Conley  $h(S_t, \varphi_t)$  para  $t$  é independente de  $t \in [0, 1]$ , i.e.,  $h(S_t, \varphi_t) = h(S_0, \varphi_0)$ , em que  $S_t = \text{Inv}(N, \varphi_t)$ , com  $t \in [0, 1]$ , é o conjunto invariante isolado para  $\varphi_t$  em  $N$ .

*Demonstração.* Segue diretamente do Teorema 0.26.  $\square$

*Observação 0.41.* Seja  $\underline{0}$  o índice de Conley aleatório de espaços pontuados aleatórios que consistem apenas de um ponto aleatório (o ponto base) com mapas aleatórios constantes para quase todo  $\omega$ . Portanto,  $h(S, \varphi) = 0$  se, e somente se,  $\varphi^n \cong f$  para algum inteiro mensurável  $n = n(\omega)$  e  $f(\omega) : N_L(\omega) \rightarrow N_L(\theta_n \omega)$  é o mapa aleatório constante  $f(\omega, N_L(\omega)) = [L(\theta_n \omega)]$ .

**Teorema 0.42. (Propriedade de Wazèwski)** *Suponha que  $S(\omega)$  é um conjunto invariante isolado e que o índice de Conley para  $S(\omega)$  é não trivial, ou seja,  $h(S, \varphi) \neq \underline{0}$ . Então  $S \neq \emptyset$   $\mathbb{P}$ -q.c. dado que  $\theta$  é ergódica sobre  $\mathbb{P}$ .*

*Demonstração.* Se  $S = \emptyset$  com probabilidade positiva, então  $S = \emptyset$  quase certamente dada a ergodicidade de  $\theta_n$  sobre  $\mathbb{P}$  e a invariância de  $S$ . Portanto,  $(\emptyset, \emptyset)$  é um par filtração aleatório para  $S$  e  $h(S, \varphi) = \underline{0}$ .  $\square$

Considere que  $\phi$  é um SDA a tempo contínuo e que  $\varphi_h(\omega) := \phi(h, \omega) : X \rightarrow X$  é o seu mapa de tempo  $h$ . Então  $\varphi_h$  é um SDA discreto gerado pelo mapa de tempo  $h$  do SDA a tempo contínuo  $\phi$  com a notação  $\varphi_h^k(\omega) = \phi(kh, \omega)$ . Trocando  $n \in \mathbb{Z}$  por  $t \in \mathbb{R}$  nas Definições 0.3, 0.4 e 0.5, definimos os conceitos de vizinhança isolante aleatória, conjunto invariante isolado e bloco isolante aleatório agora para SDA a tempo contínuo.

Nos próximos dois teoremas, vamos discutir as relações dos conjuntos invariantes por um SDA a tempo contínuo e dos invariantes do mapa de tempo  $h$  deste.

**Teorema 0.43.** *Suponha que  $\phi$  é um SDA a tempo contínuo. Se existe  $\delta > 0$  tal que para qualquer inteiro positivo  $h$  com  $h < \delta$ , vale que  $S$  é um conjunto aleatório invariante de  $\varphi_h$ , então  $S$  é um conjunto invariante de  $\phi$ .*

*Demonstração.* Temos que  $S$  é um conjunto invariante aleatório para  $\phi$  pelo conjunto aleatório invariante  $S$  de  $\varphi_h$  para  $0 < h \leq \delta$ . Suponha que  $N$  é uma vizinhança isolada de  $S$  com respeito a  $\varphi_h$  para algum  $h \in (0, \delta]$ . Então  $S \subset \text{Inv}(N, \phi) \subset \text{Inv}(N, \varphi_h) = S$ .  $\square$

**Teorema 0.44.** *Suponha que  $\phi$  é um SDA a tempo contínuo e  $S$  é um conjunto invariante isolado de  $\phi$ . Se existe uma vizinhança isolante aleatória  $N$  de  $S$  tal que o mapa*

$$t \mapsto N(\theta_t \omega) \in \mathcal{K}(X)$$

*é contínua para qualquer  $\omega$  fixado (em geral, pela definição de conjunto aleatório compacto o mapa é apenas mensurável) em que  $\mathcal{K}(X)$  denota o espaço dos subconjuntos compactos não vazios de  $X$  equipado com a métrica de Hausdorff, então  $S$  é um conjunto invariante isolado de  $\varphi_h$ , para qualquer  $h > 0$ .*

*Demonstração.* Dado um  $h > 0$  fixado, existe uma vizinhança aleatória compacta  $\tilde{N} \subset N$  de  $S$  tal que  $\phi(t, \omega)\tilde{N}(\omega) \subset N(\theta_t \omega)$  para todo  $t \in [0, h]$  e  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega \in \Omega$  pela continuidade do mapa

$t \mapsto N(\theta_t \omega)$  assumida. De fato, podemos escolher

$$\tilde{N} = \bigcap_{t \in [0, h]} \phi(-t, \theta_t \omega) N(\theta_t \omega) = \bigcap_{t \in [0, h] \cap \mathbb{Q}} \phi(-t, \theta_t \omega) N(\theta_t \omega)$$

em que a segunda igualdade segue novamente da continuidade do mapa antes mencionado.

Precisamos mostrar que  $S = \text{Inv}(\tilde{N}, \varphi_h)$ . Note que  $S \subset \text{Inv}(\tilde{N}, \varphi_h)$ . Para qualquer  $x \in \text{Inv}(\tilde{N}, \varphi_h)(\omega)$ , temos que  $\varphi_h^k(\omega)(x) \in \tilde{N}(\theta_{kh} \omega)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Pela escolha de  $\tilde{N}(\omega)$ , temos que  $\phi(t, \omega, x) \in N(\theta_t \omega)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $x \in S(\omega)$  e  $\text{Inv}(\tilde{N}, \varphi_h) \subset S$ , donde segue a igualdade desses dois últimos conjuntos.  $\square$

## 5 Exemplos

A Teoria do Índice de Conley para SDA apresentada anteriormente é bastante abstrata. Vamos então considerar alguns exemplos que concretizem a teoria apresentada neste capítulo.

**Exemplo 0.45. (Matrizes aleatórias)** Considere um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e duas variáveis aleatórias  $\mathbb{R}$ -valuadas  $a(\omega)$  e  $b(\omega)$ . Defina a matriz aleatória

$$A(\omega) := \begin{pmatrix} a(\omega) & 0 \\ 0 & b(\omega) \end{pmatrix}$$

e considere o SDA com espaço de fase  $\mathbb{R}^2$  com o mapa de tempo 1 dado por  $A(\omega)$ . Defina também o conjunto aleatório  $N(\omega) := S^1$ . Vamos estudar três possíveis casos:

1. Suponha que  $0 < a(\omega), b(\omega) < 1$  para todo  $\omega \in \Omega$ . Então  $A(\omega)(N(\omega)) \subset \text{int}N(\theta(\omega))$  para todo  $\omega \in \Omega$ , portanto  $N(\omega)$  é um bloco isolante aleatório. Também temos que  $S(\omega) := \{0\}$  é o correspondente conjunto invariante isolado. Além disso, dada a restrição  $a(\omega), b(\omega) \in (0, 1)$  para todo  $\omega \in \Omega$ , temos que  $N^-(\omega) = \emptyset$ . Portanto,  $P(\omega) = (N(\omega), \emptyset)$  é um par filtração aleatório para  $S(\omega)$ . Temos o mapa de espaço pontuado aleatório relacionado a  $P(\omega)$  dado por

$$A_P(\omega)(x) = \begin{cases} [\emptyset] & , \text{ se } x = [L(\omega)] \\ p(\theta\omega)(A_P(\omega)(x)) & \text{ caso contrário} \end{cases}$$

e neste caso não podemos ter  $\varphi(\omega)(x) \notin N(\theta\omega)$  pois  $N^- = \emptyset$ . Logo, nenhuma potência de  $A_P$  no espaço pontuado aleatório  $N_L(\omega) = N(\omega) \cup [\emptyset]$  pode ser homotopicamente aleatória ao ponto base aleatório que é um mapa aleatório constante, portanto da Observação 0.41 temos que  $h(S, A) \neq \underline{0}$ . A Figura 9 apresenta o campo vetorial dado por uma matriz aleatória como  $A(\omega)$  em que  $a(\omega)$  e  $b(\omega)$  são têm módulo menor ou igual a 1; nosso sistema é dado pela composição de mapas desse tipo.

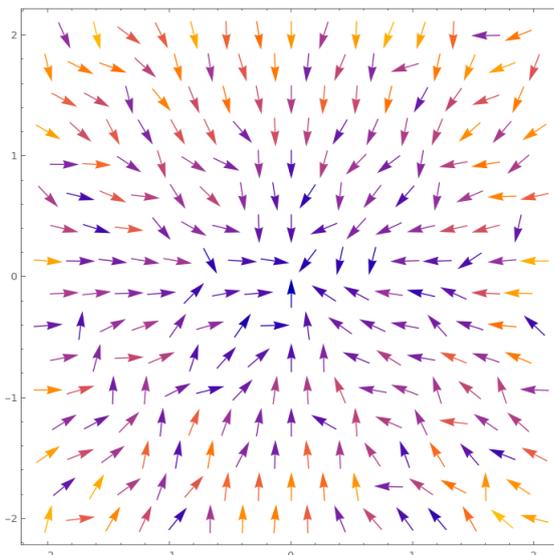


Figura 9: Campo gerado por  $A(\omega)$  com  $a(\omega), b(\omega) \in [0, 1]$

2. Agora suponha que  $a(\omega) > 1$  e  $b(\omega) > 1$  para todo  $\omega \in \Omega$ . Novamente temos que  $N(\omega)$  é um bloco isolante aleatório e  $S(\omega) := \{0\}$  é o conjunto invariante isolado aleatório. Contudo, agora temos que  $N^-(\omega) \neq \emptyset$  para todo  $\omega \in \Omega$ , então assuma que  $L(\omega)$  é uma vizinhança aleatória de  $N^-(\omega)$  suficientemente pequena de modo que  $P(\omega) = (N(\omega), L(\omega))$  é um par filtração aleatório. O espaço pontuado aleatório  $N_L(\omega)$  pode ser entendido como  $S^2$  para cada  $\omega \in \Omega$ . Além disso, o mapa  $A_P(\omega) : N_L(\omega) \rightarrow N_L(\theta\omega)$  é uma sobrejeção. Logo, nenhuma potência de  $A_P$  é homotópica ao ponto base aleatório que é de novo um mapa constante, logo a Observação 0.41 temos que  $h(S, A) \neq \underline{0}$ . De maneira análoga, a Figura 10 mostra o campo vetorial dado por uma matriz  $A(\omega)$  com entradas  $a(\omega), b(\omega) \in [1, 2]$ .

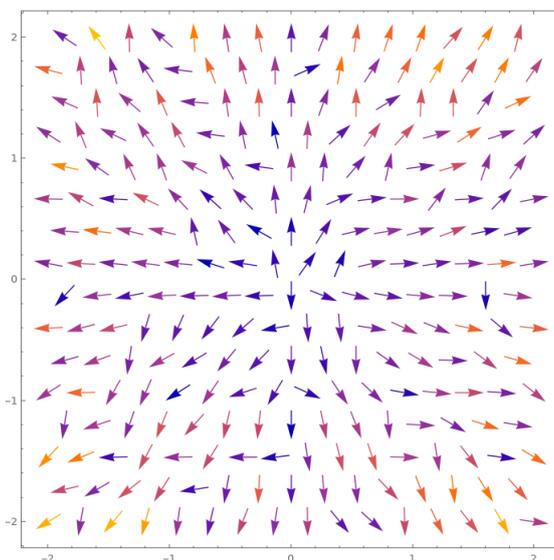


Figura 10: Campo gerado por  $A(\omega)$  com  $a(\omega), b(\omega) \in [1, 2]$

3. Por fim, vamos considerar o caso  $a(\omega) > 1$  e  $0 < b(\omega) < 1$  para todo  $\omega \in \Omega$ . Agora, contudo, devemos assumir que  $N(\omega)$  é um bloco isolante aleatório. Assim como no caso

anterior, temos que  $N^-(\omega) \neq \emptyset$  para todo  $\omega \in \Omega$ . Assim, novamente tome  $L(\omega)$  uma vizinhança aleatória suficientemente pequena de  $N^-(\omega)$  de modo que  $P(\omega) = (N(\omega), L(\omega))$  seja um par filtração para  $S(\omega)$ . Então temos novamente que  $h(S, A) \neq \underline{0}$ . Mais uma vez, temos a Figura 11 representando um campo vetorial dado por  $A(\omega)$  com  $a(\omega) \in [1, 2]$  e  $b(\omega) \in [0, 1]$ .

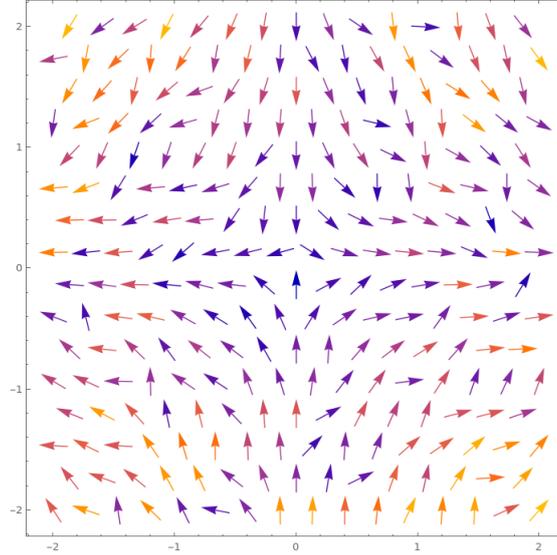


Figura 11: Campo gerado por  $A(\omega)$  com  $a(\omega) \in [1, 2]$  e  $b(\omega) \in [0, 1]$

É interessante notar como o comportamento dos campos aleatórios representados nas Figuras 9, 10 e 11 são, de maneira qualitativo, bastante próximos aos exemplos dados na Seção 2.1.

**Exemplo 0.46. (Mapa Logístico)** Considere  $X = [0, \infty)$  e sobre ele o modelo logístico dado pela equação diferencial:

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

em que  $0 < r \leq 1$  e  $K > 0$  são duas constantes reais. Usando o método de aproximação de Euler, podemos obter as correspondentes equações logísticas de diferença da seguinte maneira:

$$x_{n+1} = x_n + hr x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$$

em que  $h$  é o tamanho do passo do método de Euler. Agora, vamos introduzir uma perturbação de  $r$  por um ruído real, digamos

$$r(\omega) = r + \xi(\omega)$$

em que controlamos o ruído exigindo  $|\xi(\omega)| < r$ . Assim sendo, temos as equações de diferença perturbadas :

$$x_{n+1} = x_n + hr(\theta_{nh}\omega)x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$$

Para tanto, vamos considerar as equações de diferença parametrizadas com  $r_\lambda(\omega) = r + \lambda\xi(\omega)$  com  $\lambda \in [0, 1]$ , dadas por:

$$x_{n+1} = x_n + hr_\lambda(\theta_{nh}\omega)x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right) \quad (24)$$

Assim sendo, para cada  $\lambda \in [0, 1]$ , as equações de diferença dadas pela Equação 24 geram um

SDA discreto, que iremos denotar por  $\varphi_\lambda$ .

Defina  $N = [0, M]$  com  $M > K$ . Em razão da hipótese  $|\xi(\omega)| < r$ , temos que  $r_\lambda(\omega) > 0$  para todo  $\omega \in \Omega$ . Assim sendo, temos que  $\varphi_\lambda(h, \omega)N \subset \text{int}N$  para  $h$  suficientemente pequeno. Logo, neste caso temos que  $N$  é uma vizinhança isolante para a família  $\varphi_\lambda$  qualquer que seja  $\lambda \in [0, 1]$ .

Note que quando  $\lambda = 0$ , i.e., para o modelo sem perturbações aleatórias, temos que o Índice de Conley para o conjunto invariante isolado  $S_0 = [0, K]$  é não trivial. Assim, usando a propriedade da continuação do Índice de Conley Aleatório temos que  $h(S_\lambda, \varphi_\lambda) = h(S_0, \varphi_0) \neq \underline{0}$  qualquer que seja  $\lambda \in [0, 1]$ . Assim sendo, pela propriedade de Wazèwski dada no Teorema 0.42 existe um conjunto aleatório compacto invariante para a equação diferencial perturbada.

Agora considere qualquer intervalo fechado  $\tilde{N}$  contendo  $K$  mas não contendo 0. Assim, novamente para  $h$  suficientemente pequeno nós temos que  $\varphi_\lambda(h, \omega)\tilde{N} \subset \text{int}\tilde{N}$ . Portanto,  $\tilde{N}$  é uma vizinhança isolante para a família  $\varphi_\lambda$  para  $\lambda \in [0, 1]$ . Novamente usando a propriedade de Wazèwski nós temos que existe um conjunto compacto aleatório invariante dentro de  $\tilde{N}$ ; contudo, como  $\tilde{N}$  pode ser escolhido suficientemente pequeno, obtemos que  $\{K\}$  é um conjunto compacto aleatório invariante em  $N$  para a equação de diferença perturbada.

Por fim, agora considere  $\hat{N} = [0, a]$  com  $a < K$ . Neste caso, nós temos a seguinte inclusão de conjuntos:

$$\hat{N} \subset \varphi_\lambda(h, \omega)\text{int}\hat{N} \subset [0, K)$$

para  $h$  suficientemente pequeno, o que implica que  $\hat{N}$  é uma vizinhança isolante para a família  $\varphi_\lambda$  para  $\lambda \in [0, 1]$ . Novamente repetindo os argumentos usados para  $N$  e  $\tilde{N}$ , temos que  $\{0\}$  é um conjunto compacto invariante aleatório para a equação de diferenças para  $h$  pequeno.

# Análogo Aleatório de Sharkovysk

## 1 Mapa da Tenda

Considere  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  e o mapa da tenda  $T : I \rightarrow I$  dado por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x), & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Munindo  $I$  com a topologia de subespaço herdada da topologia usual da reta, temos que  $T$  é contínua. Vamos estudar o SD em  $I$  cujo fluxo é dado pelas iterações deste mapa  $T$ . Nosso principal objetivo será calcular os índices de Conley homotópico e cohomológico reduzido para conjuntos invariantes bastantes especiais deste SD, dados por pontos fixos ou por órbitas periódicas. A estratégia será dividir este estudo em três exemplos. Eles darão uma forte intuição sobre o Teorema 0.12 apresentado na Seção 3, que generaliza as deduções feitas nesta seção.

**Exemplo 0.1 (Pontos Fixos).** Tome  $S_1 = \{0\}$ . Vale que  $S_1$  é ponto fixo e, portanto,  $S_1$  é invariante. Seja  $0 < \epsilon_1 < \frac{1}{4}$ . Defina  $N_1 := \overline{B_{\epsilon_1}(0)} \cap I$ . Vale que  $N_1 = [0, \epsilon_1]$  e também que  $N_1$  é compacto em  $I$ . Isso está ilustrado na Figura 1.

Seja  $p \in N_1 \setminus \{0\}$  um ponto qualquer. Vamos considerar a órbita de  $p$ , i.e., o conjunto  $\{T^n(p)\}_{n \in \mathbb{N}}$  como uma sequência  $\{L, R\}^{\mathbb{N}}$  de tal maneira que o  $i$ -ésimo símbolo da sequência associada é  $L$  se, e somente se,  $T^i(p) \leq \frac{1}{2}$  e, analogamente, o  $i$ -ésimo símbolo da sequência associada é  $R$  se, e somente se,  $T^i(p) > \frac{1}{2}$ .

Como mostrado em (Alligood; Sauer; Yorke, 1997), existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que o  $k$ -ésimo símbolo da sequência associada a  $p$  é  $R$ . Logo,  $T^k(p) \in [\frac{1}{2}, 1]$  e portanto  $T^k(p) \notin N_1$ . Logo, a órbita de  $p$  não é invariante em  $N_1$ . Portanto,  $S_1 = \{0\} = \text{Inv}(N_1) \subset \text{int}(N_1)$  e assim  $S_1$  é conjunto invariante isolado.

Como  $T_1(\epsilon_1) = 2\epsilon_1$  (já que  $\epsilon_1 < \frac{1}{2}$ ),  $T(0) = 0$  e  $T$  é monótona crescente em  $N_1$ , segue do Teorema do Valor Intermediário que  $T(N_1) = [0, 2\epsilon_1]$ . Note também que, como  $\epsilon_1 < \frac{1}{4}$ , vale  $T(N_1) \subset [0, \frac{1}{2}]$ .

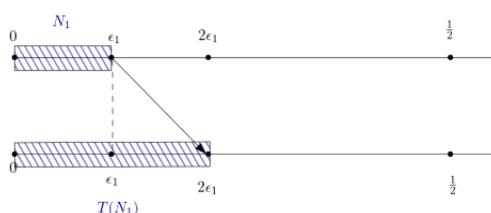


Figura 1:  $N_1$  e seu mapeamento.

Como  $\frac{\epsilon_1}{2}$  é tal que  $T(\frac{\epsilon_1}{2}) = \epsilon_1$ , pela monotonicidade da função e pelo, Teorema do Valor Intermediário, vale que  $T([0, \frac{\epsilon_1}{2})) \subset [0, \epsilon_1]$  e  $T([\frac{\epsilon_1}{2}, \epsilon_1]) \subset [\epsilon_1, 2\epsilon_1]$ , logo  $N_1^- = [\frac{\epsilon_1}{2}, \epsilon_1]$ . Veja a Figura 2.

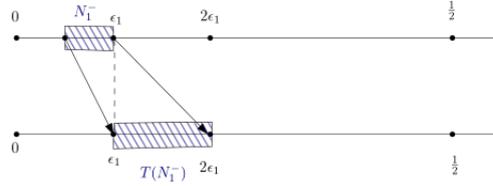


Figura 2:  $N_1^-$  e seu mapeamento.

Agora, seja  $0 < \delta_1 < \frac{\epsilon_1}{2}$ . Temos que  $\delta_1$  é tal que  $\frac{\epsilon_1}{2} - \delta_1 > 0$  e  $\frac{\epsilon_1}{2} + \delta_1 < \epsilon_1$ . Defina  $L_1 := [\frac{\epsilon_1}{2} - \delta_1, \epsilon_1]$ . Claramente,  $L_1$  é compacto de  $I$ . Também vale que, como  $[\frac{\epsilon_1}{2} - \delta_1, \epsilon_1] \subset [0, \frac{1}{2}]$  e, usando novamente o Teorema do Valor Intermediário e a monotonicidade da função nesse intervalo,  $T(L_1) = T([\frac{\epsilon_1}{2} - \delta_1, \epsilon_1]) = [\epsilon_1 - 2\delta_1, 2\epsilon_1]$ .

Como  $T(\frac{\epsilon_1}{2} - \delta_1, \epsilon_1) = \epsilon_1 - 2\delta_1$ , temos que  $\frac{\epsilon_1}{2} < T(\frac{\epsilon_1}{2} - \delta_1, \epsilon_1) < \epsilon_1$ . Logo, como  $\overline{N_1 \setminus L_1} = [0, \frac{\epsilon_1}{2} - \delta_1]$ , vale que  $T(L_1) \cap \overline{N_1 \setminus L_1} = \emptyset$ , como mostra a Figura 3.

Além disso é claro, por argumento análogo ao feito acima, que  $S_1 = \text{Inv}(N_1 \setminus L_1)$ .

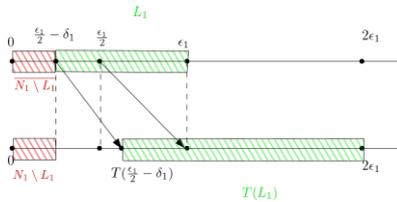


Figura 3:  $T(L_1) \cap \overline{N_1 \setminus L_1} = \emptyset$ .

Portanto,  $(N_1, L_1)$  é um par-filtração.

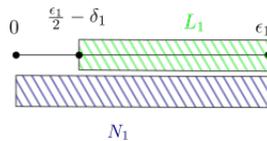


Figura 4: Espaço quociente  $N_1/L_1$ .

Como o espaço pontuado  $N_1/L_1$  é homotopicamente equivalente a um ponto, como mostra a Figura 4, temos que  $H^q(N_1/L_1, [L_1]) = 0$  qualquer que seja  $q \geq 1$ . Logo, a aplicação do espaço pontuado  $f_p$  é a aplicação nula, o que nos dá  $CH(S_1) = 0$  e  $\chi(S_1) = 0$ .

Agora, vamos considerar  $S_2 = \{\frac{2}{3}\}$ . Vale que  $S_2$  é conjunto invariante pois  $\frac{2}{3}$  é ponto fixo. Seja  $\epsilon_2 > 0$  tal que  $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} - 2\epsilon_2$  e  $\frac{2}{3} + 2\epsilon_2 < 1$ . Defina  $N_2 := \overline{B_{\epsilon_2}(\frac{2}{3})}$ . Vale que  $N_2$  é compacto.

Usando novamente o argumento que se baseia em identificar a órbita de um ponto  $p \in N_2 \setminus \{\frac{2}{3}\}$  com uma sequência  $\{L, R\}^{\mathbb{N}}$ , temos que  $S_2 = \{\frac{2}{3}\} = \text{Inv}(N_2) \subset \text{int}(N_2)$ . Portanto,  $S_2$  é conjunto invariante isolado.

Como temos que  $T(\frac{2}{3} - \epsilon_2) = \frac{2}{3} + 2\epsilon_2$  e  $T(\frac{2}{3} + \epsilon_2) = \frac{2}{3} - 2\epsilon_2$ , vale que  $N_2 = [\frac{2}{3} - \epsilon_2, \frac{2}{3} + \epsilon_2]$  é tal que  $T(N_2) = [\frac{2}{3} - 2\epsilon_2, \frac{2}{3} + 2\epsilon_2]$  novamente usando o Teorema do Valor Intermediário e o fato da restrição de  $T$  a  $N_2$  ser monótona decrescente. É o que aparece na Figura 5.

Análogo Aleatório de Sharkovysk

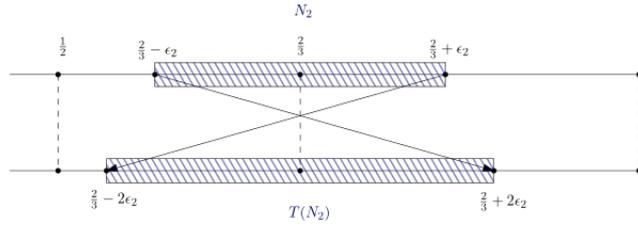


Figura 5:  $N_2$  e seu mapeamento.

Considere  $x_1 = \frac{2}{3} + \frac{\epsilon_2}{2}$  e  $x_2 = \frac{2}{3} - \frac{\epsilon_2}{2}$ . Temos que  $T(x_1) = \frac{2}{3} - \epsilon_2$  e  $T(x_2) = \frac{2}{3} + \epsilon_2$ . Portanto,  $N_2^- = [\frac{2}{3} - \epsilon_2, \frac{2}{3} - \frac{\epsilon_2}{2}] \cup [\frac{2}{3} + \frac{\epsilon_2}{2}, \frac{2}{3} + \epsilon_2]$ . O mapeamento de  $N_2^-$  é mostrado na Figura 6.

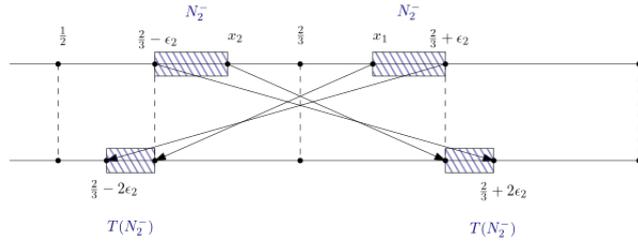


Figura 6:  $N_2^-$  e seu mapeamento.

Seja  $0 < \delta_2 < \frac{\epsilon_2}{4}$ . Temos que  $\frac{2}{3} < x_1 - \delta_2$  e  $x_1 + \delta_2 < \frac{2}{3} + \epsilon_2$ . Faça  $L_2 := [\frac{2}{3} - \epsilon_2, x_2 + \delta_2] \cup [x_1 - \delta_2, \frac{2}{3} + \epsilon_2]$ . Da escolha de  $\delta_2$ , vale que  $T(x_1 - \delta_2) < x_2$  e  $T(x_2 + \delta_2) > x_1$ .

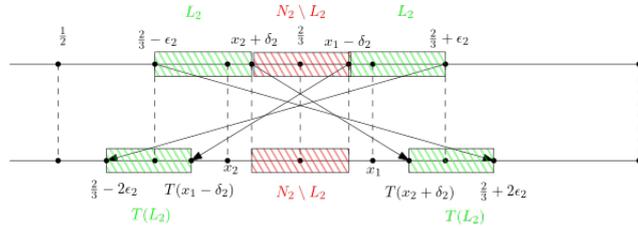


Figura 7:  $T(L_2) \cap \overline{N_2 \setminus L_2} = \emptyset$ .

Como temos que  $T(L_2) \cap \overline{N_2 \setminus L_2} = \emptyset$ , como aparece na Figura 7, vale que  $(N_2, L_2)$  é um par-filtração.

Observe que, na Figura 8,  $N_2/L_2$  é homotopicamente equivalente a  $S^1$ , e portanto vale que

$$H^q(N_2/L_2, [L_2]) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{se } q = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

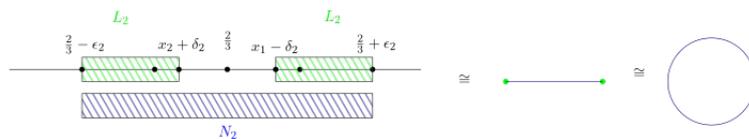


Figura 8: Espaço quociente  $N_2/L_2$ .

Além do mais, temos que  $[T_P(\alpha)] = -[\alpha]$ , logo  $T_P^1 = [-1]$  o que implica que  $(T_P^1)^n = [(-1)^n]$ . A aplicação do espaço pontuado é mostrada na Figura 9.

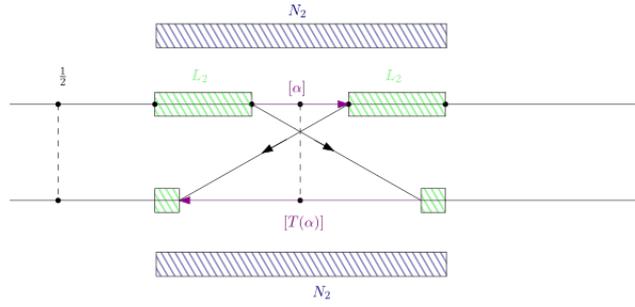


Figura 9: Aplicação do espaço pontuado.

Logo,

$$CH(S_2) = \bigcap_{n>0} (T_P^1)^n (H^1(N_2/L_2, [L_2])) = \langle (-1) \rangle$$

e  $\chi(S_2) = -\text{id}$ .

Poderíamos também considerar o conjunto invariante dado pelos dois pontos fixos apresentados, i.e.,  $S = \{0, \frac{2}{3}\}$ . De modo a construir uma vizinhança isolante para este novo conjunto invariante  $S$ , considere  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  como dados anteriormente e defina  $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ . Faça então  $N_1 = [0, \epsilon]$  e  $N_2 = [\frac{2}{3} - \epsilon, \frac{2}{3} + \epsilon]$ ; tomando  $N = N_1 \cup N_2$  temos que  $N$  é uma vizinhança isolante de  $S$ , que portanto é um conjunto invariante isolado. De fato, se  $p \in N \setminus S$ , podemos repetir o argumento usado acima caso ou  $p \in N_1 \setminus \{0\}$  ou  $p \in N_2 \setminus \{\frac{2}{3}\}$  (note que estes são os únicos dois casos possíveis) e assim  $S = \text{Inv}N \subset \text{int}N$ . A Figura 10 ilustra o conjunto  $N$ .

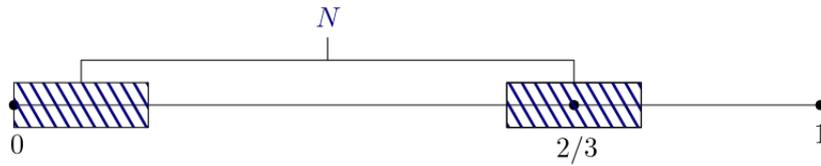


Figura 10: Vizinhança isolante para  $S = \{0, \frac{2}{3}\}$ .

Devemos descrever o conjunto  $N^-$ . Repare que como os conjuntos  $N_1$  e  $N_2$  são disjuntos, teremos que  $N^-$  será dado por  $N_1^- \cup N_2^-$ .

De fato, seja  $x \in N^-$ , i.e.,  $x \in N$  tal que  $T(x) \notin N$ . Como  $N = N_1 \cup N_2$ , temos que  $T(x) \notin N$  nos dá que  $T(x) \notin N_1$  e  $T(x) \notin N_2$ . Se  $x \in N_1$ , então em particular  $T(x) \notin N_1$  e portanto  $x \in N_1^-$ . Analogamente concluímos que se  $x \in N_2$  então  $x \in N_2^-$ . Logo,  $N^- \subset (N_1^- \cup N_2^-)$ .

Para a outra inclusão, note que se  $x \in N_1^-$ , por definição  $x \in N_1$  e  $T(x) \notin N_1$ . Mas, da escolha de  $\epsilon$ , temos que  $T(N_1) \subset [0, \frac{1}{2}]$ , logo  $T(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ . Portanto  $T(x) \notin N_2$  já que  $N_2 \subset [\frac{1}{2}, 1]$ . Assim,  $T(x) \notin N$  e portanto  $x \in N^-$ . Raciocínio análogo se aplica para mostrar que  $N_2^- \subset N^-$ . Assim sendo,  $N^- = N_1^- \cup N_2^- = [\frac{\epsilon}{2}, \epsilon] \cup [\frac{2}{3} - \epsilon, \frac{2}{3} - \frac{\epsilon}{2}] \cup [\frac{2}{3} + \frac{\epsilon}{2}, \frac{2}{3} + \epsilon]$ . A Figura 11 ilustra o conjunto de saída.

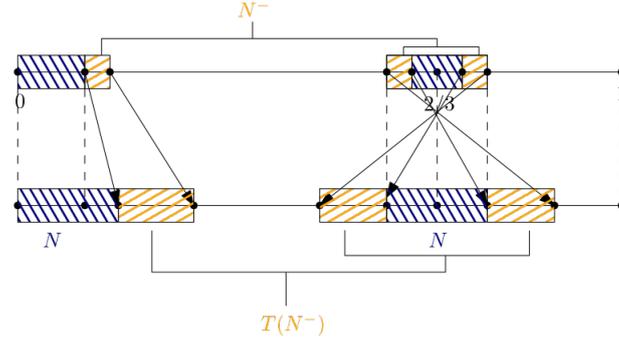


Figura 11: O conjunto de saída  $N^-$ .

A fim de construir um par-filtração para  $S$ , considere  $\delta_1$  e  $\delta_2$  como definidos anteriormente e defina  $\delta = \frac{\epsilon}{4}$ . Considerando os conjuntos  $L_1 = [\frac{\epsilon}{2} - \delta, \epsilon]$  e  $L_2 = [\frac{2}{3} - \epsilon, x_2 + \delta] \cup [x_1 - \delta, \frac{2}{3} + \epsilon]$ , em que  $x_1 = \frac{2}{3} + \frac{\epsilon}{2}$  e  $x_2 = \frac{2}{3} - \frac{\epsilon}{2}$ , a mesma estratégia que usamos para definir  $N$  também será usada aqui, i.e., defina  $L = L_1 \cup L_2$ . Assim sendo, temos que  $L$  é uma vizinhança de  $N^-$ . Basta verificar que  $T(L) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$  para que o par  $(N, L)$  seja um par-filtração para  $S$  já que é claro que  $\text{Inv}(\overline{N \setminus L}) = S$  e  $S = \{0, \frac{2}{3}\} \subset \text{int}(\overline{N \setminus L})$ .

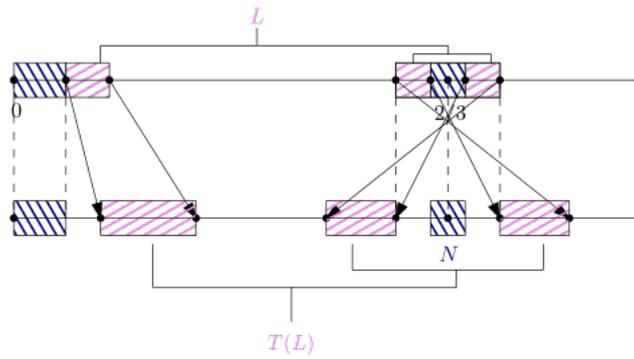


Figura 12: Mapeamento de  $L$ .

Temos que  $T(L) = T(L_1) \cup T(L_2)$  e  $\overline{N \setminus L} = \overline{N_1 \setminus L_1} \cup \overline{N_2 \setminus L_2}$ . Além disso,  $T(L_1) = [\epsilon - 2\delta, 2\epsilon] \subset [0, \frac{1}{2})$ . Como  $\overline{N_2 \setminus L_2} \subset [\frac{1}{2}, 1]$ , temos que  $T(L_1) \cap \overline{N_2 \setminus L_2} = \emptyset$ . Como  $\overline{N_1 \setminus L_1} = [0, \frac{\epsilon}{2} - \delta]$ , temos também que  $T(L_1) \cap \overline{N_1 \setminus L_1} = \emptyset$  já que  $\frac{\epsilon}{2} - \delta < \epsilon - 2\delta$  pois  $\delta < \frac{\epsilon}{2}$  pois  $\delta < \frac{\epsilon}{4}$ . Analogamente, verificamos que  $T(L_2) \cap \overline{N_1 \setminus L_1} = \emptyset$  e  $T(L_2) \cap \overline{N_2 \setminus L_2} = \emptyset$ . Portanto,  $T(L) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$  e assim temos que  $(N, L)$  é um par-filtração para  $S = \{0, \frac{2}{3}\}$ . A Figura 12 ilustra essa afirmação.

A Figura 13 ilustra que o quociente  $N/L$  é novamente homotopicamente equivalente a  $S^1$ .

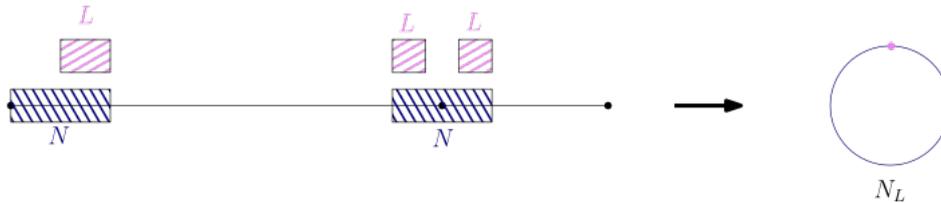


Figura 13: Espaço quociente  $N_L$ .

Note que, na referência (Szymczak, 1995) é feita a seguinte observação:

*Observação 0.2.* Um espaço pontuado  $Y$  com uma aplicação  $g : Y \rightarrow Y$  é tal que a classe de homotopia  $(Y, [g]) = 0$  se, e somente se, o mapa  $g^n$  é homotópico a um mapa constante para algum  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

Mas, como

$$T_P(x) = \begin{cases} [L], & \text{se } x = [L] \\ p(T(x)), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e temos que  $T_P^1 = [-1]$ , segue que  $T_P^1$  é tal que  $(T_P^1)^2 = \text{Id}$ . A Figura 14 ilustra como essa aplicação atua sobre  $N_L$  mostrando a ação desse mapa sobre o gerador  $\alpha$  da homologia.

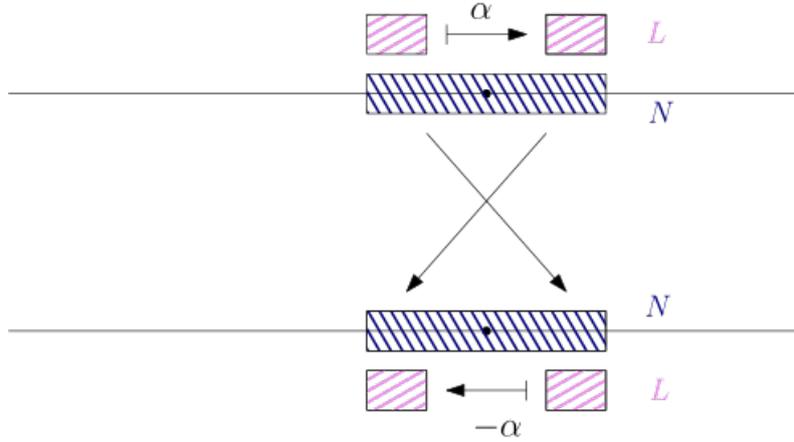


Figura 14: Aplicação do espaço pontuado sobre o gerador da homologia  $\alpha$ .

Portanto, como a aplicação identidade não é homotopicamente equivalente a uma aplicação constante em  $S^1$  (caso contrário  $S^1$  seria contrátil), segue que  $(N_L, [T_P]) \neq 0$ . Neste caso, é interessante notar como a primeira entrada do índice de Conley cohomológico reduzido carrega a informação sobre a aplicação do espaço pontuado, e, geometricamente, o fato dela ter ordem finita garante que não estamos destruindo o buraco formado por essa  $S^1$  no espaço quociente. Logo, podemos concluir que o índice de Conley homotópico de  $S = \{0, \frac{2}{3}\}$  é tal que  $h(S) \neq 0$ .

**Exemplo 0.3 (Órbitas de Período 2).** Vamos considerar mais uma vez o SD discreto dado pelas iteradas do mapa da Tenda definido na Seção 1. Além dos conjuntos invariantes dados por pontos fixos, também podemos considerar conjuntos invariantes dados pelas órbitas periódicas. Primeiramente, vamos considerar uma órbita de período 2 dada pelos pontos  $\frac{2}{5}$  e  $\frac{4}{5}$ , i.e., chamando  $p_1 = \frac{2}{5}$  e  $p_2 = \frac{4}{5}$  temos que  $T(p_1) = p_2$  e  $T(p_2) = p_1$  e portanto  $S := \{p_1, p_2\}$  é invariante. Iremos calcular o índice de Conley para  $S$ .

Precisamos construir  $N$  de modo que este conjunto seja uma vizinhança isolante para  $S$ . Para tanto, considere  $0 < \epsilon$  tal que  $[p_1 - 2\epsilon, p_1 + 2\epsilon] \subset (0, \frac{1}{2})$  e  $[p_2 - 2\epsilon, p_2 + 2\epsilon] \subset (\frac{1}{2}, 1)$ . Defina  $N_1 := [p_1 - \epsilon, p_1 + \epsilon]$  e  $N_2 := [p_2 - \epsilon, p_2 + \epsilon]$  e faça  $N := N_1 \cup N_2$ . A Figura 15 ilustra este conjunto.

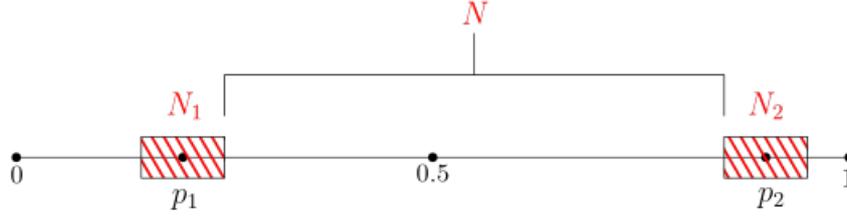


Figura 15: A vizinhança isolante  $N$  de  $S = \{p_1, p_2\}$ .

Por um argumento análogo ao que fizemos no Exemplo 0.1 temos que  $N^- = N_1^- \cup N_2^-$  e portanto segue que  $N^- = [p_1 - \epsilon, p_1 - \frac{\epsilon}{2}] \cup [p_1 + \frac{\epsilon}{2}, p_1 + \epsilon] \cup [p_2 - \epsilon, p_2 - \frac{\epsilon}{2}] \cup [p_2 + \frac{\epsilon}{2}, p_2 + \epsilon]$ .

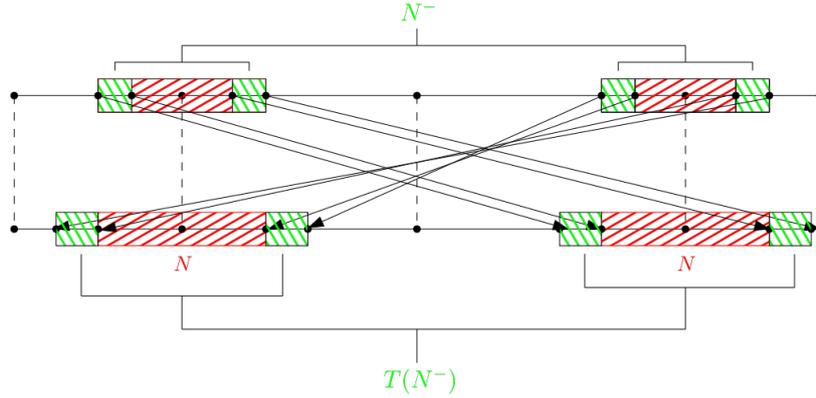


Figura 16: Mapeamento de  $N^-$  pelo mapa da tenda.

Agora vamos provar que  $S = \text{Inv}(N)$ . Para tanto, seja  $p \in N \setminus S$  um ponto qualquer. Suponha primeiro que  $p \in N_1 \setminus \{p_1\}$ . Logo, existe um  $\gamma$  com  $0 < |\gamma| \leq \epsilon$  tal que  $p = p_1 + \gamma$ . Note que, se  $|T^k(p) - p_1| > \frac{\epsilon}{2}$  ou  $|T^k(p) - p_2| > \frac{\epsilon}{2}$  e  $T^k(p) \in N$ , temos que  $T^k(p) \in N^-$  e portanto  $T^{k+1}(p) \notin \text{int}(N)$ . Para a órbita de  $p$ , temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} T(p_1 + \gamma) &= p_2 + 2\gamma \\ T(p_2 + 2\gamma) &= p_1 - 4\gamma \\ T(p_1 - 4\gamma) &= p_2 - 8\gamma \\ T(p_2 - 8\gamma) &= p_1 + 16\gamma \end{aligned}$$

e assim por diante de modo que podemos escrever que  $T^{2k}(p) = p_1 + (-1)^k 2^{2k} \gamma$  e  $T^{2k+1}(p) = p_2 + (-1)^k 2^{2k+1} \gamma$ , o que nos dá  $|T^{2k}(p) - p_1| = 2^{2k} \gamma$  e  $|T^{2k+1}(p) - p_2| = 2^{2k+1} \gamma$ . Mas, sabemos que existe  $n^* \in \mathbb{N}$  tal que  $|2^{n^*} \gamma| > \frac{\epsilon}{2}$ . Portanto  $p \notin \text{Inv}(N)$ . Assim,  $N$  é vizinhança isolante de  $S$  que portanto se torna um conjunto invariante maximal isolado.

Seguindo a mesma ideia geométrica de anteriormente, tome  $\epsilon = \epsilon(\delta)$  de tal forma que  $0 < \delta < \frac{\epsilon}{2}$ . Defina os conjuntos  $L_1 := [p_1 - \epsilon, p_1 - \frac{\epsilon}{2} + \delta] \cup [p_1 + \frac{\epsilon}{2} - \delta, p_1 + \epsilon]$  e  $L_2 := [p_2 - \epsilon, p_2 - \frac{\epsilon}{2} + \delta] \cup [p_2 + \frac{\epsilon}{2} - \delta, p_2 + \epsilon]$  e, novamente, tome  $L := L_1 \cup L_2$ . Usando a mesma argumentação que fizemos acima para provar que  $S = \text{Inv}(N)$ , podemos mostrar que  $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$ . Também é claro da definição que  $L$  é uma vizinhança de  $N^-$ . Agora devemos verificar apenas que  $T(L) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$  para concluir que  $(N, L)$  é um par-filtração. A Figura 17 ilustra o comportamento desse conjunto.

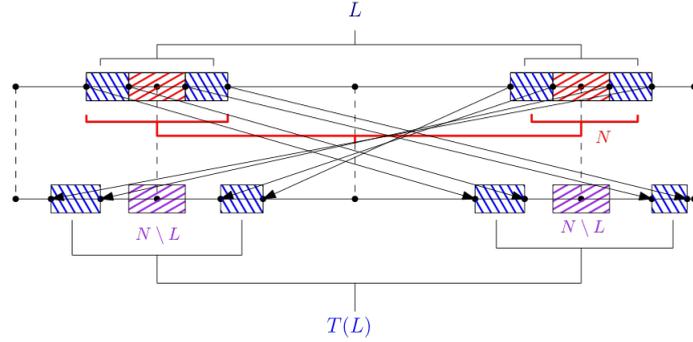


Figura 17: O conjunto  $L$  e seu mapeamento comparado a  $\overline{N \setminus L}$ .

Temos que  $T(L) = T(L_1) \cup T(L_2)$ . Vamos usar mais uma vez o Teorema do Valor Intermediário, o fato de  $L_1 \subset (0, \frac{1}{2})$  e  $L_2 \subset (\frac{1}{2}, 1)$  e notar que o mapa da tenda é monótono em cada um destes intervalos. Defina  $L_1^E := [p_1 - \epsilon, p_1 - \frac{\epsilon}{2} + \delta]$  e  $L_1^D := [p_1 + \frac{\epsilon}{2} - \delta, p_1 + \epsilon]$ . Como  $T(p_1 - \epsilon) = p_2 - 2\epsilon$  e  $T(p_1 - \frac{\epsilon}{2} + \delta) = p_2 - \epsilon + 2\delta$ , temos que  $T(L_1^E) = [p_2 - 2\epsilon, p_2 - \epsilon + 2\delta]$ . Note que  $T(L_1^E) \subset (\frac{1}{2}, 1)$ , logo  $T(L_1^E) \cap \overline{N_1 \setminus L_1} = \emptyset$ . Além disso, como  $p_2 - \epsilon + 2\delta < p_2 - \frac{\epsilon}{2} + \delta$  já que  $\delta < \frac{\epsilon}{2}$ , temos que  $T(L_1^E) \cap [p_2 - \frac{\epsilon}{2} + \delta, p_2 + \frac{\epsilon}{2} - \delta] = \emptyset$ , e portanto  $T(L_1^E) \cap \overline{N_2 \setminus L_2} = \emptyset$ , o que nos dá  $T(L_1^E) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ . Raciocínio análogo mostra que  $T(L_1^D) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ . Como  $L_1 = L_1^E \cup L_1^D$ , temos que  $T(L_1) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ .

Por outro lado, definindo  $L_2^E := [p_2 - \epsilon, p_1 - \frac{\epsilon}{2} + \delta]$  e  $L_2^D := [p_2 + \frac{\epsilon}{2} - \delta, p_2 + \epsilon]$ , temos que  $L_2 = L_2^E \cup L_2^D$ . Como  $T(p_2 - \epsilon) = p_1 + 2\epsilon$  e  $T(p_1 - \frac{\epsilon}{2} + \delta) = p_1 + \epsilon - 2\delta$ , temos que  $T(L_2^E) = [p_1 + \epsilon - 2\delta, p_1 + 2\epsilon]$ , logo  $T(L_2^E) \subset (0, \frac{1}{2})$ , e portanto  $T(L_2^E) \cap \overline{N_2 \setminus L_2} = \emptyset$ . Como  $p_1 + \frac{\epsilon}{2} - \delta < p_1 + \epsilon - 2\delta$ , pois  $\delta < \frac{\epsilon}{2}$ , temos que  $[p_1 + \epsilon - 2\delta, p_1 + 2\epsilon] \cap [p_1 - \frac{\epsilon}{2} + \delta, p_1 + \frac{\epsilon}{2} - \delta] = \emptyset$  e portanto  $T(L_2^E) \cap \overline{N_1 \setminus L_1} = \emptyset$ . Assim sendo,  $T(L_2^E) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ . Analogamente podemos mostrar que  $T(L_2^D) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ . Logo,  $T(L_2) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ . Isto conclui o que gostaríamos de provar e portanto temos que  $(N, L)$  é um par-filtração para  $S$ .

Logo, temos que  $N/L$  é homotopicamente equivalente a  $S^1 \vee S^1$  como ilustra a Figura 18, e portanto temos que

$$H^q(N/L, [L]) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & \text{se } q = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

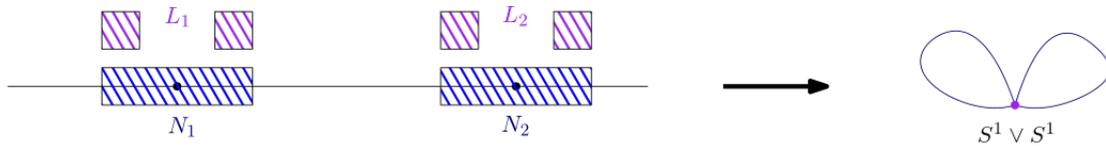


Figura 18: Espaço Pontuado  $N_L$ .

Agora, temos que estudar o comportamentos dos dois geradores, os quais chamaremos de  $\alpha$  e  $\beta$  como ilustrados na Figura 19, que também exemplifica esse mapeamento.

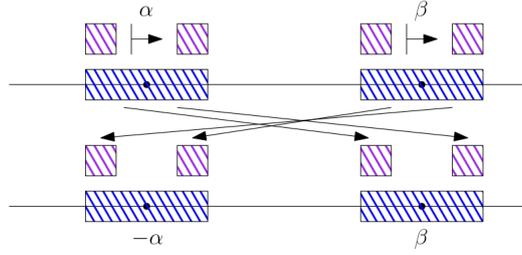


Figura 19: Aplicação do espaço pontuado.

Temos que  $[T_P(\alpha)] = [\beta]$  e  $[T_P(\beta)] = -[\alpha]$ , o que nos dá  $(T_P^1)^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Assim sendo, como  $(T_P^1)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $(T_P^1)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $(T_P^1)^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , nós temos que  $\text{Im}((T_P^1)^n) = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$  qualquer que seja  $n \geq 1$ , o que nos dá

$$CH^1(S) = \bigcap_{n \geq 1} (T_P^1)^n(H^1(N_L, [L])) = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$$

e assim também temos que  $\chi^1(S)$  é  $T_P^1$ . Portanto, temos:

$$\text{Con}^q(S) = \begin{cases} \left( \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) & , \text{ se } q = 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Usando a Observação 0.2 colocada ao final da Seção 1, do fato da aplicação  $(T_P^1)$  possuir ordem finita, podemos novamente concluir que  $h(S) \neq 0$ . Geometricamente, de novo temos que a aplicação de espaço pontuado não desaparece com os geradores  $\alpha$  e  $\beta$  da homologia em nenhum momento, logo eles não são contraídos.

**Exemplo 0.4 (Órbita de Período  $k \in \mathbb{N}$ ).** Do Teorema de Sharkovsky, apresentado na referência (Alligood; Sauer; Yorke, 1997), sabemos que o mapa da tenda possui órbitas periódicas de todos os períodos. Assim sendo, cada órbita periódica  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  com  $k \geq 2$  é um conjunto invariante. Iremos agora calcular o correspondente índice de Conley para estas órbitas. Primeiramente, note que nenhum destes pontos pode ser igual a 0,  $\frac{1}{2}$  ou 1 já que se, por exemplo, tivéssemos  $p_i = \frac{1}{2}$ , teríamos  $T(p_i) = 1$  e portanto  $T^2(p_i) = 0$  que é ponto fixo, logo  $p_i$  não poderia fazer parte de uma órbita de período  $k$ .

Assim sendo, fixe um  $k \geq 1$  qualquer. Vamos considerar uma órbita de período  $k$  dada por  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  de modo que  $T(p_i) = p_{i+1}$  para  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  e  $T(p_k) = p_1$ . Primeiramente, devemos definir  $N$  de modo que  $S := \{p_1, \dots, p_k\}$  seja igual a  $\text{Inv}(N)$ , mostrando que  $S$  é um conjunto invariante isolado. Para tanto, vamos generalizar o que fizemos no Exemplo 0.3. Considere  $\epsilon > 0$  de modo que  $[p_i - 2\epsilon, p_i + 2\epsilon] \cap [p_j - 2\epsilon, p_j + 2\epsilon] = \emptyset$  caso  $i \neq j$  para todo  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  e, além disso, que também satisfaça  $[p_i - 2\epsilon, p_i + 2\epsilon] \subset (0, \frac{1}{2})$  caso  $p_i < \frac{1}{2}$  ou  $[p_i - 2\epsilon, p_i + 2\epsilon] \subset (\frac{1}{2}, 1)$  caso  $p_i > \frac{1}{2}$ .

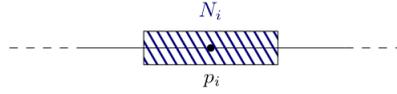


Figura 20: Vizinhança  $N_i$  de  $p_i$ .

Defina  $N_i = [p_i - \epsilon, p_i + \epsilon]$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$  e considere  $N := \bigcup_{i=1}^k N_i$ . A Figura 20 ilustra um destes  $N_i$ . Queremos mostrar que  $S$  é o invariante maximal de  $N$ . Para tanto, precisamos identificar o conjunto  $N^-$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , temos que  $N_i^- := [p_i - \epsilon, p_i - \frac{\epsilon}{2}] \cup [p_i + \frac{\epsilon}{2}, p_i + \epsilon] \subset N_i$  o conjunto de saída de  $N_i$ . De fato, suponha primeiro que  $p_i < \frac{1}{2}$ . Temos que, da escolha de  $\epsilon$ ,  $N_i \subset (0, \frac{1}{2})$ , logo usando o Teorema do Valor Intermediário, o fato de  $T|_{N_i}(x) = 2x$  e o fato de  $T(p_i) = 2p_i = p_{i+1}$  (em que estamos identificando  $p_{k+1}$  com  $p_1$ ), segue que

$$T(N_i^-) = [p_{i+1} - 2\epsilon, p_{i+1} - \epsilon] \cup [p_{i+1} + \epsilon, p_{i+1} + 2\epsilon]$$

Portanto, temos que  $T(N_i^-) \cap \text{int}(N_{i+1}) = \emptyset$ . Note que pelas exigências na escolha de  $\epsilon$ , temos também que  $T(N_i^-) \subset [p_{i+1} - 2\epsilon, p_{i+1} + 2\epsilon]$  é tal que  $T(N_i^-) \cap [p_j - 2\epsilon, p_j + 2\epsilon] = \emptyset$  para qualquer  $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i+1\}$ . Assim sendo,  $T(N_i^-) \cap \text{int}(N) = \emptyset$ . Além disso, repare que

$$T(N_i \setminus N_i^-) = T((p_i - \frac{\epsilon}{2}, p_i + \frac{\epsilon}{2})) = (p_{i+1} - \epsilon, p_{i+1} + \epsilon) \subset \text{int}(N_{i+1})$$

logo  $T(N_i \setminus N_i^-) \subset \text{int}(N)$ . Isto conclui a prova que de fato  $N_i^-$  é o conjunto de saída de  $N_i$ . Consideremos agora o caso em que  $p_i > \frac{1}{2}$  é análogo. Como  $T|_{N_i}(x) = 2(1-x)$  e  $T(p_i) = 2(1-p_i) = p_{i+1}$  (mais uma vez identificando  $p_{k+1}$  com  $p_1$ ), temos

$$T(N_i^-) = [p_{i+1} - 2\epsilon, p_{i+1} - \epsilon] \cup [p_{i+1} + \epsilon, p_{i+1} + 2\epsilon]$$

A sequência de argumentos é análoga; gostaríamos apenas de nos atentar que, no caso  $p_i < \frac{1}{2}$  temos que  $T([p_i - \epsilon, p_i - \frac{\epsilon}{2}]) = [p_{i+1} - 2\epsilon, p_{i+1} - \epsilon]$  e  $T([p_i + \frac{\epsilon}{2}, p_i + \epsilon]) = [p_{i+1} + \epsilon, p_{i+1} + 2\epsilon]$ , enquanto que para  $p_i > \frac{1}{2}$  temos que  $T([p_i - \epsilon, p_i - \frac{\epsilon}{2}]) = [p_{i+1} + \epsilon, p_{i+1} + 2\epsilon]$  e  $T([p_i + \frac{\epsilon}{2}, p_i + \epsilon]) = [p_{i+1} - 2\epsilon, p_{i+1} - \epsilon]$ . Esta troca altera significativamente o índice de Conley que estamos prestes a calcular. A Figura 21 ilustra o conjunto  $N_i$  e seu mapeamento. Repare que a ilustração independe da função ser crescente ou decrescente em  $p_i$ .

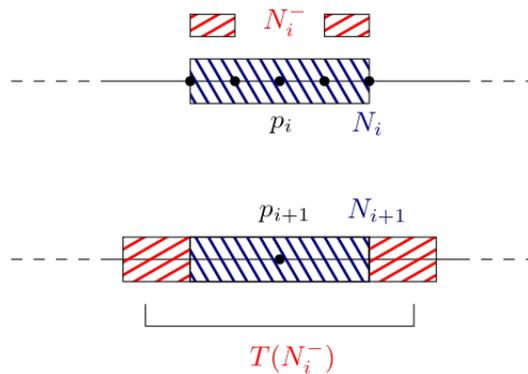


Figura 21: O conjunto de saída de  $N_i$ .

Por um argumento análogo ao que fizemos nos Exemplos 0.1, temos que  $N^- := \bigcup_{i=1}^k N_i^-$  é o

conjunto de saída de  $N$ .

Verifiquemos que  $S = \text{Inv}(N)$ . Claramente, temos que  $S \subset \text{Inv}(N)$ , então devemos apenas verificar a outra inclusão. Para tanto, considere  $p \in N \setminus S$ . Logo, existe um  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $p \in N_i \setminus \{p_i\}$ . Podemos escrever  $p$  como  $p = p_i + \gamma$  com  $0 < |\gamma| \leq \epsilon$ . Suponha por absurdo que  $T^n(p) \in N$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então  $|\gamma| < \frac{\epsilon}{2}$ , já que caso contrário  $p \in N^-$ , contradizendo a hipótese de que  $T^n(p) \in N$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sabemos que existe  $n^* \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{\epsilon}{2} < 2^{n^*} |\gamma| < \epsilon$ , já que o conjunto  $\{n \in \mathbb{N} : 2^n |\gamma| > \frac{\epsilon}{2}\}$  é não vazio e portanto admite um elemento mínimo. Note que, se  $p < \frac{1}{2}$ , temos  $T(p) = 2p = p_{i+1} + 2\gamma$  e se  $p > \frac{1}{2}$ , temos  $T(p) = 2(1-p) = p_{i+1} - 2\gamma$ . Em ambos os casos, temos que  $|T(p) - p_{i+1}| = 2\gamma$  e portanto  $T(p) \in N_{i+1}$  (já que, por hipótese,  $T(p) \in N$ ), em que  $T(p_i) = p_{i+1} \in S$ . Assim sendo,  $T(p) = p^1$  em que  $p^1 = p_{i+1} + 2\gamma^1$  e  $0 < |\gamma^1| = 2|\gamma|$ . Repetindo o argumento, temos que se  $p^1 < \frac{1}{2}$ , então  $T(p^1) = 2p^1 = p_{i+2} + 2\gamma^1$  e se  $p^1 > \frac{1}{2}$  então  $T(p^1) = p_{i+2} - 2\gamma^1$  em que  $T(p_{i+1}) = p_{i+2} \in S$ . Novamente, em ambos os casos temos que  $|T^2(p) - p_{i+2}| = 2|\gamma^1| = 2^2|\gamma|$ . Prosseguindo com esse argumento, após  $n^*$  pontos teremos que  $T^{n^*}(p)$  é tal que  $|T^{n^*}(p) - p_{i+n^*}| = 2^{n^*}|\gamma|$  em que  $p_{i+n^*} \in S$ . Tomando  $p_{i+n^*} = p_l$  para  $l \in \{1, \dots, k\}$  temos que  $T^{n^*}(p) \in N_l$  e  $|T^{n^*}(p) - p_l| = 2^{n^*}|\gamma| > \frac{\epsilon}{2}$ , logo  $T^{n^*}(p) \in N_l^-$  e portanto  $T^{n^*}(p) \in N^-$ , o que é um absurdo. Assim, concluímos que  $S = \text{Inv}(N)$ .

Agora construiremos o conjunto  $L$  de modo a obter um par-filtração. Considere  $0 < \delta < \frac{\epsilon}{2}$ . Defina os conjuntos  $L_i := [p_i - \epsilon, p_i - \frac{\epsilon}{2} + \delta] \cup [p_i + \frac{\epsilon}{2} - \delta, p_i + \epsilon]$  e faça  $L := \bigcup_{i=1}^k L_i$ . É claro da definição que  $L$  é uma vizinhança compacta de  $N^-$ . Além disso, como  $\overline{N \setminus L} = \bigcup_{i=1}^k ([p_i - \frac{\epsilon}{2} + \delta, p_i + \frac{\epsilon}{2} - \delta])$ , pelo o argumento usado para mostrar que  $S = \text{Inv}(N)$  temos que  $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$ . Assim sendo, para concluir que  $(N, L)$  é par-filtração para  $S$ , basta apenas verificar que  $T(L) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ . A Figura 22 ilustra o que provaremos sobre o mapeamento de  $L_i$ .

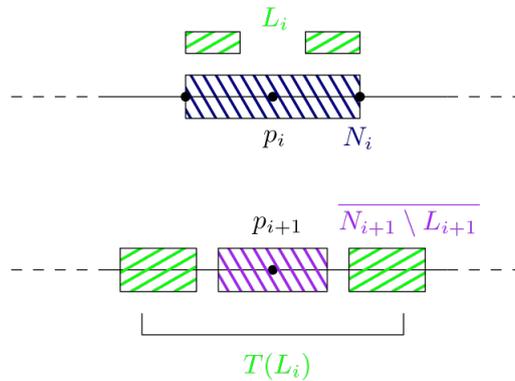


Figura 22: Mapeamento do conjunto  $L_i$  pela tenda.

Seja  $i \in \{1, \dots, k\}$  qualquer. Suponha primeiramente que  $p_i < \frac{1}{2}$ . Neste caso, temos que  $T(L_i) = [p_{i+1} - 2\epsilon, p_{i+1} - \epsilon + 2\delta] \cup [p_{i+1} + \epsilon - 2\delta, p_{i+1} + 2\epsilon] \subset [p_{i+1} - 2\epsilon, p_{i+1} + 2\epsilon]$ . Segue, da escolha de  $\epsilon$ , que  $T(L_i) \cap N_j = \emptyset$  para todo  $j \neq i+1$ , o que nos dá para esses índices que  $T(L_i) \cap \overline{N_j \setminus L_j} = \emptyset$ . Além disso, observamos que  $\overline{N_{i+1} \setminus L_{i+1}} = [p_{i+1} - \frac{\epsilon}{2} + \delta, p_{i+1} + \frac{\epsilon}{2} - \delta]$  e que  $p_{i+1} - \epsilon + 2\delta < p_{i+1} - \frac{\epsilon}{2} + \delta$  e  $p_{i+1} + \frac{\epsilon}{2} - \delta < p_{i+1} + \epsilon - 2\delta$  justamente porque  $\delta < \frac{\epsilon}{2}$ . Portanto,  $T(L_i) \cap \overline{N_{i+1} \setminus L_{i+1}} = \emptyset$ . Como  $\overline{N \setminus L} = \bigcup_{i=1}^k \overline{N_i \setminus L_i}$ , temos que  $T(L_i) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ . Como a escolha de  $i \in \{1, \dots, k\}$  era qualquer e  $T(L) = \bigcup_{i=1}^k T(L_i)$ , segue que  $T(L) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ . Com isto, concluímos que  $(N, L)$  é um par-filtração para  $S$ . É interessante notar que, embora a escolha de  $\epsilon$  de fato dependa da disposição dos pontos de  $S$  em  $[0, 1]$ , a escolha de  $\delta$  depende apenas de  $\epsilon$ .

O espaço quociente  $N/L$  é homotopicamente equivalente a  $S^1 \vee \dots \vee S^1$ . Geometricamente, a ideia é que cada um dos quocientes  $N_i/L_i$  é homotopicamente equivalente a  $S^1$  e temos uma colagem em  $N/L$  de  $k$  desses quocientes. Note que, embora  $T(p_i) = p_{i+1}$  para todo  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  e  $T(p_k) = p_1$ , não é necessariamente verdade que  $p_1 < \dots < p_k$ ; logo a Figura 23 possui uma ilustração de uma permutação de  $\{1, \dots, k\}$  de modo que ela satisfaça  $p_{i_1} < \dots < p_{i_k}$ . Assim sendo, temos que

$$H^q(N/L, [L]) = \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Q}, & \text{se } q = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

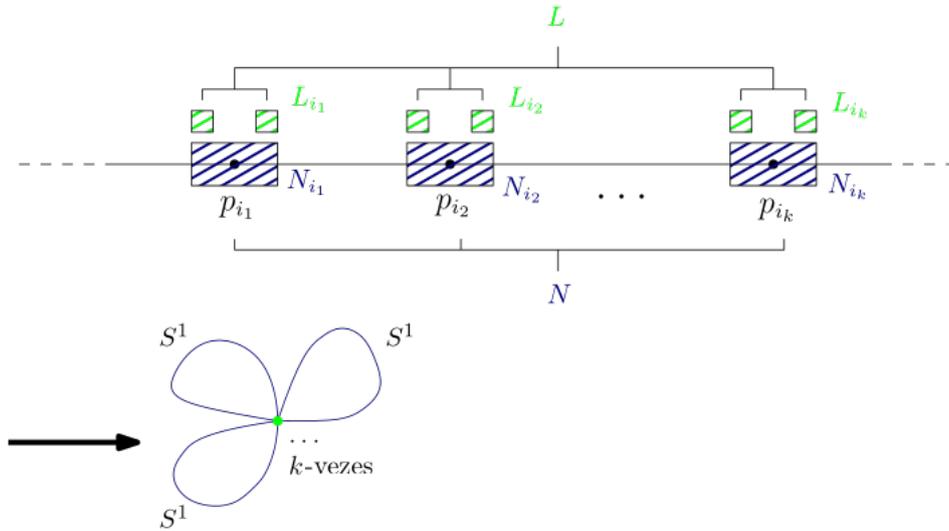


Figura 23: Espaço pontuado  $N_L$  para uma órbita de período  $k$ .

Para entender a aplicação do espaço pontuado, precisamos entender o mapeamento dos geradores  $[\alpha_1], \dots, [\alpha_k]$  de  $H^1(N/L, [L])$  correspondentes a cada quociente  $N_1/L_1, \dots, N_k/L_k$ . Vamos estabelecer um análogo do que foi construído no Exemplo 0.3. Sabemos que, para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$  (e identificando  $p_{k+1}$  com  $p_1$ ), a classe  $[\alpha_i]$  corresponde ao quociente  $N_i/L_i$  em que  $p_i$  é o único ponto de  $S$  que pertence a  $N_i$  (justamente porque, da escolha de  $\epsilon$ , as vizinhanças de cada ponto da órbita foram escolhidas disjuntas). Temos duas possibilidades: se  $p_i < \frac{1}{2}$ , então  $T|_{N_i}(x) = 2x$ , logo  $[\alpha_i]$  é levado por  $T_P^1$  para  $[\alpha_{i+1}]$ ; se  $p_i > \frac{1}{2}$ , então  $T|_{N_i}(x) = 2(1-x)$ , e portanto  $[\alpha_i]$  é mapeado por  $T_P^1$  para  $-[\alpha_{i+1}]$ . A Figura 24 ilustra os dois possíveis comportamentos da aplicação do espaço pontuado sobre um destes geradores  $[\alpha_i]$ .

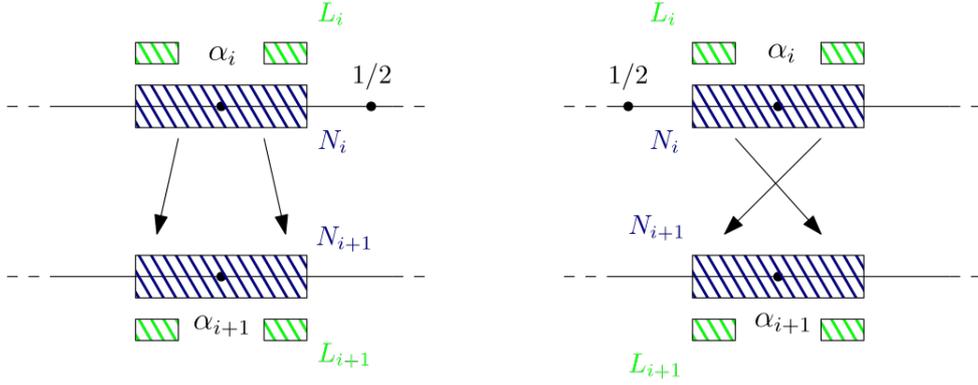


Figura 24: Aplicação do Espaço Pontuado para uma órbita de período  $k$ .

Assim sendo, temos que  $T_P^1$  é uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_k \\ \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{k-1} & 0 \end{bmatrix}$$

em que  $\sigma_i = 1$  ou  $\sigma_i = -1$  de acordo com  $p_i < \frac{1}{2}$  ou  $p_i > \frac{1}{2}$ , respectivamente. Note que:

$$(T_P^1)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{k-1}\sigma_k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \sigma_1\sigma_k \\ \sigma_1\sigma_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2\sigma_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{k-2}\sigma_{k-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E se prosseguirmos assim sucessivamente não é difícil de ver que:

$$(T_P^1)^k = \begin{bmatrix} \sigma_1 \dots \sigma_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_1 \dots \sigma_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \dots \sigma_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_1 \dots \sigma_k \end{bmatrix}$$

e assim temos que  $(T_P^1)^k = \pm \text{Id}_{k \times k}$ , logo  $(T_P^1)^{2k} = \text{Id}_{k \times k}$  e portanto  $T_P^1$  tem ordem finita. Logo, temos que

$$CH^1(S) = \bigcap_{n \geq 1} (T_P^1)^n (H^1(N_L, [L])) = \langle (1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1) \rangle$$

e novamente e assim temos que  $\chi^1(S)$  seria  $T_P^1$ . Portanto, temos que o índice de Conley é dado

por

$$\text{Con}^q(S) = \begin{cases} \left( \left( \oplus_{i=1}^k \mathbb{Q}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_k \\ \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{k-1} & 0 \end{bmatrix} \right) \right), & \text{se } q = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Repare que novamente temos uma aplicação de espaço pontuado de ordem finita. Como a aplicação identidade em  $\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{k\text{-vezes}}$  não é homotopicamente equivalente a uma aplicação constante, já que teríamos que este espaço seria contrátil, temos que  $h(S) \neq 0$  usando mais uma vez a Observação 0.2.

## 2 Órbitas Periódicas

Com base na análise feita no Exemplo 0.4, iremos fazer uma generalização agora considerando  $f : C \rightarrow C$  com  $C \subset \mathbb{R}$  um compacto. Novamente, iremos estudar um conjunto invariante dado por uma órbita periódica de período  $k \in \mathbb{N}$  assumindo que  $f$  é  $C^1$  em alguma vizinhança de cada um os pontos desta órbita e têm derivada em módulo maior que 1 nos mesmos. Geometricamente, temos então um comportamento análogo ao que estudamos na tenda.

É interessante notar uma diferença substancial entre os dois índices de Conley estudados na Seção 1 em que consideramos o SD dado pelas iteradas do mapa da tenda. Enquanto conseguimos calcular explicitamente o índice de Conley cohomológico reduzido, conseguimos apenas garantir que o índice de Conley homotópico é diferente de zero. Contudo, isso já é suficiente para o nosso principal objetivo, que é demonstrar um análogo do Teorema de Sharkovsky para o caso aleatório e será apresentado na Seção 3. De fato, para atender a hipótese da propriedade de Wazèwski precisamos apenas garantir que  $h(S) \neq 0$  de modo a concluir que o conjunto invariante maximal seja não vazio. De qualquer modo, é interessante notar que os exemplos feitos na Seção 1 reiteram a dificuldade do cálculo do índice de Conley homotópico enquanto apresentam o índice de Conley cohomológico reduzido como uma opção frente a este desafio.

Por fim, fazemos uma última observação sobre o problema que estamos prestes a estudar. A referência (Mrozek, 1990) discuti um SD e suas órbitas periódicas sob condições bastantes parecidas com o apresentado no Teorema 0.5, mas buscando respostas sobre outro índice, o índice de Conley cohomológico. Além disso, Mrozek apresenta uma visão mais categórica desta teoria do Índice de Conley, de forma que as demonstrações são bastante distintas da apresentada neste trabalho.

**Teorema 0.5.** *Seja um  $C \subset \mathbb{R}$  um intervalo compacto da reta,  $f : C \rightarrow C$  uma função contínua e um SD discreto dado pelas iteradas de  $f$ . Suponha que  $S = \{p_1, \dots, p_k\} \subset \text{int } C$  seja uma órbita periódica de período  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  de  $f$  com  $f(p_i) = p_{i+1}$  para todo  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  e  $f(p_k) = p_1$ . Suponha também que exista um  $\gamma_i > 0$  tal que  $f|_{(p_i - \gamma_i, p_i + \gamma_i)}$  é  $C^1$  neste intervalo e*

satisfaz  $|f'(p_i)| > 1$ . Então

$$\text{Con}^q(S) = \begin{cases} \left( \oplus_{i=1}^k \mathbb{Q}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_k \\ \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{k-1} & 0 \end{bmatrix} \right), & \text{se } q = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que  $\sigma_i = 1$  se  $f|_{(p_i-\gamma_i, p_i+\gamma_i)}$  é crescente e  $\sigma_i = -1$  se  $f|_{(p_i-\gamma_i, p_i+\gamma_i)}$  é decrescente. Além disso, também temos que  $h(S) \neq 0$ .

*Demonstração.* Temos que, para qualquer  $i \in \{1, \dots, k\}$ , a aplicação  $f|_{(p_i-\gamma_i, p_i+\gamma_i)}$  é  $C^1$  e satisfaz  $|f'(p_i)| > 1$ . Como  $f'$  é contínua neste intervalo e  $|f'(p_i)| > 1$ , podemos encontrar  $\gamma'_i$  tal que  $|f'(p)| > 1$  para todo  $p \in (p_i - \gamma'_i, p_i + \gamma'_i)$ . Repare então que em todos os pontos do intervalo  $(p_i - \gamma'_i, p_i + \gamma'_i)$  a derivada tem o mesmo sinal. Portanto, em cada um destes intervalos a função é monótona crescente ou decrescente de acordo com o sinal positivo ou negativo de  $f'(p)$ , respectivamente. Esta observação será essencial para determinarmos o valor que cada  $\sigma_i$  assume. Tome  $\gamma = \min\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_k\} > 0$ . Resumidamente, temos que  $f|_{(p_i-\gamma, p_i+\gamma)}$  é  $C^1$ , monótona e satisfaz  $|f'(p)| > 1$  para todo  $p \in (p_i - \gamma, p_i + \gamma)$  e para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Vamos considerar uma vizinhança  $N_i := [p_i - \epsilon, p_i + \epsilon]$  com  $0 < \epsilon < \gamma$  escolhido de tal forma que  $N_i \cap N_j = \emptyset$  se  $i \neq j$  quaisquer que sejam  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ . Podemos fazer tal escolha de  $\epsilon$  já que estamos sempre tratando de um conjunto  $S := \{p_1, \dots, p_k\}$  finito. Usando o Teorema do Valor Intermediário, temos que  $f(N_i)$  é um intervalo contendo  $p_{i+1}$ , e é igual a  $[f(p_i - \epsilon), f(p_i + \epsilon)]$  se  $f|_{N_i}$  é crescente ou igual a  $[f(p_i + \epsilon), f(p_i - \epsilon)]$  se  $f|_{N_i}$  é decrescente. Assim sendo, como  $f(N_i)$  é uma vizinhança de  $p_{i+1}$ , podemos escolher  $\epsilon$  suficientemente pequeno de modo a satisfazer também  $f(N_i) \cap f(N_j) = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Por fim, seja  $N = \bigcup_{i=1}^k N_i$ .

Vamos fixar um  $i \in \{1, \dots, k\}$  qualquer. Primeiramente, suponha que  $f|_{N_i}$  é crescente, logo  $f'(p) > 1$  para todo  $p \in N_i$ . Assim sendo, temos que  $\frac{f(p_i+\epsilon)-f(p_i)}{\epsilon} > 1$ , e lembrando que  $f(p_i) = p_{i+1}$  identificando  $p_{k+1}$  com  $p_1$ , temos que  $f(p_i + \epsilon) > \epsilon + p_{i+1}$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário existe um (único, já que a função é monótona em  $[p_i, p_i + \epsilon]$ ) ponto  $q_i^+ \in (p_i, p_i + \epsilon)$  tal que  $f(q_i^+) = \epsilon + p_{i+1}$ . Analogamente, como  $\frac{f(p_i)-f(p_i-\epsilon)}{\epsilon} > 1$ , temos que  $f(p_i - \epsilon) < p_{i+1} - \epsilon$ . Como  $f(p_i - \epsilon) < p_{i+1} - \epsilon$  e  $f(p_i) = p_{i+1}$ , temos que existe um  $q_i^-$  tal que  $q_i^- \in (p_i - \epsilon, p_i)$  tal que  $f(q_i^-) = p_{i+1} - \epsilon$ . Portanto, o conjunto dado por  $[p_i - \epsilon, q_i^-] \cup [q_i^+, p_i + \epsilon]$  é tal que

$$f([p_i - \epsilon, q_i^-] \cup [q_i^+, p_i + \epsilon]) = [f(p_i - \epsilon), p_{i+1} - \epsilon] \cup [p_{i+1} + \epsilon, f(p_i + \epsilon)]$$

e também satisfaz  $f([p_i - \epsilon, q_i^-] \cup [q_i^+, p_i + \epsilon]) \subset f(N_i)$ . Definindo  $N_i^- := [p_i - \epsilon, q_i^-] \cup [q_i^+, p_i + \epsilon]$  temos que  $f(N_i^-) \cap \text{int } N_j = \emptyset$  para todo  $j \in \{1, \dots, k\}$ , e portanto  $f(N_i^-) \cap \text{int } N = \emptyset$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Além disso,  $N_i \setminus N_i^- = (q_i^-, q_i^+)$  é tal que  $f(N_i \setminus N_i^-) = (p_{i+1} - \epsilon, p_{i+1} + \epsilon) = \text{int } N_{i+1} \subset \text{int } N$ . Portanto,  $N_i^-$  é de fato o conjunto de saída de  $N_i$  por  $f$ .

Repare que o mesmo resultado segue de maneira análoga para o caso  $f|_{N_i}$  decrescente. De fato, temos que  $\frac{f(p_i-\epsilon)-f(p_i)}{\epsilon} > 1$  e assim  $f(p_i - \epsilon) > \epsilon + p_{i+1}$ . Então encontraríamos  $q_i^- \in (p_i - \epsilon, p_i)$

tal que  $f([p_i - \epsilon, q_i^-]) = (p_{i+1} + \epsilon, f(p_i - \epsilon))$ . Por outro lado, como  $\frac{f(p_i) - f(p_i + \epsilon)}{\epsilon} > 1$ , temos que  $f(p_i + \epsilon) < p_{i+1} - \epsilon$ , e, portanto, encontramos um  $q_i^+ \in (p_i, p_i + \epsilon)$  tal que  $f([q_i^+, p_i + \epsilon]) = (f(p_i + \epsilon), p_{i+1} - \epsilon)$ . Definindo  $N_i^- := [p_i - \epsilon, q_i^-] \cup [q_i^+, p_i + \epsilon]$  temos novamente que

$$f([p_i - \epsilon, q_i^-] \cup [q_i^+, p_i + \epsilon]) = [p_{i+1} + \epsilon, f(p_i + \epsilon)] \cup [f(p_i - \epsilon), p_{i+1} - \epsilon]$$

e além disso  $f([p_i - \epsilon, q_i^-] \cup [q_i^+, p_i + \epsilon]) \subset f(N_i)$ . Mais uma vez, temos que  $f(N_i^-) \cap \text{int } N_j = \emptyset$  para todo  $j \in \{1, \dots, k\}$ , e portanto  $f(N_i^-) \cap \text{int } N = \emptyset$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Também neste caso  $N_i \setminus N_i^- = (q_i^-, q_i^+)$  é tal que  $f(N_i \setminus N_i^-) = (p_i - \epsilon, p_i + \epsilon) = \text{int } N_i$ . E assim, novamente,  $N_i^-$  é o conjunto de saída de  $N_i$  por  $f$ .

Fazendo  $N^- := \bigcup_{i=1}^k N_i^-$ , temos que  $f(N^-) \cap \text{int } N = \emptyset$  e  $f(N \setminus N^-) \subset \text{int}(N)$ , logo  $N^-$  é o conjunto de saída de  $N$ .

Vamos mostrar que  $S = \text{Inv } N$ . Para tanto, seja  $p \in N \setminus S$  e suponha que  $f^n(p) \in \text{int } N$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $p \in N \setminus S$ , temos que  $p \in N_i$  para algum  $i \in \{1, \dots, k\}$  e  $p \neq p_i$ , logo  $p = p_i + \alpha$  para algum  $\alpha > 0$ . Como  $f'$  é contínua, está bem definida em  $N$  que é compacto e  $|f'(p)| > 1$  para todo  $p \in N$ , temos que existe  $\beta > 0$  tal que  $|f'(p)| \geq 1 + \beta$  para todo  $p \in N$ . Temos que  $\left| \frac{f(p) - f(p_i)}{\alpha} \right| \geq 1 + \beta$ , logo  $|f(p) - p_{i+1}| \geq \alpha(1 + \beta)$ . Fazendo  $p^1 := f(p)$  temos que  $p^1$  é tal que  $p^1 \in N_{i+1}$  por hipótese (já que  $f(p) \in N$  e  $p \in N_i$ ) e é tal que  $|p^1 - p_{i+1}| \geq \alpha(1 + \beta)$ . Novamente, temos que  $\left| \frac{f(p^1) - f(p_{i+1})}{\alpha(1 + \beta)} \right| \geq 1 + \beta$ , e portanto  $|f(p^1) - p_{i+2}| \geq \alpha(1 + \beta)^2$ , i.e.,  $|f^2(p) - p_{i+2}| \geq \alpha(1 + \beta)^2$ . Repetindo este argumento, temos que as iteradas de  $p$  são tais que  $|f^n(p) - p_{i+n}| \geq \alpha(1 + \beta)^n$  é uma sequência divergente pois  $\beta > 0$ , e como  $f^n(p) \in N$  para todo  $n$ , temos que existe um  $n^*$  tal que  $|f^{n^*}(p) - p_{i+n^*}| \in N_{i+n^*}^-$ , o que nos dá uma contradição, já que teríamos  $f^{n^*+1}(p) \notin \text{int } N$ .

Por fim, devemos definir um conjunto  $L$  de modo que  $(N, L)$  seja um par-filtração para  $S$  sob  $f$ . Para tanto, sabemos que  $L$  deve ser uma vizinhança compacta de  $N^-$  e deve satisfazer  $f(L) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ . Novamente, repare que como  $f'$  é contínua e está bem definida em  $N$  que é compacto, temos pelo Teorema de Weierstrass que existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|f'(p)| < M$  para todo  $p \in N$ .

Vamos começar fixando um  $i \in \{1, \dots, k\}$  qualquer. Vamos supor, primeiramente, que  $f|_{N_i}$  é crescente. Considere  $q_i^-$  e  $q_i^+$  como escolhidos anteriormente. Considere o ponto dado por  $q_i^- + \delta_i$  com  $\delta_i > 0$  de forma que  $q_i^- + \delta_i < p_i$  e  $q_i^+ - \delta_i > p_i$ . Temos que  $\frac{f(q_i^- + \delta_i) - f(q_i^-)}{\delta_i} < M$ , o que nos dá  $f(q_i^- + \delta_i) < \delta_i M + p_{i+1} - \epsilon$  e vamos pedir também que  $\delta_i$  satisfaça  $\delta_i M + p_{i+1} - \epsilon < q_{i+1}^-$ . Analogamente, como  $q_i^+ - \delta_i > p_i$ , temos que  $\frac{f(q_i^+) - f(q_i^+ - \delta_i)}{\delta_i} < M$ , implicando  $-\delta_i M + p_{i+1} + \epsilon < f(q_i^+ - \delta_i)$ , e também pediremos que  $-\delta_i M + p_{i+1} + \epsilon > q_{i+1}^+$ . Claramente temos que existe  $\delta_i$  satisfazendo tais condições, i.e., temos que:  $f(q_i^- + \delta_i) < q_{i+1}^-$  e  $q_{i+1}^+ < f(q_i^+ - \delta_i)$ .

Agora, suponha que  $f|_{N_i}$  é decrescente. Considere novamente  $q_i^-$  e  $q_i^+$  como escolhidos anteriormente e  $\delta_i > 0$  tal que  $q_i^- + \delta_i < p_i$  e  $q_i^+ - \delta_i > p_i$ . Temos então que  $\frac{f(q_i^-) - f(q_i^- + \delta_i)}{\delta_i} < M$  o que implica que  $-\delta_i M + p_{i+1} + \epsilon < f(q_i^- + \delta_i)$ , e assim escolhemos  $\delta_i$  de modo que  $q_{i+1}^+ < -\delta_i M + p_{i+1} + \epsilon$ . Por outro lado,  $\frac{f(q_i^+ - \delta_i) - f(q_i^+)}{\delta_i} < M$  e assim  $f(q_i^+ - \delta_i) < \delta_i M + p_{i+1} - \epsilon$ , e escolhemos  $\delta_i$  de modo a satisfazer  $\delta_i M + p_{i+1} - \epsilon < q_{i+1}^-$ . Portanto, temos que existe  $\delta_i > 0$  tal que  $f(q_i^+ - \delta_i) < q_{i+1}^-$  e  $q_{i+1}^+ < f(q_i^- + \delta_i)$ . Por fim, fazendo  $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$  temos as mesmas desigualdades considerando  $\delta$  no lugar de  $\delta_i$ .

Definindo  $L_i = [p_i - \epsilon, q_i^- + \delta] \cup [q_i^+ - \delta, p_i + \epsilon]$  temos que  $f(L_i) = [f(p_i - \epsilon), f(q_i^- + \delta)] \cup [f(q_i^+ - \delta), f(p_i + \epsilon)]$  no caso de  $f|_{N_i}$  ser crescente e  $f(L_i) = [f(p_i + \epsilon), f(q_i^+ - \delta)] \cup [f(q_i^- + \delta), f(p_i - \epsilon)]$  no

caso de  $f|_{N_i}$  ser decrescente. Em ambos os casos temos que  $\overline{N_{i+1} \setminus L_{i+1}} = [q_{i+1}^- + \delta, q_{i+1}^+ - \delta]$  e, Segue da definição de  $\delta$  que  $f(q_i^- + \delta) < q_{i+1}^-$  e  $q_{i+1}^+ < f(q_i^+ + \delta)$ , e, portanto,  $f(L_i) \cap \overline{N_{i+1} \setminus L_{i+1}} = \emptyset$ . Da escolha de cada  $N_i$ , também é claro que  $f(L_i) \cap \overline{N_j \setminus L_j} = \emptyset$  qualquer que seja  $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i+1\}$ . Portanto,  $f(L_i) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ .

Definindo  $L := \bigcup_{i=1}^k L_i$ , temos que  $L$  é um compacto que satisfaz  $f(L) \cap \overline{N \setminus L} = \emptyset$ . Ademais, por um argumento análogo ao que fizemos para provar que  $S = \text{Inv}(N)$ , verifica-se que  $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$ . Claramente, da construção de  $L$ , temos que  $L$  é uma vizinhança de  $N^-$ . Portanto,  $(N, L)$  é um par-filtração para  $S$ .

Assim como no Exemplo 0.4, temos que o espaço quociente  $N \setminus L$  é homotopicamente equivalente a  $\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{k\text{-vezes}}$ , já que cada quociente  $N_i/L_i$  é homotopicamente equivalente a  $S^1$  e temos uma colagem em  $N/L$  de  $k$  desses quocientes. De maneira análoga a este mesmo referido exemplo, temos que para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$  (e identificando  $p_{k+1}$  com  $p_1$ ), a classe  $[\alpha_i]$  corresponde ao quociente  $N_i/L_i$  em que  $p_i$  é o único ponto de  $S$  que pertence a  $N_i$ . Temos duas possibilidades: se  $f'(p_i) > 0$ , então  $f|_{N_i}(x)$  é crescente, logo  $[\alpha_i]$  é levado por  $f_P^1$  para  $[\alpha_{i+1}]$ ; caso contrário, i.e., se  $f'(p_i) < 0$ , então  $f|_{N_i}(x)$  é decrescente, e portanto  $[\alpha_i]$  é mapeado por  $f_P^1$  para  $-[\alpha_{i+1}]$ . Logo, temos que  $f_P^1$  é uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_k \\ \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{k-1} & 0 \end{bmatrix}$$

com  $\sigma_i = 1$  ou  $\sigma_i = -1$  se  $f'(p_i) > 0$  ou se  $f'(p_i) < 0$ , respectivamente. Assim sendo, novamente  $f_P^1$  é de ordem finita e temos então:

$$\text{Con}^q(S) = \begin{cases} \left( \oplus_{i=1}^k \mathbb{Q}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_k \\ \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{k-1} & 0 \end{bmatrix} \right), & \text{se } q = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que temos uma aplicação pontuada em  $N_L$  que possui ordem finita. Como o espaço  $N_L$  (que é homotopicamente equivalente a  $\underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{k\text{-vezes}}$ ) não pode ser contraído a um ponto já que seus geradores não são destruídos por  $T_P^1$  em nenhuma iterada,  $(T_P^1)^n$  não é homotopicamente equivalente a uma aplicação constante para nenhum  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto, usando mais uma vez a Observação 0.2, temos que  $h(S) \neq 0$ .  $\square$

### 3 Teorema de Sharkovsky

Na Seção 2 consideramos um sistema dinâmico discreto dados pela iterada de um mapa  $f$  definido num intervalo compacto. Assumindo que este mapa é contínuo e diferenciável na vizinhança de pontos que formam uma órbita periódica em que cada ponto dessa órbita tem derivada em módulo maior que 1, fomos capazes de calcular o índice de Conley cohomológico reduzido e garantir que o índice de Conley homotópico é diferente de zero.

Sobre a existência de órbitas periódicas em sistemas dinâmicos discretos, temos um importante teorema chamado de Teorema de Sharkovsky. No que segue para a discussão desse resultado, nos basearemos principalmente por (Alligood; Sauer; Yorke, 1997). Considere sobre  $\mathbb{N}$  a seguinte ordenação

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \dots 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec \dots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec \dots \\ \dots \prec 2^3 \cdot 3 \prec 2^3 \cdot 5 \prec \dots \prec 2^4 \cdot 3 \prec 2^4 \cdot 5 \prec \dots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1$$

**Teorema 0.6 (Teorema de Sharkovsky).** *Suponha que  $f$  é uma função contínua definida num intervalo compacto da reta e tem uma órbita periódica de período  $p \in \mathbb{N}$ . Suponha que, na ordenação  $\prec$  acima, tenhamos  $p \prec q$ . Então,  $f$  também possui uma órbita de período  $q$ . Em particular, temos que se  $f$  possui uma órbita de período 3, então  $f$  possui órbitas de todos os períodos.*

Com resultado do Teorema 0.5, temos conhecimento do índice de Conley cohomológico reduzido e do índice de Conley homotópico para SD discretos gerado por um mapa  $f$  definido num compacto que é contínuo e também diferenciável nos pontos periódicos com módulo da derivada maior que 1. Note que o Teorema de Sharkovsky ainda é válido nesta situação.

Poderíamos nos questionar o que aconteceria com tais órbitas se submetêssemos este SD a uma pequena perturbação aleatória. Para tanto, primeiramente temos que entender o que significaria uma órbita periódica dentro do contexto de SDA discretos. Vamos propor uma definição que estende o que é uma órbita periódica de período  $k$  num SD discreto. A ideia central é a seguinte: a órbita de um ponto  $p$  sob a ação de SDA pode cometer pequenos erros, num sentido de periodicidade, controlados com uma variação de tamanho  $\epsilon$  que, por sua vez, é controlada pela intensidade do ruído produzido pelo SDA. Assim sendo, precisaremos colocar uma dependência de um parâmetro  $\epsilon > 0$  na definição. Além disso, também iremos pedir que, para qualquer outra iterada  $l$  com  $1 < l < k$ , a órbita de  $p$  esteja a uma distância de  $p$  maior que este  $\epsilon$ , a fim de cobrir as exigências da minimalidade de  $k$ .

Em outras palavras, quando consideramos uma órbita de período  $k$  num sistema dinâmico discreto determinístico, queremos dizer que a cada  $k$  iteradas o ponto  $p$  retorna ao mesmo lugar. Contudo, quando estamos sob a ação de um SDA, o ruído pode fazer com que percamos informação sobre a localização exata de  $p$  após  $k$  iteradas, ou seja, após  $k$  iterações temos apenas densidades de probabilidades dessa localização. A chave central é entender que essas densidades podem ser controladas quando temos controle sobre a intensidade ruído.

**Definição 0.7.** Dizemos que um SDA  $\phi(t, \omega)$  sobre um espaço métrico  $(X, d)$  admite uma  $(\epsilon, k)$ -órbita periódica de período  $k \in \mathbb{N}$  se existem  $\{p_1, \dots, p_k\} \subset X$  satisfazendo

$$d(\phi(t+k, \omega)(p_i), \phi(t, \omega)(p_i)) < \epsilon \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall t \in \mathbb{N} \text{ P-q.c.}$$

de modo que, para qualquer outro  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $1 < l < k$  tenhamos

$$d(\phi(t+l, \omega)(p_i), \phi(t, \omega)(p_i)) > \epsilon \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall t \in \mathbb{N} \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

A Figura ilustra o que está posto na Definição 0.7.

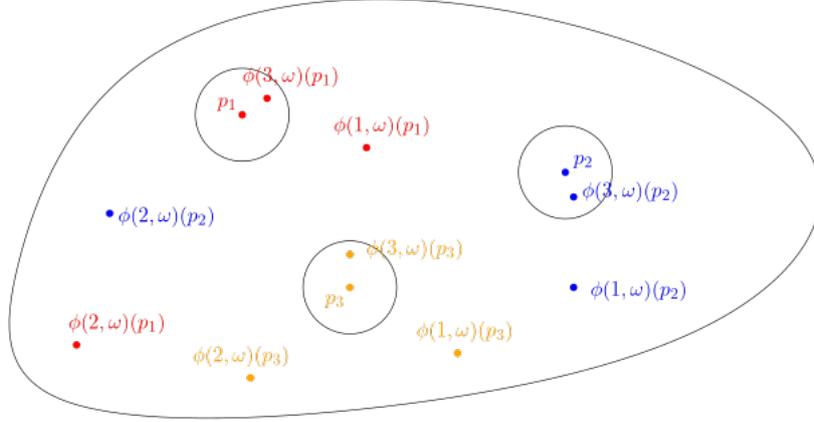


Figura 25: Representação de uma  $(\epsilon, 3)$ -órbita periódica.

Repare que para um SD discreto, i.e., se anularmos as perturbações que caracterizam o SDA, temos que uma órbita periódica de período  $k$  é na verdade uma  $(\epsilon, k)$ -órbita periódica para todo  $\epsilon > 0$ .

Encontramos uma definição alternativa para o que seria uma órbita periódica num SD escolhido de maneira aleatória na referência (Andres, 2008). A diferença essencial é que trocamos o erro determinístico de tamanho  $\epsilon$  pela existência de uma variável aleatória que nos conta como são as órbitas periódicas em cada sorteio. A ideia é que a trajetória de um ponto desta órbita é descrita por uma variável aleatória e temos a mesma definição de órbita periódica para o caso de SD discretos a menos, possivelmente, de um conjunto de medida nula.

**Definição 0.8.** (Andres, 2008) Sejam  $A \subset X$  um conjunto fechado,  $X$  um espaço métrico, e considere um operador aleatório (i.e.,  $\varphi$  é mensurável na  $\sigma$ -álgebra produto)  $\varphi : \Omega \times A \rightarrow \mathcal{P}(X)$  tomando valores nos conjuntos fechados de  $X$ . Uma sequência de mapas mensuráveis  $\{v_i\}_{i=1}^k$ , em que  $v_i : \Omega \rightarrow A$  para todo  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , é uma  **$k$ -órbita aleatória associada a  $\varphi$**  se:

1.  $v_{i+1}(\omega) \in \varphi(\omega, v_i(\omega))$  para todo  $i \in \{0, \dots, k-2\}$  e  $v_0(\omega) \in \varphi(\omega, v_{k-1}(\omega))$  para quase todo  $\omega \in \Omega$ .
2. a  $k$ -órbita aleatória não é um produto de órbitas formada andando  $p$  vezes com um natural  $p$  satisfazendo  $p > 1$  por uma  $m$ -órbita com  $mp = k$ .
3. Para quaisquer  $i, j \in \{0, \dots, k-1\}$  com  $i \neq j$  temos que  $v_i(\omega) \neq v_j(\omega)$ .

A Figura ilustra a Definição 0.8 para o caso  $k = 4$ .

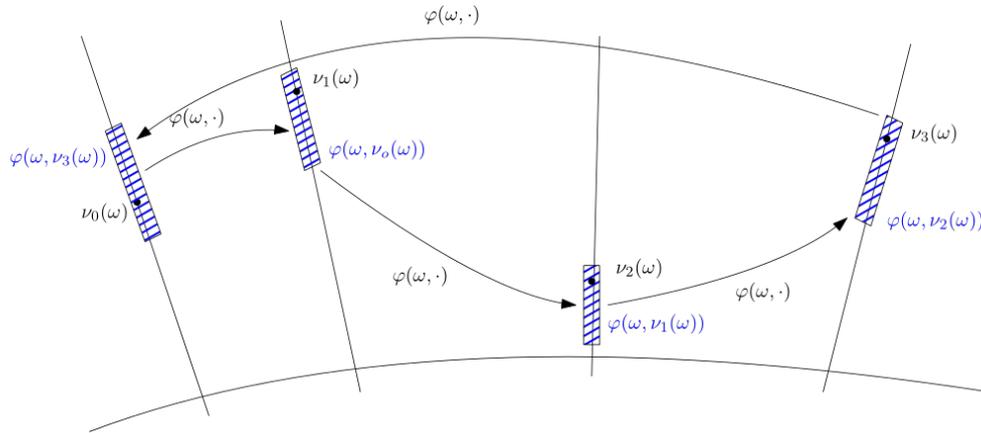


Figura 26: Ilustração de uma 4-órbita aleatória associada a  $\varphi$ .

Andres demonstra em (Andres, 2008) um análogo aleatório do Teorema de Sharkovsky, colocado no seguinte teorema:

**Teorema 0.9.** (Andres, 2008) *Suponha que  $f(\cdot, x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é mensurável para todo  $x \in \mathbb{R}$  num espaço completo mensurável  $\Omega$ , e que  $f(\omega, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínuo para quase todo  $\omega \in \Omega$ . Se, para algum  $k \in \mathbb{N}$  vale que  $f$  possui uma  $k$ -órbita aleatória, então  $f$  também admite uma  $n$ -órbita aleatória para qualquer  $k \prec n$ .*

A diferença substancial entre o Teorema 0.9 e o apresentado neste trabalho no Teorema 0.12 é que a aleatoriedade do processo considerado no referido artigo é dada no momento da escolha do mapa, e a partir daí o sistema segue deterministicamente. De maneira intuitiva, quando consideramos um operador aleatório  $\varphi$  como na Definição 0.8, estamos estudando o seguinte problema: a cada ponto do espaço  $\Omega$ , identificamos uma função  $\lambda(\omega) : A \rightarrow \mathcal{P}(X)$ . Quando nos perguntamos sobre uma órbita periódica desse operador, estamos procurando uma sequência de v.a. que caracterize órbitas periódicas das funções  $\lambda(\cdot)$  quase certamente. A Figura 27 nos dá uma ideia do que seria uma órbita periódica como na definição acima para o caso de um operador aleatório tomando valores em  $\mathbb{R}$ .

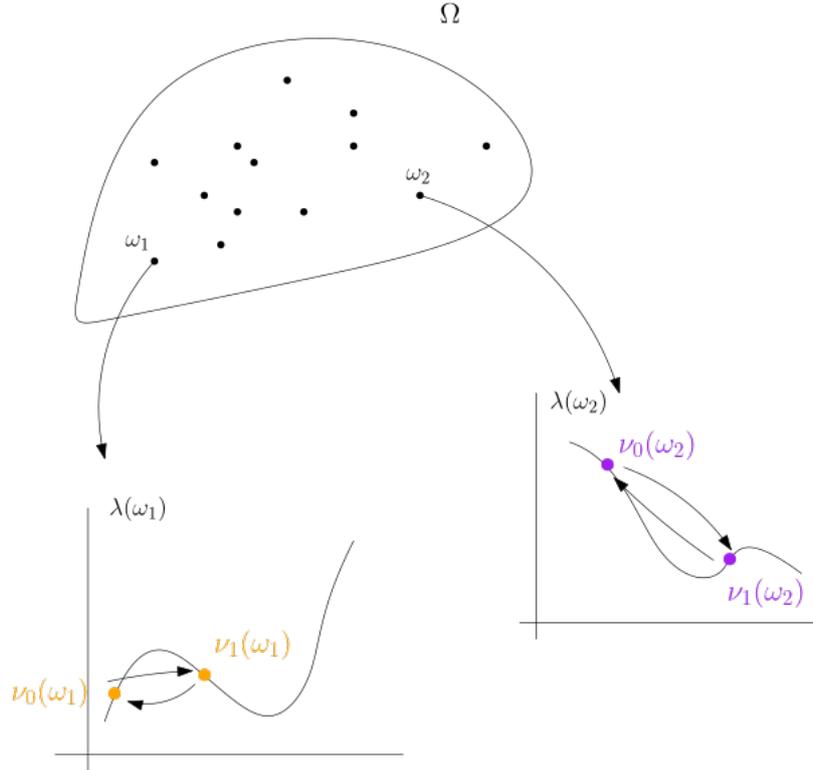


Figura 27: Órbitas estudadas pela Definição 0.8

Uma das desvantagens de adaptar essa definição para o caso de SDA é que não podemos considerar o sistema descrito pelas iteradas desse operador aleatório  $\varphi$ , já que ele toma valores em subconjuntos de  $X$ , enquanto que a construção de um SDA por um homeomorfismo aleatório exigiria que este operador tomasse valores em conjuntos unitários. Mas fazemos essa experiência mesmo assim. Logo, considere a Definição 0.8 para SDA gerados por um homeomorfismo aleatório. Teríamos que o primeiro item dessa definição se escreveria da seguinte maneira:  $\nu_{i+1}(\omega) = \varphi(\omega, \nu_i(\omega))$  para todo  $i \in \{0, \dots, k-2\}$  e  $\nu_0(\omega) = \varphi(\omega, \nu_{k-1}(\omega))$  para quase todo  $\omega \in \Omega$ .

E isto no revela mais um problema: estas relações não fazem sentido para o problema que estamos estudando pois deveríamos, ao menos, reescrever estas duas igualdades quase certa como  $\nu_{i+1}(\theta\omega) = \varphi(\omega, \nu_i(\omega))$  e  $\nu_0(\theta\omega) = \varphi(\omega, \nu_{k-1}(\omega))$ , de modo a considerar a atualização do sorteio pelo SD  $\theta$  em  $\Omega$ ; isso implicaria as devidas igualdades subsequentes, i.e., deveríamos obrigar  $\nu_1(\theta\omega) = \varphi(\omega, \nu_0(\omega))$ , o que implicaria  $\nu_2(\theta_2\omega) = \varphi(\theta\omega, \varphi(\omega, \nu_0(\omega)))$ , e assim por diante.

Uma adaptação desta definição para SDA foi feita em (Klüniger, 2001). Contudo ela depende que o espaço métrico considerado seja  $\mathbb{R}$ , pois ela depende de uma ordenação total dos elementos do espaço. Ela está colocada na sequência.

**Definição 0.10.** (Klüniger, 2001) Considere um SDA  $\phi$  gerado por  $\varphi$  com fluxo mensurável  $\theta$  sobre  $\mathbb{R}$ . Suponha que  $\theta_n$  seja ergódica para  $\mathbb{P}$ . Uma variável aleatória  $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é um **ponto periódico aleatório de período**  $k \in \mathbb{N}$  se  $\phi(k, \omega)x(\omega) = x(\theta_k\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c. Dizemos que ela tem **período minimal aleatório**  $k$  se, além disso,  $\phi(l, \omega)x(\omega) \neq x(\theta_l\omega)$  com probabilidade positiva para todo  $l \in \{1, \dots, k-1\}$ .

Dizemos que  $k \in \mathbb{N}$  variáveis aleatórias  $x_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  com  $i \in \{1, \dots, k\}$ , em que  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$   $\mathbb{P}$ -q.c., é um **ciclo periódico aleatório de período**  $k \in \mathbb{N}$  se existe uma permutação

determinística  $\pi \in S_k$  tal que  $\varphi(\omega)x_i(\omega) = x_{\pi(i)}(\theta\omega)$ .

Mais ainda, dizemos que essas variáveis aleatórias formam um **ciclo periódico aleatório de período minimal**  $k \in \mathbb{N}$  se  $\phi(l, \omega)x_1(\omega) \neq x_1(\theta_l\omega)$  com probabilidade positiva para todo  $l \in \{1, \dots, k-1\}$ .

Por fim, considere agora um SDA  $\phi$  gerado por  $\varphi$  com ruído  $\theta$  sobre um espaço polonês  $X$  (não necessariamente  $\mathbb{R}$ ). Dizemos que um conjunto aleatório invariante  $P : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$  (i.e.,  $\varphi(\omega)P(\omega) = P(\theta\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c.) é uma **órbita periódica aleatória** de período  $k$  se  $\#P(\omega) = k$   $\mathbb{P}$ -q.c., em que  $\#P(\omega)$  é a cardinalidade de  $P(\omega)$ . Dizemos que  $P$  tem **período minimal**  $k$  se  $P$  não contém nenhum subconjunto invariante aleatório próprio e não vazio.

A Figura 28 representa um ciclo periódico aleatório. Note como, neste caso, é considerada a atualização do fator aleatório  $\omega$  por  $\theta$ .

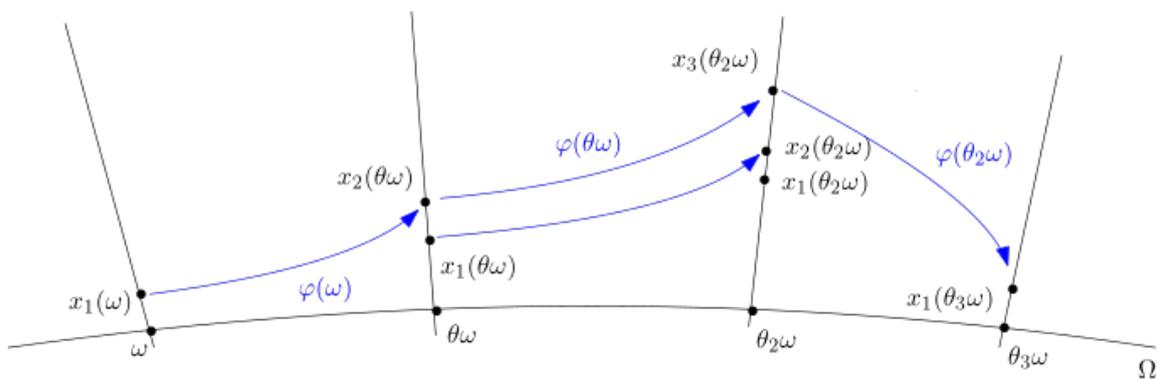


Figura 28: Representação de um ciclo periódico aleatório.

Já a Figura 29 nos mostra uma representação de uma órbita periódica aleatória.

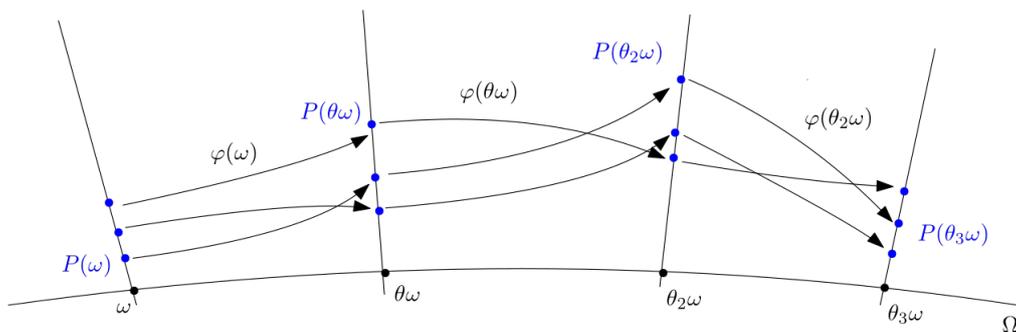


Figura 29: Representação de uma órbita aleatória.

Klünger mostra em seu trabalho um análogo do Teorema de Sharkovsky. A principal diferença entre o enunciado do Teorema 0.11 e do Teorema 0.12 consiste nas hipóteses sobre o SDA que estamos considerando. No trabalho de Klünger o análogo está enunciado da seguinte maneira:

**Teorema 0.11.** (Klünger, 2001) *Considere um SDA gerado por  $\varphi$  com ruído  $\theta$  tal que  $\theta_n$  é ergódico para todo  $n \in \mathbb{N}$  e seja  $\{x_1(\omega), \dots, x_k(\omega)\}$  um ciclo periódico aleatório de período minimal  $k$  em que  $x_1 < \dots < x_k$   $\mathbb{P}$ -q.c. Então, para todo  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $k \prec n$ , vale que  $\varphi$  admite uma órbita aleatória de período minimal  $n$  ou  $2n$ .*

Assim sendo, o Teorema 0.11 não garante a existência de uma órbita periódica aleatória de período  $n$  para todo  $k \prec n$  na ordenação de Sharkovsky, apenas garante a existência de uma órbita periódica aleatória de período  $n$  ou  $2n$ . O que fazemos no enunciado do Teorema 0.12 é acrescentar hipóteses sobre o SDA considerado de modo a provar a existência de tais órbitas de fato para todo  $k \prec n$  como no enunciado original do Teorema de Sharkovsky.

**Teorema 0.12** (Análogo Aleatório do Teorema de Sharkovsky). *Considere sobre um intervalo compacto  $C \subset \mathbb{R}$  uma função contínua  $f : C \rightarrow C$ . Considere o SD discreto dado pelas iteradas de  $f$ . Suponha que, se  $f$  admite uma órbita periódica de período  $k \geq 2$  com  $k \in \mathbb{N}$  dada pelos pontos  $p_1, \dots, p_k$ , então este conjunto satisfaz a seguinte condição:*

- (\*) *Existe uma vizinhança de raio  $\epsilon_i$  ao redor de  $p_i$  de modo que  $f$  é diferenciável em  $p_i$  e  $|f'(p_i)| > 1$  e cada um desses pontos  $p_i$  são tais que  $p_i \in \text{int } C$*

*Suponha que  $f$  admite uma órbita de período  $n \in \mathbb{N}$ . Existe um  $\epsilon > 0$  tal que, para todo SDA de  $C$  em  $C$  com ruído  $\theta$  ergódico sobre  $\mathbb{P}$  gerado por um homeomorfismo aleatório  $\varphi$  na vizinhança de raio  $\epsilon$  da  $C^0$ -topologia aleatória de  $f$  tal que existe uma família  $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$  de homeomorfismos aleatórios dependendo de maneira contínua de  $\lambda \in [0,1]$  com  $\varphi_0 = f$  e  $\varphi_1 = \varphi$ , existe uma  $(\epsilon', k)$ -órbita periódica para  $\epsilon'$  dependendo de  $k$  suficientemente pequeno para todo  $n \in \mathbb{N}$  com  $k \prec n$ . Além disso, existe uma órbita periódica aleatória de período  $k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  com  $n \prec k$ .*

*Demonstração.* Considere um SD gerado por  $f$  como no enunciado. Considere uma família de homeomorfismos aleatórios  $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$  definidos em  $C$  tomando valores em  $C$  que dependem de maneira contínua de  $\lambda$  tais que  $\varphi_0 = f$  e  $\varphi_1 = \varphi$  em que  $\varphi$  pertence a uma vizinhança  $\epsilon_1 > 0$  da topologia  $C^0$  aleatória de  $f$  de modo que o Teorema 0.26 seja válido.

Pelo Teorema de Sharkovsky enunciado em 0.6 temos que para todo  $k \in \mathbb{N}$  com  $n \prec k$  é tal que existe uma órbita periódica de período  $k$  no SD gerado por  $f$ . Assim sendo,  $f$  admite uma órbita periódica de período  $n$  e órbitas periódicas de período  $k$  para todo  $n \prec k$ . Vamos denotar este subconjunto de  $\mathbb{N}$  por  $\mathcal{O}$ .

Usando a hipótese (\*), temos que cada órbita de período  $k \in \mathcal{O}$  fixado está nas condições do Teorema 0.5. Assim sendo, existe uma vizinhança  $\epsilon_2 > 0$  desta órbita periódica de tal forma que  $N_i = [p_i - \epsilon_2, p_i + \epsilon_2]$  são tais que  $N = \cup_{i=1}^k N_i$  e  $f(N_i) \cap N_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$  é uma vizinhança isolante de  $S = \{p_1, \dots, p_k\}$  por  $f$ .

Como a topologia  $C^0$  num compacto coincide com a topologia gerada pela norma infinita, temos que  $|\varphi_\lambda(\omega)(x) - f(x)| < \epsilon_1$  para todo  $x \in C$   $\mathbb{P}$ -q.c. Podemos tomar  $\epsilon_1$  suficientemente pequeno de modo que para qualquer  $i \in \{1, \dots, k\}$  tenhamos  $\{\varphi_\lambda(\omega)(p_i - \epsilon_2), \varphi_\lambda(\omega)(p_i + \epsilon_2)\} \cap \text{int}N = \emptyset$  para todo  $\lambda \in [0,1]$ . Isso é possível pois da demonstração do Teorema 0.5 temos que  $\{f(p_i - \epsilon_2), f(p_i + \epsilon_2)\} \cap \text{int}N = \emptyset$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$  e, como a distância entre  $\varphi_\lambda(\omega)(x)$  e  $f(x)$  pode ser limitada por um  $0 < \epsilon \leq \epsilon_1$  tão pequeno quanto se queira uniformemente em  $C$ , garantimos a existência de tal  $\epsilon$ .

Logo, tomando  $N(\omega) = N$  para todo  $\omega \in \Omega$  com  $N$  como colocado acima, temos que  $\partial N$  é tal que  $\varphi_\lambda(\omega)(\partial N(\omega)) \cap \text{int}N(\theta\omega)$ . Portanto,  $N$  tal que  $\text{Inv}(N(\omega), \varphi_\lambda) \subset \text{int}N(\omega)$   $\mathbb{P}$ -q.c. e assim  $N(\omega)$  é uma vizinhança isolante aleatória para todo  $\varphi_\lambda$  com  $\lambda \in [0,1]$ . Portanto, estamos dentro das

hipóteses da propriedade da continuação, e assim  $h(S_\varphi, \varphi) = h(S, f)$ . Mas, do Teorema 0.5, temos que  $h(S, f) \neq 0$ , logo  $h(S_\lambda, \varphi) \neq 0$ . Ou seja, o conjunto invariante maximal aleatório pelo SDA gerado por  $\varphi$  é não vazio.

Assim sendo, existe  $p \in \text{Inv}N(\omega)$ . Temos então que existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $p \in N_i$ . Suponha que exista  $q \in C$  tal que  $q \in \text{Inv}N(\omega) \cap N_i$  e  $q \neq p$ . Faça  $d = |p - q| > 0$ . Da hipótese (\*) existe um  $\beta > 0$  tal que  $|f'(x)| \geq (1 + \beta)$  para todo  $x \in N$ . Logo,

$$\begin{aligned} (1 + \beta)^n d &\leq |f^n(p) - \phi_\lambda(n, \omega)(p)| + |\phi_\lambda(n, \omega)(p) - \phi_\lambda(n, \omega)(q)| + |\phi_\lambda(n, \omega)(p) - f^n(q)| \\ &\leq 2\epsilon + |\phi_\lambda(n, \omega)(p) - \phi_\lambda(n, \omega)(q)| \end{aligned}$$

Portanto,  $|\phi_\lambda(n, \omega)(p) - \phi_\lambda(n, \omega)(q)| \geq (1 + \beta)^n d - 2\epsilon$ . Como existe  $n^* \in \mathbb{N}$  tal que  $(1 + \beta)^{n^*} d - 2\epsilon > 2\epsilon$ , temos que eventualmente os pontos  $p$  e  $q$  não pertenceriam a um  $N_j$  para  $j \in \{1, \dots, k\}$  em alguma iterada. Isto contradiz a hipótese de  $p, q \in \text{Inv}N(\omega)$ . Repare que este argumento só é possível pois sabemos que se  $x \in \text{Inv}N(\omega)$  com  $x \in N_i$  para algum  $i \in \{1, \dots, k\}$ , então  $\varphi_\lambda(\omega)(x) \in N_{i+1}$  (fazendo a identificação  $k + 1$  com 1) já que  $\varphi_\lambda(\cdot)$  é contínua  $\mathbb{P}$ -q.c. Logo,  $\text{Inv}N(\omega)$  é um conjunto aleatório tal que  $\text{Inv}N(\omega) = \{p, \phi(1, \omega)p, \phi(2, \omega)p, \dots, \phi(k - 1, \omega)p\}$   $\mathbb{P}$ -q.c. Portanto, por definição este conjunto é uma órbita periódica aleatória de período  $k$ .

Além disso,  $\text{Inv}N(\omega)$  é tal que este conjunto de pontos forma uma  $(\epsilon, k)$ -órbita periódica. Isto vale justamente porque os mapas  $\varphi_\lambda(\cdot)$  é contínuo  $\mathbb{P}$ -q.c. para qualquer  $\lambda \in [0, 1]$  e como o mapa  $f = \varphi_0$  é tal que um ponto em  $N_i \cap \text{Inv}N(\omega)$  é mapeado para  $N_{i+1}$  (novamente fazendo a identificação  $k + 1$  com 1) temos que de  $k$  em  $k$  iteradas um ponto retorna ao seu subconjunto  $N_i$ , e para qualquer outra iterada ele está fora deste conjunto.  $\square$

**Conjetura 0.13.** A hipótese (\*) no Teorema 0.12 pode ser retirada.

## 4 Mapa da Tenda Aleatório

De modo a exemplificar o Teorema 0.12, façamos uma perturbação sobre o mapa da tenda. Retornando ao exemplo de sistemas dinâmicos aleatórios gerados por um sorteio de mapas como descrito na Seção 3.2.1, vamos considerar uma família de mapas construída a partir de um deslocamento aleatório do pico do mapa da tenda, como mostra a Figura 30.

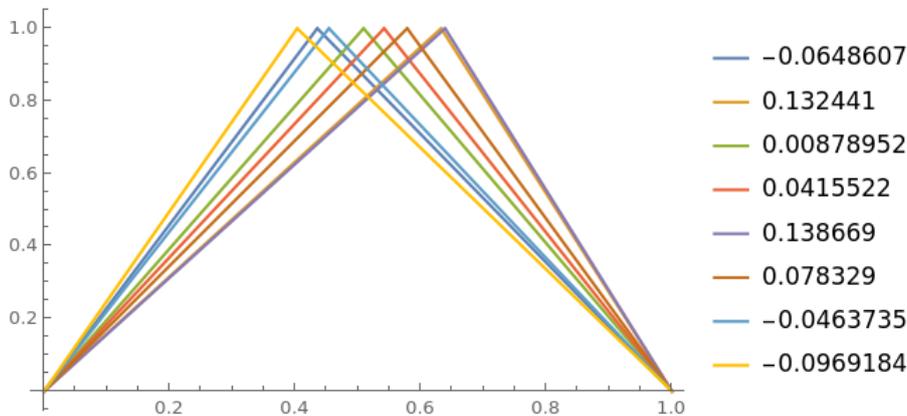


Figura 30: Família de mapas aleatórios.

Formalmente, considere o espaço  $X = (-\xi, \xi)$  com  $\xi < \frac{1}{2}$  fixado e equipado com a distribuição uniforme na  $\sigma$ -álgebra de Borel deste espaço. Este parâmetro  $\xi$  será nossa fonte de controle sobre a perturbação que estamos adicionando ao sistema dinâmico. Podemos associar a cada elemento  $\gamma \in X$  uma função da família de mapas  $\mathcal{F}$  com elementos  $T(\gamma) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  da forma

$$T(\gamma)(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1+2\gamma} & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} + \gamma \\ \frac{2(1-x)}{1-2\gamma} & , \frac{1}{2} + \gamma \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Estas funções são chamadas de mapas da tenda assimétricos. Assim sendo, temos uma medida de probabilidade sobre o espaço  $\mathcal{F}$ . De maneira análoga ao que fizemos anteriormente, podemos considerar o espaço de probabilidade das seqüências com entradas em  $\mathcal{F}$  dado por

$$\Omega = \mathcal{F}^{\mathbb{N}} = \{\omega : (T(\gamma_0), T(\gamma_1), \dots) \text{ com } T(\gamma_k) \in \mathcal{F} \text{ qualquer que seja } k \in \mathbb{N}\}$$

e equipamos  $\Omega$  com a medida de Bernoulli definida nos cilindros e induzida pela medida uniforme em  $X$ . Portanto, temos o SDA dado por

$$\phi(t, \omega)(\cdot) = T(\gamma_{t-1}) \circ \dots \circ T(\gamma_0)(\cdot). \quad (1)$$

Basicamente, estamos a cada iterada do sistema sorteando um mapa da tenda assimétrico por sortearmos um  $\gamma \in X$ , e assim cada elemento de  $[0, 1]$  é mapeado a cada instante por um mapa possivelmente diferente do anterior como mostra a expressão de  $\phi(t, \omega)$ .

Vamos usar a propriedade da continuação para decidir sobre a existência de um conjunto invariante maximal dentro de uma vizinhança do ponto  $\frac{2}{3}$ . Considere  $\epsilon > 0$  satisfazendo  $[\frac{2}{3} - 2\epsilon, \frac{2}{3} + 2\epsilon] \subset (\frac{1}{2}, 1)$ , i.e., as propriedades que pedimos para  $\epsilon$  no Exemplo 0.1 e vamos supor agora que  $|\xi| < \frac{\epsilon}{4}$  e exigir que  $\frac{1}{2} + |\xi| \leq \frac{2}{3} - 2\epsilon$  (esta segunda exigência nos garante que o mapa é decrescente em  $N$ ). Defina  $N = [\frac{2}{3} - \epsilon, \frac{2}{3} + \epsilon]$  e, para  $\lambda \in [0, 1]$ , considere a família de mapas aleatórios  $T_\lambda$  definidas de  $[0, 1]$  em  $[0, 1]$  dada por

$$T_\lambda(\gamma)(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1+2\lambda\gamma} & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} + \lambda\gamma \\ \frac{2(1-x)}{1-2\lambda\gamma} & , \frac{1}{2} + \lambda\gamma \leq x \leq 1 \end{cases}$$

e note que quando  $\lambda = 0$  temos o mapa da tenda original. Queremos mostrar que  $N$  é uma vizinhança isolante aleatória para toda  $T_\lambda(\cdot)$  qualquer que seja  $\lambda \in [0, 1]$ . Novamente, temos que para mostrar que  $N$  é uma vizinhança isolante, devemos provar que  $\text{Inv}(N) \subset \text{int}N$ ; para tanto, é suficiente mostrar que  $\partial N = \{\frac{2}{3} - \epsilon, \frac{2}{3} + \epsilon\}$  vale que  $T_\lambda(\gamma)(\partial N) \cap \text{int}N = \emptyset$  qualquer que seja  $\gamma \in X$ .

Seja então  $\gamma \in X$  qualquer. Temos que  $T_\lambda(\gamma)(\frac{2}{3} - \epsilon) = \frac{\frac{2}{3} + 2\epsilon}{1-2\lambda\gamma}$  e vamos mostrar que  $T^\lambda(\gamma)(\frac{2}{3} - \epsilon) > \frac{2}{3} + \epsilon$ ; de fato,  $\frac{\frac{2}{3} + 2\epsilon}{1-2\lambda\gamma} > \frac{2}{3} + \epsilon \iff \frac{2}{3} + 2\epsilon > (\frac{2}{3} + \epsilon)(1 - 2\lambda\gamma)$  já que  $\gamma < \frac{1}{2}$  obrigatoriamente; Logo, temos  $\frac{2}{3} + 2\epsilon > (\frac{2}{3} + \epsilon)(1 - 2\lambda\gamma) \iff \epsilon > \frac{-4\lambda\gamma}{3} - 2\lambda\epsilon$  e, por fim, como  $\gamma$  pode assumir valores tanto negativos quanto positivos, temos que  $\epsilon > \frac{-4\lambda\gamma}{3} - 2\lambda\epsilon$  seguiria se mostrássemos de  $|\frac{-4\lambda\gamma}{3} - 2\lambda\epsilon| < \epsilon$ . Mas repare que:

$$|\frac{-4\lambda\gamma}{3} - 2\lambda\epsilon| = |\lambda(\frac{-4}{3} - 2\epsilon)| = |\lambda|(\frac{4}{3} + 2\epsilon) < \frac{\epsilon}{4}(\frac{4}{3} + 2\epsilon) = \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon^2}{2} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Por outro lado, temos que  $T_\lambda(\gamma)(\frac{2}{3} + \epsilon) = \frac{\frac{2}{3} - 2\epsilon}{1 - 2\gamma}$  e vamos mostrar que  $T_\lambda(\gamma)(\frac{2}{3} + \epsilon) < \frac{2}{3} - \epsilon$ ; de fato, temos novamente que  $\gamma < \frac{1}{2}$  implica  $\frac{\frac{2}{3} - 2\epsilon}{1 - 2\gamma} < \frac{2}{3} - \epsilon \iff \frac{2}{3} - 2\epsilon < (\frac{2}{3} - \epsilon)(1 - 2\gamma)$  e expandindo o lado direito, temos na verdade que provar que  $-\epsilon < \frac{-4\gamma}{3} + 2\gamma\epsilon \iff \epsilon > \frac{4\gamma}{3} - 2\gamma\epsilon$  e, novamente, repare que para tanto é suficiente mostrar que  $|\frac{4\gamma}{3} - 2\gamma\epsilon| < \epsilon$ . Mas temos:

$$|\frac{4\gamma}{3} - 2\gamma\epsilon| = |\gamma \left( \frac{4}{3} - 2\epsilon \right)| = |\gamma| \left| \left( \frac{4}{3} - 2\epsilon \right) \right| < |\gamma| \left( \frac{4}{3} + 2\epsilon \right) < \frac{\epsilon}{4} \left( \frac{4}{3} + 2\epsilon \right) < \epsilon$$

Portanto,  $N$  é uma vizinhança isolante aleatória qualquer para toda  $T_\lambda(\cdot)$  com  $\lambda \in [0, 1]$ ; usando a propriedade da continuação, a menos de uma escolha de um  $\xi$  possivelmente menor, temos que  $h(S_\lambda, T_\lambda(\cdot)) = h(S_0, T_0) \neq 0$  do cálculo que foi feito no Exemplo 0.4. Logo, usando a propriedade de Wazèwski temos que o conjunto invariante maximal de  $N$  quando submetido ao sistema dinâmico  $\phi(t, \omega)(\cdot)$  descrito em 1 é não vazio.

Repare que a propriedade da continuação pode ser usada neste caso justamente porque, como estamos considerando uma família de funções definidas num intervalo compacto e tomando valor neste mesmo conjunto, a  $C^0$ -topologia no espaço coincide com a topologia gerada pela norma infinita, i.e., para qualquer função  $f$  de  $C$  em  $C$  temos  $\|f\|_\infty = \max_{x \in C} |f(x)|$ .

# Homotopia

Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $I \equiv [0, 1]$  o intervalo compacto da reta real munido da topologia usual.

**Definição .1.** Duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  são ditas **homotópicas** quando existe uma aplicação contínua  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que

$$H(x, 0) = f(x) \text{ e } H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

A aplicação  $H$  chama-se então **homotopia** entre  $f$  e  $g$ , e denotaremos  $f \simeq g$  para indicar que existe uma homotopia entre  $f$ .

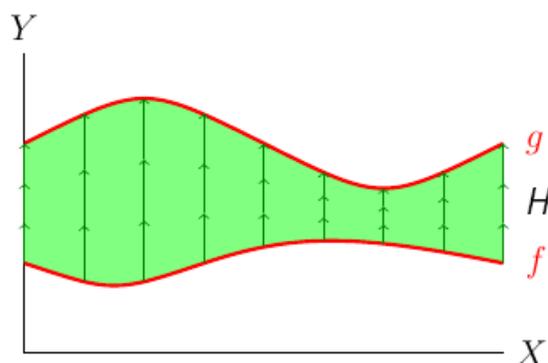


Figura 1: Funções Homotópicas

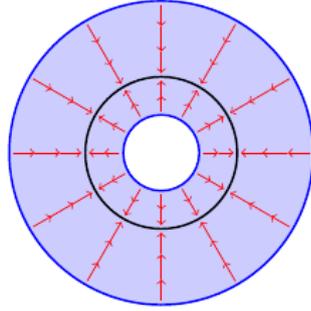
**Proposição .2.** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos. A relação de homotopia  $f \simeq g$  é uma relação de equivalência em  $C(X, Y)$ . Isto é dadas  $f, f' : X \rightarrow Y$  e  $g, g' : Y \rightarrow Z$  aplicações contínuas entre espaços topológicos  $X, Y, Z$  então  $f \simeq f'$  e  $g \simeq g'$  implica que  $g \circ f \simeq g' \circ f'$ .*

**Definição .3.** Uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  é denominada de **equivalência homotópica** quando existe  $g : Y \rightarrow X$  contínua tal que

$$g \circ f \simeq \text{id}_X \text{ e } f \circ g \simeq \text{id}_Y$$

Diz-se então que  $g$  é uma **inversa homotópica** de  $f$  e que os espaços topológicos  $X$  e  $Y$  possuem o mesmo **tipo de homotopia**. Denotaremos tal fato por  $X \equiv Y$  ou  $f : X \equiv Y$ .

Como consequência direta da definição, temos que a existência de um homeomorfismo entre  $X$  e  $Y$  garante uma equivalência homotópica entre  $X$  e  $Y$ , porém o inverso não é válido.



$$C \simeq S^1$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Figura 2: O anel circular e  $S^1$  tem o mesmo tipo de homotopia.

**Proposição .4.** A esfera unitária  $S^n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

**Definição .5.** Um espaço  $X$  é dito **contrátil** quando tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

**Proposição .6.**  $X$  é contrátil se, e somente se a aplicação identidade  $id : X \rightarrow X$  é homotópica a uma aplicação constante de  $X$  em  $X$ .

**Exemplo .7.** O intervalo  $I$  é contrátil.

**Corolário .8.** Um espaço contrátil é conexo por caminhos.

**Definição .9.** Um **caminho** é uma aplicação contínua  $a : J \rightarrow X$  definida num intervalo compacto da reta  $J = [s_0, s_1]$ . Naturalmente, dizemos que um caminho é fechado quando  $a(s_0) = a(s_1)$ .

Fazendo uma reparametrização quando necessário, podemos sempre considerar um caminho com seu domínio no intervalo  $I = [0, 1]$ .

Como  $I$  é contrátil, então todo caminho é homotópico a uma constante.

Vamos agora olhar uma classe mais restrita ainda de aplicações: as homotopias que mantêm os extremos fixos. Para isso, sejam  $X, Y$  espaços topológicos,  $f, g : X \rightarrow Y$  duas aplicações contínuas e  $A \subset X$ . Escrevemos  $f \simeq g$  (rel.  $A \subset X$ ) ou  $f \cong g$  para indicar que existe uma homotopia  $H : f \simeq g$  tal que  $H(x, t) = f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$ , isto é, o espaço  $A$  não é deformado durante a homotopia. Denote por  $\partial I \equiv \{0, 1\}$  a fronteira do intervalo  $I$ .

**Definição .10.** Diremos que dois caminhos  $a, b : I \rightarrow X$  são **homotópicos com extremos fixos** quando tivermos  $a \simeq b$  (rel.  $\partial I$ ). Assim,  $H : a \cong b$  entre caminhos é uma aplicação contínua  $H : I \times I$  tal que

$$H(s, 0) = a(s) \text{ e } H(s, 1) = b(s)$$

$$H(0, t) = a(0) = b(0)$$

$$H(s, 1) = a(1) = b(1)$$

para todo  $s, t \in I$ .

Em particular, os caminhos fechados  $a, b : I \rightarrow X$  são homotópicos quando existe uma aplicação contínua  $H : I \times I \rightarrow X$  tal que, se  $a(0) = a(1) = x_0 \in X$ , vale que  $H(s, 0) = a(s)$ ,  $H(s, 1) = b(s)$  e

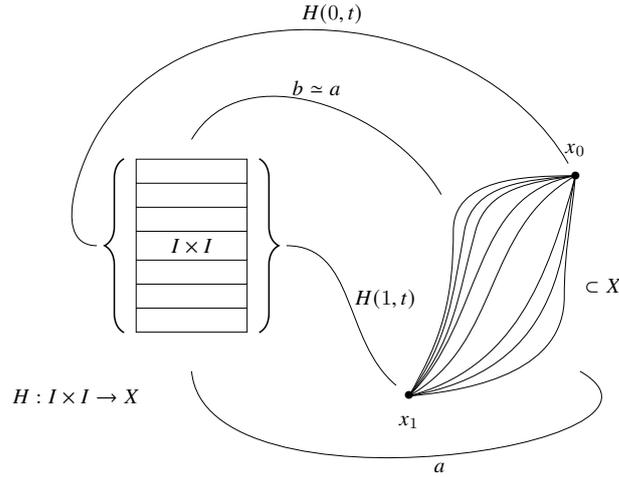


Figura 3: Caminhos Homotópicos

$H(0, t) = H(1, t) = x_0$ . Um outro tipo de homotopia entre caminhos fechados é a homotopia livre; ela é tal que, sendo  $a, b : I \rightarrow X$  caminhos fechados, dizemos que  $a$  e  $b$  são livremente homotópicos quando existe uma aplicação contínua  $H : I \times I \rightarrow X$  tal que  $H(s, 0) = a(s)$ ,  $H(s, 1) = b(s)$  e  $H(0, t) = H(1, t) \forall t \in I$ . Isto é, dado um  $t$  arbitrário em  $I$ , o caminho  $H_t : I \rightarrow X$  dado por  $H_t(s) = H(s, t)$  é fechado.

Assim, como a homotopia é uma relação de equivalência, a homotopia de extremos fixos  $a \cong b$  também o é. Ou seja, podemos definir  $\alpha := [a]$  a classe de homotopia do caminho  $a : I \rightarrow X$ . Isto é,

$$\alpha = \{\text{todos os caminhos } b \text{ que possuem as mesmas extremidades de } a \text{ e } a \cong b\} = \{b : I \rightarrow X | a \cong b\}.$$

# 1 Grupo Fundamental

Consideremos agora caminhos  $a, b : I \rightarrow X$  tais que o fim de  $a$  coincide com o começo de  $b$ , isto é,  $a(1) = b(0)$ . O produto  $ab$  é o caminho que primeiro percorre  $a$  e depois  $b$ , isto é,

$$ab(s) = \begin{cases} a(2s) & , 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ b(2s - 1) & , \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Também podemos definir o caminho inverso de  $a : I \rightarrow X$  como sendo a aplicação  $a^{-1} : I \rightarrow X$  dado por  $a^{-1}(s) = a(1 - s) \forall s \in I$ , isto é, o caminho  $a^{-1}$  percorre  $a$  ao contrário. Considerando  $j : I \rightarrow I$  a reparametrização que faz  $s \mapsto 1 - s$ , vale que  $a^{-1} = a \circ j$ . Note que, tanto o produto de caminhos quanto o inverso de um deles ainda definem aplicações contínuas, o que nos garante que verdadeiramente podemos chamá-los de caminhos.

Além disso, dado  $x \in X$ , indicaremos como  $e_x(s) = x \forall s \in I$  o caminho constante em  $x$ , e denotaremos  $\epsilon_x := [e_x]$ .

## Homotopia

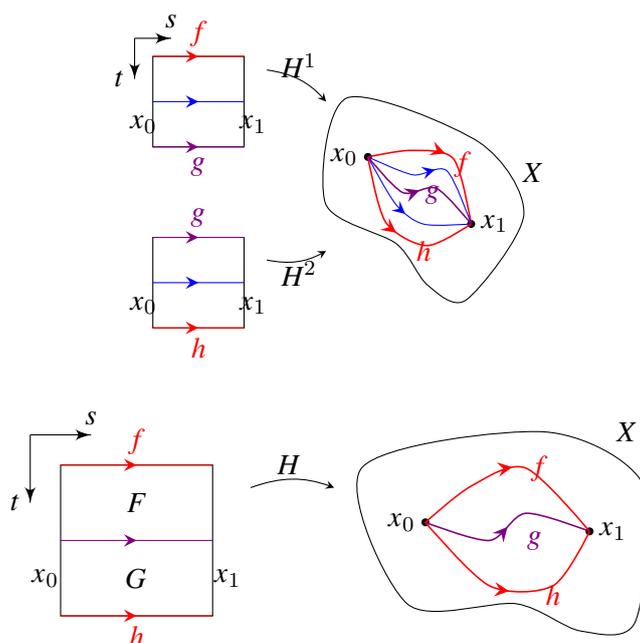


Figura 4: Homotopia é uma relação de equivalência

Note que não vale a propriedade associativa entre o produto de caminhos; de fato  $(ab)c$  não é necessariamente igual a  $a(bc)$  já que a velocidade com que os caminhos são percorridos são diferentes, o que faz a partícula estar em posições diferentes no mesmo instante de tempo. Tampouco, pelo mesmo argumento, são válidas propriedades como  $e_x a = a$  ou  $aa^{-1} = e_x$ , mas podemos construir uma estrutura de grupo quando consideramos as classes de homotopia com extremos fixos desses caminhos. Para isso, consideremos primeiro uma proposição que garantirá que as operações sobre as classes de homotopia estão bem definidas.

**Proposição .11.** *Sejam  $a, b : I \rightarrow X$  caminhos tais que  $a(1) = b(0)$ , vale que: se  $a \cong a'$  e  $b \cong b'$ , então  $ab \cong a'b'$  e  $a^{-1} \cong (a^{-1})'$ .*

Seja agora  $X$  um espaço topológico,  $\alpha$  uma classe de homotopia de caminhos que têm origem em um ponto  $x \in X$  e terminam num ponto  $y \in X$  e  $\beta$  uma classe de homotopia de caminhos que começam em  $y \in X$  e terminam em  $z \in X$ . Definiremos o produto  $\alpha\beta$  tomando caminhos  $a \in \alpha$  e  $b \in \beta$  e fazendo  $\alpha\beta := [ab]$  (segue que  $[a][b] = [ab]$ ).

Analogamente, definimos a classe inversa de  $\alpha$  por  $\alpha^{-1} := [a^{-1}]$  em que  $a \in \alpha$ . A próxima proposição nos guia para a formação de um grupo sobre as classes de homotopias com as operações definidas há pouco.

**Proposição .12.** *Sejam  $a, b, c : I \rightarrow X$  caminhos tais que cada um deles termina onde o seguinte começa. Sejam  $\alpha := [a]$ ,  $\beta := [b]$  e  $\gamma := [c]$  suas classes de homotopia. Além disso, temos  $x = a(0)$  a origem de  $a$ ,  $y = a(1)$  seu fim,  $\varepsilon_x = [e_x]$  e  $\varepsilon_y = [e_y]$ . Tem-se então:*

1.  $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon_x$
2.  $\alpha^{-1}\alpha = \varepsilon_y$
3.  $\varepsilon_x\alpha = \alpha = \alpha\varepsilon_y$

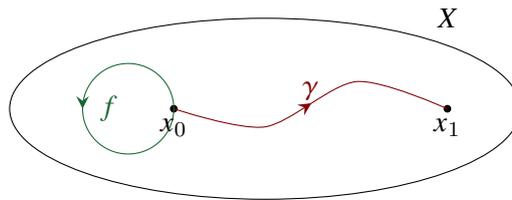
4.  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

**Definição .13.** O conjunto das classes de homotopia (com extremos fixos) dos caminhos num espaço topológico  $X$  munido das leis de composição acima definidas, chama-se **grupoide fundamental** de  $X$  e é frequentemente representado por  $\Pi(X)$ .

Assim, considere pares do tipo  $(X, x_0)$  em que  $x_0 \in X$  será chamado de ponto base do espaço topológico  $X$ .

**Definição .14.** Os caminhos fechados em  $x_0$  da forma  $a : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$  serão chamados caminhos fechados com base  $x_0$  e consideraremos as homotopias relativas a  $\partial I$ . O subconjunto  $\Pi_1(X, x_0)$  do grupoide fundamental, formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com base em  $x_0$  constitui um grupo, chamado **grupo fundamental** do espaço  $X$  com base no ponto  $x_0$ .

**Proposição .15.** Se  $x_0$  e  $x_1$  pertencem à mesma componente conexa por caminhos de  $X$ , então  $\Pi_1(X, x_0)$  e  $\Pi_1(X, x_1)$  são isomorfos. Mais precisamente, cada classe de homotopia  $\gamma$  de caminhos que ligam  $x_0$  a  $x_1$  induz um isomorfismo  $\bar{\gamma} : \Pi_1(X, x_1) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$  dado por  $\bar{\gamma}(a) = \gamma a \gamma^{-1}$ .



Como consequência direta da proposição acima, se  $X$  é conexo por caminhos, então para quaisquer pontos básicos  $x_0, x_1 \in X$  os grupos fundamentais  $\Pi_1(X, x_0)$  e  $\Pi_1(X, x_1)$  são isomorfos.

**Proposição .16.**  $\Pi_1(S^1, 0)$  é isomorfo a  $(\mathbb{Z}, +)$ .

**Definição .17.** Dizemos que um espaço  $X$  conexo por caminhos é **simplesmente conexo** quando seu grupo fundamental é trivial.

# Módulos e Álgebra Homológica

No que se segue  $R$  denotará um anel comutativo com unidade  $1_R$ .

**Definição .1.** Um  $R$ -módulo a esquerda  $M$  consiste de um grupo abeliano  $(M, +)$  e uma operação  $\cdot : R \times M \rightarrow M$  tal que, dados  $r, s \in R$  e  $x, y \in M$  quaisquer, temos que:

1.  $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
2.  $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
3.  $(rs) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
4.  $1_R \cdot x = x$

De maneira análoga se a operação  $\cdot$  é definida como  $\cdot : M \times R \rightarrow M$  temos um  $R$ -módulo a direita. Se temos as duas operações tanto à esquerda como à direita e elas são compatíveis, temos um  $R$ -módulo.

**Definição .2.** Seja  $M$  um  $R$ -módulo. Um conjunto  $X \subset M$  é dito uma **base** para  $M$  se todo elemento de  $M$  pode ser escrito unicamente como uma combinação linear finita de elementos de  $X$  com coeficientes em  $R$ . Equivalentemente:

1. Dado  $m \in M$ , existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$  e  $x_1, \dots, x_n \in X$  tais que  $m = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ . Em outras palavras,  $X$  gera  $M$ ;
2. Dados  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in R$  e  $x_1, \dots, x_n \in M$ , se  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n$ , então  $\lambda_i = \mu_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Em outras palavras,  $X$  é um conjunto linearmente independente.

Dizemos que um  $R$ -módulo é **livre** se ele admite base.

**Exemplo .3.**

1.  $M = R \times \dots \times R$ , com a base canônica  $B = (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ ;
2.  $M = R[X]$  é um  $A$ -módulo livre com base  $B = 1, X, X^2, \dots$ ;
3. Os inteiros de Gauss  $M = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$  com a base  $B = 1, i$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre.

Em particular, quando tomamos  $R = \mathbb{Z}$ , temos os grupos abelianos.

**Definição .4.** Uma **seqüência** de  $R$ -módulos com  $\{f_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  mapas lineares em  $R$  da forma

$$\dots \rightarrow A_{p-1} \xrightarrow{f_{p-1}} A_p \xrightarrow{f_p} A_{p+1} \xrightarrow{f_{p+1}} A_{p+2} \rightarrow \dots$$

é dita **exata** se  $\text{Im} f_p = \ker f_{p+1}$  para todo  $p \in \mathbb{Z}$ .

**Definição .5.** Dizemos que a sequência de  $R$ -módulos

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

é **sequência exata curta** se é exata em  $A$ ,  $B$  e  $C$ , i.e.,

1.  $\text{Im}f = \ker g$ ;
2.  $f$  é injetora;
3.  $g$  é sobrejetora;

Observe que, se a sequência é exata em  $A_{p+1}$  vale que  $\text{Im}f_p = \ker f_{p+1}$  e portanto  $f_{p+1} \circ f_p = 0$ .

Mais ainda, numa sequência exata curta como na Definição .5, estamos sob as hipóteses do primeiro teorema do isomorfismo, o que nos dá que  $C \cong B/\ker g = B/\text{Im}f \cong B/A$ . Podemos ver o módulo quociente  $B/\text{Im}f$  do mapa linear  $f : A \rightarrow B$  é um tipo de “dual” do submódulo  $\ker f = \{a \in A : f(a) = 0\}$ , o que nos inspira na próxima definição:

**Definição .6.** Dado  $f : A \rightarrow B$  um mapa  $R$ -linear, o módulo quociente é denominado de **cokernel** de  $f$  e denotado por  $\text{Coker}f$ .

Note que, numa sequência exata curta  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ , vale que  $\text{Coker}f = B/\text{Im}f \cong C = \text{Im}g$  (donde a última igualdade decorre do fato de  $g$  ser sobrejetora). Vamos usar essa observação para construir uma sequência exata curta a partir de uma sequência exata longa

$$\dots \rightarrow A_{p-2} \xrightarrow{f_{p-2}} A_{p-1} \xrightarrow{f_{p-1}} A_p \xrightarrow{f_p} A_{p+1} \xrightarrow{f_{p+1}} A_{p+2} \rightarrow \dots$$

Vamos fixar um  $p \in \mathbb{Z}$  e considerar  $A_p$ . Claramente, vale que existe uma sobrejeção  $A_p \xrightarrow{f_p} \text{Im}f_p$ . Mas, como a sequência é exata,  $\text{Im}f_p = \ker f_{p+1}$  e portanto existe uma sobrejeção  $A_p \xrightarrow{f_p} \ker f_{p+1}$ . Novamente, usando o primeiro teorema do isomorfismo e o fato de  $\ker f_p = \text{Im}f_{p-1}$ , podemos concluir que

$$A_p/\text{Im}f_{p-1} = A_p/\ker f_p \cong \text{Im}f_p = \ker f_{p+1}$$

e assim podemos considerar a sequência exata curta

$$0 \rightarrow \text{Im}f_{p-1} \xrightarrow{f_{p-1}} A_p \xrightarrow{f_p} \ker f_{p+1} \rightarrow 0$$

Mas vale que  $\text{Coker}f_{p-2} = A_{p-1}/\text{Im}f_{p-2} \cong \text{Im}f_{p-1}$  pela observação que fizemos acima, logo temos a sequência exata curta

$$0 \rightarrow \text{Coker}f_{p-2} \rightarrow A_p \rightarrow \ker f_{p+1} \rightarrow 0$$

Se estamos num contexto de espaços vetoriais (isto é, quando  $R$  é um corpo), temos que  $A_p/\ker f_p \cong \text{Im}f_p$  implica que  $A_p \cong \ker f_p \oplus \text{Im}f_p = \text{Im}f_{p-1} \oplus \text{Im}f_p$ . Assim, se  $A_{p-1}$  e  $A_{p+1}$  têm dimensões finitas, vale que  $A_p$  também o têm.

**Definição .7.** Dizemos que uma sequência exata curta de  $R$ -módulos  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  é **cindi** (ou ainda que é uma **sequência cindida**) se o submódulo  $f(A)$  é soma direta em  $B$ , i.e., se  $B = f(A) \oplus D$  para algum submódulo  $D$  de  $B$ .

Como  $\text{Im} f = \ker g$ ,  $f$  é injetora e  $g$  é sobrejetora, então a restrição  $g|_D$  é uma bijeção em  $C$  (pois  $\ker g|_D = \{0\}$ , já que  $\ker g = \text{Im} f = f(A)$ ). Logo, existe um isomorfismo  $\theta : B \rightarrow A \oplus C$  definido tal que  $\theta|_{f(A)} = f^{-1}$  e  $\theta_D = g$ . Ou seja, numa sequência exata que cinde, vale que  $B \cong A \oplus C$ .

**Proposição .8.** *Seja  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  uma sequência exata curta de  $R$ -módulos. São equivalentes:*

1. *A sequência cinde;*
2. *Existe  $p : B \rightarrow A$  mapa linear tal que  $p \circ f = \text{id}_A$*
3. *Existe  $j : C \rightarrow B$  mapa linear tal que  $g \circ j = \text{id}_C$*

**Corolário .9.** *Seja  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  uma sequência exata curta de  $R$ -módulos. Se  $C$  é livre, então a **sequência cinde**.*

**Exemplo .10. (Sequência exata que não cinde)** Dado  $m \in \mathbb{N}$ , considere a sequência  $0 \rightarrow m\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ , em que  $i$  é a inclusão e  $\pi$  é a projeção tal que  $\pi(n) = n \pmod{m}$ . Claramente  $i$  é injetora e  $\pi$  é sobrejetora. Além disso, também é óbvio que  $\text{Im} i = \ker \pi$ . Logo, de fato a sequência é exata. Mas repare que qualquer homomorfismo sobrejetor  $p$  de  $\mathbb{Z}$  para  $m\mathbb{Z}$  deveria mandar 1 em  $m$ , e portanto  $p \circ i \neq \text{id}_{m\mathbb{Z}}$ .

**Proposição .11.** *Considere um diagrama comutativo com  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  isomorfismos. Se a linha de cima é exata, então a linha de baixo também o é.*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

**Definição .12.** Dado um  $R$ -módulo  $A$ , o  $R$ -módulo  $\text{Hom}(A, R)$  formado pelo conjunto de todos os  $R$  mapas lineares de  $A$  em  $R$  é denominado de **dual** de  $A$ . Dados dois  $R$ -módulos  $A$  e  $B$  e um  $R$  mapa linear  $f : A \rightarrow B$ , definimos o mapa  $R$ -linear

$$f^T : \text{Hom}(B, R) \rightarrow \text{Hom}(A, R)$$

por  $f^T(\varphi) = \varphi \circ f$  para qualquer  $\varphi \in \text{Hom}(B, R)$ . O mapa  $f^T$  é denominado de mapa linear dual de  $f$  e também é denotado por  $\text{Hom}(f, R)$  ou  $\text{Hom}(f, \text{id}_R)$ .

Em outras palavras, o dual de  $f$  é o mapa linear que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \\ & \searrow f^T(\varphi) & \downarrow \varphi \\ & & A \end{array}$$

Vale que, se  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  são mapas lineares entre  $R$ -módulos, então

1.  $(g \circ f)^T = f^T \circ g^T$ ;
2.  $\text{id}_A^T = \text{id}_{\text{Hom}(A, R)}$ ;

**Proposição .13.** *Seja  $g : B \rightarrow C$  um mapa linear entre  $R$ -módulos.*

1. *Se  $g$  é um isomorfismo, então  $g^T$  também o é;*
2. *Se  $g$  é zero, então  $g^T$  também o é;*
3. *Se a sequência  $B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  é exata, então a sequência  $0 \rightarrow \text{Hom}(C, R) \xrightarrow{g^T} \text{Hom}(B, R)$  também o é;*

*Se a sequência de  $R$ -módulos  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  é exata, então a sequência  $0 \rightarrow \text{Hom}(C, R) \xrightarrow{g^T} \text{Hom}(B, R) \xrightarrow{f^T} \text{Hom}(A, R)$  também o é.*

*Mais ainda, se  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  cinde, então  $0 \rightarrow \text{Hom}(C, R) \xrightarrow{g^T} \text{Hom}(B, R) \xrightarrow{f^T} \text{Hom}(A, R) \rightarrow 0$  também cinde.*

Combinando as enunciados das Proposições .13 e .13, podemos mostrar a seguinte proposição que é a única razão pela a qual retomamos toda a construção de sequências exatas.

**Proposição .14.** *Se  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  é uma sequência exata curta e  $C$  é um  $R$ -módulo livre, então  $0 \rightarrow \text{Hom}(C, R) \xrightarrow{g^T} \text{Hom}(B, R) \xrightarrow{f^T} \text{Hom}(A, R) \rightarrow 0$  é uma sequência exata curta que cinde.*

## 1 Hom

**Definição .15.** *Seja  $A$  um  $R$ -módulo. Dado  $B$  um  $R$ -módulo qualquer, considere  $\text{Hom}_R(B, A)$  o  $R$ -módulo de todos os mapas lineares de  $B$  para  $A$  com a operação de composição de funções. Dado  $f : B \rightarrow C$  um mapa linear em  $R$ , definimos  $\text{Hom}_R(f, A) : \text{Hom}_R(C, A) \rightarrow \text{Hom}_R(B, A)$  por  $\text{Hom}_R(f, A)(\varphi) = \varphi \circ f$  para toda  $\varphi \in \text{Hom}_R(C, A)$ .*

O que temos é o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \\ & \searrow & \downarrow \varphi \\ & \text{Hom}_R(f, A)(\varphi) & A \end{array}$$

Vale notar que  $\text{Hom}_R(f, A)$  é contravariante: de fato, temos que

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(g \circ f, A)(\varphi) &= \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = \\ &= \text{Hom}_R(f, A)(\varphi \circ g) = \text{Hom}_R(f, A) \circ (\text{Hom}_R(g, A)(\varphi)) \end{aligned}$$

**Proposição .16.** *Seja  $A$  um  $R$ -módulo fixado e  $g : B \rightarrow C$  um mapa linear entre  $R$ -módulos.*

1. *Se  $g$  é um isomorfismo, então  $\text{Hom}(g, A)$  também o é;*
2. *Se  $g$  é zero, então  $\text{Hom}(g, A)$  também o é;*

3. Se a sequência  $B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  é exata, então a sequência  $0 \rightarrow \text{Hom}(C, A) \xrightarrow{\text{Hom}(g, A)} \text{Hom}(B, A)$  também o é;

**Proposição .17.** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo. Se a sequência de  $R$ -módulos  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  é exata, então a sequência  $0 \rightarrow \text{Hom}(C, M) \xrightarrow{\text{Hom}(g, M)} \text{Hom}(B, M) \xrightarrow{\text{Hom}(f, M)} \text{Hom}(A, M)$  também o é.*

*Mais ainda, se  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  cinde, então  $0 \rightarrow \text{Hom}(C, M) \xrightarrow{\text{Hom}(g, M)} \text{Hom}(B, M) \xrightarrow{\text{Hom}(f, M)} \text{Hom}(A, M) \rightarrow 0$  também cinde.*

Vamos enunciar, porém não demonstrar, um resultado que garante uma equivalência da exatidão da sequência com a exatidão da dual, e não apenas uma das implicações como na Proposição .17.

**Proposição .18.** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo fixado. A sequência de  $R$ -módulos*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

*é exata, se, e somente se, a sequência*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, M) \xrightarrow{\text{Hom}(g, M)} \text{Hom}(B, M) \xrightarrow{\text{Hom}(f, M)} \text{Hom}(A, M)$$

*é exata para todos os  $R$ -módulos  $M$ .*

**Proposição .19.** *Se  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  é uma sequência exata curta e  $C$  é um  $R$ -módulo livre, então  $0 \rightarrow \text{Hom}(C, R) \xrightarrow{\text{Hom}(g, R)} \text{Hom}(B, R) \xrightarrow{\text{Hom}(f, R)} \text{Hom}(A, R) \rightarrow 0$  é uma sequência exata curta que cinde.*

**Definição .20.** Dado um  $R$ -módulo fixado  $A$ , para qualquer  $R$ -módulo  $B$  vamos considerar  $\text{Hom}_R(A, B)$  novamente como o  $R$ -módulo de todos os mapas lineares de  $B$  para  $A$  com a operação de composição de funções. Dados dois  $R$ -módulos  $B$  e  $C$ , para qualquer função  $f : B \rightarrow C$  que seja  $R$ -linear, faça

$$\text{Hom}_R(A, f) : \text{Hom}_R(A, B) \rightarrow \text{Hom}_R(A, C)$$

dado por  $\text{Hom}_R(A, f)(\varphi) = f \circ \varphi$  qualquer que seja  $\varphi \in \text{Hom}_R(A, B)$ .

O que temos, agora, é o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \varphi \downarrow & \searrow \text{Hom}_R(A, f)(\varphi) & \\ B & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Iremos denotar  $\text{Hom}_R(A, f)$  por  $\text{Hom}_R(\text{id}_A, f)$  ou  $\text{Hom}_R(\text{id}, f)$  ou, mais sucintamente, por  $f^*$ . Note que sendo  $f : B \rightarrow C$  e  $g : C \rightarrow D$  dois mapas lineares entre  $R$ -módulos, vale que

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(A, g \circ f)(\varphi) &= (g \circ f) \circ \varphi = g \circ (f \circ \varphi) \\ &= g \circ (\text{Hom}_R(A, f)(\varphi)) = \text{Hom}_R(A, g) \circ (\text{Hom}_R(A, f)(\varphi)) \end{aligned}$$

e portanto  $\text{Hom}_R(A, f)$  é de fato covariante, como prometido. Novamente para simplificar a notação, vamos escrever  $\text{Hom}_R(A, f)$  omitindo o subíndice  $R$ . Dizemos que  $\text{Hom}(M, -)$  é um funtor exato a direita.

**Proposição .21.** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo. Se a sequência de  $R$ -módulos  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  é exata, então a sequência  $0 \rightarrow \text{Hom}(M, A) \xrightarrow{\text{Hom}(M, f)} \text{Hom}(M, B) \xrightarrow{\text{Hom}(M, g)} \text{Hom}(M, C)$  também o é.*

*Mais ainda, se  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  cinde, então  $0 \rightarrow \text{Hom}(M, A) \xrightarrow{\text{Hom}(M, f)} \text{Hom}(M, B) \xrightarrow{\text{Hom}(M, g)} \text{Hom}(M, C) \rightarrow 0$  também cinde.*

**Proposição .22.** *A sequência  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  é exata se, e somente se,*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A) \xrightarrow{\text{Hom}(M, f)} \text{Hom}(M, B) \xrightarrow{\text{Hom}(M, g)} \text{Hom}(M, C)$$

*é exata para todo  $R$ -módulo  $M$ .*

**Proposição .23.** *Se  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  é uma sequência exata curta e  $C$  é um  $R$ -módulo livre, então*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A, R) \xrightarrow{\text{Hom}(M, f)} \text{Hom}(M, B) \xrightarrow{\text{Hom}(M, g)} \text{Hom}(M, C) \rightarrow 0$$

*é uma sequência exata curta que cinde.*

# Homologia e Cohomologia

## 1 Generalidades

**Definição .1.** Um **complexo de cadeia** (também denominado simplesmente de **complexo** ou ainda de **complexo diferencial**) é um  $R$ -módulo  $\mathbb{Z}$ -graduado  $C = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C^p$  munido de um mapa  $R$ -linear  $d : C \rightarrow C$  que satisfaz  $dC^p \subset C^{p-1}$  e  $d \circ d = 0$ . Denotamos a restrição  $d|_{C^p}$  por  $d^p$ .

**Definição .2.** Dado um complexo  $(C, d)$ , definimos os  $R$ -módulos  $\mathbb{Z}$ -graduado

$$B^*(C) = \text{Im} d \quad \text{e} \quad Z^*(C) = \ker d.$$

Mais ainda, definimos também  $B^p(C) = \text{Im} d^{p-1}$  e  $Z^p(C) = \ker d^p$ .

Agora, como  $d \circ d = 0$ , nós temos  $B^*(C) \subset Z^*(C) \subset C$  o que nos garante que há sentido em definir os espaços quocientes  $Z^p(C)/B^p(C)$ .

**Definição .3.** Dado um complexo  $(C, d)$  de  $R$ -módulos, definimos o **espaço de cohomologia**  $H^*(C)$  por

$$H^*(C) := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H^p(C)$$

em que o  $p$ -ésimo grupo de cohomologia  $H^p(C)$  é o espaço quociente

$$H^p(C) = (\ker d \cap C^p) / (\text{Im} d \cap C^p) = \ker d^p / \text{Im} d^{p-1} = Z^p(C) / B^p(C)$$

Elementos de  $C^p$  são denominados de  $p$ -cocadeias ou cocadeias, de  $Z^p(C) = \ker d^p$  são denominados de  $p$ -cociclos ou cociclos e, por fim, de  $B^p(C) = \text{Im} d^{p-1}$  são denominados de  $p$ -cofronteiras,  $p$ -cobordos ou de cofronteiras.

Dado um cociclo  $a \in Z^p(C)$ , a sua classe de cohomologia  $a + \text{Im} d^{p-1}$  será denotada por  $[a]$ .

Diremos que um complexo  $C$  é **acíclico** se a sua cohomologia é trivial, i.e., se  $H^p(C) = 0$  para todo  $p \in \mathbb{Z}$ .

Geralmente, quando estamos interessados em calcular espaços de cohomologia consideramos complexos de cadeia tais que  $C^p = 0$  para todo  $p < 0$ , i.e., olhamos para objetos da forma:

$$0 \xrightarrow{d^{-1}} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \dots \rightarrow C^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} C^p \xrightarrow{d^p} C^{p+1} \xrightarrow{d^{p+1}} C^{p+2} \rightarrow \dots$$

e usualmente escrevemos  $\delta^p$  no lugar de  $d^p$ . Já quando temos interesse de calcular espaços de homologia, queremos observar a outra parte da sequência, i.e., consideramos complexos de cadeia

com  $C^p = 0$  para todo  $p > 0$  e nesse caso temos um conteúdo da forma

$$\dots \rightarrow C^{-(p+1)} \xrightarrow{d^{-(p+1)}} C^{-p} \xrightarrow{d^{-p}} C^{-(p-1)} \xrightarrow{d^{-(p-1)}} C^{-(p-2)} \rightarrow \dots \rightarrow C^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} C^0 \xrightarrow{d^0} 0$$

fazendo uma mudança na notação e trocando o índice negativo do sobrescrito  $-p$  por um índice subscrito positivo  $p$ , temos o diagrama

$$\dots \rightarrow C_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} C_p \xrightarrow{d_p} C_{p-1} \xrightarrow{d_{p-1}} C_{p-2} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

De maneira equivalente, poderíamos escrever:

$$0 \xleftarrow{d_0} C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_{p-1}} C_{p-1} \xleftarrow{d_p} C_p \xleftarrow{d_{p+1}} C_{p+1} \xleftarrow{d_{p+2}} \dots$$

Quando estamos nesse último caso, também vamos denotar o espaço  $H^{-p}(C)$  por  $H_p(C)$  (sendo  $p \geq 0$ ) e chamaremos  $H_p(C)$  de  $p$ -ésimo grupo de homologia. É comum nesse casos usarmos a notação  $\partial_p$  no lugar de  $d^p$ .

Note que  $H_p(C) = \ker d_p / \text{Im} d_{p+1}$  e, de maneira similar se escrevermos  $Z_p(C) = \ker d_p$  e  $B_p(C) = \text{Im} d_{p+1}$  e assim  $H^p(C) = Z_p(C) / B_p(C)$ . Ressaltamos a escolha da palavra similar e não idêntica, pois anteriormente definimos  $B^p = \text{Im} d^{p-1}$ . Elementos de  $C_p$  são denominados de **cadeias**, de  $Z_p(C)$  são denominados de **ciclos** e de  $B_p(C)$  são denominados de **bordos**.

**Definição .4.** Sejam  $(C, d_C)$  e  $(D, d_D)$  dois complexos de cadeias. Um **mapa de cadeias**  $f : C \rightarrow D$  é uma família  $f = (f^p)$  de mapas  $R$ -lineares  $f : C^p \rightarrow D^p$  tais que  $d_D \circ f^p = f^{p+1} \circ d_C$  para todo  $p \in \mathbb{Z}$ . Isto é, é um conjunto de homomorfismos que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d_C} & C^{p-1} & \xrightarrow{d_C} & C^p & \xrightarrow{d_C} & C^{p+1} & \xrightarrow{d_C} & C^{p+2} & \xrightarrow{d_C} & \dots \\ & & \downarrow f^{p-1} & & \downarrow f^p & & \downarrow f^{p+1} & & \downarrow f^{p+2} & & \\ \dots & \xrightarrow{d_D} & D^{p-1} & \xrightarrow{d_D} & D^p & \xrightarrow{d_D} & D^{p+1} & \xrightarrow{d_D} & D^{p+2} & \xrightarrow{d_D} & \dots \end{array}$$

O mapa de cadeia  $f : C \rightarrow D$  induz o mapa  $f^* : H^*(C) \rightarrow H^*(D)$ , i.e., cada mapa  $f^p : C^p \rightarrow D^p$  induz um mapa  $(f^p)^* : H^p(C) \rightarrow H^p(D)$ .

**Proposição .5.** Dado um mapa de cadeias  $f : C \rightarrow D$  vale que, para qualquer  $p \in \mathbb{Z}$ , a função  $(f^p)^* : H^p(C) \rightarrow H^p(D)$  dada por  $[a] \mapsto [f^p(a)]$  para qualquer  $a \in Z^p(C)$  é um homomorfismo.

Logo,  $f : C \rightarrow D$  induz um homomorfismo  $f^* : H^*(C) \rightarrow H^*(D)$ .

Assim, sabemos que um mapa de cadeia induz um homomorfismo nos espaços de cohomologia. A pergunta agora é: dados dois mapas de cadeias  $f : C \rightarrow D$  e  $g : C \rightarrow D$ , que condição seria capaz de garantir que  $f^* = g^*$ ?

**Definição .6.** Dados dois mapas de cadeia  $f : C \rightarrow D$  e  $g : C \rightarrow D$ , uma **homotopia de cadeias** entre  $f$  e  $g$  é uma família  $s = (s^p)_{p \in \mathbb{Z}}$  de mapas  $R$ -lineares  $s^p : C^p \rightarrow D^{p-1}$  tais que  $d_D \circ s^p + s^{p+1} \circ d_C = f^p - g^p$  qualquer que seja  $p \in \mathbb{Z}$ . Isto é,  $s$  faz o seguinte diagrama ser comutativo, em que  $h = f - g$ :



$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^p(X) & \xrightarrow{f^*} & H^p(Y) & \xrightarrow{g^*} & H^p(Z) & \xrightarrow{\delta^p} & H^{p+1}(X) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \alpha^* & & \downarrow \beta^* & & \downarrow \gamma^* & & \downarrow \alpha^* & & \\
 \dots & \longrightarrow & H^p(X') & \xrightarrow{(f')^*} & H^p(Y') & \xrightarrow{(g')^*} & H^p(Z') & \xrightarrow{(\delta')^p} & H^{p+1}(X') & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Considere agora dois complexos  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$ . Podemos, sem maiores problemas, definir o que seria a “soma direta” desses dois complexos. Para isso, definimos  $X \oplus Y$  como o complexo que consiste dos módulos  $X^p \oplus Y^p$  com os mapas

$$X^p \oplus Y^p \xrightarrow{d_X^p \oplus d_Y^p} X^{p+1} \oplus Y^{p+1}$$

definidos de maneira que  $(d_X^p \oplus d_Y^p)(x + y) = d_X^p(x) + d_Y^p(y)$  quaisquer que sejam  $x \in X^p$  e  $y \in Y^p$ . Claramente,  $(d_X^{p+1} \oplus d_Y^{p+1}) \circ (d_X^p \oplus d_Y^p) = 0$ . Como vimos antes, sem grandes surpresas segue que:

**Proposição .12.** *Para quaisquer dois complexos  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$ , temos isomorfismos*

$$H^p(X \oplus Y) \cong H^p(X) \oplus H^p(Y)$$

qualquer que seja  $p \in \mathbb{Z}$ .

**Proposição .13.** *Considere o seguinte diagrama comutativo em que as linhas são exatas:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \xrightarrow{f_3} & D & \xrightarrow{f_4} & E & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow \alpha_5 & & \\
 \dots & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'_1} & B' & \xrightarrow{f'_2} & C' & \xrightarrow{f'_3} & D' & \xrightarrow{f'_4} & E' & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

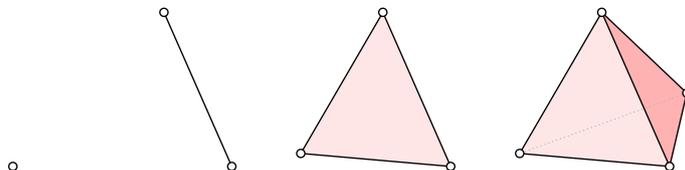
se  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$  são isomorfismos, então  $\alpha_3$  também é um isomorfismo.

## 2 Homologia Singular e Simplicial

**Definição .14.** Um  $n$ -simplexo é o menor conjunto convexo de  $\mathbb{R}^m$  contendo  $n + 1$  pontos  $v_0, \dots, v_n$  que não estão no mesmo hiperplano de dimensão menor que  $n$ , entendendo por hiperplano um conjunto de soluções de um sistema linear de  $k$  variáveis da forma  $a^T x = b$ , com  $1 \leq k \leq n$ . De maneira equivalente, exigimos que  $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$  seja linearmente independente. Os pontos  $v_i$  são chamados de **vértices** do  $n$ -simplexo, que é denotado por  $[v_0, \dots, v_n]$ .

Por exemplo, temos o  $n$ -simplexo canônico descrito por

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i t_i = 1 \text{ e } t_i \geq 0 \text{ para todo } i \right\}.$$



Isto é, este é o  $n$ -simplexo dado pelos vetores da base canônica do espaço  $n$  dimensional. Note que este conjunto, possui, dentre outros vetores, os vetores da base canônica do  $\mathbb{R}^n$ .

Vale ressaltar a importância da ordenação na notação dos  $n$ -simplexos: ela determina a orientação entre os vértices, fazendo a aresta  $[v_i, v_j]$  ser orientada de  $v_i$  em direção à  $v_j$  sempre que tivermos  $i < j$  na ordenação. Assim, determinamos um homeomorfismo canônico linear entre  $\Delta^n$  e qualquer  $[v_0, \dots, v_n]$  dado por  $(v_0, \dots, v_n) \mapsto \sum_i t_i v_i$ , que preserva a ordem. De fato, o que fazemos é a combinação convexa dos vetores de  $[v_0, \dots, v_n]$ . As coordenadas  $t_i$  são chamadas de coordenadas baricêntricas de do ponto  $\sum_i t_i v_i$  em  $[v_0, \dots, v_n]$ .

**Definição .15.** Dado um  $n$ -simplexo  $[v_0, \dots, v_n]$ , a remoção de cada um dos  $n + 1$  vértices dele faz com que o conjunto remanescente de  $n$  vértices gere um  $n - 1$ -simplexo, chamado uma **face** de  $[v_0, \dots, v_n]$ , preservando a orientação dos vértices como no  $n$ -simplexo original (no sentido de respeitar a ordenação).

A próxima definição generaliza a ideia de fronteira (ou bordo) de um  $n$ -simplexo.

**Definição .16.** A união de todas as faces de  $\Delta^n$  é a **fronteira** de  $\Delta^n$  denotada por  $\partial\Delta^n$ . O simplexo aberto  $\overset{\circ}{\Delta}^n := \Delta^n - \partial\Delta^n$  é chamado de **interior** de  $\Delta^n$ .

Podemos agora entender como essas estruturas servem de “tijolos” para a construção de espaços mais complexos (harmoniosamente chamados de  $\Delta$ -complexos) a partir de suas colagens.

**Definição .17.** Uma estrutura  $\Delta$ -complexa em um espaço topológico  $X$  é uma coleção de mapas  $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$  com  $n$  dependendo do índice  $\alpha$  tal que:

1. A restrição  $\sigma_\alpha|_{\overset{\circ}{\Delta}^n}$  é injetora, e cada ponto de  $X$  é a imagem de exatamente uma restrição  $\sigma_\alpha|_{\overset{\circ}{\Delta}^n}$
2. Cada restrição  $\sigma_\alpha$  numa face de  $\Delta^n$  é um dos mapas  $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \rightarrow X$  (isto é, identificamos as faces de  $\Delta^n$  com  $\Delta^{n-1}$  pelo homeomorfismo linear canônico entre elas que preserva o ordenamento dos vértices).
3. Um conjunto  $A \subset X$  é aberto se, e somente se,  $\sigma_\alpha^{-1}(A)$  é aberto em  $\Delta^n$  para cada  $\sigma_\alpha$ .

## 2.1 Homologia Simplicial

**Definição .18.** Seja  $K$  um  $\Delta$ -complexo.

Seja  $C_p(K)$  todas as combinações lineares com coeficientes em  $\mathbb{Z}$  de  $p$ -simplexos  $[\alpha_0, \dots, \alpha_p]$  orientados em  $K$ , e  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  tal que

$$\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i [\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p]$$

em que  $[\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p]$  é o  $(p-1)$ -simplexo resultante da remoção do vértice  $\alpha_i$  do  $p$ -simplexos  $[\alpha_0, \dots, \alpha_p]$ . Definimos  $H_p(K) = \ker \partial_p / \text{Im} \partial_{p+1}$  o  $p$ -ésimo grupo de homologia simplicial de  $K$ .

## 2.2 Homologia Singular

**Definição .19.** Um  $n$ -simplexo singular num espaço  $X$  é um mapa  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  contínuo.

**Definição .20.** Seja  $C_n(X) = S_n(X, \mathbb{Z})$  o grupo abeliano com base o conjunto de  $n$ -simplexos singulares em  $X$ . Elementos de  $C_n(X)$ , denominados de  $n$ -cadeias singulares, são somas finitas formais  $\sum_i n_i \sigma_i$  para  $n_i \in \mathbb{Z}$  e  $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X$ .

Um  $\Delta^p$ -simplexo tem  $p + 1$  faces sendo a  $i$ -ésima delas um  $(p - 1)$ -simplexo singular  $\sigma \circ \phi_i^{p-1} : \Delta^{p-1} \rightarrow X$  definida pela função  $\phi_i^{p-1} : \Delta^{p-1} \rightarrow \Delta^p$ .

Para esse complexo  $d_p$  será denotado por  $\partial_p$  e, dado um  $p$ -simplexo  $\sigma$ ,  $\partial\sigma$  é definido como a  $(p - 1)$ -cadeia singular dada por

$$\partial\sigma = \sigma \circ \phi_0^{p-1} - \sigma \circ \phi_1^{p-1} + \dots + (-1)^p \sigma \circ \phi_p^{p-1}$$

e direto que  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ .

Assim, os grupos abelianos  $S_p(X; \mathbb{Z})$  junto com os mapas de fronteira  $\partial_p$  formam um complexo de cadeia denotado por  $S_*(X; \mathbb{Z})$  denominado de complexo de cadeia singular de  $X$ .

**Definição .21.** O quociente

$$H_p(X; \mathbb{Z}) = H_p(S_*(X; \mathbb{Z})) = \ker \partial_p / \text{Im} \partial_{p+1}$$

também denotado por  $H_p(X)$  é denominado de  $p$ -ésimo grupo de homologia singular de  $X$ .

Na homologia singular, uma função contínua  $f : X \rightarrow Y$  entre dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$  induz um mapa de cadeia  $f_{\#} : S_*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow S_*(Y; \mathbb{Z})$  entre dois complexos de cadeia simpliciais  $S_*(X; \mathbb{Z})$  e  $S_*(Y; \mathbb{Z})$  associados, respectivamente, a  $X$  e  $Y$ . Esse mapa implica num homomorfismo entre as homologias denotado por  $f_{*,p} : H_p(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_p(Y; \mathbb{Z})$ . Assim, o mapa  $X \mapsto (H_p(X; \mathbb{Z}))_{p \in \mathbb{N}}$  é um functor da categoria dos espaços topológicos com funções contínuas para a categoria dos grupos abelianos com homomorfismos.

Ainda mais, se  $f : X \rightarrow Y$  for um homeomorfismo, então  $f_{*,p} : H_p(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_p(Y; \mathbb{Z})$  é um isomorfismo, isto é, grupos de homologia singulares são invariantes topológicos.

## 3 Homologia Relativa

Dado um espaço  $X$  e um subespaço  $A \subset X$ , seja  $C_n(X, A)$  o grupo quociente  $C_n(X)/C_n(A)$ . Logo, cadeias em  $A$  são triviais em  $C_n(X, A)$ . Como a aplicação bordo  $\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  leva  $C_n(A)$  em  $C_{n-1}(A)$ , ele induz uma aplicação bordo no quociente  $\partial : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$ . Deixando  $n$  variar, temos uma sequência de mapeamento de fronteiras  $\dots \rightarrow C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \rightarrow \dots$

Ainda temos que  $\partial^2 = 0$  já que essa relação é válida antes de passarmos ao quociente. De fato, definimos  $\partial(\sigma + C_n(A)) := \partial\sigma + \partial C_n(A)$ , sendo este último o conjunto de todos os bordos de  $C_n(A)$ . Logo, temos um complexo de cadeia, e os grupos de homologia  $\ker \partial / \text{Im} \partial$  desse complexo são definidos como os grupos de **homologia relativa**  $H_n(X, A)$ .

**Proposição .22.** Os grupos de homologia  $H_n(X, A)$  para qualquer par  $(X, A)$  encaixa numa sequência exata longa

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(X, A)$$

Sendo  $i : A \rightarrow X$  a inclusão e  $j$  o mapa quociente que leva  $X$  em  $X/A$ , como no diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i} & C_n(X) & \xrightarrow{j} & C_n(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{j} & C_{n-1}(X, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

que é comutativo pela definição de  $\partial$ .

**Proposição .23.** Se dois mapas  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são homotópicos através de mapas entre os pares  $(X, A)$  e  $(Y, B)$ , então  $f_* = g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$

## 4 Cohomologia Singular

**Definição .24.** Dados um espaço topológico  $X$  e um anel comutativo  $R$  com identidade, vamos definir o grupo de cadeias singulares  $S_p(X; R)$  como  $R$ -módulo livre gerado pelo conjunto  $S_{\Delta^p}(X)$  de  $p$ -simplexos singulares  $\sigma : \Delta^p \rightarrow X$  sempre que  $p \geq 0$  e 0 no caso contrário. Um elemento de  $S_p(X; R)$  é denominado de  $p$ -cadeia.

Lembrando que um  $p$ -simplexo singular é uma aplicação  $\Delta^p \rightarrow X$  em que a única propriedade que pedimos é a continuidade,. Logo, um elemento  $c \in S_p(X; R)$  é expresso como uma combinação linear formal

$$c = \sum_{k=1}^m \lambda_k \sigma_k$$

em que  $\lambda_i \in R$  e  $\sigma_i \in S_{\Delta^p}(X)$  qualquer que seja  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

**Definição .25.** Definimos, quando  $p \geq 1$ , dado qualquer  $p$ -simplexo  $\sigma$  um elemento  $\partial_p \sigma \in S_{p-1}(X; R)$  por

$$\partial_p \sigma = \sigma \circ \phi_0^{p-1} - \sigma \circ \phi_1^{p-1} + \cdots + (-1)^p \sigma \circ \phi_p^{p-1}$$

em que  $\phi_i^{p-1} : \Delta^{p-1} \rightarrow \Delta^p$  é dado por

$$\phi_i^{p-1}(t_0, \dots, t_p) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_p)$$

com  $i \in \{0, \dots, p\}$ . Estendendo  $\partial_p$  para  $S_p(X; R)$  por linearidade, obtemos um homomorfismo  $\partial_p : S_p(X; R) \rightarrow S_{p-1}(X; R)$ .

**Definição .26.** Definimos  $S_*(X; R)$  como a soma direta

$$S_*(X; R) = \bigoplus_{p \geq 0} S_p(X; R)$$

É fácil ver que  $\partial \circ \partial = 0$ . Assim, obtemos o complexo de cadeia de homologia:

$$0 \xleftarrow{\partial_0} S_0(X; R) \xleftarrow{\partial_1} S_1(X; R) \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{\partial_{p-1}} S_{p-1}(X; R) \xleftarrow{\partial_p} S_p(X; R) \xleftarrow{\partial_{p+1}} \dots$$

**Definição .27.** Sendo  $X$  um espaço topológico e  $R$  um anel comutativo, para qualquer  $p \geq 0$  o módulo de homologia singular  $H_p(X; R)$  é definido por

$$H_p(X; R) = \ker \partial_p / \text{Im} \partial_{p+1} = Z_p(X; R) / B_p(X; R)$$

e definimos  $H_p(X; R) = 0$  sempre que  $p < 0$ . Finalmente, também definimos  $H_*(X; R)$  como a soma direta

$$H_*(X; R) = \bigoplus_{p \geq 0} H_p(X; R)$$

e chamamos essa soma de homologia singular de  $X$  com coeficientes em  $R$ .

Agora já estamos preparados para estabelecer definições de objetos que não estamos tão familiarizados.

**Definição .28.** Dado um espaço topológico  $X$  e um anel comutativo  $R$ , para qualquer  $p \geq 0$  definimos os **grupos de cocadeias singulares**  $S^p(X; R)$  como o dual  $\text{Hom}(S_p(X; R), R)$  dos  $R$ -módulos  $S_p(X; R)$ , i.e., o conjunto cujos elementos são mapas  $R$ -lineares de  $S_p(X; R)$  em  $R$ . Os elementos de  $S^p(X; R) = \text{Hom}(S_p(X; R), R)$  são denominados de **cocadeias  $p$ -singulares**. Por fim, definimos  $S^p(X; R) = 0$  quando  $p < 0$ .

Qualquer cocadeia  $p$ -singular  $f : S_{\Delta^p}(X) \rightarrow R$  pode ser calculada numa cadeia  $\alpha = \sum_{i=1}^m \lambda_i \sigma_i$  em que  $\sigma_i$  são  $p$ -simplexos em  $S_{\Delta^p}(X)$ , basta respeitarmos a linearidade e assim:

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f(\sigma_i)$$

Agora, o que falta para definirmos um complexo de cadeia é definir um mapa de cofronteira  $\delta^p : S^p(X; R) \rightarrow S^{p+1}(X; R)$ .

Definimos

$$\delta^p \circ f = f \circ \partial_{p+1} \text{ para toda } f \in S^p(X; R)$$

Claramente, vale que  $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$ . Observamos que complexo de cohomologia é obtido do complexo de homologia quando os espaços e os mapas são dualizados.

**Definição .29.** Definimos a soma direta  $S^*(X; R)$  como

$$S^*(X; R) = \bigcup_{p \geq 0} S^p(X; R)$$

Aproveitemos também para definir formalmente o operador  $\delta^p$ .

**Definição .30.** Dado um espaço topológico  $X$  e um anel comutativo  $R$ , para qualquer  $p \geq 0$  o homomorfismo de cofronteira

$$\delta^p : S^p(X; R) \rightarrow S^{p+1}(X; R)$$

é definido por  $\langle \delta^p f, \alpha \rangle = \langle f, \partial_{p+1} \alpha \rangle$  para qualquer  $p$ -cocadeia singular  $f : S_{\Delta^p}(X) \rightarrow R$  e qualquer  $(p+1)$ -cadeia singular  $\alpha \in S_{p+1}(X; R)$ . De maneira equivalente, temos:

$$\delta^p f = f \circ \partial_{p+1} \quad \text{para toda } f \in S^p(X; R)$$

Obtemos um mapa de cofronteira  $\delta : S^*(X; R) \rightarrow S^*(X; R)$ .

Fixado  $p \geq 0$ , temos que  $\delta^{p+1} \circ \delta^p : S^p(X; R) \rightarrow S^{p+2}(X; R)$  é uma aplicação tal que  $(\delta^{p+1} \circ \delta^p)f = \delta^{p+1}(f \circ \partial_{p+1}) = f \circ \partial_{p+1} \circ \partial_{p+2} = 0$  pela propriedade de  $\partial$ . Isto é, ainda temos esperança em construir um mapa de cadeia. É o que fica registrado na próxima proposição.

**Proposição .31.** *Dado um espaço topológico  $X$  e um anel comutativo  $R$ , o mapa de cofronteira  $\delta : S^*(X; R) \rightarrow S^*(X; R)$  satisfaz a equação*

$$\delta \circ \delta = 0$$

Assim, escrevemos o complexo de cadeia

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} S^0(X; R) \xrightarrow{\delta^0} S^1(X; R) \rightarrow \dots \xrightarrow{\delta^{p-1}} S^p(X; R) \xrightarrow{\delta^p} S^{p+1}(X; R) \xrightarrow{\delta^{p+2}} \dots$$

Também vamos adotar as seguintes notações:  $Z^p(X; R) := \ker \delta^p$  é o espaço dos  $p$ -cociclos singulares e  $B^p(X; R) = \text{Im} \delta^{p-1}$  o espaço das  $p$ -cofronteiras. Pela Proposição .31, vale que  $B^p(X; R)$  é um submódulo de  $Z^p(X; R)$  o que nos leva ao momento central de toda essa discussão que é a definição dos módulos de cohomologia singulares.

**Definição .32.** Dado um espaço topológico  $X$  e um anel comutativo  $R$ , para qualquer  $p \geq 0$  o módulo de cohomologia singular  $H^p(X; R)$  é definido por

$$H^p(X; R) = \ker \delta^p / \text{Im} \delta^{p-1} = Z^p(X; R) / B^p(X; R)$$

E fazemos  $H^p(X; R) = 0$  sempre que  $p < 0$ . Mais ainda, definimos  $H^*(X; R)$  como a soma direta

$$H^*(X; R) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X; R)$$

e chamamos esse objeto de cohomologia singular de  $X$  com coeficientes em  $R$ .

**Teorema .33.** *Seja  $X$  um espaço topológico e seja  $R$  um domínio de ideais principais. Se o grupo de homologia  $H_{p-1}(X; R)$  é um  $R$  módulo livre ou 0, então o grupo de cohomologia  $H^p(X; R)$  é canonicamente isomorfo ao dual  $\text{Hom}_R(H_p(X; R), R)$  de  $H_p(X; R)$ .*

Podemos ir mais longe ainda nas generalizações e definir cohomologia singular usando coeficientes mais gerais ao invés do anel  $R$  como nos apoiamos na Definição .32.

**Definição .34.** Dado um espaço topológico  $X$ , um anel comutativo  $R$  e um  $R$ -módulo  $M$ , para qualquer  $p \geq 0$  o grupo singular de cocadeias  $S^p(X; M)$  é o  $R$ -módulo  $\text{Hom}_R(S_p(X; R), M)$  de mapas lineares em  $R$  de  $S_p(X; R)$  em  $M$ . E fazemos  $S^p(X; M) = 0$  caso  $p < 0$ .

Analogamente ao que fizemos anteriormente, como  $S_p(X; R)$  é o  $R$ -módulo livre gerado por  $S_{\Delta^p}(X)$  de  $p$ -simplexos singulares, podemos ver  $S^p(X; M)$  como o conjunto de funções  $f : S_{\Delta^p}(X) \rightarrow M$ , que também é um  $R$ -módulo.

**Definição .35.** Dado um espaço topológico  $X$ , um anel comutativo  $R$  e um  $R$ -módulo  $M$ , para cada  $p \geq 0$  o módulo singular de cohomologia  $H^p(X; M)$  é definido por

$$H^p(X; M) = \ker \delta^p / \text{Im} \delta^{p-1} = Z^p(X; M) / B^p(X; M)$$

e fazemos  $H^p(X; M) = 0$  quando  $p < 0$ . Por fim, definimos  $H^*(X; M)$  como a soma direta

$$H^*(X; M) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X; M)$$

e chamamos esse objeto de cohomologia singular em  $X$  com coeficientes em  $M$ .

**Proposição .36.** Se  $X$  e  $Y$  são dois espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua entre eles, então existem homomorfismos  $H_p(f) : H_p(X; R) \rightarrow H_p(Y; R)$  qualquer que seja  $p \geq 0$ .

**Proposição .37.** Dados dois mapas contínuos  $f, g : X \rightarrow Y$  (em que  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos), se  $f$  e  $g$  são homotópicas e  $H_p(f), H_p(g) : H_p(X; R) \rightarrow H_p(Y; R)$  são os homomorfismos induzidos, então  $H_p(f) = H_p(g)$  qualquer que seja  $p \geq 0$ .

Como consequência, se  $X$  e  $Y$  são homotopicamente equivalentes então os grupos de homologia  $H_p(X; R)$  e  $H_p(Y; R)$  são isomorfos para todo  $p \geq 0$ .

**Proposição .38.** Se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos e se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua entre eles, então existem homomorfismos  $H^p(f) : H^p(Y; M) \rightarrow H^p(X; M)$  para todo  $p \geq 0$ .

O mapa  $H^p(f) : H^p(Y; M) \rightarrow H^p(X; M)$  também é denotado por  $f^{*p} : H^p(Y; M) \rightarrow H^p(X; M)$ . Assim sendo, também vale que:

**Proposição .39.** Dados dois mapas contínuos  $f, g : X \rightarrow Y$  (em que  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos), se  $f$  e  $g$  são homotópicas e  $H^p(f), H^p(g) : H^p(Y; M) \rightarrow H^p(X; M)$  são os homomorfismos induzidos, então  $H^p(f) = H^p(g)$  para todo  $p \geq 0$ .

Como consequência, se  $X$  e  $Y$  são homotopicamente equivalentes então os grupos de cohomologia  $H^p(X; R)$  e  $H^p(Y; R)$  são isomorfos para todo  $p \geq 0$ .

**Teorema .40. (Mayer-Vietoris na homologia singular)** Dado um espaço topológico  $X$ , para quaisquer dois subconjuntos  $A, B$  de  $X$  tais que  $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ , existe uma sequência exata longa nos grupos de homologia

$$\rightarrow H_p(A \cap B; R) \xrightarrow{\varphi_*} H_p(A; R) \oplus H_p(B; R) \xrightarrow{\psi_*} H_p(X; R) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A \cap B; R) \rightarrow$$

em que os mapas  $\varphi$  e  $\psi$  são definidos por

$$\varphi_*(c) = (i_*(c), -j_*(c)) \quad e \quad \psi_*(a, b) = k_*(a) + l_*(b)$$

em que  $i, j, k$  e  $l$  são as inclusões mostradas no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{i} & A \\ \downarrow j & & \downarrow k \\ B & \xrightarrow{l} & X \end{array}$$

Se  $A \cap B = \emptyset$ , uma seqüência similar existe na homologia reduzida.

**Teorema .41. (Mayer-Vietoris na cohomologia singular)** Dado um espaço topológico  $X$ , para quaisquer dois subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $X$  tais que  $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ , existe uma seqüência exata longa na cohomologia

$$\dots \rightarrow H^p(X; R) \rightarrow H^p(A; R) \oplus H^p(B; R) \rightarrow H^p(A \cap B; R) \rightarrow H^{p+1}(X; R) \rightarrow \dots$$

Se  $A \cap B = \emptyset$ , existe uma seqüência similar na cohomologia reduzida.

## 5 Cohomologia Relativa

Aqui fixaremos  $R$  um anel comutativo qualquer com unidade 1 e  $M$  um  $R$ -módulo qualquer.

Temos que grupos de cohomologia singular reduzida  $\tilde{H}_p(X; M)$  são definidos dualizando o complexo de cadeia aumentado

$$0 \leftarrow R \xleftarrow{\epsilon} S_0(X; R) \xleftarrow{\partial_1} S_1(X; R) \leftarrow \dots \xleftarrow{\partial_{p-1}} S_{p-1}(X; R) \xleftarrow{\partial_p} S_p(X; R) \xleftarrow{\partial_{p+1}} \dots$$

aplicando  $\text{Hom}_R(-, M)$ . Temos que

$$\tilde{H}^0(X; M) \cong \text{Hom}_R(\tilde{H}_0(X; R), M)$$

$$\tilde{H}^p(X; M) = H^p(X; M) \quad \forall p \geq 1$$

Mais que isso, ainda podemos mostrar que  $H^0(X; M) \cong \tilde{H}^0(X; M) \oplus M$ .

Mas, agora, queremos obter os grupos de cohomologia reduzida. Para isso, vamos dualizar o complexo de cadeia de homologias relativas

$$0 \xleftarrow{\partial_0} S_0(X, A; R) \xleftarrow{\partial_1} S_1(X, A; R) \leftarrow \dots \xleftarrow{\partial_{p-1}} S_{p-1}(X, A; R) \xleftarrow{\partial_p} S_p(X, A; R) \xleftarrow{\partial_{p+1}} \dots$$

aplicando o operador  $\text{Hom}_R(-, M)$ , em que  $S_p(X, A; R) = S_p(X, R)/S_p(A, R)$ . Assim, obtemos o complexo de cadeia:

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} S^0(X, A; M) \xrightarrow{\delta^0} S^1(X, A; M) \rightarrow \dots \xrightarrow{\delta^{p-1}} S^p(X, A; M) \xrightarrow{\delta^p} S^{p+1}(X, A; M) \xrightarrow{\delta^{p+1}} \dots$$

em que  $S^p(X, A; M) = \text{Hom}_R(S_p(X, A; R), M)$  e  $\delta^p = \text{Hom}_R(\partial_{p+1}, M)$  para todo  $p \geq 0$  sendo  $\delta^{-1}$  o mapa 0. Explicitamente,

$$\delta^p(f) = f \circ \partial_{p+1} \quad \text{para toda } f \in S^p(X, A; M)$$

i.e., mais transparente ainda, temos  $\delta^p(f)(\sigma) = f(\partial_{p+1}(\sigma))$  qualquer que seja  $f$  em

$$S^p(X, A; M) = \text{Hom}_R(S_p(X, A; M))$$

e qualquer  $\sigma \in S_{p+1}(X, A; R)$ .

Agora, um leitor mais inventivo poderia reparar que  $S^p(X, A; M) = \text{Hom}_R(S_p(X; R)/S_p(A; R), M)$  é isomorfo ao submódulo de  $S^p(X; M) = \text{Hom}_R(S_p(X; R), M)$  que consiste de todos os mapas lineares com valores em  $M$  definidos nos simplexos singulares  $S_p(X; R)$  que são levados a zero nos simplexos singulares de  $S_p(A; R)$ . Consequentemente, o mapa de cofronteira  $\delta^p : S^p(X, A; M) \rightarrow S^{p+1}(X, A; M)$  é a restrição de  $\delta_X^p : S^p(X; M) \rightarrow S^{p+1}(X; M)$  a  $S^p(X, A; M)$  em que  $\delta_X^p$  é o mapa de cofronteira da cohomologia absoluta.

Partindo agora para a definição que mais importa, temos:

**Definição .42.** Dado um par de espaços  $(X, A)$ , os grupos de cohomologia singulares relativos  $H^p(X, A; M)$  de  $(X, A)$  têm origem do complexo de cadeia

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} S^0(X, A; M) \xrightarrow{\delta^0} S^1(X, A; M) \rightarrow \dots \xrightarrow{\delta^{p-1}} S^p(X, A; M) \xrightarrow{\delta^p} S^{p+1}(X, A; M) \xrightarrow{\delta^{p+1}} \dots$$

e são dados por

$$H^p(X, A; M) = \ker \delta^p / \text{Im} \delta^{p-1} \quad \text{sempre que } p \geq 0$$

**Proposição .43.** Se  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  são pares de espaços e se  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é um mapa contínuo entre eles, então existem homomorfismos  $H_p(f) : H_p(X, A; R) \rightarrow H_p(Y, B; R)$  para todo  $p \geq 0$ .

**Proposição .44.** Dados dois mapas contínuos  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , se  $f$  e  $g$  são homotópicas e  $H_p(f), H_p(g) : H_p(X, A; R) \rightarrow H_p(Y, B; R)$  são os homomorfismos induzidos, então  $H_p(f) = H_p(g)$  para qualquer  $p \geq 0$ .

Como consequência desse fato, se  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  são homotopicamente equivalentes então os grupos de homologia relativos  $H_p(X, A; R)$  e  $H_p(Y, B; R)$  são isomorfos para todo  $p \geq 0$ .

**Proposição .45.** Se  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  são pares de espaços e se  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é um mapa contínuo entre eles, então existem homomorfismos  $H^p(f) : H^p(Y, B; M) \rightarrow H^p(X, A; M)$  para todo  $p \geq 0$ .

O mapa  $H^p(f) : H^p(Y, B; M) \rightarrow H^p(X, A; M)$  será denotado por  $f^{*p} : H^p(Y, B; M) \rightarrow H^p(X, A; M)$ .

**Proposição .46.** Dados dois mapas contínuos  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , se  $f$  e  $g$  são homotópicas e  $H^p(f), H^p(g) : H^p(Y, B; M) \rightarrow H^p(X, A; M)$  são os homomorfismos induzidos, então  $H^p(f) = H^p(g)$  para qualquer  $p \geq 0$ .

Como consequência desse fato, se  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  são homotopicamente equivalentes então os grupos de homologia relativos  $H^p(X, A; M)$  e  $H^p(Y, B; M)$  são isomorfos para todo  $p \geq 0$ .

**Teorema .47. (Zigue-zague para cohomologia)** Para qualquer par  $(X, A)$  de espaços, temos uma seqüência exata longa de cohomologias que têm a forma:

$$\dots \rightarrow H^{p-1}(A; M) \xrightarrow{\delta_{p-1}^*} H^p(X, A; M) \xrightarrow{(j^T)^*} H^p(X; M) \xrightarrow{(i^T)^*} H^p(A; M) \xrightarrow{\delta_p^*}$$

$$\xrightarrow{\delta_p^*} H^{p+1}(X, A; M) \xrightarrow{(j^T)^*} H^{p+1}(X; M) \xrightarrow{(i^T)^*} H^{p+1}(A; M) \xrightarrow{\delta_{p+1}^*} H^{p+2}(X, A; M) \rightarrow \dots$$

# Espaço de Funções

Os seguintes espaços de funções são utilizados no enunciado do Teorema de Existência Unicidade para SDE. Para maiores detalhes veja (Arnold, 1995).

**Definição .1.** Seja  $k \in \mathbb{Z}^+$  e  $0 \leq \delta \leq 1$ . Seja  $C^{k,\delta}$  o **espaço de Fréchet** das funções  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  que são  $k$  vezes continuamente diferenciáveis e (para  $\delta > 0$ ) cujas derivadas são localmente  $\delta$ -**Hölder contínuas** (em particular, para  $\delta = 1$  localmente Lipschitz contínua), i.e., dados  $x \in \mathbb{R}^d$  e alguma vizinhança de  $x$ , vale que para todo  $y \in \mathbb{R}^d$  nessa vizinhança, existe uma constante real  $C$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|^\delta$$

com seminormas

$$\|f\|_{k,0;K} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|$$

$$\|f\|_{k,\delta;K} := \|f\|_{k,0;K} + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x,y \in K, x \neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x - y|^\delta}, \quad 0 < \delta \leq 1$$

em que  $K$  é um subconjunto compacto convexo de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in (\mathbb{Z}^+)^d$  é um multi-índice,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$  e

$$D^\alpha f(x) = D_x^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_d)^{\alpha_d}} f(x)$$

**Definição .2.** Seja  $k \in \mathbb{Z}^+$  e  $0 \leq \delta \leq 1$ . Seja  $C_b^{k,\delta}$  o espaço de Bannach das funções  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  que estão em  $C^{k,\delta}$  e para as quais a norma

$$\|f\|_{k,0} := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{1 + |x|} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D^\alpha f(x)|$$

$$\|f\|_{k,\delta} := \|f\|_{k,0} + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x - y|^\delta}, \quad 0 < \delta \leq 1$$

é finita.

**Definição .3.** Seja  $k \in \mathbb{Z}^+$  e  $0 \leq \delta \leq 1$ . Seja  $L_{loc}(\mathbb{R}, C_b^{k,\delta})$  o conjunto das funções mensuráveis  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  para as quais valem as seguintes condições:

1.  $f(t, \cdot) \in C_b^{k,\delta}$  para cada  $t \in \mathbb{R}$  (ou para Lebesgue quase todo  $t$ )
2. Para todo compacto  $K \subset \mathbb{R}^d$  e todo intervalo limitado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\int_a^b \|f(t, \cdot)\|_{k,\delta;K} dt < \infty$$

**Definição .4.** Seja  $k \in \mathbb{Z}^+$  e  $0 \leq \delta \leq 1$ ,  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  e seja  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ . Dizemos que  $f \in C^{0;k,\delta}$  se valem as seguintes condições:

1. Para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(t, \cdot) \in C^{k,\delta}$ ;
2. No caso  $k \geq 1$ , as derivadas  $D_x^\alpha f(t, x)$  são contínuas com respeito a  $(t, x)$  para todo  $1 \leq |\alpha| \leq k$ ;
3. No caso  $\delta > 0$ , para  $|\alpha| = k$ , as derivadas são localmente  $\delta$ -Hölder contínuas (para  $\delta = 1$  temos o caso Lipschitz contínuas) com respeito a  $x$ .

# Códigos

Programa que calcula o Índice de Conley para mapas em  $[0,1]$

---

```
1 f[x_] := Piecewise[{{2 x, x < 1/2}, {2 (1 - x), x >= 1/2}}];
2 Programa para cálculo de Conley para órbita
3 IndiceConley[k_, m_] := Block[{n, a, b, p, q, r, s, Con},
4 NotebookFind[SelectedNotebook[], "Print", All, CellStyle];
5 NotebookDelete[];
6 g[x_] := Nest[f, x, m];
7 Sol = NSolve[Nest[g, x, k] == x && 0 <= x && x <= 1, x];
8 p = Table[p0 = Sol[[a]], {a, 1, 2^k}];
9 q = Table[Table[Nest[g, x /. p[[b]], n], {n, 0, k - 1}], {b, 1, Length[p]};
10 r = Table[CountDistinct[DeleteDuplicatesBy[q, Sort][[i]],
11 {i, 1, Length@DeleteDuplicatesBy[q, Sort]}];
12 s = Extract[DeleteDuplicatesBy[q, Sort], Position[r, k]];
13
14 Conley[t_] := Block[{},
15 matriz = DiagonalMatrix[(2^(-m))^*
16 Table[Map[g, s[[i]], {i, 1, Length@s}][[t]];
17 matriz = Prepend[matriz, matriz[[-1]]];
18 matriz = Delete[matriz, -1];
19 Con = Table[Conley[] // MatrixForm, {j, 1, Length@s};
20 Table[Print[ StringForm["A órbita " tem a aplicação pontuada " \n", s[[i]], Con[[i]], {i, 1,
Length@s}; ]
```

---

# Bibliografia

ALLIGOOD, Kathleen T.; SAUER, Tim; YORKE, James A. **Chaos: an introduction to dynamical systems**. [S. l.]: Springer, 1997.

ALUFFI, Paolo. **Algebra: Chapter 0**. Providence: American Mathematical Society, 2009. v. 104.

ANDRES, Jan. Randomization of Sharkovskii-type theorems. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 136, n. 4, p. 1385–1395, 2008.

ARAUJO, Vitor. Random Dynamical Systems. **arXiv preprint math/0608162**, 2006.

ARNOLD, Ludwig. **Random Dynamical Systems**. New York: Springer, 1995.

ARROWSMITH, David K; PLACE, Colin M; PLACE, CH *et al.* **An Introduction to Dynamical Systems**. Cambridge: Cambridge university press, 1990.

BHATTACHARYA, Rabi; MAJUMDAR, Mukul. **Random Dynamical Systems: Theory and Applications**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

CARABALLO, Tomás; HAN, Xiaoying. **Applied Nonautonomous and Random Dynamical Systems: Applied Dynamical Systems**. New York: Springer, 2017.

CARMO, Manfredo Perdigao do. **Geometria Riemanniana**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

CASTAING, Charles; VALADIER, Michel. **Convex Analysis and Measurable Multifunctions**. New York: Springer, 2006. v. 580.

COHEN, Samuel N; ELLIOTT, Robert James. **Stochastic calculus and applications**. [S. l.]: Springer, 2015. v. 2.

CONLEY, Charles C. **Isolated Invariant Sets and the Morse Index**. Providence: American Mathematical Society, 1978.

CRAUEL, Hans. **Random Probability Measures on Polish Spaces**. Boca Raton: CRC press, 2002. v. 11.

CRAUEL, Hans; GUNDLACH, Matthias. **Stochastic Dynamics**. New York: Springer Science & Business Media, 1999.

DEVANEY, Robert L. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1989.

DURRETT, Richard. **Stochastic calculus: a practical introduction**. [*S. l.*]: CRC press, 1996. v. 6.

DURRETT, Rick. Ten Lectures on Particle Systems. *In*: LECTURES on Probability Theory. New York: Springer, 1995. p. 97–201.

FRANKS, John; RICHESON, David. Shift Equivalence and the Conley Index. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 352, n. 7, p. 3305–3322, 2000.

FRANKS, John; RICHESON, David. Shift equivalence and the Conley index. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 352, n. 7, p. 3305–3322, 2000.

FRANKS, John M. **Homology and Dynamical Systems**. Providence: American Mathematical Society, 1982.

HASSELBLATT, Boris; KATOK, Anatole. **Handbook of dynamical systems**. [*S. l.*]: Elsevier, 2002.

HATCHER, Allan. **Algebraic Topology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

HIDA, Takeyuki. Brownian motion. *In*: BROWNIAN motion. [*S. l.*]: Springer, 1980. p. 44–113.

HIRSCH, Morris W; DEVANEY, Robert L; SMALE, Stephen. **Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra**. Cambridge: Academic press, 1974. v. 60.

JOST, Jürgen. **Dynamical Systems: Examples of Complex Behaviour**. New York: Springer Science & Business Media, 2006.

KALLIANPUR, Gopinath; KARANDIKAR, Rajeeva L. **White noise theory of prediction, filtering and smoothing**. [*S. l.*]: CRC Press, 1988. v. 3.

KESTEN, Harry; DURRETT, Rick. **Random Walks, Brownian Motion, and Interacting Particle Systems**. New York: Springer Science & Business Media, 2012. v. 28.

KLÜNGER, Marc. Periodicity and Sharkovsky's theorem for random dynamical systems. **Stochastics and Dynamics**, World Scientific, v. 1, n. 03, p. 299–338, 2001.

LEE, John. **Introduction to Topological Manifolds**. New York: Springer Science & Business Media, 2010. v. 202.

LEE, John M. **Introduction to Smooth Manifolds**. New York: Springer, 2013.

LIU, Zhenxin. Conley Index for Random Dynamical Systems. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 244, n. 7, p. 1603–1628, 2008.

## Bibliografia

- LIU, Zhenxin. The Random Case of Conley's theorem. **Nonlinearity**, IOP Publishing, v. 19, n. 2, p. 277, 2005.
- LORING, W Tu. **An Introduction to Manifolds**. New York: Springer New York, 2008.
- MOLCHANOV, Ilya; MOLCHANOV, Ilya S. **Theory of random sets**. [S. l.]: Springer, 2005. v. 19.
- MROWKA, T. A short proof of the Birkhoff-Smale theorem. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 93, n. 2, p. 377–378, 1985.
- MROZEK, Marian. Leray functor and cohomological Conley index for discrete dynamical systems. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 318, n. 1, p. 149–178, 1990.
- MUNKRES, James R. **Elements of Algebraic Topology**. Boca Raton: CRC Press, 2018.
- ØKSENDAL, Bernt. Stochastic differential equations. *In*: **STOCHASTIC differential equations**. [S. l.]: Springer, 2003. p. 65–84.
- PALIS, J Jr; DE MELO, Welington. **Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction**. New York: Springer Science & Business Media, 2012.
- PERKO, Lawrence. **Differential Equations and Dynamical Systems**. New York: Springer Science & Business Media, 2013. v. 7.
- ROBBIN, Joel W; SALAMON, Dietmar. Dynamical Systems, Shape Theory and the Conley Index. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge University Press, v. 8, 8\*, p. 375–393, 1988.
- SCHEUTZOW, Michael. Comparison of Various Concepts of a Eandom Attractor: A Case Study. **Archiv der Mathematik**, Springer, v. 78, n. 3, p. 233–240, 2002.
- SHUAI, Zhisheng. **Random Dynamical Systems**, 2005.
- SWISHCHUK, Anatoliy; ISLAM, Shafiqul. **Random Dynamical Systems in Finance**. Boca Raton: CRC Press, 2013.
- SZYMCZAK, Andrzej. The Conley Index for Discrete Semidynamical Systems. **Topology and its Applications**, Elsevier, v. 66, n. 3, p. 215–240, 1995.
- TESCHL, Gerald. **Ordinary differential equations and dynamical systems**. Providence: American Mathematical Society, 2004.
- TOM DIECK, Tammo. **Algebraic Topology**. Zurich: European Mathematical Society, 2008. v. 8.

*Bibliografia*

VICK, James W. **Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology**. New York: Springer Science & Business Media, 2012. v. 145.

VILLAPOUCA, Mariana Gesualdi. **A Teoria do Índice de Conley Discreta para Conjuntos Básicos Zero-dimensionais**. 2013. Tese (Doutorado) – IMECC-UNICAMP.

WIGGINS, Stephen. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**. New York: Springer Science & Business Media, 2003. v. 2.

YE, Xiaofeng. **Stochastic Dynamics: Markov Chains, Random Transformations and Applications**. 2018. Tese (Doutorado).

# Índice Remissivo

$C^l$ -topologia, 17

$N$ -valuada, 23

acíclico, 135

$\alpha$ -limite, 8

anel

comutativo, 129

atrator, 8

atração

pull-back, 29

bacia de atração, 8

base, 129

bifurcação, 10

bloco isolante, 55

aleatório, 66

bordos, 136

cadeia

singular, 140

cadeias, 136

cadeias singulares, 140

caminho, 125

ciclo periódico aleatório, 118

ciclo periódico aleatório de período minimal,  
119

ciclos, 136

cinde, 131

cindi, 130

cobordos, 135

cocadeias, 135

cociclo

negativo, 25

positivo, 25

cofronteiras, 135

cohomologia, 135

cokernel, 130

complexo

de cadeia, 135

conjugação topológica, 16

conjunto

aleatório, 27

aberto, 27

compacto, 27

fechado, 27

de saída, 50

invariante, 7

isolado, 46

conjunto invariante

isolado

aleatório, 66

maximal, 44

conjuntos

de Morse, 48

contrátil, 125

decomposição de Morse, 48

$\Delta$ -complexo, 139

$\epsilon$ -cadeia aleatória

da vizinhança relativa, 70

de comprimento  $n$ , 69

equação

de Kolmogorov, 40

Fokker-Planck, 40

equações

diferenciais

estocásticas, 38

- equações diferenciais
  - aleatórias, 35
- equivalência
  - homotópica, 124
- espaço
  - de cohomologia, 135
  - de fase, 5
  - de Fréchet, 148
  - pontuado, 47
    - aplicação, 61
- espaço métrico
  - aleatório, 31
  - mensurável, 23
- espaços
  - pontuados
    - união, 48
- estruturalmente estável, 17
- face, 139
- fluxo, 5
  - invariante, 7
  - local, 10
- fonte, 12
- fronteira, 139
- grupo
  - de homologia, 135
    - simplicial, 139
    - singular, 140
- grupo fundamental, 128
- grupoide fundamental, 128
- hiperbólico, 17
- Hom, 132
- homeomorfismo aleatório, 25
  - determinado por um SDA, 25
- homologia
  - relativa, 140
- homologia singular, 140
- homotopia, 124
  - de cadeias, 136
- homotópicas, 124
- homotópicos com extremos fixos, 125
- Hölder contínuas**, 148
- integral de Itô, 39
- interior, 139
- invariante, 28
  - negativamente, 28
  - positivamente, 28
- inversa
  - homotópica, 124
- linha de fluxo, 5
- mapa
  - hiperbólico, 14, 16, 17
- mapa de cadeias, 136
- modelo
  - de ruído, 23
  - de sistema perturbado pelo ruído, 24
- morfismo
  - de sequências exatas, 137
- movimento Browniano, 38
- multifunção, 27
- métrica
  - aleatória, 31
- módulo, 129
  - a esquerda, 129
  - base, 129
  - dual, 131
  - graduado, 135
  - livre, 129
- nó, 12
- $\omega$ -limite, 8
- par
  - índice, 49
- par - filtração, 56
- par-filtração
  - aleatório, 69
- período
  - minimal aleatório, 118
- ponto
  - crítico, 14
  - de sela, 12
  - estacionário, 6, 11
  - fixo, 6, 11, 17

- estável, 12
- instável, 12
- hiperbólico, 14, 16
- não degenerado, 15
- periódico, 6, 17
  - hiperbólico, 16, 17
- ponto base, 47
- ponto fixo
  - estável, 10
  - instável, 10
- ponto periódico
  - aleatório, 118
- processo
  - de Wiener, 38
- propriedade
  - de cociclo, 24
- recorrente
  - por cadeia, 8
- relação de equivalência, 47
- repulsor, 8
- $\rho$ -pseudo-hiperbolicidade, 18
- ruído branco, 39
- ruído real, 33
- SD, 5
- SDA, 23
- semifluxo, 5
- sequência
  - cindida, 130
  - exata, 129
  - curta, 130
- sequência cinde, 131
- shift
  - equivalentes, 61
  - temporal, 11
- simplesmente conexo, 128
- simplexo, 138
- simplexo singular, 140
- sistema de EDO
  - autônomo, 11
  - não autônomo, 11
- sistema dinâmico, 5
  - aleatório, 23
    - discreto, 24
  - discreto, 5
  - local, 11
  - métrico, 23
- Sistemas de EDO's, 9
- sistemas dinâmicos
  - contínuo, 5
- sorvedouro, 12
- Teorema
  - do Zigue Zague, 137
- tipo
  - de homotopia, 124
- topologia  $C^0$ 
  - aleatória, 31
- trajetória, 5
- união
  - espaços pontuados, 48
- variedade
  - central, 20
  - centro estável, 19
  - centro instável, 20
  - estável, 19
  - instável, 19
- variável aleatória
  - $N$ -valuada, 23
- vizinhança
  - aleatória, 31
  - isolante, 46
    - aleatória, 66
- vértices, 138
- Zigue-zague, 137
- índice de Conley, 53
  - cohomológico, 52, 62
  - homológico, 62
  - homotópico, 62
- órbita, 5, 17
  - $k$ -órbita aleatória, 116
  - $(\epsilon, k)$ -órbita periódica, 115
  - hiperbólica, 17

- periódica, 6, 17
  - hiperbólica, 17
- órbita periódica
  - aleatória, 119
  - aleatória de período minimal, 119
- ômega-limite
  - aleatório, 30