



Universidade Federal do ABC

LUCIANO HENRIQUE LACERDA DE ARAÚJO

HOMOLOGIA PERSISTENTE E SUA INTERAÇÃO COM A TEORIA DE MORSE DISCRETA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

Santo André, 12 de março de 2024



Universidade Federal do ABC

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

LUCIANO HENRIQUE LACERDA DE ARAÚJO

HOMOLOGIA PERSISTENTE E SUA INTERAÇÃO COM A TEORIA DE MORSE DISCRETA

Orientador: Prof. Dr. Daniel Miranda Machado

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTA É A VERSÃO ORIGINAL DA DISSERTAÇÃO, TAL COMO
SUBMETIDA À COMISSÃO JULGADORA.

SANTO ANDRÉ, 12 DE MARÇO DE 2024

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Araújo, Luciano Henrique Lacerda de
Homologia Persistente e sua interação com a Teoria de Morse
Discreta / Luciano Henrique Lacerda de Araújo. — 2024.

178 fls. : il.

Orientador: Daniel Miranda Machado

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa
de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2024.

1. Homologia Persistente. 2. Teoria de Morse Discreta. 3.
Análise Topológica de Dados. I. Miranda Machado, Daniel. II.
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2024. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com anuência do(a) (co)orientador(a).



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP
CEP 09210-580 - Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, LUCIANO HENRIQUE LACERDA DE ARAÚJO realizada em 29 de Janeiro de 2024:

Prof.(a) CARLOS HENRIQUE GROSSI FERREIRA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) DAHISY VALADAO DE SOUZA LIMA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) IVAN STRUCHINER
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) MARIANA RODRIGUES DA SILVEIRA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) DANIEL MIRANDA MACHADO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos uma introdução à Homologia Persistente e sua relação com a Teoria de Morse Discreta. Utilizando essa relação, apresentamos uma estratégia para simplificar o cálculo dos grupos de Homologia. Nos últimos anos, o avanço tecnológico resultou na produção e acumulação de uma quantidade substancial de dados. A Análise Topológica de Dados, uma área emergente, utiliza a estrutura topológica desses dados para extrair informações, sendo particularmente útil em situações em que métodos tradicionais podem falhar devido à complexidade dos dados, à multidimensionalidade ou à presença de outliers. Dentre as técnicas da Análise Topológica de Dados, podemos destacar a Homologia Persistente, caracterizada pelo uso de ferramentas da Topologia Algébrica, em especial os grupos de homologia. Neste texto, apresentamos a teoria básica da Homologia Persistente e demonstramos um dos resultados fundamentais desta teoria: o Teorema de Estabilidade. Finalmente, usando a Teoria de Morse Discreta, apresentamos uma estratégia para simplificar o cálculo dos grupos de Homologia. Durante a busca por uma função de Morse adequada, surge a possibilidade de utilizar a Transformada Discreta de Fourier no contexto de grupos abelianos. Assim, apresentamos a construção das funções de Morse-Fourier.

Palavras Chaves: Homologia Persistente, Teoria de Morse Discreta, Análise Topológica de Dados

Abstract

In this dissertation, we present an introduction to Persistent Homology and its relationship with Discrete Morse Theory. Using this relationship, we present a strategy to simplify the calculation of Homology Groups. In recent years, technological advancements have led to the production and accumulation of a substantial amount of data. As a result, Topological Data Analysis, an emerging field, utilizes the topological structure of this data to extract information. It proves to be particularly useful in situations where traditional methods may fail due to data complexity, multidimensionality, or the presence of outliers. Among the techniques of Topological Data Analysis, we can highlight Persistent Homology, characterized by the use of tools from Algebraic Topology, particularly homology groups. In this text, we present the basic theory of Persistent Homology and prove one of its fundamental results: the Stability Theorem. Finally, using Discrete Morse Theory, we introduce a strategy to simplify the calculation of homology groups. In the process of searching for a suitable Morse function, the possibility of using the Discrete Fourier Transform in the context of abelian groups arises. Thus, we present the construction of Morse-Fourier functions.

Keywords: Persistent Homology, Discrete Morse Theory, Topological Data Analysis

Conteúdo

Introdução	1
1 Introdução à Teoria de Homologia	3
1.1 Álgebra Homológica	3
1.2 Complexos Simpliciais e Δ -complexos	6
1.3 Homologia Simplicial	19
1.4 Homologia Singular	24
1.5 Equivalência entre as Homologias	28
1.6 Invariância Homotópica	28
1.7 Homologia Celular	34
2 Homologia Persistente	39
2.1 Motivação	39
2.2 Filtração e Módulo de Persistência	42
2.3 Quivers	50
2.4 Código de Barra e Diagrama de Persistência	57
2.5 Persistência Topológica	61
2.6 Algoritmos em Homologia Persistente	64
2.7 Estabilidade	70
3 Teoria de Morse Discreta e Funções de Morse-Fourier	93
3.1 Motivação	93
3.2 Função de Morse Discreta	97
3.3 Resultados Principais da Teoria de Morse Discreta	101
3.4 Árvores de Decisão e Evasividade na Construção de Funções de Morse Discretas	105
3.5 Funções de Morse-Fourier	112
3.6 Algoritmo para o Cálculo de Células Críticas	117
3.7 Homologia Persistente em Filtrações de Morse	122
A Módulos	125
B Homotopia	129

Conteúdo

C	Noções básicas de categorias	133
D	Teorema de Krull-Remak-Schmidt para A_n -quivers lineares	135
E	Teorema de Gabriel	141
	Referências	159
	Índice Remissivo	160

*“Quando eu li o primeiro texto escrito,
eu fiquei admiradíssimo pensando:
‘será que todo mundo entende o que
eu estou entendendo aqui nestes sinais?’
Eu passei a tarde olhando pro quintal
e pensando ‘puxa, então é muito
diferente o mundo do que eu pensava.’”
Tom Zé*

*“Como pode alguém escrever uma coisa
que eu não entenda? Não pode, eu vou
ler essa m... até entender. Isso é brio!”
Prof. Dr. Clóvis de Barros Filho*

Agradecimentos

Devo aqui meus agradecimentos a quem, sem os quais, as quase duas centenas de páginas deste trabalho não teriam sido possíveis.

A minha mãe, Lú, que, mais do que se desdobrar em diversos empregos, de modo a me prover sustento e educação, desde os lápis de cor do jardim de infância, foi, quase durante toda a minha vida, em quem se resumiu a minha noção de família.

Ao professor Alcides, que a despeito do depauperado estado das escolas públicas da periferia de Mauá, onde se estenderam todos os meus anos de vida escolar, consegui despertar em mim a primeira curiosidade sobre o que era Matemática. Aos professores Francisco Fraga, Cláudio Bordin e Stilante Manfrin, que não só foram vitais para que eu atravessasse as penosas vias da formação de engenheiro, mas também foram os primeiros a me porem em contato com a área acadêmica. Aos professores Ana Boero, Ercílio Silva e Rafael Grisi, que tiveram a paciência de me corrigir e orientar acerca das minhas tortuosas e confusas linhas de engenheiro recém-ingresso na Matemática. Aos professores Ledo Vaccaro e Clóvis de Barros Filho que, ainda que não leiam o que aqui escrevo, satisfaz-me concluir que a vida de quem os ouve é uma vida que vale a pena ser vivida.

Ao meu orientador, Daniel Miranda, cujas explicações, atenção e cuidado me fazem titubear em poder dizer que conhecia matemática antes de conhecê-lo, e, caso eu possa, devo procurar outro verbo que seja capaz de descrever o efeito das nossas semanais reuniões na minha trajetória e que sintetize o quanto sou grato.

À Veronica, que segurou minha mão e me munuiu de coragem para começar a jornada que se consubstancia neste trabalho e que não só aprendeu tudo que a ensinei, mas que me ensinou tanto, que ainda hoje estou no processo de aprender. Ao Gustavo com quem nutro amizade há tantos anos que temos quase uma linguagem exclusiva, sendo bem-sabido que a linguagem é um dos pilares para a construção da sensação de lar. Ao Raul e ao Rodrigo, com quem compartilhei as inúmeras novidades advindas do ingresso na universidade, e em cujas companhias valeram a pena mesmo os mais cansativos dias. À Cauanny, que afetuosa e pacientemente ouviu diversos dos monólogos nos quais eu ten-

Conteúdo

tava escapar de labirintos em que esse trabalho me punha, mesmo sendo sempre ela quem tem de mais interessante a dizer sobre o Universo. Ao Ricardo e ao Léo, dentre outras amizades do Nabinho 2017, onde me dispus a ensinar, mas também onde eu recebi a maior lição: a de que ensinar é formar laços. Aos estudantes, professores e professoras da Escola Preparatória da UFABC, onde já ciente de que ensinar é formar laços, formei laços que me levaram a entender, com um grau inédito de clareza, o que é ser humano. Aos meus amigos do teatro, onde muitas vezes foi na liberdade de ser e estar, em que eu desatava o liame dos inextricáveis caminhos em que este trabalho me levava. Ainda, aos muitos outros amigos que fiz nesta trajetória de UFABC, que, para evitar me estender em demasia, não os cito, ciente de que sua importância não está nestas páginas, mas no fato de que sendo a vida uma viagem na qual não se vê o fim, foram quem fez o caminho até aqui ter valido a pena.

Ao Presidente Lula, ao então Ministro da Educação Fernando Haddad, às funcionárias e aos funcionários da limpeza, manutenção, transporte e alimentação, que ao construírem e manterem em funcionamento a UFABC, permitiram que pessoas que venham de onde eu vim tenham o direito de sonhar.

Introdução

Introdução

Com o crescimento do volume de dados gerados e analisados nos diferentes processos que atualmente constituem o contínuo avanço científico e tecnológico, há uma forte demanda por novas ferramentas de análise de dados. Nesse contexto destaca-se a Análise Topológica de Dados, em especial, a Homologia Persistente e a Teoria de Morse Discreta, que se caracterizam pelo uso de ferramentas da Topologia Algébrica para o estudo de fenômenos de natureza topológica em um conjunto de dados. Neste trabalho, estudaremos algumas teorias de homologia e suas aplicações à análise de dados.

No primeiro capítulo, apresentamos a teoria algébrica que subjaz o que é comum às diferentes teorias de homologia, que surgem das diferentes abordagens teóricas de estruturação formal do conceito intuitivo de “buracos” de um espaço topológico. Em seguida, definimos os elementos básicos da primeira Teoria de Homologia a ser apresentada: os simplexos que são, de certo modo, generalizações de segmentos de reta e triângulos. Logo, apresentamos formas destes serem colados formando os complexos simpliciais e Δ -complexos. É a partir da decomposição de alguns tipos de espaços topológicos em estruturas isomorfas a complexos simpliciais que se constrói a Teoria de Homologia Simplicial, sendo seguida pela Teoria de Homologia Singular. Esta difere da anterior ao apresentar menos limitações ao ser intrinsecamente invariante e ao permitir o estudo de espaços topológicos mais gerais. Apresentamos, então, o fato de que as duas teorias foram provadas equivalentes onde estiverem ambas definidas e, em seguida, a demonstração de que resultados obtidos por tais teorias são invariantes por homotopia. Fechamos o capítulo apresentando uma terceira teoria de homologia, a Teoria de Homologia Celular, que terá utilidade no terceiro capítulo.

No segundo capítulo, apresentamos a Teoria de Homologia Persistente. Dado um conjunto de dados quantitativos representados por uma coleção de pontos em \mathbb{R}^n , é possível construir-se uma família de complexos simpliciais parametrizada por uma variável real $\varepsilon > 0$. Uma das formas de se fazer isto é definir quais simplexos constituem cada complexo da família, a depender de uma função da distância ε entre cada subconjunto linearmente independente de pontos, de modo que a família seja crescente, ou seja, os complexos são indexados e cada um pode ser obtido a partir de outro, de índice inferior, pelo acréscimo

Conteúdo

de simplexos. A cada complexo da família podemos aplicar o ferramental de homologia. A Homologia Persistente consiste no desenvolvimento das ferramentas adequadas para se analisar, grosso modo, quais características homológicas persistem por mais tempo, sendo então as mais relevantes para a família. Um dos principais resultados é que uma estrutura de homologia persistente é isomorfa à soma direta de estruturas mais simples, o que será provado a partir de resultados para quivers. Um dos grandes atrativos desta teoria é que pode-se provar que os resultados de homologia persistente são dotados de estabilidade, ou seja, não apresentam alterações para pequenas perturbações na distribuição espacial dos pontos. Neste capítulo, nossa contribuição é a discussão e a exposição mais detalhada e cuidadosa acerca dos conceitos de nascimento e morte de geradores de homologia em uma filtração, das interpretações topológicas dos resultados algébricos de persistência e do Teorema de Estabilidade.

Finalmente, no terceiro capítulo descrevemos, usando a Teoria de Morse Discreta, uma estratégia para simplificar o cálculo dos grupos de Homologia. No início desse capítulo, apresentamos uma motivação a partir da Teoria de Morse, que indica como informações topológicas de uma variedade podem ser apreendidas pelos pontos críticos de uma função da variedade a \mathbb{R} , dando ensejo à Teoria de Morse Discreta, que visa replicar tais ferramentas a complexos simpliciais. No processo pela busca por uma função que satisfaça tais requisitos, surge a possibilidade do uso da Transformada Discreta de Fourier no contexto de grupos abelianos, mais precisamente, explicitamos como se construir a transformada de Fourier de uma função definida em um complexo simplicial. A partir disto, estudamos a construção das funções de Morse-Fourier, com a qual podemos efetuar em complexo simplicial uma redução na quantidade de simplexos sem, entretanto, haver perda de informações homológicas. Apresentamos um algoritmo em linguagem *Python* com a utilidade de calcular a dita função, denominada função de Morse-Fourier, bem como os elementos críticos. No final, apresentamos uma possibilidade de interação entre a Teoria de Homologia Persistente e a Teoria de Morse Discreta. Neste capítulo, nossa contribuição é a apresentação de uma investigação heurística da relação entre a Teoria de Morse e a Teoria de Morse Discreta, além da discussão detalhada da utilidade de árvores de decisão na construção de Funções de Morse Discreta e Funções de Morse-Fourier, da apresentação detalhada da transformada de Fourier de um complexo simplicial e da construção de um algoritmo que compute a função de Morse-Fourier de um complexo simplicial. No Apêndice, tivemos o objetivo de apresentar uma demonstração detalhada do Teorema de Gabriel de forma a contribuir com a literatura em Língua Portuguesa.

1 Introdução à Teoria de Homologia

Neste capítulo introduziremos o arcabouço teórico a partir do qual se desenvolvem as teorias dos capítulos seguintes. Ao munirmos um espaço topológico de uma estrutura algébrica, torna-se possível a exploração de características topológicas inspiradas no conceito intuitivo de buraco, além de outras características que não são usualmente exploradas nos textos de Topologia Geral. Este capítulo ampara-se principalmente nas referências [3], [11], [14] e [16].

1.1 Álgebra Homológica

Dentre os principais conceitos a serem tratados neste texto, alguns compartilham em seus nomes o termo “homologia”, a saber, Homologia Simplicial, Homologia Singular, Homologia Celular e Homologia Persistente. Ainda que todos sejam definidos em contextos geométricos e em espaços topológicos, é possível a construção de uma teoria geral de homologia, puramente algébrica, que não possui o apelo intuitivo das outras, mas ganha em generalidade, conseqüentemente, permitindo a obtenção de resultados extensíveis a todas as teorias de homologia de uma só vez. Os termos e conceitos definidos em tal teoria ganharão significado intuitivo neste texto a partir da seção de Homologia Simplicial.

Definição 1.1. *Dado um anel comutativo com unidade R , um **complexo de cadeias** com coeficientes em R é uma sequência $\mathcal{C} = (C_p, d_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ de R -módulos C_p e homomorfismos de módulos $d_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$, tais que $d_p \circ d_{p+1} = 0$, ou seja, $\text{im } d_{p+1} \subseteq \text{ker } d_p$. Podemos expressá-la com um diagrama:*

$$\mathcal{C} : \cdots \longrightarrow C_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} C_p \xrightarrow{d_p} C_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

1 Introdução à Teoria de Homologia

Os elementos de C_p são chamados de **p -cadeias**. Os elementos do $\ker d_p$ são chamados de **p -ciclos** e denotados por Z_p . Ainda, os elementos da $\operatorname{im} d_{p+1}$ são ditos **p -bordos** e seu conjunto denotado por B_p . Finalmente, os homomorfismos d_p são denominados **operadores de bordo**.

Caso o complexo de cadeias seja tal que $\operatorname{im} d_{p+1} = \ker d_p$, para cada p , então é denominado **sequência exata**.

Temos que Z_p e B_p são submódulos de C_p . Como $B_p \subseteq Z_p$, e $d_p \circ d_{p+1} = 0$, temos que B_p é submódulo de Z_p . Podemos, então, tomar o seguinte quociente.

Definição 1.2. Dado um complexo de cadeias \mathcal{C} , com coeficientes em R , o **módulo de homologia p -dimensional** é definido pelo quociente $H_p(\mathcal{C}) \doteq Z_p/B_p = \ker d_p / \operatorname{im} d_{p+1}$.

Cada elemento de $H_p(\mathcal{C})$ é dito **p -gerador de homologia** e, para um dado $x \in \ker d_p$, tem a forma

$$\bar{x} \doteq x + \operatorname{im} d_{p+1} = \{x + y : y \in \operatorname{im} d_{p+1}\}.$$

Dados dois p -ciclos x e x' , temos que $\bar{x} = \bar{x}'$ se, e somente se $x - x' \in \operatorname{im} d_{p+1}$, neste caso, são ditos **p -ciclos homólogos**.

Além disso, a soma direta $H_*(\mathcal{C}) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(\mathcal{C})$ é chamada de **homologia** de \mathcal{C} .

Definição 1.3. Dados $\mathcal{C} = (C_p, d_p)$ e $\mathcal{G} = (G_p, d'_p)$ complexos de cadeia com coeficientes em R , um **homomorfismo de cadeias** $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ é um homomorfismo graduado em \mathbb{Z} , denotado por $f = (f_p)_{p \in \mathbb{Z}}$, tal que $f_p : C_p \rightarrow G_p$ é homomorfismo de R -módulos e de modo que $f_{p-1} \circ d_p = d'_p \circ f_p$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{d_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{d_p} & C_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{p+1} & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & G_{p+1} & \xrightarrow{d'_{p+1}} & G_p & \xrightarrow{d'_p} & G_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Dado R , um anel comutativo com unidade, a coleção dos complexos de cadeia com coeficientes em R constitui uma categoria, a saber, \mathbf{Comp}_R , onde os morfismos são justamente os homomorfismos de cadeias. O morfismo identidade é trivialmente definido, bem como a lei de composição.

Grosso modo, temos que os homomorfismos de módulo interagem bem com a imagem e o núcleo de cada operador de bordo. De fato, da definição acima, temos que se $x \in \operatorname{im} d_{p+1}$, então existe $y \in C_{p+1}$ tal que $x = d_{p+1}(y)$ e, então,

$$f_p(x) = f_p(d_{p+1}(y)) = d'_{p+1}(f_{p+1}(y)) \in \operatorname{im} d'_{p+1},$$

ou seja,

$$f_p(\operatorname{im} d_{p+1}) \subseteq \operatorname{im} d'_{p+1}.$$

Por outro lado, se $x \in \ker d_p$, então

$$d'_p(f_p(x)) = f_{p-1}(d_p(x)) = f_{p-1}(0) = 0,$$

logo, $f_p(x) \in \ker d'_p$ e conclui-se que

$$f_p(\ker d_p) \subseteq \ker d'_p.$$

Consequentemente, f interage bem com os módulos de homologia.

Proposição 1.4. Cada $f \in \text{Mor}_{\mathbf{R}\text{Comp}}(\mathcal{C}, \mathcal{G})$ induz um homomorfismo graduado de módulos entre os módulos de homologia de \mathcal{C} e \mathcal{G} , ou seja, pode-se definir $f_* = (f_{p,*})_{p \in \mathbb{Z}}$, onde

$$f_{p,*} : H_p(\mathcal{C}) \rightarrow H_p(\mathcal{G})$$

é homomorfismo de módulos, ou seja, um morfismo da categoria dos \mathbf{R} -módulos, denotada por $\mathbf{R}\text{Mod}$.

Demonstração. Dado $p \in \mathbb{Z}$, definamos $f_{p,*}$ da seguinte maneira: dado $x + \text{im } d_{p+1} \in H_p(\mathcal{C})$, temos

$$f_{p,*}(x + \text{im } d_{p+1}) \doteq f_p(x) + \text{im } d'_{p+1}.$$

Do visto acima,

$$x + \text{im } d_{p+1} \in H_p(\mathcal{C}) \implies x \in \ker d_p \implies f_p(x) \in \ker d'_p \implies f_p(x) + \text{im } d'_{p+1} \in H_p(\mathcal{G}).$$

Ainda, sejam $x, y \in \ker d_p$ tais que $\bar{x} = \bar{y}$, então,

$$\begin{aligned} x - y \in \text{im } d_p &\implies f_p(x - y) \in \text{im } d'_p \implies f_p(x) - f_p(y) \in \text{im } d'_p \\ &\implies f_p(x) + \text{im } d'_{p+1} = f_p(y) + \text{im } d'_{p+1} \implies f_{p,*}(\bar{x}) = f_{p,*}(\bar{y}). \end{aligned}$$

Portanto, $f_{p,*}$ está bem definida.

Finalmente, sejam $r, s \in \mathbf{R}$ e $\bar{x}, \bar{y} \in H_p(\mathcal{C})$, então

$$\begin{aligned} f_{p,*}((r\bar{x} + s\bar{y}) = f_{p,*}(r(x + \text{im } d_{p+1}) + s(y + \text{im } d_{p+1}))) &= f_{p,*}((rx + sy) + \text{im } d_{p+1}) \\ &= f_p(rx + sy) + \text{im } d'_{p+1} = rf_p(x) + \text{im } d'_{p+1} + sf_p(y) + \text{im } d'_{p+1} \\ &= r(f_p(x) + \text{im } d'_{p+1}) + s(f_p(y) + \text{im } d'_{p+1}) = rf_{p,*}(\bar{x}) + sf_{p,*}(\bar{y}), \end{aligned}$$

logo é um homomorfismo de módulos. □

Assim, para cada $p \in \mathbb{Z}$, podemos definir o **funtor de homologia**

$$H_p : {}_{\mathbb{R}}\mathbf{Comp} \rightarrow {}_{\mathbb{R}}\mathbf{Mod},$$

que leva $\mathcal{C} = (C_p, f_p)_{p \in \mathbb{Z}} \in Ob_{{}_{\mathbb{R}}\mathbf{Comp}}$ em $H_p(\mathcal{C}) = \ker d_p / \text{im } d_{p+1} \in Ob_{{}_{\mathbb{R}}\mathbf{Mod}}$ e $f \in \text{Mor}_{{}_{\mathbb{R}}\mathbf{Comp}}(\mathcal{C}, \mathcal{G})$ em $H_p(f) = f_{p,*} \in \text{Mor}_{{}_{\mathbb{R}}\mathbf{Mod}}(H_p(\mathcal{C}), H_p(\mathcal{G}))$.

1.2 Complexos Simpliciais e Δ -complexos

A próxima teoria de homologia que apresentaremos é definida sobre espaços provenientes da colagem de blocos fundamentais, que são denominados *simplexos*. De certo modo, *simplexos* são generalizações n -dimensionais de triângulos e tetraedros. Em seguida, podem ser definidos os complexos simpliciais: colagens, submetidas a determinadas regras, de *simplexos*. Homeomorfismos entre complexos simpliciais no \mathbb{R}^n e espaços topológicos permitem que a aplicação da teoria de homologia no complexo induza uma interpretação no espaço topológico, expandindo a utilidade da teoria. Por fim, será exposto que as ferramentas desenvolvidas para o estudo das características topológicas de complexos simpliciais são extensíveis para Δ -complexos: generalizações de complexos simpliciais, no sentido de diminuir-se as regras exigidas nas colagens de *simplexos*.

Definição 1.5. Um conjunto de **pontos independentes** (ou **pontos linearmente independentes**) é um conjunto $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que os vetores $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_n - a_0$ são **linearmente independentes (LI)**.

Definição 1.6. Dados a_0, \dots, a_n pontos independentes, o **simplexo n -dimensional** (ou **n -simplexo**) gerado por tais pontos é o conjunto

$$\langle a_0, \dots, a_n \rangle \doteq \left\{ \sum_{j=0}^n \varepsilon_j a_j : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in [0, 1] \text{ e } \sum_{j=0}^n \varepsilon_j = 1 \right\}.$$

Os escalares ε_i são ditos **coordenadas baricêntricas** do elemento de $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$. Os pontos são ditos **vértices do simplexo**.

Em favor da intuição geométrica, podemos notar que um 0-simplexo é um ponto, um 1-simplexo é um segmento de reta, um 2-simplexo é um triângulo e um 3-simplexo é um tetraedro sólido, conforme exibido na Figura 1.1.

Pode-se demonstrar ([16]) que, devido à independência linear dos pontos, dado um elemento de um simplexo s , este pode ser escrito de forma única em relação às suas coordenadas e, além disso, um simplexo é unicamente determinado pelos seus vértices.

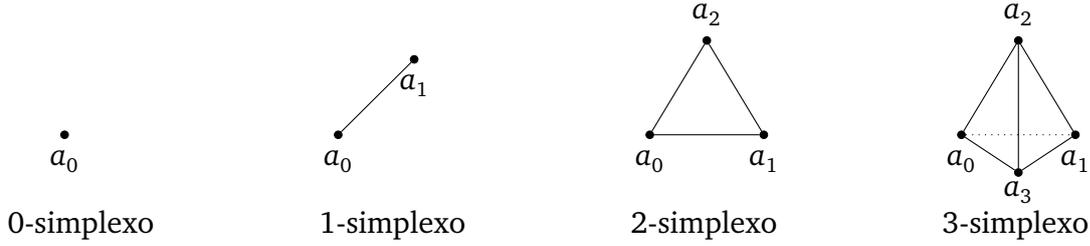


Figura 1.1: Exemplos de simplexos.

Dado um simplex s , um elemento é dito um **ponto interior** se todas as suas coordenadas baricêntricas são não nulas. O conjunto dos pontos interiores de um simplex s se chama **interior do simplex** e denota-se por \mathring{s} .

Observação 1.7. Uma possível interpretação de um simplex gerado por uma coleção de pontos independentes é que este é o menor conjunto convexo que contenha tais pontos. De forma mais precisa, é o conjunto convexo resultante da interseção de todos os conjuntos convexos que contenham tais pontos ([14]).

Exemplo 1.8. Sejam $a_0 = (0, 0)$, $a_1 = (0, 1)$, $a_2 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Claramente, $a_1 - a_0 = (0, 1)$ e $a_2 - a_0 = (1, 2)$ são LI, então, podemos definir

$$s = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle = \{(x, y) = (c, b + 2c) : a, b, c \in [0, 1] \text{ e } a + b + c = 1\}.$$

Temos que

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \Rightarrow b + c = 1 - a \\ 0 \leq a \leq 1 \Rightarrow 0 \leq b + c \leq 1 \Rightarrow c \leq b + 2c \leq 1 + c \Rightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{1} + \mathbf{x} \\ 0 \leq c \leq 1 \Rightarrow \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \\ 0 \leq b \leq 1 \Rightarrow 2c \leq b + 2c \leq 1 + 2c \Rightarrow \mathbf{2x} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{1} + \mathbf{2x} \end{cases}$$

e, disto, dado que $0 \leq x \leq 1$, temos que

$$y \in \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq y \leq 1 + x \leq 2\} \cap \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq 2x \leq y \leq 1 + 2x \leq 3\}.$$

Então, $s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 2x \leq y \leq x + 1\}$ e sua representação geométrica está exibida na Figura 1.2.

Definição 1.9. O **simplexo padrão** de dimensão n é denotado por Δ^n e dado pelo conjunto de pontos $\{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^{n-1} a_i = 1 \text{ e } a_i \geq 0, \forall i\}$.

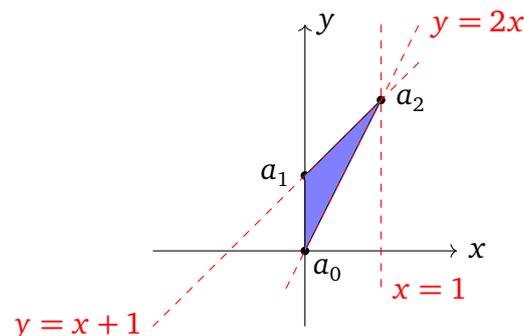


Figura 1.2: Simplexo $s = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle$.

Os vértices do simplexo padrão são os pontos que constituem a base canônica do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , denotada por $\{e_i\}_{i=0}^{n-1}$, onde e_i é o vetor com a $(i + 1)$ -ésima coordenada igual a 1 e todas as outras iguais a 0.

Visando generalizar a noção de que, dado um triângulo, cada par de seus vértices caracteriza uma de suas arestas e, dado um tetraedro, cada trio de seus vértices caracteriza uma de suas faces, podemos observar que, dado um simplexo, cada subconjunto de seus vértices gera um novo simplexo que está, de certo modo, contido no primeiro.

Definição 1.10. Dado um simplexo $s = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$, com $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, o simplexo

$$s_{(i)} \doteq \langle a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n \rangle,$$

onde \widehat{a}_i denota a omissão do termo, é denominado uma **(n - 1)-face** (ou **face de bordo**) de s . Generalizando, um simplexo $\langle a_{j_0}, \dots, a_{j_k} \rangle$, onde $\{j_0, \dots, j_k\} \subseteq \{0, \dots, n\}$ é denominado uma **k-face** de s . A face de um 0-simplexo é definida como o conjunto vazio.

Se um simplexo s é face de um simplexo t , então dizemos que t é **coface** de s . Ainda, a união das $(n - 1)$ -faces de s é chamada **bordo** de s e denotada por ∂s . Da Definição 1.6, um ponto de $s = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ está no bordo de s , se, e somente se for do tipo $\sum_{j=0}^n c_j a_j$, com $c_j = 0$ para pelo menos algum $j \in \{0, \dots, n\}$. Assim, temos que $\mathring{s} = s - \partial s$. Antes de prosseguirmos, será útil que determinemos uma orientação em cada simplexo.

Definição 1.11. Um **simplexo ordenado** é um simplexo com uma ordem dos seus vértices fixada.

Consideraremos equivalentes duas ordenações quando uma puder ser obtida da outra por uma quantidade par de permutações dos vértices. Tal relação de equivalência define duas classes, as quais denominaremos as **orientação de um simplexo**. A partir de agora, nos referiremos aos simplexos orientados apenas por simplexos e $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$, quando munido de orientação, será indicado por $[a_0, \dots, a_n]$. Além disso, o sinal negativo prece-

dendo um simplexo indicará a troca de sua orientação.

Pode-se definir uma interpretação geométrica para a orientação de simplexos em dimensões visíveis. Por exemplo, pode-se pensar na orientação de um 1-simplexo como uma seta sobre ele. Ou seja, sejam $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$ pontos LI, o simplexo $[a_0, a_1]$ pode ter sua orientação representada como uma seta que vai de a_0 para a_1 , enquanto que o simplexo oposto $-[a_0, a_1] = [a_1, a_0]$ pode ter sua orientação representada como uma seta que vai de a_1 para a_0 , como se pode conferir na Figura 1.3. Podemos ainda munir de representação visual simplexos de dimensão 0, 2 e 3, o que pode ser encontrado, por exemplo, em [14].



Figura 1.3: Representações visuais das duas possíveis orientações do simplexo $[a_0, a_1]$.

Para um simplexo n -dimensional $s = [a_0, \dots, a_n]$, podemos definir uma **orientação induzida** em cada uma de suas $(n - 1)$ -faces dada por $s_{(i)} = (-1)^i [a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n]$. Por outro lado, não há sentido em se falar sobre orientação induzida por s em uma $(n - 2)$ -face sua. Tal fato vem como consequência imediata da proposição a seguir.

Proposição 1.12. *Dado um simplexo n -dimensional $s = [a_0, \dots, a_n]$, toda $(n - 2)$ -face t pertence a duas $(n - 1)$ -faces, as quais, com as orientações induzidas nelas por s , induzem orientações opostas em t .*

Demonstração. Sejam $j, k \in \{0, \dots, n\}$, com $j < k$. Por um lado, removendo-se primeiro a_k , então a_j , por ter índice menor, continuará estando na j -ésima posição, assim obteremos $(s_{(k)})_{(j)} = (-1)^j (-1)^k [a_0, \dots, \widehat{a_j}, \dots, \widehat{a_k}, \dots, a_n]$, contida na $(n - 1)$ -face $s_{(k)}$. Por outro lado, caso seja removido inicialmente a_j , então a_k , por ter índice maior do que o removido, passará a estar na $(k - 1)$ -ésima posição e, assim,

$$(s_{(j)})_{(k-1)} = (-1)^{k-1} (-1)^j [a_0, \dots, \widehat{a_j}, \dots, \widehat{a_k}, \dots, a_n],$$

contida na $(n - 1)$ -face $s_{(j)}$. Fica então claro que $(s_{(k)})_{(j)} = -(s_{(j)})_{(k-1)}$. □

Ainda buscando inspiração na geometria básica: dados dois triângulos coplanares, se uma aresta de um deles é congruente a uma aresta do outro, a “colagem” de tais triângulos

por tal aresta, seguida de sua remoção, resulta um novo polígono. Um procedimento análogo em tetraedros de faces congruentes resulta um novo poliedro. Assim, pela colagem de simplexes podemos obter estruturas mais gerais.

Definição 1.13. Um **complexo simplicial** K é uma coleção de simplexes, tais que são satisfeitas todas as seguintes condições:

- Se $s \in K$ e t é face de s , então $t \in K$;
- Se $s, t \in K$, então $s \cap t$ é vazio ou é uma face em comum aos dois simplexes (e, pelo item anterior, $s \cap t \in K$).

Pode ser provado [14] que a “colagem dos simplexes”, ou seja, a identificação das faces de dois simplexes distintos da coleção, é feita de modo a todo ponto de K ser ponto interior de um e apenas um simplexo de S .

Um complexo simplicial é dito finito se é constituído de uma coleção finita de simplexes. E a **dimensão de um complexo simplicial** é o maior n tal que exista um homeomorfismo entre Δ^n e algum simplexo a ele pertencente.

Definição 1.14. Dado um complexo simplicial $K = \{s_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de dimensão n , o conjunto $|K| \doteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito um **politopo**, ou a **realização geométrica** do complexo simplicial. Além disso, um **poliedro** é o politopo de um complexo simplicial finito.

Ou seja, enquanto um complexo simplicial é uma coleção de subconjuntos de \mathbb{R}^n , um politopo é um subconjunto de \mathbb{R}^n . Deste ponto em diante, os dois conceitos serão referidos apenas por complexo simplicial, exceto quando isto gerar ambiguidade.

Exemplo 1.15. Sejam $a = (0, 0), b = (1, 0), c = (1, 1), d = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ e

$$K = \{[a, b, c], [a, b], [a, c], [b, c], [a, d], [d, c], [a], [b], [c], [d], \emptyset\}.$$

Não é difícil mostrar que K satisfaz a Definição 1.13.

Definição 1.16. Seja K um complexo simplicial, um **subcomplexo simplicial** é um subconjunto L de K que é um complexo simplicial. Dado $l \in \mathbb{N}$, o **l -esqueleto** de K , denotado por K^l é o subcomplexo simplicial formado por todos os simplexes de dimensão menor que ou igual a l .

Destaca-se na definição que o 0-esqueleto é o conjunto formado essencialmente pelos vértices de todos os simplexes de K .

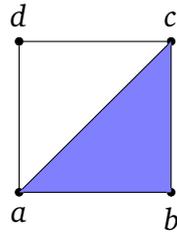


Figura 1.4: Poliedro $|K|$.

Exemplo 1.17. Recuperando o Exemplo 1.15, temos que $K^0 = \{[a], [b], [c], [d], \emptyset\}$, $K^1 = \{[a, b], [a, c], [b, c], [a, d], [d, c], [a], [b], [c], [d], \emptyset\}$ e $K^2 = K$. Podemos ver as representações geométricas dos esqueletos de K na Figura 1.5.

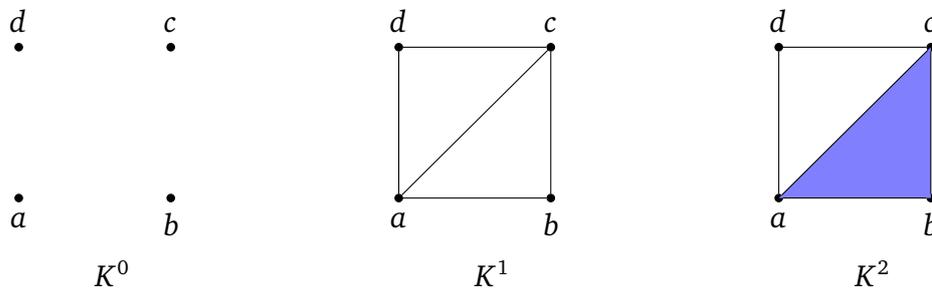


Figura 1.5: Representações geométricas dos \imath -esqueletos de K .

Nota-se que a dimensão de um complexo simplicial é o menor $\imath \in \mathbb{N}$ tal que $K^\imath = K$.

Um tipo específico de subcomplexo simplicial é aquele que pode ser obtido por retração, e uma das formas de se fazer isso é pela processo denominado colapso elementar.

Definição 1.18. Seja K um complexo simplicial e suponha que nele existe um par de simplexes σ e τ , tais que σ é face de τ , σ não tem outras cofaces e τ é maximal em K , então o complexo simplicial $K - \{\sigma, \tau\}$ é denominado um **colapso elementar** de K . Denotaremos $K \searrow K - \{\sigma, \tau\}$.

Proposição 1.19. Se $K \searrow K - \{\sigma, \tau\}$, então $K - \{\sigma, \tau\}$ tem o mesmo tipo de homotopia de K .

Demonstração. Para tal, como τ é convexo, podemos contraí-lo para um subconjunto das suas faces de bordo, além disso, a remoção de σ não impede que tenhamos um complexo simplicial, uma vez que ele é maximal e que foi removida com ele sua única coface de bordo. \square

Em geometria básica, dados uma curva C e um ponto P fora dela, ambos em \mathbb{R}^3 , define-se um cone como a coleção de todas as retas, ou segmento de retas, no caso de um tronco

1 Introdução à Teoria de Homologia

de cone, que passam por P e por algum ponto de C , como pode-se observar na imagem da esquerda na Figura 1.6. Buscando um conceito análogo, no contexto de complexos simpliciais, podemos nos restringir às curvas que satisfazem a definição de complexo simplicial e, a partir disto, por estarmos interessados em complexos simpliciais finitos, construímos um tronco de cone. Por exemplo, dada a união dos segmentos de reta representados pela coleção de 1-simplexos

$$\{[a, b], [b, c], [c, d], [d, e]\},$$

onde a, b, c, d e e são pontos LI em \mathbb{R}^3 , podemos construir o complexo simplicial

$$K = \{\emptyset, [a], [b], [c], [d], [e], [a, b], [b, c], [c, d], [d, e]\},$$

cuja realização geométrica é justamente uma curva C em \mathbb{R}^3 . Dado um ponto P , tal que $\{a, b, c, d, e, P\}$ é LI, a realização geométrica do complexo simplicial

$$CK \doteq K \cup \{[P], [a, P], [b, P], [c, P], [d, P], [e, P], [a, b, P], [b, c, P], [c, d, P], [d, e, P]\},$$

que pode ser expresso por

$$CK = K \cup \{[a_0, \dots, a_n, P] : [a_0, \dots, a_n] \in K\},$$

é um tronco de cone, como podemos observar na imagem da direita na Figura 1.6. De fato, não é difícil notar que todo ponto de $|CK|$ pertence a algum segmento que conecte um ponto de $|K|$ a P e que, para cada ponto de $|K|$, o segmento que o conecta a P está contido em $|CK|$. Tal discussão motiva a definição a seguir.

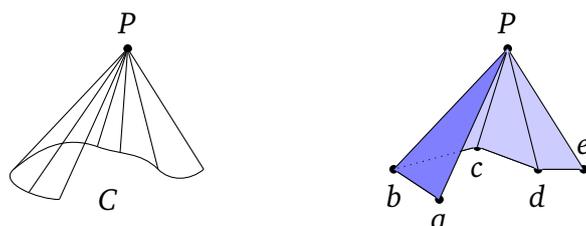


Figura 1.6: Cone gerado a partir de curva genérica (à esquerda) e cone gerado a partir de complexo simplicial (à direita).

Definição 1.20. Dado um complexo simplicial K e v um vértice linearmente independente dos vértices de K , definimos o complexo simplicial CK , chamado **cone simplicial** em K , da seguinte maneira

$$CK = K \cup \{[a_0, \dots, a_n, v] : [a_0, \dots, a_n] \in K\}.$$

Neste caso, v é dito **topo do cone simplicial**.

Esquemas Simpliciais

Em contextos onde a ordenação dos simplexes não for relevante, teremos que cada simplexo é unicamente determinado pelos seus vértices. Nestas situações podemos assumir uma abordagem mais conjuntista, partindo da seguinte definição.

Definição 1.21. *Dado um conjunto finito de pontos de um espaço topológico V , um **esquema simplicial** é um conjunto S , coleção de subconjuntos de V , tal que se $s \in S$ e $t \subseteq s$, então $t \in S$.*

Na definição acima, os elementos de S são ditos simplexes e os elementos de V são ditos vértices de S . Dado $l \in \mathbb{N}$, pode-se definir, de modo análogo ao feito para complexos simpliciais, o **l -esqueleto do esquema simplicial** S , denotado por S^l . Podemos notar que $S^0 = V \cup \{\emptyset\}$.

Observação 1.22. *Dado um complexo simplicial K finito, podemos obter o seu esquema simplicial fazendo $S = \{\{a_1, \dots, a_n\} : [a_1, \dots, a_n] \in K\}$.*

Exemplo 1.23. *A partir do complexo simplicial do Exemplo 1.15, podemos construir o esquema simplicial S , onde*

$$S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, d\}, \{d, c\}, \{a, b, c\}\}$$

e

$$S^0 = \{\emptyset, a, b, c, d\}.$$

Definição 1.24. *Podemos definir uma **ordem parcial em um esquema simplicial** \preceq , a partir da relação de continência entre os simplexes. Ou seja, dados $x, y \in S$, podemos indicar $x \preceq y$, se $x \subseteq y$.*

A ordem parcial acima definida pode ser induzida nos simplexes de um complexo simplicial. Para tal, basta que tomemos o seu esquema simplicial associado, como explicitado em 1.22, e induzamos no complexo a ordem definida no esquema a partir da Definição 1.24.

Tal construção permite a identificação de funções, de um complexo simplicial em \mathbb{R} , que preservem tal ordem parcial, e que terão utilidade no estudo da Teoria de Morse Discreta, a ser apresentada no Capítulo 3. Ainda para uso nessa teoria, definiremos alguns esquemas simpliciais específicos e provaremos dois lemas sobre tais esquemas simpliciais.

A partir da definição de cone simplicial apresentada em 1.20, podemos definir um cone no contexto de esquemas simpliciais.

Definição 1.25. Dado um esquema simplicial K e v um elemento que não pertence a K^0 , definimos o esquema simplicial CK , chamado **cone do esquema simplicial** em K , da seguinte maneira

$$CK = K \cup \{\sigma \cup \{v\} : \sigma \in K\}.$$

Neste caso, v é dito **topo do cone do esquema simplicial**.

A partir deste ponto nos referiremos, tanto a um cone simplicial, como a um cone de esquema simplicial, apenas como cone, exceto quanto indicado. Nota-se ainda que, pela definição acima, o topo de um cone em um esquema simplicial pode não ser único.

Dado um esquema simplicial e um vértice seu, podem-se definir o conjunto dos simplexes que restam após a remoção de tal vértice. Além disso, pode ser útil que destaquemos quais, de certo modo, deixaram de se conectar com tal vértice apenas após a sua remoção. Intuitivamente falando, isto pode fornecer informações sobre a conectividade e a relevância de cada vértice em um esquema simplicial.

Definição 1.26. Dado um esquema simplicial S e $v \in S^0 \setminus \{\emptyset\}$, temos que o conjunto **deleção** de v sobre S é o conjunto

$$dl_S(v) = \{\sigma \in S : v \notin \sigma\}$$

e o **link** de v sobre S é o conjunto

$$lk_S(v) = \{\sigma \in dl_S(v) : \sigma \cup \{v\} \in S\}$$

Dado um complexo simplicial, a partir de seu esquema simplicial, também podemos induzir em si os conjuntos *link* e *deleção* a partir de um vértice. Não é difícil provar que estes conjuntos também são complexos simpliciais.

Exemplo 1.27. Recuperando o complexo simplicial K do Exemplo 1.15 e tomando o seu esquema simplicial

$$K = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, d\}, \{d, c\}, \{a, b, c\}\},$$

temos que

$$dl_K(c) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, d\}\}$$

e

$$lk_K(c) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}\}.$$

Na Figura 1.7, temos, da esquerda para a direita, o complexo simplicial K , o complexo simplicial induzido por $dl_K(c)$ e o complexo simplicial induzido por $lk_K(c)$. Nesta última,

o simplexo c e sua conexão com os simplexos de $lk_K(c)$ são adicionados à figura, em baixa opacidade, para contribuir visualmente com a intuição.

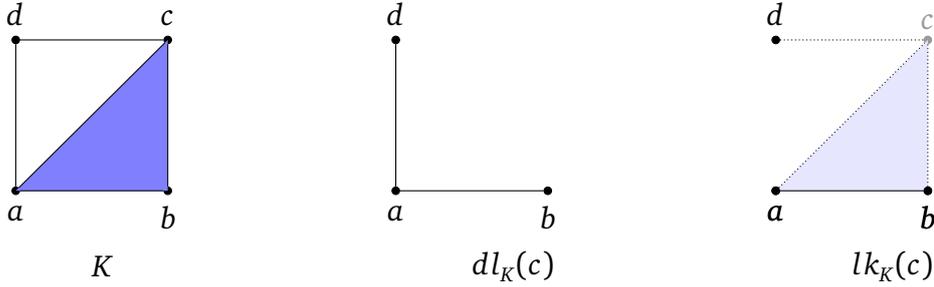


Figura 1.7: Representações do complexo simplicial K , do Exemplo 1.15, de $dl_K(c)$ e de $lk_K(c)$, respectivamente, da esquerda para a direita.

Há uma relação direta entre as cardinalidades dos conjuntos acima definidos e a cardinalidade do esquema simplicial sobre o qual forem construídos.

Lema 1.28. *Se S é esquema simplicial e $v \in S^0 \setminus \{\emptyset\}$, então $\#S = \#lk_S(v) + \#dl_S(v)$.*

Demonstração. Seja $Y_v \doteq S \setminus dl_S(v)$, provemos que existe uma bijeção φ_v entre $lk_S(v)$ e Y_v . Tal bijeção é dada por $\varphi_v : lk_S(v) \rightarrow Y_v$, tal que $\varphi_v(\sigma) = \sigma \cup \{v\}$ e é bem definida, pois, se $\sigma \in lk_S(v)$, então pelas próprias definições de *link* e *deleção* de v sobre S , temos que $\sigma \cup \{v\} \in S$, mas $\sigma \cup \{v\} \notin dl_S(v)$.

Se $\sigma, \rho \in lk_S(v)$ são tais que $\sigma \neq \rho$, então podemos supor, sem perda de generalidade, que $\exists u \in \sigma$ tal que $u \notin \rho$, de modo que pela definição de $lk_S(v)$, temos $u \neq v$. Assim, $u \in \sigma \cup \{v\} = \varphi_v(\sigma)$, mas $u \notin \rho \cup \{v\} = \varphi_v(\rho)$, logo, $\varphi_v(\sigma) \neq \varphi_v(\rho)$, ou seja, φ_v é injetiva.

Além disso, se $\rho \in Y_v$, então $\{v\} \in \rho$ e como $\rho \setminus \{v\} \subset \rho$, pela definição de esquema simplicial, $\rho \setminus \{v\} \in S$, mais ainda, como tal simplexo não contém $\{v\}$ e $\rho \setminus \{v\} \cup \{v\} = \rho \in S$, então $\rho \setminus \{v\} \in lk_S(v)$, disto, φ_v é sobrejetiva.

Como se tratam de conjuntos finitos, o fato de que $\#Y_v = \#S - \#dl_S$ implica, pela bijeção φ_v , que $\#lk_S = \#S - \#dl_S$. \square

Finalmente, dentre os resultados apresentados nesta seção, com a finalidade de serem utilizados na Teoria de Morse Discreta, temos ainda a seguinte caracterização alternativa de cone simplicial.

Lema 1.29. *Dado um esquema simplicial, então S é cone simplicial se, e somente se, para algum $v \in S^0 \setminus \{\emptyset\}$ tivermos que $2\#lk_S(v) = \#S$. Neste caso, S é um cone simplicial com topo v .*

Demonstração. Se existe $v \in S^0 \setminus \{\emptyset\}$ tal que $2\#lk_S(v) = \#S$, então, pelo Lema 1.28, temos que $\#dl_S(v) = \#lk_S(v)$, logo, $dl_S(v) = lk_S(v)$, pois $lk_S(v)$ é subconjunto de $dl_S(v)$. Como S é dado pela união disjunta dos conjuntos $dl_S(v)$ e $\{\sigma \cup \{v\} : \sigma \in lk_S(v)\} = \{\sigma \cup \{v\} : \sigma \in dl_S(v)\}$, temos pela Definição 1.25, que S é cone sobre $dl_S(v)$.

Por outro lado, se S é cone, então existem $v \in S^0 \setminus \{\emptyset\}$ e um esquema simplicial $\bar{S} \doteq \{\sigma \in S : v \notin \sigma\}$, tal que $S = \bar{S} \cup \{\sigma \cup \{v\} : \sigma \in \bar{S}\}$, ou seja, $S = C\bar{S}$. Neste caso, $\#S = 2\#\bar{S}$ e, como \bar{S} é justamente $lk_S(v)$, temos o resultado. \square

Triangularização de Espaços Topológicos

Retomando a discussão sobre complexos simpliciais, sendo um subespaço de \mathbb{R}^n , um politopo pode ser munido da topologia de subespaço a partir da topologia usual do \mathbb{R}^n . Passa então a fazer sentido definirmos homeomorfismos entre complexos simpliciais e alguns tipos de espaços topológicos. Dados um espaço topológico X , um complexo simplicial K e um homeomorfismo entre ambos, é possível, de certo modo, induzirmos sobre X alguns dos resultados obtidos por ferramentas de análise de complexos simpliciais.

Definição 1.30. *Dado um espaço topológico X , se existem um complexo simplicial K munido da topologia usual de subespaço de \mathbb{R}^n e um homeomorfismo $\varphi : |K| \rightarrow X$, então X é dito **triangularizável** e φ é dito **triangularização** de X .*

A construção de tais homeomorfismos pode ser feita a partir do espaço quociente, por alguma relação de equivalência, em um complexo simplicial e da indução dessa equivalência sobre a topologia de K como subespaço de \mathbb{R}^n .

Definição 1.31. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e \sim uma relação de equivalência sobre X . Tomemos $\pi : X \rightarrow X/\sim$, a projeção natural, então $\tau_\pi \doteq \{U \subset X/\sim : \pi^{-1}(U) \in \tau\}$ é dita **topologia induzida pela relação de equivalência** sobre X/\sim .*

Teorema 1.32 (Primeiro Teorema de Isomorfismo para espaços topológicos). *Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora de modo que $\sigma = \{f^{-1}(U) : U \in \tau\}$ e \sim uma relação de equivalência sobre X dada por $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$. Então (Y, σ) é homeomorfo a $(X/\sim, \tau_\pi)$.*

Demonstração. De fato: seja $\varphi : X/\sim \rightarrow Y$ com $\varphi([x]) = f(x)$, então:

- φ é bem definida, pois $[x_1] = [x_2] \iff f(x_1) = f(x_2) \iff \varphi([x_1]) = \varphi([x_2])$;
- φ é injetora, pois $[x_1] \neq [x_2] \iff x_1 \not\sim x_2 \iff f(x_1) \neq f(x_2) \iff \varphi([x_1]) \neq \varphi([x_2])$;
- φ é sobrejetora, pois como f é sobrejetora, $y \in Y \iff \exists x \in X : y = f(x) \iff [x] \in X/\sim$ e $\varphi([x]) = y$;

- φ é contínua, pois dado $V \in \tau$, pela própria definição $f^{-1}(V)$ é aberto em X . Além disso, notemos que $\varphi \circ \pi = f$, logo $f^{-1}(V) = (\varphi \circ \pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(\varphi^{-1}(V))$ é aberto em X . Da definição de τ_π , segue que $\varphi^{-1}(V)$ é aberto em X/\sim .
- φ^{-1} é contínua, o que pode ser demonstrado de forma análoga ao item anterior.

Portanto, φ é um isomorfismo. □

É comum, no caso acima, referir-se ao próprio politopo como uma triangularização de X .

Exemplo 1.33. (Toro de revolução \mathbb{T}) Seja o conjunto $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$ (a ser munido de um complexo simplicial). Definamos a seguinte relação de equivalência: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ quando

- $\{x_1, x_2\} \subset \{0, 2\pi\}$ e $y_1 = y_2$; ou
- $x_1 = x_2$ e $\{y_1, y_2\} \subset \{0, 2\pi\}$; ou
- $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Então, é sabido que

$$\phi : ([0, 2\pi] \times [0, 2\pi]) / \sim \rightarrow \mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto ((a + r \cos(u)) \sin(v), (a + r \cos(u)) \cos(v), r \sin(v)),$$

onde a é o raio da diretriz, r é o raio da geratriz e $0 < r < a$, é uma parametrização do toro de revolução \mathbb{T} . Como ϕ é sobrejetiva e \sim satisfaz os requisitos do Teorema 1.32, temos que há um isomorfismo entre $([0, 2\pi] \times [0, 2\pi]) / \sim$ e o toro \mathbb{T} , o que está ilustrado na Figura 1.8.

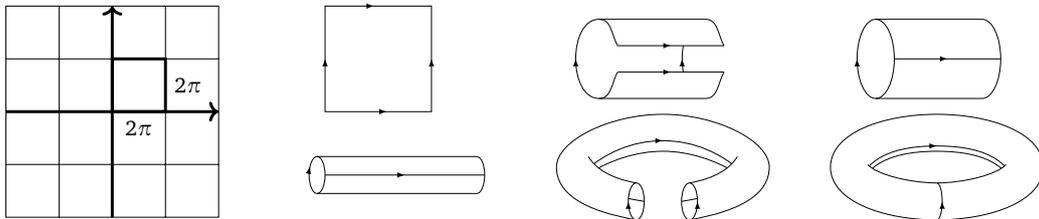


Figura 1.8: Isomorfismo entre $([0, 2\pi] \times [0, 2\pi]) / \sim$ e o toro.

Assim, sendo um complexo simplicial sobre $([0, 2\pi] \times [0, 2\pi]) / \sim$, a Figura 1.9 mostra uma triangularização do toro \mathbb{T} .

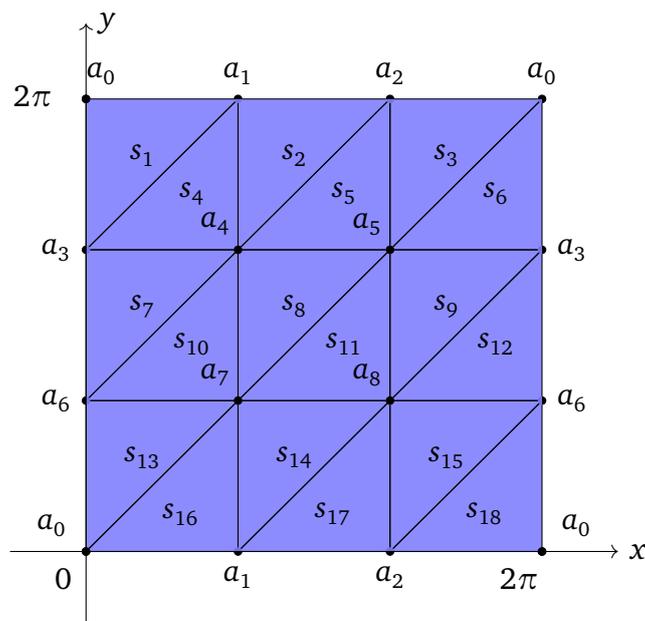


Figura 1.9: Triangulação do toro \mathbb{T} .

Δ -complexos

A triangulação do toro exemplifica como espaços topológicos relativamente simples podem ter complexos simpliciais de trato relativamente trabalhoso. Uma alternativa vem da definição de Δ -complexo. Grosso modo, em um complexo simplicial, dois simplexes distintos podem compartilhar apenas uma face, por outro lado, Δ -complexos permitem que dois de seus simplexes distintos tenham uma, duas ou mais faces em comum.

Definição 1.34. Dado um espaço topológico X , uma coleção de mapas (chamados n -simplexos) $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$, onde n depende de α , constitui um **Δ -complexo** sobre X se satisfaz todos os seguintes critérios

- A restrição $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ é injetiva;
- Cada ponto de X pertence a imagem de uma e apenas uma restrição $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$;
- Cada restrição de σ_α a uma $(n-1)$ -face de Δ^n é um mapa $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \rightarrow X$, que pertence ao Δ -complexo, onde está sendo feita a identificação entre uma $(n-1)$ -face de Δ^n e Δ^{n-1} , preservada a ordem dos vértices;
- Um conjunto $A \subset X$ é aberto se, e somente se, $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ é aberto em Δ^n para cada α .

Por indução, nota-se que, dado $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$, um n -simplexo, não só temos um mapa para cada $(n-1)$ -face de Δ^n , mas sim para suas faces de todas as dimensões. Além disso, podemos encontrar em [11] a demonstração de que um complexo simplicial é um caso

particular de Δ -complexo.

Exemplo 1.35. (Toro de revolução \mathbb{T}): recuperando o Exemplo 1.33, temos que a Figura 1.10 apresenta um Δ -complexo sobre $([0, 2\pi] \times [0, 2\pi]) / \sim$, conseqüentemente sobre o toro \mathbb{T} .

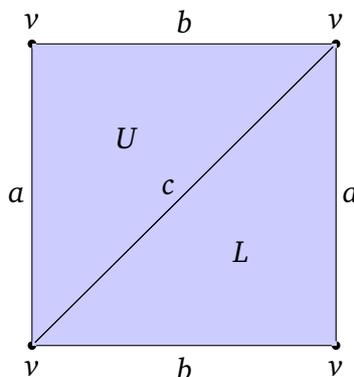


Figura 1.10: Δ -complexo sobre o toro.

Definição 1.36. Dado um Δ -complexo $\{\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \rightarrow X\}_{\alpha \in \Lambda}$, um **sub Δ -complexo** é uma subcoleção do Δ -complexo, $\{\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \rightarrow X\}_{\alpha \in \Gamma \subseteq \Lambda}$, que ainda é um Δ -complexo.

Também é definido o **l-esqueleto de um Δ -complexo** $K = \{\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \rightarrow X\}_{\alpha \in \Lambda}$, como o sub Δ -complexo $K^l \doteq \{\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \rightarrow X\}_{\alpha: n(\alpha) \leq l}$, para cada $l \in \mathbb{N}$.

Assim, a **dimensão de um Δ -complexo** é l se $K^{l-1} \neq K$, mas $K^l = K$. Ainda, o Δ -complexo é dito finito se, para cada $n \in \mathbb{N}$, é composto por uma quantidade finita de n -simplexos.

1.3 Homologia Simplicial

Um dos principais objetivos da Teoria de Homologia Simplicial é a identificação de “buracos” em Δ -complexos e complexos simpliciais (conseqüentemente, em alguns tipos de espaços topológicos). Em [14] e em [11], podemos encontrar exemplos que servem de motivação e dão uma intuição de como tais objetivos determinam o modo como é construído o ferramental básico desta teoria.

Definição 1.37. Sejam X um espaço topológico e um Δ -complexo finito $K = \{\sigma_\alpha : \Delta^{j(\alpha)} \rightarrow X\}_{\alpha \in \Lambda}$, de dimensão m sobre X . Dado $n \in \{0, \dots, m\}$, indica-se por $C_n(X)$ o grupo abeliano livre (ou seja, o \mathbb{Z} -módulo) gerado pelos n -simplexos de K . Os elementos de $C_n^\Delta(X)$ são chamados **n -cadeias**.

1 Introdução à Teoria de Homologia

Ou seja, toda n -cadeia pode ser escrita como a soma formal $\sum_{\alpha} p_{\alpha} \sigma_{\alpha}$, onde $p_{\alpha} \in \mathbb{Z}$ e σ_{α} é n -simplexo. Se $n > m$, ou $n < 0$, então $C_n^{\Delta}(X)$ é o \mathbb{Z} -módulo nulo.

Ao denotarmos $C_n^{\Delta}(X)$ em vez de $C_n^{\Delta}(K)$, fazemos a identificação das n -cadeias com o espaço topológico, enquanto o correto seria identificá-las com a triangularização em questão. Ocorre que, como demonstraremos, os grupos de homologia, objetivo principal deste capítulo, são característicos do espaço topológico. Mais ainda: dois Δ -complexos distintos sobre espaços topológicos homotopicamente equivalentes geram grupos de homologia isomorfos. Pelo mesmo motivo, um espaço topológico e um Δ -complexo sobre si muitas vezes serão referidos sem distinção.

Definição 1.38. Dado um Δ -complexo X , definiremos o **operador de bordo do Δ -complexo** como o homomorfismo entre cadeias $\partial_n : C_n^{\Delta}(X) \rightarrow C_{n-1}^{\Delta}(X)$ definido a partir da base:

$$\partial_n(\sigma_{\alpha}) = \sum_i (-1)^i \sigma_{\alpha}|[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n],$$

e estendido linearmente. Se o simplexo é de dimensão zero, seu bordo é definido como zero.

Na definição acima, para que a imagem do homomorfismo ∂_n esteja em C_{n-1}^{Δ} , está sendo usada a identificação entre $\sigma_{\alpha}|[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]$ e o simplexo de X que mapeia Δ^{n-1} nesta $(n-1)$ -face, cuja existência é garantida pela definição de Δ -complexo, conservando-se a ordem dos vértices. Ainda, $\partial_n(\sigma_{\alpha})$ é dito o **bordo do simplexo σ_{α}** .

Proposição 1.39. Dado um Δ -complexo X , a composição $C_n^{\Delta}(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}^{\Delta}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}^{\Delta}(X)$ é zero.

Demonstração. Dado $\sigma \in C_n^{\Delta}$, temos que

$$\partial_{n-1} \partial_n(\sigma) = \partial_{n-1} \left(\sum_i (-1)^i \sigma|[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n] \right),$$

logo,

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \partial_n(\sigma) &= \sum_i (-1)^i \partial_{n-1}(\sigma|[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]) \\ &= \sum_i \sum_j (-1)^i (-1)^j (\sigma|[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_n]). \end{aligned}$$

Se $j < i$, a remoção do i -ésimo termo não muda o fato de que o termo que carrega o índice j é o j -ésimo termo da sequência. Por outro lado, se $j > i$, após a remoção do i -ésimo termo, teremos que o termo que carrega o índice j será o $(j-1)$ -ésimo termo da sequência, assim, podemos reescrever a soma como:

$$\sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \sigma|[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]$$

$$+ \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma[[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_n]].$$

Comutando-se os índices i e j na segunda somatória:

$$\begin{aligned} & \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j \sigma[[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]] \\ & + \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j (-1) \sigma[[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]] = 0 \end{aligned}$$

□

Corolário 1.40. Temos que $\text{im } \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$, logo, de acordo com a Definição 1.1,

$$C_*(X) \doteq \dots \longrightarrow C_{n+1}^\Delta(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n^\Delta(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}^\Delta(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \longrightarrow C_1^\Delta(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0^\Delta(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

é um complexo de cadeias.

Notemos que, pela forma como é construído o complexo de cadeias $C_*(X)$, as cadeias $C_n(X)$ com $n < 0$ são todas grupos triviais, de modo que costuma-se considerar apenas as cadeias $C_n(X)$ com $n \geq 0$, além da cadeia $C_{-1}(X)$ que é 0, que se dá pela convenção adotada de que para cada $\sigma \in C_0^\Delta(X)$, $\partial_0(\sigma) = 0$.

Definição 1.41. Dado um Δ -complexo X munido de seu complexo de cadeias, os elementos de $\ker \partial_n$ são chamados n -**ciclos**, ou ciclos de dimensão n e os elementos de $\text{im } \partial_{n+1}$ são chamados de n -**bordos**, ou bordos de dimensão n .

De igual maneira foi apresentado na Definição 1.2, podemos tomar o quociente entre tais submódulos.

Definição 1.42. Dado um Δ -complexo X munido de seu complexo de cadeias, o grupo quociente $H_n^\Delta = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}$ é denominado n -ésimo **grupo de homologia simplicial** de X .

Uma vez que \mathbb{Z} é um domínio de ideais principais (DIP), temos que, pelo Teorema A.8, $\ker \partial_n$ e $\text{im } \partial_{n+1}$ são livres e finitamente gerados, mais ainda, pela Proposição A.12, $H_n^\Delta(X)$ é finitamente gerado. Cada gerador de $H_n^\Delta(X)$ é dito n -**gerador de homologia simplicial** de X . Denotamos a **homologia** de X por $H_*(X) = \{H_n(X)\}_{n \geq 0}$.

Observação 1.43. Podemos notar que, se a dimensão do Δ -complexo X for m , como as funções de bordo são homomorfismos,

$$\forall n > m, H_n^\Delta(X) = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1} = C_n^\Delta / \text{im } \partial_{n+1} = 0 / \text{im } \partial_{n+1} \simeq 0.$$

Além disso,

$$H_m^\Delta = \ker \partial_m / \text{im } \partial_{m+1} = \ker \partial_m / 0 \simeq \ker \partial_m.$$

1 Introdução à Teoria de Homologia

A partir do Teorema da Estrutura de Grupos Abelianos Finitamente Gerados, cada grupo $H_n^\Delta(X)$ pode ser escrito como soma direta de cópias de \mathbb{Z} com grupos abelianos cíclicos finitos do tipo \mathbb{Z}_{p_i} , onde p_i é a ordem do grupo e dito **coeficiente de torção** ([14]).

Definição 1.44. Se $H_n^\Delta(X) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_n} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k}$, então β_n é dito **número de Betti** de X e corresponde ao número de geradores livres de $H_n^\Delta(X)$, ou seja, o número de geradores de ordem infinita.

Cada número de Betti β_n indica o número de geradores de homologia n -dimensional em X , que não são homólogos entre si. Intuitivamente falando, temos que β_1 indica o número de “buracos” 1-dimensionais, que podem ser pensados como curvas fechadas de interior vazio e β_2 indica o número de “buracos” 2-dimensionais, que podem ser pensados como regiões ocas. Ainda, na seção de Homologia Singular, será demonstrado que β_0 representa o número de componentes conexas por caminho de X .

Exemplo 1.45. A partir do complexo simplicial da Figura 1.4, podemos construir o Δ -complexo $S = \{\sigma_i\}_{i=1}^{10}$, onde

$$\sigma_1(\Delta^0) = [a], \sigma_2(\Delta^0) = [b], \sigma_3(\Delta^0) = [c], \sigma_4(\Delta^0) = [d], \sigma_5(\Delta^1) = [a, b],$$

$$\sigma_6(\Delta^1) = [a, c], \sigma_7(\Delta^1) = [b, c], \sigma_8(\Delta^1) = [a, d], \sigma_9(\Delta^1) = [d, c] \text{ e } \sigma_{10}(\Delta^2) = [a, b, c].$$

Disto, as n -cadeias são dadas por:

$$C_0^\Delta = \mathbb{Z}\{[a], [b], [c], [d]\}, C_1^\Delta = \mathbb{Z}\{[a, b], [a, c], [b, c], [a, d], [d, c]\},$$

$$C_2^\Delta = \mathbb{Z}\{[a, b, c]\} \text{ e } C_n^\Delta = 0, \forall n \notin \{0, 1, 2\}.$$

Como o Δ -complexo é de dimensão 2, pelo visto na Observação 1.43, temos que $H_n^\Delta(S) = 0, \forall n \geq 3$. Além disso, $H_2^\Delta(S) \simeq \ker \partial_2$, donde temos que dado $\sigma \in S$, $\partial_2(\sigma) = 0$ quando

$$0 = \partial_2(\alpha[a, b, c]) = \alpha\partial_2([a, b, c]) = \alpha[a] - \alpha[b] + \alpha[c] \iff \alpha = 0,$$

logo, $\ker \partial_2 = 0$. Ou seja, $H_2^\Delta(S) \simeq 0$.

Ainda, temos que $H_1^\Delta = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$. Os 2-bordos são

$$\text{im } \partial_2 = \mathbb{Z}\{\partial_2([a, b, c])\} = \mathbb{Z}\{[b, c] - [a, c] + [a, b]\}.$$

Por outro lado, para encontrar o núcleo de ∂_1 , temos que

$$\partial_1(s) = 0 \iff \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \delta \in \mathbb{Z}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_1(\alpha[a, b] + \beta[a, c] + \gamma[b, c] + \lambda[a, d] + \delta[d, c]) \\ &= \alpha\partial_1([a, b]) + \beta\partial_1([a, c]) + \gamma\partial_1([b, c]) + \lambda\partial_1([a, d]) + \delta\partial_1([d, c]) \\ &= \alpha[a] - \alpha[b] + \beta[a] - \beta[c] + \gamma[b] - \gamma[c] + \lambda[a] - \lambda[d] + \delta[d] - \delta[c] \\ &= [a](\alpha + \beta + \lambda) + [b](-\alpha + \gamma) + [c](-\beta - \gamma - \delta) + [d](-\lambda + \delta) \\ &\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \lambda = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ -\beta - \gamma - \delta = 0 \\ -\lambda + \delta = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema,

$$(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \delta) = (\gamma, -\lambda - \gamma, \gamma, \lambda, \lambda) = \gamma(1, -1, 1, 0, 0) + \lambda(0, -1, 0, 1, 1),$$

ou seja, pela base dada na definição,

$$\ker \partial_1 = \mathbb{Z}\{[a, b] - [a, c] + [b, c], -[a, c] + [a, d] + [d, c]\}.$$

Então,

$$H_1^\Delta = \frac{\mathbb{Z}\{[a, b] - [a, c] + [b, c], -[a, c] + [a, d] + [d, c]\}}{\mathbb{Z}\{[b, c] - [a, c] + [a, b]\}}$$

e, portanto,

$$H_1^\Delta \simeq \mathbb{Z}\{-[a, c] + [a, d] + [d, c]\} \simeq \mathbb{Z}.$$

Finalmente, $H_0^\Delta = \ker \partial_0 / \text{im } \partial_1$. Temos que

$$\text{im } \partial_1 = \mathbb{Z}\{[a] - [b], [a] - [c], [b] - [c], [a] - [d], [d] - [c]\},$$

logo

$$H_0^\Delta \simeq \frac{\mathbb{Z}\{[a], [b], [c], [d]\}}{\mathbb{Z}\{[a] - [b], [a] - [c], [b] - [c], [a] - [d], [d] - [c]\}} \simeq \mathbb{Z}.$$

$$\text{Em resumo, } H_n^\Delta(X) \simeq \begin{cases} 0, & \text{se } n \in \{2, 3, \dots\} \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, 1. \end{cases}$$

Assim, S tem números de Betti $\beta_0 = \beta_1 = 1$ e $\beta_n = 0$, para $n \notin \{0, 1\}$.

1 Introdução à Teoria de Homologia

Exemplo 1.46. (Toro de revolução \mathbb{T}): recuperando o Exemplo 1.33, temos que $C_1^\Delta = \mathbb{Z}\{v\}$, $C_2^\Delta = \mathbb{Z}\{a, b, c\}$ e $C_3^\Delta = \mathbb{Z}\{U, L\}$. O complexo de cadeias fica

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}\{U, L\} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\{a, b, c\} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\{v\} \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Novamente, pelo visto na Observação 1.43, do fato de que o Δ -complexo sobre o toro tem dimensão 2, temos que $H_n^\Delta \simeq 0, \forall n \geq 3$. Ainda, $H_2^\Delta \simeq \ker \partial_2$, onde $\partial_2(x) = 0 \iff \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ e

$$0 = \partial_2(\alpha U + \beta L) = \alpha \partial_2(U) + \beta \partial_2(L) = \alpha(a + b - c) + \beta(a + b - c) = (\alpha + \beta)(a + b - c)$$

$$\iff \alpha + \beta = 0 \iff \alpha = -\beta,$$

logo, $H_2^\Delta \simeq \mathbb{Z}\{U - L\} \simeq \mathbb{Z}$.

Prosseguindo, $H_1^\Delta = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$. Temos que $\partial_1(a) = \partial_1(b) = \partial_1(c) = v - v = 0$, ou seja, $\ker \partial_1 = \mathbb{Z}\{a, b, c\}$. Ainda, $\text{im } \partial_2 = \mathbb{Z}\{\partial_2(U), \partial_2(L)\} = \mathbb{Z}\{a + b - c\}$, logo,

$$H_1^\Delta = \frac{\mathbb{Z}\{a, b, c\}}{\mathbb{Z}\{a + b - c\}} = \frac{\mathbb{Z}\{a, b, a + b - c\}}{\mathbb{Z}\{a + b - c\}} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Finalmente,

$$H_0^\Delta = \ker \partial_0 / \text{im } \partial_1 = \ker \partial_0 / 0 \simeq \ker \partial_0 = \mathbb{Z}\{[v]\} \simeq \mathbb{Z}.$$

$$\text{Em resumo, } H_n^\Delta(X) \simeq \begin{cases} 0, & \text{se } n \in \{3, 4, \dots\} \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } n = 1. \end{cases}$$

De modo que \mathbb{T} tem $\beta_0 = 1, \beta_1 = 2, \beta_2 = 1$ e $\beta_n = 0$ para qualquer outro valor de n .

1.4 Homologia Singular

Faz sentido demandarmos que os números de Betti de um espaço topológico sejam invariantes pela triangularização. De fato, na seção anterior, um espaço topológico e uma triangularização sua foram considerados muitas vezes sem distinção. Ocorre que a natureza combinatória da Teoria de Homologia Simplicial dificulta a demonstração deste e de outros argumentos topológicos. A Teoria de Homologia Singular, por sua vez, é desenvolvida a partir da determinação de que um n -simplexo não é necessariamente um homeomorfismo entre Δ^n e um espaço topológico, mas, mais geralmente, uma aplicação contínua. Assim, apresenta mais claramente uma natureza topológica, o que a torna mais

adequada para a demonstração de características topológicas inferidas a partir do cálculo da homologia. Por outro lado, para o cálculo da homologia em exemplos concretos, a homologia simplicial em geral é mais adequada, devido às cardinalidades envolvidas, além de ser dotada de uma construção intuitiva. A possibilidade de se utilizar ao mesmo tempo os resultados advindos das duas teorias homológicas se materializa no fato, a ser apresentado neste capítulo, de que são equivalentes, em certo contexto.

Definição 1.47. Dado um espaço topológico X , um n -simplexo singular é uma função contínua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

O termo “singular” origina-se no fato de que a definição dada não impede que a imagem de um simplexo padrão em X contenha singularidades. Por exemplo, dados um espaço topológico não vazio X e um ponto $x \in X$, uma função $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$, que leve todos os pontos de Δ^2 em x é um exemplo de simplexo singular. Da simplicidade da definição deriva-se o fato de que cadeias singulares podem ser definidas em qualquer espaço topológico, o que é mais geral do que a coleção de espaços topológicos triangularizáveis, que é onde se podem definir os simplexos em homologia simplicial.

A partir deste ponto, os simplexos e as cadeias definidos na seção de Homologia Simplicial serão referidos por simplexos simpliciais e cadeias simpliciais, respectivamente.

Definição 1.48. Seja $S_n(X)$ o \mathbb{Z} -módulo livre gerado a partir do conjunto formado por todos os n -simplexos singulares possíveis sobre um espaço topológico X . Os elementos de $S_n(X)$ são ditos n -cadeias singulares. Definimos $S_n(X) = 0$ para $n < 0$.

Ou seja, as n -cadeias singulares são todas as somas formais do tipo $\sum_i n_i \sigma_i$ com $n_i \in \mathbb{Z}$ e σ_i função contínua de Δ^n em X . Fica evidente que, a menos que X se resuma a uma quantidade finita de pontos, o conjunto dos geradores das n -cadeias singulares é de cardinalidade infinita.

A função de bordo é definida de semelhante maneira o foi para as n -cadeias simpliciais.

Definição 1.49. O homomorfismo de bordo $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ é tal que

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma[[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n],$$

onde há a identificação canônica entre $[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]$ e Δ^{n-1} , preservando-se a orientação.

A identificação na definição acima faz com que $\sigma[[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]$ seja identificado com uma função contínua mapeando Δ^{n-1} em X , ou seja, com um $(n-1)$ -simplexo singular.

1 Introdução à Teoria de Homologia

Da similitude entre as funções de bordo definidas para cadeias simpliciais e cadeias singulares, podemos aproveitar, neste contexto, o resultado obtido em 1.39, ou seja, $\partial_n \partial_{n+1} = 0$. Assim, as n -cadeias singulares e os operadores de bordo acima definidos formam um complexo de cadeia e, disto, podem ser definidos grupos de homologia singular.

Definição 1.50. *Dados um espaço topológico X e seu complexo de cadeias $(S_p(X), \partial_p)_{p \in \mathbb{Z}}$, o n -ésimo grupo de homologia singular é definido como $H_n^{Sg}(X) \doteq \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}$.*

Cada gerador de $H_n^{Sg}(X)$ é dito n -gerador de homologia singular de X .

Teorema 1.51. *Se X e Y são espaços topológicos homeomorfos, então, dado $n \in \mathbb{N}$, $H_n^{Sg}(X)$ e $H_n^{Sg}(Y)$ são isomorfos.*

A demonstração do teorema acima parte da construção de uma bijeção entre os geradores de $S_n(X)$ e $S_n(Y)$ da seguinte maneira, seja f homeomorfismo entre X e Y . Se $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ é gerador de $S_n(X)$, então $f \circ \sigma : \Delta^n \rightarrow X \rightarrow Y$ é gerador de $S_n(Y)$. De modo análogo, pode-se associar cada gerador de $S_n(Y)$ com um gerador de $S_n(X)$ através de f^{-1} . A partir da bijeção entre as n -cadeias, obtida por extensão linear da bijeção entre os geradores, pode-se tomar uma bijeção induzida entre os n -ciclos, os n -bordos e, finalmente, entre os respectivos n -grupos de homologia. Tal demonstração não está apresentada neste texto, pois, será demonstrado que mesmo espaços topológicos homotopicamente equivalentes têm grupos de homologia isomorfos, o que implica necessariamente a validade para espaços topológicos homeomorfos, de acordo com o visto em B.8.

Proposição 1.52. *Se X pode ser decomposto na união disjunta de componentes conexas por caminho X_α , $\alpha \in I$, então $H_n^{Sg}(X)$ é isomorfo à soma direta $\bigoplus_{\alpha \in I} H_n^{Sg}(X_\alpha)$.*

Demonstração. De fato, como para todo $n \in \mathbb{N}$, Δ^n é conexo por caminhos e σ_i é contínua, então todo simplexo singular tem imagem conexa por caminhos, logo, $\forall \sigma_i : \Delta^n \rightarrow X, \exists \alpha \in I$, tal que $\sigma_i(\Delta^n) \subset X_\alpha$. Disto, a coleção de simplexos singulares é dada pela união disjunta dos simplexos singulares com imagem contida em cada X_α e então $S_n(X) = \bigoplus_{\alpha \in I} S_n(X_\alpha)$. Consequentemente, da linearidade dos operadores de bordo $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$, temos que $\ker \partial_n$ e $\text{im } \partial_n$ também podem ser cindidos numa soma direta em α . Logo, pelas propriedades de módulo, $H_n^{Sg}(X) \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} H_n^{Sg}(X_\alpha)$. \square

Temos então um significado intuitivo para o 0-ésimo número de Betti em homologia singular: este indica a quantidade de componentes conexas por caminho.

Proposição 1.53. *Se X é não vazio e conexo por caminhos, então $H_0^{Sg}(X) \simeq \mathbb{Z}$. De modo mais geral, se X é decomponível na união disjunta de n componentes conexas por caminhos, então $H_0^{Sg}(X) \simeq \mathbb{Z}^n$.*

Demonstração. De fato, como $\partial_0 = 0$, temos que $H_0^{Sg}(X) = S_0(X)/\text{im } \partial_1$. Dado que $S_0(X)$ é formado pelas combinações lineares dos $\sigma_i : \Delta^0 \rightarrow X$, com coeficientes inteiros, podemos definir o homomorfismo $\varepsilon : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, de modo que $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$. Tal homomorfismo, por definição, é sobrejetivo, dado que X é não vazio.

Provemos que $\ker \varepsilon = \text{im } \partial_1$, quando X é conexo por caminhos. Inicialmente, dado um 1-simplexo singular $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$, temos que

$$\varepsilon(\partial_1(\sigma)) = \varepsilon(\sigma|[e_1] - \sigma|[e_0]) = \varepsilon(\sigma_j - \sigma_k) = 1 - 1 = 0,$$

onde σ_j e σ_k são os 0-simplexos singulares correspondente às restrições de σ a cada face de Δ^1 ; disto, $\text{im } \partial_1 \subset \ker \varepsilon$.

Por outro lado, seja $\sum_i n_i \sigma_i \in \ker \varepsilon$, onde $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ e $\{\sigma_i\}$ é conjunto de 0-simplexos singulares, de modo que $\sum_i n_i = 0$. Se X é conexo por caminhos, podemos definir um caminho $\tau_i : I \rightarrow X$, onde I é o intervalo fechado de 0 a 1 em \mathbb{R} , de modo que $\tau_i(0) = \sigma_0(e_0)$ e $\tau_i(1) = \sigma_i(e_0)$, indicados a partir daqui apenas por σ_0 e σ_i , respectivamente. Seja o homomorfismo $\varphi : [e_0, e_1] \rightarrow I$, tal que $\varphi(te_1 + (1-t)e_0) = t$, podemos fazer $\bar{\tau}_i \doteq \tau_i \circ \varphi : \Delta^1 = [e_0, e_1] \rightarrow X$. Assim, $\sum_i n_i \bar{\tau}_i \in S_1(X)$ e é tal que

$$\begin{aligned} \partial(\sum_i n_i \bar{\tau}_i) &= \sum_i n_i \partial(\bar{\tau}_i) = \sum_i n_i (\bar{\tau}_i(e_1) - \bar{\tau}_i(e_0)) \\ &= \sum_i n_i (\tau_i(1) - \tau_i(0)) = \sum_i n_i \sigma_i - \sum_i n_i \sigma_0 = \sum_i n_i \sigma_i - \sigma_0 \sum_i n_i = \sum_i n_i \sigma_i, \end{aligned}$$

pois $\sum_i n_i = 0$. Logo, $\sum_i n_i \sigma_i \in \text{im } \partial_1$ e então, $\ker \varepsilon \subset \text{im } \partial_1$.

Então, $H_0^{Sg}(X) = S_0(X)/\ker \varepsilon$. Disto, pelo Primeiro Teorema de Isomorfismo para grupos [22], $H_0^{Sg} \simeq \text{im } \varepsilon = \mathbb{Z}$. Podemos obter a segunda afirmação desta proposição de forma imediata ao associarmos o resultado recém-obtido com a proposição anterior. \square

Proposição 1.54. *Se X é um ponto, então $H_0^{Sg}(X) \simeq \mathbb{Z}$ e $\forall n > 0, H_n^{Sg}(X) \simeq 0$.*

Demonstração. Indicando $X = \{p\}$, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um único n -simplexo singular $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow X$ que é $\sigma_n(x) = p, \forall x \in \Delta^n$, ou seja, $S_n(X) = \{k\sigma_n : k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. Além disso,

$$\partial(\sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1} = \sigma_{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i,$$

que resulta em 0 para n ímpar e em σ_{n-1} para n par diferente de zero. Assim, temos o complexo de cadeias

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

com funções de bordo que alternam entre isomorfismos e homomorfismos triviais, exceto

1 Introdução à Teoria de Homologia

para $\partial_0 = \partial_1 = 0$. Assim, para cada $n > 0$, se $\partial_n = 0$, então

$$H_n^{Sg}(X) = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1} \simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0,$$

caso contrário,

$$H_n^{Sg}(X) = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1} \simeq 0/0 = 0.$$

Por outro lado, $H_0^{Sg}(X) = \ker \partial_0 / \text{im } \partial_1 \simeq \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$. □

1.5 Equivalência entre as Homologias

Enquanto a homologia singular está definida para qualquer espaço topológico, a homologia simplicial foi definida em Δ -complexos, conseqüentemente, em espaços topológicos triangularizáveis. Nesta última classe de espaços, as duas teorias são equivalentes, de modo que nos exemplos seguintes poderemos utilizar a capacidade computacional da Teoria de Homologia Simplicial ao mesmo tempo que as interpretações topológicas obtidas a partir da Teoria de Homologia Singular. Isto se dá, pois, dado um Δ -complexo X , podemos construir um homomorfismo $h_n : C_n^\Delta(X) \rightarrow S_n(X)$, basicamente tomando cada σ gerador de $C_n^\Delta(X)$ e considerando-o como um n -simplexo singular, tendo em vista que a definição de n -simplexo simplicial é um caso particular da definição de n -simplexo singular. Em seguida, basta estendermos h_n linearmente a partir da base. A partir disto, podemos induzir um homomorfismo $h_{n,*} : H_n^\Delta(X) \rightarrow H_n^{Sg}(X)$.

Teorema 1.55 ([11]). *Seja X um Δ -complexo, então, para todo n , a aplicação $h_{n,*} : H_n^\Delta(X) \rightarrow H_n^{Sg}(X)$ é um isomorfismo.*

A demonstração deste teorema utiliza os conceitos de homologia relativa e homologia reduzida, que fogem ao escopo deste texto.

Como as duas teorias de homologia aqui apresentadas foram provadas equivalentes, deste ponto em diante, H_n^Δ e H_n^{Sg} serão referidas apenas por H_n . Além disto, a identificação de cada simplexo apresentado ser simplicial ou singular ficará a cargo do contexto.

1.6 Invariância Homotópica

Um dos principais resultados sobre homologia obtidos neste capítulo é que espaços homotopicamente equivalentes têm grupos de homologia isomorfos. Provaremos que uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ induz um homomorfismo $f_{*,n} : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ para cada n , e que se f é uma equivalência homotópica, então cada $f_{*,n}$ será um isomorfismo.

Definição 1.56. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre eles. O **homomorfismo induzido entre as n -cadeias** $f_{\sharp, n} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ é definido da seguinte maneira: se $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ é um n -simplexo em X , então $f_{\sharp, n}(\sigma) = f \sigma$, onde $C_n(Y) \ni f \sigma : \Delta^n \rightarrow Y$, e estendendo-se linearmente, $f_{\sharp, n}(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i f_{\sharp, n}(\sigma_i) = \sum_i n_i f \sigma_i$.

Da Definição 1.3, temos que o morfismo graduado $f_{\sharp} = (f_{\sharp, n})_{n \in \mathbb{Z}}$ é um homomorfismo entre os complexos de cadeias.

Proposição 1.57. O homomorfismo f_{\sharp} como acima definido é tal que $f_{\sharp, n-1} \partial_n^X = \partial_n^Y f_{\sharp, n}$, onde ∂_n^X e ∂_n^Y são homomorfismos de bordo em X e Y , respectivamente.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} f_{\sharp, n-1}(\partial \sigma) &= f_{\sharp, n-1} \left(\sum_i (-1)^i \sigma | [e_0 \dots \hat{e}_i \dots e_n] \right) \\ &= \sum_i (-1)^i f_{\sharp, n-1}(\sigma | [e_0 \dots \hat{e}_i \dots e_n]) \\ &= \sum_i (-1)^i f \sigma | [e_0 \dots \hat{e}_i \dots e_n] = \partial(f \sigma) = \partial f_{\sharp, n}(\sigma). \end{aligned}$$

Do fato que os operadores envolvidos são lineares, basta estendermos o resultado acima para qualquer cadeia e temos o resultado pretendido. \square

Quando não resultar em prejuízo à compreensão, omitiremos o índice n dos homomorfismos induzidos, de modo que o resultado acima pode ser expresso, de modo simplificado, por $f_{\sharp} \partial = \partial f_{\sharp}$.

Uma consequência da proposição acima é que f_{\sharp} mapeia ciclos fechados de X em ciclos fechados de Y e mapeia bordos de simplexes de X em bordos de simplexes de Y . Mais precisamente, dado n , se $\alpha \in \ker \partial(C_n(X))$, então $\partial(\alpha) = 0$, logo,

$$\partial(f_{\sharp}(\alpha)) = f_{\sharp}(\partial(\alpha)) = f_{\sharp}(0) = 0,$$

ou seja,

$$f_{\sharp}(\ker \partial^X) \subseteq \ker \partial^Y.$$

Além disso, seja $\beta \in \text{im } \partial(C_n(X))$, então $\exists \beta' \in C_n(X)$ tal que $\partial(\beta') = \beta$, disto, $f_{\sharp}(\beta') \in C_n(Y)$ e

$$\text{im } \partial(C_n(Y)) \ni \partial(f_{\sharp}(\beta')) = f_{\sharp}(\partial(\beta')) = f_{\sharp}(\beta),$$

logo,

$$f_{\sharp}(\text{im } \partial^X) \subseteq \text{im } \partial^Y.$$

Proposição 1.58. *Dados dois espaços topológicos X e Y , uma aplicação contínua entre X e Y induz um homomorfismo entre os seus respectivos grupos de homologia.*

Demonstração. De fato, podemos definir o homomorfismo $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ induzido por $f_{\#}$, da seguinte maneira, se $\rho \in H_n(X)$, então existe $\{\sigma_i\}_{i \in J} \subset \ker \partial(C_n(X))$, tal que $\rho = \{\sigma_i\}_{i \in J}$ e $\forall j, k \in J, \sigma_j - \sigma_k \in \text{im } \partial(C_{n+1}(X))$. Definindo $f_*(\rho) = \{f_{\#}(\sigma_i)\}_{i \in J}$, temos que, $\{f_{\#}(\sigma_i)\}_{i \in J} \subset \ker \partial(C_n(Y))$ e $\forall j, k \in J$, temos $f_{\#}(\sigma_j) - f_{\#}(\sigma_k) = f_{\#}(\sigma_j - \sigma_k) \in \text{im } \partial(C_{n+1}(Y))$, logo, $f_*(\rho) \in H_n(Y)$. \square

Dois propriedades imediatas da definição de f_* , que valem a pena ser destacadas são

- Sejam X, Y e Z espaços topológicos com $g : X \rightarrow Y$ e $f : Y \rightarrow Z$ aplicações contínuas, então $(fg)_* = f_*g_*$. Isto vem da associatividade da composição

$$\Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z;$$

- Dado X espaço topológico, temos que $(id_X)_* = id_{H_n(X)}$.

Finalmente, podemos apresentar o principal resultado desta seção.

Teorema 1.59. *Se dois mapas $f, g : X \rightarrow Y$ são homotópicos, então eles induzem os mesmos homomorfismos $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.*

Demonstração. Sejam uma homotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ entre f e g e um simplexo singular $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$, podemos formar a composição $F \circ (\sigma \times id_I) : \Delta^n \times I \rightarrow X \times I \rightarrow Y$. Provemos, inicialmente, que o produto $\Delta^n \times I$, o qual denominaremos **prisma**, pode ser dado como uma união de $(n + 1)$ -simplexos, como exemplificado na Figura 1.11 para $n = 1$ e $n = 2$.

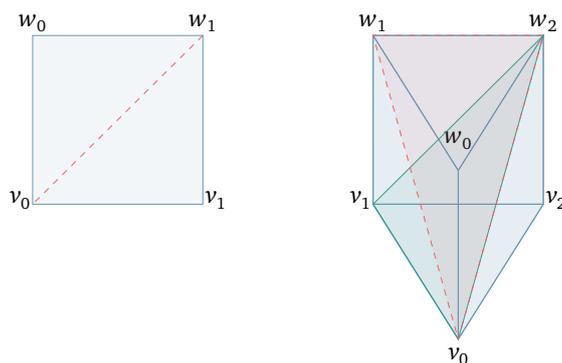


Figura 1.11: Prismas para $\Delta^1 \times I$ e $\Delta^2 \times I$

Seja $\Delta^n \times \{0\} = [v_0, \dots, v_n] \doteq v$ e $\Delta^n \times \{1\} = [w_0, \dots, w_n] \doteq w$, onde ambos conservam a ordem de Δ^n , ou seja, tomando a projeção canônica $\pi : \Delta^n \times I \rightarrow \Delta^n$, temos que $\pi(v_i) = \pi(w_i) = e_i$. Seja ainda a coleção de n -simplexos definidos da seguinte maneira, substituamos o n -ésimo vértice de v pelo n -ésimo vértice de w , obtendo $[v_0, \dots, v_{n-1}, w_n]$.

Em seguida, tomemos o n -simplexo obtido e substituamos v_{n-1} por w_{n-1} . Prosseguindo sucessivamente desse modo, obtemos a coleção

$$S = \{v\} \cup \{[v_0, \dots, v_{i-1}, w_i, \dots, w_n] : 1 \leq i \leq n\} \cup \{w\}.$$

Intuitivamente falando, percorrer os simplexos de S representa partir do simplexo v e chegar no simplexo w pela substituição de todos os vértices, um a cada passo, obtendo-se n -simplexos, de certo modo, intermediários entre v e w .

A região do prisma $\Delta^n \times I$ entre os simplexos

$$[v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$$

e

$$[v_0, \dots, v_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$$

é o $(n + 1)$ -simplexo

$$[v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, w_i, w_{i+1}, \dots, w_n].$$

Logo, o prisma é a união dos $(n + 1)$ -simplexos $\Delta^n \times I = \bigcup_{i=0}^n [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$.

Agora, definamos o **operador de prisma** $P : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ da seguinte maneira:

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i F \circ (\sigma \times id_I) | [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n].$$

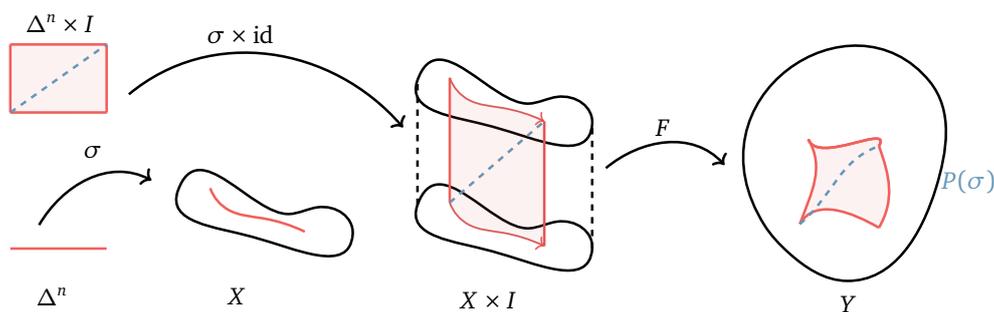


Figura 1.12: Construção do Prisma

Como ilustrado na Figura 1.12, podemos observar que $F \circ (\sigma \times id_I) | [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ é o mergulho do $(n + 1)$ -simplexo $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ (um dentre os que compõem o prisma $\Delta^n \times I$) no espaço Y , pela composição $F \circ (\sigma \times id_I)$. Logo, é um $(n + 1)$ -simplexo singular em Y do qual pode-se calcular o bordo, conseqüentemente, possibilitando a ob-

1 Introdução à Teoria de Homologia

tenção do bordo do prisma:

$$\partial P(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial(F \circ (\sigma \times id_I))[[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]].$$

Ocorre que para $0 \leq j \leq i$, o j -ésimo vértice do $(n+1)$ -simplexo é v_j , mas para $i < j \leq n+1$, o j -ésimo vértice é w_{j-1} . Disto,

$$\begin{aligned} \partial P(\sigma) = & \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times id_I) [[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]] \right. \\ & \left. + \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times id_I) [[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_{j-1}, \dots, w_n]] \right). \end{aligned}$$

Fazendo $k = j$ no primeiro somatório em j e $k = j - 1$ no segundo somatório em j , temos:

$$\begin{aligned} \partial P(\sigma) = & \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^i (-1)^i (-1)^k F \circ (\sigma \times id_I) [[v_0, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]] \right. \\ & \left. + \sum_{k=i}^{n+1} (-1)^i (-1)^{k+1} F \circ (\sigma \times id_I) [[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_k, \dots, w_n]] \right). \end{aligned}$$

Isolando e analisando apenas os termos do tipo $i = k$, temos

$$(-1)^{2i} \sum_{i=0}^n \left(F \circ (\sigma \times id_I) [[v_0, \dots, \dots, \hat{v}_i, w_i, \dots, w_n]] - F \circ (\sigma \times id_I) [[v_0, \dots, \dots, v_i, \hat{w}_i, \dots, w_n]] \right),$$

ocorre que para $0 < i < n$, o termo i da expressão à esquerda é

$$F \circ (\sigma \times id_I) [[v_0, \dots, v_{i-1}, \hat{v}_i, w_i, \dots, w_n]]$$

enquanto que o termo $i - 1$ da expressão à direita é

$$-F \circ (\sigma \times id_I) [[v_0, \dots, v_{i-1}, \hat{w}_{i-1}, w_i, \dots, w_n]],$$

ou seja, são iguais, com sinal trocado. Portanto, temos uma soma telescópica donde restam apenas os termos $i = 0$ à esquerda,

$$\begin{aligned} & F \circ (\sigma \times id_I) [[\hat{v}_0, w_0, \dots, w_n]] \\ & F \circ (\sigma \times id_I) [[w_0, \dots, w_n]] \\ & = F \circ (\sigma \times id_I) (\Delta^n \times \{0\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= F(\sigma(\Delta^n), 0) \\
 &= f\sigma(\Delta^n) = f_{\sharp}(\sigma)
 \end{aligned}$$

e $i = n$ à direita,

$$\begin{aligned}
 &-F \circ (\sigma \times id_I)|[v_0, \dots, v_n, \hat{w}_n] \\
 &= -F \circ (\sigma \times id_I)|[v_0, \dots, v_n] \\
 &= -F \circ (\sigma \times id_I)(\Delta^n \times \{1\}) \\
 &= -F(\sigma(\Delta^n), 1) \\
 &= -g\sigma(\Delta^n) = -g_{\sharp}(\sigma).
 \end{aligned}$$

Visando encontrar um significado intuitivo para os outros termos de $\partial P(\sigma)$, analisemos $P(\partial\sigma)$. Temos que $\partial\sigma = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma|[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_n]$ e então

$$P(\partial\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j P(\sigma|[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_n]),$$

onde, se $i < j$, o i -ésimo vértice é e_i , logo, o i -ésimo simplexo contém tanto v_i , como w_i , enquanto que para $i > j$, o i -ésimo vértice é e_{i+1} , logo, o i -ésimo simplexo contém tanto v_{i+1} , como w_{i+1} , ou seja,

$$\begin{aligned}
 P(\partial\sigma) &= \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^j (-1)^i F \circ (\sigma \times id_I)|[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=j+1}^n (-1)^j F \circ (\sigma \times id_I)|[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{i+1}, w_{i+1}, \dots, w_n] \right),
 \end{aligned}$$

onde, invertendo a ordem dos índices e multiplicando por -1 , temos justamente os termos de $\partial P(\sigma)$ com $i \neq j$.

Fica provado que o operador de prisma satisfaz a relação $\partial P = g_{\sharp} - f_{\sharp} - P\partial$. Geometricamente falando, ∂P representa o bordo do prisma, g_{\sharp} representa o topo $\Delta^n \times \{1\}$, f_{\sharp} representa a base $\Delta^n \times \{0\}$ e $P\partial$ o prisma do bordo, ou seja, as laterais do prisma original.

Finalmente, se $\alpha \in C_n(X)$ é um ciclo, temos que $g_{\sharp}(\alpha) - f_{\sharp}(\alpha) = \partial P(\alpha) + P\partial(\alpha) = \partial P(\alpha)$, pois, o bordo de um ciclo é zero. Ou seja, $g_{\sharp}(\alpha) - f_{\sharp}(\alpha)$ é o bordo de um $(n+1)$ -simplexo, a saber, $P(\alpha)$. Disto, $g_{\sharp}(\alpha) - f_{\sharp}(\alpha)$ é equivalente a zero em $C_{n+1}(Y)$, mais ainda, $g_{\sharp}(\alpha)$ e $f_{\sharp}(\alpha)$ são equivalentes entre si. Logo, $f_* = g_*$ na classe de homologia de α . \square

Corolário 1.60. As funções $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ induzidas pela equivalência homotópica

$f : X \rightarrow Y$ são um isomorfismo para todo n .

Demonstração. De fato, pela Definição B.6, temos que existe $g : Y \rightarrow X$ contínua tal que $g \circ f \cong id_X$, logo pelo Teorema 1.58, $(g \circ f)_* = (id_X)_*$, disto, $g_* f_* = id_{H_n(X)}$. Analogamente, $f_* g_* = id_{H_n(Y)}$. Disto, f_* é um homomorfismo bijetivo com inversa g_* . \square

O teorema acima e seu corolário permitem algumas simplificações do ponto de vista computacional e geométrico de um espaço topológico sem que se percam informações do ponto de vista de homologia. Um exemplo imediato é que todo espaço contrátil X tem $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$ e $H_n(X) = 0, n > 0$.

1.7 Homologia Celular

Dado um grafo, é possível dele calcularmos os grupos de homologia, bastando-nos para tal notar que todo grafo é um complexo simplicial de dimensão 1 ([3]). Ocorre que o processo construtivo de um grafo, listagem de vértices seguida da listagem de arestas, pode, a partir da definição a ser apresentada de n -célula, ser descrito a partir de uma outra perspectiva: toma-se uma coleção de pontos, que são homeomorfos a 0-células, em seguida, em alguns pares de pontos são coladas arestas, que são homeomorfas a 1-células. Ou seja, constrói-se um espaço inserindo-se 0-células e depois uma função que identifica o bordo de 1-células com estruturas presentes no espaço e que sejam a eles homeomorfas, constituindo um novo processo de colagem. Pode-se pensar em uma possível etapa seguinte, onde tomam-se 2-células e colam seus bordos nas 1-células presentes no espaço, de modo que, recursivamente, pode-se construir um espaço com até n células. É a partir desta inspiração que definem-se os chamados CW-complexos (ou complexos celulares) com os quais, a partir da definição de célula, podem-se construir estruturas ainda mais gerais do que as que se pode obter por Δ -complexos.

Inicialmente, é necessário definir-se o que é uma colagem de espaços topológicos.

Definição 1.61. *Dados X e Y espaços topológicos, A subespaço fechado em X e $f : A \rightarrow Y$ função contínua, a **colagem dos espaços topológicos X e Y por meio de f** , denotada por $X \sqcup_f Y$ é o espaço quociente da união disjunta $X \sqcup Y$ pela relação de equivalência $a \sim f(a), \forall a \in A$.*

Ou seja

$$X \sqcup_f Y = \{\{x\} : x \in X \setminus A\} \cup \{\{y\} : y \in Y \setminus \text{im}(f)\} \cup \{\{a, f(a)\} : a \in A\}.$$

Na definição acima, também costuma-se denominar f como uma **colagem**. Definamos agora o que é uma célula.

Definição 1.62. Dado um inteiro $n \geq 1$, definimos:

- Uma n -célula, ou **célula de dimensão n** é um espaço homeomorfo ao n -disco $e^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$;
- uma n -célula aberta ou **célula aberta de dimensão n** é um espaço isomorfo ao n -disco aberto $\text{int}(e^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$;
- o bordo de uma n -célula é um espaço isomorfo ao bordo de um n -disco $\partial e^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$;
- uma **célula** é um espaço que é uma n -célula para algum n .

Definidas as colagens e as células, um CW-complexo se constrói a partir de um processo de sucessivas colagens de n -células, a partir de seu bordo, em $(n - 1)$ -células.

Definição 1.63. Um **CW-complexo** é um espaço topológico X munido de uma coleção de subespaços tais que

$$\emptyset = X^{-1} \subsetneq X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^n \subseteq \dots \subseteq X,$$

de tal modo que

1. X^0 é dado pela coleção de 0-células $\{e_\alpha^0 : \alpha \in I_0\}$, onde I_0 é coleção não vazia de índices;
2. Dado $n > 0$, existe I_n coleção de índices, possivelmente vazia, $\{e_\alpha^n : \alpha \in I_n\}$ coleção de n -células e $\varphi_\alpha^n : \partial e_\alpha^n \rightarrow X^{n-1}$ coleção de colagens, de modo que podemos definir

$$\varphi^n \doteq \bigsqcup_{\alpha \in I_n} \varphi_\alpha^n : \bigsqcup_{\alpha \in I_n} \partial e_\alpha^n \rightarrow X^{n-1},$$

donde temos a colagem

$$\hat{X}^n = X^{n-1} \bigsqcup_{\varphi^n} \left(\bigsqcup_{\alpha \in I_n} e_\alpha^n \right).$$

Então, X^n é um espaço homeomorfo a \hat{X}^n e com o qual se relaciona da seguinte maneira: seja

$$\pi_n : X^{n-1} \bigsqcup_{\varphi^n} \left(\bigsqcup_{\alpha \in I_n} e_\alpha^n \right) \rightarrow X^{n-1} \bigsqcup_{\varphi^n} \left(\bigsqcup_{\alpha \in I_n} e_\alpha^n \right)$$

a projeção canônica, então o homeomorfismo $\alpha_n : \hat{X}^n \rightarrow X^n$ é tal que $\alpha_n \circ \pi_n|_{X^{n-1}} : X^{n-1} \rightarrow X^n$ é inclusão;

3. $X = \bigcup_{n \geq 0} X^n$;
4. A topologia de X é tal que $A \subseteq X$ é fechado em X se, e somente se, $A \cap X^n$ é fechado em X^n para todo n .

1 Introdução à Teoria de Homologia

Uma forma de se interpretar os homeomorfismos α_n é a seguinte: temos que \hat{X}^n é um espaço quociente composto pela união disjunta de três tipos de classes

1. Classes geradas pelos elementos de X^{n-1} que não são colados a nenhuma n -célula. Estas contêm apenas um elemento cada uma e compõem o conjunto

$$\{\{x\} \in X^{n-1} \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I_n} \varphi_\alpha^n(\partial e_\alpha^n) \right)\};$$

2. classes geradas pelos interiores das n -células, ou seja, pontos que não são colados a nenhum ponto de X^{n-1} . Estas também contêm apenas um elemento cada uma e compõem o conjunto

$$\{\{y\} \in \bigsqcup_{\alpha \in I_n} (e_\alpha^n \setminus \partial e_\alpha^n)\};$$

3. classes geradas por cada ponto de X^{n-1} no qual é colado ponto do bordo de uma (ou mais) n -célula. Estas podem conter mais de um ponto e compõem o conjunto

$$\{\{a\} \cup \{x_\alpha : \alpha \in I_n \text{ e } \varphi_\alpha^n(x_\alpha) = a\} : a \in \left(\bigcup_{\alpha \in I_n} \varphi_\alpha^n(\partial e_\alpha^n) \right)\}.$$

Então α_n é tal que para cada $\{x\}$ classe do primeiro ou do segundo tipo, $\alpha_n(\{x\}) = x$ e para cada classe do terceiro tipo $\alpha_n(\{a\} \cup \{x_\alpha : \alpha \in I_n \text{ e } \varphi_\alpha^n(x_\alpha) = a\}) = a$, ou seja, “descarta” as ambiguidades advindas de pontos que se identificam nas colagens, ficando com a versão que já estava em X^{n-1} .

Na definição acima, X^n é dito um **n -esqueleto celular**.

Se um espaço topológico X é homeomorfo a um CW-complexo, dizemos que X admite uma **estrutura de CW-complexo**. Além disso, denominamos **CW complexo de dimensão finita** se este é tal que existe algum n para o qual $X = X^n$, além disso, é dito de tipo finito se possui um número finito de células para cada n e é dito finito se possui dimensão finita e tipo finito. A **dimensão de um CW-complexo** é o maior n para o qual existem nele n -células.

Temos que todo complexo simplicial é um CW-complexo.

Exemplo 1.64. A esfera S^1 admite uma estrutura de CW-complexo construída a partir de uma 0-célula e uma 1-célula.

A motivação e as demonstrações dos resultados que se seguem nesta seção utilizam conceitos de homologia relativa, de modo que fogem ao escopo deste texto. Tais resultados podem ser encontrados, por exemplo, em [11] e [14].

Definição 1.65. *Seja X um CW-complexo, definimos as n -cadeias celulares de X sobre \mathbb{Z} como $C_n^{CW}(X) = \mathbb{Z}\{e_\alpha^n : \alpha \in I_n\}$, onde cada e_α^n é o interior de uma n -célula de X .*

Para cada $n \geq 0$, podem-se definir homomorfismos induzidos de bordo $\partial_{*,n} : C_n^{CW}(X) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1})$ e inclusão $j_{*,n-1} : H_{n-1}(X^{n-1}) \rightarrow C_{n-1}^{CW}(X)$, de modo que o **operador de bordo de homologia celular** $\partial_n^{CW} : C_n^{CW}(X) \rightarrow C_{n-1}^{CW}(X)$ é definido por $\partial_n^{CW} = j_{*,n-1} \circ \partial_{*,n}$, e é tal que $(\partial^{CW})^2 = 0$. Assim, $(C_n^{CW}, \partial_n^{CW})_{n \geq 0}$ é um complexo de cadeias e nele podem-se definir os **grupos de homologia celular** $H_n^{CW} = \ker \partial_n^{CW} / \text{im } \partial_{n+1}^{CW}$. Pode-se então provar que as homologias celulares e singulares são isomorfas.

Teorema 1.66. *Se X é CW-complexo, então temos que*

1. $H_n^{CW}(X) \simeq H_n(X)$, para todo $n \geq 0$;
2. $H_n^{CW}(X) \simeq H_n(X^n) / \text{im } \partial_{n+1}$.

Uma vez que nos resumiremos ao estudo dos Δ -complexos, ou até mesmo dos complexos simpliciais, não precisamos mais utilizar o sobrescrito “CW” na expressão dos grupos de homologia celular. Ainda, do Teorema acima podemos obter o seguinte resultado.

Corolário 1.67. *Se X é CW-complexo, então temos que*

1. *Se X for um CW-complexo sem nenhuma n -célula, então $H_n(X) = 0$;*
2. *Se X for um CW-complexo com uma quantidade k de n -células, então $H_n(X)$ é finitamente gerado por, no máximo, k elementos;*
3. *Se X é um CW-complexo sem células de dimensões $n - 1$ e $n + 1$, então $H_n(X)$ é um grupo abeliano livre cuja base tem correspondência biunívoca com as n -células de X .*

2 Homologia Persistente

Dado um fenômeno observável que pode ser analisado a partir de uma coleção de n grandezas mensuráveis a ele relacionadas, uma forma de se estruturar tal informação é, a cada manifestação do fenômeno, suas grandezas serem registradas como um ponto em \mathbb{R}^n , de modo que cada coordenada está associada sempre à mesma grandeza no decorrer dos registros. O resultado de tal processo é uma coleção de pontos em \mathbb{R}^n . A tentativa de obtenção de informações da população a partir da amostra pode se dar a partir da estimação da homologia. De modo mais preciso, dada uma coleção de pontos do \mathbb{R}^n , se, de modo condicionado a alguma função da distância euclidiana $\varepsilon > 0$, forem conectados por um simplexo pontos linearmente independentes, será obtida uma coleção de complexos simpliciais, cuja variação depende de ε . Processo que será chamado de filtração simplicial. As características homológicas que persistirem para uma maior coleção de valores de ε podem ser interpretadas como mais prováveis de estarem presentes na população de onde foi retirada tal amostra. Neste capítulo, utilizamos [4], [5], [6] e [21] como as principais referências e, em consonância com tais textos da literatura, nos restringiremos aos complexos simpliciais em vez de nos estendermos aos Δ -complexos. Além disso, os principais teoremas deste capítulo estão provados na literatura considerando cadeias de simplexos sobre corpos e, conseqüentemente, os grupos de homologia como espaços vetoriais, de modo que adotaremos neste capítulo tais especificações. Todavia, por motivos históricos, continuaremos denominando como grupos os espaços vetoriais de homologia.

2.1 Motivação

Um exemplo básico para contextualização pode ser a amostragem de pontos de uma superfície conhecida, seguida da realização de uma filtração simplicial e do registro dos grupos de homologia para cada etapa da filtração. Por ser um exemplo controlado, serve apenas para exemplificar o tipo de interpretação que esperamos do comportamento da persistência de homologia.

2 Homologia Persistente

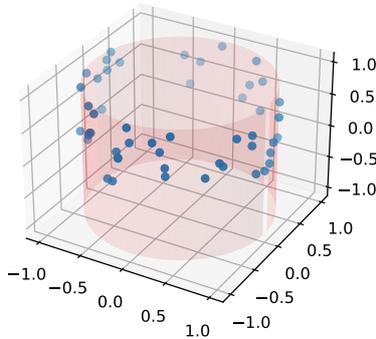
Exemplo 2.1. *Sejam*

$$S_1 : (x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

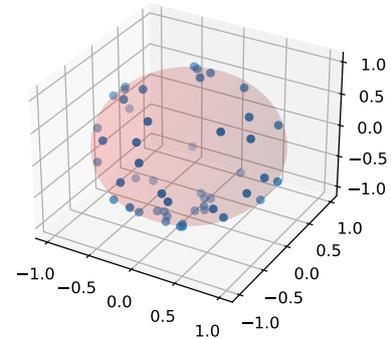
a parametrização de um tronco de cilindro, onde r é uma variável aleatória com distribuição $\mathcal{N}(1; 0, 02)$, θ tem distribuição $\mathcal{U}(0; 1)$ e z tem distribuição $\mathcal{U}(0; 2\pi)$ e

$$S_2 : (x, y, z) = ((1 + r) \cos(\theta) \sin(\phi), (1 + r) \sin(\theta) \sin(\phi), (1 + r) \cos(\phi))$$

a parametrização de uma esfera, onde r é uma variável aleatória com distribuição $\mathcal{U}(0; 0, 02)$, θ tem distribuição $\mathcal{U}(0; 2\pi)$ e ϕ tem distribuição $\mathcal{U}(0; \pi)$. Para cada uma delas, tomando-se uma amostra aleatória de tamanho 50, podemos obter as coleções de pontos da Figura 2.1, onde as superfícies aparecem em baixa opacidade.



(a) Amostra aleatória de 50 pontos a partir de S_1 .



(b) Amostra aleatória de 50 pontos a partir de S_2 .

Figura 2.1: Nuvens de pontos

Dado $\varepsilon \geq 0$, podemos tomar o complexo simplicial dado pelos simplexes do tipo $[x_1, \dots, x_n]$, gerado por cada subconjunto LI $\{x_1, \dots, x_n\}$ tal que cada par de pontos nele dista menos que ε (método pelo qual se obtém a denominada filtração simplicial de Vietoris-Rips da nuvem de pontos). Estando os pontos em um espaço tridimensional, os simplexes terão, no máximo, dimensão 2. Nas Figuras 2.2 e 2.3, encontram-se os complexos simpliciais de S_1 e S_2 , respectivamente, para $\varepsilon = 0, 02$, para $\varepsilon = 0, 05$ e para $\varepsilon = 0, 2$.

A persistência da homologia pode ser expressa em um diagrama onde cada ponto vermelho representa uma componente conexa, cada ponto azul representa um “buraco” unidimensional e cada ponto verde representa um “buraco” bidimensional (será formalizada a relação entre tais pontos e os geradores dos grupos de homologia). Para cada tal ponto, sua coordenada x é o valor de ε para o qual a componente conexa ou o “buraco” apareceu (denominaremos de instante do seu nascimento) e a coordenada y é o valor de ε para o qual a componente conexa ou o “buraco” desapareceu (denominaremos de instante de sua morte). Quanto mais longe um ponto está da diagonal, maior foi a sua persistência na família de complexos simpliciais com a variação de ε , como se pode notar na Figura 2.4.

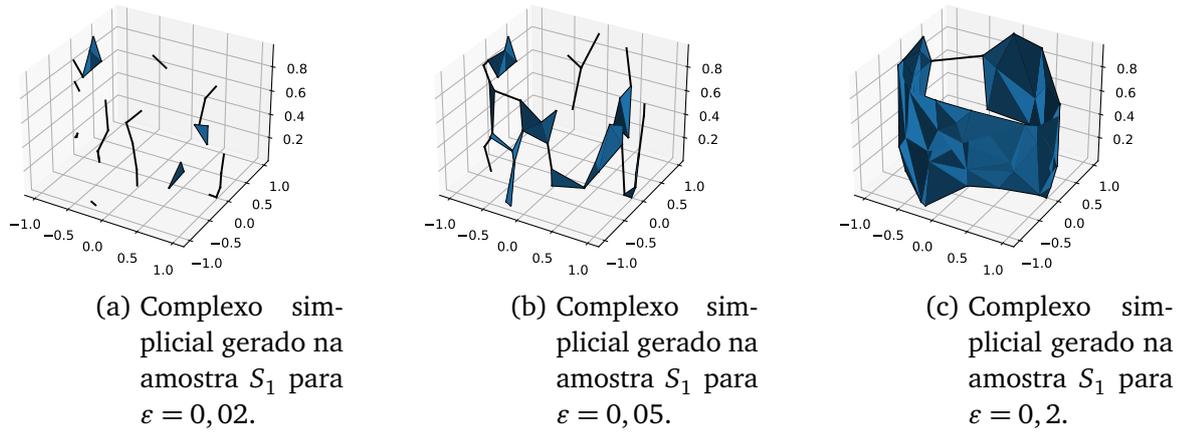


Figura 2.2: Complexos simpliciais gerados na amostragem de S_1

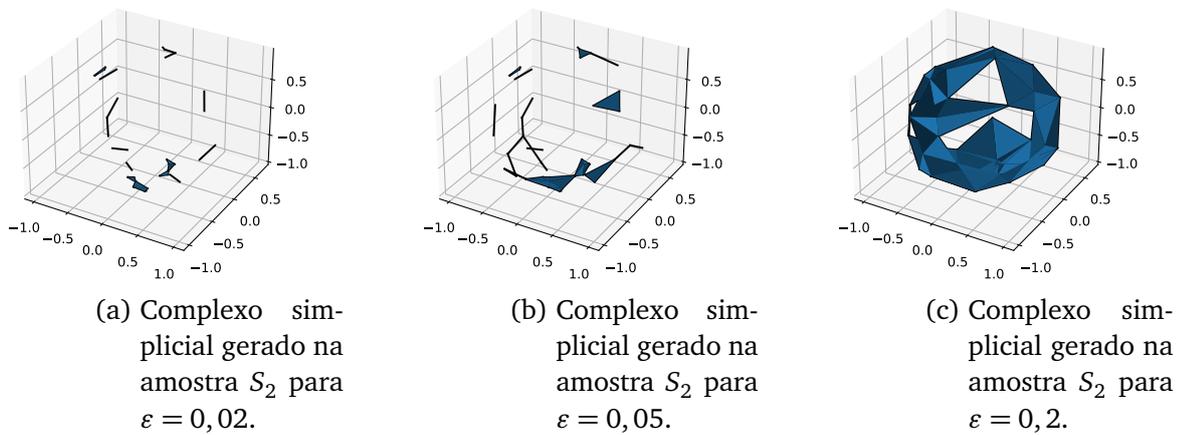


Figura 2.3: Complexos simpliciais gerados na amostragem de S_2

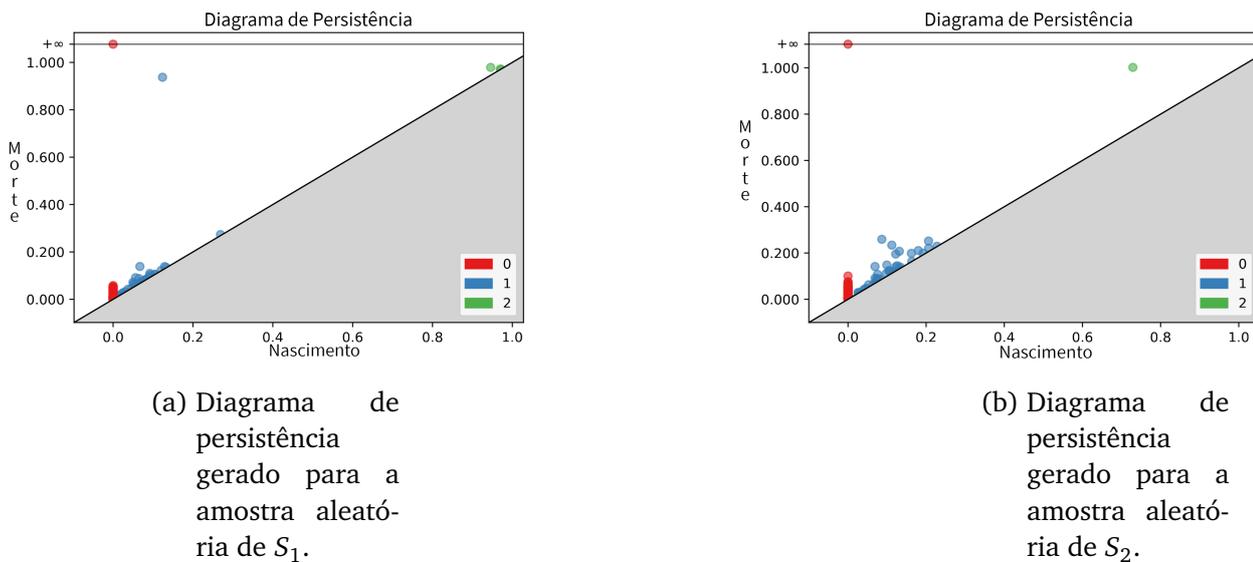


Figura 2.4: Diagramas de persistência

Notemos que os pontos mais persistentes no diagrama da amostra de S_1 dão indícios de que o objeto original é dado por uma componente conexa e contém um único “buraco” unidimensional, o que é compatível com um cilindro. Enquanto que para a amostra de S_2 , os pontos mais persistentes do diagrama correspondem a uma componente conexa e um único “buraco” bidimensional, o que é compatível com uma esfera.

2.2 Filtração e Módulo de Persistência

Na conceituação intuitiva de filtração simplicial, dada na seção anterior, apresentamos uma coleção de complexos simpliciais (em espaços topológicos), indexada por uma variável ε , que aumentavam conforme ε aumentava, pois, seu aumento acrescentava simplices ao passo que mantinha os que já havia. Torna-se, então, necessária a formalização do conceito de coleção “crescente” de complexos simpliciais.

Definição 2.2. *Seja um conjunto $T \subseteq \mathbb{R}$, uma **filtração** \mathcal{X} sobre T é uma família de espaços topológicos $\{X_i\}_{i \in T}$ tais que $X_i \subseteq X_j$ (ou seja, é um subespaço topológico) sempre que $i, j \in T$ são tais que $i \leq j$.*

Definição 2.3. *Seja um conjunto $T \subseteq \mathbb{R}$, uma **filtração simplicial** \mathcal{X} sobre T é uma família de pares $\{(X_i, K_i)\}_{i \in T}$, onde o conjunto dos X_i compõe uma filtração, K_i é um complexo simplicial sobre X_i e, além disso, $K_i \subseteq K_j$, sempre que $i, j \in T$ são tais que $i \leq j$.*

Na definição acima, se $X_i \subsetneq X_j$ e $\sigma_i \in K_i$, quando dizemos que $\sigma_i \in K_j$, estamos fazendo a extensão de $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X_i$, de modo a transformá-lo em $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X_j$.

Um caso particular de filtração (simplicial) é quando existe um espaço topológico X tal que $X_i = X$ para cada $i \in T$. Dois exemplos de construção de filtração simplicial sobre um espaço topológico fixado são a partir dos complexos simpliciais de Čech e de Vietoris-Rips que, em particular, são construídos no espaço topológico \mathbb{R}^d , mas têm definição reproduzível em qualquer espaço métrico. Nas duas seguintes definições, consideraremos a métrica euclidiana usual para, dados $t \in \mathbb{R}^+$ e $x, y \in \mathbb{R}^d$, definirmos a distância entre x e y indicada por $\|x - y\|$ e a bola aberta de centro x e raio t , indicada por

$$B(x, t) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < t\}.$$

Definição 2.4. *Seja $P \subset \mathbb{R}^d$ (munido da topologia usual) um conjunto finito de pontos, $T \subset \mathbb{R}^+$ e $\{x_0, \dots, x_k\}$ uma enumeração fixada de P . Para cada $t \in T$, o **complexo simplicial de Čech** em t é*

$$\check{C}ech(P, t) \doteq \{[x_0, \dots, x_n] : \{x_0, \dots, x_n\} \subseteq P \text{ é LI e } \bigcap_{i=0}^n B(x_i, t) \neq \emptyset\}.$$

Não é difícil notar que a coleção $\check{C}ech(P) \doteq \{(\mathbb{R}^d, \check{C}ech(P, t))\}_{t \in T}$ é uma filtração simplicial em \mathbb{R}^d , denominada **filtração simplicial de Čech** de P sobre T .

Definição 2.5. *Seja $P \subset \mathbb{R}^d$ (munido da topologia usual) um conjunto finito de pontos, $T \subset \mathbb{R}^+$ e $\{x_0, \dots, x_k\}$ uma enumeração fixada de P . Para cada $t \in T$, o **complexo simplicial de Vietoris-Rips** em t é*

$$\text{Rips}(P, t) \doteq \{[x_0, \dots, x_n] : \{x_0, \dots, x_n\} \subset P \text{ é LI e } \forall i, j \in \{0, \dots, n\}, \|x_i - x_j\| \leq t\}.$$

Não é difícil notar que $\text{Rips}(P) \doteq \{(\mathbb{R}^d, \text{Rips}(P, t))\}_{t \in T}$ é uma filtração simplicial, denominada **filtração simplicial de Vietoris-Rips** de P .

Exemplo 2.6. *Sejam $P = \{(0; 0), (0; 1), (1, 3; 1, 3)\} \subset \mathbb{R}^2$ e $T = \{1; 1, 35; 1, 84\}$ e indique-mos $x_1 = (0; 0), x_2 = (0; 1), x_3 = (1, 3; 1, 3)$. Temos que*

- $\|x_1 - x_2\| = 1$, logo $[x_1, x_2] \in \text{Rips}(P; 1)$;
- $\|x_2 - x_3\| \approx 1,334$, logo, $\text{Rips}(P; 1,35) = \text{Rips}(P; 1) \cup \{[x_2, x_3]\}$;
- $\|x_1 - x_3\| \approx 1,84$, logo, $\text{Rips}(P; 1,84) = \text{Rips}(P; 1,35) \cup \{[x_1, x_3], [x_1, x_2, x_3]\}$.

Tais complexos podem ser visualizados na Figura 2.5

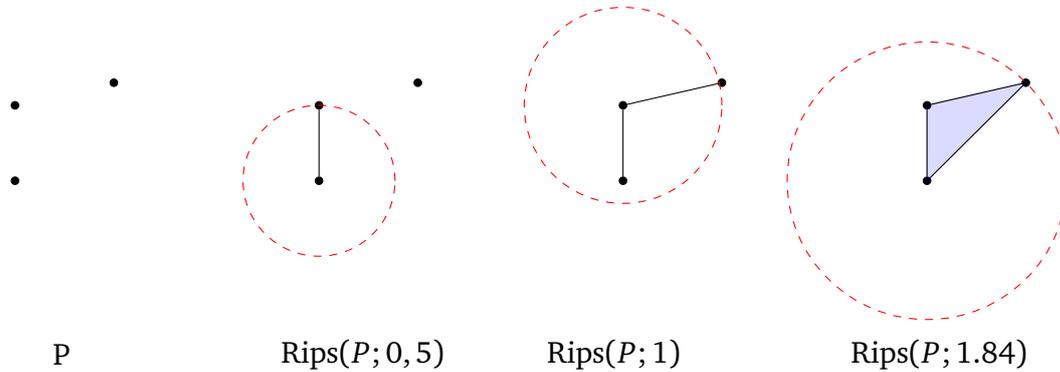


Figura 2.5: Filtração simplicial de Vietoris-Rips obtida no Exemplo 2.6

Há uma relação entre as filtrações simpliciais acima apresentadas, que exporemos a seguir. Tal resultado pode ser obtido a partir de conceitos básicos da Teoria de Espaços Métricos e podemos encontrar sua demonstração em [4].

Proposição 2.7. *Seja $P \subset \mathbb{R}^d$ (munido da topologia usual) um conjunto finito de pontos e $t \geq 0$, então $\text{Rips}(P, t) \subseteq \check{C}ech(P, t) \subseteq \text{Rips}(P, 2t)$.*

2 Homologia Persistente

Serão referidos, a partir deste ponto, apenas por X_i os espaços topológicos munidos de seus respectivos complexos simpliciais.

O homomorfismo de inclusão entre cada par de espaços topológicos em uma filtração induz homomorfismos nas suas respectivas cadeias simpliciais. Dada uma filtração simplicial \mathcal{X} sobre $T \subset \mathbb{R}$, temos que, para cada $a, b \in T$, tais que $a \leq b$, há uma função inclusão $i^{a,b} : X_a \rightarrow X_b$, a partir da qual, de acordo com a Definição 1.56, podemos induzir, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, o homomorfismo $i_{\#,n}^{a,b} : C_n(X_a) \rightarrow C_n(X_b)$. O que tal aplicação faz é, dado $\sigma : \Delta^n \rightarrow X_a$, um gerador de $C_n(X_a)$, obter

$$i_{\#,n}^{a,b}(\sigma) = i^{a,b} \circ \sigma : \Delta^n \rightarrow X_a \rightarrow X_b,$$

um gerador de $C_n(X_b)$. Tal composição está ilustrada na Figura 2.6. A aplicação $i_{\#,n}^{a,b}$ se estende linearmente para qualquer cadeia de $C_n(X_a)$.

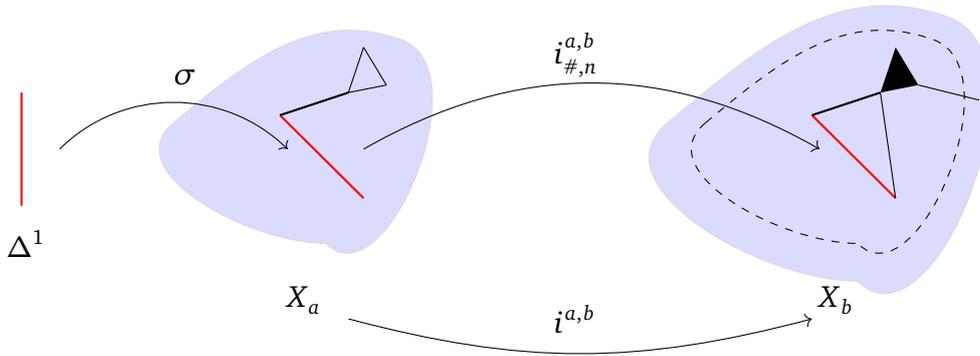


Figura 2.6: Exemplo de aplicação entre simplexos induzida pela inclusão entre espaços topológicos.

Relembrando que $C(X_a) = (C_n(X_a), \partial_n^a)_{n \in \mathbb{N}}$ e $C(X_b) = (C_n(X_b), \partial_n^b)_{n \in \mathbb{N}}$, podemos denotar a coleção dos homomorfismos induzidos como $i_{\#}^{a,b} : C(X_a) \rightarrow C(X_b)$. Pela Proposição 1.57,

$$i_{\#,n-1}^{a,b} \partial_n^a = \partial_n^b i_{\#,n}^{a,b},$$

ou seja, $i_{\#}^{a,b}$ é um homomorfismo de cadeias.

Ainda, pelo apresentado anteriormente, para cada $a, b, c \in T$ tais que $a \leq b \leq c$, os homomorfismos induzidos seguem a **lei de composição** $i_{\#,n}^{a,c} = i_{\#,n}^{b,c} \circ i_{\#,n}^{a,b}$, de modo que podemos construir um diagrama que mostra como se relacionam cadeias de diferentes dimensões através da filtração. Cada coluna representa o complexo de cadeias de um complexo simplicial da filtração, enquanto cada linha representa o comportamento da coleção de n -cadeias através da filtração, para cada $n \geq 0$. O diagrama é comutativo e está apresentado a seguir.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(X_a) & \xrightarrow{i_{\sharp, n+1}^{a,b}} & C_{n+1}(X_b) & \xrightarrow{i_{\sharp, n+1}^{b,c}} & C_{n+1}(X_c) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C_n(X_a) & \xrightarrow{i_{\sharp, n}^{a,b}} & C_n(X_b) & \xrightarrow{i_{\sharp, n}^{b,c}} & C_n(X_c) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \cdots & \longrightarrow & C_1(X_a) & \xrightarrow{i_{\sharp, 1}^{a,b}} & C_1(X_b) & \xrightarrow{i_{\sharp, 1}^{b,c}} & C_1(X_c) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 \\
 \cdots & \longrightarrow & C_0(X_a) & \xrightarrow{i_{\sharp, 0}^{a,b}} & C_0(X_b) & \xrightarrow{i_{\sharp, 0}^{b,c}} & C_0(X_c) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \partial_0 & & \downarrow \partial_0 & & \downarrow \partial_0 \\
 \cdots & & 0 & & 0 & & 0 \cdots
 \end{array}$$

Ainda, dados $a, b \in T$, com $a \leq b$, como visto na Proposição 1.58, a função de inclusão $i^{a,b} : X_a \rightarrow X_b$ induz um homomorfismo entre os grupos de homologia

$$i_{*,n}^{a,b} : H_n(X_a) \rightarrow H_n(X_b),$$

cujas coleção também segue a lei de composição $i_{*,n}^{a,c} = i_{*,n}^{b,c} \circ i_{*,n}^{a,b}$, para cada $a, b, c \in T$, tais que $a \leq b \leq c$.

Definição 2.8. Para $n \in \mathbb{Z}^+$, o conjunto

$$H_n(\mathcal{X}) \doteq \{i_{*,n}^{a,b} : H_n(X_a) \rightarrow H_n(X_b) \mid a, b \in T \text{ e } a \leq b\}$$

munido da lei de composição é denominado **n -módulo de persistência**.

Lembrando que, pelo definido na Proposição 1.4, se $\sigma + \text{im } \partial_{n+1}^a \in H_n(X_a)$, então

$$i_{*,n}^{a,b}(\sigma + \text{im } \partial_{n+1}^a) = i_{\sharp, n}^{a,b}(\sigma) + \text{im } \partial_{n+1}^b,$$

onde $i_{\sharp, n}^{a,b}(\sigma)$ é a extensão de $\sigma : \Delta^n \rightarrow X_a$ para $\sigma : \Delta^n \rightarrow X_b$, de modo que costuma-se representá-lo também por σ , desde que não gere-se confusão. A coleção $(H_n(\mathcal{X}))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ se denomina **homologia da filtração \mathcal{X}** e se denota por $H_*(\mathcal{X})$.

Há alguns fenômenos de interesse que podem ocorrer com os geradores de homologia e ser identificados com o uso das aplicações $i_{*,n}^{a,b}$.

2 Homologia Persistente

Proposição 2.9. Dados $H_n(\mathcal{X}) = \{i_{*,n}^{a,b} : H_n(X_a) \rightarrow H_n(X_b) | a, b \in T \text{ e } a \leq b\}$ um n -módulo de persistência, $j \in T$ e $\sigma + \text{im } \partial_{n+1}^j \in H_n(X_j)$, n -gerador de homologia, então $\sigma + \text{im } \partial_{n+1}^q$ é gerador de homologia (possivelmente trivial) em X_q , para todo $q \in T$ tal que $j \leq q$.

Demonstração. Pela definição, $\sigma \in \ker \partial_n^j$, logo, dado $j \leq q$, temos que, pelo que foi definido na Proposição 1.4,

$$\partial_n^q(i_{\#,n}^{j,q}(\sigma)) = i_{\#,n-1}^{j,q}(\partial_n^j(\sigma)) = i_{\#,n-1}^{j,q}(0) = 0.$$

Ou seja, $i_{\#,n}^{j,q}(\sigma) \in \ker \partial_n^q$. Assim, $i_{*,n}^{j,q}(\sigma + \text{im } \partial_{n+1}^j) = i_{\#,n}^{j,q}(\sigma) + \text{im } \partial_{n+1}^q = \sigma + \text{im } \partial_{n+1}^q$, com $\sigma \in \ker \partial_n^q$. \square

Faz sentido, então, que falemos sobre o “menor” dos instantes para os quais um gerador de homologia está presente na filtração. Denotaremos, considerando o módulo de persistência e o gerador de homologia apresentados na proposição anterior

$$N_{\mathcal{X}}(\sigma) \doteq \inf\{q \in T : \sigma \in \ker \partial_n^q\},$$

onde se pode omitir o subíndice em contextos onde não é necessário identificar a filtração.

Ocorre que, dada uma cadeia a partir da qual se constrói um gerador de homologia não trivial em X_j , ou seja, $\sigma \in \ker \partial_n^j$, tal que $\sigma \notin \text{im } \partial_{n+1}^j$, em algum instante $q > j$ da filtração pode ser adicionado um $(n+1)$ -simplexo em K_q , de modo a formar ρ , uma $(n+1)$ -cadeia tal que $\sigma = \partial \rho$, ou seja, σ passa a constituir um gerador de homologia trivial em X_q .

De semelhante maneira ao que foi provado na proposição anterior, podemos provar que se existe algum $j \in T$ tal que $\sigma \in \text{im } \partial_{n+1}^j$, então $\forall q \in T$, tal que $q > j$, $\sigma \in \text{im } \partial_{n+1}^q$. Ou seja, uma vez que um gerador de homologia se torna trivial, ele permanece trivial até o fim da filtração.

Proposição 2.10. Dados $H_n(\mathcal{X}) = \{i_{*,n}^{a,b} : H_n(X_a) \rightarrow H_n(X_b) | a, b \in T \text{ e } a \leq b\}$ um n -módulo de persistência, $j \in T$ e $\sigma + \text{im } \partial_{n+1}^j \in H_n(X_j)$, n -gerador de homologia, temos que $\sigma \notin C_n(X_j)$, $\forall j < N(\sigma)$.

Demonstração. De fato, se $\exists j \in T$, com $j < N(\sigma)$, tal que $\sigma \in C_n(X_j)$, pela minimalidade de $N(\sigma)$, temos que $\partial_n^j(\sigma) \neq 0$. Assim, se $N(\sigma) \in T$,

$$\partial_n^{N(\sigma)}(i_{\#,n}^{j,N(\sigma)}(\sigma)) = i_{\#,n-1}^{j,N(\sigma)}(\partial_n^j(\sigma)) \neq 0,$$

donde $\sigma \notin \ker \partial_n^{N(\sigma)}$, o que é uma contradição. Se $N(\sigma) \notin T$, basta proceder de modo análogo trocando $N(\sigma)$ por $\min\{t \in T : t > N(\sigma)\}$. \square

Ou seja, todo gerador de homologia “nasce” na filtração como gerador de homologia. Por outro lado, pelos resultados expostos, um gerador de homologia, que é trivial em

algum instante da filtração, não necessariamente nasceu trivial. Mas, uma vez que ele se torna trivial, segue trivial até o fim da filtração, logo, podemos falar sobre “morte” de um gerador de homologia durante uma filtração. Assim, podemos definir, dado $j \in T$ e $\sigma \in \text{im } \partial_{n+1}^j$,

$$M_{\mathcal{X}}(\sigma) \doteq \inf\{q \in T : \sigma \in \text{im } \partial_{n+1}^q\}.$$

Podemos então tentar discutir o “tempo de vida” de geradores de homologia em uma filtração. Antes, precisamos definir alguns objetos.

A definição de módulo de persistência acima apresentada demanda a existência de uma filtração simplicial que a induza, todavia, ao estudarmos os módulos de persistência em si, muitas vezes não nos preocuparemos com tal filtração, focando apenas na estrutura resultante. Assim, apresentaremos aqui também uma definição mais generalista.

Definição 2.11. *Dados um conjunto A munido de uma ordem parcial \preceq e uma coleção de espaços vetoriais $\{V_p : p \in A\}$ tais que $p, q \in A$ e $p \preceq q$ garantem que $V_p \subseteq V_q$, um **módulo de persistência (generalizado)** sobre (A, \preceq) é uma coleção de homomorfismos*

$$\mathbb{V} = \{i_{*,n}^{p,q} : V_p \rightarrow V_q \mid p, q \in A \text{ e } p \preceq q\},$$

munida da lei de composição, ou seja, se $p, q, r \in A$ e $p \preceq q \preceq r$, então $i_{,n}^{q,r} \circ i_{*,n}^{p,q} = i_{*,n}^{p,r}$.*

Ainda que, nesta definição, estejamos negligenciando a filtração que dá origem a tal módulo de persistência, ele sempre existe para tal A . Um exemplo trivial é tomar um espaço topológico não vazio X , fazer $X_p = X$, $\forall p \in A$, munir todos eles do mesmo complexo simplicial, induzir, a partir da inclusão, homomorfismos entre os grupos de homologia e denotar os espaços vetoriais por $V_p = H_n(X_p)$. Podemos assim definir a restrição de um módulo de persistência.

Definição 2.12. *Dados o módulo de persistência \mathbb{V} sobre (A, \preceq) , apresentado em 2.11 e B um subconjunto de A munido da ordem parcial induzida, a **restrição do módulo de persistência** \mathbb{V} a B , denotado por \mathbb{V}_B é dado por*

$$\mathbb{V}_B = \{i_{*,n}^{p,q} : V_p \rightarrow V_q \mid p, q \in B \text{ e } p \preceq q\}.$$

Não é difícil provar que a restrição de um módulo de persistência é um módulo de persistência. Provaremos que alguns tipos de módulos de persistência, dentre os quais se encontram os tipos de interesse para esse capítulo, podem ser decompostos em estruturas básicas denominadas módulos intervalares. Esta afirmação será apresentada na seção seguinte. Por ora, apresentemo-los como um caso particular de módulo de persistência.

Definição 2.13. Sejam $[b, d]$ um intervalo contido em \mathbb{R} e \mathbb{K} um corpo. O **módulo intervalar** $\mathbb{I}[b, d]$ em \mathbb{K} é definido da seguinte maneira

$$\mathbb{I}[b, d] = \{i_{*,n}^{p,q} : V_p \rightarrow V_q : p, q \in \mathbb{R} \text{ e } p \leq q\},$$

onde

$$V_i = \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{se } b \leq i \leq d \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso,

$$i_{*,n}^{p,q} = \begin{cases} \mathbb{1}, & \text{se } V_p = V_q = \mathbb{K} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}.$$

Dado um conjunto A munido de uma ordem parcial \preceq , um **intervalo sobre o poset** (A, \preceq) é um subconjunto $J \subset A$ tal que se $r, t \in J$ e $r \prec s \prec t$, então $s \in J$. Assim, podemos generalizar a definição de módulo intervalar.

Definição 2.14. Dado um poset (A, \preceq) e um intervalo J sobre o poset, um **módulo intervalar sobre o poset J** em \mathbb{K} é dado por

$$\mathbb{I}_J[b, d] = \{i_{*,n}^{p,q} : V_p \rightarrow V_q : p, q \in J \text{ e } p \preceq q\},$$

onde

$$V_j = \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{se } j \in J \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso,

$$i_{*,n}^{p,q} = \begin{cases} \mathbb{1}, & \text{se } p, q \in J \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}.$$

Exemplo 2.15. Dados \mathbb{N} com a ordem induzida por \mathbb{R} e o conjunto de espaços vetoriais $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $V_2 = V_3 = V_4 = \mathbb{K}$ e $V_i = 0$, para cada $i \notin \{2, 3, 4\}$, a coleção de morfismos $\{i_{*,n}^{p,q} : V_p \rightarrow V_q \mid p, q \in \mathbb{N} \text{ e } p \leq q\}$ tal que $i_{*,n}^{p,q} = \mathbb{1}$, se $p, q \in \{2, 3, 4\}$ e nulo caso contrário é um módulo intervalar sobre $\{2, 3, 4\} \subset \mathbb{N}$.

Filtrações sobre conjuntos finitos

Dada uma nuvem de pontos finita, ainda que as filtrações simpliciais de Čech e de Vietoris-Rips possam ser definidas sobre um conjunto T de cardinalidade infinita, temos apenas

uma quantidade finita de conexões possíveis entre os pontos, conseqüentemente, as alterações no conjunto de simplexes e as mudanças nos grupos de homologia ocorrem apenas em uma quantidade finita de instantes. Assim, a partir de tais filtrações, utilizando a Definição 2.12, podemos trabalhar em uma filtração finita a partir da amostragem de T . Para tal amostragem, dois fatores devem ser levados em conta: é importante que ela selecione instantes onde ocorrem mudanças nos geradores de homologia e devemos considerar a importância de não alterarmos a escala temporal. Neste texto não nos preocuparemos com estes detalhes.

Consideremos as filtrações onde $A \subset \mathbb{R}$ é uma coleção finita de valores, ou seja, onde há uma reindexação tal que a filtração pode ser expressa como $\mathcal{X} = (X_j, K_j)_{j=1}^m$. Neste caso, podemos simplificar a notação da inclusão entre dois espaços topológicos consecutivos, indicando $i^{k,k+1}$ apenas como i^k . Conseqüentemente, $i_{*,n}^{k,k+1}$ pode ser indicado apenas como $i_{*,n}^k$, de modo que o n -módulo de persistência pode ser apresentado como no diagrama a seguir

$$H_n(\mathcal{X}) : H_n(X_1) \xrightarrow{i_{*,n}^1} \cdots \xrightarrow{i_{*,n}^{k-1}} H_n(X_k) \xrightarrow{i_{*,n}^k} H_n(X_{k+1}) \xrightarrow{i_{*,n}^{k+1}} \cdots \xrightarrow{i_{*,n}^{m-1}} H_n(X_m),$$

ou seja, podemos indicar $H_n(\mathcal{X}) = (i_{*,n}^k, H_n(X_k))_{k=1}^m$, munido da lei de composição.

Agora podemos rerepresentar os conceitos $N(\sigma)$ e $M(\sigma)$.

Definição 2.16. *Sejam $(i_{*,n}^k, H_n(X_k))_{k=1}^m$ um n -módulo de persistência e $\sigma \in \ker \partial_n^m$, então*

$$N_{\mathcal{X}}(\sigma) \doteq \min\{q \in \{1, \dots, m\} : \sigma \in \ker \partial_n^q\}$$

é dito instante de nascimento do n -gerador de homologia formado por σ na filtração \mathcal{X} .

Definição 2.17. *Sejam $(i_{*,n}^k, H_n(X_k))_{k=1}^m$ um n -módulo de persistência e $\sigma \in \text{im } \partial_{n+1}^m$, então*

$$M_{\mathcal{X}}(\sigma) \doteq \min\{q \in \{1, \dots, m\} : \sigma \in \text{im } \partial_{n+1}^q\}$$

é dito instante de morte do n -gerador de homologia formado por σ na filtração \mathcal{X} .

Relembrando que podemos omitir o subíndice quando não causar prejuízo à compreensão.

Se $\sigma \in \text{im } \partial_n^m$, então $\sigma \in \ker \partial_n^m$, ou seja, toda cadeia para a qual está definido seu instante de morte, está definido também seu instante de nascimento, mas fica claro que é possível que $N(\sigma) = M(\sigma)$. Basta para tal n -ciclo que ele e um $(n+1)$ -simplexo do qual ele é n -bordo sejam adicionados no mesmo instante da filtração. Por outro lado, pode acontecer que $\sigma \in \ker \partial_n^m$, mas $\sigma \notin \text{im } \partial_n^m$. Neste caso, o n -gerador de homologia nasce mas não morre durante a filtração.

2 Homologia Persistente

Intuitivamente passa a fazer sentido relacionar-se a dimensão dos grupos de homologia, através da filtração, com a quantidade de geradores que nasce e morre a cada instante, além disso, pode-se objetivar a identificação de qual a duração da presença de cada gerador na filtração. Uma dificuldade em tal processo é que não é só a morte de geradores da base que diminui a dimensão de um grupo de homologia, mas também o processo de tornar geradores homólogos.

Exemplo 2.18. *Sejam $p, q \in \mathbb{R}^2$ dois pontos distintos e a filtração $\mathcal{X} = (X_i, K_i)_{i=1}^2$, onde $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^2$, $K_1 = \{[p], [q]\}$ e $K_2 = \{[p], [q], [p, q]\}$. Temos que $\{[p], [q]\}$ é base de $H_0(X_1)$, mas $H_0(X_2)$ tem apenas um gerador. Ocorre que nem $[p]$ e nem $[q]$ se tornam elementos de $\text{im } \partial_1^2$. Neste caso, um gerador que morre no instante 2 é $[q] - [p]$.*

Neste exemplo, $[p]$ e $[q]$ tornam-se 0-geradores homólogos. Ou seja, a relação entre o comportamento dos geradores da base e a contagem do número de geradores de homologia que nascem e morre durante a filtração depende da escolha de base, o que não condiz com o esperado. Com o aumento da dimensão dos complexos simpliciais pode se tornar muito árdua a tarefa de identificar quais cadeias são ou se tornam homólogas e quais escolhas de base são as adequadas para o cálculo das dimensões dos grupos de homologia. A solução para este problema se encontra no estudo dos quivers, como veremos a seguir.

2.3 Quivers

De acordo com [21], quivers são multigrafos orientados (ou dirigidos), que são munidos de um conjunto de representações: diferentes possibilidades de se identificar cada vértice com um espaço vetorial e cada aresta com uma transformação linear. Pode-se provar, a partir do Teorema de Gabriel, que cada representação de um quiver pode ser decomposta em estruturas mais simples. Ocorre que módulos de persistência são um caso particular de representação de quiver.

Definição 2.19. *Um quiver (ou multidigrafo) Q é uma tripla ordenada $(V(Q), E(Q), \psi_Q)$, com $V(Q) \cap E(Q) = \emptyset$, onde os elementos de $V(Q)$ são ditos **vértices do quiver**, os elementos de $E(Q)$ são ditos **arestas do quiver** e $\psi_Q : E(Q) \rightarrow V(Q) \times V(Q)$ é dita **função de incidência do quiver**.*

Podemos notar que em um quiver é possível haver múltiplas arestas entre um par de vértices, bem como loops em um vértice, ou seja, arestas que conectem um vértice a si mesmo. Serão considerados aqui quivers conexos.

Um **quiver finito** é aquele em que $V(Q)$ e $E(Q)$ são ambos finitos. Costuma-se identificar um quiver com a sua representação visual e assim o faremos também neste texto.

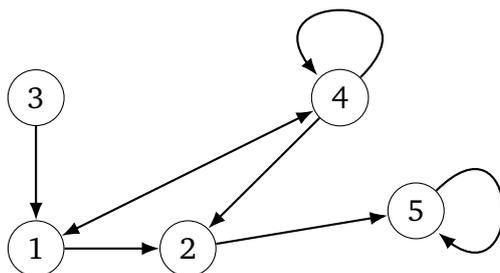
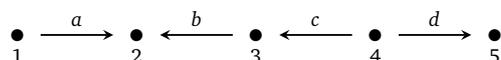


Figura 2.7: Exemplo de quiver

Definição 2.20. Dado $e \in E(Q)$, se $\psi_Q(e) = (v_1, v_2)$, então v_1 é dito **ponto inicial** de e e v_2 é dito **ponto final** de e .

Um tipo particular de quiver de interesse para este estudo são os chamados A_n -**quivers**, que são quivers com n vértices e de formato linear, ou seja, há um par de enumerações $V(Q) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $E(Q) = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$, tais que $\psi_Q(e_i) \in \{(v_i, v_{i+1}), (v_{i+1}, v_i)\}$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Neste caso, é comum as arestas serem também denominadas setas.

Exemplo 2.21. Um exemplo é o A_n -quiver Q da seguinte imagem, onde $V(Q) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E(Q) = \{a, b, c, d\}$.

Figura 2.8: Exemplo de A_n -quiver.

Definição 2.22. Dado um quiver Q , uma **representação do quiver** sobre um corpo \mathbb{K} , r , é um par de funções (V_r, E_r) tais que

$$V_r : V(Q) \rightarrow \text{Ob}(\text{Vect}_{\mathbb{K}})$$

e

$$E_r : E(Q) \rightarrow \bigcup_{U, W \in \text{Ob}(\text{Vect}_{\mathbb{K}})} \text{Mor}_{\text{Vect}_{\mathbb{K}}}(U, W),$$

onde, dado $e \in E(Q)$, se $\phi_Q(e) = (v_1, v_2)$, temos que

$$E_r(e) \in \text{Mor}_{\text{Vect}_{\mathbb{K}}}(V_r(v_1), V_r(v_2)).$$

Ou seja, a transformação linear com a qual uma aresta se relaciona deve ser um morfismo entre os espaços vetoriais que foram relacionados ao seu ponto inicial e final, respectivamente.

2 Homologia Persistente

Exemplo 2.23. Duas representações, sobre um corpo \mathbb{K} , do quiver apresentado no Exemplo 2.21 são o diagrama abaixo

$$\mathbb{K} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \mathbb{K}^2 \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \mathbb{K} \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{K}^2$$

e o diagrama abaixo

$$\mathbb{K} \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} \mathbb{K} \xleftarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{0} 0.$$

Definição 2.24. Uma **representação finito-dimensional** é aquela em que todos os espaços vetoriais são de dimensão finita.

Definição 2.25. Uma representação quadrante-mansa, ou **representação q-mansa**, é aquela em que para cada $e \in E(Q)$, temos que $\dim \operatorname{im} E_r(e) < +\infty$.

Na literatura, também podemos encontrar a expressão “q-mansa” como “q-tame”. Fica claro que toda representação finito-dimensional é uma representação q-mansa, mas o contrário não é garantido.

Definição 2.26. Seja um quiver Q , tal que $V(Q) = \{v_i\}_{i \in \Lambda}$, então, um **homomorfismo entre duas representações** $u = (V_u, E_u)$ e $w = (V_w, E_w)$ do quiver Q sobre \mathbb{K} , indicado por $\phi : u \rightarrow w$, é um morfismo graduado $\phi = \bigoplus_{i \in \Lambda} \phi_i$, onde $\phi_i : V_u(v_i) \rightarrow V_w(v_i)$ é uma transformação linear para cada $i \in \Lambda$, de modo que $\phi|_{V_u(v_i)} \subseteq V_w(v_i)$ e o seguinte diagrama comuta para cada par de vértices $v_i, v_j \in V(Q)$ e para cada aresta e tal que $\psi_Q(e) = (v_i, v_j)$.

$$\begin{array}{ccc} V_u(v_i) & \xrightarrow{E_u(e)} & V_u(v_j) \\ \downarrow \phi_i & & \downarrow \phi_j \\ V_w(v_i) & \xrightarrow{E_w(e)} & V_w(v_j) \end{array}$$

Indicaremos o conjunto de tais homomorfismos por $\operatorname{Hom}_Q(u, w)$. Se $u = w$, os elementos deste conjunto são ditos endomorfismos e indicamos por $\operatorname{End}_Q(u)$.

Exemplo 2.27. Um homomorfismo entre as duas representações do Exemplo 2.23 está dado

no diagrama a seguir

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & & \longrightarrow & & \longleftarrow & & \longrightarrow \\
 \mathbb{K} & & \mathbb{K}^2 & & \mathbb{K} & & \mathbb{K}^2 & & \mathbb{K}^2 \\
 \downarrow 1 & & \downarrow 0 & & \downarrow -1 & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} & & \downarrow 0 \\
 \mathbb{K} & \xrightarrow{0} & 0 & \xleftarrow{0} & \mathbb{K} & \xleftarrow{1} & \mathbb{K} & \xrightarrow{0} & 0
 \end{array}$$

Dadas representações u, v e w de um quiver Q , sobre um corpo \mathbb{K} , são definidos vértice a vértice o homomorfismo identidade $\mathbb{1}_u : u \rightarrow u$, que é tal que $(\mathbb{1}_u)_i = \mathbb{1}_{V_u(v_i)}$, e a composição entre $\phi : u \rightarrow v$ e $\eta : v \rightarrow w$, dada por $\eta \circ \phi : u \rightarrow w$, que é tal que $(\eta \circ \phi)_i = \eta_i \circ \phi_i$. Assim, dado um quiver Q , podemos formar uma categoria dada pela coleção de todas as representações sobre um corpo \mathbb{K} , a **categoria das representações de um quiver sobre o corpo \mathbb{K}** , que é indicada por $\mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(Q)$. A **subcategoria das representações finito-dimensionais de um quiver** é indicada por $\mathbf{rep}_{\mathbb{K}}(Q)$.

A_n -Quivers Lineares

Um tipo particular de A_n -quiver, que será considerado deste ponto em diante são os A_n -**quivers lineares**, que são aqueles em que é possível se obter uma representação visual onde todas as setas apontam para a direita. Ou seja, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\psi_Q(e_i) = (v_i, v_{i+1})$, onde, se $i > j$, v_i está à direita de v_j na sua representação visual.

$$\bullet_{v_1} \xrightarrow{e_1} \bullet_{v_2} \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_{n-1}} \bullet_{v_n}$$

Figura 2.9: Exemplo de A_n -quiver linear.

A categoria das representações de um A_n -quiver linear herda algumas propriedades de espaços vetoriais. Podem-se definir, por exemplo, conceitos análogos aos de subespaço vetorial, soma direta interna e externa de espaços vetoriais. Podem ser também definidos o kernel e a imagem de um homomorfismo, bem como um isomorfismo entre duas representações de um quiver. Intuitivamente, todas as definições são extensões das definições para espaços vetoriais, porém, operando-se vértice a vértice.

Definição 2.28. *Seja $Q = (V(Q), E(Q), \psi_Q)$ um A_n -quiver linear, com $V(Q) = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E(Q) = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ e $\psi_Q(e_j) = (v_j, v_{j+1})$.*

2 Homologia Persistente

- A **representação trivial** $0 = (V_0, E_0)$, é aquela em que para cada i , temos que $V_0(v_i) = 0_{\mathbb{K}}$.
- Uma **sub-representação** de uma representação u é uma representação t , que leva cada vértice $v_i \in V(Q)$ em $T_i \doteq V_t(v_i)$, subespaço vetorial de $U_i \doteq V_u(v_i)$, e cada aresta e_i na restrição de $E_u(e_i)$ ao subespaço vetorial T_i , de modo que $E_u(e_i)(T_i) \subseteq T_{i+1}$.
- Se, dadas u e w representações de Q sobre \mathbb{K} , para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, tivermos que U_i e W_i são subespaços vetoriais do espaço vetorial T_i e tais que $U_i \cap W_i = \{0\}$, então podemos definir a **soma direta interna entre representações**, fazendo a representação $t = (V_t, E_t)$, onde

$$V_t(v_i) = U_i + W_i \doteq \{u_i + w_i : u_i \in U_i, w_i \in W_i\}$$

e

$$E_t(e_i)(u_i + w_i) = E_u(e_i)(u_i) + E_w(e_i)(w_i).$$

- Dadas u e w representações, podemos definir a **soma direta externa** como a representação $u \oplus w = (V_{u \oplus w}, E_{u \oplus w})$, que é tal que para cada v_i vértice de Q ,

$$V_{u \oplus w}(v_i) = V_u(v_i) \times V_w(v_i)$$

e para cada e_i aresta e $u_i \in V_u(v_i)$, $w_i \in V_w(v_i)$ vetores,

$$E_{u \oplus w}(e_i)(u_i, w_i) = \begin{pmatrix} E_u(e_i) & 0 \\ 0 & E_w(e_i) \end{pmatrix} (u_i, w_i) = (E_u(e_i)(u_i), E_w(e_i)(w_i)).$$

- Uma **representação decomponível** é uma representação não trivial que pode ser escrita como soma direta externa de representações não triviais. Caso contrário, a representação não trivial é dita indecomponível.
- Dadas u e w representações e ϕ homomorfismo entre elas, o **núcleo do homomorfismo entre representações** ϕ é dado pela representação $(V_k, E_k) \in \text{Ob}(\mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbf{Q}))$, tal que para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$, $V_k(v_j) = \ker(\phi_j)$ e $E_k(e_j) = E_u(e_j)|_{\ker(\phi_j)}$, além de $V_k(v_n) = V_u(v_n)$. O que pode ser representado por

$$\ker(\phi_1) \xrightarrow{E_u(e_1)|_{\ker(\phi_1)}} \dots \xrightarrow{E_u(e_{n-2})|_{\ker(\phi_{n-2})}} \ker(\phi_{n-1}) \xrightarrow{E_u(e_{n-1})|_{\ker(\phi_{n-1})}} V_u(v_n).$$

Tal representação está bem definida, pois, se $x \in \ker(\phi_j)$, então, pela comutatividade, $\phi_{j+1}(E_u(e_j)(x)) = E_w(e_j)(\phi_j(x)) = E_w(e_j)(0) = 0$, logo, $E_u(e_j)(x) \in \ker(\phi_{j+1})$. Analogamente se define o conúcleo, indicado por $\text{coker } \phi$.

- A imagem do homomorfismo entre representações ϕ é $(V_{im}, E_{im}) \in \text{Ob}(\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q))$ tal que $V_{im}(v_1) = V_w(v_1)$, $E_{im}(e_1) = E_w(e_1)$, para todo $j \in \{2, \dots, n\}$, $V_{im}(v_j) = \text{im}(\phi_j)$ e para todo $j \in \{2, \dots, n-1\}$, $E_{im}(e_j) = E_w(e_j)|_{\text{im}(\phi_j)}$, o que pode ser expresso por

$$V_w(v_1) \xrightarrow{E_w(e_1)} \text{im}(\phi_2) \xrightarrow{E_w(e_2)|_{\text{im}(\phi_2)}} \dots \longrightarrow \text{im}(\phi_{n-2}) \xrightarrow{E_w(e_{n-1})|_{\text{im}(\phi_{n-1})}} \text{im}(\phi_{n-1}).$$

Tal representação está bem definida, pois, se $y \in \text{im}(\phi_j)$, então $\exists x \in V_u(v_j)$ tal que $\phi_j(x) = y$ e, pela comutatividade, $\phi_{j+1}(E_u(e_j)(x)) = E_w(e_j)(\phi_j(x)) = E_w(e_j)(y)$, logo, $E_w(e_j)(y) \in \text{im}(\phi_{j+1})$.

- Um isomorfismo entre duas representações de um quiver ϕ é um homomorfismo onde para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, ϕ_i é isomorfismo.

Podemos encontrar em [21], que um homomorfismo entre representações ϕ é injetor se, e somente se $\ker \phi = 0$ e é sobrejetor se, e somente se $\text{coker } \phi = 0$. Ainda, se um endomorfismo é isomorfismo, então é dito automorfismo, cujo conjunto é indicado por $\text{Aut}_Q(u)$.

Temos que nem toda propriedade de espaço vetorial é herdada pelas representações de quivers. Podemos mencionar que, dada uma representação e uma sub-representação, nem sempre existe uma sub-representação complementar. Por exemplo, dadas a representação $u : \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$ e uma sub-representação sua $v : 0 \xrightarrow{0} \mathbb{K}$, não é difícil mostrar que não existe uma representação w tal que $u = v \oplus w$. Isto torna desafiador o processo de identificação das classes de isomorfismo entre representações. Ainda assim, dado um quiver Q e um corpo \mathbb{K} , é possível definirem-se classes de isomorfismo para a coleção de representações de Q sobre \mathbb{K} . Tal resultado será de fundamental importância na Teoria de Homologia Persistente, por permitir que se decomponha a homologia de uma filtração em representações análogas a intervalos.

Teorema 2.29. (Krull, Remak, Schmidt para A_n -quivers lineares). *Dados um A_n -quiver linear Q e um corpo \mathbb{K} , uma representação finito-dimensional u sobre \mathbb{K} pode ser decomposta na soma direta*

$$u = u_1 \oplus u_2 \oplus \dots \oplus u_r,$$

2 Homologia Persistente

onde cada u_k é indecomponível, ou seja, não pode ser expresso como soma direta de duas representações não triviais. Além disso, a **decomposição de uma representação finito-dimensional** é única a menos de permutação dos termos e isomorfismos.

A demonstração deste Teorema se encontra, no Apêndice D, em [D.6](#).

Teorema 2.30. (Teorema de Gabriel para A_n -quivers lineares). Dados um A_n -quiver linear Q e um corpo \mathbb{K} , então cada representação finito-dimensional indecomponível de Q sobre \mathbb{K} é isomorfa a alguma **representação intervalar** $\mathbb{I}[b, d]$, que é tal que

$$V_{\mathbb{I}[b,d]}(v_i) = \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{se } b \leq i \leq d \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso,

$$E_{\mathbb{I}[b,d]}(e_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \leq i \leq d - 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}.$$

A demonstração deste Teorema se encontra, no Apêndice E, segmentada em duas partes: [E.26](#) e [E.27](#).

A representação $\mathbb{I}[b, d]$, definida no Teorema acima, pode ser apresentada como no diagrama a seguir

$$0 \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \underbrace{\mathbb{K} \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{1} \mathbb{K}}_{[b,d]} \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} 0.$$

A partir da combinação dos últimos dois teoremas, pode-se concluir que toda representação finito-dimensional u de um A_n -quiver linear é decomponível de modo único, a menos de permutações e isomorfismos, como soma direta de representações intervalares, ou seja, existe uma coleção $\{\mathbb{I}[b_j, d_j]\}_{j \in J}$ de representações intervalares tais que

$$u \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbb{I}[b_j, d_j].$$

O que significa, de certo modo, que cada representação pode ser caracterizada por uma coleção de intervalos. Se tomamos um quiver com uma quantidade não enumerável de vértices, ao se decompor uma representação, os intervalos podem ter extremidades abertas. As definições da próxima sessão podem ser adaptadas para este caso utilizando-se a notação de pontos decorados. Tal situação não será explorada neste texto mas pode ser encontrada em [\[21\]](#).

Módulo de Persistência como Representação de Quiver

Pela Definição 2.11, dado um módulo de persistência

$$\mathbb{V} = \{i_{*,n}^{p,q} : V_p \rightarrow V_q \mid p, q \in A \text{ e } p \preceq q\},$$

basta tomarmos um quiver $Q = (V(Q), E(Q), \psi_Q)$, tal que

$$V(Q) = \{v_j : j \in A\}, E(Q) = \{e_{p,q} : i_{*,n}^{p,q} \in \mathbb{V}\} \text{ e } \psi_Q(e_{p,q}) = (v_p, v_q),$$

que teremos que \mathbb{V} é uma representação de Q . Em particular, todo módulo de persistência sobre conjunto finito é representação de algum A_n -quiver linear. Assim, os Teoremas 2.29 e 2.30 garantem que módulos de persistência sobre conjuntos finitos podem ser decompostos como soma direta de módulos intervalares, de acordo com a Definição 2.13.

Podem-se aproveitar as definições de representação finito-dimensional, apresentada em 2.24 e representação q-mansa, apresentada em 2.25, para falarmos em **módulo de persistência finito-dimensional** e **módulo de persistência q-manso**. Em [21] e [5], se encontram versões mais gerais dos Teoremas 2.29 e 2.30, de modo a generalizá-los para módulos de persistência q-mansos.

2.4 Código de Barra e Diagrama de Persistência

Abaixo apresentaremos duas diferentes formas de visualizar as informações contidas em uma decomposição por módulos intervalares. Estas podem ser úteis na interpretação de quais os maiores módulos intervalares da decomposição, bem como na visualização de qual a dimensão de cada espaço vetorial, dentre outros processos de interesse na extração de informação da decomposição.

Indicaremos o plano estendido $[-\infty, \infty] \times [-\infty, \infty]$ como $\overline{\mathbb{R}}^2$ e o semi-plano superior estendido $\{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2 : x \leq y\}$ como $\overline{\mathbb{R}}_+^2$.

Definição 2.31. *Dado um módulo de persistência*

$$\mathbb{U} \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbb{I}[b_j, d_j],$$

o multiconjunto $B(\mathbb{U}) = (I_{B(\mathbb{U})}, m_{B(\mathbb{U})})$, onde

$$I_{B(\mathbb{U})} = \{[b_j, d_j] \subseteq \overline{\mathbb{R}} : j \in J\}$$

e $m_{B(\mathbb{U})} : I_{B(\mathbb{U})} \rightarrow \mathbb{N}$ é tal que

$$m_{B(\mathbb{U})}([b_j, d_j]) = \#\{k \in J : [b_k, d_k] = [b_j, d_j]\},$$

2 Homologia Persistente

é dito **código de barra de persistência** do módulo.

É comum apresentar-se o código de barra de persistência como a coleção de segmentos de reta no plano estendido $\{(b_j, d_j) \times \{j\} \subset \overline{\mathbb{R}}^2 : j \in J\}$, onde não se costuma apresentar a escala do eixo das ordenadas.

Exemplo 2.32. Seja $\mathbb{U} \cong \mathbb{I}[1, +\infty] \oplus \mathbb{I}[2, 3] \oplus \mathbb{I}[2, 5] \oplus \mathbb{I}[2, 5]$, indiquemos tais intervalos como $\mathbb{I}[b_j, d_j]$ com $j = 1, 2, 3, 4$, crescente, da esquerda para a direita na ordem de apresentação. Então o código de barras de persistência $B(\mathbb{U})$ é dado por

$$I_B(\mathbb{U}) = \{[1, +\infty], [2, 3], [2, 5]\},$$

$$m_B(\mathbb{U})([1, +\infty]) = m_B(\mathbb{U})([2, 3]) = 1 \text{ e } m_B(\mathbb{U})([2, 5]) = 2.$$

Ainda, podemos apresentar como a coleção de segmentos da Figura 2.10.

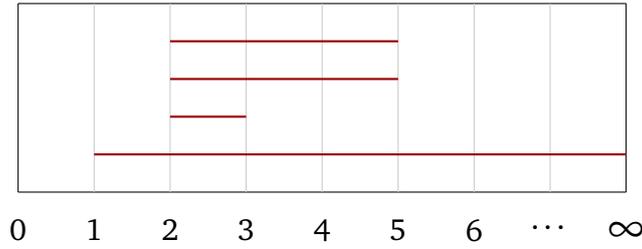


Figura 2.10: Barcode para o módulo de persistência do Exemplo 2.32.

Definição 2.33. Dado um módulo de persistência

$$\mathbb{U} \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbb{I}[b_j, d_j],$$

o multiconjunto $\text{dgm}(\mathbb{U}) = (I_{\text{dgm}(\mathbb{U})}, m_{\text{dgm}(\mathbb{U})})$, onde

$$I_{\text{dgm}(\mathbb{U})} = \{(b_j, d_j) \in \overline{\mathbb{R}}^2 : j \in J\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+^2$$

e $m_{\text{dgm}(\mathbb{U})} : I_{\text{dgm}(\mathbb{U})} \rightarrow \mathbb{N}$ é tal que

$$m_{\text{dgm}(\mathbb{U})}((b_j, d_j)) = \#\{k \in J : (b_k, d_k) = (b_j, d_j)\},$$

é dito **diagrama de persistência** do módulo.

Na Figura 2.11, temos um exemplo de diagrama persistência, onde a legenda indica o índice do ponto.

Por definição, os pontos do diagrama de persistência sempre estarão no semiplano estendido superior, pois a primeira coordenada indica o índice do vértice onde se iniciam os

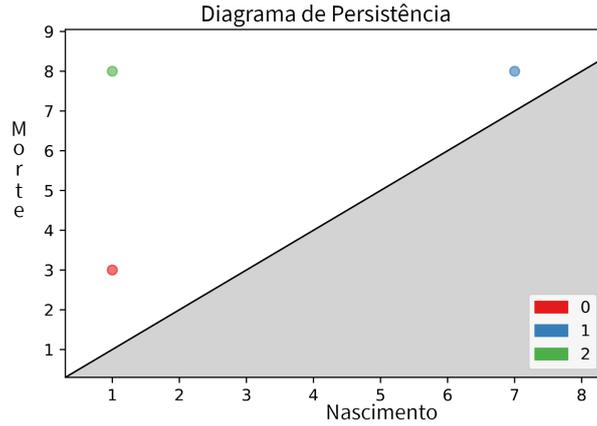


Figura 2.11: Modelo de diagrama de persistência.

espaços vetoriais não nulos de um módulo intervalar, enquanto que a segunda coordenada indica onde isto termina, ou seja, para todo (b_j, d_j) , temos $d_j \geq b_j$.

Definição 2.34. *Seja \mathbb{V} uma decomposição em módulos intervalares. Dada a coleção de retângulos do semiplano superior estendido*

$$\mathcal{R} = \{[p, q] \times [r, s] \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+^2 : -\infty \leq p < q \leq r < s \leq +\infty\},$$

a **medida de persistência** $\mu_{\mathbb{V}} : \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty]$ é dada por

$$\mu_{\mathbb{V}}([p, q] \times [r, s]) = \#\{(b, d) \in \text{dgm}(\mathbb{V}) : [q, r] \subseteq [b, d] \subset (p, s)\}.$$

Uma forma de reescrever a condição $[q, r] \subseteq [b, d] \subset (p, s)$ é dizer que

$$p < b \leq q \leq r \leq d < s.$$

Uma outra condição equivalente é a de o ponto (b, d) pertencer ao retângulo $[p, q] \times [r, s]$, desde que não esteja no bordo superior, nem no bordo lateral esquerdo do retângulo, ou seja, $(b, d) \in (p, q) \times [r, s)$, como está ilustrado na Figura 2.12.

É importante observar que a função $\mu_{\mathbb{V}}$ não é realmente uma medida, mas contém propriedades que tornam pertinente a sua escolha para os nossos objetivos. Tal função pertence a uma classe denominada “medidas retangulares” ou “r-medidas”, cuja definição e estudo podem ser encontrados em [5]. Uma destas propriedades é a aditividade em alguns tipos de cisões nos retângulos.

Proposição 2.35. *A medida de persistência é aditiva em cisões horizontais ou verticais em retângulos. Mais precisamente, sejam $p < x < q \leq r < y < s$, temos que*

- $\mu_{\mathbb{V}}([p, q] \times [r, s]) = \mu_{\mathbb{V}}([p, x] \times [r, s]) + \mu_{\mathbb{V}}([x, q] \times [r, s])$

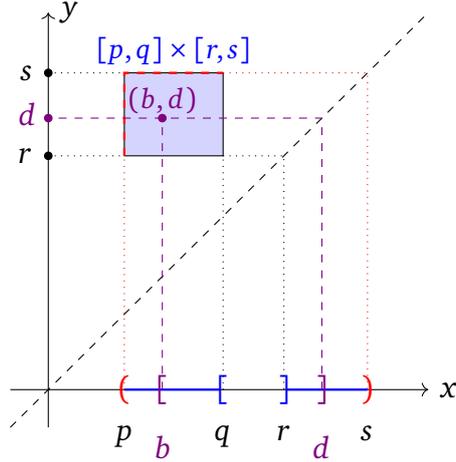


Figura 2.12: Ilustração da relação entre o ponto (b, d) no retângulo $[p, q] \times [r, s]$ e a condição de continência entre intervalos $[q, r] \subset [b, d] \subset (p, s)$, apresentada no eixo x .

- $\mu_{\vee}([p, q] \times [r, s]) = \mu_{\vee}([p, q] \times [r, y]) + \mu_{\vee}([p, q] \times [y, s])$.

Demonstração. Seja uma cisão vertical $[p, q] \times [r, s] = ([p, x] \times [r, s]) \cup ([x, q] \times [r, s])$, então indiquemos

$$A = \#\{(b, d) \in \text{dgm}(v) : p < b \leq q \leq r \leq d < s\},$$

$$B = \#\{(b, d) \in \text{dgm}(v) : p < b \leq x \leq r \leq d < s\}$$

e

$$C = \#\{(b, d) \in \text{dgm}(v) : x < b \leq q \leq r \leq d < s\}.$$

Por definição, $\mu_{\vee}([p, q] \times [r, s]) = \#A$, $\mu_{\vee}([p, x] \times [r, s]) = \#B$ e $\mu_{\vee}([x, q] \times [r, s]) = \#C$. Como $p < x < q$, então tanto $p < b \leq x$, quanto $x < b \leq q$, garantem que $p < b \leq q$, ou seja, $B, C \subseteq A$.

Por outro lado, dados $b, d \in \mathbb{R}$ tais que $p < b \leq q \leq r \leq d < s$, temos duas possibilidades:

- Se $p < b \leq x$, então $(b, d) \in B$, mas $(b, d) \notin C$;
- Se $x < b \leq q$, então $(b, d) \in C$, mas $(b, d) \notin B$;

Assim, A é dado pela união disjunta de B e C , de modo que o resultado está provado.

A demonstração de aditividade para cisões horizontais segue de modo análogo. \square

2.5 Persistência Topológica

Uma vez que definimos módulo de persistência de forma generalizada, sem nos preocuparmos com a filtração que lhe dá origem, passamos a ganhar maior autonomia e praticidade na obtenção e apresentação de resultados. Todavia, podemos tentar compreender as implicações que os resultados obtidos, nas seções anteriores, sobre módulos de persistência têm nas filtrações simpliciais que lhes induzem, de modo a obtermos informações topológicas dos complexos simpliciais e compreendermos suas mudanças no decorrer da filtração.

Uma vez que o módulo de persistência induzido por uma filtração simplicial é decomposto na soma direta de representações intervalares, é intuitivo considerar que estas contam o tempo de duração de cada gerador de homologia. Iniciemos tal análise pela interpretação da medida de persistência.

Proposição 2.36. *Sejam*

$$\mathbb{V} = \{i_{*,n}^{p,q} : V_p \rightarrow V_q \mid p, q \in \mathbb{R} \text{ e } p \leq q\} \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbb{I}[b_j, d_j]$$

um módulo de persistência com sua decomposição em módulos intervalares e $\mu_{\mathbb{V}}$ sua medida de persistência, então $\forall p, q, r, s \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$, tais que $p < q \leq r < s$, temos que

- $\mu_{\mathbb{V}}([-\infty, q] \times [r, +\infty]) = \text{posto } i_{*,n}^{q,r}$
- $\mu_{\mathbb{V}}([-\infty, q] \times [r, s]) = \text{posto } i_{*,n}^{q,r} - \text{posto } i_{*,n}^{q,s}$
- $\mu_{\mathbb{V}}([p, q] \times [r, +\infty]) = \text{posto } i_{*,n}^{q,r} - \text{posto } i_{*,n}^{p,r}$
- $\mu_{\mathbb{V}}([p, q] \times [r, s]) = \text{posto } i_{*,n}^{q,r} - \text{posto } i_{*,n}^{q,s} + \text{posto } i_{*,n}^{p,s} - \text{posto } i_{*,n}^{p,r}$

Demonstração. Para a primeira afirmação, indiquemos

$$\mathbb{I}[b_j, d_j] = \{i_{*,n,j}^{p,q} : V_p^j \rightarrow V_q^j \mid p, q \in \mathbb{R} \text{ e } p \leq q\},$$

então temos que

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{V}}([-\infty, q] \times [r, +\infty]) &= \#\{(b_j, d_j) \in \text{dgm}(\mathbb{V}) : b_j \leq q \leq r \leq d_j\} \\ &= \#\{j \in J : b_j \leq q \leq r \leq d_j\} = \#\{j \in J : V_t^j = \mathbb{K}, \forall t \in [q, r]\} \\ &= \#\{j \in J : V_q^j = \mathbb{K}\} - \#\{j \in J : V_q^j = \mathbb{K} \text{ e } \exists t \in (q, r], \text{ para o qual } V_t^j = 0\} \\ &= \dim V_q - \#\{j \in J : V_q^j = \mathbb{K} \text{ e } \exists t \in (q, r], \text{ para o qual } i_{*,n,j}^{q,t} = 0\} \\ &= \dim V_q - \#\{j \in J : V_q^j = \mathbb{K} \text{ e } \exists t \in (q, r], \text{ para o qual } i_{*,n,j}^{q,r} = i_{*,n,j}^{t,r} \circ i_{*,n,j}^{q,t} = 0\} \end{aligned}$$

2 Homologia Persistente

$$= \dim V_q - \dim \ker i_{*,n}^{q,r} = \text{posto } i_{*,n}^{q,r}.$$

Para a segunda afirmação, temos que, pela Proposição 2.35,

$$\mu_{\mathbb{V}}([-\infty, q] \times [r, +\infty]) = \mu_{\mathbb{V}}([-\infty, q] \times [r, s]) + \mu_{\mathbb{V}}([-\infty, q] \times [s, +\infty]),$$

logo, pelo passo anterior,

$$\text{posto } i_{*,n}^{q,r} = \mu_{\mathbb{V}}([-\infty, q] \times [r, s]) + \text{posto } i_{*,n}^{q,s}.$$

Como estamos trabalhando com diagramas com quantidade finitas de pontos, temos o resultado desejado.

As duas outras afirmações podem ser provadas de modo análogo. \square

Proposição 2.37. *Seja uma decomposição em módulos intervalares $\bigoplus_{j \in J} \mathbb{I}[b_j, d_j]$ de um módulo de persistência $\{i_{*,n}^{p,q} : V_p \rightarrow V_q \mid p, q \in \{1, \dots, m\} \text{ e } p \leq q\}$ induzido por uma filtração simplicial \mathcal{X} sobre um conjunto finito. Então cada módulo intervalar $\mathbb{I}[b, d]$ representa a presença de um gerador de homologia de $H_n(\mathcal{X})$ e intervalos distintos representam geradores não homólogos entre si.*

Demonstração. Seja $k \in \{1, \dots, m\}$, temos que

$$\dim H_n(X_k) = \dim V_k = \#\{j \in J : b_j \leq k \leq d_j\},$$

onde indicaremos $\{j \in J : b_j \leq k \leq d_j\} \doteq J_k$. Como V_k é de dimensão finita, podemos tomar uma base $\{\sigma_1, \dots, \sigma_t\}$ de V_k tal que

$$\bigoplus_{j \in J_k} \mathbb{K} \cong V_k \cong \mathbb{K}[\sigma_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{K}[\sigma_t],$$

logo, $\#J_k = t$ e temos que existe uma bijeção entre $\{\mathbb{I}[b_j, d_j] : j \in J_k\}$ e $\{\sigma_1, \dots, \sigma_t\}$. Seja $s \in J_k$ tal que $\mathbb{I}[b_s, d_s]$ seja correspondente a σ_1 , por tal bijeção. Indiquemos

$$\mathbb{I}[b_s, d_s] = \{i_{*,n,s}^{p,q} : V_p^j \rightarrow V_q^j \mid p, q \in \{1, \dots, m\} \text{ e } p \leq q\},$$

então temos que

- $N(\sigma_k) = b_s$. De fato, existe $\rho \in V_{b_s}$ tal que $i_{*,n,s}^{b_s,k}(\rho) = \sigma_1$, donde $\mathbb{1}(\rho) = \sigma_1$. Ou seja, $N(\sigma_1) \leq b_s$. Se $N(\sigma_1) < b_s$, então $i_{*,n,s}^{b_s-1,k}(\sigma_1) = i_{*,n}^{b_s-1,k}(\sigma_1) = \sigma_1$, donde $0(\sigma_1) = \sigma_1$, uma contradição.
- $M(\sigma_k) = d_s$. De fato, temos que $i_{*,n}^{k,d_s}(\sigma_1) = i_{*,n,s}^{k,d_s}(\sigma_1) = \sigma_1$, donde $\sigma_1 \in V_{d_s}$ e $M(\sigma_1) \geq d_s$. Se $M(\sigma_1) > d_s$, então $i_{*,n,s}^{b_s+1,k}(\sigma_1) = i_{*,n}^{b_s+1,k}(\sigma_1) = \sigma_1$, donde $0(\sigma_1) = \sigma_1$, uma contradição.

Finalmente, se σ é homólogo a σ_1 em k , então $\sigma \in \mathbb{K}[\sigma_1]$, logo, é a associado ao mesmo intervalo que σ_1 . \square

A associação entre geradores de homologia e módulos de persistência também pode ser estendida a filtrações sobre qualquer subconjunto de \mathbb{R} , desde que o módulo de persistência seja q-manso. Tal discussão demanda a utilização dos já mencionados pontos decorados e pode ser encontrada em [21].

Observação 2.38. *A partir da proposição anterior, podemos concluir que se entre dois instantes de uma filtração simplicial dois geradores não homólogos se tornam homólogos, o módulo intervalar correspondente a um dos dois se encerra. Como ambos se tornam equivalentes, é optativo qual dos dois módulos intervalares se encerrar, todavia, utilizaremos a **Lei do Mais Velho** apresentada na literatura ([5], [21]), que considera o gerador mais velho como representante da nova classe de geradores.*

Assim, o código de barras de persistência representa o tempo de vida de um gerador de forma proporcional ao comprimento da barra que está a ele associada, enquanto que no diagrama de persistência, tal informação é representada pela distância entre cada ponto e a diagonal. Finalmente, a medida de persistência calcula a quantidade de geradores não homólogos que sobrevive durante um intervalo da filtração.

Exemplo 2.39. *Seja $\mathcal{X} = (\mathbb{R}^2, K_i)_{i=1}^8$ a filtração simplicial exibida na Figura 2.13, onde*

$$K_1 = \{[a]\}, K_2 = \{[a], [b]\}, K_3 = \{[a], [b], [c]\}, K_4 = \{[a], [b], [c], [a, b]\},$$

$$K_5 = \{[a], [b], [c], [d], [a, b]\}, K_6 = \{[a], [b], [c], [d], [a, b], [b, c]\},$$

$$K_7 = \{[a], [b], [c], [d], [a, b], [b, c], [c, a]\}$$

$$\text{e } K_8 = \{[a], [b], [c], [d], [a, b], [b, c], [c, a], [a, d]\}.$$

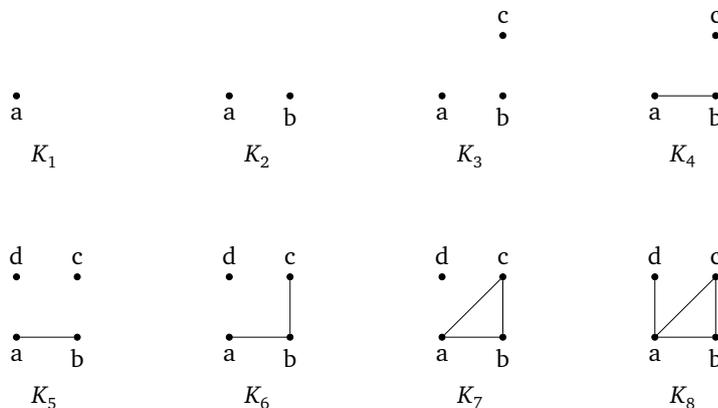


Figura 2.13: Filtração simplicial para o Exemplo 2.39

2 Homologia Persistente

Então temos que o 0-módulo de homologia persistente é dado por

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{K}[[a]] & \xrightarrow[\mathbb{1}]{i_{*,0}^1} & \mathbb{K}[[a],[b]] & \xrightarrow[\mathbb{1} \oplus \mathbb{1}]{i_{*,0}^2} & \mathbb{K}[[a],[b],[c]] & \xrightarrow[\mathbb{1} \oplus \mathbb{0} \oplus \mathbb{1}]{i_{*,0}^3} & \mathbb{K}[[a],[c]] \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \mathbb{K}[[a],[c],[d]] & \xrightarrow[\mathbb{1} \oplus \mathbb{0} \oplus \mathbb{1}]{i_{*,0}^4} & \mathbb{K}[[a],[d]] & \xrightarrow[\mathbb{1} \oplus \mathbb{1}]{i_{*,0}^5} & \mathbb{K}[[a],[d]] & \xrightarrow[\mathbb{1} \oplus \mathbb{0}]{i_{*,0}^6} & \mathbb{K}[[a]] \end{array}$$

que é isomorfo a $H_0(\mathcal{X}) \cong \mathbb{I}[1, 8] \oplus \mathbb{I}[2, 3] \oplus \mathbb{I}[3, 5] \oplus \mathbb{I}[5, 7]$.

Por outro lado, o 1-ésimo módulo de homologia persistente é

$$0 \xrightarrow[\mathbb{0}]{i_{*,1}^1} 0 \xrightarrow[\mathbb{0}]{i_{*,1}^2} 0 \xrightarrow[\mathbb{0}]{i_{*,1}^3} 0 \xrightarrow[\mathbb{0}]{i_{*,1}^4} 0 \xrightarrow[\mathbb{0}]{i_{*,1}^5} 0 \xrightarrow[\mathbb{0}]{i_{*,1}^6} \mathbb{K}[[a, b, c]] \xrightarrow[\mathbb{1}]{i_{*,1}^7} \mathbb{K}[[a, b, c]],$$

então $H_1(\mathcal{X}) \cong \mathbb{I}[7, 8]$

Tais informações podem ser expressas pelo diagrama de persistência da Figura 2.14.

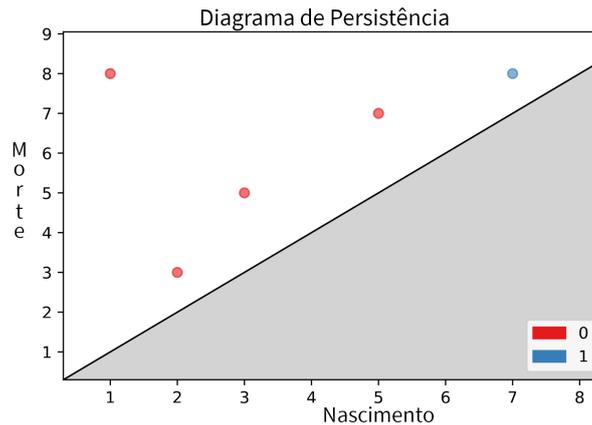


Figura 2.14: Diagrama de persistência do Exemplo 2.39

2.6 Algoritmos em Homologia Persistente

É possível a construção de um algoritmo que compute a decomposição em representações intervalares de um módulo de persistência. Serão aqui considerados apenas os casos em que a filtração simplicial tem espaço topológico fixado, é finita e um complexo simplicial é gerado a partir do anterior pela adição de um único simplexo, ou seja, filtrações do tipo $\mathcal{X} = (X, K_i)_{i=0}^m$, onde $K_0 = \emptyset$, $K_1 = \{\sigma_1\}$ e $K_{i+1} = K_i \cup \{\sigma_{i+1}\}$, com σ_{i+1} simplexo. De modo que se pode concluir que $K_m = K$. Além disso, a filtração é tal que todo simplexo só é unido à filtração após os seus bordos, ou seja, $\sigma_j \in K_j$ é tal que se $\partial \sigma_j = \sum_i \varepsilon_i \sigma_{j_i}$, então $j_i < j, \forall i$.

Inicialmente, o **Algoritmo de Cálculo dos Números de Betti**, apresentado abaixo, recebe como entrada a filtração de um complexo simplicial K de dimensão d contendo m simplexes (por exemplo, uma coleção de m esquemas simpliciais, cada qual uma lista de, no máximo, $d + 1$ vértices), em seguida, devido à dimensão do complexo simplicial, sabemos que há no máximo $d + 1$ números de Betti, logo, são criadas as variáveis β_0, \dots, β_d em cada qual é atribuído, inicialmente, valor zero. O algoritmo então percorre, na ordem, os m simplexes. Como todo simplexo só pode ser adicionado após o seu bordo, todo simplexo, quando unido à filtração, cria ou destrói um gerador de homologia. Assim, a cada etapa, o algoritmo atualiza os números de Betti de dimensão relacionada ao simplexo adicionado. O n -ésimo número de Betti de K_i é indicado por $\beta_n(K_i)$.

Algorithm 1 Betti numbers computation

Input: A filtration of a d -dimensional simplicial complex K containing m simplices.

```

1:  $\beta_0 \leftarrow 0, \beta_1 \leftarrow 0, \dots, \beta_d \leftarrow 0;$ 
2: for  $j = 1$  to  $m$  do
3:    $k = \dim \sigma_j - 1$ 
4:   if  $\sigma_j$  is contained in a  $(k + 1)$ -cycle in  $K_j$  then
5:      $\beta_{k+1} \leftarrow \beta_{k+1} + 1;$ 
6:   else
7:      $\beta_k \leftarrow \beta_k - 1;$ 
8:   end if
9: end for

```

Output: the Betti numbers $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_d$ of K .

Teorema 2.40. *Se o Algoritmo de Cálculo dos Números de Betti recebe como entrada uma filtração simplicial K de dimensão d com m simplexes, então tem como saída d variáveis β_i , cada qual contendo o i -ésimo número de Betti de K .*

Demonstração. A demonstração será por indução. Suponhamos que os números de Betti do complexo simplicial K_{i-1} foram calculados e o simplexo σ_i tem dimensão $k + 1$. Temos então duas possibilidades, como está exemplificado na Figura 2.15, onde podemos notar que quando σ_i não está contido em um 1-ciclo (esquerda), sua inserção conecta duas componentes conexas de K_{i-1} , diminuindo em uma unidade β_0 . Quando σ_i está contido em um 1-ciclo (direita), sua inserção cria um novo 1-ciclo que não é homólogo a nenhum pré-existente em K_{i-1} , aumentando β_1 em uma unidade.

Caso 1: Suponhamos que σ_i está contido em um $(k + 1)$ -ciclo c em K_i . Como um simplexo não pode ser adicionado antes de seu bordo, σ_i não é face de bordo de nenhum $(k + 2)$ -simplexo de K_i , logo, c não é bordo de nenhuma $(k + 2)$ -cadeia em K_i . Suponhamos que c seja homólogo a algum outro ciclo de K_i , ou seja, existe c' em K_i , homólogo a c . Isso implicaria que $c + c'$ é bordo de alguma $(k + 2)$ -cadeia em K_i , o que leva a uma

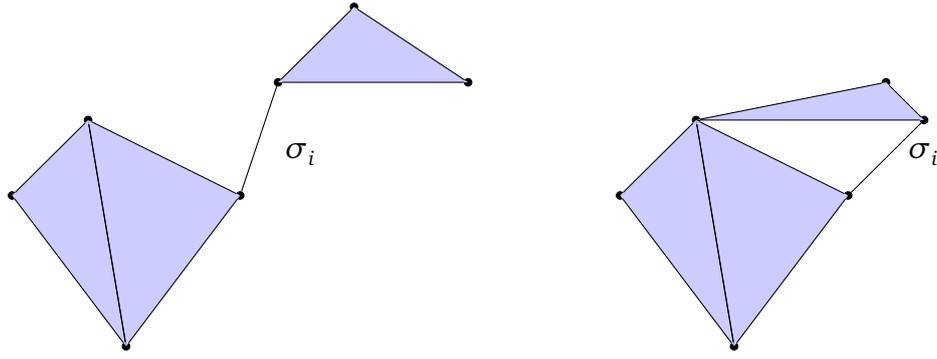


Figura 2.15: Exemplo da adição de um 1-simplexo σ_i em um subcomplexo K_{i-1} .

contradição. Logo, a adição de σ_i dá origem a uma classe de homologia linearmente independente das classes presentes em K_{i-1} . Como consequência, $\beta_{k+1}(K_i) \geq \beta_{k+1}(K_{i-1}) + 1$. Por outro lado, ainda no primeiro caso.  suficiente notar que a adição de um $(k + 1)$ -simplexo a K_{i-1} não pode aumentar a dimensão do k -ésimo grupo de homologia por mais que uma unidade. De fato, sejam c e c' dois ciclos contendo σ_i , então $c + c'$  um $(k + 1)$ -ciclo em K_{i-1} , o que significa que c' está contido no subespaço gerado por $Z_{k+1}(K_{i-1})$ e c . Logo, $\dim Z_{k+1}(K_i) \leq \dim Z_{k+1}(K_{i-1}) + 1$ e como $B_{k+1}(K_{i-1}) \subset B_{k+1}(K_i)$, então $\beta_{k+1}(K_i) \leq \beta_{k+1}(K_{i-1}) + 1$.

Caso 2: Suponhamos que σ_i não está contido em $(k + 1)$ -ciclo em K_i . Suponhamos ainda que o k -ciclo $\partial\sigma_i$ seja um bordo em K_{i-1} . Logo, existe $c \in K_{i-1}$ tal que $\partial c = \partial\sigma_i$, ou seja, tal que $\partial(c + \sigma_i) = 0$. Então $c + \sigma_i$ seria um $(k + 1)$ -ciclo em K_i , contendo ∂_i : uma contradição. Ou seja, como $\partial\sigma_i$ (cuja presença necessariamente deve ser encontrada em K_{i-1} , pela forma como K foi definido) não  um bordo em K_{i-1} , se torna mediante a adição de σ_i . Logo, $\beta_k(K_i) \leq \beta_k(K_{i-1}) - 1$. A desigualdade pode ser levada a uma igualdade como no Caso 1. Concluímos que a adição de σ_i destrói um gerador de homologia ao tornar um ciclo, bordo.

Assim, na forma como as filtrações simpliciais foram construídas, a adição de um $(k + 1)$ -simplexo necessariamente cria um $(k + 1)$ -gerador de homologia não homólogo aos já presentes ou destrói um k -gerador de homologia já presente, onde os dois casos são mutuamente excludentes. Portanto, no final da i -ésima iteração, as variáveis β_i contm os números de Betti de K_i . \square

Definição 2.41. *Seja K um complexo simplicial de dimensão d e*

$$\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_m = K$$

*uma filtração simplicial de K . Diz-se que σ_i , de dimensão $(k + 1)$,  um **simplexo positivo***

se estiver contido em um $(k + 1)$ -ciclo em K_i e negativo, caso contrário.

Logo, temos que o k -ésimo número de Betti de K é igual à diferença entre o número de k -simplexos positivos, ou seja, aqueles cuja inserção criam um novo gerador de homologia, e o número de $(k + 1)$ -simplexos negativos, ou seja, aqueles cuja inserção destrói um gerador de homologia. Para se definir quais simplexos são positivos e quais são negativos, será necessário um algoritmo que compute a decomposição em representação intervalar de uma filtração simplicial. Assim, para cada intervalo $\mathbb{I}[b, d]$, presente na decomposição, teremos que σ_b é positivo e σ_d é negativo.

O processo de decomposição de uma filtração simplicial inicia-se com a definição do **Algoritmo de Redução de Matrizes**, que recebe como entrada uma matrix M de tamanho $m \times m$ em \mathbb{Z}_2 , que é a matriz de incidência da filtração simplicial K , ou seja, $M_{ij} = 1$, se σ_i é face de bordo de σ_j e $M_{ij} = 0$, caso contrário. Então ele percorre coluna a coluna, da primeira à m -ésima. A cada coluna j em que para, ele identifica a linha de maior índice dentre as de entrada não nula, valor indicado no algoritmo por $low(j, M)$, que é zero se a coluna for nula. Se houver alguma coluna anterior cuja linha não nula de maior índice é igual à linha não nula de maior índice da atual (ou seja, se existe $1 \leq k < j$, tal que $low(k, M) = low(j, M) \neq 0$), ele soma módulo 2 tal coluna anterior na coluna atual, calcula novamente a linha não nula de maior índice da coluna atual e repete o processo. Quando não houver nenhuma coluna i , anterior à atual, tal que $low(k, M) = low(j, M) \neq 0$, ele vai para a coluna seguinte.

Algorithm 2 Matrix reduction

Input: $m \times m$ binary matrix M

```

1: for  $j = 1$  to  $m$  do
2:   while there exists  $k < j$  with  $low(k, M) = low(j, M) \neq 0$  do
3:     add (modulo 2) column  $k$  to column  $j$  in  $M$ ;
4:   end while
5: end for

```

Output: the reduced matrix M

No final, a matriz resultante, que será indicada por M' , é composta de colunas nulas e colunas não nulas onde, dentre estas últimas, cada uma é única na característica de em qual linha tem a última entrada não nula. Podemos interpretar a matriz reduzida da seguinte maneira:

- cada coluna nula (respectivamente, não nula) representa um simplexo positivo (respectivamente, negativo);
- cada coluna não nula j se relaciona com uma coluna $i = low(j, M')$ e isto representa que $\mathbb{I}[i, j - 1]$ está na decomposição intervalar de $H_n(\mathcal{X})$, onde n é a dimensão de σ_i ;

2 Homologia Persistente

- cada coluna nula j , com a qual nenhuma coluna não nula se identifica pelo modo acima exposto, indica a presença de $\mathbb{I}[j, m]$ na decomposição intervalar de $H_n(\mathcal{X})$, onde n é a dimensão de σ_j ;

Exemplo 2.42. Retomando o Exemplo 2.39 podemos considerar a seguinte enumeração dos simplexes, $K_{i+1} - K_i = \{\sigma_{i+1}\}$, ficando o complexo simplicial de acordo com a Figura 2.16.

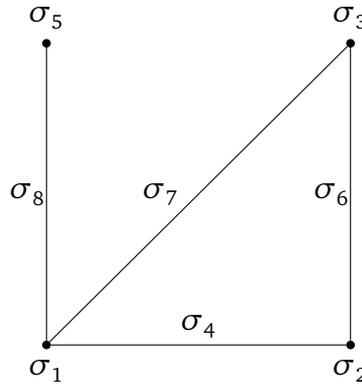


Figura 2.16: Complexo simplicial para o Exemplo 2.39

A matriz de entrada do algoritmo fica sendo a Tabela 2.1, onde os espaços em branco indicam entrada 0. Enquanto que a matriz de saída é a Tabela 2.2.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1			1	1
2				1		1		
3						1	1	
4								
5								1
6								
7								
8								

Tabela 2.1: Matriz de entrada do algoritmo para a filtração simplicial do Exemplo 2.39

Ou seja, como as colunas 4, 6 e 8 são não nulas e tais que $2 = \text{low}(4, M')$, $3 = \text{low}(6, M')$ e $5 = \text{low}(8, M')$, ou seja, se relacionam com três colunas que se referem a simplexes de dimensão 0, logo, temos $\mathbb{I}[2, 3]$, $\mathbb{I}[3, 5]$ e $\mathbb{I}[5, 7]$ na decomposição intervalar de $H_0(\mathcal{X})$. Além disso, as colunas nulas 1 (correspondente a um simplexo de dimensão 0) e 7 (correspondente a um simplexo de dimensão 1) não se relacionam com nenhuma outra, indicando que $\mathbb{I}[1, 8]$ está na decomposição intervalar de $H_0(\mathcal{X})$ e $\mathbb{I}[7, 8]$ está na de $H_1(\mathcal{X})$. Logo, $H_0(\mathcal{X}) = \mathbb{I}[1, 8] \oplus \mathbb{I}[2, 3] \oplus \mathbb{I}[3, 5] \oplus \mathbb{I}[5, 7]$ e $H_1(\mathcal{X}) = \mathbb{I}[7, 8]$, o que está de acordo com o calculado para esta filtração simplicial na seção anterior.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1				1				
2				1		1		
3						1		1
4								
5								1
6								
7								
8								

Tabela 2.2: Matriz de saída do algoritmo para a filtração simplicial do Exemplo 2.39

Resta-se então demonstrar que tal interpretação está correta.

Teorema 2.43. *Quando obtém como entrada a matriz de incidência de uma filtração simplicial \mathcal{X} , o algoritmo de redução de matrizes calcula uma matriz que determina a decomposição em representações intervalares da filtração simplicial.*

Demonstração. Indicando $\hat{\sigma}_j$ como a cadeia associada à j -ésima coluna da matriz resultante, ou seja, $\hat{\sigma}_j = \sum_{i=1}^m M'_{ij} \sigma_i$, temos que

$$\hat{\sigma}_j = \partial \left(\sigma_j + \sum_{i < j} \varepsilon_i \sigma_i \right),$$

onde $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. Tal resultado se dá por indução, pois, inicialmente cada coluna j é tal que $M'_{ij} \sigma_i = \partial \sigma_j$, em \mathbb{Z}_2 . Além disso, a cada iteração, em uma coluna pode ser somada apenas uma coluna de índice inferior.

No final do algoritmo, se a j -ésima coluna é não nula, ou seja, se j é tal que $\text{low}(j, M') \neq 0$, então $\sigma_{\text{low}(j, M')}$ está contido em um k -bordo, onde k é a dimensão de $\sigma_{\text{low}(j, M')}$. De fato, como $\text{low}(j, M')$ é a maior linha não nula da coluna j , não há na expressão de $\hat{\sigma}_j$ simplexo com índice maior que $\text{low}(j, M')$ e coeficiente não nulo. Assim, podemos indicar

$$\hat{\sigma}_j = \sigma_{\text{low}(j, M')} + \sum_{p < \text{low}(j, M')} \eta_p \sigma_p,$$

onde $\eta_p \in \{0, 1\}$. Por outro lado, pela afirmação anterior, $\hat{\sigma}_j$ necessariamente representa um bordo em K_j , logo, como $\partial^2 = 0$, então $\partial \hat{\sigma}_j = 0$. Disto, $\hat{\sigma}_j$ é um ciclo contendo $\sigma_{\text{low}(j, M')}$.

Ao fim, se a j -ésima coluna é não nula, então $\mathbb{I}[\text{low}(j, M'), j]$ está na representação intervalar de $H_*(\mathcal{X})$. De fato, pelas afirmações anteriores, temos que

$$\partial \left(\sigma_j + \sum_{i < j} \varepsilon_i \sigma_i \right) = \sigma_{\text{low}(j, M')} + \sum_{p < \text{low}(j, M')} \eta_p \sigma_p$$

$$\implies \partial(\sigma_j) = \sigma_{low(j, M')} + \sum_{p < low(j, M')} \eta_p \sigma_p + \partial\left(\sum_{i < j} \varepsilon_i \sigma_i\right),$$

onde $-\varepsilon_i = \varepsilon_i$, por tratar-se de coeficiente em \mathbb{Z}_2 . Notemos, do resultado acima, que $\sigma_{low(j, M')}$ é um simplexo positivo adicionado no instante $low(j, M')$, de modo tal que é o último simplexo na composição de um bordo, ou seja, sua adição define um gerador de homologia.

No final do algoritmo, se a j -ésima coluna só contém zeros, então σ_j é positivo. De fato, pela primeira afirmação, $\partial(\sigma_j + \sum_{i < j} \varepsilon_i \sigma_i) = 0$, ou seja, houve a criação de um ciclo no instante j .

□

2.7 Estabilidade

A utilidade do diagrama de persistência é lastreada na sua estabilidade. Podemos provar que pequenas perturbações em nuvens de pontos geram pequenas perturbações no seu diagrama de persistência. Isto será feito capturando o grau de perturbação a partir da determinação de uma função de distância entre as filtrações simpliciais geradas pelas nuvens, mais precisamente, entre as suas decomposições em representações intervalares. Também será definida uma função de distância entre diagramas de persistência, de modo que poderemos provar uma relação entre tais funções.

Distância *Bottleneck*

Para definir a distância entre dois diagramas de persistência, devemos levar em conta que estes podem ter diferentes quantidades de pontos, de modo que nem sempre é possível se construir uma bijeção. Assim, definiremos uma interação mais geral.

Definição 2.44. *Dados dois multiconjuntos P, Q , uma **correspondência parcial** entre P e Q , indicada por $P \leftrightarrow Q$ é um conjunto de pares $M \subset P \times Q$ tal que*

- *Todo ponto de P corresponde a, no máximo, um ponto de Q , ou seja, dado $p \in P$, existe, no máximo, um único $q \in Q$ tal que $(p, q) \in M$.*
- *Todo ponto de Q corresponde a, no máximo, um ponto de P , ou seja, dado $q \in Q$, existe, no máximo, um único $p \in P$ tal que $(p, q) \in M$.*

Definiremos o **custo do par correspondente** $(p, q) \in M$ como $\|p - q\|_\infty$. Ainda, seja um ponto $s = (s_x, s_y) \in P \sqcup Q \subset \overline{\mathbb{R}}_+^2$ que não se corresponde com ninguém, então o **custo do ponto sem correspondência** é $\frac{|s_y - s_x|}{2}$, ou seja, a distância entre s e a sua projeção

ortogonal na diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in \overline{\mathbb{R}}\}$, pela métrica $\|\cdot\|_\infty$, que será indicado por $\|s - \Delta\|_\infty$. Indicaremos, ainda, por \hat{M} os pontos sem correspondência.

Definição 2.45. Dada uma correspondência parcial M entre dois multiconjuntos P, Q , o custo *bottleneck* de M é dado por

$$c(M) = \max \left\{ \sup_{(p,q) \in M} \|p - q\|_\infty, \sup_{s \in \hat{M}} \frac{|s_y - s_x|}{2} \right\}.$$

A *distância bottleneck* é dada por

$$d_b(P, Q) = \inf_{M: P \leftrightarrow Q} c(M).$$

Como consequência de como é definida, temos que a distância *bottleneck* tem a tendência de considerar as correspondências parciais que associem pontos de um diagrama próximo à diagonal, com a diagonal do outro diagrama, de modo a tornar o resultado pouco sensível a módulos intervalares de curta duração.

Proposição 2.46. Dados três multiconjuntos A, B e C , a distância *bottleneck* satisfaz a desigualdade triangular, ou seja

$$d_b(A, C) \leq d_b(A, B) + d_b(B, C).$$

Demonstração. Seja M_1 uma correspondência parcial entre A e B tal que $c(M_1) = \varepsilon_1$. Seja ainda M_2 uma correspondência parcial entre B e C tal que $c(M_2) = \varepsilon_2$. Tomemos então o conjunto

$$M = \{(p, r) \in A \times C \mid \exists q \in B \text{ para o qual } (p, q) \in M_1 \text{ e } (q, r) \in M_2\}.$$

Temos que M é uma correspondência parcial entre A e C de custo *bottleneck* $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, pois

- Se $(p, r) \in M$, então existe $q \in B$ tal que

$$\|r - p\|_\infty \leq \|r - q\|_\infty + \|q - p\|_\infty \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2;$$

- Se $p \in A$ não se corresponde em M então há duas possibilidades. Ou p não se corresponde em M_1 e então

$$\|p - \Delta\|_\infty = \frac{|p_y - p_x|}{2} \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

2 Homologia Persistente

Ou então p tem correspondência em M_1 . Suponhamos que $(p, q) \in M_1$, então q não tem correspondência em M_2 , assim, o custo de p em M é

$$\|p - \Delta\|_\infty \leq \|p - q\|_\infty + \|q - \Delta\|_\infty \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

- Se $r \in C$ não se corresponde em M então, de modo análogo ao item anterior, pode-se mostrar que

$$\|r - \Delta\|_\infty \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

□

Distância Intercalada

O próximo passo é a definição de uma distância entre dois módulos de persistência. Para tal, apresentaremos um caso particular, que sirva de construção intuitiva de tal distância.

Seja $F = \{p_i \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq i \leq m\}$ uma nuvem de pontos e seja G uma nuvem de pontos obtida por uma perturbação de amplitude $\varepsilon/2$ de F , como está ilustrado na Figura 2.17. Ou seja, $G = \{p'_i \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq i \leq m\}$ é tal que existe uma bijeção entre F e G , dada por $p_i \mapsto p'_i$, e para cada i , $\|p_i - p'_i\| < \varepsilon/2$. Podemos considerar, sem perda de generalidade, que a perturbação é tal que a coleção de subconjuntos LI da nuvem não se altera.

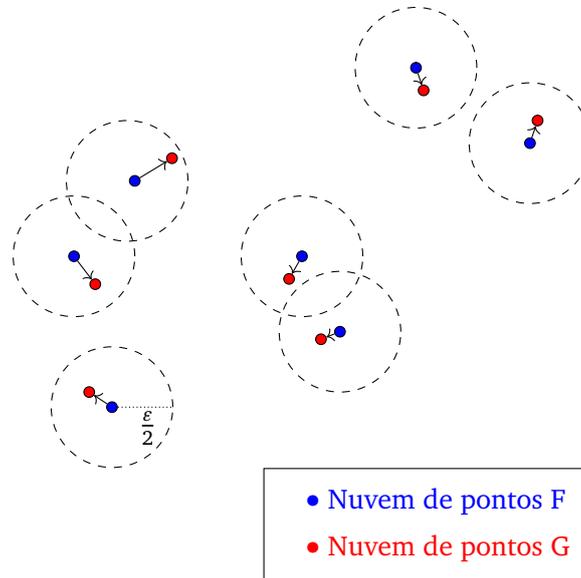


Figura 2.17: Perturbação da nuvem de pontos F .

Se $\{p_{j_1}, \dots, p_{j_n}\} \in \text{Rips}(F, t)$, então para cada $i, l \in \{1, \dots, n\}$, temos que $\|p_{j_i} - p_{j_l}\| \leq t$, logo,

$$\|p'_{j_i} - p'_{j_l}\| \leq \|p'_{j_i} - p_{j_i}\| + \|p_{j_i} - p_{j_l}\| + \|p_{j_l} - p'_{j_l}\| < \varepsilon/2 + t + \varepsilon/2 = t + \varepsilon,$$

ou seja, $\{p'_{j_1}, \dots, p'_{j_n}\} \in \text{Rips}(G, t + \varepsilon)$. Donde podemos concluir, a menos de bijeção, que

$$\text{Rips}(F, t) \subseteq \text{Rips}(G, t + \varepsilon).$$

Por simetria, claramente podemos considerar F como perturbação de amplitude $\varepsilon/2$ de G , donde obtemos que

$$\text{Rips}(G, t) \subseteq \text{Rips}(F, t + \varepsilon).$$

Denotando $F_t \doteq \text{Rips}(F, t)$ e $G_t \doteq \text{Rips}(G, t)$, temos as filtrações simpliciais $\mathcal{F} = \{F_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ e $\mathcal{G} = \{G_t : t \in \mathbb{R}^+\}$. Então \mathcal{F} e \mathcal{G} são filtrações intercaladas no seguinte sentido:

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_t \subseteq G_{t+\varepsilon} \text{ e } G_t \subseteq F_{t+\varepsilon}.$$

Mais precisamente, dados $t, u \in \mathbb{R}$, com $t \leq u$, os seguintes diagramas, onde os mapas são inclusões, são comutativos:

$$\begin{array}{ccc} F_t & \longrightarrow & F_u \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_{t+\varepsilon} & \longrightarrow & G_{u+\varepsilon} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F_{t+\varepsilon} & \longrightarrow & F_{u+\varepsilon} \\ \uparrow & & \uparrow \\ G_t & \longrightarrow & G_u. \end{array}$$

Aplicando-se, então, o funtor de homologia H_n , obtemos os módulos de persistência $H_n(\mathcal{F})$ e $H_n(\mathcal{G})$, bem como, os homomorfismos $\phi_t : H_n(F_t) \rightarrow H_n(G_{t+\varepsilon})$ e $\psi_t : H_n(G_t) \rightarrow H_n(F_{t+\varepsilon})$ induzidos pela inclusão. Temos, assim, os seguintes diagramas comutativos induzidos, onde $i_{*,n}$ e $j_{*,n}$ são os homomorfismos induzidos pela inclusão nas filtrações $H_n(\mathcal{F})$ e $H_n(\mathcal{G})$, respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} H_n(F_t) & \xrightarrow{i_{*,n}^{t,u}} & H_n(F_u) \\ \downarrow \phi_t & & \downarrow \phi_u \\ H_n(G_{u+\varepsilon}) & \xrightarrow{j_{*,n}^{t+\varepsilon,u+\varepsilon}} & H_n(G_{u+\varepsilon}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_n(F_{t+\varepsilon}) & \xrightarrow{i_{*,n}^{t+\varepsilon,u+\varepsilon}} & H_n(F_{u+\varepsilon}) \\ \psi_t \uparrow & & \psi_u \uparrow \\ H_n(G_t) & \xrightarrow{j_{*,n}^{t,u}} & H_n(G_u) \end{array}$$

A definição de tais coleções de momorfismos é denominada morfismo intercalado de grau ε entre módulos de persistência.

Definição 2.47. *Sejam*

$$\mathbb{V} = \{i_{*,n}^{a,b} : V_a \rightarrow V_b \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq b\}$$

2 Homologia Persistente

e

$$\mathbb{W} = \{j_{*,n}^{a,b} : W_a \rightarrow W_b \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq b\}$$

dois módulos de persistência, então uma ε -intercalação entre \mathbb{V} e \mathbb{W} é um par de coleção de morfismos entre módulos $\phi = (\phi_t : V_t \rightarrow W_{t+\varepsilon})_{t \in \mathbb{R}}$ e $\psi = (\psi_t : W_t \rightarrow V_{t+\varepsilon})_{t \in \mathbb{R}}$, tal que os diagramas abaixo comutam para cada par $t, u \in \mathbb{R}$, tais que $t \leq u$.

$$\begin{array}{ccc} V_t & \longrightarrow & V_u \\ \downarrow \phi_t & & \downarrow \phi_u \\ W_{t+\varepsilon} & \longrightarrow & W_{u+\varepsilon} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V_{t+\varepsilon} & \longrightarrow & V_{u+\varepsilon} \\ \psi_t \uparrow & & \psi_u \uparrow \\ W_t & \longrightarrow & W_u \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V_t & \xrightarrow{\quad} & V_{u+2\varepsilon} \\ & \searrow \phi_t & \nearrow \psi_{t+\varepsilon} \\ & & W_{t+\varepsilon} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & V_{t+\varepsilon} \\ & \nearrow \psi_t & \searrow \phi_{t+\varepsilon} \\ W_t & \xrightarrow{\quad} & W_{u+2\varepsilon} \end{array}$$

Definição 2.48. A família de morfismos $(\phi_t : V_t \rightarrow W_{t+\varepsilon})_{t \in \mathbb{R}}$ com as propriedades apresentadas na Definição 2.47 é chamada de **morfismo de grau ε** entre \mathbb{V} e \mathbb{W} .

Definem-se então os conjuntos

$$\text{Hom}^\varepsilon(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = \{\text{morfismos } \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W} \text{ de grau } \varepsilon\}$$

e

$$\text{End}^\varepsilon(\mathbb{V}) = \{\text{morfismos } \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \text{ de grau } \varepsilon\}.$$

As possíveis composições entre dois morfismos de grau dão origem à seguinte aplicação

$$\text{Hom}^{\varepsilon'}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \times \text{Hom}^\varepsilon(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \rightarrow \text{Hom}^{\varepsilon+\varepsilon'}(\mathbb{U}, \mathbb{W}).$$

Podemos ainda definir o morfismo de grau gerado a partir da identidade, ou seja, $\mathbb{1}_{\mathbb{V}}^\delta \in \text{End}^\delta(\mathbb{V})$, que é dado pela coleção de inclusões induzidas

$$\mathbb{1}_{\mathbb{V}}^\delta = (i_{*,n}^{t,t+\delta} : V_t \rightarrow V_{t+\delta})_{t \in \mathbb{R}}.$$

Uma vez definidos estes objetos, podemos tomar então a definição alternativa de que dois módulos de persistência, \mathbb{V} e \mathbb{W} , são ε -intercalados quando existem $\phi \in \text{Hom}^\varepsilon(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

e $\psi \in \text{Hom}^\varepsilon(\mathbb{W}, \mathbb{V})$, tais que

$$\phi 1_{\mathbb{V}}^\delta = 1_{\mathbb{W}}^\delta \phi, \psi 1_{\mathbb{W}}^\delta = 1_{\mathbb{V}}^\delta \psi, \psi \phi = 1_{\mathbb{V}}^{2\varepsilon} \text{ e } \phi \psi = 1_{\mathbb{W}}^{2\varepsilon}, \forall \delta > 0.$$

Se dois módulos de persistência \mathbb{V} e \mathbb{W} são ε -intercalados, então eles são $(\varepsilon + \delta)$ -intercalados, para cada $\delta > 0$. De fato, basta tomar

$$\phi' = \phi 1_{\mathbb{V}}^\delta = 1_{\mathbb{W}}^\delta \phi$$

$$\psi' = \psi 1_{\mathbb{W}}^\delta = 1_{\mathbb{V}}^\delta \psi.$$

Logo, faz sentido que tomemos o ínfimo valor dentre os quais existe uma intercalação entre dois módulos de persistência.

Definição 2.49. A *distância intercalada* entre dois módulos de persistência \mathbb{V} e \mathbb{W} é

$$d_i(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \doteq \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid \text{existe uma } \varepsilon\text{-intercalação entre } \mathbb{V} \text{ e } \mathbb{W}\}.$$

Quando não existe ε -intercalação entre \mathbb{V} e \mathbb{W} convencionamos-se que $d_i(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = +\infty$. Seja a ordem parcial padrão em \mathbb{R}^2 :

$$(x, y) \preceq (x', y') \iff x \leq y \text{ e } x' \leq y'$$

Para cada $r \in \mathbb{R}$, definamos a diagonal deslocada

$$\Delta_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x = 2r\}.$$

Induziremos em Δ_r a ordem parcial padrão de \mathbb{R}^2 , de modo que este é um poset isomorfo à reta \mathbb{R} . Consideraremos o isomorfismo $t \mapsto (t-r, t+r)$. Isto proporciona uma identificação canônica entre módulos de persistência sobre \mathbb{R} e módulos de persistência sobre Δ_r .

Proposição 2.50. *Sejam x e y números reais. Dois módulos de persistência*

$$\mathbb{V} = \{i_{*,n}^{a,b} : V_a \rightarrow V_b \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq b\}$$

e

$$\mathbb{W} = \{j_{*,n}^{a,b} : W_a \rightarrow W_b \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq b\}$$

são $|y - x|$ -intercalados se, e somente se existe um módulo de persistência sobre $\Delta_x \cup \Delta_y$

$$\mathbb{U} = \{k_{*,n}^{a,b} : U_a \rightarrow U_b \mid a, b \in \Delta_x \cup \Delta_y \text{ e } a \preceq b\}$$

tal que $\mathbb{U}|_{\Delta_x} \cong \mathbb{V}$ e $\mathbb{U}|_{\Delta_y} \cong \mathbb{W}$. Onde $\Delta_x \cup \Delta_y$ herda a ordem parcial padrão de \mathbb{R}^2 .

2 Homologia Persistente

Demonstração. Consideremos $x < y$, sem perda de generalidade. Suponhamos que \mathbb{V} e \mathbb{W} são $|y - x|$ -intercalados, então existe o par de coleções de morfismos $\phi = (\phi_t : V_t \rightarrow W_{t+y-x})_{t \in \mathbb{R}}$ e $\psi = (\psi_t : W_t \rightarrow V_{t+y-x})_{t \in \mathbb{R}}$, que estão restritos às seguintes relações, para todo $\delta > 0$, obtidos a partir da Definição 2.47

- a) $\phi \mathbb{1}_{\mathbb{V}}^{\delta} = \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^{\delta} \phi$, mais precisamente, $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{t+\delta} i_{*,n}^{t,t+\delta} = j_{*,n}^{(t+y-x),(t+y-x)+\delta} \phi_t$;
- b) $\psi \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^{\delta} = \mathbb{1}_{\mathbb{V}}^{\delta} \psi$, de modo análogo ao anterior;
- c) $\psi \phi = \mathbb{1}_{\mathbb{V}}^{2y-2x}$, mais precisamente, $\forall t \in \mathbb{R}, \psi_{t+y-x} \phi_t = i_{*,n}^{t,t+(2y-2x)}$;
- d) $\phi \psi = \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^{2y-2x}$, de modo análogo ao anterior.

Definamos então \mathbb{U} da seguinte maneira: para cada $a \in \mathbb{R}$,

$$U_{(a-x,a+x)} = V_a \text{ e } U_{(a-y,a+y)} = W_a.$$

Um detalhe importante é que quando, por exemplo, dizemos que $a \in \Delta_x$, estamos omitindo a bijeção entre Δ_x e \mathbb{R} , ou seja, com a estamos nos referindo a $(a-x, a+x) \in \mathbb{R}^2$. Durante essa demonstração, indicaremos $(a-x, a+x)$ por a e $(a-y, a+y)$ por \bar{a} , a menos que se afirme o contrário. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$, então definiremos também $k_{*,n}^{a,b} = i_{*,n}^{a,b}$ e $k_{*,n}^{\bar{a},\bar{b}} = j_{*,n}^{a,b}$. Em particular, se $b-a \geq y-x$, então $(a-x, a+x) \preceq (b-y, b+y)$ e definimos

$$k_{*,n}^{a,\bar{b}} = j_{*,n}^{a+y-x,b} \phi_a : U_{(a-x,a+x)} = V_a \rightarrow W_{a+y-x} \rightarrow W_b = U_{(b-y,b+y)}.$$

Ainda, se $a \leq b$ e $a-b \leq -(y-x)$, temos $(a-y, a+y) \preceq (b-x, b+x)$, e definimos

$$k_{*,n}^{\bar{a},b} = i_{*,n}^{a+y-x,b} \psi_a : U_{(a-y,a+y)} = W_a \rightarrow V_{a+y-x} \rightarrow V_b = U_{(b-x,b+x)}.$$

Resta mostrarmos que os homomorfismos de \mathbb{U} seguem a lei de composição. Temos que

$$k_{*,n}^{b,c} \circ k_{*,n}^{a,b} = i_{*,n}^{b,c} \circ i_{*,n}^{a,b} = i_{*,n}^{a,c} = k_{*,n}^{a,c}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

De modo análogo, usando a lei em $j_{*,n}$, temos que $k_{*,n}^{\bar{b},\bar{c}} \circ k_{*,n}^{\bar{a},\bar{b}} = k_{*,n}^{\bar{a},\bar{c}}$. Ainda, se $a \preceq b \preceq \bar{c}$, então

$$k_{*,n}^{b,\bar{c}} \circ k_{*,n}^{a,b} = j_{*,n}^{b+y-x,c} \phi_b i_{*,n}^{a,b} = j_{*,n}^{b+y-x,c} \circ j_{*,n}^{a+y-x,b+y-x} \phi_a = j_{*,n}^{a+y-x,c} \phi_a = k_{*,n}^{a,\bar{c}}.$$

Analogamente, a lei de composição se prova para quaisquer outros casos. Finalmente, da construção de \mathbb{U} temos que $\mathbb{U}|_{\Delta_x} = \mathbb{V}$ e $\mathbb{U}|_{\Delta_y} = \mathbb{W}$.

Suponhamos agora a existência do módulo de persistência \mathbb{U} , conforme apresentado no enunciado, munido da lei de composição. Provemos a existência de \mathbb{V} e \mathbb{W} . Definindo,

novamente,

$$V_a = U_{(a-x, a+x)}, W_a = U_{(a-y, a+y)}, i_{*,n}^{a,b} = k_{*,n}^{a,b} \text{ e } j_{*,n}^{a,b} = k_{*,n}^{\bar{a},\bar{b}},$$

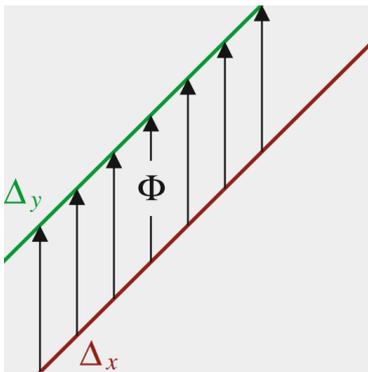
podemos definir os mapas ϕ_t como aplicação vertical de Δ_x para Δ_y e ψ_t como aplicação horizontal de Δ_y para Δ_x , como pode se observar na Figura, uma vez que

$$V_t = U_{(t-x, t+x)} \rightarrow U_{(t-x, t+2y-x)} = U_{((t+y-x)-y, (t+y-x)+y)} = W_{t+y-x} \implies \phi_t = k_{*,n}^{t, \overline{t+y-x}}$$

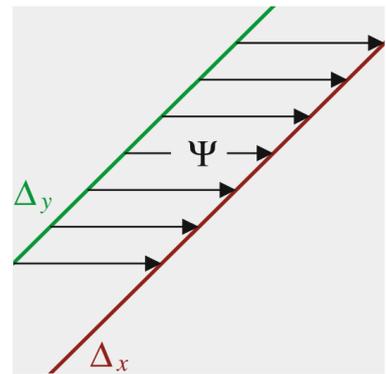
$$W_t = U_{(t-y, t+y)} \rightarrow U_{(t+y-2x, t+y)} = U_{((t+y-x)-x, (t+y-x)+x)} = V_{t+y-x} \implies \psi_t = k_{*,n}^{\bar{t}, t+y-x}$$

Para provar que existe uma $|y-x|$ -intercalação entre \mathbb{V} e \mathbb{W} , resta provarem-se as regras **a)**, **b)**, **c)** e **d)** para o morfismos de grau ϕ e ψ acima definidos. Temos assim, a partir da lei de composição em \mathbb{U}

- a) Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{t+\delta} i_{*,n}^{t, t+\delta} = k_{*,n}^{t+\delta, \overline{t+\delta+y-x}} k_{*,n}^{t, t+\delta} = k_{*,n}^{\overline{t+\delta+y-x}} = j_{*,n}^{(t+y-x), (t+y-x)+\delta} \phi_t$,
ou seja, $\phi \mathbb{1}_{\mathbb{V}}^\delta = \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^\delta \phi$;
- b) $\psi \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^\delta = \mathbb{1}_{\mathbb{V}}^\delta \psi$, de modo análogo ao anterior;
- c) Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\psi_{t+y-x} \phi_t = k_{*,n}^{\bar{t+y-x}, t+2y-2x} k_{*,n}^{t, \overline{t+y-x}} = k_{*,n}^{t, t+(2y-2x)} = i_{*,n}^{t, t+(2y-2x)}$, ou
seja, $\psi \phi = \mathbb{1}_{\mathbb{V}}^{2y-2x}$
- d) $\phi \psi = \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^{2y-2x}$, de modo análogo ao anterior.



(a) $\Phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$
como coleção de
homomorfismos
verticais de \mathbb{U}



(b) $\Psi : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$
como coleção de
homomorfismos
horizontais de
 \mathbb{U} .

Figura 2.18: Interpretação dos morfismos de grau $|y-x|$ entre \mathbb{V} e \mathbb{W} como morfismo de \mathbb{U} .

□

2 Homologia Persistente

Lema 2.51 (Lema da Interpolação). *Sejam*

$$\mathbb{V} = \{i_{*,n}^{a,b} : V_a \rightarrow V_b \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq b\}$$

e

$$\mathbb{W} = \{j_{*,n}^{a,b} : W_a \rightarrow W_b \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq b\}$$

dois módulos de persistência ε -intercalados. Então existe uma família 1-paramétrica de módulos de persistência $(\mathbb{U}_x)_{x \in [0, \varepsilon]}$ tal que $\mathbb{U}_0 = \mathbb{V}$, $\mathbb{U}_\varepsilon = \mathbb{W}$ e, dados $x, y \in [0, \varepsilon]$, temos que \mathbb{U}_x e \mathbb{U}_y são $|y - x|$ -intercalados. Ainda, se \mathbb{V} e \mathbb{W} são q -mansos, então todo \mathbb{U}_x também o será.

Demonstração. Nos bastará provar que qualquer módulo de persistência \mathbb{U} sobre $\Delta_0 \cup \Delta_\varepsilon$ pode ser estendido para um módulo de persistência $\bar{\mathbb{U}}$ sobre a faixa diagonal

$$\Delta_{[0, \varepsilon]} = \{(p, q) : 0 \leq q - p \leq 2\varepsilon\} \subset \mathbb{R}^2,$$

pois, se \mathbb{V} e \mathbb{W} são ε -intercalados, então, pelo Lema 2.50, existe um módulo de persistência \mathbb{U} sobre $\Delta_0 \cup \Delta_\varepsilon$, tal que $\mathbb{U}|_{\Delta_0} = \mathbb{V}$ e $\mathbb{U}|_{\Delta_\varepsilon} = \mathbb{W}$, então teríamos uma extensão $\bar{\mathbb{U}}$ sobre a faixa $\Delta_{[0, \varepsilon]}$, donde poderíamos definir a família 1-paramétrica, fazendo $\mathbb{U}_x = \bar{\mathbb{U}}|_{\Delta_x}$. Assim, novamente pelo Lema 2.50, teríamos que \mathbb{U}_x e \mathbb{U}_y seriam $|y - x|$ -intercalados.

Em vez de nos debruçarmos sobre o intervalo $[0, \varepsilon]$, faremos a demonstração para o intervalo $[-1, 1]$, uma vez que a simetria traz simplificações à demonstração e que o resultado mais geral pode ser obtido por redimensionamento e translação do plano.

Assim, suponhamos que temos o módulo de persistência

$$\mathbb{U} = \{k_{*,n}^{a,b} : U_a \rightarrow U_b \mid a, b \in \Delta_{-1} \cup \Delta_1 \text{ e } a \leq b\},$$

pelo Lema 2.50, a partir de \mathbb{U} , podemos definir $\mathbb{V} = \mathbb{U}|_{\Delta_{-1}}$ e $\mathbb{W} = \mathbb{U}|_{\Delta_1}$ módulos de persistência sobre \mathbb{R} , bastando-se para tal, considerarmos

$$V_a = U_{(a+1, a-1)}, W_a = U_{(a-1, a+1)}, i_{*,n}^{a,b} = k_{*,n}^{(a+1, a-1), (b+1, b-1)} \text{ e } j_{*,n}^{a,b} = k_{*,n}^{(a-1, a+1), (b-1, b+1)}.$$

O módulo de persistência \mathbb{U} também permite obtermos os homomorfismos intercalados $\phi \in \text{Hom}^2(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ e $\psi \in \text{Hom}^2(\mathbb{W}, \mathbb{V})$ definidos por

$$\phi_t = k_{*,n}^{(t+1, t-1), (t+1, t+3)} : V_t \rightarrow W_{t+2} \text{ e } \psi_t = k_{*,n}^{(t-1, t+1), (t+3, t+1)} : W_t \rightarrow V_{t+2}.$$

A partir de \mathbb{V} e \mathbb{W} , podemos construir quatro módulos de persistência sobre \mathbb{R}^2 :

$$\mathbb{A} = \{a_{*,n}^{(p,q), (r,s)} : A_{(p,q)} \rightarrow A_{(r,s)} \mid p, q, r, s \in \mathbb{R} \text{ e } p \leq r\},$$

definido por $A_{(p,q)} = V_{p-1}$ e $a_{*,n}^{(p,q),(r,s)} = i_{*,n}^{p-1,r-1}$,

$$\mathbb{B} = \{b_{*,n}^{(p,q),(r,s)} : B_{(p,q)} \rightarrow B_{(r,s)} \mid p, q, r, s \in \mathbb{R} \text{ e } q \leq s\},$$

definido por $B_{(p,q)} = W_{q-1}$ e $b_{*,n}^{(p,q),(r,s)} = j_{*,n}^{q-1,s-1}$,

$$\mathbb{C} = \{c_{*,n}^{(p,q),(r,s)} : C_{(p,q)} \rightarrow C_{(r,s)} \mid p, q, r, s \in \mathbb{R} \text{ e } q \leq s\},$$

definido por $C_{(p,q)} = V_{q+1}$ e $c_{*,n}^{(p,q),(r,s)} = i_{*,n}^{q+1,s+1}$ e

$$\mathbb{D} = \{d_{*,n}^{(p,q),(r,s)} : D_{(p,q)} \rightarrow D_{(r,s)} \mid p, q, r, s \in \mathbb{R} \text{ e } p \leq r\},$$

definido por $D_{(p,q)} = W_{p+1}$ e $d_{*,n}^{(p,q),(r,s)} = j_{*,n}^{p+1,r+1}$.

Podemos notar que $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ e \mathbb{D} são extensões verticais e horizontais dos módulos de persistência $\mathbb{U}|_{\Delta_{\pm 1}}$. Por exemplo, se restringimos \mathbb{A} a Δ_{-1} , temos

$$A_{(p+1,p-1)} = V_p \text{ e } a_{*,n}^{(p+1,p-1),(r+1,r-1)} = i_{*,n}^{p,r}, \forall p, r \in \mathbb{R}, \text{ com } p \leq r,$$

ou seja, igual a \mathbb{V} , a menos de isomorfismo. Em resumo, pode-se mostrar de forma análoga, que temos

$$\mathbb{A}|_{\Delta_{-1}} = \mathbb{V}, \mathbb{B}|_{\Delta_1} = \mathbb{W}, \mathbb{C}|_{\Delta_{-1}} = \mathbb{V} \text{ e } \mathbb{D}|_{\Delta_1} = \mathbb{W},$$

com respeito à parametrização canônica em cada diagonal. A diferença entre \mathbb{A} e \mathbb{C} , quando restritos a Δ_{-1} , é que um teve tomado o isomorfismo com \mathbb{V} pela sua projeção no eixo das abcissas, enquanto o outro, das ordenadas. É a mesma diferença entre as duas restrições que são isomorfas a \mathbb{W} .

Denotemos por $\mathbb{U}[\delta]$ o módulo transladado, obtido pela aplicação de $\mathbb{1}_{\mathbb{U}}^\delta$, de modo que indicaremos $(\mathbb{U}[\delta])_t = U_{t+\delta}$. Assim, podemos obter, de modo análogo às restrições anteriores, que

$$\mathbb{A}|_{\Delta_1} = \mathbb{V}[-2], \mathbb{B}|_{\Delta_{-1}} = \mathbb{W}[-2], \mathbb{C}|_{\Delta_1} = \mathbb{V}[2] \text{ e } \mathbb{D}|_{\Delta_{-1}} = \mathbb{W}[2].$$

Definamos o homomorfismo $\bar{\mathbb{1}}_{\mathbb{V}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ como $i_{*,n}^{p-1,q+1} : V_{p-1} \rightarrow V_{q+1}$, para cada $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, tal que $q + 1 \geq p - 1$. Ou seja, dado $A_{(p,q)}$,

$$(\bar{\mathbb{1}}_{\mathbb{V}})_{(p,q)} = i_{*,n}^{p-1,q+1} : A_{(p,q)} = V_{p-1} \rightarrow V_{q+1} = C_{(p,q)}.$$

Podemos definir, de modo análogo outros três homomorfismos

$$\bar{\phi} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{D} \text{ definida em } (p, q) \text{ como } \phi_{p-1} : A_{(p,q)} = V_{p-1} \rightarrow W_{p+1} = D_{(p,q)};$$

2 Homologia Persistente

$\bar{\psi} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ definida em (p, q) como $\psi_{q-1} : B_{(p,q)} = W_{q-1} \rightarrow V_{q+1} = C_{(p,q)}$;

$\bar{\mathbb{1}}_{\mathbb{W}} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{D}$ definida em (p, q) como $j_{*,n}^{q-1,p+1} : B_{(p,q)} = W_{q-1} \rightarrow W_{p+1} = D_{(p,q)}$.

As aplicações $\bar{\phi}$ e $\bar{\psi}$ são definidas sobre todo o plano, enquanto $\bar{\mathbb{1}}_{\mathbb{U}}$ é definida quando $p-1 \leq q+1$ e $\bar{\mathbb{1}}_{\mathbb{V}}$ é definida quando $q-1 \leq p+1$. Para provar que são homomorfismos intercalados de grau entre módulos de persistência, basta definirmo-nas em termos de i, j, ϕ e ψ e utilizarmos as mesmas técnicas utilizadas na demonstração da Proposição 2.50, de modo que, pela concisão, não apresentaremos tal etapa neste texto, mas pode ser encontrada em [5]. Não é difícil notar que a interseção das regiões onde cada mapa está definido é exatamente a faixa $\Delta_{[-1,1]}$, assim, podemos restringir $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ e \mathbb{D} e as quatro aplicações entre módulos à faixa.

Definamos $\Omega : (\mathbb{A} \oplus \mathbb{B})|_{\Delta_{[-1,1]}} \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{D}$ pela matriz 2×2

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbb{1}}_{\mathbb{V}} & \bar{\psi} \\ \bar{\phi} & \bar{\mathbb{1}}_{\mathbb{W}} \end{bmatrix},$$

ou seja $\Omega = \{\Omega_{(p,q)} : (V_{p-1}, W_{q-1}) \rightarrow (V_{q+1}, W_{p+1}) | (p, q) \in \Delta_{[-1,1]}\}$, onde

$$\Omega_{(p,q)} = \begin{bmatrix} i_{*,n}^{p-1,q+1} & \psi_{q-1} \\ \phi_{p-1} & j_{*,n}^{q-1,p+1} \end{bmatrix}.$$

Consideraremos $\bar{\mathbb{U}} = \text{im } \Omega$, ou seja, os espaços vetoriais de $\bar{\mathbb{U}}$ são

$$\{(V_{q+1} \oplus W_{p+1})|_{\text{im } \Omega_{(p,q)}} : (p, q) \in \Delta_{[-1,1]}\},$$

o que torna $\bar{\mathbb{U}}$ isomorfo a $(\mathbb{A} \oplus \mathbb{B})|_{\Delta_{[-1,1]}} / \ker(\Omega) = \text{coim}(\Omega)$. Nos referiremos a $\bar{\mathbb{U}}$ como qualquer um dos dois sem distinção.

Passo 1. $\bar{\mathbb{U}}|_{\Delta_{-1}}$ é isomorfo a \mathbb{V} .

De fato, na diagonal Δ_{-1} , temos

$$(\mathbb{A} \oplus \mathbb{B})|_{\Delta_{-1}} = \mathbb{V} \oplus \mathbb{W}[-2] \text{ e } (\mathbb{C} \oplus \mathbb{D})|_{\Delta_{-1}} = \mathbb{V} \oplus \mathbb{W}[2].$$

Para o homomorfismo $\Omega|_{\Delta_{-1}}$, notemos que

$$\bar{\mathbb{1}}_{\mathbb{V}}|_{\Delta_{-1}} = \{i_{*,n}^{(p+1)-1,(p-1)+1} = i_{*,n}^{p,p} : p \in \mathbb{R}\} = \mathbb{1}_{\mathbb{V}}$$

e

$$\overline{\phi}_{\Delta_{-1}} = \{\phi_{(p+1)-1} = \phi_p : p \in \mathbb{R}\} = \phi.$$

De modo análogo para os outros dois homomorfismos, podemos concluir que $\Omega|_{\Delta_{-1}}$ é a matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{V}} & \psi \\ \phi & \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^4 \end{bmatrix}.$$

Como $\mathbb{1}_{\mathbb{W}}^4 = \phi\psi$, temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{V}} & \psi \\ \phi & \phi\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{A}|_{\Delta_{-1}} \\ \mathbb{B}|_{\Delta_{-1}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{V}}(\mathbb{V}) \oplus \psi(\mathbb{W}[-2]) & \phi(\mathbb{V}) \oplus \phi\psi(\mathbb{W}[-2]) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{V} \oplus \psi(\mathbb{W}[-2]) & \phi(\mathbb{V}) \oplus \psi\phi(\mathbb{W}[-2]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{V}} \\ \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{V}} & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{V} \\ \mathbb{W}[-2] \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde podemos fatorar como

$$\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}[-2] \xrightarrow{\Omega_1} \mathbb{V} \xrightarrow{\Omega_2} \mathbb{V} \oplus \mathbb{W}[2],$$

onde

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{V}} & \psi \end{bmatrix} \text{ e } \Omega_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{V}} \\ \phi \end{bmatrix}.$$

Mais precisamente, podemos escrever

$$\Omega_1 = \{(\Omega_1)_{(p,q)} : (p,q) \in \Delta_{-1}\} = \{(\Omega_1)_{(p+1,p-1)} : p \in \mathbb{R}\} = \{i_{*,n}^p \oplus \psi_{p-2} : V_p \oplus W_{p-2} \rightarrow V_p\},$$

donde podemos notar que dado $v \in V_p$, temos $i_{*,n}^p \oplus \psi_{p-2}(v, 0) = v$, ou seja, Ω_1 é sobrejetiva. De semelhante maneira, podemos notar que

$$\Omega_2 = \{(\Omega_2)_{(p,q)} : (p,q) \in \Delta_{-1}\} = \{(\Omega_2)_{(p+1,p-1)} : p \in \mathbb{R}\} = \{i_{*,n}^p \oplus \phi_p : V_p \rightarrow V_p \oplus W_{p+2}\},$$

e com isso, dados $v_1, v_2 \in V_p$, tais que $v_1 \neq v_2$, temos que $(v_1, \phi_p(v_1)) \neq (v_2, \phi_p(v_2))$, ou seja, $\Omega_2(v_1) \neq \Omega_2(v_2)$, donde concluimos que Ω_2 é injetiva. Pelo Primeiro Teorema de Isomorfismo ([22]), temos que $\mathbb{V} \cong \text{im } \Omega_2 \cong \text{im}(\Omega_2\Omega_1) = \text{im}(\Omega|_{\Delta_{-1}})$. Analogamente podemos obter o isomorfismo $\text{coim}(\Omega|_{\Delta_{-1}}) \cong \mathbb{V}$, como desejado.

Passo 2. $\overline{\mathbb{U}}|_{\Delta_1}$ é isomorfa a \mathbb{W} .

De fato, na diagonal Δ_1 , nos temos

$$(\mathbb{A} \oplus \mathbb{B})|_{\Delta_1} = \mathbb{V}[-2] \oplus \mathbb{W} \text{ e } (\mathbb{C} \oplus \mathbb{D})|_{\Delta_1} = \mathbb{V}[2] \oplus \mathbb{W}$$

2 Homologia Persistente

e o homomorfismo $\Omega|_{\Delta_1}$ é a matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{V}}^4 & \psi \\ \phi & \mathbb{1}_{\mathbb{W}} \end{bmatrix}.$$

Como $\mathbb{1}_{\mathbb{V}}^4 = \psi\phi$, podemos fatorar, de modo análogo ao feito no passo anterior, como

$$\mathbb{V}[-2] \oplus \mathbb{W} \xrightarrow{\Omega_3} \mathbb{W} \xrightarrow{\Omega_4} \mathbb{V}[2] \oplus \mathbb{W},$$

onde

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} \phi & \mathbb{1}_{\mathbb{W}} \end{bmatrix} \text{ e } \Omega_4 = \begin{bmatrix} \psi \\ \mathbb{1}_{\mathbb{W}} \end{bmatrix}.$$

Temos que Ω_3 é sobrejetiva e Ω_4 é injetiva. Logo, induzem os isomorfismos

$$\text{coim}(\Omega|_{\Delta_1}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{W} \xrightarrow{\cong} \text{im}(\Omega|_{\Delta_1}),$$

como desejado.

Passo 3. As aplicações de $\bar{\mathbb{U}}$ entre Δ_{-1} e Δ_1 correspondem a ϕ e ψ , quando considerados os isomorfismos obtidos nos **Passos 1 e 2**.

De fato, considerando $\bar{\mathbb{U}} = \text{im } \Omega \subseteq \mathbb{C} \oplus \mathbb{D}$, é natural que tomemos $\bar{\mathbb{U}}|_{\Delta_{-1}} \rightarrow \bar{\mathbb{U}}|_{\Delta_1}$ induzida por

$$(\mathbb{C} \oplus \mathbb{D})|_{\Delta_{-1}} \longrightarrow (\mathbb{C} \oplus \mathbb{D})|_{\Delta_1},$$

que pode ser identificada com

$$\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}[2] \xrightarrow{\mathbb{1}_{\mathbb{V}}^4 \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{W}}} \mathbb{V}[4] \oplus \mathbb{W}[2].$$

Por outro lado, considerando $\bar{\mathbb{U}} = \text{coim } \Omega \subseteq \mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$, é natural que tomemos $\bar{\mathbb{U}}|_{\Delta_{-1}} \rightarrow \bar{\mathbb{U}}|_{\Delta_1}$ induzida por

$$(\mathbb{A} \oplus \mathbb{B})|_{\Delta_{-1}} \longrightarrow (\mathbb{A} \oplus \mathbb{B})|_{\Delta_1},$$

que pode ser identificada com

$$\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}[-2] \xrightarrow{\mathbb{1}_{\mathbb{V}} \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^4} \mathbb{V} \oplus \mathbb{W}[2].$$

Assim, basta provarmos que o seguinte diagrama, que sintetiza todas as relações obtidas no 3 passos, comuta.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{V} \oplus \mathbb{W}[-2] & \xrightarrow{\Omega_1} & \mathbb{V} & \xrightarrow{\Omega_2} & \mathbb{V} \oplus \mathbb{W}[2] \\
 \downarrow \mathbb{1}_{\mathbb{V}} \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^4 & & \downarrow \phi & & \downarrow \mathbb{1}_{\mathbb{V}}^4 \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{W}} \\
 \mathbb{V} \oplus \mathbb{W}[2] & \xrightarrow{\Omega_3} & \mathbb{W}[2] & \xrightarrow{\Omega_4} & \mathbb{V}[4] \oplus \mathbb{W}[2]
 \end{array}$$

De fato, no quadrado esquerdo

$$\Omega_3(\mathbb{1}_{\mathbb{V}} \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^4) = \begin{bmatrix} \phi & \mathbb{1}_{\mathbb{W}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{V}} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^4 \end{bmatrix} = [\phi][\mathbb{1}_{\mathbb{V}}\psi] = \phi\Omega_1.$$

Pode-se proceder de modo análogo no quadrado direito. Também de modo análogo, pode-se provar que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{U}[2] \oplus \mathbb{V} & \xrightarrow{\Omega_3} & \mathbb{V} & \xrightarrow{\Omega_4} & \mathbb{U}[2] \oplus \mathbb{V} \\
 \downarrow \mathbb{1}_{\mathbb{U}}^4 \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{V}} & & \downarrow \psi & & \downarrow \mathbb{1}_{\mathbb{U}} \oplus \mathbb{1}_{\mathbb{V}}^4 \\
 \mathbb{U}[2] \oplus \mathbb{V} & \xrightarrow{\Omega_1} & \mathbb{U}[2] & \xrightarrow{\Omega_2} & \mathbb{U}[2] \oplus \mathbb{V}[4],
 \end{array}$$

de modo que obtemos o resultado desejado.

Finalmente, suponhamos que \mathbb{U} e \mathbb{V} sejam q -mansos. Em cada diagonal Δ_x , as restrições $\mathbb{A}|_{\Delta_x}$ e $\mathbb{B}|_{\Delta_x}$ são cópias transladadas de \mathbb{U} e \mathbb{V} , logo, são q -mansos, segue que a soma direta $(\mathbb{A} \oplus \mathbb{B})|_{\Delta_x}$ é q -mansa, donde também o é sua imagem por Ω e \mathbb{U}_x , que é isomorfo à imagem.

□

Proposição 2.52. *Dados três módulos de persistência, \mathbb{U} , \mathbb{V} e \mathbb{W} , a distância intercalada satisfaz a desigualdade triangular. Ou seja*

$$d_i(\mathbb{U}, \mathbb{W}) \leq d_i(\mathbb{U}, \mathbb{V}) + d_i(\mathbb{V}, \mathbb{W})$$

Demonstração. Dada uma ε_1 -intercalação entre \mathbb{U} e \mathbb{V} , dada por ϕ_1 e ψ_1 e uma ε_2 -intercalação entre \mathbb{V} e \mathbb{W} , dada por ϕ_2 e ψ_2 , podemos construir uma $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ -intercalação entre \mathbb{U} e \mathbb{W} , tomando $\phi = \phi_2\phi_1$ e $\psi = \psi_1\psi_2$.

Assim, para qualquer $\delta > 0$,

$$\phi \mathbb{1}_{\mathbb{U}}^{\delta} = \phi_2\phi_1 \mathbb{1}_{\mathbb{U}}^{\delta} = \phi_2 \mathbb{1}_{\mathbb{V}}^{\delta} \phi_1 = \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^{\delta} \phi_2\phi_1 = \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^{\delta} \phi,$$

$$\psi \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^{\delta} = \psi_1\psi_2 \mathbb{1}_{\mathbb{W}}^{\delta} = \psi_1 \mathbb{1}_{\mathbb{V}}^{\delta} \psi_2 = \mathbb{1}_{\mathbb{U}}^{\delta} \psi_1\psi_2 = \mathbb{1}_{\mathbb{U}}^{\delta} \psi,$$

2 Homologia Persistente

$$\psi\phi = \psi_1\psi_2\phi_2\phi_1 = \psi_1\mathbb{1}_V^{2\varepsilon_2}\phi_1 = \psi_1\phi_1\mathbb{1}_U^{2\varepsilon_2} = \mathbb{1}_U^{2\varepsilon_1}\mathbb{1}_U^{2\varepsilon_2} = \mathbb{1}_U^{2\varepsilon},$$

e

$$\phi\psi = \phi_2\phi_1\psi_1\psi_2 = \phi_2\mathbb{1}_V^{2\varepsilon_1}\psi_2 = \phi_2\psi_2\mathbb{1}_W^{2\varepsilon_1} = \mathbb{1}_W^{2\varepsilon_2}\mathbb{1}_W^{2\varepsilon_1} = \mathbb{1}_W^{2\varepsilon}.$$

Logo,

$$d_i(\mathbb{U}, \mathbb{W}) \leq \varepsilon = d_i(\mathbb{U}, \mathbb{V}) + d_i(\mathbb{V}, \mathbb{W}).$$

□

Proposição 2.53. *Sejam $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{V}_1$ e \mathbb{V}_2 módulos de persistência, então*

$$d_i(\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2, \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2) \leq \max(d_i(\mathbb{U}_1, \mathbb{V}_1), d_i(\mathbb{U}_2, \mathbb{V}_2)).$$

De modo mais geral, sejam $(\mathbb{U}_l : l \in L)$ e $(\mathbb{V}_l : l \in L)$ famílias de módulos de persistência indexadas por algum conjunto L de índices, e sejam

$$\mathbb{U} = \bigoplus_{l \in L} \mathbb{U}_l, \mathbb{V} = \bigoplus_{l \in L} \mathbb{V}_l.$$

Então

$$d_i(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \leq \sup(d_i(\mathbb{U}_l, \mathbb{V}_l) : l \in L).$$

Demonstração. Seja uma ε -intercalação ϕ_l, ψ_l para cada par $\mathbb{U}_l, \mathbb{V}_l$, então os mapas dados pela soma direta $\phi = \oplus \phi_l, \psi = \oplus \psi_l$ constituem uma ε -intercalação entre \mathbb{U} e \mathbb{V} . Como $S = \sup(d_i(\mathbb{U}_l, \mathbb{V}_l) : l \in L) \geq d_i(\mathbb{U}_l, \mathbb{V}_l), \forall l \in L$, temos que todo par $\mathbb{U}_l, \mathbb{V}_l$ é S -intercalado, logo, existe S -intercalação entre \mathbb{U} e \mathbb{V} . □

Teorema de Estabilidade

É possível se estabelecer uma relação de igualdade entre a distância intercalada de dois módulos de persistência e a distância *Bottleneck* entre seus diagramas de persistência. Iniciaremos com o objetivo de mostrar que $d_i \leq d_B$. Para tal, recordemos que dada uma correspondência parcial entre dois multiconjuntos, o custo *Bottleneck* é definido a partir das distâncias entre pontos e da distância entre pontos e a diagonal, traduzindo para o contexto de módulo de persistência, a distância entre módulos intervalares e entre módulos intervalares e o módulo nulo. Assim, iniciaremos provando a desigualdade para tais casos básicos. O resultado se dará por extensão a partir das somas diretas. Para a desigualdade $d_i \geq d_B$ serão exploradas propriedades locais dos diagramas de persistência.

Proposição 2.54. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq b$ e $c \leq d$, então*

$$d_i(\mathbb{I}[a, b], \mathbb{I}[c, d]) \leq d_B((a, b), (c, d))$$

Demonstração. Vamos provar o caso onde a, b, c e d são finitos. Os casos para valores infinitos têm demonstração análoga.

No caso a ser provado, a única correspondência parcial é $M = ((a, b), (c, d))$, cujo custo é $\|(a, b) - (c, d)\|_\infty$. Ou seja, a distância *bottleneck* é $\max(|a - c|, |b - d|)$. Provaremos que, para cada $\varepsilon > d_B((a, b), (c, d))$, existe uma ε -intercalação entre $\mathbb{I}[a, b]$ e $\mathbb{I}[c, d]$.

Indiquemos

$$\mathbb{I}[a, b] = \{i_{*,n}^{p,q} : V_p \rightarrow V_q \mid p, q \in \mathbb{R} \text{ e } p \leq q\}$$

e

$$\mathbb{I}[c, d] = \{j_{*,n}^{p,q} : W_p \rightarrow W_q \mid p, q \in \mathbb{R} \text{ e } p \leq q\},$$

então, para cada $p \in \mathbb{R}$, temos que $V_p, W_p \in \{0, \mathbb{K}\}$. Se $V_p = V_q = \mathbb{K}$, então $i_{*,n}^{p,q} = \mathbb{1}_{\mathbb{K}}$, caso contrário, $i_{*,n}^{p,q} = 0$. O análogo ocorre para $j_{*,n}^{p,q}$.

Seja ε tal que $\varepsilon > d_B((a, b), (c, d))$, definamos as coleções de aplicações

$$\phi = (\phi_t : V_t \rightarrow W_{t+\varepsilon}) \text{ e } \psi = (\psi_t : W_t \rightarrow V_{t+\varepsilon}),$$

da seguinte maneira, se $V_t = W_{t+\varepsilon} = \mathbb{K}$, então $\phi_t = \mathbb{1}_{\mathbb{K}}$, caso contrário, $\phi_t = 0$. Definamos ainda, de modo análogo, ψ_t .

Inicialmente, devemos provar que para qualquer $\delta > 0$, temos $\phi \mathbb{1}_{\mathbb{I}[a,b]}^\delta = \mathbb{1}_{\mathbb{I}[c,d]}^\delta \phi$, ou seja,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{t+\delta} i_{*,n}^{t,t+\delta} = j_{*,n}^{t+\varepsilon,t+\varepsilon+\delta} \phi_t.$$

- **Caso $V_t = 0$:** então $i_{*,n}^{t,t+\delta} = \phi_t = 0$, o que garante a igualdade;
- **Caso $W_{t+\varepsilon+\delta} = 0$:** então $\phi_{t+\delta} = j_{*,n}^{t+\varepsilon,t+\varepsilon+\delta} = 0$, o que garante a igualdade;
- **Caso $V_{t+\delta} = W_{t+\varepsilon}$:** é garantida a igualdade, de modo análogo.

Assim, resta provarmos que não existe a possibilidade de $V_{t+\delta} \neq W_{t+\varepsilon}$, quando $V_t = W_{t+\varepsilon+\delta} = \mathbb{K}$.

- **Caso $V_t = V_{t+\delta} = W_{t+\varepsilon+\delta} = \mathbb{K}$ e $W_{t+\varepsilon} = 0$:** então $a \leq t$, ainda $t + \varepsilon \notin [c, d]$. Como $W_{t+\varepsilon+\delta} = \mathbb{K}$, então $t + \varepsilon + \delta \leq d$, donde $t + \varepsilon \leq c$. Disto, $\varepsilon \leq c - t \leq d - a$, o que contradiz a hipótese de que $\varepsilon > d - a$.
- **Caso $V_t = W_{t+\varepsilon} = W_{t+\varepsilon+\delta} = \mathbb{K}$ e $V_{t+\delta} = 0$:** então $t + \delta \notin [a, b]$, mas $V_t = \mathbb{K}$ garante que $t \geq a$, ou seja, $b \leq t + \delta$. Por outro lado, $t + \varepsilon + \delta \leq d$, donde temos que $\varepsilon \leq d - t - \delta \leq d - b$, o que contradiz a hipótese de que $\varepsilon > d - b$.

2 Homologia Persistente

Assim, temos que $\phi \mathbb{1}_{\mathbb{I}[a,b]}^\delta = \mathbb{1}_{\mathbb{I}[c,d]}^\delta \phi$ e, por simetria, se pode provar que $\psi \mathbb{1}_{\mathbb{I}[c,d]}^\delta = \mathbb{1}_{\mathbb{I}[a,b]}^\delta \psi$.

Agora provemos que $\psi \phi = \mathbb{1}_{\mathbb{I}[a,b]}^{2\varepsilon}$, ou seja,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi_{t+\varepsilon} \phi_t = i_{*,n}^{t,t+2\varepsilon}.$$

- **Caso $V_t = 0$** : temos que $\phi_t = i_{*,n}^{t,t+2\varepsilon} = 0$, o que garante a igualdade;
- **Caso $V_{t+2\varepsilon} = 0$** : temos que $\psi_{t+\varepsilon} = i_{*,n}^{t,t+2\varepsilon} = 0$, o que garante a igualdade;
- **Caso $V_t = W_{t+\varepsilon} = V_{t+2\varepsilon} = \mathbb{K}$** : temos que $\phi_t = \psi_{t+\varepsilon} = i_{*,n}^{t,t+2\varepsilon} = \mathbb{1}_{\mathbb{K}}$, o que garante a igualdade;
- **Caso $V_t = V_{t+2\varepsilon} = \mathbb{K}$ e $W_{t+\varepsilon} = 0$** : temos que $a \leq t$ e $t + 2\varepsilon \leq b$. Como $\varepsilon > c - a$ e $\varepsilon > d - b$, podemos inferir que $c < a + \varepsilon \leq t + \varepsilon \leq b - \varepsilon < d$, uma contradição.

Logo, $\psi \phi = \mathbb{1}_{\mathbb{I}[a,b]}^{2\varepsilon}$. De modo análogo podemos provar que $\phi \psi = \mathbb{1}_{\mathbb{I}[c,d]}^{2\varepsilon}$. Assim, ϕ e ψ constituem uma ε -intercalação. Donde podemos concluir o resultado, uma vez que a distância intercalada toma o grau ínfimo das intercalações existentes. \square

Recordemos que, dada uma correspondência parcial entre dois diagramas de persistência, o custo *Bottleneck* de um ponto sem correspondência é dado pela medição que $\|\cdot\|_\infty$ afere entre ele e a diagonal, ou seja, o custo do ponto sem correspondência $s = (s_x, s_y) \in \mathbb{R}^2$ é dado por $\frac{|s_y - s_x|}{2}$. Obteremos que esse custo é o mesmo valor obtido pela distância intercalada entre a representação intervalar associada a tal ponto e o módulo de persistência nulo.

Proposição 2.55. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq b$ e a representação intervalar $\mathbb{I}[a, b]$, então*

$$d_i(\mathbb{I}[a, b], 0) = \frac{b-a}{2}.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$, então qualquer ε -intercalação entre $\mathbb{I}[a, b]$ e 0 deve ter os morfismos de grau ϕ e ψ ambos iguais a zero, pois não há outra aplicação que tenha o módulo de persistência 0 como domínio ou contradomínio. Resta provar que $0 = \mathbb{1}_{\mathbb{I}[a,b]}^{2\varepsilon}$.

Temos que

$$\mathbb{I}[a, b] = \{i_{*,n}^{p,q} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \mid p, q \in \mathbb{R} \text{ e } p \leq q\}.$$

Se $\varepsilon > \frac{b-a}{2}$, então $\mathbb{1}_{\mathbb{I}[a,b]}^{2\varepsilon} = \{i_{*,n}^{r,r+(2\varepsilon)} : r \in \mathbb{R}\}$, onde necessariamente $r < a$ ou $r + 2\varepsilon > b$, logo, $\mathbb{1}_{\mathbb{I}[a,b]}^{2\varepsilon} = 0$. Por outro lado, se $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$, então dado $a < r < b$, temos que $i_{*,n}^{r,r+2\varepsilon} \neq 0$, pois $r + 2\varepsilon < b$ e tal morfismo pertence a $\mathbb{1}_{\mathbb{I}[a,b]}^{2\varepsilon}$, de modo que este não é

nulo. Assim,

$$\inf\{\varepsilon \geq 0 \mid \text{existe uma } \varepsilon\text{-intercalação entre } \mathbb{I}[a, b] \text{ e } 0\} = \frac{b-a}{2}.$$

□

Existem características locais dos diagramas de persistência que serão importantes no estudo da relação entre a distância *bottleneck* e a distância intercalada.

Definição 2.56. *Seja $R = [p, q] \times [r, s]$ um retângulo em $\overline{\mathbb{R}}^2$. O retângulo obtido pela δ -expansão de R , indicado por R^δ é dado por*

$$R^\delta = [p - \delta, q + \delta] \times [r - \delta, s + \delta]$$

Na definição acima, é importante destacar que adotaremos $-\infty - \delta = -\infty$ e $+\infty + \delta = +\infty$. Além disso, para obter a δ -expansão de um ponto, basta considerá-lo como um retângulo degenerado, ou seja, dado $\alpha = (p, q)$, temos $\alpha^\delta = [p - \delta, p + \delta] \times [q - \delta, q + \delta]$.

Lema 2.57 (Lema da caixa). *Sejam*

$$\mathbb{U} = \{i_{*,n}^{a,b} : U_a \rightarrow U_b \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq b\}$$

e

$$\mathbb{V} = \{j_{*,n}^{a,b} : V_a \rightarrow V_b \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq b\}$$

dois módulos de persistência ε -intercalados. *Seja ainda R um retângulo em $\overline{\mathbb{R}}_+^2$, tal que R^ε está contido acima da diagonal. Então*

$$\mu_{\mathbb{U}}(R) \leq \mu_{\mathbb{V}}(R^\varepsilon) \text{ e } \mu_{\mathbb{V}}(R) \leq \mu_{\mathbb{U}}(R^\varepsilon).$$

Demonstração. Indiquemos as decomposições em módulos intervalares, cuja existência é garantida, uma vez que estamos nos resumindo aos módulos q-mansos, como $\mathbb{U} \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbb{I}[c_j, d_j]$ e $\mathbb{V} \cong \bigoplus_{l \in L} \mathbb{I}[f_l, g_l]$ como

Devido à ε -intercalação, podemos obter os módulos de persistência finitos

$$\mathbb{U}_{p,q,r,s} : U_p \rightarrow U_q \rightarrow U_r \rightarrow U_s$$

e

$$\mathbb{V}_{p-\varepsilon, q+\varepsilon, r-\varepsilon, s+\varepsilon} : V_{p-\varepsilon} \rightarrow V_{q+\varepsilon} \rightarrow V_{r-\varepsilon} \rightarrow V_{s+\varepsilon}$$

2 Homologia Persistente

como restrições de

$$\mathbb{W} : V_{p-\varepsilon} \xrightarrow{\phi} U_p \rightarrow U_q \xrightarrow{\psi} V_{q+\varepsilon} \rightarrow V_{r-\varepsilon} \xrightarrow{\phi} U_r \rightarrow U_s \xrightarrow{\psi} V_{s+\varepsilon}.$$

Podemos ainda escrever $\mathbb{W} \cong \bigoplus_{m \in M} \mathbb{I}[w_m, z_m]$.

Temos que

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{V}}(R^\varepsilon) &= \#\{j \in J : [q + \varepsilon, r - \varepsilon] \subseteq [b_j, d_j] \subset (p - \varepsilon, s + \varepsilon)\} \\ &= \#\{m \in M : [q + \varepsilon, r - \varepsilon] \subseteq [w_m, z_m] \subset (p - \varepsilon, s + \varepsilon)\}. \end{aligned}$$

Logo, $\mu_{\mathbb{V}}(R^\varepsilon)$ pode ser decomposta na cardinalidade de coleções de módulos intervalares disjuntas, por exemplo, nas duas apresentadas abaixo, se $[b, d]$ é um intervalo da primeira coleção, $p \notin [b, d]$, mas se $[b, d]$ é um intervalo da segunda coleção, $p \in [b, d]$, o que garante a disjunção. Assim

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{V}}(R^\varepsilon) &= \#\{m \in M : [q, r] \subseteq [w_m, z_m] \subset (p, s)\} \\ &+ \#\{m \in M : [p, q] \subseteq [w_m, z_m] \subset (p - \varepsilon, q + \varepsilon)\} + \dots \\ &\geq \#\{m \in M : [q, r] \subseteq [w_m, z_m] \subset (p, s)\} \\ &= \#\{l \in L : [q, r] \subseteq [f_l, g_l] \subset (p, s)\} = \mu_{\mathbb{U}}(R). \end{aligned}$$

Temos que $\mu_{\mathbb{U}}(R^\varepsilon) \geq \mu_{\mathbb{V}}(R)$, por simetria. □

Antes da apresentação do principal teorema desta seção, precisamos da definição de uma outra distância.

Definição 2.58. Dados \mathbb{V} e \mathbb{W} diagramas de persistência, a **distância de Hausdorff** entre $\text{dgm}(\mathbb{V})$ e $\text{dgm}(\mathbb{W})$ é dada por

$$d_H(\text{dgm}(\mathbb{V}), \text{dgm}(\mathbb{W})) = \max \left\{ \sup_{x \in \text{dgm}(\mathbb{V})} d(x, \text{dgm}(\mathbb{W})), \sup_{y \in \text{dgm}(\mathbb{W})} d(y, \text{dgm}(\mathbb{V})) \right\},$$

onde, dado $B \subset \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}^2$, $d_\infty(a, B) = \inf_{b \in B} (\|b - a\|_\infty)$.

Teorema 2.59 (Estabilidade dos diagramas de persistência). *Dados dois módulos de persistência \mathbb{V} e \mathbb{W} decomponíveis, então $d_i(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = d_B(\text{dgm}(\mathbb{V}), \text{dgm}(\mathbb{W}))$.*

Demonstração. A primeira parte da demonstração consiste em provar que

$$d_i(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \geq d_B(\text{dgm}(\mathbb{V}), \text{dgm}(\mathbb{W})).$$

Tal propriedade é chamada na literatura de “estabilidade”. Provaremos que se \mathbb{V} e \mathbb{W} são ε -intercalados, então existe uma correspondência parcial entre $\text{dgm}(\mathbb{V})$ e $\text{dgm}(\mathbb{W})$ de custo *bottleneck* ε .

Inicialmente, sejam

$$\mathbb{V} = \{i_{*,n}^{a,b} : V_a \rightarrow V_b \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq b\}$$

e

$$\mathbb{W} = \{j_{*,n}^{a,b} : W_a \rightarrow W_b \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq b\}$$

dois módulos de persistência ε -intercalados. Tomemos $(\mathbb{U}_x)_{x \in [0, \varepsilon]}$ a família 1-paramétrica de módulos de persistência oriunda da interpolação definida no Lema 2.51. Por simplicidade, assumiremos que $\text{dgm}(\mathbb{U}_x)$ tem finitos pontos para cada $x \in [0, \varepsilon]$ (tal hipótese coaduna com os objetivos deste texto, todavia, a afirmação é válida mesmo na sua ausência, o que pode ser conferido em [5]). Temos, pelo Lema 2.57, que para cada $0 \leq x \leq y \leq \varepsilon$,

$$\mu_{\mathbb{U}_x}(R) \leq \mu_{\mathbb{U}_y}(R^{|y-x|}).$$

Como $\text{dgm}(\mathbb{U}_x)$ tem finitos pontos, dado $p \in \text{dgm}(\mathbb{U}_x)$, podemos tomar um retângulo R ao redor de p suficientemente pequeno tal que $\text{dgm}(\mathbb{U}_x)|_R = \{p\}$, a menos da multiplicidade de p . Assim, $\mu_{\mathbb{U}_y}(R^{|y-x|}) \geq 1$, donde existe $q \in \text{dgm}(\mathbb{U}_y)$ tal que $q \in R^{|y-x|}$. Portanto, $\forall p \in \text{dgm}(\mathbb{U}_x)$, temos que $d_\infty(p, \text{dgm}(\mathbb{U}_y)) \leq |y-x|$. Podemos concluir disto que, para cada $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq x \leq y \leq \varepsilon$, temos $d_H(\text{dgm}(\mathbb{U}_x), \text{dgm}(\mathbb{U}_y)) \leq |y-x|$.

Dado $x \in [0, \varepsilon]$, seja p_1, \dots, p_k uma enumeração dos distintos pontos de $\text{dgm}(\mathbb{U}_x)$, ou seja, desconsiderando-se suas multiplicidades. Indiquemos por R_i , o retângulo suficientemente pequeno tal que só contenha p_i , então dado $y \in [0, \varepsilon]$, temos que todos os pontos de $\text{dgm}(\mathbb{U}_y)$ estão contidos no conjunto fechado

$$\bigcup_{i=1}^k R_i^{|y-x|},$$

devido ao resultado obtido sobre a distância de Hausdorff entre os dois diagramas. Definamos

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq j \leq k} \{\|p_i - p_j\|_\infty\},$$

se y é tal que $|y-x| < \varepsilon_x$, então os $R_i^{|y-x|}$ são disjuntos. Podemos contar a quantidade de pontos de $\text{dgm}(\mathbb{U}_y)$ em cada retângulo $R_i^{|y-x|}$. Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que $2|y-x| + \delta < 2\varepsilon_x$, então

$$m_{\text{dgm}(\mathbb{U}_x)}(p_i) = \mu_{\mathbb{U}_x}(R_i^\delta) \leq \mu_{\mathbb{U}_y}(R_i^{|y-x|+\delta}) \leq \mu_{\mathbb{U}_x}(R_i^{2|y-x|+\delta}) = m_{\text{dgm}(\mathbb{U}_x)}(p_i).$$

2 Homologia Persistente

Ou seja, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, o resultado é o mesmo para $\mu_{\mathbb{U}_y}(R_i^{|y-x|+\delta})$, logo,

$$\mu_{\mathbb{U}_y}(R_i^{|y-x|}) = m_{\text{dgm}(\mathbb{U}_x)}(p_i) = \mu_{\mathbb{U}_x}(R_i^{|y-x|}).$$

Assim, fazendo-se uma correspondência entre cada cópia de p_i com cada um dos pontos de $\text{dgm}(\mathbb{U}_y)$ contido no retângulo expandido $R_i^{|y-x|}$, temos então uma correspondência parcial entre $\text{dgm}(\mathbb{U}_x)$ e $\text{dgm}(\mathbb{U}_y)$ de custo *bottleneck* $|y-x|$. Logo, $d_B(\text{dgm}(\mathbb{U}_x), \text{dgm}(\mathbb{U}_y))$ também é menor que $|y-x|$ para $|y-x|$ suficientemente pequeno.

Temos que a coleção de intervalos $\{(x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) : x \in [0, \varepsilon]\}$ constitui uma cobertura aberta do compacto $[0, \varepsilon]$. Logo, existe uma subcobertura finita composta por intervalos centrados em $0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_j = \varepsilon$. Assim, pela Proposição

$$d_B(\text{dgm}(\mathbb{V}), \text{dgm}(\mathbb{W})) \leq \sum_{i=1}^{j-1} d_B(\text{dgm}(\mathbb{U}_{x_i}), \text{dgm}(\mathbb{U}_{x_{i+1}})) \leq \sum_{i=1}^{j-1} |x_{i+1} - x_i| \leq |y-x|.$$

A segunda parte da demonstração consiste em provar que

$$d_i(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \leq d_B(\text{dgm}(\mathbb{V}), \text{dgm}(\mathbb{W})).$$

Tal propriedade é chamada na literatura de “estabilidade inversa”. Provaremos que se existe uma correspondência parcial entre $\text{dgm}(\mathbb{V})$ e $\text{dgm}(\mathbb{W})$ de custo *bottleneck* ε , então $d_i(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \leq \varepsilon$. Assim, a distância intercalada é uma cota inferior para o conjunto de valores de custo *bottleneck* para todas as possíveis correspondências parciais, sendo então menor que ou igual ao ínfimo, que é o que define a distância *bottleneck*.

Seja M uma correspondência parcial tal que $c(M) = \varepsilon$. Como cada ponto de um diagrama de persistência identifica uma representação intervalar, podemos construir a partir de M uma correspondência parcial entre módulos intervalares de \mathbb{V} e de \mathbb{W} .

Reescrevendo \mathbb{V} e \mathbb{W} da seguinte maneira

$$\mathbb{V} = \bigoplus_{l \in L} \mathbb{V}_l, \quad \mathbb{W} = \bigoplus_{l \in L} \mathbb{W}_l,$$

então cada par $(\mathbb{V}_l, \mathbb{W}_l)$ é descrito por um dos seguintes casos

- constitui um par de representações intervalares correspondentes;
- \mathbb{V}_l é um intervalo sem correspondência e $\mathbb{W}_l = 0$;
- \mathbb{W}_l é um intervalo sem correspondência e $\mathbb{V}_l = 0$.

Para os três casos, é garantido por 2.54 e 2.55 que $d_i(\mathbb{V}_l, \mathbb{W}_l) \leq \delta$. Segue da Proposição 2.53 que $d_i(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \leq \delta$. □

Assim, módulos de persistência que conservam uma certa relação de intercalação, por exemplo aqueles oriundos de nuvens de pontos que distinguem-se entre si apenas de, relativamente, pequenas perturbações não apresentam relativamente grandes variações entre seus diagramas de persistência.

3

Teoria de Morse Discreta e Funções de Morse-Fourier

A Teoria de Morse permite obter uma decomposição celular de uma variedade através de uma aplicação da variedade a valores reais. Tal metodologia se mostra adequada para o trato de complexos simpliciais que, devido a sua estrutura combinatória, podem ter uma quantidade de simplexes relativamente muito maior do que aqueles que estão diretamente envolvidos na geração dos grupos de homologia. A partir de tal teoria, desenvolve-se então a Teoria de Morse Discreta, que permite diminuir a quantidade de simplexes em um complexo simplicial de modo a se conservarem, por exemplo, os números de Betti. Neste capítulo, consideraremos complexos simpliciais e esquemas simpliciais finitos.

3.1 Motivação

Iniciemos com um exemplo ilustrativo, em seguida, apresentaremos os resultados que generalizam, para variedades arbitrárias, as interpretações obtidas em tal exemplo.

Seja um toro \mathbb{T} tangente a um plano π , ambos mergulhados em \mathbb{R}^3 , como na Figura 3.1, consideraremos uma função $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ que calcule a altura de cada ponto de \mathbb{T} . Mais precisamente: tomando-se um eixo perpendicular a π , tal que o plano intersecte esse eixo em sua origem, a **função altura** f calcula a coordenada da projeção ortogonal de cada ponto de \mathbb{T} no eixo. A discussão que se segue pode ser encontrada no artigo original [17].

Então, definamos $\mathbb{T}_a = \{x \in \mathbb{T} : f(x) \leq a\}$, para cada $a \in \mathbb{R}$. Assim, temos que

1. se $a < f(p)$, então \mathbb{T}_a é vazio;
2. se $f(p) < a < f(q)$, então \mathbb{T}_a é homeomorfo a uma 2-célula, conforme Figura 3.2;
3. se $f(q) < a < f(r)$, então \mathbb{T}_a é homeomorfo a um cilindro, conforme Figura 3.3;

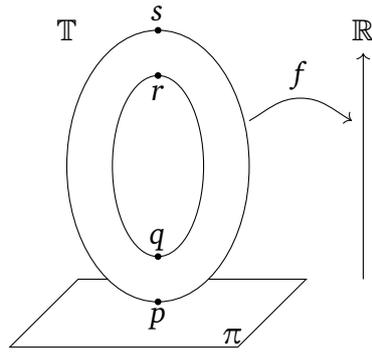


Figura 3.1: Função altura aplicada ao toro \mathbb{T}



Figura 3.2: \mathbb{T}_a para $f(p) < a < f(q)$

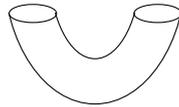


Figura 3.3: \mathbb{T}_a para $f(q) < a < f(r)$

4. se $f(r) < a < f(s)$, então \mathbb{T}_a é homeomorfo a um toro que teve removida uma 2-célula e, logo, tem um círculo como bordo, conforme a Figura 3.4;

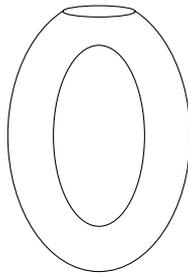


Figura 3.4: \mathbb{T}_a para $f(r) < a < f(s)$

5. se $a > f(s)$, então \mathbb{T}_a é o próprio toro \mathbb{T} .

Resta-se então compreendermos quais transformações ocorrem na pré-imagem de f nos pontos p, q, r e s . Para tal, será conveniente considerarmos equivalências homotópicas, em vez de homeomorfismos. Assim, temos que

- Do Caso 1 para o Caso 2, pode-se considerar a colagem em \emptyset de uma estrutura homotopicamente equivalente a uma 0-célula, conforme Figura 3.5;

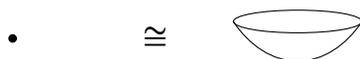


Figura 3.5: Equivalência homotópica entre colagem de 0-célula em \emptyset e espaço da Figura 3.2.

- Do Caso 2 para o Caso 3, pode-se considerar a colagem de uma estrutura homotopicamente equivalente a uma 1-célula;



Figura 3.6: Equivalência homotópica entre colagem de 1-célula em 3.2 e espaço da Figura 3.3.

- Do Caso 3 para o Caso 4, pode-se considerar a colagem de uma estrutura homotopicamente equivalente a uma 1-célula, conforme Figura 3.7;

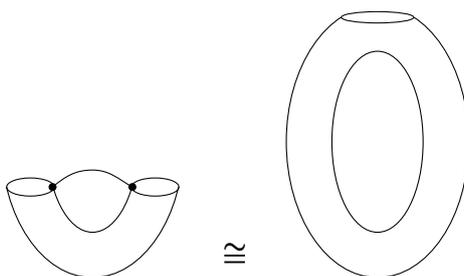


Figura 3.7: Equivalência homotópica entre colagem de 1-célula em 3.3 e Figura 3.4.

- Do Caso 4 para o Caso 5, pode-se considerar a colagem de uma estrutura homotopicamente equivalente a uma 2-célula, de modo a “completarmos” o toro original.

Como exposto no Teorema 1.66, a Teoria de Homologia Celular permite a identificação das características homológicas de um espaço topológico baseando-se justamente no conhecimento da sua construção pela colagem de k -células. Assim, no caso acima exposto, é nos pontos destacados onde se encontra toda a informação homológica do toro \mathbb{T} . Podemos observar ainda um padrão nas colagens acima descritas. Temos que podem-se escolher, para cada caso, coordenadas específicas (x, y) , tais que

- o ponto p possui uma vizinhança no toro que pode ser localmente parametrizada por $f = x^2 + y^2$. Tal expressão tem 0 termo negativo e em p identificamos a colagem de uma 0-célula;

3 Teoria de Morse Discreta e Funções de Morse-Fourier

- o ponto q e o ponto r possuem vizinhanças no toro que podem ser localmente parametrizadas por $f = \text{constante} + x^2 - y^2$. Tal expressão tem 1 termo negativo e tanto em q , quanto em r , identificamos a colagem de uma 1-célula;
- o ponto s possui uma vizinhança no toro que pode ser localmente parametrizada por $f = \text{constante} - x^2 - y^2$. Tal expressão tem 2 termos negativos e em s identificamos a colagem de uma 2-célula;

Ocorre que, podemos mostrar que para qualquer parametrização f de \mathbb{T} , os únicos pontos em que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ são justamente p, q, r e s , ou seja, estes são os pontos críticos de \mathbb{T} .

Suporemos, a partir deste ponto, M uma variedade suave e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^∞ . Os dois resultados a seguir generalizam as percepções destacadas no exemplo acima e explicitam como os pontos críticos de uma função da variedade em \mathbb{R} podem resumir algumas informações topológicas da variedade por induzirem a construção de um CW-complexo homotopicamente equivalente à variedade.

Lema 3.1. (Lema de Morse, [17]) *Seja p um ponto crítico não degenerado de f , então existe um sistema de coordenadas local (y_1, \dots, y_n) em uma vizinhança U de p com $y_i(p) = 0, \forall i$ e tal que para todo ponto de U , vale que*

$$f = f(p) - y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_n^2,$$

onde λ é dito índice de f em p .

Tal possibilidade de representação da função em uma vizinhança de cada ponto crítico não degenerado permite uma interpretação topológica da construção de M pelos conjuntos do tipo $\{x \in M : f(x) < a\}$, que será denotado por M_a . Para tal, definiremos o conceito de Função de Morse, que, de certo modo, generaliza o conceito de função altura utilizado no exemplo inicial. A definição abaixo pode ser encontrada em [19].

Definição 3.2. *Dada M variedade e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^∞ , temos que f é dita **função de Morse** se cada um dos seus pontos críticos é não degenerado.*

Finalmente, temos o Teorema a seguir.

Teorema 3.3 ([17]). *Seja f uma função de Morse de uma variedade M em \mathbb{R} , tal que para cada ponto crítico p , tenhamos que M_p é um compacto, então M tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo que contém uma célula de dimensão λ para cada ponto crítico onde f tem índice λ .*

Assim, uma função de Morse de uma variedade M em \mathbb{R} permite a obtenção de um CW-complexo homotopicamente equivalente à variedade, de modo que toda a informação está resumida nos pontos críticos de f .

3.2 Função de Morse Discreta

Iniciemos por uma investigação heurística que visa entendermos as propriedades desejáveis para que uma função de um complexo simplicial em \mathbb{R} tenha propriedades análogas às de uma função de Morse sobre uma variedade diferenciável.

Heurística

Nosso objetivo é esboçar a construção de uma função análoga à de Morse, porém, que seja aplicada em um complexo simplicial K , ou seja, que tenha simplexes como elementos do seu domínio. Precisamos definir o conceito de função de Morse discreta de modo que se definimos, a partir dela, uma função da variedade $|K|$ em \mathbb{R} , que atribua a cada ponto de $|K|$ o valor que a função de Morse discreta atribui ao simplexo do qual ele faz parte, obtenhamos algo, de certo modo, coerente com o esperado para uma função de Morse. Essa coerência deve levar em conta duas importantes limitações.

- i) Um ponto de $|K|$ pode fazer parte de diferentes simplexes de K , cada qual recebendo um valor distinto pela função. Logo, se estendermos a função a toda a realização geométrica de uma só vez, podemos obter uma relação que sequer é uma função em tais pontos.
- ii) Se definirmos o conceito de “simplexo crítico” com o intento de que coincida com o conceito de ponto crítico ao estendermos a função à variedade $|K|$, então havendo um simplexo $\sigma \in K$ crítico, com $\dim \sigma > 1$, a extensão não seria uma função de Morse, pois teria pontos críticos não isolados, logo, degenerados.

Ocorre que em uma variedade a noção de vizinhança é induzida pela métrica de \mathbb{R}^n , enquanto que em um complexo simplicial, o conceito de vizinhança é conjuntista, ou seja, induzido pela ordem parcial de continência de (K, \preceq) , que foi apresentada em 1.24. Uma vez que a noção de ponto crítico está inicialmente ligada à noção de como a função varia na vizinhança de um ponto, vamos observar como uma função varia na vizinhança de um simplexo que desejamos ser crítico, levando em conta o conceito de vizinhança exortado acima. Por outro lado, em atenção à limitação descrita no item i), utilizaremos a superposição dos resultados obtidos ao mergulharmos em \mathbb{R}^n a realização geométrica de simplexes vizinhos de dimensão diferente separadamente.

Sejam M uma variedade suave de dimensão n e K um complexo simplicial de dimensão n , com $n \geq 2$. Recordemos que se aplicarmos em M uma função de Morse, então todo ponto crítico é não degenerado. Neste caso, tomemos, por exemplo, um ponto crítico de índice 1, então existe um sistema de coordenadas (y_1, \dots, y_n) , em uma vizinhança U de

p , com $y_i(p) = 0, \forall i$ e tal que para todo ponto de U , vale que

$$f = f(p) - y_1^2 + \sum_{i=2}^n y_i^2.$$

Ou seja, a função é estritamente decrescente na direção y_1 e estritamente crescente em qualquer outra direção.

Buscaremos construir, de modo análogo a um ponto crítico de índice 1, o conceito de um 1-simplexo $\sigma = [v_0, v_1] \in K$, que seja, de certo modo, crítico. Seja uma função $\tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{R}$, queremos que tal simplexo crítico seja isolado, ou seja, se $\tau \preceq \sigma$, com $\dim \tau = \dim \sigma - 1$, ou $\sigma \preceq \tau$, com $\dim \tau = \dim \sigma + 1$, então $\tilde{f}(\tau) \neq \tilde{f}(\sigma)$.

Por outro lado, queremos que na superposição das realizações geométricas, a função partindo de σ , na direção dos seus vizinhos, seja estritamente decrescente em apenas uma direção e estritamente crescente em qualquer outra direção. Suponhamos que \tilde{f} atribui a um simplexo $\tau = [v_0, v_1, v_2]$ um valor menor que $\tilde{f}(\sigma)$, neste caso, só na comparação de σ com este 2-simplexo, do qual é face de bordo, a função já decresceria em mais de uma direção, como ilustrado na Figura 3.8, onde as setas vermelhas indicam as direções de decrescimento a partir de σ . Notemos que, neste recorte, a função decresce na direção de v_0 , por exemplo, pois o ponto está sendo considerado parte de um 2-simplexo, o que nada diz sobre a relação entre os valores $\tilde{f}(\sigma)$ e $\tilde{f}([v_0])$.

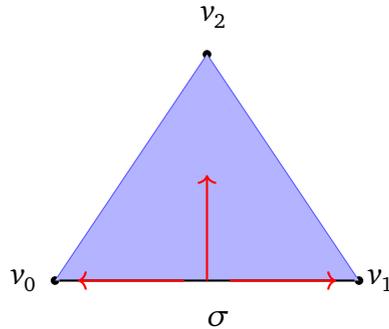


Figura 3.8: Realização geométrica de um vizinho 2-dimensional de σ e direções de decrescimento de \tilde{f} .

Logo, devemos ter $\tilde{f}(\sigma) < \tilde{f}([v_0, v_1, v_2])$. Então a direção de crescimento deve ser a dos vértices que constituem o bordo de σ . Assim, se

$$\tilde{f}([v_0, v_1, v_2]) > \tilde{f}([v_0, v_1]) > \tilde{f}([v_0]), \tilde{f}([v_1]),$$

superpondo a comparação entre σ e $\partial\sigma$ com a comparação entre σ e τ , temos que \tilde{f} decresce em uma “direção” e cresce em duas, como exposto na Figura 3.9, onde as setas verdes apontam na direção de crescimento de \tilde{f} e as vermelhas de decrescimento.

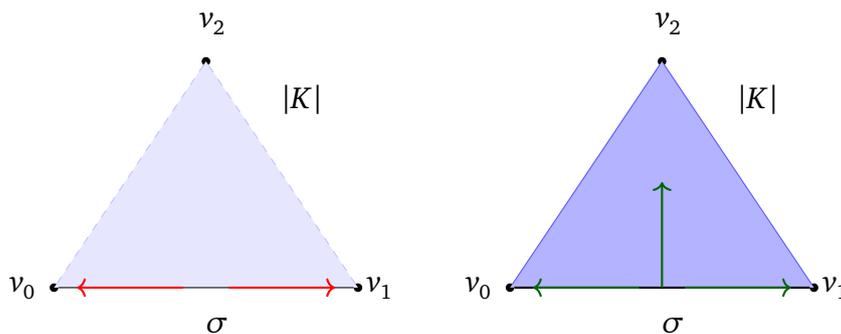


Figura 3.9: Realização geométrica dos vizinhos 0-dimensionais de σ (à esquerda) e do vizinho 2-dimensional de σ (à direita).

Ou seja, podemos definir um simplexo crítico de índice 1 em uma função de Morse discreta como $\sigma \in K$, com $\dim \sigma = 1$, tal que

$$\tau \preceq \sigma, \text{ com } \dim \tau = \dim \sigma - 1 \implies \tilde{f}(\tau) < \tilde{f}(\sigma)$$

e

$$\sigma \preceq \tau, \text{ com } \dim \tau = \dim \sigma + 1 \implies \tilde{f}(\sigma) < \tilde{f}(\tau).$$

Por outro lado, desejamos, assim como na Teoria de Morse, o descarte de simplexos não críticos, o que nesta Teoria será feito por meio de colapsos elementares, como definido em 1.18. Ocorre que, uma violação de conservação de ordem parcial, que caracteriza simplexos não críticos, é algo do tipo $\sigma \preceq \tau$, com $\tilde{f}(\sigma) \geq \tilde{f}(\tau)$, de modo que os simplexos não críticos aparecem aos pares. Como visto na Definição de colapso elementar, este ocorre quando há σ face de bordo de τ , de modo que σ não seja face de bordo de nenhum outro simplexo. Ou seja, um simplexo não crítico não pode levar dois simplexos distintos a serem não críticos, de modo que a conservação da ordem \preceq só pode admitir uma única violação de \tilde{f} para cada simplexo na sua relação com vizinhos “inferiores” e uma única violação na sua relação com vizinhos “superiores”. Assim, podemos determinar que na relação de cada simplexo com suas faces de bordo e cofaces de bordo, \tilde{f} conserve a ordem parcial de (K, \preceq) , a menos de uma única exceção, onde os simplexos que não usufruem de tal exceção são os simplexos críticos.

A ausência da extensão de interpretação para simplexos e faces de dimensão superior, na discussão acima, se deve à natureza heurística da abordagem aqui apresentada e ao fato de que mesmo para as dimensões acima expostas, tal discussão não se encontra na literatura, de modo que foge ao escopo deste texto.

Definição

Como vimos na discussão acima, vamos definir uma função de Morse discreta sobre um complexo simplicial, bem como seus simplexos críticos, a partir da ordem parcial induzida pelo seu esquema simplicial. Assim, faz sentido que definamo-las diretamente nos esquemas simpliciais, de modo que simplifiquemos as definições e demonstrações, mas deixamos implícito que se pode induzi-las para os complexos simpliciais associados, de modo que trabalharemos ao mesmo tempo sobre as duas estruturas.

Definição 3.4. *Seja um esquema simplicial S , uma **função de Morse discreta** sobre S é uma função*

$$f : S \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que, para cada $\sigma \in S$, vale que

$$\#\{\tau \in S : \sigma \text{ é face de bordo de } \tau \text{ e } f(\tau) \leq f(\sigma)\} \leq 1$$

e

$$\#\{\tau \in S : \tau \text{ é face de bordo de } \sigma \text{ e } f(\tau) \geq f(\sigma)\} \leq 1$$

Um exemplo trivial de função que é de Morse discreta é que calcula a dimensão de cada simplexo.

A partir da adoção de uma função de Morse discreta sobre um esquema simplicial podemos, então, definir os simplexos críticos.

Definição 3.5. *Se f é uma função de Morse discreta definida sobre um esquema simplicial S , então um **simplexo crítico** é um $\sigma \in S \setminus \{\emptyset\}$ tal que*

$$\#\{\tau \in S \setminus \{\emptyset\} : \sigma \text{ é face de bordo de } \tau \text{ e } f(\tau) \leq f(\sigma)\} = 0$$

e

$$\#\{\tau \in S \setminus \{\emptyset\} : \tau \text{ é face de bordo de } \sigma \text{ e } f(\tau) \geq f(\sigma)\} = 0$$

Se σ é um simplexo crítico, então o valor real $f(\sigma)$ é dito **valor crítico**. Um simplexo do esquema que não é crítico é dito um **simplexo regular**, enquanto que qualquer valor da imagem de f que não é crítico é dito **valor regular**.

3.3 Resultados Principais da Teoria de Morse Discreta

Para um simplexo ser crítico, ele precisa satisfazer duas exigências, conseqüentemente, um simplexo é regular se ele satisfaz a negação de uma ou a negação de outra. O seguinte Lema mostra que nenhum simplexo pode satisfazer ambas as negações. Tal resultado será importante para alguns objetivos deste Capítulo.

Lema 3.6 (Lema da Exclusão). *Dado um esquema simplicial S e um simplexo $\sigma \in S$, então as duas seguintes condições são mutuamente excludentes.*

- i) *Existe $\tau \in K$ simplexo do qual σ é face de bordo, tal que $f(\tau) \leq f(\sigma)$;*
- ii) *Existe $\rho \in K$ simplexo que é face de bordo de σ e é tal que $f(\rho) \geq f(\sigma)$.*

Demonstração. Seja $\sigma = \{v_0, \dots, v_p\}$. Suponhamos por contradição, que

$$\tau = \{v_0, \dots, v_p, v_{p+1}\},$$

que tem σ como face de bordo e que

$$\rho = \{v_0, \dots, v_{p-1}\},$$

face de bordo de σ , sejam tais que

$$f(\tau) \leq f(\sigma) \leq f(\rho).$$

Assim, σ goza da única exceção permitida pela Definição 3.4 para τ em relação às suas faces de bordo e também da única permitida para ρ em relação àqueles em que ρ é face de bordo. Temos que $\tilde{\sigma} \doteq \{v_0, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}\}$ é face de bordo de τ e tem ρ como face de bordo, mas não pode gozar das respectivas exceções de violação da conservação de ordem parcial, pois $\tilde{\sigma} \neq \sigma$. Logo, $f(\rho) < f(\tilde{\sigma}) < f(\tau)$. Assim, temos que

$$f(\tau) \leq f(\sigma) \leq f(\rho) < f(\tilde{\sigma}) < f(\tau),$$

o que é uma contradição. □

Adotaremos, a partir deste ponto, a seguinte notação: seja f uma função de Morse discreta sobre um esquema simplicial K , então dado $a \in \mathbb{R}$, indicaremos por $K_f(a)$ o subcomplexo dado por todos os simplexos $\tau \in K$, tais que $f(\tau) \leq a$, bem como as suas faces. Ou seja, $K_f(a) = \{\sigma \in K : \exists \tau \in K, \text{ com } \sigma \preceq \tau \text{ e } f(\tau) \leq a\}$. O subíndice pode ser omitido se for claro de qual função se trata.

3 Teoria de Morse Discreta e Funções de Morse-Fourier

Lema 3.7. *Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse discreta e $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo que não contém valores críticos. Então existe uma função de Morse discreta $f' : K \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- i) f' é injetiva em $[a, b]$;
- ii) f' não tem valores críticos em $[a, b]$;
- iii) $K_f(b) = K_{f'}(b)$ e $K_f(a) = K_{f'}(a)$;
- iv) $f = f'$ fora de $[a, b]$

Demonstração. Seja $b' = \max\{x \in \text{im } f : x < b\}$, temos que $b' \neq b$. Assim, podemos construir uma função $\tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(\sigma) \neq b \implies \tilde{f}(\sigma) = f(\sigma)$$

e

$$f(\sigma) = b \implies \tilde{f}(\sigma) = \frac{b' + b}{2}.$$

Temos que \tilde{f} é uma função que conserva a ordem de f , logo, além de ser uma função de Morse discreta tem exatamente a mesma coleção de simplexos críticos de f , ou seja, podemos considerar, sem perda de generalidade que estamos tomando um intervalo $[a, b]$, tal que $f^{-1}(b) = \emptyset$.

Se $\forall c \in [a, b]$, tivermos que $\#f^{-1}(c) \in \{0, 1\}$, já temos a função desejada. Seja então $c \in [a, b)$, tal que $\#f^{-1}(c) > 1$ e $c' = \min\{x \in \text{im } f : x > c\} \cup \{b\}$. Indiquemos ainda $\#f^{-1}(c) = m$. Definamos então três conjuntos:

- $C_1 \doteq \{\sigma \in f^{-1}(c) : \rho \in \partial\sigma \implies f(\rho) \neq c \text{ e } \sigma \in \partial\tau \implies f(\tau) \neq c\}$;
- $C_2 \doteq \{\sigma \in f^{-1}(c) : \#\{\rho \in \partial\sigma : f(\rho) = c\} = 1\}$;
- $C_3 \doteq \{\sigma \in f^{-1}(c) : \#\{\tau, \text{ com } \sigma \in \partial\tau : f(\tau) = c\} = 1\}$.

Da definição de valor regular e pelo Lema 3.6, sabemos que C_1, C_2 e C_3 formam uma partição de $f^{-1}(c)$. Ainda, sabemos que existe uma correspondência bijetiva entre os elementos de C_2 e C_3 , pois se $\sigma \in f^{-1}(c)$ e $\exists! \rho \in \partial\sigma$ é tal que $f(\rho) = c$, então necessariamente $\rho \in f^{-1}(c)$ e é tal que $\exists! \tau$, com $\rho \in \partial\tau$, tal que $f(\tau) = c$. Seja $\phi : C_2 \rightarrow C_3$ tal bijeção. Indiquemos $\#C_i = m_i$, para $i \in \{1, 2, 3\}$, sabemos que $m_2 = m_3$ e $m = m_1 + 2m_2$. Então vamos definir uma indexação de $f^{-1}(c)$ da seguinte maneira: indexaremos primeiro os simplexos de $f^{-1}(c)$ que não são face de bordo de nenhum simplexo de $f^{-1}(c)$ e nem encontram ali face de bordo sua. Em seguida, aos pares, um simplexo de $f^{-1}(c)$ e a face de bordo sua que se encontra também em $f^{-1}(c)$. Ou seja, para cada $i \in \{1, \dots, m_1\}$,

tomemos $\sigma_i \in C_1$. Em seguida, para cada $j \in \{0, \dots, m_2 - 1\}$, façamos $\sigma_{m_1+2j+1} \in C_2$ e $\sigma_{m_1+2(j+1)} = \phi(\sigma_{m_1+2j+1})$. Agora, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, façamos $f'(\sigma_i) = c + i \frac{c'-c}{(m+1)}$. Repitamos o processo para cada $d \in [a, b]$ tal que $\#f^{-1}(d) > 1$, em seguida façamos $f'(\sigma) = f(\sigma)$ para cada simplexo tal que $f(\sigma) \notin [a, b]$, ou $\#f^{-1}(f(\sigma)) = 1$. Assim, claramente estão satisfeitos os itens **i)**, **iii)** e **iv)**. Resta analisarmos o item **ii)**.

Da forma como construímos f' , se $f(\sigma) > f(\tau)$, então $f'(\sigma) > f'(\tau)$ e também $(f')^{-1}([a, b]) = f^{-1}([a, b])$. Então seja $\sigma \in (f')^{-1}([a, b])$, temos que é um simplexo regular e temos duas possibilidades excludentes entre si:

- $\exists \rho \in \partial\sigma$, tal que $f(\sigma) \leq f(\rho)$. Se $f(\sigma) < f(\rho)$, então $f'(\sigma) < f'(\rho)$. Se $f(\sigma) = f(\rho)$, então, pelo processo acima, $f'(\sigma) < f'(\rho)$. Ainda, se $\tilde{\rho} \neq \rho$ e $\tilde{\rho} \preceq \sigma$, então $f(\tilde{\rho}) < f(\sigma)$, donde $f'(\tilde{\rho}) < f'(\sigma)$;
- $\exists \tau$, com $\sigma \in \partial\tau$, tal que $f(\sigma) \geq f(\tau)$. Se $f(\sigma) > f(\tau)$, então $f'(\sigma) > f'(\tau)$. Se $f(\sigma) = f(\tau)$, então, pelo processo acima, $f'(\sigma) > f'(\tau)$. Ainda, se $\tilde{\tau} \neq \tau$ e $\sigma \preceq \tilde{\tau}$, então $f(\sigma) < f(\tilde{\tau})$, donde $f'(\sigma) < f'(\tilde{\tau})$;

Ou seja, f' é função de Morse discreta e a condição **ii)** também é satisfeita. □

O próximo teorema visa mostrar que “nada interessante” ocorre (homotopicamente falando) entre dois subcomplexos induzidos pelos valores extremos de um intervalo em \mathbb{R} que não contém valores críticos de f .

Teorema 3.8. *Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse discreta e seja um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ que não contém valores críticos de f . Então $K(b) \searrow K(a)$, de acordo com a definição 1.18.*

Demonstração. Devido ao Lema 3.7, podemos considerar, sem perda de generalidade, que f é injetiva em $[a, b]$. Se $\text{im } f \cap [a, b] = \emptyset$, então $K(a) = K(b)$ e o resultado é imediato. Suponhamos então o caso contrário. Como f tem imagem discreta, podemos cindir $[a, b]$ em uma coleção de subintervalos fechados, de modo que cada um contenha apenas um valor regular de f . Tomemos um destes subintervalos, que denotaremos $I_\lambda = [a_\lambda, b_\lambda]$ e seja $\sigma \in f^{-1}(I_\lambda)$. Pelo Lema 3.6, apenas uma das condições abaixo é verdade.

- i) Existe $\tau \in K$, simplexo do qual σ é face de bordo e é tal que $f(\tau) \leq f(\sigma)$;
- ii) Existe ρ face de bordo de σ , tal que $f(\sigma) \leq f(\rho)$.

Suponhamos que o segundo caso seja verdadeiro, então não há outro simplexo em $K(b_\lambda)$ do qual ρ seja face de bordo. De fato, suponhamos por absurdo a existência de tal $\tilde{\sigma} \in K(b_\lambda)$. Como $f(\sigma) \leq f(\rho)$ e f é uma função de Morse discreta, temos $f(\rho) < f(\tilde{\sigma})$. Como $\tilde{\sigma} \in K(b_\lambda)$, então $f(\tilde{\sigma}) \leq b_\lambda$, ou existe $\nu \in K(b_\lambda)$, tal que $\tilde{\sigma} \preceq \nu$ e $f(\nu) \leq b_\lambda$. Se $f(\tilde{\sigma}) \leq b_\lambda$, então $a_\lambda \leq f(\sigma) \leq f(\rho) < f(\tilde{\sigma}) \leq b_\lambda$. Como, por hipótese, $f(\tilde{\sigma})$ não pode ser um valor crítico, então $f(\tilde{\sigma})$ deve ser um valor regular, o que contradiz a hipótese

de que $f(\sigma)$ seja o único valor regular em $[a_\lambda, b_\lambda]$. De igual maneira, podemos chegar à conclusão de que ν seria outro simplexo diferente de σ a ter valor regular em $[a_\lambda, b_\lambda]$. Assim, concluímos que a existência de $\tilde{\sigma}$ leva a uma contradição, donde temos que σ é o único simplexo que tem ρ como face de bordo. Assim, $K(b_\lambda) \searrow K(b_\lambda) - \{\sigma, \rho\}$. Por indução na quantidade finita de subintervalos de $[a, b]$, temos que $K(b) \searrow K(a)$. Se consideramos o primeiro caso como verdadeiro, chegamos um resultado idêntico por argumentação análoga. \square

Lema 3.9. *Seja $\sigma \in K$ com $\dim \sigma = p$ e suponha que $\sigma \preceq \tau$. Então existe um $(p+1)$ -simplexo $\tilde{\tau} \in K$, tal que $\sigma \preceq \tilde{\tau} \preceq \tau$ e*

$$f(\tilde{\tau}) \leq f(\tau).$$

Demonstração. Como $\sigma \preceq \tau$, temos que $\dim \tau > \dim \sigma$. Seja $\dim \tau = p+1$, então basta tomar $\tilde{\tau} = \tau$ e temos o resultado. Seja $\dim \tau = p+r, r > 1$. Então existem pelo menos duas faces de τ , que indicaremos por ρ_1 e ρ_2 , tais que são $(p+r-1)$ -simplexos e satisfazem

$$\sigma \preceq \rho_1 \preceq \tau \text{ e } \sigma \preceq \rho_2 \preceq \tau.$$

Pela definição de função de Morse discreta, necessariamente $f(\rho_1) < f(\tau)$ ou $f(\rho_2) < f(\tau)$. Pode-se então chegar em $\tilde{\tau}$ por indução decrescente em r . \square

Teorema 3.10. *Seja $\sigma \in K$ um simplexo crítico de dimensão p , com $f(\sigma) \in [a, b]$ e de modo que $f^{-1}([a, b])$ não contenha outros pontos críticos. Então $K(b)$ é homotopicamente equivalente à colagem $K(a) \bigsqcup_{\varphi} e^p$, onde e^p é uma p -célula e a colagem $\varphi : \partial e^p \rightarrow K(a)$ é feita pelo bordo da célula.*

Demonstração. Assim como no Teorema 3.8, podemos assumir f injetiva, logo, existem $a', b' \in \mathbb{R}$, tais que

$$a < a' < b' < b,$$

com

$$\sigma = f^{-1}([a', b']).$$

Do Teorema 3.8, temos que $K(b) \searrow K(b')$ e $K(a') \searrow K(a)$. Logo, é suficiente provar que $K(b')$ é homotopicamente equivalente a $K(a') \bigsqcup_{\varphi'} e^p$, onde φ' é aplicação de ∂e^p em $K(a')$. Como σ é crítico, se τ é simplexo em K , tal que σ é face de bordo de τ , então $f(\tau) > f(\sigma)$, ou seja, $f(\tau) > b'$. Assim, pelo Lema 3.9, se τ é qualquer face em K , com $\sigma \preceq \tau$, então $f(\tau) > b'$. Assim, σ não é face de nenhum elemento de $K(a')$, donde temos que $\sigma \notin K(a')$. Também segue do fato de σ ser crítico que para cada face de bordo ρ de

3.4 Árvores de Decisão e Evasividade na Construção de Funções de Morse Discretas

σ , temos $f(\rho) < f(\sigma)$, ou seja, $f(\rho) < a'$, donde $\rho \subseteq K(a')$, ou seja, $\partial\sigma \subseteq K(a')$, assim

$$K(b') = K(a') \bigsqcup_{\partial\sigma} \sigma.$$

Como, σ é homeomorfo a e^p , o resultado segue. □

Dos Teoremas 3.8 e 3.10, temos o seguinte Corolário.

Corolário 3.11. *Seja um complexo simplicial K munido de uma função de Morse discreta. Então K é homotopicamente equivalente a um CW-complexo com exatamente uma célula de dimensão p para cada simplexo crítico de dimensão p .*

Indicando-se por $m_p(f)$ o número de células críticas de índice p a partir da função de Morse discreta f , o que denominaremos **p -ésimo número de Morse** de f e lembrando o significado do p -ésimo número de Betti β_p , conforme apresentado em 1.44, temos então os próximos Corolários, cuja relação com os Teoremas 3.8 e 3.10 é análoga à apresentada, para a Teoria de Morse, em [17].

Corolário 3.12 (Desigualdade Forte de Morse). *Para cada $N \geq 0$, temos que*

$$m_N(f) - m_{N-1}(f) + m_{N-2}(f) - \cdots \pm m_0(f) \leq \beta_N - \beta_{N-1} + \beta_{N-2} - \cdots \pm \beta_0.$$

Corolário 3.13 (Desigualdade Fraca de Morse). *Para cada $N \geq 0$, temos que*

$$m_N(f) \geq \beta_N.$$

Resta-nos então apresentar técnicas para, dado um complexo simplicial, obtermos uma função de Morse discreta.

3.4 Árvores de Decisão e Evasividade na Construção de Funções de Morse Discretas

No ano 2000, o autor da teoria de Morse discreta, Robin Forman, publica um artigo onde relaciona a construção de funções de Morse discretas com árvores de decisão. Para tal abordagem, bem como na compreensão do conceito de evasividade teremos como referências principais, além do citado artigo [8], também [13].

Nosso primeiro objetivo é entender o que é uma árvore de decisão neste contexto: seja V um conjunto finito e S uma coleção de subconjuntos de V . Dado σ um subconjunto

desconhecido de V , nosso objetivo é saber se σ está ou não na coleção S , a partir de uma sequência de perguntas do tipo “ v está em σ ?”, onde $v \in V$, e suas respectivas respostas. É claro que se as perguntas exaurirem os elementos de V , então σ estará totalmente caracterizado e a pergunta principal “ σ está em S ?” estará respondida. Por outro lado, dependendo de σ e de como estruturamos as perguntas, baseando-nos nas respostas anteriores, é possível que obtenhamos a resposta para a pergunta original, sem que necessariamente percorramos todos os elementos de V .

Uma estrutura de perguntas, conforme exposto acima, capaz de dar a resposta para qualquer $\sigma \subseteq V$ é chamada árvore de decisão T , onde cada pergunta é um nó da árvore e cada resposta um ramo da árvore. Porém, devemos ser mais específicos: estamos no contexto de esquemas simpliciais e só nos interessam os simplexes que nele estejam. Assim, vamos resumir o conjunto dos vértices a S^0 , ou seja, ao 0-esqueleto do próprio esquema simplicial.

Ao chegarmos a uma última pergunta de uma árvore, temos algumas possibilidades: se a solução do problema “ $\sigma \in S$?” independe da resposta da última pergunta, “ $x \in \sigma$?”, então esta pergunta e suas respostas constituem, elas próprias, uma árvore sobre $\{\emptyset, \{x\}\}$, que é o caso onde qualquer resposta serve. Neste caso, denominaremos-la $Vit(x)$, conforme a Figura 3.10 (item a)). Suponhamos que a solução do problema depende da resposta à última pergunta. Se a resposta “sim” indica que o simplexo está em S e “não” significa que não está em S , então a última pergunta e suas respostas constituem uma árvore sobre $\{\{x\}\}$, que denominaremos $Der(x)$, conforme a Figura 3.10 (item b)); caso contrário, é uma árvore sobre $\{\emptyset\}$, que denominaremos Der , conforme a Figura 3.10 (item c)). Finalmente, se ambas as respostas indicarem que $\sigma \notin S$, então temos uma árvore sobre \emptyset , conforme Figura 3.10 (item d)).

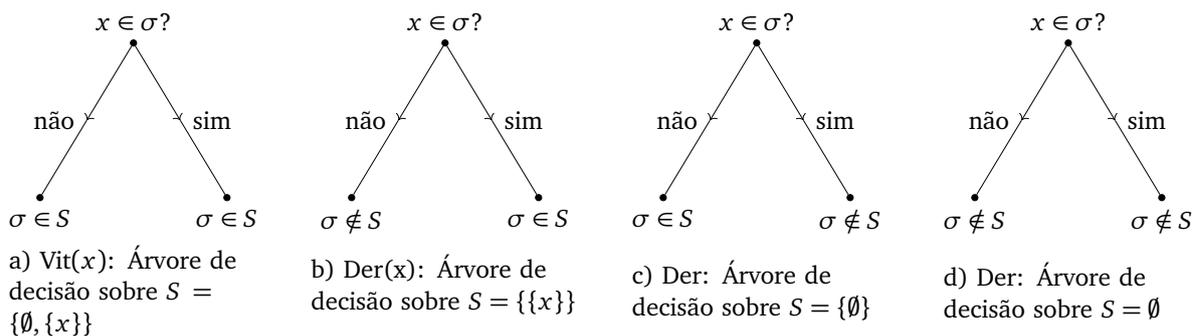


Figura 3.10: Árvores de decisão $Vit(x)$, $Der(x)$ e Der .

Uma das formas de se definir árvore de decisão é a partir das estruturas acima apresentadas, de forma recursiva, que é adequada aos nossos objetivos.

Definição 3.14. Uma classe de **árvores de decisão**, cada qual associada a uma família finita de subconjuntos de S^0 é definida recursivamente a seguir.

3.4 Árvore de Decisão e Evasividade na Construção de Funções de Morse Discretas

- $T = \text{Vit}$ é uma árvore de decisão sobre \emptyset ou sobre $\{\emptyset, \{v\}\}$;
- $T = \text{Der}$ é uma árvore de decisão sobre qualquer conjunto unitário $\{\emptyset\}$ ou $\{\{v\}\}$;
- Seja S uma família de conjuntos, se x é um elemento de S^0 , T_0 é uma árvore de decisão sobre $dl_S(x)$ e T_1 é uma árvore de decisão sobre $lk_S(x)$, então a tripla ordenada (x, T_0, T_1) é uma árvore de decisão em S .

Relembrando a Definição 1.26, uma possível interpretação da tripla (x, T_0, T_1) , à luz da discussão precedente, é a seguinte, para um σ a ser examinado: x é o elemento sobre o qual se fará a pergunta do nó. Se $x \notin \sigma$, então σ faz parte da família dos conjuntos que não contêm x , ou seja, $dl_S(x)$. Se, por outro lado, $x \in \sigma$, vamos buscar os outros elementos de σ , ou seja, olhar para os conjuntos do tipo $\tau \setminus \{x\}$ tais que $x \in \tau$, portanto, a família $lk_S(x)$. Se prosseguirmos recursivamente, em algum momento atingiremos uma folha do tipo Vit ou Der.

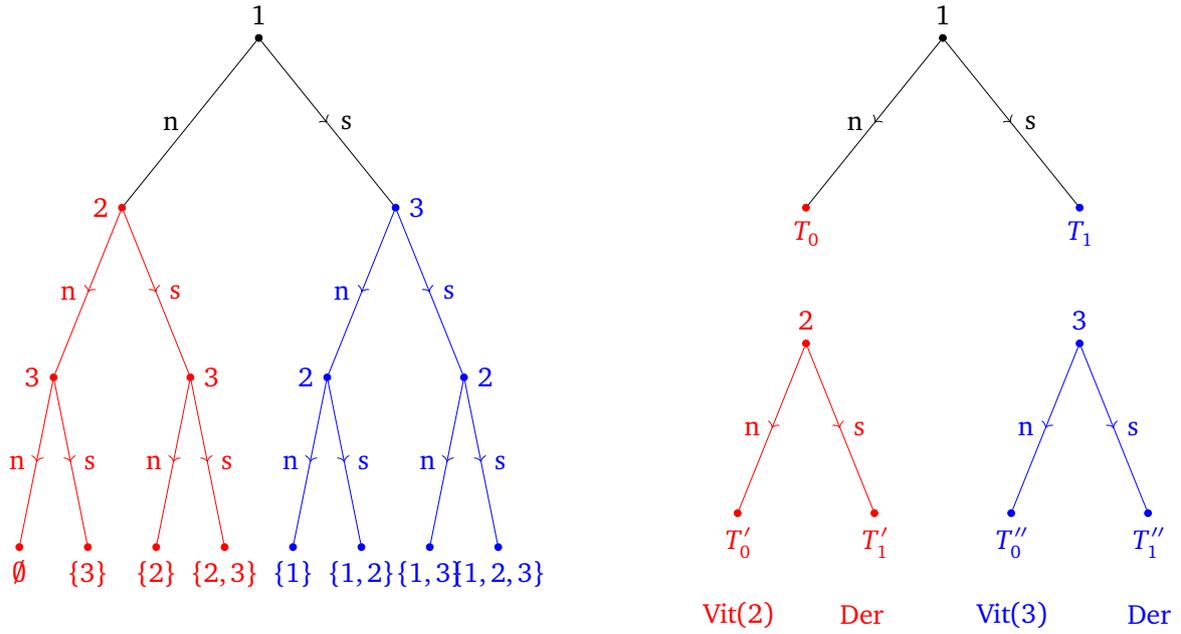
Exemplo 3.15. Seja $S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ e T a árvore sobre S , ilustrada na Figura 3.11, à esquerda. Temos que $T = (1, T_0, T_1)$. Ainda, $T_0 = (2, T'_0, T'_1)$ é árvore sobre $dl_S(1) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}\}$ e $T_1 = (3, T''_0, T''_1)$ é árvore sobre $lk_S(1) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}\}$. Tal decomposição pode ser observada na Figura 3.11, à direita. Temos ainda que

- T'_0 é um árvore sobre $dl_{dl_S(1)}(2) = \{\emptyset, \{3\}\}$, ou seja, $T'_0 = \text{Vit}(3)$;
- T'_1 é um árvore sobre $lk_{dl_S(1)}(2) = \{\emptyset\}$, ou seja, $T'_1 = \text{Der}$;
- T''_0 é um árvore sobre $dl_{lk_S(1)}(3) = \{\emptyset, \{2\}\}$, ou seja, $T''_0 = \text{Vit}(2)$;
- T''_1 é um árvore sobre $lk_{lk_S(1)}(3) = \{\emptyset\}$, ou seja, $T''_1 = \text{Der}$.

Dada uma árvore de decisão sobre um complexo simplicial S , podemos construir uma função de Morse discreta induzida por ela.

Definição 3.16. Dada uma árvore de decisão T , a **função de Morse discreta induzida pela árvore de decisão T** é

- Se a árvore é $T = \text{Vit}(x)$ sobre $\{\emptyset, \{x\}\}$, então definiremos $f_T : \{\emptyset, \{x\}\} \rightarrow \mathbb{R}$ como $f_T(\emptyset) = 1$ e $f_T(\{x\}) = 0$;
 - Se a árvore é $T = \text{Der}$ sobre $\{\emptyset\}$, então definiremos $f_T(\{\emptyset\}) = 0$;
 - Se a árvore é $T = \text{Der}$ sobre $\{\{x\}\}$, então definiremos $f_T(\{x\}) = 0$;
 - Se a árvore é $T = (x, T_0, T_1)$ sobre S , então definiremos, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, tal que dado
- $$\sigma \in S, f_T(\sigma) = \begin{cases} f_{T_0}(\sigma) & \text{se } x \notin \sigma \\ f_{T_1}(\sigma \setminus \{x\}) + \#dl_S(x), & \text{se } x \in \sigma. \end{cases}$$



a) Árvore T sobre S .

b) Decomposição da árvore $T = (1, T_0, T_1)$ nas suas partes $T_0 = (2, T'_0, T'_1) = (2, \text{Vit}(2), \text{Der})$ e $T_1 = (3, T''_0, T''_1) = (3, \text{Vit}(3), \text{Der})$, oriundas da recursividade.

Figura 3.11: Árvore de decisão T e sua decomposição em partes a partir da estrutura de recursividade.

Lema 3.17. Se $T = (x, T_0, T_1)$ é uma árvore de decisão sobre S e f_{T_0} e f_{T_1} são funções de Morse discretas induzidas, como definido em 3.16, então $\text{im } f_{T_0} \subset [0, \#dl_S(x) - 1]$ e $\text{im } f_{T_1} \subset [0, \#lk_S(x) - 1]$.

Demonstração. Se $T_0 = \text{Der}$, então $\text{im } f_{T_0} = \{0\}$, se $T_0 = \text{Vit}(x)$, então $\#dl_S(x) = 2$ e $\text{im } f_{T_0} = \{0, 1\}$. Se $T_0 = (y, T'_0, T'_1)$, assumindo, por indução, que a afirmação seja verdadeira para $f_{T'_0}$ e $f_{T'_1}$, então

$$y \notin \sigma \implies f_{T_0}(\sigma) = f_{T'_0}(\sigma) \in [0, \#dl_{dl_S(x)}(y) - 1] \subseteq [0, \#dl_S(x) - 1];$$

$$\begin{aligned} y \in \sigma \implies f_{T_0}(\sigma) &= f_{T'_1}(\sigma \setminus \{y\}) + \#dl_{dl_S(x)}(y) \in [0, \#lk_{dl_S(x)}(y) + \#dl_{dl_S(x)}(y) - 1] \\ &= [0, \#dl_S(x) - 1], \end{aligned}$$

pelo Lema 1.28.

Por outro lado, se $T_1 = \text{Der}$ ou $T_1 = \text{Vit}(x)$, o argumento é análogo ao caso acima. Se $T_1 = (z, T''_0, T''_1)$, assumindo, por indução, que a afirmação seja verdadeira pra $f_{T''_0}$ e $f_{T''_1}$,

3.4 Árvores de Decisão e Evasividade na Construção de Funções de Morse Discretas

então,

$$z \notin \sigma \implies f_{T_1}(\sigma) = f_{T_0''}(\sigma) \in [0, \#dl_{lk_S(x)}(z) - 1] \subset [0, \#lk_S(x) - 1];$$

$$\begin{aligned} z \in \sigma \implies f_{T_1}(\sigma) &= f_{T_1''}(\sigma) + \#dl_{lk_S(x)}(z) \subset [0, \#lk_{lk_S(x)}(z) + \#dl_{lk_S(x)}(z) - 1] \\ &= [0, \#lk_S(x) - 1], \end{aligned}$$

novamente pelo Lema 1.28. □

Agora, provemos que toda função de Morse discreta induzida por uma árvore de decisão é uma função de Morse discreta. Ocorre que, para uma árvore do tipo Vit ou Der, é muito simples notar o resultado, restando-nos apenas provar para o passo recursivo.

Lema 3.18. *Dados S um complexo simplicial e $v \in S^0$ um vértice, sejam $f_{dl} : dl_S(v) \rightarrow [0, \#dl_S(v) - 1]$ e $f_{lk} : lk_S(v) \rightarrow [0, \#lk_S(v) - 1]$ funções de Morse discretas sobre a deleção e o link de S , então a função $f : S \rightarrow [0, \#S - 1]$ definida por*

$$f(\sigma) = \begin{cases} f_{lk}(\sigma \setminus \{v\}) + \#dl_S(v), & \text{se } v \in \sigma \\ f_{dl}(\sigma), & \text{se } v \notin \sigma \end{cases}$$

é uma função de Morse discreta.

Demonstração. Seja $\sigma \in S$.

- **Caso 1:** Se $v \notin \sigma$, então $\sigma \in dl_S(v)$. Assim, se $\sigma \preceq \tau$ e $v \in \tau$, então

$$f(\sigma) = f_{dl}(\sigma) < \#dl_S(v) \leq f_{lk}(\tau \setminus \{v\}) + \#dl_S(v) = f(\tau),$$

ou seja, neste caso, τ não viola a exceção permitida a f em σ . Temos duas possibilidades:

- **Caso 1.1:** se existe $\rho \preceq \sigma$, com $f(\rho) \geq f(\sigma)$, então temos que $v \notin \rho$, donde $\rho \in dl_S(v)$, assim, $f_{dl}(\rho) \geq f_{dl}(\sigma)$. Para cada $\tilde{\rho} \neq \rho$, com $\tilde{\rho} \preceq \sigma$, temos que $v \notin \tilde{\rho}$, donde $\tilde{\rho} \in dl_S(v)$. Como f_{dl} é função de Morse discreta e ρ goza da única exceção permitida à f_{dl} de violar a conservação de ordem parcial de (K, \preceq) a partir de σ , então $f(\tilde{\rho}) = f_{dl}(\tilde{\rho}) < f_{dl}(\sigma) = f(\sigma)$. Se $\sigma \preceq \tau$ e $v \notin \tau$, então $\tau \in dl_S(v)$ e, pelo Lema da Exclusão, $f(\tau) = f_{dl}(\tau) > f_{dl}(\sigma) = f(\sigma)$. Ou seja, ρ é a única exceção de f para σ ;
- **Caso 1.2:** se, por outro lado, $\sigma \preceq \tau$, com $v \notin \tau$, mas $f(\sigma) \geq f(\tau)$. Novamente, temos que τ goza da única exceção permitida a σ , então, se $\rho \preceq \sigma$, então $v \notin \rho$, donde $f(\rho) = f_{dl}(\rho) < f_{dl}(\sigma) = f(\sigma)$, pelo Lema da Exceção. Ainda, dado $\sigma \preceq \tilde{\tau}$, com $\tilde{\tau} \neq \tau$, se $v \notin \tilde{\tau}$, então $f(\tilde{\tau}) = f_{dl}(\tilde{\tau}) > f_{dl}(\sigma) = f(\sigma)$. Neste caso, τ é a única exceção de f para σ .

- **Caso 2:** Suponhamos que $v \in \sigma$. Assim, se $\rho \preceq \sigma$ e $v \notin \rho$, então

$$f(\rho) = f_{dl}(\sigma) < \#dl_S(v) \leq f_{lk}(\sigma \setminus \{v\}) + \#dl_S(v) = f(\sigma),$$

ou seja, neste caso, ρ não viola a exceção permitida a f em σ . Temos duas possibilidades:

- **Caso 2.1:** Se $\sigma \preceq \tau$, com $f(\sigma) \geq f(\tau)$, então $v \in \tau$, logo

$$f_{lk}(\sigma \setminus \{v\}) + \#dl_S(v) \geq f_{lk}(\tau \setminus \{v\}) + \#dl_S(v) \implies f_{lk}(\sigma \setminus \{v\}) \geq f_{lk}(\tau \setminus \{v\}),$$

ou seja, $\tau \setminus \{v\}$ goza da única exceção permitida para f_{lk} em $\sigma \setminus \{v\}$. Assim, se $\sigma \preceq \tilde{\tau}$, com $\tau \neq \tilde{\tau}$, então $f_{lk}(\sigma \setminus \{v\}) < f_{lk}(\tilde{\tau} \setminus \{v\})$, donde $f(\sigma) < f(\tilde{\tau})$. Pelo Lema da Exceção, se $\rho \preceq \sigma$, com $v \in \rho$, então $f_{lk}(\rho) < f_{lk}(\sigma)$, donde $f(\rho) < f(\sigma)$. Neste caso, τ é a única exceção de f para σ .

- **Caso 2.2:** Se $\rho \preceq \sigma$, com $f(\rho) \geq f(\sigma)$ e $v \in \rho$, então, novamente $\rho \setminus \{v\}$ goza da única exceção permitida a f_{lk} em $\sigma \setminus \{v\}$, donde $\sigma \preceq \tau$ garante que $f(\sigma) < f(\tau)$ e $\tilde{\rho} \preceq \sigma$, com $\tilde{\rho} \neq \rho$ e $v \in \tilde{\rho}$, garantem que $f(\tilde{\rho}) < f(\sigma)$. Neste caso, ρ é a única exceção de f para σ .

Ou seja, f permite apenas uma única exceção, para cada simplexo, da conservação da ordem parcial de (K, \preceq) , logo, é uma função de Morse discreta. \square

Uma questão que surge após o estudo da função acima é se existe algum critério para a escolha do vértice v , em cada etapa da recursão. Para tal, precisamos olhar para a árvore de decisão associada e entender o conceito de evasividade.

Se um simplexo σ , ao ser submetido ao crivo de uma árvore de decisão T , atinge uma árvore do tipo $\text{Vit}(x)$, significa que $\sigma \cup \{x\}$ e $\sigma \setminus \{x\}$ estão ambos em S , logo, obtemos resposta para a pergunta “ $\sigma \in S$?” sem percorrermos todos os elementos de S^0 . Nesta caso, σ é dito não evasivo, ou seja, “vencemos” o jogo. Se, por outro lado, a pergunta final constituir uma árvore do tipo Der , então não fomos capazes de saber se $\sigma \in S$ até chegamos à última questão. Neste caso, σ é dito evasivo em T e fomos “derrotados” no jogo. A definição a seguir é feita de forma a aproveitar a estrutura recursiva de uma árvore de decisão e propagar a informação de evasividade da árvore acima.

Definição 3.19. Um conjunto $\sigma \in S$ é dito **não evasivo** com respeito a uma árvore de decisão T sobre S se alguma das condições for satisfeita:

1. $T = \text{Vit}$;
2. $T = (x, T_0, T_1)$ para algum $x \notin \sigma$ e σ é não evasivo com respeito a T_0 ;
3. $T = (x, T_0, T_1)$ para algum $x \in \sigma$ e $\sigma \setminus \{x\}$ é não evasivo com respeito a T_1 ;

3.4 Árvore de Decisão e Evasividade na Construção de Funções de Morse Discretas

Caso contrário, σ é dito **evasivo** com respeito a T .

Exemplo 3.20. Retomando o Exemplo 3.15, podemos notar, por exemplo, que $\sigma = \{1\}$ é não evasivo em T_0'' . Como $3 \notin \sigma$, pelo item 2., da Definição 3.19, então σ é não evasivo em $(3, T_0'', T_1'') = T_1$. Ainda, como $1 \in \sigma$, pelo item 1. da Definição 3.19, então σ é não evasivo em $(1, T_0', T_1') = T$. Isto é coerente com o conceito intuitivo de evasividade discutido anteriormente, uma vez que se $\{1\}$ é testado pela árvore, concluímos que se trata de um conjunto pertencente a S com apenas 2 perguntas.

Finalmente, temos uma relação direta entre os simplexos críticos de uma função de Morse discreta como apresentada na Definição 3.16 e os simplexos evasivos na sua árvore de decisão associada. O Teorema a seguir é uma adaptação da versão encontrada em [8] para a notação aqui empregada.

Teorema 3.21. *Seja uma função de Morse discreta f como definida no Lema 3.18, então um simplexo é crítico se, e somente se é evasivo na árvore de decisão associada.*

Demonstração. (\implies) Seja $\sigma \in S$ não evasivo em $T = \text{Vit}(x)$, então, não é crítico em f_T . Seja σ não evasivo em $T = (x, T_0, T_1)$ e suponhamos, por indução, que a afirmação seja verdadeira em T_0 e T_1 .

Se $x \notin \sigma$, então σ é não evasivo com respeito a T_0 , logo, não é crítico com respeito a f_{T_0} em $dl_S(x)$, então existe $\rho \in dl_S(x)$ face de bordo de σ com $f_{T_0}(\rho) \geq f_{T_0}(\sigma)$, donde $f(\rho) \geq f(\sigma)$ ou existe $\tau \in dl_S(x)$ de modo que σ é face de bordo de τ e é tal que $f_{T_0}(\sigma) \geq f_{T_0}(\tau)$, donde $f(\sigma) \geq f(\tau)$. Ou seja, σ é regular em S .

Se, por outro lado $x \in \sigma$, então $\sigma \setminus \{x\}$ é não evasivo com respeito a T_1 , logo, não é crítico com respeito a f_{T_1} , então existe $\rho \setminus \{x\} \in lk_S(x)$, face de bordo de $\sigma \setminus \{x\}$, com $f_{T_1}(\rho \setminus \{x\}) \geq f_{T_1}(\sigma \setminus \{x\})$, donde

$$f(\rho) = f_{T_1}(\rho \setminus \{x\}) + \#dl_S(x) \geq f_{T_1}(\sigma \setminus \{x\}) + \#dl_S(x) = f(\sigma)$$

ou existe $\tau \setminus \{x\} \in lk_S(x)$, que tem $\sigma \setminus \{x\}$ como sua face de bordo e é tal que $f_{T_1}(\setminus \{x\}) \geq f_{T_1}(\tau \setminus \{x\})$, donde

$$f(\sigma) = f_{T_1}(\sigma \setminus \{x\}) + \#dl_S(x) \geq f_{T_1}(\tau \setminus \{x\}) + \#dl_S(x) = f(\tau),$$

ou seja, σ é regular em S .

(\impliedby) Basta notarmos que se $\sigma \in S$ é um simplexo evasivo e ρ é face de bordo de σ , então $\exists x \in S^0$ tal que $\rho = \sigma \setminus \{x\}$. Assim, eles se separam em algum nó do tipo $\tilde{T} = (x, \tilde{T}_0, \tilde{T}_1)$ sobre $S' \subset S$, que não é do tipo $\tilde{T} = \text{Vit}(x)$ ou $\tilde{T} = \text{Der}(x)$, uma vez que o simplexo é evasivo. Assim, $f_{\tilde{T}}(\rho) = f_{\tilde{T}_0}(\rho) \in [0, \#dl_{S'}(x) - 1]$ e $f_{\tilde{T}}(\sigma) = f_{\tilde{T}_1}(\rho) + \#dl_{S'}(x)$, logo $f_{\tilde{T}}(\sigma) > f_{\tilde{T}}(\rho)$. O análogo se dá para um simplexo do qual σ evasivo é face de bordo. Assim, σ é crítico. \square

O objetivo de reduzir a cardinalidade de um complexo simplicial, sem alterar o tipo de homotopia da sua realização geométrica, equivale, no presente contexto ao objetivo de reduzir o número de simplexes críticos por uma função de Morse discreta, o que agora equivale ao objetivo de reduzir o número de simplexes evasivos, se tal função é induzida por uma árvore de decisão. Assim, buscaremos quais escolhas de vértices, na construção de uma árvore de decisão, conseqüentemente, na construção de uma função de Morse discreta induzida, tendem a nos aproximar de tal objetivo.

3.5 Funções de Morse-Fourier

Árvores de decisão sobre funções Booleanas foram estudadas em [20] e, em linguagem de esquemas simpliciais, os autores provam que, dado um esquema simplicial S , existe uma constante $K_S > 0$ tal que, para cada árvore de decisão T , temos que

$$K_S \leq \sum_{v \in V} \delta(T; v) \widehat{S}(\{v\}),$$

onde $\delta(T; v)$ é a probabilidade de se atingir o nó “ $v \in \sigma$?” da árvore, para a seleção aleatória e uniformemente distribuída de $\sigma \in S$ e $\widehat{S}(\{v\})$ é a Transformada de Fourier de S calculada em v , a ser aqui definida. Assim, dependendo da ordem dos vértices escolhidos para se fazer as perguntas de uma árvore, pode ser que mesmo depois de quase todas as perguntas tendo sido feitas o lado direito da expressão acima não seja maior que K_S , de modo que necessariamente teremos que continuar perguntando, tendo como conseqüência a obtenção de simplexes evasivos e, portanto, críticos. Uma solução é começarmos pelos vértices que maximizam $\widehat{S}(\{v\})$. Antes, vejamos o significado da Transformada de Fourier de um complexo simplicial.

Transformada de Fourier de um Complexo Simplicial

A discussão a seguir tem como principal referência [26], onde se pode encontrar uma exposição mais completa do que o esboço aqui apresentado. Também foi utilizado o artigo [7]. Seja o grupo abeliano multiplicativo $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ e $L^2(\mathbb{Z}_m)$ o conjunto das funções de \mathbb{Z}_m em \mathbb{R} . Dado $x \in \mathbb{Z}_m$, temos o seguinte homomorfismo $e_x : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{C}$, dado por

$$e_x(y) = \exp\left(\frac{i2\pi xy}{m}\right),$$

que independe dos representantes das classes de congruência escolhidos.

Definição 3.22. Dada $\varphi \in L^2(\mathbb{Z}_m)$, a **Transformada Discreta de Fourier** de φ é definida

por

$$\mathcal{F}(\varphi(x)) \doteq \widehat{\varphi}(x) = \frac{1}{m} \sum_{y \in \mathbb{Z}_m} \varphi(y) e_x(-y).$$

Estendendo tal definição, tomemos o grupo abeliano $G = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_{m_i}$, cujos elementos indicaremos por $y = (y_1, \dots, y_n)$. Neste caso, temos que, dado $\varphi \in L^2(G)$, então

$$\mathcal{F}(\varphi(x)) \doteq \widehat{\varphi}(x) = \sum_{y \in G} \varphi(y) \prod_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \exp\left(-\frac{i2\pi x_i y_i}{m_i}\right).$$

No caso particular onde $m_i = m$ para todo i , utilizemos o produto interno $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ para simplificar a expressão. Então obtemos

$$\mathcal{F}(\varphi(x)) \doteq \widehat{\varphi}(x) = \frac{1}{m^n} \sum_{y \in G} \varphi(y) \exp\left(-\frac{i2\pi \langle x, y \rangle}{m}\right).$$

Dado um esquema simplicial S , munamos o conjunto S^0 de uma ordem definida e suponhamos que $\#S^0 = n$. Então, vamos definir a bijeção $\psi : 2^{S^0} \rightarrow \mathbb{Z}_2^n \approx \{0, 1\}^n$ da seguinte maneira, dado $\sigma \subset S^0$, $\psi(\sigma) = (\psi_1(\sigma), \dots, \psi_n(\sigma))$, onde $\psi_j(\sigma) = 1$, se $v_j \in \sigma$ e $\psi_j(\sigma) = 0$, caso contrário. Deste modo, podemos obter a Transformada de Fourier de funções reais de um esquema simplicial (consequentemente de funções reais de um complexo simplicial). Para tal, basta se tomar a Transformada de Fourier sobre $L^2(\{0, 1\}^n)$, pois $S \subseteq 2^{S^0}$.

Assim, dada $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir

$$\mathcal{F}(\varphi(\rho)) \doteq \widehat{\varphi}(\rho) = \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma \subset S^0} \varphi(\sigma) \exp\left(-\frac{i2\pi \langle \psi(\rho), \psi(\sigma) \rangle}{2}\right).$$

Mas, notemos que

$$\exp\left(-\frac{i2\pi \langle \psi(\rho), \psi(\sigma) \rangle}{2}\right) = \prod_{i=1}^n \exp(-i\pi \psi_i(\rho) \psi_i(\sigma)).$$

Ainda, para cada $i \notin \sigma$, temos que $\psi_i(\sigma) = 0$, donde podemos reescrever a expressão acima como

$$\prod_{v_i \in \sigma} \exp(-i\pi \psi_i(\rho)) = \prod_{v_i \in \sigma} \psi_i(\rho).$$

Definição 3.23. *Seja S um esquema simplicial, onde $S^0 = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dados $\sigma, \rho \subset S^0$, o caractere de ρ sobre σ , denotado $\chi_\sigma(\rho)$, é dado por $\prod_{v_i \in \sigma} \psi_i(\rho)$.*

3 Teoria de Morse Discreta e Funções de Morse-Fourier

Conclui-se que a transformada de Fourier sobre funções em $L^2(S)$ é dada por

$$\mathcal{F}(\varphi(\rho)) \doteq \widehat{\varphi}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma \subset S^0} \varphi(\sigma) \chi_\sigma(\rho).$$

Pode-se então resumir o resultado acima em

$$\widehat{\varphi}(x) = \mathbb{E}[\varphi(\sigma) \chi_\sigma(x)],$$

para o espaço de probabilidade dado pela distribuição uniforme em $2^{[n]}$.

Definição 3.24. *Sejam S um complexo simplicial com $S^0 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e seja a função monótona $\varphi : \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$, dada por $\varphi(x) = -1$ se $\{v_i : x_i = 1\} \in S$ e $\varphi(x) = 1$, caso contrário. A **transformada de Fourier do esquema simplicial** S é a função $\widehat{S} : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\widehat{S}(x) \doteq \widehat{\varphi}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma \subset [n]} \varphi(\sigma) \chi_\sigma(x).$$

Ocorre que a partir da definição de *link* de um esquema simplicial, podem-se obter algumas informações sobre a transformada de Fourier desse esquema.

Lema 3.25 ([7]). *Sejam S um complexo simplicial com conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$. Os vértices v para os quais $\widehat{S}(\{v\})$ é máxima são os mesmos para os quais $\#lk_S(v)$ é mínimo.*

Demonstração. Por praticidade, durante a demonstração identificaremos o conjunto $\{v_i : i \in J \subset \{1, \dots, n\}\}$ com o próprio conjunto J .

$$\begin{aligned} \widehat{S}(\{v\}) &= \widehat{\varphi}(\{v\}) = \mathbb{E}[\varphi(\sigma) \chi_\sigma(\{v\})] \\ &= 2^{-n} (-\#\{\sigma \subset [n] \mid v \notin \sigma, \sigma \notin S\} + \#\{\sigma \subset [n] \mid v \notin \sigma, \sigma \in S\} \\ &\quad + \#\{\sigma \subset [n] \mid v \in \sigma, \sigma \notin S\} - \#\{\sigma \subset [n] \mid v \in \sigma, \sigma \in S\}). \end{aligned}$$

Como

$$2^{n-1} = \#\{\sigma \subset [n] : v \notin \sigma\} = \#\{\sigma \subset [n] \mid v \notin \sigma, \sigma \notin S\} + \#\{\sigma \subset [n] \mid v \notin \sigma, \sigma \in S\},$$

e

$$\#\{\sigma \subset [n] \mid v \in \sigma, \sigma \notin S\} + \#\{\sigma \subset [n] \mid v \in \sigma, \sigma \in S\} = \#\{\sigma \subset [n] : v \in \sigma\} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1},$$

temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{S}(\{v\}) &= 2^{-n}(-2^{n-1} + \#\{\sigma \subset [n] \mid v \notin \sigma, \sigma \in S\} + \#\{\sigma \subset [n] \mid v \notin \sigma, \sigma \in S\} \\
&\quad + 2^{n-1} - \#\{\sigma \subset [n] \mid v \in \sigma, \sigma \in S\} - \#\{\sigma \subset [n] \mid v \in \sigma, \sigma \in S\}) \\
&= 2^{1-n}(\#\{\sigma \subset [n] \mid v \notin \sigma, \sigma \in S\} - \#\{\sigma \subset [n] \mid v \in \sigma, \sigma \in S\}) \\
&= 2^{1-n}(\#S - 2\#\{\sigma \in S \mid v \in \sigma\}) \\
&= 2^{1-n}(\#S - 2\#\{\sigma \in S \mid v \notin \sigma, \sigma \cup \{v\} \in S\}) \\
&= 2^{1-n}(\#S - 2\#lk_S(v)).
\end{aligned}$$

□

O resultado que obtivemos nos diz quais escolhas de vértices tendem a nos fornecer uma árvore de decisão que minimize a quantidade de simplexes evasivos, ainda que não prove fornecer uma árvore ótima nesse sentido. Assim, podemos definir uma função de Morse discreta que preserve a estrutura de árvore, sem necessariamente nos referirmos à árvore em si.

Função de Morse-Fourier

Definição 3.26. *Seja um esquema simplicial não vazio S com uma ordem total definida no conjunto dos seus vértices, a **função de Morse-Fourier generalizada***

$$f : S \rightarrow \{0, 1, \dots, \#S - 1\}$$

é a função definida recursivamente por

- se $S = \{\emptyset\}$, então $f(\emptyset) = 0$;
- se $S = \{\emptyset, \{x\}\}$, então $f(\emptyset) = 1$ e $f(\{x\}) = 0$;
- finalmente, se $\#S > 2$, tomando-se v , o vértice de menor índice dentre aqueles que satisfazem $\#lk_S(v) = \min\{\#lk_S(u) : u \in S\}$, se $f_{dl} : dl_S(v) \rightarrow [0, \#dl_S(v) - 1]$ e $f_{lk} : lk_S(v) \rightarrow [0, \#lk_S(v) - 1]$ são as funções de Morse-Fourier para a deleção e o link de S , respectivamente, então

$$f(\sigma) = \begin{cases} f_{lk}(\sigma \setminus \{v\}) + \#dl_S(v), & \text{se } v \in \sigma \\ f_{dl}(\sigma), & \text{se } v \notin \sigma. \end{cases}$$

Pelo Lema 3.18, a função de Morse-Fourier generalizada é uma função de Morse discreta.

3 Teoria de Morse Discreta e Funções de Morse-Fourier

No artigo [7], o autor propõe uma alteração na definição acima, que conjectura aumentar a velocidade do algoritmo, baseado no resultado das simulações que executa. O fato que enseja tal mudança é que todo cone é contrátil, logo, uma função de Morse discreta ótima sobre um cone é aquela que torna todos os simplexes, exceto o topo, singulares. Ou seja, evasivos em uma árvore que a induza. Ocorre que, dado um cone CS de topo v , temos $CS = dl_{CS}(v) \cup \{\sigma \cup \{v\} : \sigma \in dl_{CS}(v)\}$, assim, se (v, T_0, T_1) é uma árvore de decisão sobre CS , pela Definição 3.26, se $\sigma \in dl_{CS}(v)$, temos que $f(\sigma) = f_{dl}(\sigma) < \#dl_{CS}(v) \leq f_{lk}(\sigma) + \#dl_{CS}(v) = f(\sigma \cup \{v\})$, ou seja, não está garantida a regularidade dos simplexes. A solução adotada é alterar o algoritmo para, quando obtivermos uma árvore sobre um cone, transformarmos todos os simplexes em regulares e é feita a partir da função a seguir.

Definição 3.27. *Seja CS um cone simplicial finito com topo v , conforme a Definição 1.20. Fixemos uma indexação $dl_S(v) = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{\#S/2-1}\}$, induzida pela ordenação dos vértices de S da seguinte maneira: o primeiro critério de ordem é a dimensão, o segundo é a ordem lexicográfica dos seus vértices. A **função de Morse discreta padrão para cones** é dada por*

$$f(\sigma_i \cup \{v\}) = i$$

e

$$f(\sigma_i) = i + \#S/2, \text{ para } 0 \leq i \leq \#S/2.$$

Por concisão, optamos por não apresentar a demonstração da Proposição a seguir, uma vez que se resume à utilização de técnicas extensamente apresentadas neste texto.

Proposição 3.28. *Uma função que satisfaça a Definição 3.27 é uma função de Morse discreta.*

Definição 3.29. *Seja um esquema simplicial não vazio S com uma ordem total definida no conjunto dos seus vértices, a **função de Morse-Fourier** $f : S \rightarrow \{0, 1, \dots, \#S - 1\}$ é a função definida recursivamente por*

- se $S = \{\emptyset\}$, então $f(\emptyset) = 0$;
- se, por outro lado, S é cone, então f é a função de Morse discreta padrão para cones, onde considera-se como topo, dentre os vértices que satisfazem a propriedade de topo, aquele que primeiro aparecer na ordem definida;
- finalmente, tomando-se v , o vértice de menor índice dentre aqueles que satisfazem $\#lk_S(v) = \min\{\#lk_S(u) : u \in S\}$, se $f_{dl} : dl_S(v) \rightarrow [0, \#dl_S(v) - 1]$ e $f_{lk} : lk_S(v) \rightarrow$

$[0, \#lk_S(v) - 1]$ são as funções de Morse-Fourier para a deleção e o link de S , respectivamente, então

$$f(\sigma) = \begin{cases} f_{lk}(\sigma \setminus \{v\}) + \#dl_S(v), & \text{se } v \in \sigma \\ f_{dl}(\sigma), & \text{se } v \notin \sigma \end{cases}$$

Pode-se encontrar no artigo [7] a discussão que alega que a função de Morse-Fourier acima definida tende a induzir um algoritmo mais rápido em relação à função de Morse-Fourier generalizada, de acordo com simulações realizadas.

3.6 Algoritmo para o Cálculo de Células Críticas

A partir do exposto acima, segue um código feito em linguagem *Python* que toma como entrada um esquema simplicial, ordena seus simplexos e tem como saída um vetor contendo as células críticas do esquema simplicial. Pelas características de tal linguagem, os conjuntos do esquema simplicial são representados como listas, todavia, o código foi feito de modo a preservarem as propriedades de conjuntos, com a vantagem da determinação de uma ordem.

Listing 3.1: Código para o cálculo das células críticas de um complexo simplicial

```
import copy

#dada uma lista de tamanho n, retorna todas as sublistas
#de tamanho n-1
def findSubList1(s):
    aux = []
    for x in s:
        aux.append([y for y in s if y != x])
    return aux

#dada lista [a1, a2, ..., an] e complexo simplicial,
#procura todas as listas do tipo [a1, a2, ..., an, b]
#presentes no complexo simplicial
def findSuperList1(c, s):
    tam = len(s)
    aux = [x for x in c if len(x) == tam+1]
```

```

for i in range(tam):
    aux = [x for x in aux if x[i]==s[i]]
    aux = sorted(aux, key=lambda x: x[tam])
return aux

#dada lista [a1, a2, ..., an] e complexo simplicial,
  procura todas as listas do tipo [a1, a2, ..., b, ... an
  ] presentes no complexo simplicial
def findAnySuperList1(c,s):
    aux = [x for x in c if len(x) == len(s)+1]
    aux2 = []
    for y in aux:
        var = 1
        for j in s:
            if j not in y:
                var = 0
                break
        if var:
            aux2.append(y)
    return aux2

#ordena um complexo simplicial pela quantidade de vertices
  dos simplexos e simplexos de mesmo tamanho sao
  ordenados pela ordem lexicografica dos vertices
  presentes
def ordSimpComplex(c):
    for x in c:
        x.sort()
    maxVertex = len(vertexList(c))
    orden = [[x] for x in vertexList(c)]
    orden2 = copy.deepcopy(orden)
    orden2 = [[]]+orden2
    orden3 = []

    for j in range(maxVertex-1):
        for x in orden:
            orden3 = orden3 + findSuperList1(c,x)

```

```

orden2 = orden2+orden3
orden = copy.deepcopy(orden3)
orden3 = []
return orden2

#recebe um complexo simplicial e um vertice e calcula o
conjunto delete para tal vertice
def delete(c,v):
    aux = []
    for x in c:
        if v not in x:
            aux.append(x)
    return aux

#recebe um complexo simplicial e um vertice e calcula o
conjunto link para tal vertice
def link(c,v):
    aux = delete(copy.deepcopy(c),v)
    for x in aux:
        x.append(v)
        x.sort()
    aux2 = [x for x in aux if x in c]
    for x in aux2:
        x.remove(v)
    del aux
    aux3 = []
    for x in aux2:
        if x not in aux3:
            aux3.append(x)
    del aux2
    return aux3

#recebe um complexo simplicial e computa lista de vertices
def vertexList(c):
    vertex = set()
    for x in c:
        vertex.update(x)
    vertex = list(vertex)

```

3 Teoria de Morse Discreta e Funções de Morse-Fourier

```
    vertex.sort()
    return vertex

#recebe complexo simplicial e testa se e cone, se sim,
#retorna lista de vertices que cumprem os requisitos de
#topo
def coneTest(c):
    tam = len(c)
    apex = []
    for y in vertexList(c):
        if tam == 2*len(link(c,y)):
            apex.append(y)
    if apex == []:
        return False
    else:
        return min(apex)

#recebe complexo simplicial cone, topo e simplexo e
#calcula a funcao de Morse discreta padrao para cones
#para tal simplexo
def morseCone(c,apex,sigma):
    aux = ordSimpComplex(delete(c,apex))
    if apex not in sigma:
        f = aux.index(sigma) + 0.5*len(c)
    else:
        sigma2 = copy.deepcopy(sigma)
        sigma2.remove(apex)
        f = aux.index(sigma2)
    return int(f)

#recebe complexo simplicial e computa vertices para os
#quais o link e minimo
def minLink(c):
    D0 = vertexList(c)
    lk_min = len(c)
    lk_list = []
    for x in D0:
```

```

lk = len(link(c,x))
if lk < lk_min:
    lk_list = [x]
    lk_min = copy.deepcopy(lk)
elif lk == lk_min:
    lk_list = lk_list+[x]
return min(lk_list)

```

#recebe complexo simplicial e simplexo e calcula a funcao de Morse-Fourier para tal simplexo

```

def morseFourier(c, sigma):
    if c == [[]]:
        f = 0
    elif coneTest(c):
        f = morseCone(c, coneTest(c), sigma)
    else:
        v = minLink(c)
        sigma2 = copy.deepcopy(sigma)
        if v in sigma:
            sigma2.remove(v)
            f = morseFourier(link(c,v), sigma2) + len(
                delete(c,v))
        else:
            f = morseFourier(delete(c,v), sigma)
    return f

```

#recebe complexo simplicial, funcao de Morse-Fourier calculada para todos os simplexos e um simplexo especifico e identifica se tal simplexo e uma celular critica

```

def identifyCriticalCell(c,f,s):
    critical = 1
    fts = f[c.index(s)]
    if s != []:
        for x in findSubList1(s):
            if x != [] and f[c.index(x)] >= fts:
                critical = 0
        return critical

```

```

if critical:
    for y in findAnySuperList1(c,s):
        if f[c.index(y)] <= fts:
            critical = 0
        return critical
return critical

#recebe complexo simplicial e computa sua lista de celulas
#criticas
def findCriticalCells(c):
    f = [morseFourier(c,x) for x in c]
    return [x for x in c if identifyCriticalCell(c,f,x)]

```

3.7 Homologia Persistente em Filtrações de Morse

Como visto, a Teoria de Homologia Persistente nos permite identificar quais geradores de homologia são, de certo modo, mais relevantes em uma filtração, enquanto a Teoria de Morse Discreta pode possibilitar a diminuição do número de simplexes em um complexo simplicial sem variar a dimensão dos grupos de homologia. Dada uma filtração simplicial finita $\mathcal{X} = (X_j, K_j)_{j=1}^m$, a cada $1 \leq j \leq m$, podemos construir uma função de Morse discreta $f_j : K_j \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que obtenhamos um complexo simplicial $K'_j \subset K_j$, tal que $H_*(K'_j) \simeq H_*(K_j)$. Ocorre que, dados dois geradores de homologia homólogos entre si e presentes em K_j e em K_l , nada impede que a função f_j conserve um deles em K'_j enquanto a função f_l conserve o outro deles em K'_l , ou seja, podemos ter $j < l$ com $K'_j \not\subset K'_l$, de modo que, em particular, a coleção $(X_j, K'_j)_{j=1}^m$ não constitua uma filtração. Ou seja, as funções f_j devem, de certo modo, fornecer informações para as funções seguintes. Uma primeira ideia é que se $j < l$, demandemos que f_l seja uma extensão de f_j . Ocorre que um simplexo regular em K_j pode ter que necessariamente se tornar crítico em K_{j+1} . Por exemplo, como no caso apresentado na Figura 3.12, onde $K_j = \{\emptyset, [v_0], [v_1], [v_2], [v_0, v_1], [v_0, v_2]\}$ e $K_{j+1} = K_j \cup \{[v_1, v_2]\}$, a função f_j pode considerar $[v_0, v_2]$ regular, mas f_{j+1} deve considerá-lo crítico, uma vez que a sua remoção alteraria a dimensão do primeiro grupo de homologia.

Porém, se um simplexo é regular em K_j , significa que ele recebe valor maior do que outro do qual é face de bordo ou recebe valor menor do que uma face de bordo sua. Nenhuma extensão da função pode mudar isso, ou seja, estender uma função de Morse discreta não pode diminuir a quantidade de simplexes regulares, ainda que isso seja necessário. A solução proposta no artigo [18] é nos restringirmos aos casos onde há retenção de informação nos conjuntos de simplexes críticos e regulares através da filtração, de modo

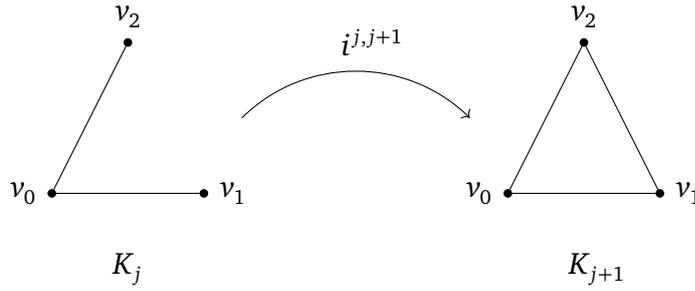


Figura 3.12: Trecho de exemplo de filtração onde um simplexo que pode ser regular deve se tornar crítico.

que tiramos o foco das funções e colocamo-lo nos conjuntos que dela resultam. Neste texto, nos resumiremos a um breve esboço das ideias desse artigo, constituindo apenas em uma instigação de como se pode integrar as duas teorias.

Definição 3.30. *Sejam K um complexo simplicial, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse discreta, \mathcal{A} o conjunto de simplexos críticos por f , $\mathcal{K} = \{\sigma \in K : \exists \rho \in \partial \sigma, \text{ com } f(\rho) \geq f(\sigma)\}$ e $\mathcal{L} = \{\sigma \in K : \exists \tau, \text{ com } \sigma \in \partial \tau \text{ e } f(\sigma) \geq f(\tau)\}$. Sabemos que existe uma bijeção $w : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$. Neste caso, o par $(\mathcal{A}, w : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L})$ é dito **pareamento acíclico** em K .*

Podem se definir pareamentos acíclicos independentemente de funções de Morse discretas, ainda que ambos os conceitos tenham definições intimamente ligadas. Um estudo deste conceito pode ser encontrado em [8]. No que segue, não nos preocuparemos em qual função gera um pareamento acíclico.

Definição 3.31. *Seja uma filtração simplicial $\mathcal{X} = (X_j, K_j)_{j=1}^m$, uma **filtração de Morse** associada a \mathcal{X} é uma coleção de pareamentos acíclicos $\mathcal{M} = (\mathcal{A}_j, w_j : \mathcal{K}_j \rightarrow \mathcal{L}_j)$ em K_j , com a seguinte estrutura adicional:*

- $\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{j+1}$, $\mathcal{K}_j \subset \mathcal{K}_{j+1}$ e $\mathcal{L}_j \subset \mathcal{L}_{j+1}$;
- $w_j \equiv w_{j+1}|_{\mathcal{K}_j} : \mathcal{K}_j \rightarrow \mathcal{L}_j$.

A demonstração do Teorema a seguir pode ser encontrada em [18].

Teorema 3.32. *Seja uma filtração simplicial $\mathcal{X} = (X_j, K_j)_{j=1}^m$, e uma filtração de Morse associada $\mathcal{M} = (\mathcal{A}_j, w_j : \mathcal{K}_j \rightarrow \mathcal{L}_j)$ em K_j , então para cada $n \in \mathbb{Z}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, temos que*

$$H_n(K_j) \simeq H_n(\mathcal{A}_j).$$

A Módulos

As demonstrações omitidas nesta seção podem ser encontradas em [22].

Definição A.1. *Seja R um anel comutativo com unidade. Um R -módulo (ou módulo sobre R) é um conjunto não vazio M munido de duas operações. A primeira, denominada **adição**, denotada por $+$, associa a cada par $(u, v) \in M \times M$ um elemento $u + v \in M$. A segunda operação, denominada **justaposição** (ou **produto**), associa a cada par $(r, u) \in R \times M$, um elemento $ru \in M$. Tais operações se dão de modo que*

1. $(M, +)$ forma um grupo abeliano.
2. Para cada $r, s \in R, u, v \in M$, temos que:
 - $1u = u$;
 - $(rs)u = r(su)$;
 - $(r + s)u = ru + su$;
 - $r(u + v) = ru + rv$.

Os elementos de R são ditos **escalares**. Se R for um corpo, a noção de R -módulo coincide com a noção de R -espaço vetorial.

Exemplo A.2. *Sejam $M = \mathbb{R}^2$ munido da adição usual e $R = \mathbb{Z}$, definindo $\forall (x, y) \in M, \forall r \in R, r(x, y) = (rx, ry)$, onde rx e ry são calculados pela multiplicação usual em \mathbb{R} , então \mathbb{R}^2 é um \mathbb{Z} -módulo.*

São análogas para módulos as definições de combinação linear e conjunto linearmente independente daquelas para espaços vetoriais.

Definição A.3. *Um subconjunto S de um R -módulo M é um **submódulo** de M se, quando munido das operações de adição e justaposição, restritas a M , satisfaz a definição de módulo.*

Pode-se provar que um subconjunto não vazio S de um R -módulo M é um submódulo se, e somente se $\forall r, s \in R, \forall u, v \in S, ru + sv \in S$.

Definição A.4. Seja M um R -módulo. Diremos que M é a soma direta dos submódulos S_1, \dots, S_n se cada $v \in M$ puder ser escrito de modo único (exceto pela ordem) como a soma de n elementos, cada um oriundo de um dos submódulos. Neste caso, indica-se

$$M = S_1 \oplus \dots \oplus S_n = \bigoplus_{i=1}^n S_i.$$

Definição A.5. Dado um subconjunto S de um R -módulo M , o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S ,

$$\text{ger}(S) \doteq \{r_1 v_1 + \dots + r_n v_n : r_i \in R, v_i \in S\},$$

pode ser facilmente provado como um submódulo de M e é dito **submódulo gerado** por S .

Além disso, $S \subset M$ é dito um **subconjunto gerador** de M , se $M = \text{ger}(S)$, ou seja, se $\forall v \in M, \exists r_1, \dots, r_n \in R, v_1, \dots, v_n \in S$ tal que $v = r_1 v_1 + \dots + r_n v_n$, enquanto M é dito **finitamente gerado**, se existe um subconjunto finito que o gere. Finalmente, um subconjunto linearmente independente que gere M é dito **base** do módulo. É importante destacar que nem todo módulo possui base.

Definição A.6. Um R -módulo M é dito **livre** se possui base.

Pode-se provar que se R é um anel comutativo com unidade, quaisquer duas bases de um R -módulo M livre têm o mesmo tamanho.

Definição A.7. Dado um R -módulo livre M , a cardinalidade de uma base qualquer de M é denominada **posto** de M e denotada por $\text{rk}(M)$.

Teorema A.8. Dado M um módulo livre sobre um domínio de ideais principais (DIP) R , então todo submódulo S de M também é livre. Além disso, $\text{rk}(S) \leq \text{rk}(M)$.

Definição A.9. Sejam M e N R -módulos. A função $\tau : M \rightarrow N$ é dita um **homomorfismo** se $\forall r, s \in R, \forall u, v \in M, \tau(ru + sv) = r\tau(u) + s\tau(v)$. O conjunto dos homomorfismos de M em N é denotado $\text{Hom}(M, N)$. Temos ainda que um homomorfismo bijetivo é dito **isomorfismo**.

Dado um homomorfismo $\tau \in \text{Hom}(M, N)$, temos que o **núcleo** e a **imagem** de τ são definidos, respectivamente, por

$$\ker(\tau) = \{v \in M \mid \tau(v) = 0\}$$

$$\text{im}(\tau) = \{\tau(v) \mid v \in M\}.$$

Proposição A.10. Sejam M e N R -módulos, e $\tau \in \text{Hom}(M, N)$, então $\ker(\tau)$ é submódulo de M e $\text{im}(\tau)$ é submódulo de N .

Definição A.11. *Sejam S um submódulo de um R -módulo M e a seguinte relação de equivalência sobre M , $u \sim v \iff u - v \in S$, de modo que dado $v \in M$, a classe de equivalência de v é $\bar{v} = v + S = \{v + s : s \in S\}$. Então, o conjunto M/S das classes de equivalências de M por S , denominado o **módulo quociente** de M sobre S .*

Pode-se provar que M/S é um R -módulo, quando munido das operações

$$(u + S) + (v + S) \doteq (u + v) + S;$$

$$r(u + S) \doteq ru + S.$$

Proposição A.12. *Se M é um R -módulo finitamente gerado e S é um submódulo, então o módulo quociente M/S é finitamente gerado.*

B Homotopia

O conceito de homotopia possibilita definir uma equivalência entre espaços topológicos que é, de certo modo, mais geral do que o de homeomorfismo. Ocorre que alguns invariantes por homeomorfismos também são invariantes entre espaços homotopicamente equivalentes donde alguns serão fundamentais para o estudo da homologia.

Observação B.1. Durante esta seção, I denotará o intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ munido da topologia usual de subespaço.

Definição B.2. Dados X e Y espaços topológicos, duas funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são ditas **homotópicas** se existe uma função contínua $H : X \times I \rightarrow Y$, com $X \times I$ munido da topologia produto, tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x), \forall x \in X$. Neste caso, H é dita **homotopia** entre f e g . Denota-se $H : f \cong g$ ou apenas $f \cong g$.

Observação B.3. O conceito de homotopia entre funções contínuas pode ser interpretado, de forma intuitiva, como uma espécie de deformação contínua de uma função f em uma função g , onde t é um parâmetro temporal e H define o estado da deformação em cada instante intermediário.

Exemplo B.4. Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções constantes entre espaços topológicos com $p, q \in Y$, tais que $f(x) = p$ e $g(x) = q, \forall x \in X$. Então, f e g são homotópicas se, e somente se p e q pertencem à mesma componente conexa por caminhos de Y .

De fato, se existe um caminho $a : I \rightarrow Y$ tal que $a(0) = p$ e $a(1) = q$, então pode-se definir uma homotopia $H : X \times I \rightarrow Y$ fazendo $H(x, t) = a(t), \forall x \in X, \forall t \in I$. Por outro lado, se H é uma homotopia entre as funções constantes $f(x) = p$ e $g(x) = q$, então, basta fixar $x_0 \in X$ e obteremos um caminho $a : I \rightarrow Y$ conectando p em q ao definir $a(t) = H(x_0, t), \forall t \in I$.

Proposição B.5. Sejam X e Y espaços topológicos, então a relação de homotopia $f \cong g$ é uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas de X para Y .

Demonstração. De fato, \cong é reflexiva, pois dada uma função contínua $f : X \rightarrow Y$, fazendo $H : X \times I \rightarrow Y$ definida por $H(x, t) = f(x), \forall t \in I$, então H é homotopia entre f e f .

B Homotopia

Além disso, \cong é simétrica, pois, sejam $f, g : X \rightarrow Y$ contínuas e $H : X \times I \rightarrow Y$ homotopia entre elas, definindo $K : X \times I \rightarrow Y$ por $K(x, t) = H(x, 1 - t)$, $\forall x \in X, \forall t \in I$, então K é homotopia entre g e f , ou seja, $f \cong g \implies g \cong f$.

Finalmente, \cong é transitiva, pois se $H : f \cong g$ e $K : g \cong h$, então, fazendo $L : X \times I \rightarrow Y$ como

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(x, 2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases},$$

então L é uma homotopia entre f e h , ou seja, $f \cong g, g \cong h \implies f \cong h$. □

Definição B.6. *Um função contínua $f : X \rightarrow Y$ entre dois espaços topológicos é dita **equivalência homotópica** se existe uma outra função contínua $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \cong id_X$ e $f \circ g \cong id_Y$. Neste caso, diz-se que g é uma homotopia inversa de f , também que X e Y são **homotopicamente equivalentes** ou têm o mesmo **tipo de homologia** e indica-se por $f : X \equiv Y$, ou apenas por $X \equiv Y$.*

Observação B.7. *Pode-se notar que \equiv é uma relação de equivalência.*

Observação B.8. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo, então, denotando a inversa de f por $g : Y \rightarrow X$, tem-se que $f \circ g = id_Y$ e $g \circ f = id_X$, logo, espaços homeomorfos são homotopicamente equivalentes. Segue um contraexemplo para a recíproca.*

Exemplo B.9. *A esfera de raio unitário S^n é homotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. De fato, sejam a inclusão $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ tal que $i(x) = x$ e a projeção radial $r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n$ tal que $r(y) = \frac{y}{|y|}$, temos que $r \circ i = id_{S^n}$ (em particular são homotópicas, pois a homotopia é reflexiva). Além disso, $i \circ r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ é homotópica à função identidade em $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, pois fazendo $H : (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ de modo que $H(x, t) = tx + (1 - t)\frac{x}{|x|}$, temos que $H(0, t)$ é a função identidade e $H(1, t) = r \circ i$.*

Há alguns tipos de homotopia entre espaços topológicos que permitem tomar como equivalentes espaços de complexidades muito distintas do ponto de vista geométrico e computacional.

Definição B.10. *Um espaço topológico é dito **contrátil** se é homotopicamente equivalente a um ponto.*

Proposição B.11. *Um espaço topológico X é contrátil se, e somente se, a função identidade de X em X é homotópica a uma função constante de X em X .*

Demonstração. De fato, seja $f : X \rightarrow \{p\} \subset X$ uma equivalência homotópica então existe $g : \{p\} \rightarrow X$ tal que $g \circ f \cong id_X$, além disso, pode-se notar que $g \circ f$ é uma função constante. Por outro lado, seja $k : X \rightarrow X$ com $k(x) = p \in X$ fixado $\forall x \in X$, tal que $k \cong id_X$, então $X \equiv k \circ id_X(X) = \{p\}$. □

Observação B.12. No caso da proposição anterior, $\{p\}$ é dito um **retrato por contração** de X .

Exemplo B.13. (Estrela) Um subconjunto X de um espaço vetorial normado X é chamado de estrela com vértice p quando para cada $x \in X$, o segmento $[p, x]$ está contido em X . Seja X uma estrela com vértice em p , então $H : X \times I \rightarrow X$ com $H(x, t) = (1 - t)x + tp$ é uma homotopia entre id_X e o mapa constante $k : X \rightarrow \{p\}$. Conclui-se que toda estrela é contrátil. Por exemplo, o disco D^2 é homotopicamente equivalente à origem de \mathbb{R}^2 .

Definição B.14. Dados um espaço topológico X e Y um subespaço de X , uma função contínua $r : X \rightarrow Y$ é chamada **retração** se $r(X) = Y$ e $r|_Y = id_Y$. Se para Y subespaço de X existe uma retração, Y é dito um **retrato** de X .

Exemplo B.15. Dado X espaço topológico, se $X = X_1 \cup X_2$ e $X_1 \cap X_2 = \{p\}$, então ambos X_1 e X_2 são retratos de X . Deformar um espaço contrátil a um ponto que a ele seja homotopicamente equivalente é um caso particular de retração.

Definição B.16. Dados um espaço topológico X , um subespaço Y e uma retração r com $r(X) = Y$, então Y é dito um **retrato por deformação** de X se existe homotopia entre r e id_X .

Proposição B.17. Dado um espaço topológico X , se um subespaço Y é um retrato por deformação de X , então $X \cong Y$. De fato, seja $r : X \rightarrow Y$ uma retração e tomemos como homotopia inversa a inclusão $i : Y \rightarrow X$, então temos que $r \circ i = id_Y$. Por outro lado, $i \circ r = r \cong id_X$, cuja equivalência homotópica advém de Y ser um retrato por deformação de X .

Exemplo B.18. Seja $X = S^1 \cup A \subset \mathbb{R}^2$, onde $A = [1, 2] \times \{0\}$, munido da topologia de subespaço. Seja ainda o retrato $r : X \rightarrow S^1$ tal que $r(x) = \begin{cases} x, x \in S^1 \\ (1, 0), x \in A \end{cases}$, temos que

$H : X \times I \rightarrow X$ tal que $H(x, t) = (1 - t)id_X(x) + t \frac{id_X(x)}{\|id_X(x)\|}$ é uma homotopia entre r e id_X . De fato, é imediato que $H(x, 0) = id_X(x)$, além disso, se $x \in S^1$, então $\|x\| = 1$ e $H(x, 0) = id_X(x) = x = r(x)$, por outro lado, se $x \in A$, então $\exists v \in [1, 2]$ tal que $x = (v, 0)$, logo, $\|x\| = v$ e então $H(x, 1) = \frac{1}{v}(v, 0) = (1, 0) = r(x)$. Conclui-se que $X \cong S^1$.

C

Noções básicas de categorias

Definição C.1. Uma *categoria* \mathcal{C} é uma estrutura dada por

- uma coleção de **objetos**, indicada por $\text{Ob}(\mathcal{C})$;
- para cada $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, uma coleção $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ de **morfismos**, ou **flechas** de A para B ;
- para cada $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, um elemento $1_A \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ denominado **identidade** de A ;
- para cada $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, uma função denominada **composição** dada por

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

$$(g, f) \mapsto g \circ f,$$

também indicado apenas por gf , satisfazendo os axiomas:

- **associatividade:** dados $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ e $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$, temos $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;
- **elemento neutro:** para cada $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, temos $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.

Exemplo C.2. A categoria **Set** tem como objetos os conjuntos e como morfismos as funções. A categoria **Grp** tem como objetos os grupos e como morfismos os homomorfismos de grupos. A categoria **Top** tem como objetos os espaços topológicos e como morfismos as funções contínuas.

Definição C.3. Dada uma categoria \mathcal{C} , um morfismo $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é um **isomorfismo** se existir um morfismo $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ tal que $gf = 1_A$ e $fg = 1_B$. Neste caso, g é dita **inversa** de f .

Definição C.4. Dadas \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias, um **funtor** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma estrutura definida por:

- uma função $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$, indicada por $A \mapsto F(A)$;
- Dados $A, B \in \mathcal{C}$, uma função $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$, indicada por $f \mapsto F(f)$,

de modo que:

- preserva associatividade, ou seja, para cada $f \circ g$ composição em \mathcal{C} , temos que $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$;
- preserva identidade, ou seja, para cada $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, temos que $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Definição C.5. Dados dois funtores, $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, uma **transformação natural** é uma aplicação que a cada objeto $X \in \mathcal{C}$, associa um morfismo $\eta(X) : F(X) \rightarrow G(X)$ em \mathcal{D} , de modo que o diagrama a seguir é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow \eta(X) & & \downarrow \eta(Y) \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

Definição C.6. Seja R um anel associativo com unidade e A um R -módulo, o funtor

$$F_A = \text{Hom}_R(\bullet, A) : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

da categoria de R -módulos à categoria de grupos abelianos se dá da seguinte forma:

- associa a cada R -módulo $B \in \text{Ob}(\mathbf{R-Mod})$ o grupo abeliano $F_A(B) = \text{Hom}_R(B, A)$ dado por todos os homomorfismos de R -módulos de B para A , ou seja, $F_A(B) \in \text{Ob}(\mathbf{Ab})$;
- associa a cada homomorfismo de R -módulo $g : B \rightarrow C$, um homomorfismo de grupo $F_A g : \text{Hom}_R(C, A) \rightarrow \text{Hom}_R(B, A)$, tal que se $h : C \rightarrow A$, então $F_A g(h) = h \circ g : B \rightarrow C \rightarrow A$, ou seja, $F_A g \in \text{Mor}_{\mathbf{Ab}}(F_A(C), F_A(B))$.

D

Teorema de Krull-Remak-Schmidt para A_n -quivers lineares

Provaremos aqui que toda representação finito-dimensional de um A_n -quiver linear pode ser decomposta como soma direta de representações indecomponíveis, de certo modo, única. Antes, será necessária a compreensão de como uma representação herda dos espaços vetoriais a propriedade de decomposição em autoespaços generalizados, o que permite classificarmos os endomorfismos de representações entre invertíveis e nilpotentes e também provarmos a existência da soma direta. Com isto, ao analisarmos o espaço dos endomorfismos de uma representação como um anel, provaremos que esta tem como único ideal maximal o conjunto dos endomorfismos não invertíveis, ou seja é um anel local, e é tal característica que permite a identificação da unicidade da soma direta ao particularizar o isomorfismo entre duas somas diretas de representações a isomorfismos entre os termos das somas. Tais resultados também podem ser encontrados em [6].

Seja W um espaço vetorial finito-dimensional sobre um corpo \mathbb{K} e $A : W \rightarrow W$ um endomorfismo, dado $\lambda \in \mathbb{K}$, o autoespaço generalizado de λ é dado por

$$W_\lambda \doteq \{w \in W : \exists N > 0, \text{ tal que } (A - \lambda \mathbb{1}_W)^N(w) = 0\}.$$

Temos que W pode ser decomposto na soma direta de autoespaços generalizados, ou seja,

$$W = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} W_\lambda.$$

A demonstração da afirmação acima pode ser encontrada em [22]. Podemos estender tal resultado para representações de quivers.

Proposição D.1. *Sejam Q um A_n -quiver, $w \in \text{Ob}(\text{rep}_{\mathbb{K}}(Q))$ e $\phi : w \rightarrow w$ um homomorfismo. Então para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, existe uma subrepresentação w_λ , tal que*

$$w \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} w_\lambda.$$

Demonstração. Podemos escrever $\phi = (\phi_i : V_w(v_i) \rightarrow V_w(v_i) | 1 \leq i \leq n)$. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v_i \in V(Q)$, seja $(V_w(v_i))_\lambda$ o autoespaço generalizado da transformação linear ϕ_i , para o autovalor λ . Temos, então, que dado $x \in V_w(v_i)$, pela discussão anterior, existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tal que $x \in (V_w(v_i))_\lambda$, disto, $(\phi_i - \lambda \mathbb{1})^N(x) = 0$, para algum $N > 0$. Pela comutatividade, temos que $\phi_{i+1} \circ E_w(e_i) = E_w(e_i) \circ \phi_i$. Dos dois últimos fatos,

$$0 = E_w(e_i)(\phi_i - \lambda \mathbb{1})^N(x) = (\phi_{i+1} - \lambda \mathbb{1})^N E_w(e_i)(x),$$

donde segue que $E_w(e_i)(x) \in (V_w(v_{i+1}))_\lambda$. Ou seja, para cada $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$E_w(e_i)(V_w(v_i)_\lambda) \subseteq (V_w(v_{i+1}))_\lambda.$$

Assim, podemos definir uma sub-representação w_λ , onde E_{w_λ} é a coleção de restrições de $E_w(e_i)$ pelos autoespaços e $V_{w_\lambda}(v_i) = (V_w(v_i))_\lambda$. Ainda, para cada $v_i \in V(Q)$, temos que

$$V_w(v_i) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} (V_w(v_i))_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V_{w_\lambda}(v_i).$$

□

Corolário D.2. *Se w é uma representação indecomponível e $\phi \in \text{Hom}_Q(w, w)$, então existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\phi - \lambda \mathbb{1}$ é nilpotente.*

Demonstração. Se w é indecomponível, então pelo visto acima, $w = w_\lambda$ para algum $\lambda \in \mathbb{K}$. Seja $\{\sigma_{i,j}\}_{j \in B_i}$ a base de $V_w(v_i)$, basta tomar $N_{i,j} = \min\{M \in \mathbb{N}^* : (\phi_i - \lambda \mathbb{1})^M(\sigma_{i,j}) = 0\}$ e $N = \max\{N_{i,j} : 1 \leq i \leq n, j \in B_i\}$, que é finito, pois temos finitos espaços vetoriais, cada qual com base finita, assim, $(\phi - \lambda \mathbb{1})^N = 0$ □

Para uma representação w de Q , o espaço $\text{Hom}_Q(w, w)$ pode ser caracterizado como um anel. Provaremos que é um anel local, ou seja tem um único ideal maximal. Em [2], podemos encontrar a demonstração de que, em um anel local, o produto de dois elementos não invertíveis quaisquer é ele também não invertível.

Corolário D.3. *Seja w uma representação indecomponível. Para cada $\phi \in \text{Hom}_Q(w, w)$, temos que ϕ é invertível ou nilpotente. O conjunto \overline{H}_w dos elementos não invertíveis de $\text{Hom}_Q(w, w)$ são o único ideal maximal de $\text{Hom}_Q(w, w)$ e $\text{Hom}_Q(w, w)/\overline{H}_w \cong \mathbb{K}$. Em particular, $\text{Hom}_Q(w, w)$ é um anel local.*

Demonstração. Seja $\phi \in \text{Hom}_Q(w, w)$, então pelo Corolário D.2, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\phi - \lambda \mathbb{1}$ é nilpotente. Se $\lambda = 0$, então ϕ é nilpotente. Se $\lambda \neq 0$, então $\lambda \mathbb{1}$ é invertível, então $\phi = (\phi - \lambda \mathbb{1}) + \lambda \mathbb{1}$ é invertível.

Se $\phi \in \overline{H}_w$ e $\psi \in \text{Hom}_Q(w, w)$, então ϕ não é invertível, logo, $\psi\phi$ e $\phi\psi$ não são invertíveis, donde temos que pertencem a \overline{H}_w , ou seja, \overline{H}_w é um ideal. Tal ideal é maximal, pois todo elemento fora de \overline{H}_w é invertível. A composição $\mathbb{K} \rightarrow \text{Hom}_Q(w, w) \rightarrow \text{Hom}_Q(w, w)/\overline{H}_w$ é um isomorfismo. \square

Ainda, antes do principal teorema desta seção, é necessária a apresentação de um lema técnico.

Lema D.4. *Sejam u_1, u_2, w_1, w_2 representações de Q e*

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} \end{pmatrix} : u_1 \oplus u_2 \rightarrow w_1 \oplus w_2$$

um isomorfismo, onde $\phi_{i,j} : u_j \rightarrow w_i$. Se $\phi_{1,1}$ é um isomorfismo, então u_2 é isomorfo a w_2 .

Demonstração. Seja

$$\psi = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{w_1} & 0 \\ -\phi_{2,1}\phi_{1,1}^{-1} & \mathbb{1}_{w_2} \end{pmatrix}.$$

Então temos que

- $(\psi\phi)_{1,1} = \mathbb{1}_{w_1}\phi_{1,1} + 0\phi_{2,1} = \phi_{1,1}$,
- $(\psi\phi)_{1,2} = \mathbb{1}_{w_1}\phi_{1,2} + 0\phi_{2,2} = \phi_{1,2}$,
- $(\psi\phi)_{2,1} = -\phi_{2,1}\phi_{1,1}^{-1}\phi_{1,1} + \mathbb{1}_{w_2}\phi_{2,1} = -\phi_{2,1} + \phi_{2,1} = 0$,
- $(\psi\phi)_{2,2} = -\phi_{2,1}\phi_{1,1}^{-1}\phi_{1,2} + \mathbb{1}_{w_2}\phi_{2,2} = \phi_{2,2} - \phi_{2,1}\phi_{1,1}^{-1}\phi_{1,2}$.

Disto,

$$\begin{aligned} \det(\psi\phi) &= \phi_{1,1}(\phi_{2,2} - \phi_{2,1}\phi_{1,1}^{-1}\phi_{1,2}) - \phi_{1,2} \cdot 0 \\ &= \phi_{1,1}\phi_{2,2} - \phi_{2,1}\phi_{1,1}\phi_{1,1}^{-1}\phi_{1,2} = \phi_{1,1}\phi_{2,2} - \phi_{2,1}\phi_{1,2} = \det(\phi) \neq 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\psi\phi$ é invertível, donde $(\psi\phi)_{2,2} : u_2 \rightarrow w_2$ é um isomorfismo. \square

Definição D.5. *Dada uma representação u de um A_n -quiver Q , tal que $V(Q) = \{v_1, \dots, v_n\}$, o vetor **dimensão da representação** u é o vetor*

$$\underline{\dim}(u) \doteq (\dim(V_u(v_1)), \dots, \dim(V_u(v_i)), \dots, \dim(V_u(v_n))) \in \mathbb{N}^n.$$

D Teorema de Krull-Remak-Schmidt para A_n -quivers lineares

Ainda, definimos

$$|u| = \sum_{i=1}^n \dim(V_u(v_i)).$$

Teorema D.6. (Krull, Remak, Schmidt). Dados um A_n -quiver linear Q e um corpo \mathbb{K} , uma representação finito-dimensional u sobre \mathbb{K} pode ser decomposta na soma direta

$$u = u_1 \oplus u_2 \oplus \cdots \oplus u_r,$$

onde cada u_k é indecomponível, ou seja, não pode ser expresso como soma direta de duas representações não triviais. Além disso, a decomposição de uma representação finito-dimensional é única a menos de permutação dos termos e isomorfismos. De forma mais precisa, se

$$u_1 \oplus u_2 \oplus \cdots \oplus u_r \cong w_1 \oplus w_2 \oplus \cdots \oplus w_s,$$

então $r = s$ e existe uma permutação ρ de $\{1, \dots, r\}$, tal que u_i é isomorfo a $w_{\rho(i)}$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.

Demonstração. Provaremos por indução em $|u|$ o fato de que uma representação u pode ser dada como soma direta de representações indecomponíveis. Se $|u| = 1$, então existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $V_u(v_j) = \mathbb{K}$ e $V_u(v_i) = 0$, para cada $i \neq j$, ou seja, u é indecomponível. Suponhamos que $|u| > 1$ e que a afirmação seja válida para cada representação v tal que $|v| < |u|$. Se u é indecomponível, então o resultado é direto. Se u é, por outro lado, decomponível, então $\exists w, z \in \text{Ob}(\text{rep}_{\mathbb{K}}(Q))$ não triviais, tais que $u = w \oplus z$. Logo, $\underline{\dim}(u) = \underline{\dim}(w) + \underline{\dim}(z)$, donde $|u| = |w| + |z|$. Como $0 < |w|, |z| < |u|$, da hipótese indutiva, w e z são dados pela soma direta de representações indecomponíveis, logo, u também o é, de modo que se completa a prova por indução.

Provemos agora a unicidade de tal representação. Suponhamos que

$$\phi = (\phi_{i,j} : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r) : w_1 \oplus \cdots \oplus w_r \rightarrow z_1 \oplus \cdots \oplus z_s$$

é um isomorfismo, onde $w_1, \dots, w_r, z_1, \dots, z_s$ são representações indecomponíveis de Q e $\phi_{i,j} \in \text{Hom}_Q(w_j, z_i)$. Provaremos por indução em r . Se $r = 1$, da indecomponibilidade de w_1 , temos o resultado. Suponhamos que o resultado se verifica para todo $p < r$ e definamos $\eta = \phi^{-1}$, então $\eta = (\eta_{j,i})$, onde $\eta_{j,i} \in \text{Hom}_Q(z_i, w_j)$. Temos que $\sum_{i=1}^s \eta_{r,i} \phi_{i,r} = \mathbb{1}_{w_r}$. Seja \overline{H}_{w_r} o único ideal maximal do anel local $\text{Hom}_Q(w_r, w_r)$, como definido em D.3. Como $\mathbb{1}_{w_r} \notin \overline{H}_{w_r}$, então existe $i \in \{1, \dots, s\}$ tal que $\eta_{r,i} \phi_{i,r} \notin \overline{H}_{w_r}$. Podemos tomar uma reindexação da coleção dos z_1, \dots, z_s , de modo que $\eta_{r,s} \phi_{s,r} \notin \overline{H}_{w_r}$, ou seja, $\eta_{r,s} \phi_{s,r}$ é invertível. Como $\phi_{s,r} \eta_{r,s}$ não pode ser nilpotente, ele deve ser invertível (também pelo

visto em D.3), ou seja, $\phi_{s,r}$ é um isomorfismo. Definamos

$$\bar{w}_1 = w_r, \bar{z}_1 = z_s, \bar{w}_2 = w_1 \oplus \cdots \oplus w_{r-1} \text{ e } \bar{z}_2 = z_1 \oplus \cdots \oplus z_{s-1},$$

além disso, definamos

$$\bar{\phi}_{1,1} = \phi_{s,r} \in \text{Hom}_Q(\bar{w}_1, \bar{z}_1),$$

$$\bar{\phi}_{1,2} = \sum_{i=1}^{r-1} \phi_{1,i} \in \text{Hom}_Q(\bar{w}_2, \bar{z}_1),$$

$$\bar{\phi}_{2,1} = \bigoplus_{i=1}^{z-1} \phi_{i,1} \in \text{Hom}_Q(\bar{w}_1, \bar{z}_2),$$

$$\bar{\phi}_{2,2} = (\phi_{i,j} : 1 \leq i \leq s-1, 1 \leq j \leq r-1) \in \text{Hom}_Q(\bar{w}_2, \bar{z}_2).$$

Então, aplicando o Lema D.4 no isomorfismo $\bar{\phi} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{1,1} & \bar{\phi}_{1,2} \\ \bar{\phi}_{2,1} & \bar{\phi}_{2,2} \end{pmatrix} : \bar{w}_1 \oplus \bar{w}_2 \rightarrow \bar{z}_1 \oplus \bar{z}_2$, temos que $\bar{w}_2 \cong \bar{z}_2$, ou seja, $w_1 \oplus \cdots \oplus w_{r-1} \cong z_1 \oplus \cdots \oplus z_{s-1}$. Pela hipótese indutiva, $p-1 = r-1$, ou seja, $p = r$. Rearranjando z_1, \dots, z_{p-1} , temos que w_i é isomorfo a z_i para todo $i \in \{1, \dots, p\}$. \square

E

Teorema de Gabriel

De acordo com as referências dessa seção ([1], [6] e [24]), dados quivers finitos, se classificamos as representações finito-dimensionais, de modo que cada classe seja composta das representações que são isomorfas entre si, o Teorema de Gabriel possibilita uma descrição dessas classes, para quivers que possuem uma quantidade finita delas, os chamados quivers de tipo finito. Isto é feito em duas etapas. A primeira, apesar da definição de quiver finito não apresentar imediatamente uma forma intuitiva de caracterizá-los, consiste em classificá-los utilizando, de forma surpreendente, relativamente poucos e simples tipos de quivers, os chamados quivers de Dynkin do tipo ADE. A segunda consiste na definição de uma forma quadrática que opera em representações um quiver, mais precisamente no vetor de dimensões, e a compreensão da relação entre as raízes dessa forma e as classes de representações, o que é facilitado pelo fato de termos uma descrição precisa dos quivers de tipo finito.

Como vimos, as representações são determinadas pelos espaços vetoriais que são associados aos vértices e pelos homomorfismos que são associados às arestas. Os espaços vetoriais, a menos de isomorfismo, são caracterizados pela escolha de $n \in \mathbb{N}$ na atribuição de \mathbb{K}^n em cada vértice. Assim, para o estudo das representações, iniciemos com a definição de uma forma quadrática que opera sobre cada representação de quiver justamente no seu vetor dimensão, com o objetivo de que esta capture as características dimensionais de cada representação.

Observação E.1. Ainda que nosso objetivo sejam os A_n -quivers lineares, na literatura é mais comum se encontrar a demonstração para casos mais gerais. É o caso das referências que embasam esta seção. Sendo assim, consideraremos durante esta seção Q como um quiver finito dado por $(V(Q), E(Q), \psi_Q)$, onde $V(Q) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Ainda, dado $e \in E(Q)$, indicaremos por $t(e)$ e $h(e)$ os índices dos pontos inicial e final de e , respectivamente, ou seja, $\psi_Q(e) = (v_{t(e)}, v_{h(e)})$.

Definição E.2. A **forma de Euler** de um quiver Q é a forma bilinear $\langle -, - \rangle_Q : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$\langle x, y \rangle_Q = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{e \in E(Q)} x_{t(e)} y_{h(e)}.$$

E Teorema de Gabriel

A expressão simétrica $(x, y)_Q = \langle x, y \rangle_Q + \langle y, x \rangle_Q$ é chamada **forma simétrica de Euler** ou **forma de Cartan**.

Definição E.3. A **forma de Tits** é a forma quadrática q_Q associada à forma de Euler de um quiver, ou seja,

$$q_Q(x) = \langle x, x \rangle_Q = \frac{1}{2}(x, x)_Q$$

Definição E.4. Temos que $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ é dito uma **raiz da forma de Tits** se $q_Q(\mathbf{x}) = 1$. Neste caso, se $x_i \leq 0, \forall i$, então é dito **raiz positiva da forma de Tits**, se $x_i \geq 0, \forall i$, então é dito **raiz negativa da forma de Tits**.

O conjunto das raízes é denotado por Φ , das raízes positivas por Φ_+ e das negativas por Φ_- .

Definição E.5. Seja q uma forma quadrática:

- q é chamada **positivo definida** se $q(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- q é chamada **positivo semi-definida** se $q(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Definiremos então o que é um quiver conexo, que é o tipo sobre o qual trabalharemos, uma vez que se um quiver não é conexo, basta analisarem-se suas componentes conexas separadamente, o que foge aos objetivos deste texto.

Definição E.6. Um **quiver conexo** Q é aquele no qual para cada $a, b \in V(Q)$, com $a \neq b$, existe uma sequência finita de elementos de $V(Q)$, indicada por (a_0, a_1, \dots, a_n) , com $a_0 = a$ e $a_n = b$, tal que, para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$, tenhamos que $(a_i, a_{i+1}) \in \text{im } \psi_Q$, ou que $(a_{i+1}, a_i) \in \text{im } \psi_Q$.

O próximo lema pode ser demonstrado basicamente a partir da manipulação algébrica dos somatórios que definem a forma de Tits, de modo que, por concisão, optamos por não apresentá-la aqui, mas pode ser encontrada em [24].

Lema E.7. Sejam Q quiver conexo e $\mathbf{d} = (d_i) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ tal que $(\mathbf{d}, \mathbf{x})_Q = 0$, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$. Então

- q_Q é positivo semi-definida.
- $d_i \neq 0, \forall i$.
- $q_Q(\mathbf{x}) = 0$ se, e somente se, $\mathbf{x} = \frac{a}{b}\mathbf{d}$, para algum par de inteiros a, b .

Uma classe específica de quivers conexos de interesse neste estudo é justamente a dos quivers de Dynkin do tipo ADE. Podemos agora definir tais estruturas e em seguida caracterizá-las pela forma de Tits. Isto permitirá a demonstração do papel dos quivers de Dynkin na primeira parte do Teorema de Gabriel. Ocorre que tais estruturas não dependem da direção das arestas, pois são definidas no contexto de grafos e multigrafos. Assim, para aplicarmos tais ferramentas no contexto de quivers, precisamos definir o que é um multigrafo associado a um quiver.

Definição E.8. Um **multigrafo** G é uma tripla ordenada $(V(G), E(G), \Psi_G)$, com $V(G) \cap E(G) = \emptyset$, onde os elementos de $V(G)$ são ditos **vértices do grafo**, os elementos de $E(G)$ são ditos **arestas do grafo** e $\Psi_G : E(G) \rightarrow \{\{x, y\} : x, y \in V(G)\}$ é dita **função de incidência do grafo**.

Definição E.9. Dado um quiver Q , podemos tomar o **multigrafo associado ao quiver**, indicado por \bar{Q} , que é o multigrafo tal que $V(\bar{Q}) = V(Q)$, $E(\bar{Q}) = E(Q)$ e $\Psi_{\bar{Q}}$ é tal que, para cada $e \in E(Q)$ com $\psi_Q(e) = (a, b)$, temos que $\Psi_{\bar{Q}}(e) = \{a, b\}$.

Quivers de Dynkin

Definição E.10. Um **grafo de Dynkin do tipo ADE** é um grafo que seja do tipo $A_n (n \geq 1)$, $D_n (n \geq 4)$ ou $E_n (n \in \{6, 7, 8\})$, que são definidos da seguinte forma, se G é um grafo de Dynkin do tipo ADE, então $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $E(G) = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. Além disso,

- se G é do tipo A_n , então $\Psi_G(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$;
- se G é do tipo D_n , então $\Psi_G(e_i) = \begin{cases} \{v_i, v_{i+1}\}, & \text{se } i \in \{1, \dots, n-2\} \\ \{v_{i-1}, v_{i+1}\}, & \text{se } i = n-1; \end{cases}$
- se G é do tipo E_n , então $\Psi_G(e_i) = \begin{cases} \{v_i, v_{i+1}\}, & \text{se } i \in \{1, \dots, n-2\} \\ \{v_3, v_{i+1}\}, & \text{se } i = n-1; \end{cases}$

Os grafos de Dynkin do tipo ADE estão representados na Figura [E.1](#).

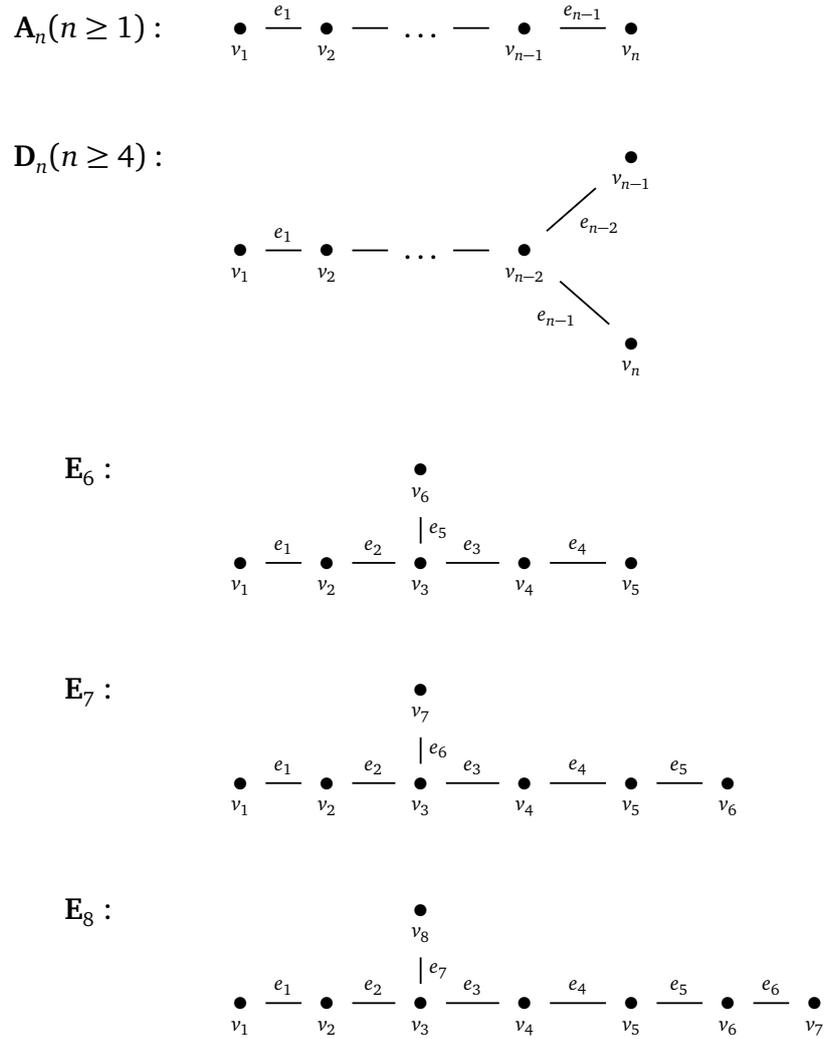


Figura E.1: Representação dos grafos de Dynkin do tipo ADE.

Existem outros tipos de grafos de Dynkin, que podem ser encontrados, por exemplo, em [24], mas não são necessários para os objetivos deste texto. A partir deste ponto, nos referiremos aos grafos de Dynkin do tipo ADE apenas como grafos de Dynkin.

Será necessário que apresentemos os grafos de Dynkin estendidos, que podem ser obtidos a partir de grafos de Dynkin pela adição de um novo vértice e de uma nova aresta, de modos específicos. Uma importante característica dos grafos de Dynkin estendidos é que a remoção de qualquer aresta resulta em um ou dois grafos de Dynkin, fato que também está apresentado na referência acima.

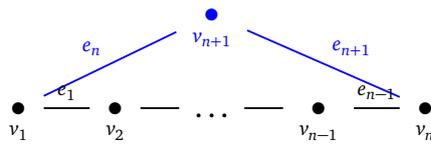
Definição E.11. Um **grafo de Dynkin estendido** é um grafo que seja do tipo $\hat{A}_n (n \geq 1)$, $\hat{D}_n (n \geq 4)$ ou $\hat{E}_n (n \in \{6, 7, 8\})$, que são definidos da seguinte forma, dado G é um grafo de Dynkin, pode-se obter \hat{G} , um grafo de Dynkin estendido a partir de G da seguinte maneira

- se G é do tipo A_n , então \hat{G} é do tipo \hat{A}_n , $V(\hat{G}) = V(G) \cup \{v_{n+1}\}$, $E(\hat{G}) = E(G) \cup \{e_n, e_{n+1}\}$, $\Psi_{\hat{G}}(e) = \Psi_G(e)$, $\forall e \in E(G)$, $\Psi_{\hat{G}}(e_n) = \{v_1, v_{n+1}\}$ e $\Psi_{\hat{G}}(e_{n+1}) = \{v_n, v_{n+1}\}$;

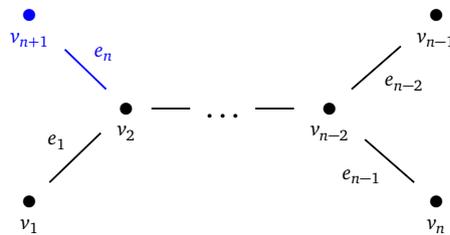
- se G é do tipo \mathbf{D}_n , então \hat{G} é do tipo $\hat{\mathbf{D}}_n$, $V(\hat{G}) = V(G) \cup \{v_{n+1}\}$, $E(\hat{G}) = E(G) \cup \{e_n\}$,
 $\Psi_{\hat{G}}(e) = \Psi_G(e)$, $\forall e \in E(G)$ e $\Psi_{\hat{G}}(e_n) = \{v_1, v_{n+1}\}$;
- se G é do tipo \mathbf{E}_6 , então \hat{G} é do tipo $\hat{\mathbf{E}}_6$, $V(\hat{G}) = V(G) \cup \{v_7\}$, $E(\hat{G}) = E(G) \cup \{e_6\}$,
 $\Psi_{\hat{G}}(e) = \Psi_G(e)$, $\forall e \in E(G)$ e $\Psi_{\hat{G}}(e_6) = \{v_6, v_7\}$;
- se G é do tipo \mathbf{E}_7 , então \hat{G} é do tipo $\hat{\mathbf{E}}_7$, $V(\hat{G}) = V(G) \cup \{v_8\}$, $E(\hat{G}) = E(G) \cup \{e_7\}$,
 $\Psi_{\hat{G}}(e) = \Psi_G(e)$, $\forall e \in E(G)$ e $\Psi_{\hat{G}}(e_7) = \{v_1, v_8\}$;
- se G é do tipo \mathbf{E}_8 , então \hat{G} é do tipo $\hat{\mathbf{E}}_8$, $V(\hat{G}) = V(G) \cup \{v_9\}$, $E(\hat{G}) = E(G) \cup \{e_8\}$,
 $\Psi_{\hat{G}}(e) = \Psi_G(e)$, $\forall e \in E(G)$ e $\Psi_{\hat{G}}(e_8) = \{v_7, v_9\}$.

Os grafos de Dynkin estendidos estão representados na Figura E.2.

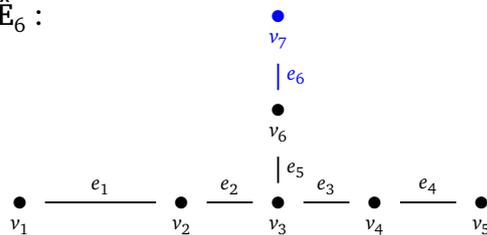
$\hat{A}_n (n \geq 1)$:



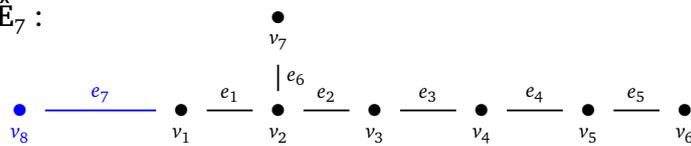
$\hat{D}_n (n \geq 4)$:



\hat{E}_6 :



\hat{E}_7 :



\hat{E}_8 :

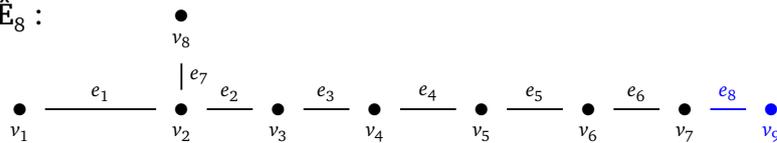


Figura E.2: Representação dos grafos de Dynkin estendidos.

Um **quiver de Dynkin** é um quiver cujo multigrafo associado é um grafo de Dynkin. Um **quiver de Dynkin estendido** é um quiver cujo multigrafo associado é um grafo de Dynkin estendido.

Observemos que nem a forma simétrica de Euler, nem a forma de Tits dependem da orientação de cada seta em $E(Q)$, logo, quando aplicamos alguma destas formas sobre um quiver, podemos operar sobre seu multigrafo associado, sem perda de generalidade.

Teorema E.12. *Seja Q um quiver conexo. Então*

- q_Q é positivo-definida se, e somente se, Q é de Dynkin.

- q_Q é positivo-semi-definida se, e somente se, Q é de Dynkin ou de Dynkin estendido.

Demonstração. Iniciemos provando que se Q é de alguma das classes que constituem os quivers de Dynkin estendidos, então q_Q é positivo-semi-definida. Pelo Lema E.7, é suficiente encontrar, para cada classe, uma representação cujo vetor dimensão δ é tal que $(\delta, \mathbf{x})_Q = 0, \forall \mathbf{x}$. Dados os vetores dimensão representados em E.3, não é difícil conferir que cada um deles possui a propriedade desejada. Por exemplo, para \hat{E}_6 , temos que

$$\begin{aligned} (\delta, \mathbf{x})_Q &= \langle \delta, \mathbf{x} \rangle_Q + \langle \mathbf{x}, \delta \rangle_Q = 2 \left(\sum_{i=1}^n \delta_i x_i \right) - \left(\sum_{e \in E(Q)} \delta_{t(e)} x_{h(e)} + \sum_{e \in E(Q)} x_{t(e)} \delta_{h(e)} \right) \\ &= 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 4x_6 + 2x_7 \\ &\quad - 1x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 - 3x_6 - 2x_7 \\ &\quad - 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 1x_4 - 2x_5 - 1x_6 = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, suponhamos que q_Q é positivo-semi-definida e Q não é de Dynkin nem de Dynkin estendido. Então existe algum subquiver próprio Q' , que é de Dynkin estendido. Seja δ o vetor apresentado na Figura E.3. Se $V(Q) = V(Q')$, então $E(Q') \subsetneq E(Q)$, logo, $0 = q_{Q'}(\delta) > q_Q(\delta)$, uma contradição. Se, por outro lado, $V(Q') \subsetneq V(Q)$, então tomemos um vértice $v_{t(e)} \in V(Q) \setminus V(Q')$ para algum $e \in E(Q) \setminus E(Q')$, tal que $v_{h(e)} \in V(Q')$. Definamos \mathbf{x} por $x_i = 2\delta_i$ para cada i tal que $v_i \in V(Q')$, ainda $x_{t(e)} = 1$ e $x_j = 0$ para cada $j \neq t(e)$, tal que $v_j \in V(Q) \setminus V(Q')$. Assim, $q_Q(\mathbf{x}) = q_{Q'}(2\delta) + 1 - 2\delta_{h(e)} = 1 - 2\delta_{h(e)} < 0$, uma contradição. Logo, se q_Q é positivo-semi-definida, então Q é Dynkin ou Dynkin estendido. Além disso, se q_Q é positivo-definida, então Q é de Dynkin, uma vez que para cada δ da Figura E.3, temos que $q_Q(\delta) = 0$.

Resta provar que se Q é de Dynkin, então q_Q é positivo-definida. Seja \hat{Q} a extensão de Q como apresentado em E.11. Suponhamos que existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ tal que $q_Q(\mathbf{x}) < 0$. Seja $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}^{n+1}$, o vetor definido por $\hat{x}_i = x_i$, se $i \neq n+1$ e $\hat{x}_{n+1} = 0$. Temos que $q_{\hat{Q}}(\hat{\mathbf{x}}) = q_Q(\mathbf{x}) \leq 0$, donde $q_{\hat{Q}}(\hat{\mathbf{x}}) = 0$, pois $q_{\hat{Q}}$ é positivo-definida. Do Lema E.7, temos que $\hat{\mathbf{x}} = \frac{a}{b}\delta$, para inteiros a e b , o que é impossível, uma vez que $\hat{x}_{n+1} = 0$. Assim, q_Q é positivo-definida, o que encerra a demonstração. \square

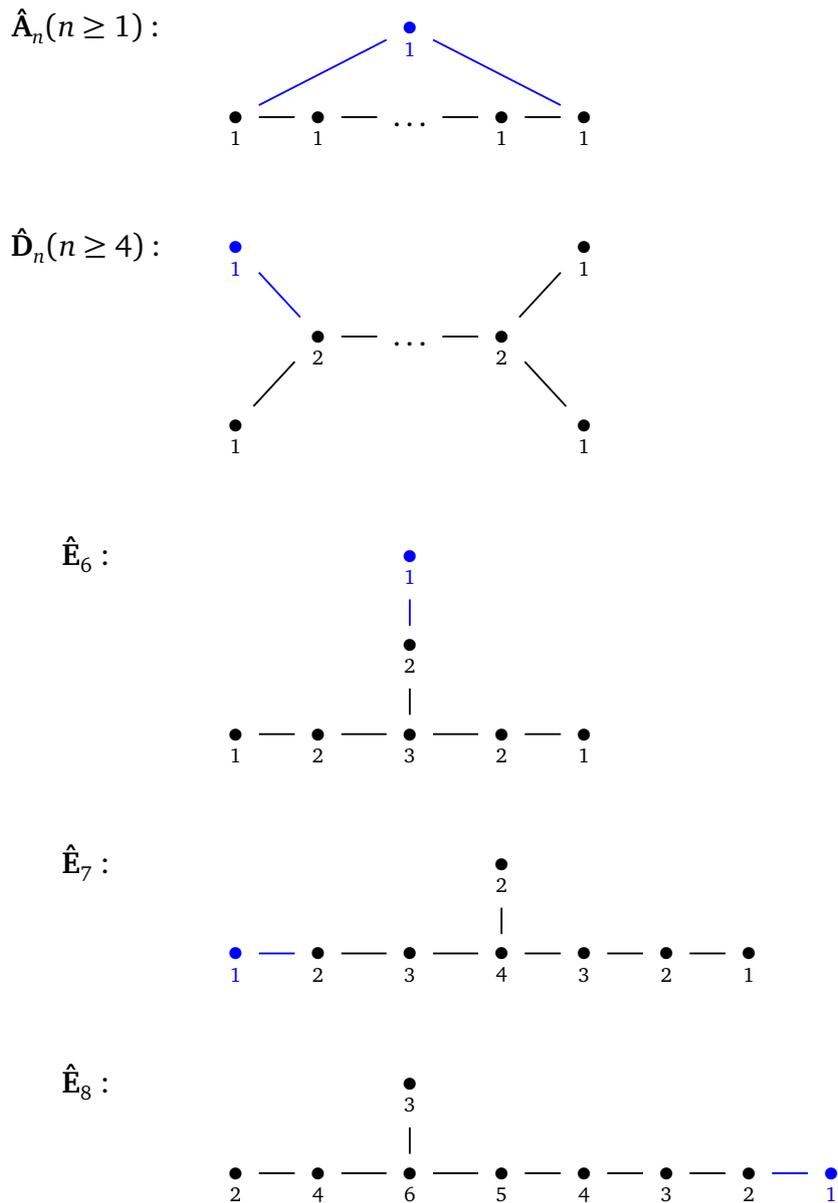


Figura E.3: Representação dos vetores δ tais que $(\delta, \mathbf{x})_Q = 0, \forall \mathbf{x}$, para os grafos de Dynkin estendidos do tipo ADE.

Analisemos quem são as raízes de Q_q , quando Q é de Dynkin. Denotaremos \mathbf{e}_i como o i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{Z}^n , ou seja, aquele que tem 1 na i -ésima posição e 0 em todas as outras. Claro que todo elemento de \mathbb{Z}^n é do tipo $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i$ com $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{Z}$. Antes, precisaremos de um lema técnico, cuja demonstração utiliza apenas manipulações algébricas da forma de Tits, de modo que não será apresentada aqui, mas pode ser encontrada em [24].

Lema E.13. Para a forma de Tits temos que

1. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, temos que $q_Q(\mathbf{e}_i) = 1$, para qualquer Q .
2. Dado $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, se \mathbf{x} é raiz, então $-\mathbf{x}$ também o é.

3. Dado Q quiver de Dynkin estendido e $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, se \mathbf{x} é raiz de q_Q , então, tomando δ da Figura E.3, temos que $\mathbf{x} - \delta$ é raiz de Q_q .
4. Se q_Q é positivo-semi-definida, então não há raiz trivial, ainda $\Phi = \Phi_+ \sqcup \Phi_-$ e ainda $\Phi_- = -\Phi_+$.

Proposição E.14. *Se Q é um quiver de Dynkin, então q_Q tem uma quantidade finita de raízes positivas.*

Demonstração. Seja \mathbf{x} uma raiz positiva q_Q e seja \hat{Q} o quiver de Dynkin estendido a partir de Q . Temos que para δ apresentado em E.3, $\alpha - \delta$ é raiz de Q_q . Como $\alpha - \delta$ é negativo em $n + 1$, pelo Lema E.13, temos que $\alpha - \delta \in \Phi_-$, ou seja, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, temos que $\alpha_i \leq \delta_i$. Assim, temos uma quantidade finita de raízes positivas de q_Q . \square

Agora, coloquemos nosso enfoque no outro conjunto que compõe a identificação de uma representação, os homomorfismos atribuídos as arestas. Inicialmente, buscaremos a caracterização das classes de isomorfismo de representações, no contexto desejado.

Classes de Isomorfismo de Representações

Apesar de ainda não termos provado a propriedade que justifica nos resumirmos aos quivers de Dynkin, de modo a simplificar algumas demonstrações, nos resumiremos aos quivers que contêm uma característica comum nos quivers de Dynkin: a ausência de ciclos.

Definição E.15. *Um caminho p de comprimento l em um quiver Q é uma sequência $p = e_1 e_2 \dots e_l$ de arestas distintas de $E(Q)$, tais que $h(e_i) = t(e_{i+1})$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$.*

Dado $v \in V(Q)$, um **caminho trivial** é um caminho onde a única aresta é e tal que $\psi_Q(e) = (v, v)$. Um **ciclo orientado** é um caminho não trivial tal que $t(e_1) = h(e_l)$.

Definição E.16. *Seja Q um quiver sem ciclos orientados. Dado $\mathbf{d} = (d_i) \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$. Considerando a definição D.5, definimos o **espaço das representações de dimensão \mathbf{d}** como $E_{\mathbf{d}} = \{u \in \text{Ob}(\text{rep}_{\mathbb{K}}(Q)) : \underline{\dim}(u) = \mathbf{d}\}$.*

O que caracteriza cada elemento de $E_{\mathbf{d}}$, uma vez que está fixado o espaço \mathbb{K}^{d_i} em v_i , para cada i , é o homomorfismo que cada representação atribui a cada aresta $e \in E(Q)$. Tal homomorfismo deve ser necessariamente entre $\mathbb{K}^{d_{t(e)}}$ e $\mathbb{K}^{d_{h(e)}}$. Logo, podemos identificar cada representação $u \in E_{\mathbf{d}}$ com a sua aplicação E_u , de modo que podemos escrever

$$E_{\mathbf{d}} = \bigoplus_{e \in E(Q)} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{d_{t(e)}}, \mathbb{K}^{d_{h(e)}}).$$

E Teorema de Gabriel

Para que um homomorfismo entre representações (ϕ_i) seja um isomorfismo não basta as componentes ϕ_i serem isomorfismos, é necessário que estas comutem com os homomorfismos atribuídos às arestas. Ou seja, para que duas representações sejam isomorfas, pertencer ao mesmo grupo E_d é necessário, mas não suficiente. Para caracterizar completamente representações isomorfas, definiremos um objeto capaz de operar sobre cada representação.

Seja $GL_m(\mathbb{K})$ o grupo das matrizes $m \times m$ invertíveis com entradas em \mathbb{K} , definamos então o grupo

$$G_d = \prod_{i=1}^n GL_{d_i}(\mathbb{K}).$$

Tal grupo age em E_d da seguinte maneira, se $g = (g_i) \in G_d$ e $E_u \in E_d$, então, dado $e \in E(Q)$, $(g \cdot E_u)(e) = g_{h(e)}(E_u(e))g_{t(e)}^{-1}$. Denotamos a órbita da representação u pela ação de G_d como

$$\mathcal{O}_u \doteq \{g \cdot u : g \in G_d\}.$$

Ocorre que as órbitas classificam as representações isomorfas.

Lema E.17. Dada uma representação $u \in \text{Ob}(\mathbf{rep}_{\mathbb{K}}(\mathbf{Q}))$, a órbita \mathcal{O}_u é a sua classe de isomorfismo, ou seja

$$\mathcal{O}_u = \{w \in \text{Ob}(\mathbf{rep}_{\mathbb{K}}(\mathbf{Q})) : u \cong w\}$$

Demonstração. Suponhamos que $u = (V_u, E_u)$ e $w = (V_w, E_w)$ estão na mesma órbita, então existe algum $g \in G_d$ tal que $g \cdot u = w$, ou seja, para cada $e \in E(Q)$, temos que $g_{h(e)}(E_u(e))g_{t(e)}^{-1} = E_w(e)$, o que equivale a dizer que o seguinte diagrama, onde $V_u = V_w$, comuta

$$\begin{array}{ccc} V_u(v_{t(e)}) & \xrightarrow{E_u(e)} & V_u(v_{h(e)}) \\ \downarrow g_{t(e)} & & \downarrow g_{h(e)} \\ V_w(v_{t(e)}) & \xrightarrow{E_w(e)} & V_w(v_{h(e)}). \end{array}$$

Logo, g é um homomorfismo entre representações, mais ainda, como $g_i \in GL_{d_i}$, é invertível, temos um isomorfismo, então $u \cong w$. De modo análogo, se $u \cong w$, então existe $g \in G_d$ tal que $g \cdot u = w$. \square

A demonstração do lema abaixo faz uso de técnicas que já foram apresentadas neste texto. Assim, novamente pela concisão, optamos por não apresentá-la. Entretanto, pode ser encontrada em [24].

Lema E.18. Se

$$0 \longrightarrow u \longrightarrow v \longrightarrow w \longrightarrow 0.$$

é uma sequência exata curta não cindível de representações, então

$$\dim \mathcal{O}_{u \oplus w} < \dim \mathcal{O}_v$$

Podemos agora relacionar as duas abordagens acima construídas para a classificação de representações: a órbita de uma representação com a sua forma de Tits. Para tal será necessária a definição das classes de extensão de representações.

Extensões de Representações

Definição E.19. Sejam u e w representações finito-dimensionais de um quiver Q , uma **extensão da representação u por w** , aqui indicada por $\xi(u, w)$ é a escolha de uma representação r tal que a seguinte sequência seja exata

$$\xi : 0 \longrightarrow w \xrightarrow{i} r \xrightarrow{\pi} u \longrightarrow 0$$

Temos que duas **extensões equivalentes** são extensões $\xi(u, w) = r$ e $\xi'(u, w) = r'$ para as quais existe um isomorfismo $f : r \rightarrow r'$, tal que o seguinte diagrama comute

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & w & \xrightarrow{i} & r & \xrightarrow{\pi} & u & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \mathbb{1}_w & & \downarrow f & & \downarrow \mathbb{1}_u & & \\ 0 & \longrightarrow & w & \xrightarrow{i'} & r' & \xrightarrow{\pi'} & u & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Definição E.20. O **grupo de extensão de Yoneda**, indicado por $\text{Ext}_Q(u, w)$ é o conjunto das classes de equivalência das extensões de w por u .

Analisemos $\text{Ext}_Q(u, w)$ de outra perspectiva. Seja o mapa

$$\bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}(V_u(v_i), V_w(v_i)) \xrightarrow{d_w^u} \bigoplus_{e \in E(Q)} \text{Hom}(V_u(v_{t(e)}), V_w(v_{h(e)}))$$

dado por

$$d_w^u(\phi_i : i \in \{1, \dots, n\}) = (\phi_{h(e)} E_u(e) - E_w(e) \phi_{t(e)} : e \in E(Q)).$$

Ou seja, grosso modo, d_w^u toma cada homomorfismo entre u e w e obtém o vetor de funções que, para cada $e \in E(Q)$, calcula a diferença entre os resultados obtidos quando um elemento de $V_u(v_{t(e)})$ percorre cada um dos “caminhos” (vermelho ou azul) indicados abaixo.

$$\begin{array}{ccc} V_u(v_{t(e)}) & \xrightarrow{E_u(e)} & V_u(v_{h(e)}) \\ \downarrow \phi_{t(e)} & & \downarrow \phi_{h(e)} \\ V_w(v_{t(e)}) & \xrightarrow{E_w(e)} & V_w(v_{h(e)}) \end{array}$$

Proposição E.21. O núcleo de d_w^u é $\text{Hom}_Q(u, w)$ e o conúcleo de d_w^u pode ser identificado com $\text{Ext}_Q(u, w)$. Em particular, $\text{Ext}_Q(u, w)$ é um \mathbb{K} -espaço vetorial finito-dimensional.

Demonstração. Da Definição 2.26, é imediato que $\ker d_w^u = \text{Hom}_Q(u, w)$. Denotemos a seguinte aplicação

$$\Theta : \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}(V_u(v_i), V_w(v_i)) \rightarrow \text{Ext}_Q(u, w),$$

que é definida da seguinte maneira, dado

$$\zeta = (\zeta(e) : e \in E(Q)) \in \bigoplus_{e \in E(Q)} \text{Hom}(V_u(v_{t(e)}), V_w(v_{h(e)})),$$

definamos a representação $r_\zeta = (V_{r_\zeta}, E_{r_\zeta})$ como

$$V_{r_\zeta}(v_i) = V_u(v_i) \oplus V_w(v_i),$$

para cada $v_i \in V(Q)$ e

$$E_{r_\zeta}(e) = \begin{pmatrix} E_u(e) & 0 \\ \zeta(e) & E_w(e) \end{pmatrix},$$

para cada $e \in E(Q)$. Então não é difícil conferir que

$$\xi_\zeta : 0 \longrightarrow w \xrightarrow{i} r_\zeta \xrightarrow{\pi} u \longrightarrow 0$$

é uma extensão de u por w , denominada extensão obtida por ζ . Definimos então $\Theta(\zeta)$ como a classe de equivalência de ξ_ζ .

Sejam

$$\zeta' = (\zeta'(e) : e \in E(Q)) \in \bigoplus_{e \in E(Q)} \text{Hom}(V_u(v_{t(e)}), V_w(v_{h(e)}))$$

e a extensão obtida por ζ'

$$\xi_{\zeta'} : 0 \longrightarrow w \xrightarrow{i} r_{\zeta'} \xrightarrow{\pi} u \longrightarrow 0.$$

Se ζ e ζ' são equivalentes, então existe um isomorfismo $f : r_\zeta \rightarrow r_{\zeta'}$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & w & \xrightarrow{i} & r_\zeta & \xrightarrow{\pi} & u & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \mathbb{1}_w & & \downarrow f & & \downarrow \mathbb{1}_u & & \\
0 & \longrightarrow & w & \xrightarrow{i'} & r_{\zeta'} & \xrightarrow{\pi'} & u & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Dado $j \in \{1, \dots, n\}$, temos que $f_j : V_u(v_j) \oplus V_w(v_j) \rightarrow V_u(v_j) \oplus V_w(v_j)$ deve ser tal que

$$f_j i_j(V_w(v_j)) = i'_j(\mathbb{1}_w)_j(V_w(v_j)) \implies f_j(0 \oplus V_w(v_j)) = (0 \oplus V_w(v_j)),$$

ainda

$$(\mathbb{1}_u)_j \pi_j(V_u(v_j) \oplus 0) = \pi'_j f_j(V_u(v_j) \oplus 0) \implies \pi'_j f_j(V_u(v_j) \oplus 0) = V_u(v_j),$$

donde $f_j(V_u(v_j) \oplus 0) = (V_u(v_j) \oplus F_j)$ para algum $F_j \subseteq V_w(v_j)$, logo

$$f_j = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{V_u(v_j)} & 0 \\ -\theta_j & \mathbb{1}_{V_w(v_j)} \end{pmatrix}$$

para alguma $\theta_j \in \text{Hom}(V_u(v_j), V_w(v_j))$, onde o sinal negativo é inserido apenas para simplificar alguns dos próximos passos. Indicaremos $\theta = (\theta_j)_{j=1}^n$. Como f é um homomorfismo entre as representações r_ζ e $r_{\zeta'}$, temos que para cada $e \in E(Q)$,

$$f_{h(e)} E_{r_\zeta}(e) = E_{r_{\zeta'}}(e) f_{t(e)},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_{V_u(v_{h(e)})} & 0 \\ -\theta_{h(e)} & \mathbb{1}_{V_w(v_{h(e)})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_u(e) & 0 \\ \zeta(e) & E_w(e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_u(e) & 0 \\ \zeta'(e) & E_w(e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{V_u(v_{t(e)})} & 0 \\ -\theta_{t(e)} & \mathbb{1}_{V_w(v_{t(e)})} \end{pmatrix}.$$

Todas as posições da equação matricial resultam em uma identidade, exceto por uma: na posição (2, 1), temos que

$$-\theta_{h(e)} E_u(e) + \zeta(e) = \zeta'(e) - E_w(e) \theta_{t(e)},$$

donde $\zeta - \zeta' = (\zeta(e) - \zeta'(e) : e \in E(Q)) = (\theta_{h(e)} E_u(e) - E_w(e) \theta_{t(e)} : e \in E(Q)) = d_w^u(\theta)$.

De modo análogo, se $\zeta - \zeta' = d_w^u(\theta)$ para algum $\theta \in \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}(V_u(v_i), V_w(v_i))$, então o diagrama entre r_ζ e $r_{\zeta'}$ comuta e $f : r_\zeta \rightarrow r_{\zeta'}$ é isomorfismo.

Finalmente, qualquer extensão ξ de u por w é equivalente a uma extensão

$$0 \longrightarrow w \xrightarrow{i} r \xrightarrow{\pi} u \longrightarrow 0,$$

onde $V_r(v_i) = V_u(v_i) \oplus V_w(v_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, e

$$E_r(e) = \begin{pmatrix} E_u(e) & 0 \\ \zeta(e) & E_w(e) \end{pmatrix},$$

para algum $\zeta = (\zeta(e) : e \in E(Q))$ tal que $\Theta(\zeta)$ é equivalente a ξ . Ou seja, Θ é sobrejetiva. Assim, existe bijeção entre coker d_w^u e $\text{Ext}_Q(u, w)$. \square

Proposição E.22. *Seja Q um quiver conexo, $u \in \text{Ob}(\text{rep}_{\mathbb{K}}(\mathbf{Q}))$ e $\underline{\dim}(u) = \mathbf{d}$, então $q_Q(\mathbf{d}) = \dim \text{Hom}_Q(u, u) - \dim \text{Ext}_Q(u, u)$.*

Demonstração. Dadas representações $u, w \in \text{Ob}(\text{rep}_{\mathbb{K}}(\mathbf{Q}))$, usando os homomorfismos definidos na demonstração da proposição anterior, temos que a seguinte sequência é exata

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_Q(u, w) \xrightarrow{i} \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}(V_u(v_i), V_w(v_i)) \xrightarrow{d_w^u} \bigoplus_{e \in E(Q)} \text{Hom}(V_u(v_{h(e)}), V_w(v_{t(e)})) \xrightarrow{\Theta} \text{Ext}_Q(u, w) \longrightarrow 0,$$

logo,

$$\begin{aligned} & \dim \text{Hom}_Q(u, w) - \dim \text{Ext}_Q(u, w) \\ &= \dim \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}(V_u(v_i), V_w(v_i)) - \dim \bigoplus_{e \in E(Q)} \text{Hom}(V_u(v_{h(e)}), V_w(v_{t(e)})), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\dim \text{Hom}_Q(u, u) - \dim \text{Ext}_Q(u, u) = \sum_{i=1}^n d_i^2 - \sum_{e \in E(Q)} d_{t(e)} d_{h(e)} = q_Q(\mathbf{d}).$$

\square

Proposição E.23. *Seja Q um quiver conexo, $u \in \text{rep}_{\mathbb{K}}(\mathbf{Q})$ e $\underline{\dim}(u) = \mathbf{d}$. Então*

$$\text{codim}(\mathcal{O}_u) = \dim \text{End}_Q(u) - q_Q(\mathbf{d}) = \dim \text{Ext}_Q(u, u).$$

Demonstração. Seja o estabilizador de u pela ação de $G_{\mathbf{d}}$, indicado por $G_{\mathbf{d}}(u) = \{g \in G_{\mathbf{d}} : g \cdot u = u\}$, pelo Teorema da Órbita-Estabilizador ([12]), existe um isomorfismo entre $G_{\mathbf{d}}/G_{\mathbf{d}}(u)$ e \mathcal{O}_u . Por outro lado, temos que $G_{\mathbf{d}}(u) = \text{Aut}(u)$. Assim, $\dim \mathcal{O}_u = \dim G_{\mathbf{d}} - \dim \text{Aut}_Q(u)$. De acordo com [12], $\text{Aut}_Q(u)$ é um subgrupo aberto de $\text{End}_Q(u)$, de onde se tem que $\dim \text{Aut}_Q(u) = \dim \text{End}_Q(u)$. Como $\dim \text{GL}_{d_i} = d_i^2$, temos que $\dim G_{\mathbf{d}} = \sum_{i=1}^n d_i^2$, assim,

$$\dim \mathcal{O}_u = \sum_{i=1}^n d_i^2 - \dim \text{End}_Q(u),$$

ainda,

$$\text{codim } \mathcal{O}_u = \dim E_{\mathbf{d}} - \dim \mathcal{O}_u = \sum_{e \in E(Q)} d_{h(e)} d_{t(e)} - \sum_{i=1}^n d_i^2 + \dim \text{End}_Q(u) = q_Q(\mathbf{d}) + \dim \text{End}_Q(u).$$

Pela proposição E.22, temos a segunda igualdade. \square

Corolário E.24. *Se $q_Q(\mathbf{d}) \leq 0$, então existem infinitas classes de isomorfismo entre as representações de Q com vetor dimensão \mathbf{d} .*

Demonstração. Seja \mathbf{d} tal que $q_Q(\mathbf{d}) \leq 0$ e $u \in \mathbf{rep}_{\mathbb{K}}(Q)$ tal que $\underline{\dim}(u) = \mathbf{d}$. Então $\text{codim } \mathcal{O}_u \geq \dim \text{End}_Q(u) \geq 1$. Logo, a dimensão de $E_{\mathbf{d}}$ é estritamente maior do que a dimensão de qualquer órbita \mathcal{O}_u , ou seja, existem infinitas órbitas. \square

Definição E.25. *Um quiver de tipo finito é um quiver que tem uma quantidade finita de classes de isomorfismo de representações finito-dimensionais indecomponíveis.*

Ou seja, para um quiver de tipo finito, dada qualquer representação finito-dimensional, se \mathbf{d} é o seu vetor dimensão, então $q_Q(\mathbf{d}) \geq 0$.

Munidos de tais ferramentas, podemos apresentar o Teorema que justifica a presença desta seção. A versão do Teorema de Gabriel apresentada na Seção 2, em 2.30, é apenas para A_n -quivers lineares e resume não só o Teorema de Gabriel original como o seu corolário para A_n -quivers lineares. Aqui, os dois resultados serão apresentados separadamente.

Teorema E.26 (Gabriel). *Seja Q um quiver conexo.*

1. *Q é de tipo finito se, e somente se é de Dynkin do tipo ADE.*
2. *Se Q é de Dynkin do tipo ADE, então o vetor dimensão induz uma bijeção entre as classes de isomorfismo das representações indecomponíveis $\text{ind } Q$ e o conjunto das raízes positivas Φ_+ :*

$$\begin{aligned} \Psi : \text{ind } Q &\rightarrow \Phi_+ \\ u &\mapsto \underline{\dim}(u) \end{aligned}$$

Demonstração. Seguiremos a demonstração apresentada em [1], onde a parte 2 do Teorema de Gabriel é demonstrada antes da parte 1.

Inicialmente, provemos que Ψ está bem definida. Seja u uma representação indecomponível de Q , devemos mostrar que $q_Q(\underline{\dim}(u)) = 1$, para tal, de acordo com E.23, é suficiente provar que $\text{End}_Q(u) \cong \mathbb{K}$ e $\dim \text{Ext}_Q(u, u) = 0$. Provaremos, então, por indução em $|u|$.

Se $|u| = 1$, então existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $V_u(v_j) = \mathbb{K}$ e $V_u(v_i) = 0$ para cada $i \neq j$, donde, se $(\phi_i)_{i=1}^n \in \text{End}_Q(u)$, temos que $\phi_i = 0$ para todo $i \neq j$ e $\phi_j : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ é unicamente determinada por $k \in \mathbb{K}$ tal que $\phi_j(1_{\mathbb{K}}) = k$, ou seja, $\text{End}_Q(u) \cong \mathbb{K}$. Suponhamos que u é representação indecomponível tal que $|u| > 1$ e também que $\dim \text{End}_Q(w) \cong \mathbb{K}$ para qualquer representação indecomponível w tal que $|w| < |u|$. Suponhamos ainda que $\text{End}_Q(u) \not\cong \mathbb{K}$. Como u é indecomponível, dada $\phi \in \text{End}_Q(u)$, pelo Corolário D.2, temos que ϕ é necessariamente invertível ou nilpotente. Como $\text{End}_Q(u) \not\cong \mathbb{K}$, então $\overline{H}_w \neq 0$, ou seja, existem endomorfismos não invertíveis, logo, nilpotentes. Dada qualquer aplicação nilpotente g , existe $m > 0$ tal que $g^m = 0$, disto, podemos assumir, sem perda de generalidade que $g^2 = 0$, pois basta-se tomar g^{m-1} . Dentre as aplicações que cumprem tal requisito, tomemos aquela cuja dimensão da imagem é minimal. Como $g^2 = 0$, temos que $\text{im } g \subset \ker g$, donde temos que existe alguma parcela w da expressão de $\ker g$ como soma direta de representações indecomponíveis tal que $V_{\text{im } g}(v_i) \cap V_w(v_i)$ é diferente de zero para algum i , logo, $\text{im } g \cap w$ é uma representação não nula. Seja a aplicação $f = \pi \circ i : \text{im } g \rightarrow \ker g \rightarrow w$, temos que a composição $i \circ f \circ g : u \rightarrow \text{im } g \rightarrow w \rightarrow u$ é um endomorfismo não nulo tal que $(i \circ f \circ g)^2 = 0$. Da minimalidade da dimensão da imagem de g , temos que $\dim \text{im } g \leq \dim \text{im}(i \circ f \circ g) = \dim f(\text{im } g)$, logo, f é injetiva, o que nos permite escrever a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \text{im } g \xrightarrow{f} w \longrightarrow \text{coker } f \longrightarrow 0.$$

Ocorre que, como podemos conferir em [24], o grupo $\text{Ext}_Q(a, b)$ é isomorfo ao funtor $\text{Ext}^1(a, b)$, cuja definição também pode ser encontrada nesta referência. Assim, pelos resultados encontrados para este funtor em [23], temos que, por se tratarem de espaços vetoriais, $\text{Ext}_Q(\text{im } g, w) = 0$.

Definamos uma representação r da seguinte maneira: sejam a inclusão $i_1 : \ker g \rightarrow u$ e a projeção $\pi_1 : \ker g \rightarrow w$, então $r = (u \oplus w) / \{(i_1(k), -\pi_1(k)) : k \in \ker g\}$. Definamos ainda os morfismos $j_1 : u \rightarrow r$ e $j_2 : w \rightarrow r$ por $j_1(k) = \overline{(k, 0)}$ e $j_2(k) = \overline{(0, k)}$, onde $\overline{(a, b)}$ denota a classe de $(a, b) \in u \oplus w$ em r .

Pode-se provar ([24]) que o diagrama abaixo é comutativo e tem as linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker g & \xrightarrow{i} & u & \xrightarrow{g} & \text{im } g & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow j_2 & & \downarrow \mathbb{1}_{\text{im } g} & & \\ 0 & \longrightarrow & w & \xrightarrow{j_1} & r & \longrightarrow & \text{im } g & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Como $\text{Ext}_Q(\text{im } g, w) = 0$, temos que toda extensão de $\text{im } g$ por w é isomorfa à extensão trivial

$$0 \longrightarrow w \longrightarrow w \oplus \text{im } g \longrightarrow \text{im } g \longrightarrow 0,$$

que cinde. Logo, temos que a linha de baixo cinde, donde, pelo Lema da Cisão ([14]), existe algum morfismo $h : r \rightarrow w$, tal que $hj_1 = \mathbb{1}_w$. Seja $i_2 : w \rightarrow \ker g$ um homomorfismo de inclusão, então $\pi i_2 = \mathbb{1}_w$. Logo, podemos construir os homomorfismos $hj_2 : u \rightarrow w$ e $ii_2 : w \rightarrow u$, que são tais que

$$hj_2ii_2 = h(j_2i)i_2 = h(j_1\pi)i_2 = (hj_1)(\pi i_2) = \mathbb{1}_w\mathbb{1}_w = \mathbb{1}_w.$$

Donde temos que w é um termo da decomposição em representações indecomponíveis de u . Como u é indecomponível, então $w = 0$ ou $w = u$. Mas $w \neq 0$, pois $\text{im } g \cap w$ é não nula e $w \neq u$, pois $w \subset \ker g$ e g é não nula. Temos então uma contradição. Assim, $\dim \text{End}_Q = 1$ e, pelo Teorema E.12, como se trata de quiver de Dynkin, $q_Q(\underline{\dim}(u)) > 0$, logo, temos imediatamente que $\dim \text{Ext}_Q(u) = 0$ e $q_Q(\underline{\dim}(u)) = 1$. Assim, $\underline{\dim}(u) \in \Phi_+$. Ainda, se $u, v \in \text{ind } Q$ são tais que $u \cong v$, então u e v pertencem ao mesmo conjunto E_d , ou seja, têm a mesma imagem pelo morfismo Ψ , o que prova que ele está bem definido.

Vejam agora que Ψ é injetiva. Sejam $u, w \in \text{Ob}(\text{rep}_{\mathbb{K}}(Q))$ indecomponíveis tais que $\underline{\dim}(u) = \underline{\dim}(w)$. Pelo visto algumas linhas acima, em quivers de Dynkin, dada u representação indecomponível, $\text{Ext}_Q(u) = 0$, ou seja, u não têm auto-extensões. Neste caso, pela Proposição E.23, as órbitas \mathcal{O}_u e \mathcal{O}_w têm codimensão zero, logo, $\mathcal{O}_u = E_d = \mathcal{O}_w$, donde $u \cong w$.

Provemos agora que Ψ é sobrejetiva. Seja Q um quiver e \mathbf{d} uma raiz positiva. Seja ainda uma representação u tal que $\underline{\dim}(u) = \mathbf{d}$, de modo que \mathcal{O}_u tenha dimensão maximal em E_d . Provemos que u é indecomponível. Suponhamos que $u = u_1 \oplus u_2$. O primeiro passo é mostrar que $\text{Ext}_Q(u_1, u_2) = \text{Ext}_Q(u_2, u_1) = 0$. Suponhamos agora que $\text{Ext}_Q(u_1, u_2) \neq 0$, então existe alguma representação r , tal que a seguinte seqüência exata curta não é cindível

$$0 \longrightarrow u_2 \longrightarrow r \longrightarrow u_1 \longrightarrow 0.$$

Temos que $\underline{\dim}(r) = \underline{\dim}(u)$. Pelo Lema E.18, temos que $\dim \mathcal{O}_u < \dim \mathcal{O}_r$, o que contradiz a maximalidade de \mathcal{O}_u . Disto, $\text{Ext}_Q(u_1, u_2) = 0$ e, simetricamente, pode-se mostrar que $\text{Ext}_Q(u_2, u_1) = 0$. Assim, da proposição E.22,

$$1 = q_Q(\mathbf{d}) = \dim \text{Hom}(u_1 \oplus u_2, u_1 \oplus u_2) \geq 2,$$

o que é uma contradição. Logo, u é indecomponível, donde Ψ é sobrejetiva, concluindo a demonstração da parte 2 do Teorema de Gabriel.

Para demonstrar a parte 1, suponhamos que Q não é de Dynkin do tipo ADE, então, existe algum $\mathbf{d} \neq 0$ tal que $q_Q(\mathbf{d}) \leq 0$. Pelo corolário E.24, existem infinitas classes de isomorfismo de representações u tais que $\underline{\dim}(u) = \mathbf{d}$. Cada uma dessas representações é soma direta de uma quantidade finita de representações indecomponíveis, logo, o número

de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis é infinito. Por outro lado, pela Proposição E.14, se Q é de Dynkin, então possui finitas raízes, logo, pela bijeção entre $\text{ind} Q$ e Φ_+ , temos que Q é de tipo finito. \square

Corolário E.27. Dado um A_n -quiver linear Q , cada representação $u \in \text{ind} Q$ é isomorfa a alguma representação intervalar $\mathbb{I}[b, d]$, que é tal que

$$V_{\mathbb{I}[b,d]}(v_i) = \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{se } b \leq i \leq d \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso,

$$E_{\mathbb{I}[b,d]}(e_i) = \begin{cases} \mathbb{1}, & \text{se } b \leq i \leq d-1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Como $\Psi(u) \in \Phi_+$, pela proposição E.14, $\dim(V_u(v_i)) \leq \delta_i = 1$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Ou seja, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, temos que $V_u(v_i) \in \{0, \mathbb{K}\}$.

Se existem $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tais que $j - i > 1$, $V_u(v_i) = V_u(v_j) = \mathbb{K}$ e $V_u(v_p) = 0$, para cada $i < p < j$, então u não é indecomponível, pois podemos tomá-lo como a soma direta apresentada abaixo

$$\begin{aligned} & \dots \xrightarrow{E_u(e_{i-1})} \mathbb{K} \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} \mathbb{K} \xrightarrow{E_u(e_j)} \dots \\ & = \\ & \dots \xrightarrow{E_u(e_{i-1})} \mathbb{K} \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \dots \\ & \oplus \\ & \dots \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} \mathbb{K} \xrightarrow{E_u(e_j)} \dots \end{aligned}$$

Então, u deve ser tal que $\dim(u) = \dim(\mathbb{I}[b, d])$, para alguma representação intervalar. Como em $\text{ind} Q$ as classes de representação são unicamente determinadas pelos vetores dimensão, então $u \cong \mathbb{I}[b, d]$. \square

Bibliografia

- [1] Neelam Venkata Prasad Akula. «A Proof Of Gabriel's Theorem». Em: <https://www.utdallas.edu/~neelam.akula/notes/gabriels-theorem.pdf> (2022).
- [2] Michael Atiyah. **Introduction to commutative algebra**. CRC Press, 2018.
- [3] Shaun V Ault. **Understanding Topology: A Practical Introduction**. JHU Press, 2018.
- [4] Jean-Daniel Boissonnat, Frédéric Chazal e Mariette Yvinec. **Geometric and topological inference**. Vol. 57. Cambridge University Press, 2018.
- [5] Frédéric Chazal et al. **The structure and stability of persistence modules**. Vol. 10. Springer, 2016.
- [6] Harm Derksen e Jerzy Weyman. **An introduction to quiver representations**. Vol. 184. American Mathematical Soc., 2017.
- [7] Alexander Engström. «Discrete Morse functions from Fourier transforms». Em: **Experimental Mathematics** 18.1 (2009), pp. 45–53.
- [8] Robin Forman. «Morse theory and evasiveness». Em: **Combinatorica** 20.4 (2000), pp. 489–504.
- [9] Robin Forman. «Morse theory for cell complexes». Em: **Advances in mathematics** 134.1 (1998), pp. 90–145.
- [10] Arnaldo Garcia e Yves Lequain. **Elementos de álgebra**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006.
- [11] Allen Hatcher. **Algebraic topology**. AMS, 2005.
- [12] James E Humphreys. **Linear algebraic groups**. Vol. 21. Springer Science & Business Media, 2012.
- [13] Jakob Jonsson. **Simplicial complexes of graphs**. Vol. 3. Springer, 2008.
- [14] Dahisy Lima e Daniel Miranda. **Introdução à Topologia Algébrica**. <https://danielmiranda.prof.ufabc.edu.br/topologia-algebrica/topologia-algebrica.pdf>, 2023.
- [15] Elon Lages Lima. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento, 2a edição**. IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1998.

Bibliografia

- [16] Elon Lages Lima. **Homologia básica**. IMPA, 2009.
- [17] John Willard Milnor et al. **Morse theory**. 51. Princeton university press, 1963.
- [18] Konstantin Mischaikow e Vidit Nanda. «Morse theory for filtrations and efficient computation of persistent homology». Em: **Discrete & Computational Geometry** 50 (2013), pp. 330–353.
- [19] Liviu I Nicolaescu et al. **An invitation to Morse theory**. Springer, 2011.
- [20] Ryan O’Donnell et al. «Every decision tree has an influential variable». Em: *46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS’05)*. IEEE. 2005, pp. 31–39.
- [21] Steve Y Oudot. **Persistence theory: from quiver representations to data analysis**. Vol. 209. American Mathematical Soc., 2017.
- [22] Steven Roman. **Advanced linear algebra**. Vol. 3. Springer, 2005.
- [23] Joseph J Rotman e Joseph J Rotman. **An introduction to homological algebra**. Vol. 2. Springer, 2009.
- [24] Ralf Schiffler. **Quiver representations**. Vol. 1. Springer, 2014.
- [25] Nicholas A Scoville. **Discrete Morse Theory**. Vol. 90. American Mathematical Soc., 2019.
- [26] Audrey Terras. **Fourier analysis on finite groups and applications**. 43. Cambridge University Press, 1999.

Índice

- A_n-quivers*, 51
- A_n-quivers lineares*, 53
- R-módulo*, 125
- δ-expansão*, 87
- l-esqueleto*, 10
- l-esqueleto do esquema simplicial*, 13
- ε-intercalação*, 74
- n-bordos*, 21
- n-cadeias celulares*, 37
- n-cadeias singulares*, 25
- n-ciclos*, 21
- n-célula*, 35
- n-célula aberta*, 35
- n-esqueleto celular*, 36
- n-gerador de homologia simplicial*, 21
- n-gerador de homologia singular*, 26
- n-módulo de persistência*, 45
- n-simplexo*, 6
- n-simplexo singular*, 25
- n-ésimo grupo de homologia simplicial*, 21
- n-ésimo grupo de homologia singular*, 26
- p-bordos*, 4
- p-cadeias*, 4
- p-ciclos*, 4
- p-ciclos homólogos*, 4
- p-gerador de homologia*, 4
- adição*, 125
- Algoritmo de Cálculo dos Números de Betti*, 65
- Algoritmo de Redução de Matrizes*, 67
- arestas do grafo*, 143
- arestas do quiver*, 50
- associatividade*, 133
- base*, 126
- bordo*, 8
- bordo do simplexo*, 20
- caminho*, 149
- caminho trivial*, 149
- caractere*, 113
- categoria*, 133
- categoria das representações de um quiver*
 - sobre o corpo \mathbb{K} , 53
- ciclo orientado*, 149
- coeficiente de torção*, 22
- coface*, 8
- colagem*, 34
- colagem dos espaços topológicos*, 34
- colapso elementar*, 11
- complexo de cadeias*, 3
- complexo simplicial*, 10
- complexo simplicial de Čech*, 42
- composição*, 133
- cone do esquema simplicial*, 14
- cone simplicial*, 12
- contrátil*, 130
- coordenadas baricêntricas*, 6
- correspondência parcial*, 70

Índice

- custo bottleneck, 71
- custo do par correspondente, 70
- custo do ponto sem correspondência, 70
- CW complexo de dimensão finita, 36
- CW-complexo, 35
- célula, 35
- célula aberta de dimensão n , 35
- célula de dimensão n , 35
- código de barra de persistência, 58

- decomposição de uma representação finito-dimensional, 56
- deleção, 14
- diagrama de persistência, 58
- dimensão de um Δ -complexo, 19
- dimensão de um complexo simplicial, 10
- dimensão de um CW-complexo, 36
- distância bottleneck, 71
- distância de Hausdorff, 88
- distância intercalada, 75

- elemento neutro, 133
- equivalência homotópica, 130
- escalares, 125
- espaço das representações de dimensão, 149
- esquema simplicial, 13
- estrutura de CW-complexo, 36
- evasivo, 111
- extensão da representação, 151
- extensões equivalentes, 151

- face de bordo, 8
- filtração, 42
- filtração de Morse, 123
- filtração simplicial, 42
- filtração simplicial de Čech, 43
- finitamente gerado, 126
- flechas, 133
- forma de Cartan, 142
- forma de Euler, 141

- forma de Tits, 142
- forma simétrica de Euler, 142
- funtor, 134
- funtor de homologia, 6
- função altura, 93
- função de incidência do grafo, 143
- função de incidência do quiver, 50
- função de Morse, 96
- função de Morse discreta, 100
- função de Morse discreta induzida pela árvore de decisão, 107
- função de Morse discreta padrão para cones, 116
- função de Morse-Fourier, 116
- função de Morse-Fourier generalizada, 115

- grafo de Dynkin do tipo ADE, 143
- grafo de Dynkin estendido, 144
- Grp, 133
- grupo de extensão de Yoneda, 151
- grupos de homologia celular, 37

- homologia, 4, 21
- homologia da filtração, 45
- homomorfismo, 126
- homomorfismo de cadeias, 4
- homotopia, 129
- homotopicamente equivalentes, 130
- homotópicas, 129

- identidade, 133
- imagem, 126
- imagem do homomorfismo entre representações, 55
- instante de morte do n -gerador de homologia, 49
- instante de nascimento do n -gerador de homologia, 49
- interior do simplexo, 7
- intervalo sobre o poset, 48

- inversa*, 133
isomorfismo, 126, 133
isomorfismo entre duas representações de um quiver, 55
justaposição, 125
k-face, 8
lei de composição, 44
Lei do Mais Velho, 63
link, 14
livre, 126
medida de persistência, 59
morfismo de grau ε , 74
morfismos, 133
multidigrafo, 50
multigrafo, 143
multigrafo associado ao quiver, 143
módulo de homologia, 4
módulo de persistência (generalizado), 47
módulo de persistência finito-dimensional, 57
módulo de persistência q-manso, 57
módulo intervalar, 48
módulo intervalar sobre o poset, 48
módulo quociente, 127
módulo sobre \mathbb{R} , 125
n-cadeias, 19
não evasivo, 110
núcleo, 126
núcleo do homomorfismo entre representações, 54
número de Betti, 22
objetos, 133
operador de bordo de homologia celular, 37
operador de bordo do Δ -complexo, 20
operador de prisma, 31
operadores de bordo, 4
ordem parcial em um esquema simplicial, 13
orientação de um simplexo, 8
orientação induzida, 9
p-ésimo número de Morse, 105
pareamento acíclico, 123
poliedro, 10
politopo, 10
ponto final, 51
ponto inicial, 51
ponto interior, 7
pontos independentes, 6
pontos linearmente independentes, 6
positivo definida, 142
positivo semi-definida, 142
posto, 126
Primeiro Teorema de Isomorfismo para espaços topológicos, 16
prisma, 30
produto, 125
quiver, 50
quiver conexo, 142
quiver de Dynkin, 146
quiver de Dynkin estendido, 146
quiver de tipo finito, 155
quiver finito, 50
raiz da forma de Tits, 142
raiz negativa da forma de Tits, 142
raiz positiva da forma de Tits, 142
realização geométrica, 10
representação decomponível, 54
representação finito-dimensional, 52
representação intervalar, 56
representação q-mansa, 52
representação trivial, 54
restrição do módulo de persistência, 47

Índice

- retrato, [131](#)
- retrato por contração, [131](#)
- retrato por deformação, [131](#)
- retração, [131](#)

- sequência exata, [4](#)
- Set, [133](#)
- simplexo n -dimensional, [6](#)
- simplexo crítico, [100](#)
- simplexo ordenado, [8](#)
- simplexo padrão, [7](#)
- simplexo positivo, [66](#)
- simplexo regular, [100](#)
- soma direta externa, [54](#)
- soma direta interna entre representações,
[54](#)
- sub-representação, [54](#)
- subcategoria das representações finito-dimensionais
de um quiver, [53](#)
- subcomplexo simplicial, [10](#)
- subconjunto gerador, [126](#)
- submódulo, [125](#)
- submódulo gerado, [126](#)

- tipo de homologia, [130](#)
- Top, [133](#)
- topo do cone do esquema simplicial, [14](#)
- topo do cone simplicial, [12](#)
- topologia induzida pela relação de equiva-
lência, [16](#)
- transformada de Fourier do esquema sim-
plicial, [114](#)
- Transformada Discreta de Fourier, [112](#)
- transformação natural, [134](#)
- triangularização, [16](#)
- triangularizável, [16](#)

- valor crítico, [100](#)
- valor regular, [100](#)
- vetor dimensão da representação, [137](#)

- vértices do grafo, [143](#)
- vértices do quiver, [50](#)
- vértices do simplexo, [6](#)

- árvores de decisão, [106](#)