



Universidade Federal do ABC

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FERNANDO PAVAN GUIDO

HOMOLOGIA PERSISTENTE E CURVATURA

SANTO ANDRÉ, 26 DE JUNHO DE 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

FERNANDO PAVAN GUIDO

HOMOLOGIA PERSISTENTE E CURVATURA

TESE APRESENTADA AO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE MESTRE EM MATEMÁTICA.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Miranda Machado

SANTO ANDRÉ, 26 DE JUNHO DE 2025

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Pavan Guido, Fernando
Homologia Persistente e Curvatura / Fernando Pavan Guido. — 2025.

116 fls. : il.

Orientação de: Daniel Miranda Machado

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2025.

1. Homologia Persistente. 2. Curvatura. 3. Topologia Algébrica. I.
Miranda Machado, Daniel. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática,
2025. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com anuência do orientador.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

**Ata de Defesa de Dissertação de Mestrado e Folha
de Assinaturas**

No dia 25 de Abril de 2025 às 10:00, no local: Sala 406 do Bloco B do Campus de Santo André da Universidade Federal do ABC, realizou-se a Defesa da Dissertação de Mestrado, que constou da apresentação do trabalho intitulado "Homologia Persistente e Curvatura" de autoria do candidato, FERNANDO PAVAN GUIDO, RA nº 21202230954, discente do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da UFABC, sob orientação do Profº DANIEL MIRANDA MACHADO. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o candidato foi considerado Aprovado pela Banca Examinadora.

E, para constar, foi lavrada a presente ata e folha de assinaturas assinada pelos membros da Banca.



Documento assinado digitalmente

DANIEL MIRANDA MACHADO

Data: 27/05/2025 16:52:47-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. DANIEL MIRANDA MACHADO, UFABC

Presidente - Interno ao Programa



Documento assinado digitalmente

MARIANA RODRIGUES DA SILVEIRA

Data: 29/05/2025 05:20:30-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dra. MARIANA RODRIGUES DA SILVEIRA, UFABC

Membro Titular - Examinador(a) Interno ao Programa



Documento assinado digitalmente

IVAN STRUCHINER

Data: 28/05/2025 09:00:46-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. IVAN STRUCHINER, USP

Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

Dr. CRISTIAN FAVIO COLETTI, UFABC

Membro Suplente - Examinador(a) Interno ao Programa

Dr. JEFERSON CASSIANO, UFABC

Membro Suplente - Examinador(a) Externo ao Programa

UFABC - Fundação Universidade Federal do ABC

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

Resumo

Com a necessidade de se armazenar conjuntos de dados cada vez maiores, mais complexos e difíceis de processar usando técnicas tradicionais de gerenciamento, tornou-se necessária a criação de métodos computacionais cada vez mais sofisticados que suprissem tais demandas, desse modo, uma nova área surgiu da confluência da Topologia Algébrica, Estatística e Probabilidade: a Análise Topológica de Dados. Essa área busca, a partir de ferramentas topológicas, dar sentido e interpretar conjuntos de informações que seriam extremamente difíceis por meio de processos convencionais. Dentre as diversas ferramentas desenvolvidas, a que usaremos é a chamada Homologia Persistente. Ela se utiliza do ferramental da Homologia para analisar nuvens de pontos, organiza os resultados obtidos em grupos abelianos e os representa por meio de diagramas, códigos de barras e tabelas, o que nos permite reconhecer padrões de forma mais dinâmica e eficiente.

Nessa dissertação mostramos como obter curvaturas específicas usando Homologia Persistente. Os cálculos de homologia persistente são caracterizados por um conjunto de intervalos chamados código de barra. Os intervalos longos representam o “sinal topológico” e os intervalos curtos normalmente são associados à “ruídos”. Nessa dissertação apresentamos evidências para contestar tal tese, mostrando que os intervalos curtos codificam informações geométricas. Especificamente, mostramos que a homologia persistente detecta a curvatura dos espaços dos quais pontos foram amostrados.

Palavras-Chave: Homologia Persistente, Análise Topológica de Dados, Curvatura

Abstract

With the need to store increasingly large, complex, and difficult-to-process datasets using traditional management techniques, it became necessary to develop increasingly sophisticated computational methods to meet such demands. As a result, a new field emerged from the convergence of Algebraic Topology, Statistics, and Probability: Topological Data Analysis (TDA). This field aims, through topological tools, to make sense of and interpret datasets that would be extremely difficult to analyze using conventional methods. Among the various tools developed within TDA, the one we will use is called Persistent Homology. It employs the machinery of Homology to analyze point clouds, organizes the results into abelian groups, and represents them through diagrams, barcodes, and tables, allowing us to recognize patterns in a more dynamic and efficient way.

In this dissertation, we show how to obtain specific curvatures using Persistent Homology. Persistent homology computations are characterized by a collection of intervals known as a barcode. Long intervals represent the “topological signal,” while short intervals are usually associated with “noise.” In this dissertation, we present evidence challenging this view, showing that short intervals encode geometric information. Specifically, we demonstrate that persistent homology detects the curvature of the spaces from which the points were sampled.

Keywords: Persistent Homology, Topological Data Analysis, Curvature

Agradecimentos

Sempre que o indelével peso do viver vence minha resiliência, sinto que é hora de buscar algo novo, por vezes o que nem ao certo sei. Recorria às artes para que a realidade não me roubasse a sanidade e dessa vez acabei por descobrir que não foi diferente. Sem muita explicação embarquei nessa jornada. Óbvio que tive medo, não são poucas as agruras, mas segurei forte a mão do meu grande amor, fechei os olhos e confiante fui. Tendo por âncora a narrativa do cotidiano, em meio à problemas e teoremas me dei por satisfeito, novos universos se abriam, velhos horizontes se esvaíam e, em um lampejo de genialidade, me encontrei.

Conheci pessoas incríveis, dividi angústias multipliquei alegrias, sem o deletério risco de esquecer alguém, não os nomearei, mas a todos que de algum modo, ainda que tênue fizeram parte de minha jornada, fica o meu muito obrigado. Ainda aos professores, quero deixar minha eterna gratidão, quando não por suas incríveis aulas e portas sempre abertas, por me ouvir, aconselhar, dividir experiências ou mesmo uma leve conversa pelos corredores, na lanchonete ou na sala do café.

E a matemática, sua álgebra é poesia concreta, incrível em forma, perfeita em conteúdo. Sua geometria é fria e austera, em poucas curvas e ângulos diz muito mais do que é necessário, as palavras, apenas formalizam o que a mente já visualizara. Já a topologia, ah essa goza de uma liberdade quase surreal, tal qual uma obra de Buñuel, traz uma terrível felicidade, agora sei, das artes, dentre todas elas, és tu topologia a mais bela.

Fazendo enfim essa obra, coloquei apenas o necessário, como disse a poetisa, já que há de se escrever, que pelo menos não se esmaguem com palavras as entrelinhas, pois o melhor ainda não foi escrito, e nem o será, minhas maiores descobertas jamais caberão em uma dissertação, pois sempre ocorriam em meio a alguma digressão, acompanhada de boa música e um café. Muito obrigado Daniel, você foi primordial, conduziu e me orientou de modo magistral, sem a sua ajuda, certamente não teria conseguido, mesmo nos momentos em que julguei não ser mais possível continuar, não me deixou desistir (e todo dia eu queria)... Essa vitória, eu dedico a você.

Conteúdo

Introdução	xv
1 Álgebra Homológica	1
1.1 R -módulos	1
1.2 Complexo de cadeias	4
1.3 Sequências exatas	5
1.4 Grupos de homologia	10
2 Homologia Simplicial	19
2.1 Complexos simpliciais	19
2.2 Homologia simplicial	24
2.3 Característica de Euler e números de Betti	27
2.4 Complexos de Čech e Vietoris-Rips	30
3 Homologia Persistente	37
3.1 Motivação	37
3.2 Álgebra dos espaços vetoriais persistentes	43
3.3 Homologia persistente	52
3.4 Algoritmos	55
3.5 Diagramas de persistência e códigos de barras	59
3.6 Distância bottleneck e estabilidade	64
4 Detecção de Curvatura	71
4.1 Geometria Hiperbólica	72
4.2 Geometria Esférica	75
4.3 Triângulos e sua homologia persistente	78
4.4 Triângulos mais persistentes	84
4.5 Persistência em triângulos equiláteros	86
4.6 Simulação e resultados	90
4.7 Códigos	96

Introdução

Uma das subáreas da topologia é a topologia algébrica, que como o nome sugere, utiliza-se do ferramental algébrico, tais como grupos, anéis ou espaços vetoriais, para obter informações e invariantes topológicos desses espaços.

Atualmente com o advento da computação e a quantidade de informações aumentando de modo significativo, foram necessário métodos cada vez mais sofisticados que dessem conta de armazenar e analisar grandes quantidades de dados no menor tempo possível. Desse modo, uma nova área surgiu da confluência da topologia algébrica, estatística e probabilidade: a análise topológica de dados, área que busca a partir de ferramentas topológicas dar sentido e interpretar conjuntos de dados que seriam extremamente difíceis por meio de processos convencionais. Dentre as diversas ferramentas desenvolvidas a que usaremos é a chamada homologia persistente, ela utiliza métodos algébricos para analisar a conectividade e os “buracos” multidimensionais em nuvens de pontos, organiza os resultados obtidos em grupos abelianos e os representa por meio de diagramas, códigos de barras e tabelas, o que permite uma visualização rápida e o reconhecimento de padrões de forma dinâmica e eficiente.

Hoje seu campo de atuação se expandiu sobremaneira encontrando aplicações nas mais diversas áreas, podemos destacar a ciência de materiais, análise de formas, reconstrução de gráficos, análise de progressão de doenças, teias cósmicas, propagação viral em redes, estudo de proteínas, robótica, redes neurais e tantas outras que extrapolam os domínios das ciências exatas.

Nessa dissertação mostramos como usar a homologia persistente para obter informações acerca da curvatura de superfícies com curvatura constante. Como pré-requisito para sua leitura, é exigido apenas álgebra linear básica, pois esse trabalho foi estruturado de modo que os assuntos são introduzidos de forma gradual e orgânica. Evitamos ao máximo que resultados e demonstrações fossem omitidas de modo a tornar a leitura o mais auto suficiente possível. Para os resultados que optamos não demonstrar em pró de uma melhor fluidez, deixamos indicado alguma referência que o fizesse.

No capítulo 1, apresentamos os pré requisitos algébricos para a compreensão dos temas trabalhados. De modo sucinto, abordamos os R -módulos, os complexos de cadeias e a teoria abstrata dos grupos de homologia. Esse capítulo possui um tratamento puramente algébrico, servindo como base para uma melhor compreensão dos conceitos que

serão tratados. Entretanto, sua leitura não é condição *sine qua non* uma vez que os resultados que dele farão uso em contextos menos gerais serão novamente enunciados e, quando necessário, demonstrados. Ele pode ser visto como uma extensão ao tema ou um aprofundamento da teoria à qual a álgebra dos complexos simpliciais se ancora.

No Capítulo 2 descrevemos os complexos simpliciais e descrevemos como obter resultados topológicos desses objetos geométricos por meio da álgebra simplicial. Introduzimos as principais ideias que nos permitirão construir os Complexos de Čech e de Vietoris-Rips. Por fim, abordamos os números de Betti, a característica de Euler e as filtrações dos complexos anteriormente citados.

No Capítulo 3 introduzimos os espaços vetoriais persistentes e a homologia persistente, teoria essa que se utiliza de filtrações em complexos simpliciais para fazer análise de características topológicas em conjuntos de dados. Também apresentamos alguns algoritmos importantes como o algoritmo para computação de números de Betti em filtrações, algoritmo de pares persistentes e o algoritmo de computação persistente matricial. Finalmente descrevemos como representar os resultados obtidos por meio de códigos de barras, tabelas p-dimensionais e diagramas de persistência.

Por fim no Capítulo 4, mostramos como o ruído de um diagrama de persistência pode ser utilizado e como ele guarda importantes informações acerca do espaço ambiente. Construimos o ferramental e apresentamos como utilizá-lo a fim de obter a curvatura de um espaço com curvatura constante.

1 Álgebra Homológica

Álgebra homológica é um ramo fundamental da álgebra desenvolvida inicialmente como ferramenta para lidar com problemas topológicos (grupos de homologia) mas cujo uso se expandiu para diversas áreas como geometria e teoria dos números. Nesse capítulo exploramos os conceitos centrais da álgebra homológica, as principais ferramentas algébricas e a linguagem necessária para compreender a homologia abstrata. Faremos uma breve revisão sobre R -módulos e apresentaremos alguns resultados estruturais sobre tais objetos. Apresentaremos os complexos de cadeias, sequências interligadas de R -módulos e homomorfismos colocando um olhar especial às chamadas sequências exatas, que são complexos de cadeias com certas propriedades específicas. Para quem desejar se aprofundar mais nos resultados apresentados, sugerimos a leitura de ([Hatcher, 2005](#)), obra clássica sobre Topologia Algébrica.

1.1 R -módulos

Definição 1.1. *Seja R um anel associativo com unidade 1. Um R -módulo à esquerda consiste em um grupo abeliano aditivo $(M, +)$ e uma multiplicação por escalar*

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto r \cdot m = rm \end{aligned}$$

de modo que, para todo $m, m' \in M$ e todo $r, r' \in R$, valem as propriedades:

$$i) \quad r(m + m') = rm + rm'$$

$$ii) \quad (r + r')m = rm + r'm$$

$$iii) \quad (rr')m = r(r'm)$$

$$iv) \quad 1m = m.$$

De modo análogo definimos um R -módulo à direita como o grupo abeliano aditivo $(M, +)$ dotado de uma multiplicação por escalar que satisfaz às mesmas propriedades

acima fazendo-se os ajustes necessários. É tácito que se o anel em questão for comutativo, não faz sentido distinguir entre módulos à esquerda e à direita.

Definição 1.2. *Sejam M e N dois R -módulos à esquerda, a aplicação $f : M \longrightarrow N$ é um **homomorfismo de R -módulos** à esquerda se*

$$i) \quad f(m + m') = f(m) + f(m')$$

$$ii) \quad f(rm) = rf(m)$$

para todo $m, m' \in M$ e todo $r \in R$.

Se esse homomorfismo for bijetor, diremos que se trata de um **isomorfismo de R -módulos** e, nesse caso, M e N são ditos **isomorfos**. Para $S \subseteq M$, dizemos que S é um **R -submódulo** de M se S é um R -módulo com respeito a ação de R sobre M e a restrição da operação $+$ em M .

Definição 1.3. *Dado um R -submódulo N de M , definimos o **módulo quociente** de M por N como sendo o grupo abeliano M/N com a estrutura de R -módulo dada por*

$$r(m + N) = rm + N, \quad \forall r \in R, \quad m \in M.$$

E se ele for da forma $N/\text{im } f$ para algum $f : M \longrightarrow N$ será chamado **cokernel** e denotaremos por $\text{coker}(f)$.

Teorema 1.4 (Teoremas do Isomorfismo). *Dado um R -módulo à esquerda M .*

i) Seja $f : M \longrightarrow N$ um homomorfismo de R -módulo, então

$$\frac{M}{\ker f} \cong \text{im } f.$$

ii) Se M_1 e M_2 são R -submódulos de M , então

$$\frac{M_1 + M_2}{M_1} \cong \frac{M_2}{M_1 \cap M_2}.$$

iii) Se N e P são R -submódulos de M e $P \subseteq N \subseteq M$, então P é um submódulo de N e além disso

$$\frac{M/P}{N/P} \cong \frac{M}{N}.$$

Definição 1.5. *A **soma direta** de uma família arbitrária $\{M_i\}_{i \in I}$ de R -módulos que será denotada por $\bigoplus_{i \in I} M_i$ é o submódulo de $\prod_{i \in I} M_i$ formado pelos elementos $(v_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ com suporte finito, isto é, $v_i = 0$ exceto para uma quantidade finita de índices.*

Dada uma soma direta $\bigoplus_{i \in I} M_i$, podemos associar naturalmente dois homomorfismos:

- projeção $\pi_j : \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow M_j$ para cada $j \in I$;
- inclusão $i_j : M_j \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ para cada $j \in I$.

Proposição 1.6. *Sejam M um R -módulo e $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de submódulos de M . Se $M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$ então todo $m \in M$ pode ser escrito de modo único como*

$$m_{i_1} + \dots + m_{i_k} \text{ com } i_k \in I, m_{i_k} \in M_{i_k}.$$

Dado um R -módulo M , um subconjunto $\emptyset \neq S \subseteq M$, é um **conjunto gerador** de M se todo elemento de M puder ser escrito como uma combinação linear de elementos de S com coeficientes em R , ou seja, dado $m \in M$,

$$m = \sum_{t=1}^k r_t m_t, \quad r_t \in R, m_t \in S.$$

Nesse caso, denotamos $M = \langle S \rangle$. Um conjunto $\emptyset \neq B \subseteq M$, é uma **base** de M se todo elemento de M puder ser escrito de modo único como combinação linear dos elementos de B com coeficientes em R .

Definição 1.7.

- Um R -módulo é **finitamente gerado** se admite um conjunto gerador finito.
- Um módulo é chamado de **módulo cíclico** se for gerado por um elemento.
- Um R -módulo é **livre** se possui uma base.

Definição 1.8. *Dado um R -módulo M , o conjunto*

$$\text{Anl}(M) = \{a \in R \mid am = 0, \forall m \in M\}$$

*é denominado **anulador** do módulo M . De modo análogo definimos o anulador de um subconjunto de M . Quando $\text{Anl}(M) = \{0\}$, diremos que M é um R -módulo **fiel**.*

Dado M um R -módulo, quando um elemento $m \in M$ for tal que $\text{Anl}(m) = \{0\}$ dizemos que m é **livre**, caso contrário dizemos que m é um **elemento de torção**, dito de outro modo, $m \in M$ é de torção se existe $a \in R, a \neq 0$ tal que $am = 0$. Ele será **livre de torção** se todos os seus elementos não nulos são livres.

Um **domínio de integridade** é um anel comutativo em que o produto de quaisquer dois elementos não nulos é sempre diferente de zero. Um **domínio de ideais principais**, ou DIP, é um domínio de integridade em que todo ideal é principal, isto é, pode ser gerado por um único elemento.

Teorema 1.9 (Estrutura de módulos finitamente gerados sobre um DIP). *Sejam R um domínio de ideais principais e M um R -módulo finitamente gerado. Então*

$$M \cong \underbrace{R \oplus R \oplus \cdots \oplus R}_{r \text{ vezes}} \oplus R/\langle q_1 \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle q_m \rangle$$

para algum $r \geq 0$ e elementos $q_1, \dots, q_m \in R$ diferentes de 0, 1 de modo que q_1 divide q_2 , q_2 divide q_3 , e assim sucessivamente.

Na decomposição acima, os elementos $q_1, \dots, q_m \in R$ recebem o nome de **fatores invariantes** de M e o inteiro r é chamado de **posto livre** de M , além disso:

- $R^r = R \oplus \cdots \oplus R$ é a parte livre de M ;
- $R/\langle q_1 \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle q_m \rangle$ é a parte de torção.

Corolário 1.10 (Estrutura de grupos abelianos finitamente gerados). *Seja G um grupo abeliano finitamente gerado, então podemos escrever G de modo único como*

$$\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ vezes}} \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_m}$$

com $r \geq 0$ e $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$ tais que $n_j \geq 2$ para todo j e $n_i | n_{i+1}$ para $1 \leq i \leq m-1$.

1.2 Complexo de cadeias

Definição 1.11. Um **complexo de cadeias** (C_p, d_p) é uma sequência de R -módulo e homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} C_p \xrightarrow{d_p} C_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

em que vale a igualdade $d_p \circ d_{p+1} = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Dito de outro modo, um complexo de cadeias (C_p, d_p) é um R -módulo $\mathbb{Z}$ -graduado

$$C = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p$$

munido de um homomorfismo de R -módulos $d_p : C_p \longrightarrow C_{p-1}$ satisfazendo $d_p(C_p) \subseteq C_{p-1}$ e também que $d_p \circ d_{p+1} = 0$.

Chamamos de **p -cadeia** a cada elemento $c \in C_p$, e sempre que tivermos $d_p(c) = 0$, ele será chamado **p -ciclo** (ou quando não houver margem para dúvidas, diremos apenas **cadeia** e **ciclo** respectivamente).

Definição 1.12. *Seja (C_*, d_*) um complexo de cadeias de R -módulos.*

- i) Chamamos de **operador bordo** o homomorfismo d e quando quisermos nos referir ao homomorfismo d_p diremos **p -ésimo operador bordo**.
- ii) Quando $d_{p+1}(c) = b$ dizemos que a p -cadeia **b** é o bordo da $(p+1)$ -cadeia **c** .
- iii) O conjunto Z_p contendo os p -ciclos é um submódulo de C_p , ele é o núcleo do homomorfismo $d_p : C_p \longrightarrow C_{p-1}$.
- iv) O conjunto B_p contendo as p -cadeias que são bordos das $(p+1)$ -cadeias é um submódulo de C_p , ele é a imagem do homomorfismo $d_{p+1} : C_{p+1} \longrightarrow C_p$.

Das relações estabelecidas entre os conjuntos acima definidos, podemos extrair o diagrama da Figura 1.1 adaptada de (Edelsbrunner, H.; Harer, 2022):

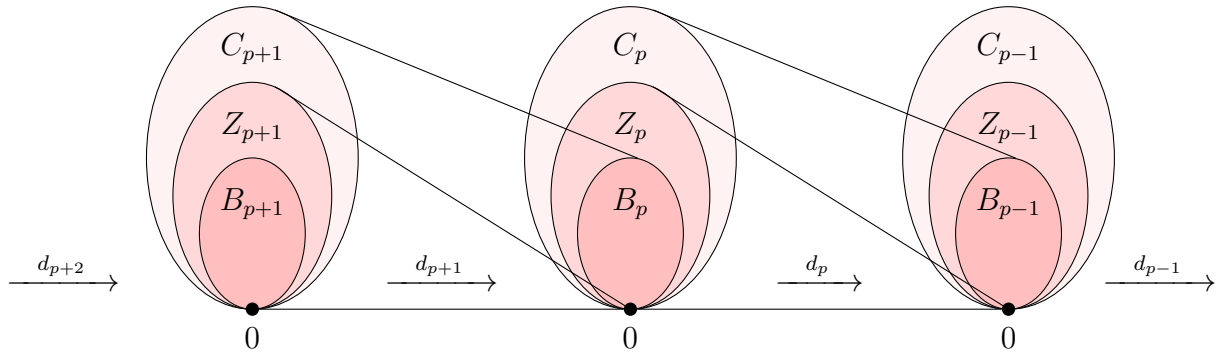


Figura 1.1: Relação entre os conjuntos de um complexo de cadeias.

1.3 Sequências exatas

Definição 1.13. *Dado um complexo de cadeias*

$$\cdots \xrightarrow{d_{p+2}} C_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} C_p \xrightarrow{d_p} C_{p-1} \xrightarrow{d_{p-1}} \cdots$$

*diremos que esse complexo é uma **sequência exata em C_p** quando $\text{im } d_{p+1} = \ker d_p$.*

*Quando uma sequência for exata em todo C_p , diremos simplesmente que é uma **sequência exata**.*

Dada uma sequência exata, o homomorfismo d_{p+1} será injetivo se, e somente se, $d_{p+1} = 0$. Para demonstrar esse fato recordamos que d_{p+2} é injetivo se, e somente se, $\ker d_{p+1} = \{0\}$, e como $\ker d_{p+1} = \text{im } d_{p+2}$, obtemos o resultado esperado.

Já o homomorfismo d_p será sobrejetivo se, e somente se, $d_{p-1} = 0$. Sendo d_p sobrejetivo se, e somente se, $\text{im } d_p = C_{p-1}$, de $\text{im } d_p = \ker d_{p-1}$, obtemos o resultado esperado.

Em particular, as sequências

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} C \text{ e } B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

serão exatas se, e somente se, f for injetivo e g sobrejetivo.

Assim, a sequência

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$$

será exata se, e somente se, f for um isomorfismo entre os espaços B e C .

Definição 1.14. *Dados um complexo de cadeias, e $f : B \longrightarrow C$, $g : C \longrightarrow D$ homomorfismos, a uma sequência exata do tipo*

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D \longrightarrow 0$$

*chamamos **sequência exata curta**.*

Inferimos então que uma sequência como a introduzida na Definição 1.14 será exata se, e somente se:

- i) $\text{im } f = \ker g$;
- ii) f é injetora;
- iii) g é sobrejetora.

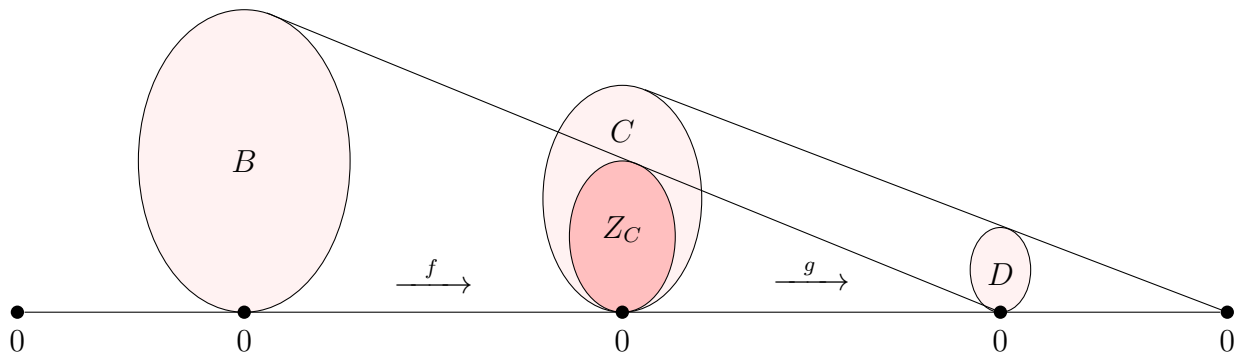


Figura 1.2: A figura é a representação de uma sequência exata curta. Ela inicia e termina em espaços nulos sendo exata em cada um dos espaços B , C e D .

Lema 1.15 (Lema dos 5). *Dado um diagrama comutativo com duas sequências exatas e $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ homomorfismos tais que:*

i) α é um epimorfismo;

ii) β e δ são isomorfismos;

iii) ϵ é um monomorfismo,

então γ é um isomorfismo.

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & E \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \epsilon \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & E' \end{array}$$

Demonstração. Queremos mostrar que $\gamma : C \rightarrow C'$ é um isomorfismo e para tal, mostraremos primeiro ser injetiva e posteriormente sobrejetiva.

Injetividade: Seja $c \in C$ e suponha que $\gamma(c) = 0$, temos

$$\begin{aligned} h'(\gamma(c)) &= \delta(h(c)) \\ h'(0) &= \delta(h(c)) \\ 0 &= \delta(h(c)). \end{aligned}$$

Sendo δ um isomorfismo, segue que $h(c) = 0$ e portanto, $c \in \ker h$. Pela exatidão da sequência em C , $c \in \operatorname{im} g$. Seja $b \in B$ de modo que $g(b) = c$, temos

$$\begin{aligned} g'(\beta(b)) &= \gamma(g(b)) \\ g'(\beta(b)) &= \gamma(c) \\ g'(\beta(b)) &= 0. \end{aligned}$$

Desse modo, $\beta(b) \in \ker g'$. Pela exatidão da sequência em B' , $\beta(b) \in \operatorname{im} f'$. Seja $a' \in A'$ de modo que $f'(a') = \beta(b)$. Sendo α um epimorfismo, existe $a \in A$ de modo que $\alpha(a) = a'$, temos

$$\begin{aligned} f'(\alpha(a)) &= f'(a') \\ \beta(f(a)) &= f'(a') \\ \beta(f(a)) &= \beta(b). \end{aligned}$$

Uma vez que β é um isomorfismo, $f(a) = b$ e portanto, $b \in \operatorname{im} f$. Pela exatidão da sequência em B , $b \in \ker g$, ou seja, $g(b) = 0$. Mas como $g(b) = c$, segue que $c = 0$ como queríamos e portanto γ é injetora.

1 Álgebra Homológica

Sobrejetividade: Seja $c' \in C'$, sendo δ isomorfismo, existe um único $d \in D$ tal que

$$\begin{aligned} h'(c') &= \delta(d) \\ i'(h'(c')) &= i'(\delta(d)) \\ 0 &= i'(\delta(d)) \\ 0 &= \epsilon(i(d)). \end{aligned}$$

Uma vez que ϵ é um monomorfismo, $i(d) = 0$ e portanto, $d \in \ker i$. Pela exatidão da sequência em D , $d \in \text{im } h$. Seja $c \in C$ de modo que $h(c) = d$, temos

$$\begin{aligned} \delta(h(c)) &= \delta(d) \\ h'(\gamma(c)) &= \delta(d) \\ h'(\gamma(c)) &= h'(c'). \end{aligned}$$

Da igualdade obtemos $h'(c') - h'(\gamma(c)) = 0$ e sendo h' homomorfismo, concluimos que $h'(c' - \gamma(c)) = 0$, ou seja, $[c' - \gamma(c)] \in \ker h'$. Pela exatidão da sequência em C' , $[c' - \gamma(c)] \in \text{im } g'$. Seja $b' \in B'$ de modo que $g'(b') = c' - \gamma(c)$. Sendo β um isomorfismo, existe um único $b \in B$ tal que

$$\begin{aligned} b' &= \beta(b) \\ g'(b') &= g'(\beta(b)) \\ c' - \gamma(c) &= g'(\beta(b)) \\ c' - \gamma(c) &= \gamma(g(b)) \\ c' &= \gamma(g(b)) + \gamma(c). \end{aligned}$$

Sendo γ um homomorfismo, $\gamma(g(b) + c) = c'$ e portanto γ é sobrejetora. □

Definição 1.16. Dada uma sequência exata curta $\mathcal{C}$ na forma:

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D \longrightarrow 0$$

diremos que ela **cinde** se existe uma sequência exata curta $\mathcal{C}'$ na forma:

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{i_B} B \oplus D \xrightarrow{\pi_D} D \longrightarrow 0$$

e um isomorfismo $\phi : C \longrightarrow B \oplus D$ tal que o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & D \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id_B & & \downarrow \phi & & \downarrow id_D \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{i_B} & B \oplus D & \xrightarrow{\pi_D} & D \longrightarrow 0 \end{array}$$

Lema 1.17 (Lema da Cisão). *Dada uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D \longrightarrow 0$$

as seguintes afirmações são equivalentes:

i) *Existe um homomorfismo de R -módulos $f^\leftarrow : C \longrightarrow B$ tal que $f^\leftarrow \circ f = \text{id}_B$.*

ii) *A sequência cinde.*

iii) *Existe um homomorfismo de R -módulos $g^\leftarrow : D \longrightarrow C$ tal que $g \circ g^\leftarrow = \text{id}_D$.*

Demonstração. Usaremos a notação i_D para a inclusão de D em $B \oplus D$ e π_B para a projeção de $B \oplus D$ em B .

i) $\Rightarrow$ ii) Primeiramente vamos provar que

$$C = \ker f^\leftarrow \oplus \text{im } f.$$

Vejamos que $C \subseteq \ker f^\leftarrow + \text{im } f$. Dado $c \in C$, podemos escrever $c = (c - f(f^\leftarrow(c))) + f(f^\leftarrow(c))$, com $f(f^\leftarrow(c)) \in \text{im } f$ e $c - f(f^\leftarrow(c)) \in \ker f^\leftarrow$, uma vez que

$$f^\leftarrow(c - f(f^\leftarrow(c))) = f^\leftarrow(c) - f^\leftarrow(f(f^\leftarrow(c))) = f^\leftarrow(c) - \text{id}_B(f^\leftarrow(c)) = f^\leftarrow(c) - f^\leftarrow(c) = 0.$$

Logo $C = \ker f^\leftarrow + \text{im } f$, dado que $\ker f^\leftarrow + \text{im } f \subseteq C$, por definição de $f^\leftarrow$ e f .

Provemos agora que $\ker f^\leftarrow \cap \text{im } f = \{0\}$. Dado $m \in \ker f^\leftarrow \cap \text{im } f$, temos que $f^\leftarrow(m) = 0$ e $m = f(b)$, para algum $b \in B$. Mas $f^\leftarrow(f(b)) = f^\leftarrow(m) = 0$ e $f^\leftarrow(f(b)) = \text{id}_B(b) = b$. Logo $b = 0$ e $m = 0$. Portanto, $C = \ker f^\leftarrow \oplus \text{im } f$.

Para terminarmos a demonstração, basta mostrarmos que $\ker f^\leftarrow \cong D$ e $\text{im } f \cong B$. Claramente, $\text{im } f$ é isomorfo a B , pois pela exatidão de $0 \rightarrow B \xrightarrow{f} C$, f é injetora ($\ker f = 0$), e logo temos $B \cong B/\ker f \cong \text{im } f$, pelo Teorema do Isomorfismo.

Provemos que $\ker f^\leftarrow \cong D$. Como, $C = \ker f^\leftarrow \oplus \text{im } f$, dado $c \in C$, $c = k + f(b)$, para algum $k \in \ker f^\leftarrow$ e $b \in B$. Sendo g sobrejetora, para todo $d \in D$, existe $c = k + f(b)$ tal que $g(k + f(b)) = d$, daí $d = g(k) + g(f(b)) = g(k)$, pois $\ker g = \text{im } f$. Assim, para todo $d \in D$, existe $k \in \ker f^\leftarrow$, tal que $g(k) = d$. Logo, $g(\ker f^\leftarrow) = D$. Se $g(k) = 0$ então $k \in \text{im } f$ (por exatidão), e assim $k \in \ker f^\leftarrow \cap \text{im } f \Rightarrow k = 0$. Logo, a restrição $g|_{\ker f^\leftarrow} : \ker f^\leftarrow \rightarrow D$ é um isomorfismo. Finalmente, concluímos que $C = \ker f^\leftarrow \oplus \text{im } f \cong B \oplus D$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Defina $g^\leftarrow = \varphi \circ i_D$ com $\varphi = \phi^{-1}$, assim:

$$\begin{aligned} g \circ g^\leftarrow &= g \circ (\varphi \circ i_D) \\ &= (g \circ \varphi) \circ i_D \\ &= \pi_D \circ i_D \\ &= \text{id}_D. \end{aligned}$$

$iii) \Rightarrow ii)$ O argumento é análogo ao usado na demonstração da primeira implicação. Vamos provar primeiramente que $C = \ker g \oplus \text{im } g^\leftarrow$. Claramente, $\ker g + \text{im } g^\leftarrow \subseteq C$, vejamos que $C \subseteq \ker g + \text{im } g^\leftarrow$. Dado $c \in C$, podemos escrever $c = (c - g^\leftarrow(g(c))) + g^\leftarrow(g(c))$, com $g^\leftarrow(g(c)) \in \text{im } g^\leftarrow$ e $c - g^\leftarrow(g(c)) \in \ker g$, pois

$$g(c - g^\leftarrow(g(c))) = g(c) - gg^\leftarrow(g(c)) = g(c) - \text{id}_D(g(c)) = g(c) - g(c) = 0.$$

Logo, $C = \ker g + \text{im } g^\leftarrow$.

Finalmente, provaremos que $\ker g \cap \text{im } g^\leftarrow = \{0\}$. Dado $m \in \ker g \cap \text{im } g^\leftarrow$, temos que $g(m) = 0$ e $m = g^\leftarrow(d)$, para algum $d \in D$. Mas $g(g^\leftarrow(d)) = g(m) = 0$ e $g(g^\leftarrow(d)) = \text{id}_D(d) = d$. Segue que $d = 0$ e $m = g^\leftarrow(0) = 0$. Portanto, $C = \ker g \oplus \text{im } g^\leftarrow$. Por exatidão da sequência, temos $\text{im } f = \ker g$ e como f é injetora, $\text{im } f \cong B$. Logo, $B \cong \ker g$. Como $\text{id}_D = g \circ g^\leftarrow$ é uma bijeção, $g^\leftarrow$ é necessariamente injetora, logo $\text{im } g^\leftarrow \cong D$. Portanto, $C = \ker g \oplus \text{im } g^\leftarrow \cong B \oplus D$.

$ii) \Rightarrow i)$ Defina $f^\leftarrow = \pi_B \circ \phi$, assim:

$$\begin{aligned} f^\leftarrow \circ f &= (\pi_B \circ \phi) \circ f \\ &= \pi_B \circ (\phi \circ f) \\ &= \pi_B \circ i_B \\ &= \text{id}_B. \end{aligned}$$

□

1.4 Grupos de homologia

Dado um complexo de cadeias (C_p, d_p) , uma vez que o homomorfismo d satisfaz $d \circ d = 0$, todo n -bordo é um n -ciclo, desse modo, temos que

$$0 \subseteq B_p(C) \subseteq Z_p(C) \subseteq C_p \quad p \in \mathbb{Z}$$

Desse modo, o quociente $Z_p(C)/B_p(C)$ está bem definido e, portanto, podemos definir os grupos de homologia associados a um complexo de cadeias.

Definição 1.18. *Seja (C_p, d_p) um complexo de cadeias de R -módulos, o p -ésimo **grupo de homologia** associado ao complexo C é definido como*

$$H_p(C) := \frac{\ker d_p}{\operatorname{im} d_{p+1}} = \frac{Z_p(C)}{B_p(C)}$$

para cada $p \in \mathbb{Z}$. À soma $H = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(C)$ chamamos de **homologia** de (C_p, d_p) e os elementos de $H_p(C)$ são as classes de homologia dadas por $[z] = z + B_p(C) = \{z + d_{n+1}(x) : x \in C_{n+1}\}$.

Se z e z' são n -ciclos, temos que $[z] = [z']$ se, e somente se $z - z' = d_{n+1}(x)$, para algum $x \in C_{n+1}$. Nesse caso, dizemos que z e z' são **ciclos homólogos**.

Os grupos de homologia são uma poderosa ferramenta para descobrir se uma sequência é exata, uma vez que, em casos assim, teremos $H_p(C) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Um complexo de cadeias com essa característica é chamado **acíclico**. Afirmamos então que, um complexo de cadeias (C, p) será acíclico se, e somente se for uma sequência exata.

Mais do que a exatidão de uma sequência, o estudo da homologia nos fornece informações importantes sobre seu $\ker$ e coker e a partir disso, recupera informações acerca da forma do objeto estudado e principalmente oferece ferramentas que nos possibilitam afirmar quando tais objetos são ou não isomorfos.

O resultado a seguir, mostra como os elementos citados interagem entre si fornecendo uma nova sequência, esse resultado é conhecido como **Lema da cobra** por conta de sua identidade visual:

Teorema 1.19 (Lema da Cobra). *Considere o seguinte diagrama comutativo formado por linhas exatas:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & D & \longrightarrow & 0 \\ & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{f'} & C' & \xrightarrow{g'} & D' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

com β, γ e δ homomorfismos. Então existe uma sequência exata (em preto):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker \beta & \xrightarrow{\bar{f}} & \ker \gamma & \xrightarrow{\bar{g}} & \ker \delta & \longrightarrow & 0 \\ & & i_B \downarrow & & i_C \downarrow & & i_D \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & D & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{f'} & C' & \xrightarrow{g'} & D' & \longrightarrow & 0 \\ & & \pi_B \downarrow & & \pi_C \downarrow & & \pi_D \downarrow & & \\ & & \operatorname{coker} \beta & \xrightarrow{\bar{f}'} & \operatorname{coker} \gamma & \xrightarrow{\bar{g}'} & \operatorname{coker} \delta & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(Note: The diagram includes a curved arrow labeled ψ from $\ker \delta$ to $\operatorname{coker} \delta$ and a curved arrow from B to $\operatorname{coker} \beta$.)

1 Álgebra Homológica

Demonstração. Dado $b \in \ker(\beta)$ perceba que

$$\gamma \circ f(b) = f' \circ \beta(b) = f'(0) = 0, \text{ logo}$$

$$f(b) \in \ker(\gamma).$$

De modo análogo, para $c \in \ker(\gamma)$ temos $g(c) \in \ker(\delta)$.

Desse modo faz sentido definir $\bar{f} := f|_{\ker(\beta)}$ e $\bar{g} := g|_{\ker(\gamma)}$.

Suponha agora que $[b'], [\hat{b}'] \in \text{coker}(\beta)$, escrevemos $[b'] = \{b'_0 + \text{im}(\beta) \text{ com } b'_0 \in B'\}$.

Se $[b'] = [\hat{b}']$ segue que $b'_0 - \hat{b}'_0 \in \text{im}(\beta) \implies b'_0 - \hat{b}'_0 = \beta(b)$ com $b \in B$. Temos que $f'(\beta(b)) = \gamma(f(b))$, logo $f(b) \in \text{im}(\gamma)$, isto é, $f'(b'_0) + \text{im}(\gamma) = f'(\hat{b}'_0) + \text{im}(\gamma)$.

De modo análogo podemos fazer para g' , desse modo, faz sentido definir:

$$\bar{f}'(b' + \text{im}(\beta)) = f'(b') + \text{im}(\gamma) \text{ e } \bar{g}'(c' + \text{im}(\gamma)) = g'(c') + \text{im}(\delta).$$

Para ψ , note que da exatidão da primeira linha, g é sobrejetiva e como $\ker(\delta) \subseteq D$, podemos supor que para cada $d \in \ker(\delta)$ existe um $c \in C$ de modo que $d = g(c)$.

Pela comutatividade do diagrama, segue que $0 = \delta(d) = \delta \circ g(c) = g' \circ \gamma(c)$.

Dessa forma, $\gamma(c) \in \ker(g')$ e pela exatidão da segunda linha, existe um único $b' \in B'$ tal que $f'(b') = \gamma(c)$ (pois f' é injetiva).

Podemos então definir:

$$\begin{aligned} \psi : \ker(\delta) &\longrightarrow \text{coker}(\beta) \\ d &\longmapsto [b']. \end{aligned}$$

ψ está bem definida pois basta a existência e unicidade de b' .

Suponha $c, \hat{c} \in C$ de modo que as igualdades a seguir sejam válidas;

$$f'(b') = \gamma(c), f'(\hat{b}') = \gamma(\hat{c}) \text{ e } g(c) = g(\hat{c}) = d$$

note que $g(c - \hat{c}) = d - d = 0$, isto é, $c - \hat{c} \in \text{im}(f)$ (pela exatidão da linha). Por fim, $c - \hat{c} = f(b)$ com $b \in \text{im}(f)$, ou seja, $\gamma(c) - \gamma(\hat{c}) = f' \circ \beta(b) \in \text{im}(f')$, por fim, $[b'] = [\hat{b}']$.

Vejamos agora a exatidão em cada um dos pontos:

- Veja que a sequência é exata em $\ker(\beta)$ o que segue do fato de que se f é injetiva então sua restrição $\bar{f}$ também é.
- A sequência é exata em $\ker(\gamma)$, pois dado $m \in \ker(\bar{g})$, segue que $m \in \ker(g)$. Como $g(m) = 0$ temos que $m = f(b) \in \text{im}(f)$.

Pela comutatividade do diagrama, $f' \circ \beta(b) = \gamma \circ f(b) = \gamma(m) = 0$ e pela injetividade de f' concluímos que $\beta(b) = 0$, isto é, $b \in \ker(\beta)$ mas como $m = f(b)$ então $m = \bar{f}(b)$ e portanto, $m \in \text{im}(\bar{f})$.

Por outro lado, se $n \in \text{im}(\bar{f}) \subseteq \text{im}(f)$ segue que $g \circ i_C(n) = 0$, pela comutatividade $i_D \circ \bar{g}(n) = 0$. Note porém que i_D é inclusão, então temos que $\bar{g}(n) = 0$ segue que $n \in \ker(\bar{g})$.

- A sequência é exata em $\ker(\delta)$, sendo $m \in \ker(\psi)$, temos que $m \in \ker(\delta)$, pela sobrejetividade de g segue que $m = g(c)$ para algum $c \in C$.

Note que $g' \circ \gamma(c) = \delta \circ g(c) = 0$, isto é, $\gamma(c) \in \ker(g')$ e como a linha é exata, existe um n tal que $n = \gamma(c) \in \text{im}(f')$.

Como $m \in \ker(\psi)$ temos que $[n] = 0$, em particular $n = \beta(b)$, assim

$$f' \circ \beta(b) = \gamma \circ f(b) = \gamma(c) \implies c - f(b) \in \ker(\gamma).$$

Note também que, $\bar{g}(c - f(b)) = \bar{g}(c) - \bar{g} \circ f(b) = \bar{g}(c) = m$, o que implica que $m \in \text{im}(\bar{g})$.

Por fim, $r \in \text{im}(\bar{g})$, existe $c \in \ker(\gamma)$ de modo que $r = \bar{g}(c)$, e dessa forma, $\gamma(c) = 0 = f'(0)$, o que implica que $\psi([r]) = [0]$.

- A sequência é exata em $\text{coker}(\beta)$ pois dado $[m] \in \ker(\bar{f}')$, temos que:

$$[f'(m)] = 0 \in \text{coker}(\gamma), \text{ em particular } f(m) = \gamma(c) \in \text{im}(\gamma).$$

Desse modo, $\delta \circ g(c) = g' \circ \gamma(c) = g' \circ f'(m) = 0$, ou seja $g(c) \in \ker(\delta)$ e, pela construção de ψ , temos que $[m] \in \text{im}(\psi)$.

Por outro lado, $[n] \in \text{im}(\psi)$, pela forma como foi definida, temos $f'(n) = \gamma(c)$ para algum $b \in B$. Desse modo:

$$[f'(n)] = [0] \in \text{coker}(\gamma), \text{ isto é, } f' \circ \delta([n]) = 0, \text{ para todo } n \in \text{coker}(\beta).$$

- É também exata em $\text{coker}(\beta)$, pois dado $[m] \in \ker(\bar{g}')$, temos que $g'(m) = \delta(d)$ para algum $d \in D$, sendo g sobrejetora, temos que $d = g(c)$ para algum $c \in C$, logo $[m - \gamma(c)] = [m]$.

Note porém que $g'(m - \gamma(c)) = \delta(d) - \delta \circ g(c) = \delta(d) - \delta(d) = 0$. Como a linha é exata, existe um $b' \in B'$ tal que $f'(b') = m$ do qual, $\bar{f}'([b']) = [m]$.

No mais, se $[n] \in \text{coker}(\beta)$ como $g' \circ f'(n) = 0$, temos $\bar{f}' \circ \bar{g}'([n]) = 0 + \text{im}(\delta) = [0]$.

- Por fim, é exata em $\text{coker}(\delta)$, sendo g' sobrejetiva, a projeção $\bar{g}'$ também é.

□

É necessário destacar que o ponto mais importante desse teorema é a definição do homomorfismo ψ que chamamos de **homomorfismo de conexão** que como veremos desempenha um papel importante em vários momentos da teoria, mas, em particular, será imprescindível no Lema do Zig-Zag que será apresentado mais a frente.

Lema 1.20 (Lema de Mayer-Vietoris). *Seja*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & B_p & \xrightarrow{f_p} & C_p & \xrightarrow{g_p} & D_p & \xrightarrow{\psi_p} & B_{p-1} & \xrightarrow{f_{p-1}} & C_{p-1} & \xrightarrow{g_{p-1}} & D_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \beta_p \downarrow & & \gamma_p \downarrow & & \delta_p \downarrow & & \beta_{p-1} \downarrow & & \gamma_{p-1} \downarrow & & \delta_{p-1} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & B'_p & \xrightarrow{f'_p} & C'_p & \xrightarrow{g'_p} & D'_p & \xrightarrow{\psi'_p} & B'_{p-1} & \xrightarrow{f'_{p-1}} & C'_{p-1} & \xrightarrow{g'_{p-1}} & D'_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

um diagrama comutativo formado por linhas exatas, se δ_p é um isomorfismo para todo $p \in \mathbb{Z}$, então existe uma sequência exata chamada **Sequência de Mayer-Vietoris** da forma

$$\cdots \longrightarrow B_p \xrightarrow{(\beta_p, f_p)} B'_p \oplus C_p \xrightarrow{\gamma_p - f'_p} C'_p \xrightarrow{\psi_p \delta_p^{-1} g'_p} B_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

Os detalhes para a prova desse resultado podem ser encontrados em ([Hatcher, 2005](#)).

Definição 1.21. *Sejam dois complexos de cadeias $\mathcal{C} = (C_p, d_p)$ e $\mathcal{C}' = (C'_p, d'_p)$, um morfismo $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é uma sequência de homomorfismos $f_p : C_p \longrightarrow C'_p$ com $p \in \mathbb{Z}$ tais que $f_p \circ d_{p+1} = d'_{p+1} \circ f_{p+1}$ para todo p , ou em outras palavras, todos os retângulos a seguir são comutativos*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{d_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{d_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\ & & f_{p+1} \downarrow & & f_p \downarrow & & f_{p-1} \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{d'_{p+1}} & C'_p & \xrightarrow{d'_p} & C'_{p-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Proposição 1.22. *Sejam dois complexos de cadeias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ e um morfismo de cadeias f , então para cada $p \in \mathbb{Z}$ a aplicação $f_p : C_p \longrightarrow C'_p$ induz um homomorfismo:*

$$\begin{aligned} (f_*)_p : H_p(\mathcal{C}) &\longrightarrow H_p(\mathcal{C}') \\ [x] &\longmapsto [f_p(x)]. \end{aligned}$$

Demonstração. Fixe $p \in \mathbb{Z}$, dados $[x]$ e $[y] \in H_p(\mathcal{C})$ de modo que $[x] = [y]$, temos:

$$[x] = \{x + d_{p+1}(x'), x' \in C_{p+1}\} = \{y + d_{p+1}(y'), y' \in C_{p+1}\} = [y],$$

ou seja, $y = x + d_{p+1}(z)$ para algum $z \in C_{p+1}$, de sorte que

$$f_p(y) = f_p(x) + f_p \circ d_{p+1}(z) = f_p(x) + d'_{p+1} \circ f_{p+1}(z) = f_p(x) + d'_{p+1}(z').$$

Desse modo, $f_p(y) \in \{f_p(x) + d'_{p+1}(x'), x' \in C'_{p+1}\}$, do qual, $[f_p(y)] = [f_p(x)]$ o que mostra que $(f_*)_n$ está bem definida. Por fim, note que, sendo f_p um homomorfismo, implica que $(f_*)_n$ também será, uma vez que:

$$[f_p(x)] + [f_p(y)] = [f_p(x) + f_p(y)] = [f_p(x + y)]$$

$$k[f_p(x)] = [kf_p(y)] = [f_n(kx)]$$

□

Definição 1.23. À coleção de homomorfismos $(f_*)_p$ definidos acima, damos o nome de **homomorfismo induzido por f** .

Proposição 1.24. Se $(id_C)_p$ é o morfismo identidade então $(id_*)_p$ é a identidade em $H_p(C)$.

Demonstração. Note que para cada $p \in \mathbb{Z}$:

$$(id_*)_p([x]) = [id_{C_p}(x)] = [x]$$

□

Proposição 1.25. Dados $f : C \longrightarrow C'$ e $g : C' \longrightarrow C''$ morfismos de cadeia então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Demonstração. Dado $p \in \mathbb{Z}$, temos:

$$(g_p \circ f_p)_*[x] = [g_p \circ f_p(x)] = (g_p)_*[f_p(x)] = (g_p)_*((f_p)_*[x]) = (g_p)_* \circ (f_p)_*[x]$$

□

Definição 1.26. Sejam $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ complexos de cadeia e $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$, $g : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ morfismos de cadeias. A sequência de complexos de cadeias

$$0 \longrightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{C} \xrightarrow{g} \mathcal{D} \longrightarrow 0$$

é dita exata se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B_{p+1} & \xrightarrow{f_{p+1}} & C_{p+1} & \xrightarrow{g_{p+1}} & D_{p+1} \longrightarrow 0 \\
 & & d_{p+1} \downarrow & & d'_{p+1} \downarrow & & d''_{p+1} \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B_p & \xrightarrow{f_p} & C_p & \xrightarrow{g_p} & D_p \longrightarrow 0 \\
 & & d_p \downarrow & & d'_p \downarrow & & d''_p \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B_{p-1} & \xrightarrow{f_{p-1}} & C_{p-1} & \xrightarrow{g_{p-1}} & D_{p-1} \longrightarrow 0 \\
 & & d_{p-1} \downarrow & & d'_{p-1} \downarrow & & d''_{p-1} \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Note aqui a importância do homomorfismo de conexão que introduzimos no teorema 1.19, ele faz menção ao morfismo $\psi_p : \ker d''_p \rightarrow \text{coker } d_p$, o Lema da Cobra nos garante que, para todo $p \in \mathbb{Z}$, o homomorfismo ψ_p existe e está bem definido, além disso, temos:

$$H_p(\mathcal{D}) = \frac{\ker d''_p}{\text{im } d''_{p+1}} \quad \text{e} \quad H_{p-1}(\mathcal{B}) = \frac{\ker d_{p-1}}{\text{im } d_p}.$$

Dado $d \in \ker d''_p$, tomamos sua classe $[d] \in H_p(\mathcal{D})$. Pela construção de ψ , $b = \psi(d) \in B_{p-1}$ é tal que

$$\begin{aligned}
 f_{p-1}(b) &= d'_p(c) \\
 d'_{p-1} \circ f_{p-1}(b) &= d'_{p-1} \circ d'_p(c) = 0,
 \end{aligned}$$

logo, $f_{p-2} \circ d_{p-1}(b) = 0$. Sendo f_{p-2} injetiva, temos que $b \in \ker d_{p-1}$. Em particular, a classe $[b] \in H_{p-1}(\mathcal{B})$ é a mesma que $[b] \in \text{coker } d_p$ então podemos definir $(\psi_p)_*$ como segue:

$$\begin{aligned}
 (\psi_p)_* : H_p(\mathcal{D}) &\longrightarrow H_{p-1}(\mathcal{B}) \\
 [d] &\longmapsto \psi(d) = [b].
 \end{aligned}$$

Note ainda que, se $[d_1], [d_2] \in H_p(\mathcal{D})$ são tais que $[d_1] = [d_2]$, $d_1 - d_2 = d \in \text{im } d''_{p+1}$, pela sobrejetividade de g_{p+1} , existe $c' \in C_{p+1}$ tal que $g_{p+1}(c') = d$. Temos que $g_p \circ d'_{p+1}(c) = d_1 - d_2$.

Pelo Lema da Cobra, se $\psi(d_1 - d_2) = [b]$ então $f_{p-1}(b) = d'_p \circ d'_{p+1}(c) = 0$, logo $[b] = [0]$. Portanto $(\psi_p)_*$ está bem definida.

De posse dessas informações, vamos enunciar e demonstrar o **Lema do Zig-Zag**.

Teorema 1.27 (Lema do Zig-Zag). *Sejam $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ complexos de cadeia e uma sequên-*

cia exata curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{C} \xrightarrow{g} \mathcal{D} \longrightarrow 0$$

então existe um homomorfismo graduado $\psi_* = \{\psi_{*,p}\}_{p \in \mathbb{Z}}$ com

$$(\psi_p)_* : H_p(\mathcal{D}) \longrightarrow H_{p-1}(\mathcal{B})$$

de modo que a sequência a seguir é uma sequência exata longa:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & \xrightarrow{\quad} & H_{p+1}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{(f_{p+1})_*} & H_{p+1}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{(g_{p+1})_*} & H_{p+1}(\mathcal{D}) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow (\psi_{p+1})_* \\ & \xrightarrow{\quad} & H_p(\mathcal{B}) & \xrightarrow{(f_p)_*} & H_p(\mathcal{C}) & \xrightarrow{(g_p)_*} & H_p(\mathcal{D}) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow (\psi_p)_* \\ & \xrightarrow{\quad} & H_{p-1}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{(f_{p-1})_*} & H_{p-1}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{(g_{p-1})_*} & H_{p-1}(\mathcal{D}) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow (\psi_{p-1})_* \\ & \xrightarrow{\quad} & \cdots & & & & \end{array}$$

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{Z}$, note que:

- Vejamos que a sequência é exata em $H_p(\mathcal{C})$ pois $\text{im}(f_p) = \ker(g_p)$, dado que para $[m] \in H_p(\mathcal{B})$ temos

$$(g_p)_* \circ (f_p)_*([m]) = [g_p \circ f_p(m)] = [0] = 0.$$

Ainda, se $[n] \in \ker((g_p)_*)$, $g_p(n) = d''_{p+1}(n')$.

Pela sobrejetividade em g_{p+1} podemos supor que existe $c \in C_{p+1}$ de modo que $d''_{n+1} \circ g_{p+1}(c) = g_p(n)$ e pela comutatividade do diagrama

$$g_p(n - d'_{p+1}(c)) = g_p(n) - g_p(n) = 0.$$

Uma vez que a linha p é exata, existe $b \in B_p$ tal que $f_p(b) = n - d'_{p+1}(c)$. Temos

$$d'_p \circ f_p(b) = d'_p(n) - d'_{p+1}(c) = d'_p(n) - d'_n \circ d'_{p+1}(c) = 0 - 0 = 0.$$

Logo, $0 = d'_p \circ f_p(b) = f_{p-1} \circ d_p(b)$ e como f_{p-1} é injetiva, segue que $d_p = 0$ do qual obtemos:

$$(f_p)_*([b]) = [f_p(b)] = [n - d'_{p+1}(c)] = [n] \text{ e portanto } [n] \in \text{im}(f_p)_*.$$

- Vejamos agora que a sequência é exata em $H_p(D)$:

Dado $[m] \in \text{im}((g_p)_*)$, tome $c \in C_p$ tal que $g_p(c) = m$.

Perceba que $d'_p(c) \in \ker(g_{p-1})$, existe $b \in B_{p-1}$ tal que $f_{p-1}(b) = d'_p(c)$.

Pela definição de $(\psi_p)_*$, temos $(\psi_p)_*([m]) = [f_{p-1}(b)]$. Pela definição de $H_p(C)$ temos $d'_p(c) = 0$ e portanto, $[f_{p-1}(b)] = [0]$, ou seja, $(\psi_p)_*([m]) \in \ker((\psi_p)_*)$.

Para a inclusão inversa, suponha $[n] \in \ker((\psi_p)_*)$, assim, $\psi_p(n) = d_p(b)$ para algum $b \in B_p$. Pela construção de ψ podemos supor que $c \in C_p$ é tal que $f_{p-1} \circ d_p(b) = d'_p(c)$. A partir da comutatividade do diagrama, obtemos $d'_p \circ f_p(b) - d'_p(c) = 0$ então:

$$(g_p)_*([f_p(b) - c]) = [g_p \circ f_p(b) - g_p(c)] = [-g_p(c)] = [-n] = [n]$$

pois $\text{im}(f_p) = \ker(g_p)$ em particular $[n] \in \text{im}((g_p)_*)$.

- Por fim, a sequência é exata em $H_{p-1}(B)$ pois para $[m] \in \ker((f_p)_*)$, $[f_p(m)] = [0]$, isto é, $f_p(m) = d'_p(c)$ para algum $c \in C_p$. Suponha que $d = g_p(c)$, temos que:

$$d''_p(d) = d''_p \circ g_p(c) = g_{p-1} \circ d'_p(c) = g_{p-1} \circ f_{p-1}(m) = 0.$$

Desse modo, pela definição de ψ temos:

$$(\psi_p)_*([g_p(c)]) = [\psi_p \circ g_p(c)] = [m],$$

de onde segue que $[m] \in \text{im}((\psi_p)_*)$. Por outro lado, se $[n] = (\psi_p)_*([d])$ para algum $d \in D_p$, segue que $f_{p-1}(n) = d'_p(c)$ para algum $c \in C_{p-1}$, de modo que $g_p(c) = d$. Desse modo:

$$(f_{p-1})_*([n]) = [f_{p-1}(n)] = [d'_p(c)] = [0].$$

□

2 Homologia Simplicial

Intuitivamente um complexos simplicial é um objeto combinatório construído a partir da união de estruturas básicas chamadas n -simplexos. Essas estruturas são generalizações n -dimensionais de triângulos (em dimensões visualizáveis, pontos, segmentos, triângulos e tetraedros). Veremos nesse capítulo a formalização dos complexos simpliciais bem como os conceitos fundamentais da homologia simplicial. Veremos ainda como as cadeias, bordos e ciclos interagem nesses objetos, como construí-los e como calcular seus grupos de homologia. Como ponto principal, apresentaremos a álgebra homológica e mostraremos como essa ferramenta nos permite compreender a estrutura e a forma dos complexos simpliciais em um contexto algébrico rigoroso. Apresentaremos os números de Betti e como usá-los para distinguir espaços topológicos diferentes. Por fim, definiremos filtração e mostraremos como construir uma a partir dos Complexos de Čech e de Vietoris-Rips. Como principais referências para esse capítulo utilizamos os livros (Boissonnat; Chazal; Yvinec, 2018) e (Edelsbrunner, H.; Harer, 2022) e as notas de aula (Lima, D.; Miranda, 2023).

2.1 Complexos simpliciais

Definição 2.1. *Dado um conjunto de pontos $V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ afim-independentes, ou seja, tal que os k vetores $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ são linearmente independentes, um k -simplexo $\sigma = \langle v_0 \dots v_k \rangle$ será o menor fecho convexo desses $(k+1)$ pontos. Veja Figura 2.1. Por convenção, assumiremos que $\{v_0\}$ é sempre linearmente afim-independente. Dizemos que a dimensão do k -simplexo é k .*

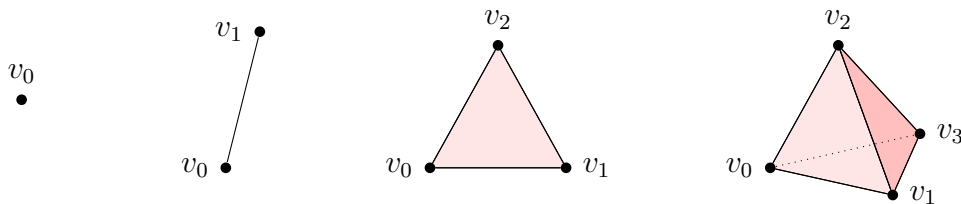


Figura 2.1: Exemplos de 0, 1, 2 e 3-simplexo.

2 Homologia Simplicial

Dado um conjunto de pontos $V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ e um simplexo σ que os contém, dizemos que um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ faz parte de σ se e somente se ele pode ser escrito de modo único como combinação linear de $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$, ou seja, $x = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ sendo $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = \{0, 1, \dots, k\}$ e $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$. Dizemos que $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ são as **coordenadas baricêntricas** do ponto x .

Proposição 2.2. *Dados $\{v_0, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, são equivalentes:*

- i) $\{v_0, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ é geometricamente independente;
- ii) Se $\sum_{i=0}^k \lambda_i v_i = \sum_{i=0}^k \alpha_i v_i$ com $\sum_{i=0}^k \lambda_i = \sum_{i=0}^k \alpha_i$, então $\lambda_i = \alpha_i$, para todo $i = 0, \dots, k$.

Demonstração. i) $\Rightarrow$ ii) Se $\sum_{i=0}^k \lambda_i v_i = \sum_{i=0}^k \alpha_i v_i$ com $\sum_{i=0}^k \lambda_i = \sum_{i=0}^k \alpha_i$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i - \sum_{i=0}^k \alpha_i v_i &= 0 \\ \sum_{i=0}^k (\lambda_i - \alpha_i) v_i - \sum_{i=0}^k (\lambda_i - \alpha_i) v_0 &= 0 \\ \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \alpha_i) (v_i - v_0) &= 0. \end{aligned}$$

Sendo $\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$ linearmente independentes, segue que $\lambda_i = \alpha_i$ para todo $i = 1, \dots, k$. No mais, como $\sum_{i=0}^k \lambda_i = \sum_{i=0}^k \alpha_i$, ou seja, $\lambda_i = \alpha_i$

ii) $\Rightarrow$ i) Se $\sum_{i=1}^k \lambda_i (v_i - v_0) = 0$, então $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_0 = 0$, por hipótese todos os coeficientes devem ser nulos, ou seja, $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$, desse modo, $\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$ é linearmente independente. $\square$

Proposição 2.3. *O k -simplexo $\sigma = \langle v_0 \dots v_k \rangle$ é tal que*

$$\langle v_0 \dots v_k \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^k \alpha_i v_i \mid \alpha_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1 \right\}.$$

Definição 2.4. *Dado um k -simplexo $\sigma = \langle v_0 \dots v_k \rangle$, ao simplexo $\tau = \langle v_{i_0} \dots v_{i_n} \rangle$ com $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_n}\} \subset \{v_0, \dots, v_k\}$ para $0 \leq n \leq k$ damos o nome de **face** de σ . Se τ for uma face de σ , denotaremos tal fato por $\tau < \sigma$.*

Definição 2.5. *Dado um k -simplexo σ gerado por $\{v_0, \dots, v_k\}$, a remoção de um vértice v_i resulta em um $(k-1)$ -simplexo que compõe as faces $(k-1)$ -dimensionais $\langle v_0 \dots v_{i-1} v_{i+1} \dots v_k \rangle$. Tais faces são chamadas **faces de bordo**. A i -ésima face de*

σ é representada por $\langle v_0 \dots \widehat{v}_i \dots v_k \rangle$ no qual $\widehat{v}_i$ significa que o vértice v_i foi suprimido de $\langle v_0 \dots v_k \rangle$, ou seja, $\langle v_0 \dots \widehat{v}_i \dots v_k \rangle = \langle v_0 \dots v_{i-1} v_{i+1} \dots v_k \rangle$. Também dizemos que o $(k-1)$ -simplexo $\langle v_0 \dots \widehat{v}_i \dots v_k \rangle$ é a **face oposta ao vértice v_i** . Veja Figura 2.2

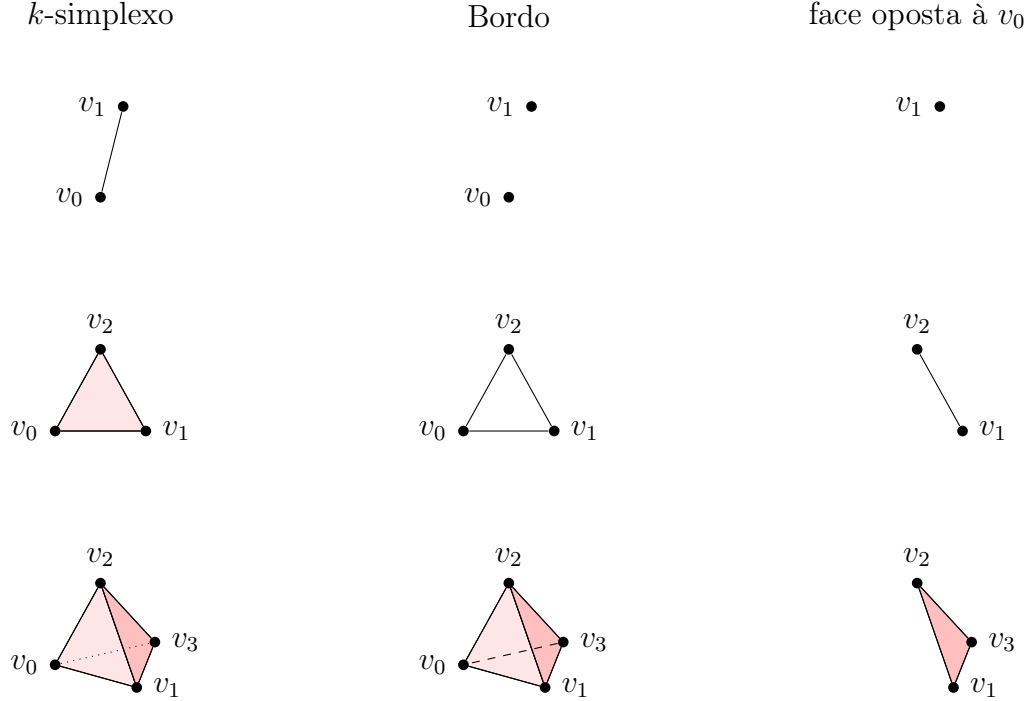


Figura 2.2: Exemplos de 1, 2 e 3-simplexos, seus respectivos bordos e as faces opostas à v_0 .

Dado um k -simplexo σ gerado por $\{v_0, \dots, v_k\}$, temos que:

- i) Se todas as coordenadas baricêntrica de um ponto $s \in \sigma$ são positivas, dizemos que s é um **ponto interior** de σ .
- ii) O conjunto de todos os pontos interiores de σ é convexo e é chamado de **simplexo aberto** e é denotado por $\overset{\circ}{\sigma}$.
- iii) Um ponto de σ que não é ponto interior é chamado de **ponto de bordo**.
- iv) O conjunto de todos os pontos de bordo de σ é chamado de **fronteira** ou simplesmente **bordo** de σ e é denotado por $\partial\sigma$.

Dessa forma, podemos dizer que um simplexo aberto é dado por $\overset{\circ}{\sigma} = \sigma - \partial\sigma$.

A união de todas as faces de bordo de um k -simplexo corresponde ao bordo dele e por definição, o conjunto $\emptyset$ é considerado face de qualquer k -simplexo.

Assim, pelo exposto, podemos concluir que um simplexo σ é um conjunto convexo, conexo por caminhos, compacto e fechado e o interior de um simplexo é um conjunto convexo, conexo por caminhos e aberto. Por fim, σ é o fecho de $\overset{\circ}{\sigma}$.

2.1.1 Orientação de um simplexo

Vamos nesse tópico estabelecer uma orientação para os simplexos, ela será conveniente quando formos calcular suas homologias. Existem exatamente $(k+1)!$ maneiras distintas de ordenar os vértices de um k -simplexo, diremos que duas dessas ordenações são equivalentes quando uma delas puder ser obtida da outra por meio de uma permutação par de seus vértices. Dentre essas ordenações obtemos duas classes de equivalência. Para $k = 0$, convencionamos a orientação pela escolha de um sinal $+$ ou $-$ acompanhando o 0-simplexo.

Definição 2.6. Se $k > 0$, uma **orientação** para um simplexo $\sigma = \langle v_0 \dots v_k \rangle$ é uma escolha de uma classe de equivalência na ordem dos vértices de σ . Esse mesmo simplexo munido da orientação oposta será denotado por $-\sigma$.

Definição 2.7. Um **simplexo orientado** é um simplexo munido de uma orientação.

A título de representação em dimensões visíveis, é comum denotarmos a orientação de um 1-simplexo $\langle v_0 v_1 \rangle$ por uma seta indo de v_0 para v_1 , conseqüentemente sua orientação oposta é uma seta indo de v_1 para v_0 . A orientação de um 2-simplexo $\langle v_0 v_1 v_2 \rangle$ por uma seta circular com orientação oposta representada por uma seta circular em direção oposta. Por fim, as orientações de 3-simplexos $\langle v_0 v_1 v_2 v_3 \rangle$ por setas helicoidais como mostra a Figura 2.3:

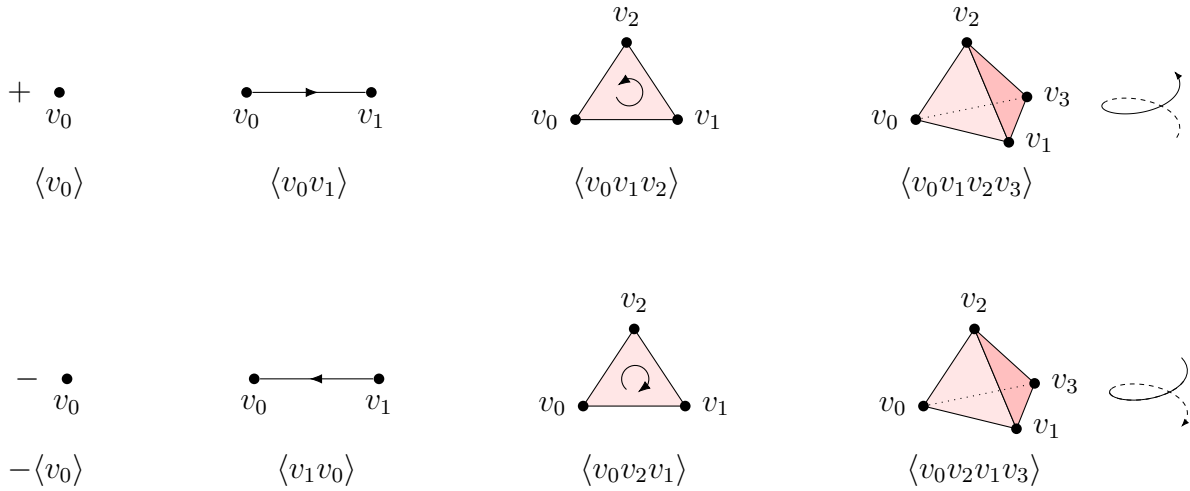


Figura 2.3: Orientação (e orientação oposta) em 0, 1, 2 e 3 simplexos.

A ordenação dos vértices de um k -simplexo induz uma orientação em cada uma de suas faces $(k - 1)$ -dimensionais.

Definição 2.8. Dado um k -simplexo $\sigma = \langle v_0 v_1 \dots v_k \rangle$, uma **orientação induzida** em uma face $(k - 1)$ -dimensional de σ é uma ordenação em seus vértices dada por $\sigma_i = (-1)^i \langle v_0 \dots \widehat{v_i} \dots v_k \rangle$.

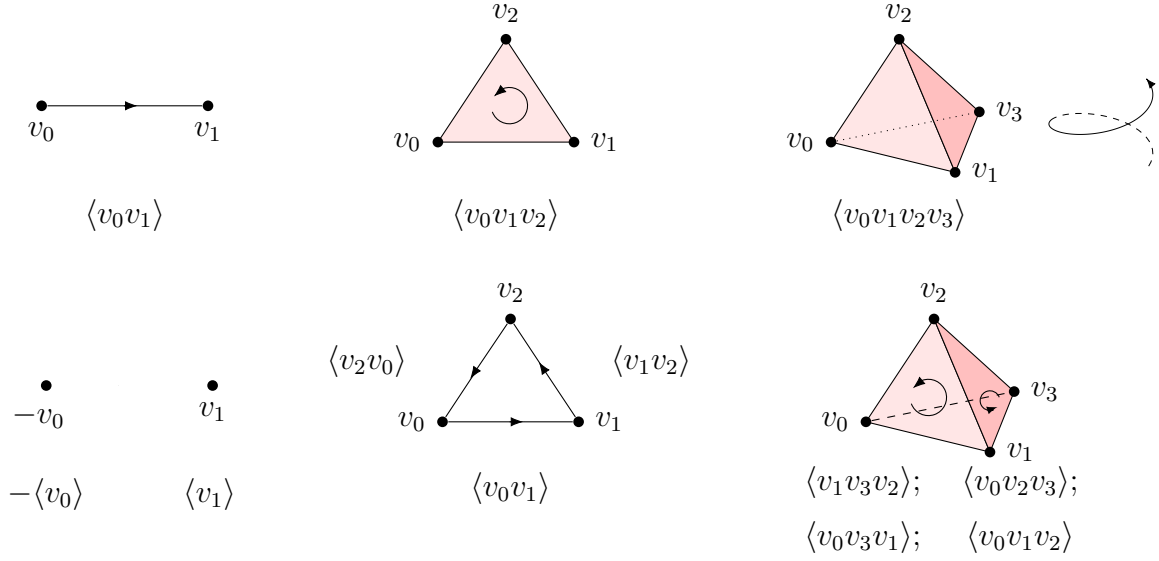


Figura 2.4: Orientações induzidas nas faces de simplexes orientados.

Sendo assim, ao orientarmos um simplexo k -dimensional, suas faces de dimensão $(k-1)$ herdam as orientações induzidas como mostra a Figura 2.4, entretanto, isso não ocorre com as faces de dimensão $(k-2)$ como veremos a seguir:

Proposição 2.9. *Seja $\sigma = \langle v_0 \dots v_k \rangle$ um k -simplexo orientado e τ uma face $(k-2)$ -dimensional de σ , τ pertencerá a duas faces de dimensão $(k-1)$, do qual, cada orientação induzida por σ , induzirá uma orientação oposta em τ .*

Demonstração. Seja μ uma face de σ obtida ao suprimir os vértices v_i e v_j com $i < j$. As faces $(k-1)$ -dimensionais de σ que contêm μ com suas orientações induzidas são:

$$\sigma_i = (-1)^i \langle v_0 \dots \widehat{v_i} \dots v_k \rangle \quad \text{e} \quad \sigma_j = (-1)^j \langle v_0 \dots \widehat{v_j} \dots v_k \rangle.$$

Por sua vez, as orientações que σ_i e σ_j induzem em μ são respectivamente,

$$(\sigma_i)_j = (-1)^{i+j-1} \langle v_0 \dots \widehat{v_i} \dots \widehat{v_j} \dots v_k \rangle \quad \text{e} \quad (\sigma_j)_i = (-1)^{i+j} \langle v_0 \dots \widehat{v_i} \dots \widehat{v_j} \dots v_k \rangle,$$

que correspondem a orientações opostas em μ . □

Definição 2.10. Um **complexo simplicial** é um conjunto finito K de k -simplexes satisfazendo às seguintes propriedades:

- i) Se $\sigma \in K$ e $\tau < \sigma$ então $\tau \in K$;
- ii) Se $\sigma \in K$ e $\tau \in K$ então $\sigma \cap \tau = \emptyset$ ou $\sigma \cap \tau < \sigma, \tau$.

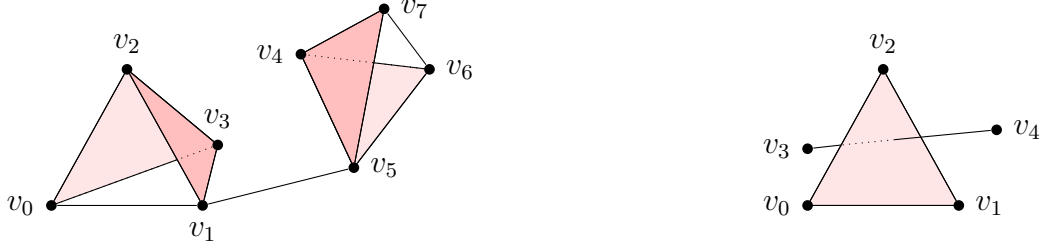


Figura 2.5: À esquerda um exemplo de complexo simplicial. À direita a união de dois simplexes que não resultou em um complexo simplicial

Definição 2.11. Dado um complexo simplicial K , um **subcomplexo simplicial** L é uma subcoleção de simplexes de K que também é um complexo simplicial. Dado $l \geq 0$, definimos o **l -esqueleto** de K denotado por K^l ao subcomplexo formado por todos os simplexes de K cuja dimensão é menor ou igual a l .

Por fim, dado um complexo simplicial K e um l -esqueleto $K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^l$ em que K^0 é formado unicamente pelos vértices de K , dizemos que a **dimensão do simplexo K** é l se $K^{l-1} \neq K$ mas $K^l = K$.

2.2 Homologia simplicial

2.2.1 Módulos das p -cadeias simpliciais

Definição 2.12. Dado um complexo simplicial K , o p -ésimo **módulo de cadeias simpliciais** $C_p(K)$ é o módulo livre que consiste de todas as combinações lineares de p -simplexos σ_p na forma $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} (\sigma_p)_{\alpha}$ com $\lambda_{\alpha} \in R$. Para $p < 0$, $C_p(K) = 0$.

Definição 2.13. Definimos o **homomorfismo de bordo** (também conhecido por **diferencial**) para $p \geq 1$ como a aplicação

$$\begin{aligned} \partial_p : C_p(K) &\longrightarrow C_{p-1}(K) \\ \partial_p \langle v_0 \dots v_p \rangle &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle v_0 \dots \widehat{v}_i \dots v_p \rangle. \end{aligned}$$

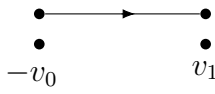
A Figura 2.6 nos dá uma intuição. A definição é estendida por linearidade a toda p -cadeia simplicial, o que está bem definido pois os módulos de cadeias simpliciais são livres. Para $p \leq 0$, definimos $\partial_p = 0$.

Lema 2.14. Dado um complexo simplicial K , o homomorfismo de bordo satisfaz $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

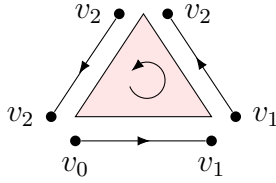
Demonstração.

$$\begin{aligned}\partial_{p-1} \circ \partial_p \langle v_0 \dots v_p \rangle &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1} \langle v_0 \dots \widehat{v}_i \dots v_p \rangle \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \langle v_0 \dots \widehat{v}_j \dots \widehat{v}_i \dots v_p \rangle + \sum_{i > j} (-1)^{i+j-1} \langle v_0 \dots \widehat{v}_i \dots \widehat{v}_j \dots v_p \rangle = 0\end{aligned}$$

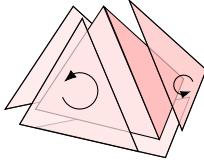
□



$$\partial \langle v_0 v_1 \rangle = \langle v_1 \rangle - \langle v_0 \rangle$$



$$\partial \langle v_0 v_1 v_2 \rangle = \langle v_1 v_2 \rangle - \langle v_0 v_2 \rangle + \langle v_0 v_1 \rangle$$



$$\begin{aligned}\partial \langle v_0 v_1 v_2 v_3 \rangle &= \langle v_1 v_2 v_3 \rangle - \langle v_0 v_2 v_3 \rangle \\ &\quad + \langle v_0 v_1 v_3 \rangle - \langle v_0 v_1 v_2 \rangle\end{aligned}$$

Figura 2.6: Homomorfismo de bordo em 1, 2 e 3 simplexos.

De posse desse resultado, podemos afirmar que o par $(C_*(K), \partial_*)$ forma um complexo de cadeias de acordo com a Definição 1.11 que será chamado **complexo de cadeias simpliciais** de K . Assim obtemos a seguinte sequência de homomorfismos entre módulos

$$\dots \longrightarrow C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

em que vale $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ para todo p . Desse modo, todas as noções apresentadas na Seção 1.2 são válidas, em particular:

- i) O Módulo $Z_p(K)$ contendo os p -ciclos é o subconjunto de $C_p(K)$ chamado **módulo dos p -ciclos**. Ele é o núcleo do homomorfismo $\partial_p(K) : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$, isto é, $Z_p(K) = \ker \partial_p$.

2 Homologia Simplicial

- ii) O Módulo $B_p(K)$ contendo os p -bordos é o subconjunto de $C_p(K)$, chamado **módulo dos n -bordos**. Ele é a imagem do homomorfismo $\partial_{p+1} : C_{p+1}(K) \longrightarrow C_p(K)$, isto é, $B_p(K) = \text{im } \partial_{p+1}$.

Ainda, dado que $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ para $(C_p(K), \partial_p)$, temos a seguinte cadeia de inclusões,

$$0 \subseteq B_p(C) \subseteq Z_p(C) \subseteq C_p(C).$$

Desse modo, está bem definido o quociente $Z_p(K)/B_p(K)$, o que nos possibilitará definir as classes de homologia simplicial.

Definição 2.15. Dado um complexo de cadeias $(C_*(K), \partial_*)$, o **módulo de homologia simplicial** $H_p(K)$ de dimensão p é definido como

$$H_p(K) = \frac{\ker \partial_p}{\text{im } \partial_{p+1}} = \frac{Z_p(K)}{B_p(K)},$$

para todo $p \in \mathbb{Z}$. À soma direta $H_*(K) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(K)$ chamamos de **homologia simplicial** do complexo K .

É comum empregar o termo “grupo de homologia” para se referir, de forma genérica, aos módulos de homologia.

Dado que o principal objetivo da homologia simplicial é descartar os ciclos de um complexo simplicial que também são bordos, definimos uma relação de equivalência em $Z_p(K)$ que irá nos ajudar a sanar tal problema.

Temos que dois ciclos z_1 e $z_2 \in Z_p(K)$ são homólogos ($z_1 \sim z_2$) se tem por diferença apenas um bordo, ou seja, $z_1 - z_2 \in B_p(K)$. Veja Figura 2.7

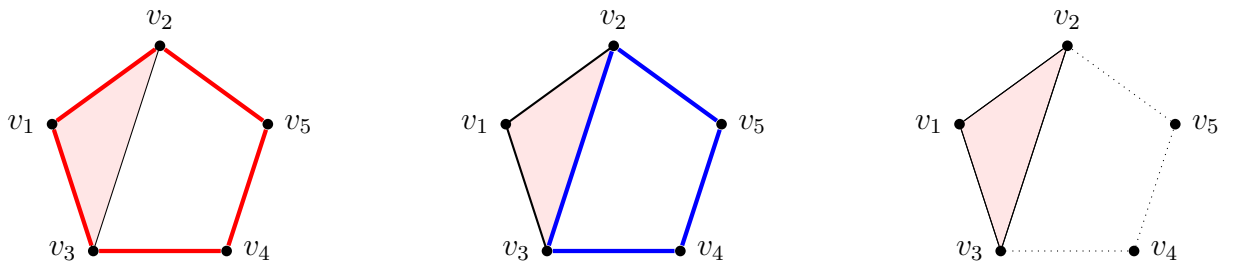


Figura 2.7: O ciclo z_1 (em vermelho) e z_2 (em azul) são homólogos pois sua diferença é o bordo de um triângulo.

A relação de equivalência $\sim$ particiona os p -ciclos $Z_p(K)$ em um união de subconjuntos disjuntos chamados classes de homologia denotados por $[z] = z + B_p(K) = \{z + \partial_{p+1}(c) : c \in C_{p+1}(K)\}$.

Definição 2.16. Dizemos que um complexo simplicial K é **conexo por caminhos** se para cada par de vértices em K , existe um caminho formado por um número finito de arestas ligando um vértice ao outro.

Proposição 2.17. *Seja K um complexo simplicial, então $H_0(K) \cong R \iff K$ é conexo por caminhos.*

Demonstração. Seja V o conjunto dos vértices de K , observe que todo $v \in V$ é um ciclo uma vez que $\partial v = 0$ e que nenhum $v \in V$ é bordo pois as 1-cadeias são da forma $\langle v_i v_j \rangle$ e portanto, $\partial \langle v_i v_j \rangle = v_j - v_i$, do qual $[\langle v \rangle] \in H_0(K)$. Dito isso, temos que:

($\Leftarrow$) K é conexo por caminhos, desse modo, tomados dois vértices v e w quaisquer de K , existem arestas $\{\langle v_0 v_1 \rangle, \dots, \langle v_{k-1} v_k \rangle\}$ para $v = v_0$ e $v_k = w$ que os ligam. Note que: $\partial(\langle v_0 v_1 \rangle + \dots + \langle v_{k-1} v_k \rangle) = (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \dots + (v_k - v_{k-1}) = v_k - v_0 = w - v$, ou seja, $[v] = [w]$ para todo v e $w \in K$ e portanto $H_0(K)$ é gerado por uma única classe $[v]$, logo, $H_0(K) \cong R$.

($\Rightarrow$) Se $H_0(K) \cong R$, quaisquer dois vértices v e w possuem a mesma imagem em $H_0(K)$, ou seja, $v - w \in B_0(K)$. Desse modo, existe uma cadeia de arestas $\{\langle v_0 v_1 \rangle, \dots, \langle v_{k-1} v_k \rangle\}$ de tal modo que $v = v_0$ e $w = v_k$, ou seja, v e w pertencem a uma mesma componente, e portanto, K é conexo por caminhos. □

Corolário 2.18. *Seja K um complexo simplicial finito não conexo, com $k \geq 1$ componentes conexas, então $H_0(K) \cong R^k$.*

Demonstração. Note que podemos escrever $K = \bigcup_{i=1}^k K_i$, com K_i conexo para todo i , temos que $H_0(K) = H_0(K_1) \oplus \dots \oplus H_0(K_k)$ que segue pela proposição anterior. □

Uma vez que $H_0(K)$ nos permite inferir a quantidade de componentes conexas existentes em um complexo simplicial K , como podemos interpretar $H_1(K)$ e $H_2(K)$? Tomando um complexo simplicial K , o conjunto $Z_1(K)$ contém os elementos $c \in C_1$ tais que $c = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \sigma_{\alpha} = 0$ o que visualmente pode ser interpretado como um “buraco” unidimensional.

Por outro lado, $B_1(K)$ contabiliza os ciclos b provenientes de algum 2-simplexo de $c \in C_2$ de tal modo que $\partial(c) = b$. Dessa forma, o quociente $H_1(K) = Z_1/B_1$ contabiliza apenas os ciclos que não são bordos de algum 2-simplexo, ou seja, os “buracos” unidimensionais existentes em K .

Usando um raciocínio análogo para $H_2(K)$, o que está sendo contabilizado são os ciclos que não são bordos de algum 3-simplexo, ou seja, contabiliza a quantidade de “buracos” bidimensionais existentes em K .

2.3 Característica de Euler e números de Betti

A característica de Euler (também conhecida como característica de Euler-Poincaré) é o invariante topológico mais conhecido, isso ocorre pelo fato de, não obstante todo o

ferramental necessário para entender e demonstrá-lo, ele é ensinado já no ensino básico, ainda que de modo simplificado. Euler foi o primeiro matemático a apresentar resultados consistentes relacionados ao assunto por meio da fórmula $V - A + F = 2$ no qual V é o número de vértices, A o número de arestas e, por fim F , as faces de um poliedro $P \in \mathbb{R}^3$. Euler acreditou ter demonstrado esse resultado para o caso geral mas certamente considerou apenas os poliedros homeomorfos à esfera S^2 vide Figura 2.8 retirada de (Lima, D.; Miranda, 2023), o que de fato para esse caso está correto como veremos a seguir. Após um longo período e muito trabalho realizado, coube ao grande matemático Henri Poincaré dar um real significado para a fórmula, estender a compreensão acerca do resultado e por consequência, dar início a uma nova área de estudos, a Topologia Algébrica. Poincaré em seu clássico trabalho *Analysis Situs* introduziu importantes conceitos como grupo fundamental e homologia simplicial, apresentou diversos resultados e conjecturas importantes e relacionou os números de Betti à formula mencionada anteriormente. Para nossos propósitos, os poliedros analisados por Euler nada mais são que complexos simpliciais “bem comportados”.

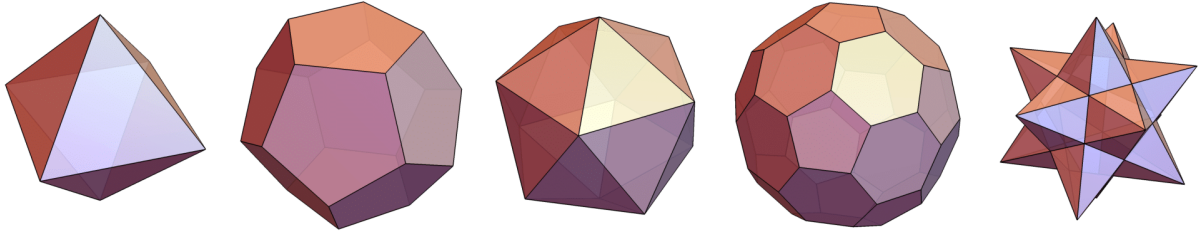


Figura 2.8: Exemplos de sólidos cujas faces podem ser triangularizadas e para os quais vale a relação $V - A + F = 2$.

Definição 2.19. Dado um complexo simplicial K de dimensão m , seja c_p o número de p -simplexos em K . Definimos a **característica de Euler-Poincaré** $\chi(K)$ como

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^m (-1)^i c_i.$$

Definição 2.20. Dado um complexo simplicial K de dimensão finita, definimos o i -ésimo **número de Betti** de K como:

$$\beta_i(K) = \text{rank}(H_i(K)).$$

Obviamente, se $H_i(K)$ é trivial, temos que $\beta_i(K) = 0$, no entanto, a volta não é válida, ou seja, $\beta_i(K) = 0$ não implica que $H_i(K)$ seja trivial, por exemplo, $H_i(K)$ pode ser apenas a parte de torção.

Vamos portanto, relacionar a característica de Euler-Poincaré de um complexo simplicial K aos seus grupos de homologia, mais especificamente aos números de Betti, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.21 (Euler-Poincaré). *Dado um complexo simplicial K de dimensão finita m , temos que*

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \beta_i(K).$$

O teorema afirma que a característica de Euler-Poincaré de um complexo simplicial K é a soma alternada de seus números de Betti. Para tal, é preciso além dos grupos de homologia, o seguinte resultado:

Proposição 2.22. *Dada uma sequência exata curta de módulos e homomorfismos*

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow 0,$$

se C tem dimensão finita, então

$$\text{rank}(C) = \text{rank}(B) + \text{rank}(D).$$

Em particular, se D é um módulo com dimensão finita, e se G é um submódulo de D , então

$$\text{rank}(D) = \text{rank}(G) + \text{rank}(D/G).$$

De posse desse resultado, vamos finalmente à demonstração do teorema enunciado:

Demonstração. Por definição, $C_i(K)$ é um módulo livre gerado pelos i -simplexos, dessa forma, $C_i(K)$ tem dimensão igual a c_i .

Dado que $H_i(K) = Z_i(K)/B_i(K)$, temos

$$\text{rank}(H_i(K)) = \text{rank}(Z_i(K)) - \text{rank}(B_i(K)).$$

Considerando a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Z_i(K) \longrightarrow C_i(K) \xrightarrow{\partial_i} B_{i-1}(K) \longrightarrow 0,$$

do qual,

$$c_i = \text{rank}(C_i(K)) = \text{rank}(Z_i(K)) + \text{rank}(B_{i-1}(K)).$$

Temos então

$$\begin{aligned}\chi(K) &= \sum_{i=0}^m (-1)^i c_i \\ &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \left(\text{rank} \left(Z_i(K) \right) + \text{rank} \left(B_{i-1}(K) \right) \right) \\ &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \text{rank} \left(Z_i(K) \right) + \sum_{i=0}^m (-1)^i \text{rank} \left(B_{i-1}(K) \right).\end{aligned}$$

Como não existem $(m+1)$ -simplexos, $B_m(K) = 0$, e por definição $B_{-1}(K) = 0$, temos

$$\begin{aligned}\chi(K) &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \text{rank} \left(Z_i(K) \right) + \sum_{i=0}^m (-1)^{i+1} \text{rank} \left(B_i(K) \right) \\ &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \left(\text{rank} \left(Z_i(K) \right) - \text{rank} \left(B_i(K) \right) \right) \\ &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \text{rank} \left(H_i(K) \right) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \beta_i(K).\end{aligned}$$

□

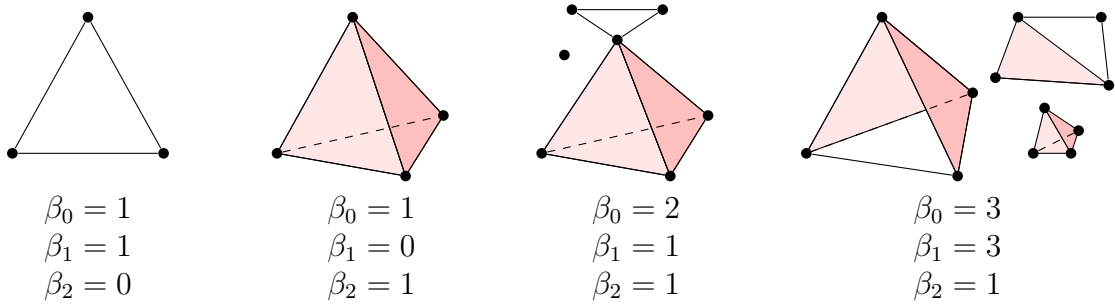


Figura 2.9: Exemplos de complexos simpliciais e seus respectivos 0, 1 e 2-número de Betti.

2.4 Complexos de Čech e Vietoris-Rips

A partir da ideia apresentada anteriormente, em que víamos um complexo simplicial como um ente geométrico descrito pela combinação de um conjunto de pontos e dotada de duas propriedades, vamos abstrair essa noção a um conjunto de pontos doravante denominada nuvem em um espaço Euclidiano qualquer. É possível construir complexos simpliciais que capturem as informações topológicas contidas nessa nuvem de pontos e que extrapolem o conjunto ao qual reside. Partindo dessa premissa, vamos definir dois complexos, o complexo de Čech e o complexo de Rips.

Definição 2.23. Dado um espaço topológico X , uma **cobertura aberta** é uma coleção $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de subconjuntos abertos tal que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. De modo análogo definimos uma cobertura fechada partindo de subconjuntos fechados.

Definição 2.24. Dada uma cobertura de um espaço topológico X , $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ vamos associar um complexo simplicial $C(\mathcal{U})$ de modo que o conjunto de vértices seja $\mathcal{U}$ e tal que:

$$\sigma = \langle U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_k} \rangle \in C(\mathcal{U}) \iff \bigcap_{j=0}^k U_{i_j} \neq \emptyset$$

Esse complexo simplicial é chamado de **nervo** da cobertura $\mathcal{U}$.

Definição 2.25. Dado um conjunto finito de pontos P em um espaço $\mathbb{R}^n$ e um real $r > 0$, o **complexo de Čech** é o nervo $\check{C}_r(P)$ da união das bolas centradas em P com raio r e tal que:

$$\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle \in \check{C}_r(P) \iff \bigcap_{i=0}^k B(v_i, r) \neq \emptyset.$$

De acordo com essa definição, dados $(k + 1)$ pontos em um espaço Euclidiano onde cada ponto é o centro de uma bola de raio r , e sempre que a intersecção de duas dessas bolas for não vazia, acrescentamos um 1-simplexo ao complexos simplicial em construção. Se três bolas se intersectares mutuamente temos um 2-simplexo e assim sucessivamente como sugere a Figura 2.10:

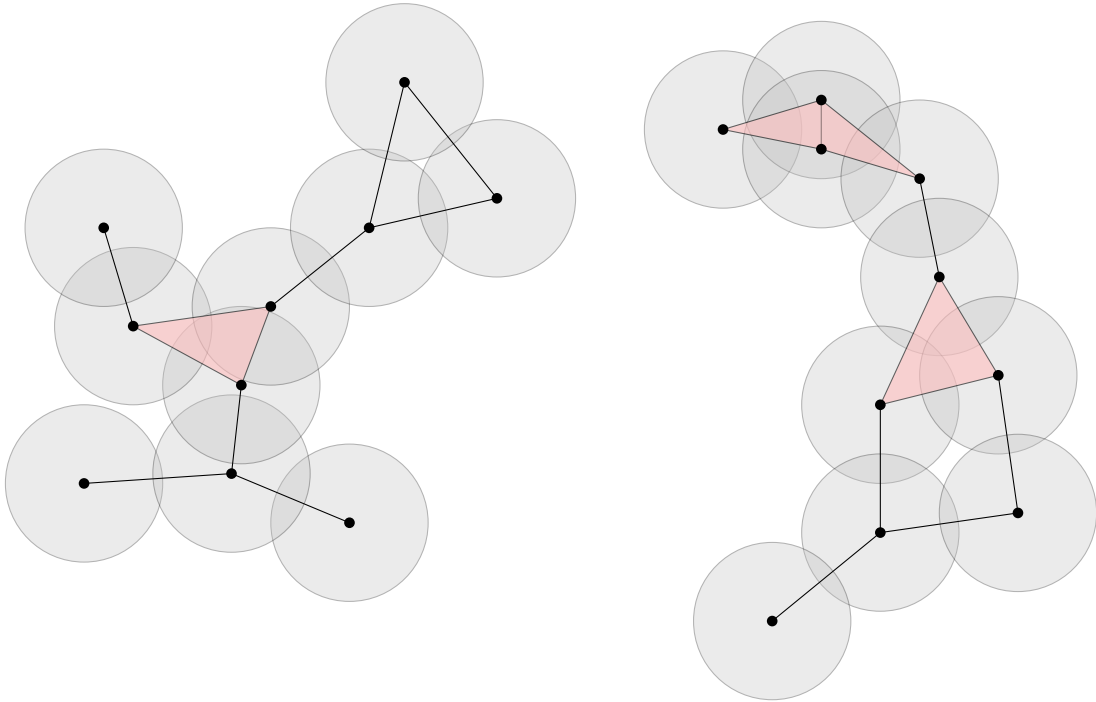


Figura 2.10: Exemplo de um complexo de Čech para um r fixado.

Para construir um complexo de Čech a partir de um conjunto de pontos, são necessários, além da construção dos segmentos unindo centros de bolas com intersecção não nula, verificar se existe intersecção mutua entre 3 ou mais bolas o que acaba por tornar o processo ineficiente do ponto de vista computacional, desse modo, apresentamos a seguir um método mais simples e ágil.

Definição 2.26. Dado um conjunto de pontos P em um espaço $\mathbb{R}^n$ e um real $r > 0$, o **complexo de Rips** $R_r(P)$ é tal que:

$$\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle \in R_r(P) \iff \|v_i - v_j\| \leq 2r \text{ para todo } i, j \in \{0, 1, \dots, k\}.$$

Partindo dessa definição, é importante notar que a construção do complexo de Rips é mais simples uma vez que apenas envolve cálculos e comparações de distâncias. Novamente, dados $(k + 1)$ pontos em um espaço vetorial Euclidiano em que cada ponto é o centro de uma bola de raio r , obtemos um complexos simplicial formado por 1-simplexos sempre que dois pontos possuírem distância menor que duas vezes o raio r , ou seja, dados v_i e v_j , quando $\|v_i - v_j\| \leq 2r$, eles darão origem a um 1-simplexo que unirá tais pontos. Se três bolas se intersectarem duas a duas por 1-simplexos, surgirá um 2-simplexo e assim sucessivamente como mostra a Figura 2.11:

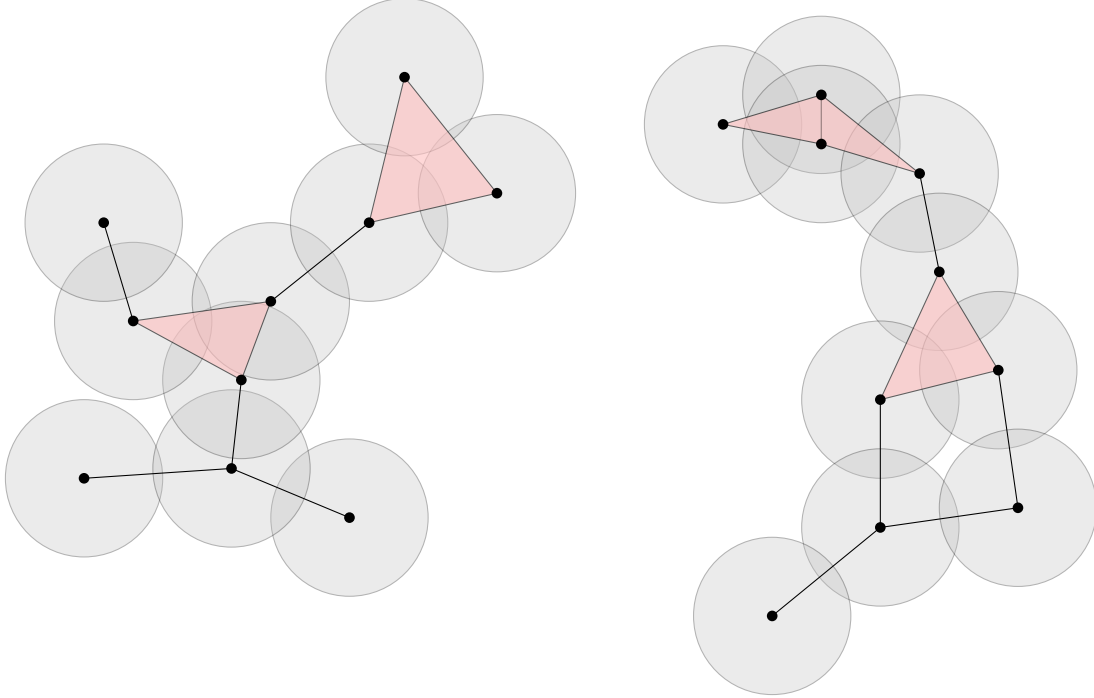


Figura 2.11: Exemplo de um complexo de Rips utilizando o mesmo raio e os mesmos pontos da Figura 2.10.

Embora, mais difíceis de calcular e mais custoso do ponto de vista computacional, usaremos os complexos de Čech devido sua interpretação geométrica mais precisa para

nossos propósitos. Isso ficará mais claro no Capítulo 4 quando introduzirmos a persistência em triângulos. Apesar das diferenças vistas na construção desses dois complexos simpliciais, é possível estabelecer uma relação entre eles dada pelo seguinte teorema:

Teorema 2.27. *Seja P um conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}^n$, para todo $r \geq 0$, $R_r(P) \subseteq \check{C}_r(P) \subseteq R_{2r}(P)$.*

Demonstração. Se $\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle \in R_r(P)$, então, dado $v_i, \|v_i - v_j\| \leq 2r$ para todo $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, desse modo, $\bigcap_{i=0}^k B(v_i, r) \neq \emptyset$ e portanto, $\sigma \in \check{C}_r(P)$. Para a segunda inclusão, note que, se $\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle \in \check{C}_r(P)$ então existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \in \bigcap_{i=0}^k B(v_i, r)$, ou seja, $\|v_i - y\| \leq r$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Por consequência, $\|v_i - v_j\| \leq 2r$ para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$ e portanto, $\sigma \in R_{2r}(P)$. $\square$

No estudo e na inferência das propriedades de um complexo simplicial, geralmente consideramos uma ordenação particular baseada no surgimento dos simplexos à medida que um parâmetro adotado varia continuamente. Nos casos vistos, o parâmetro foi o raio dos círculos centrados nos pontos, e o surgimento dos simplexos definia uma ordenação chamada filtração.

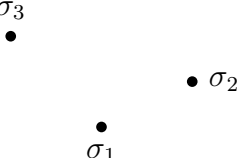
Definição 2.28. *Dado um complexo simplicial finito K de dimensão d , uma **filtração** de K , representada por $\mathcal{F}(K)$ é uma sequência de inclusões de subcomplexos tal que:*

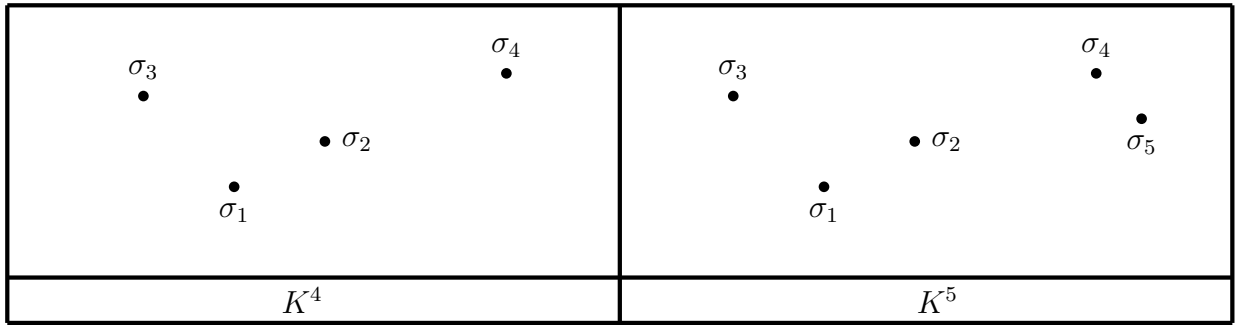
- i) $K^0 = \emptyset$;
- ii) $K^{i+1} = K^i \cup \sigma_{i+1}$ em que σ_{i+1} é um simplexo não contido anteriormente em K^i .

Desse modo, teremos o seguinte conjunto de inclusões;

$$\emptyset = K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^{m-1} \subseteq K^m = K$$

Vamos ver um exemplo de filtração utilizando o conjunto de pontos $P = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$ e um raio $r \in [0, 2]$. Escolhendo alguns valores específicos para r , obteremos a seguinte sequência de inclusões $\emptyset = K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^9 \subseteq K^{10} = K$ como vemos na figura:

		
K^1	K^2	K^3



De modo a facilitar a visualização do processo de filtração e tornar a figura menos poluída, vamos suprimir os rótulos dos 0-simplexos mas ainda mantendo as ordens de aparição;

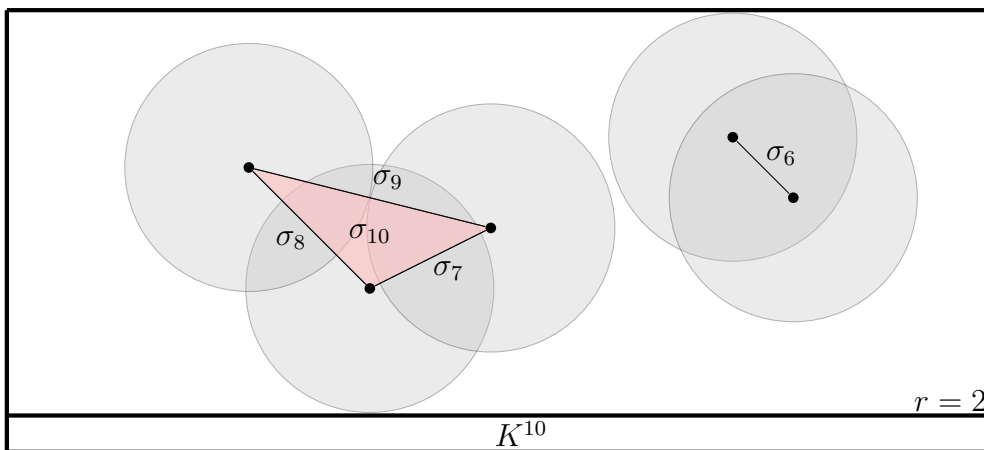
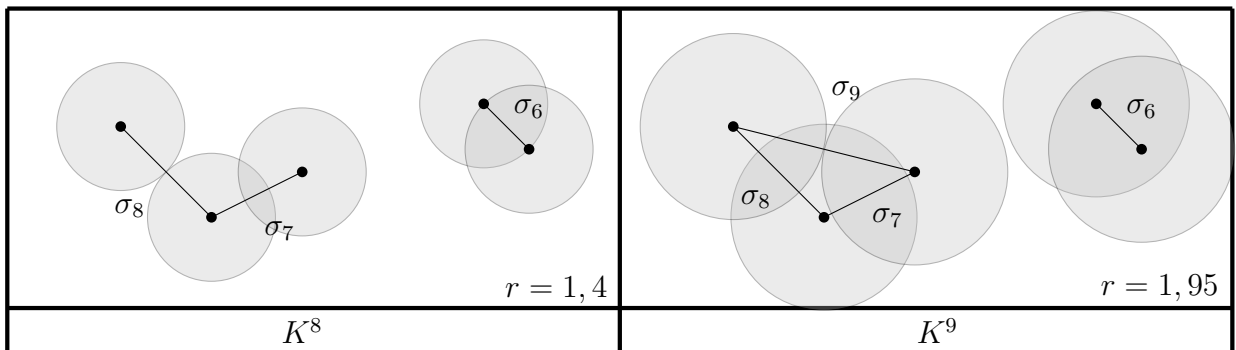
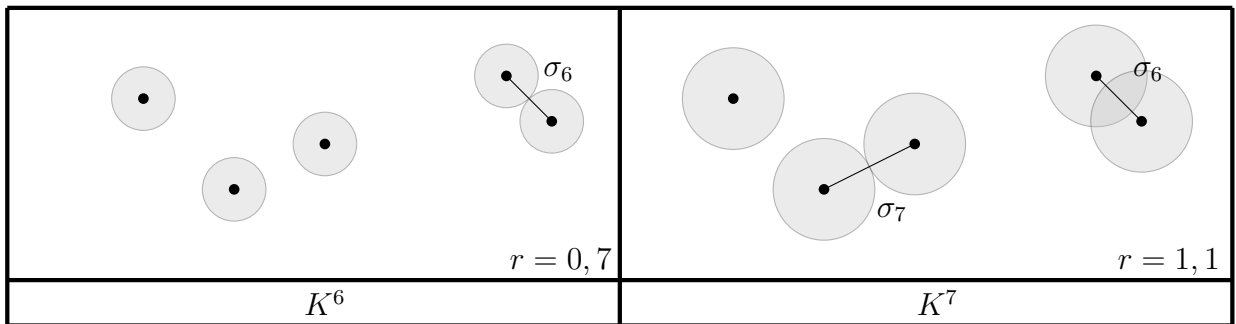


Figura 2.12: Processo de filtração de um complexo simplicial K .

Existem outras maneiras de se construir complexos simpliciais partindo de um conjunto finito de pontos em um espaço topológico. O fato é, que conhecer ou analisar tais maneiras foge ao escopo desse texto, para os objetivos propostos, basta saber que é possível fazer tal construção. No que segue a partir de agora, para fins práticos, mesmo tendo em vista que usaremos os complexos de Čech, não vamos nos ater ao método usado para construir o complexo simplicial mas apenas à filtração obtida a partir dele.

3 Homologia Persistente

A homologia persistente é uma área que se utiliza das características topológicas apresentadas nos capítulos anteriores para estudar dados obtidos por métodos observacionais ou aleatórios. Tomando por exemplo, uma quantidade de dados em um espaço métrico, obtemos um conjunto de pontos que posteriormente transformamos em uma filtração (por exemplo utilizando as filtrações de Čech ou Vietoris-Rips) e a cada complexo simplicial da filtração podemos associar sua homologia. Como veremos, podemos acompanhar o nascimento e morte dos geradores dos grupos de homologia ao longo da filtração, os geradores que se mantiverem por mais tempo ou até por um tempo indefinido serão denominados de características persistentes, essas características são mais propensas a representar as verdadeiras propriedades do objeto em estudo ou seu espaço subjacente. Os geradores que surgem e desaparecem rapidamente são comumente chamados de ruído.

Nesse capítulo introduzimos a homologia persistente bem como as ferramentas necessárias para sua compreensão tais como, homologia de filtrações, matriz de bordo de um simplexo, diagrama de persistência, representação intervalar de uma filtração e os algoritmos para o cálculo dos grupos de homologia (persistentes ou não). As homologias aqui consideradas serão relativas a um espaço vetorial sobre um corpo, em particular, alguns resultados serão demonstrados apenas para o caso em $\mathbb{Z}_2$. Para os que desejarem se aprofundar um pouco mais nos temas tratados, indicamos ([Boissonnat; Chazal; Yvinec, 2018](#)) e ([Virk, 2022](#)).

3.1 Motivação

Antes de introduzir de fato a homologia persistente, vamos apresentar dois exemplos que nos ajudarão a criar a intuição necessária para compreender as próximas etapas, o primeiro exemplo utilizando uma função f , nos ajudará a compreender a representação gráfica de um **diagrama de persistência**. Já o segundo, fará uso do diagrama conhecido como **código de barras**.

Diagrama de persistência em uma função f

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua cujo gráfico está representado na Figura 3.1, estamos interessados em estudar a evolução da topologia dos conjuntos da forma $f^{-1}(]-\infty, t])$ a medida que um parâmetro t evolui. É importante notar que a topologia muda quando t cruza os valores a, b, c, d, e, f, g e h , alguns deles vão criar novas componentes conexas e outros vão anexar uma componente a outra já existente. A esses dois fenômenos damos o nome de **nascimento** e **morte** de uma componente.

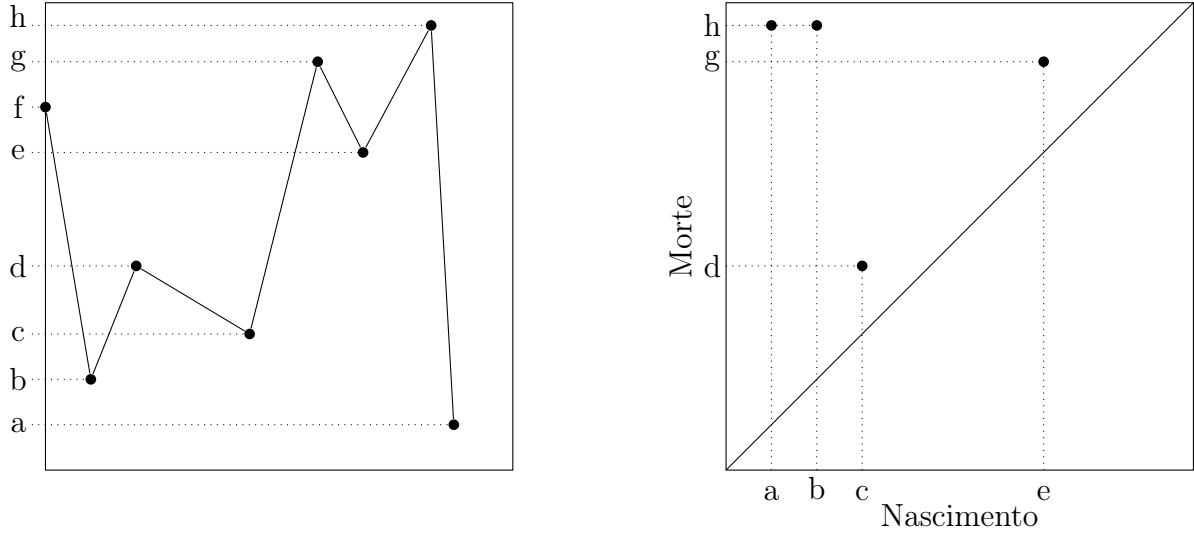


Figura 3.1: Gráfico de uma função f e seu diagrama de persistência.

Para interpretar o diagrama procedemos da seguinte forma:

- Tomando uma reta auxiliar horizontal varrendo o gráfico de baixo para cima, ao cruzar o ponto “a”, cria-se uma componente conexa, consequentemente no diagrama passamos a considerar essa existência por meio da linha pontilhada vertical em “a”.
- No instante em que a reta auxiliar cruza o ponto “b”, uma nova componente é criada e de modo análogo no ponto “c”. No diagrama vemos isso por meio das linhas verticais pontilhadas em “b” e “c”.
- No momento em que a reta auxiliar cruza o ponto “d”, a componente criada em “c” se conecta à componente criada em “b”, e desse modo, dizemos que houve a morte da mais recente (foi incorporada à mais antiga). No diagrama isso é representado pela interrupção da linha pontilhada “c” exatamente no ponto “d”.
- De modo análogo, ao cruzar “e” uma nova componente é criada e morre em “g” ao se incorporar à componente já existente criada em “b”.

- Por fim, ao cruzar o ponto “h”, as duas componentes remanescentes se conectam, no diagrama vemos isso por meio da interrupção da linha pontilhada “b”, essa componente passou a fazer parte da componente criada em “a”. No diagrama, isso é representada pela finalização das duas linhas ao mesmo tempo. Dizemos desse modo que a componente criada em “a” é a mais persistente pois a partir do momento em que nasceu, se perpetuou tendo apenas outras sendo incorporadas a si até que tudo se tornou uma única componente. A reta $y = x$ é incorporada ao diagrama por razões que ficarão claras na seção 3.6.

Substituindo a função f de nosso exemplo pela função g mostrada na Figura 3.2, observamos que apesar das nítidas diferenças e da maior quantidade de pares persistentes, é possível apontar uma similaridade entre o comportamento das curvas e a existência de alguns pontos em comum. Esses pontos em comum são os que causavam as mudanças na dinâmica das conexões no primeiro diagrama, ou seja, os pares com maior persistência representam as características topológicas da curva. Outra questão bastante relevante é a quantidade de pontos que surgem próximos à diagonal principal, eles correspondem às ligeiras perturbações que essa nova função possui, isto é, a quantidade de componentes que surgem e em poucos instantes já se conectam a outra não chegando a causar mudanças significativas no comportamento do gráfico, eles nascem e morrem em intervalos inexpressivos de tempo, em outras palavras, são pontos não persistentes e recebem o nome de ruído. Os pontos mais afastados da diagonal tentem a se localizar nos mesmos lugares (ou muitíssimos próximos) aos pontos persistentes do diagrama de f , isso porque ambas as curvas, apesar do ruído, possuem características topológicas similares e o mesmo comportamento.

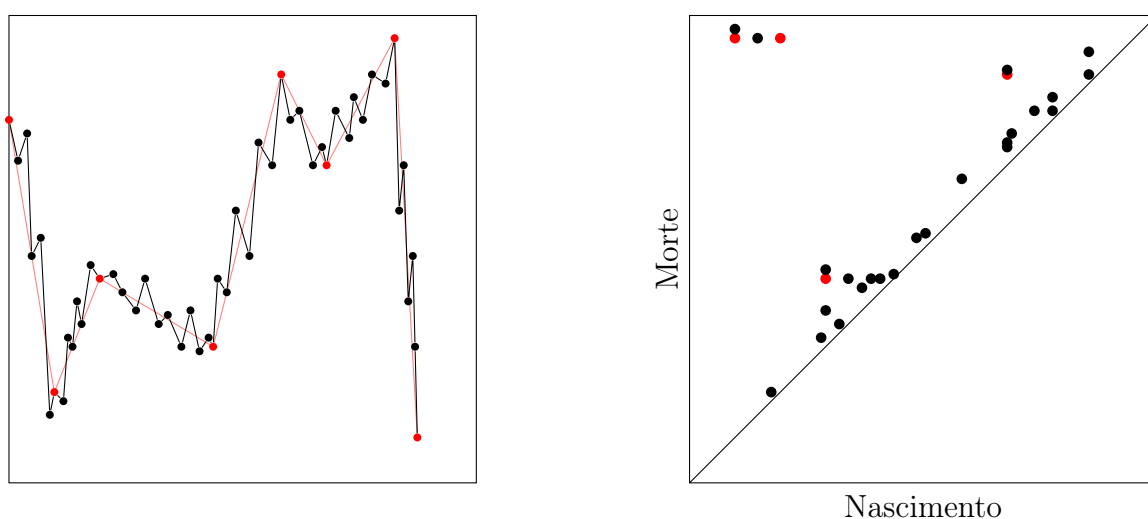


Figura 3.2: Gráfico de uma função g (pareado com f em vermelho) e seu diagrama de persistência.

Código de barras de uma filtração

Dado uma filtração, $\emptyset \subseteq K^1 \subseteq K^2 \subseteq K^3 \subseteq K^4$ como ilustra a Figura 3.3, vamos representar o momento em que surgem e o momento em que desaparecem as classes de homologia 0-dimensional na filtração por setas horizontais chamadas barras. A extremidade esquerda de cada barra corresponde ao momento em que surge a componente correspondente à cor da barra e a extremidade da direita corresponde ao momento terminal dessa componente, isto é, em que se conecta à outra componente. Vejamos o exemplo a seguir em que a Figura 3.3 apresenta o código de barras 0-dimensional e a Figura 3.4 o código de barras 1-dimensional com a seguinte configuração para os números de Betti :

$$K^1 \rightarrow \beta_0 = 2 \quad e \quad \beta_1 = 0$$

$$K^2 \rightarrow \beta_0 = 3 \quad e \quad \beta_1 = 1$$

$$K^3 \rightarrow \beta_0 = 2 \quad e \quad \beta_1 = 2$$

$$K^4 \rightarrow \beta_0 = 2 \quad e \quad \beta_1 = 1$$

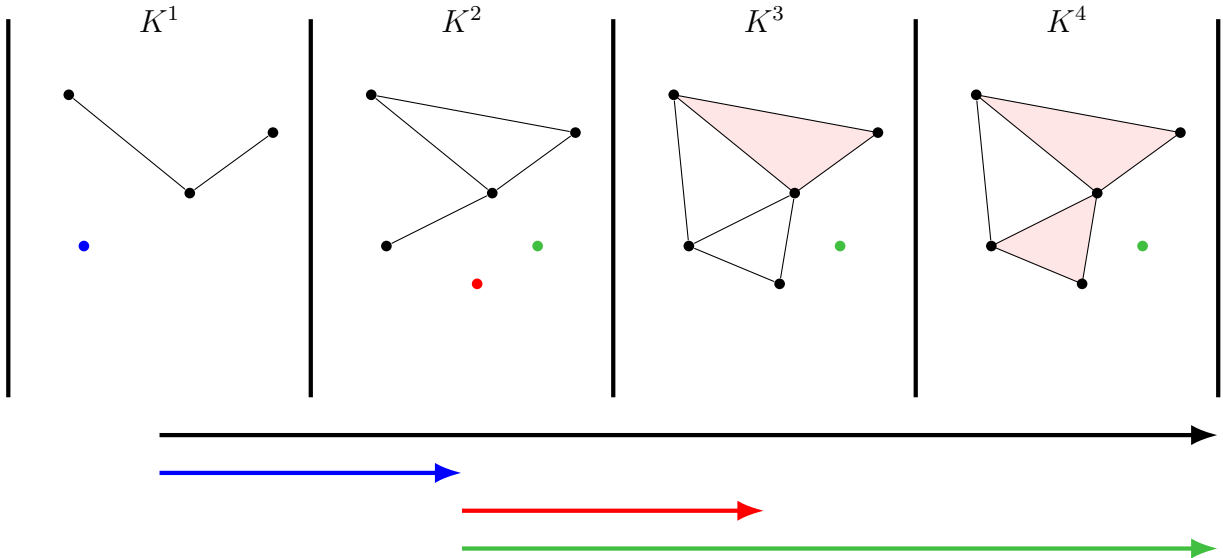


Figura 3.3: Código de barras 0-dimensional de $\emptyset \subseteq K^1 \subseteq K^2 \subseteq K^3 \subseteq K^4$.

Vamos interpretar o código de barras e entender a dinâmica das componentes conexas:

- K^1 : Note que existem duas componentes, uma em azul, e a componente em preto, que diferente da primeira, é composta por três vértices. No código de barras isso está representado pelo início de duas barras, uma azul e uma preta cada qual representando sua respectiva componente.
- K^2 : Agora temos três componentes uma remanescente da anterior e duas novas, uma em vermelho e uma em verde, cada uma representada por uma nova barra,

vermelha e verde respectivamente. Em relação à componente remanescente, ela é a junção da componente em azul com a preta o que está sendo representado pelo término da barra azul.

- K^3 : Aqui a componente em vermelho se conecta à preta por meio de dois vértices e isso é indicado no código de barras pelo fim da barra vermelha restando desse modo duas componentes, uma em verde e uma remanescente em preto.
- K^4 : Por fim, nessa etapa não houve qualquer mudança, seja surgimento ou conexão entre as componentes já existentes, desse modo, ambas as barras remanescentes se mantiveram indefinidamente.

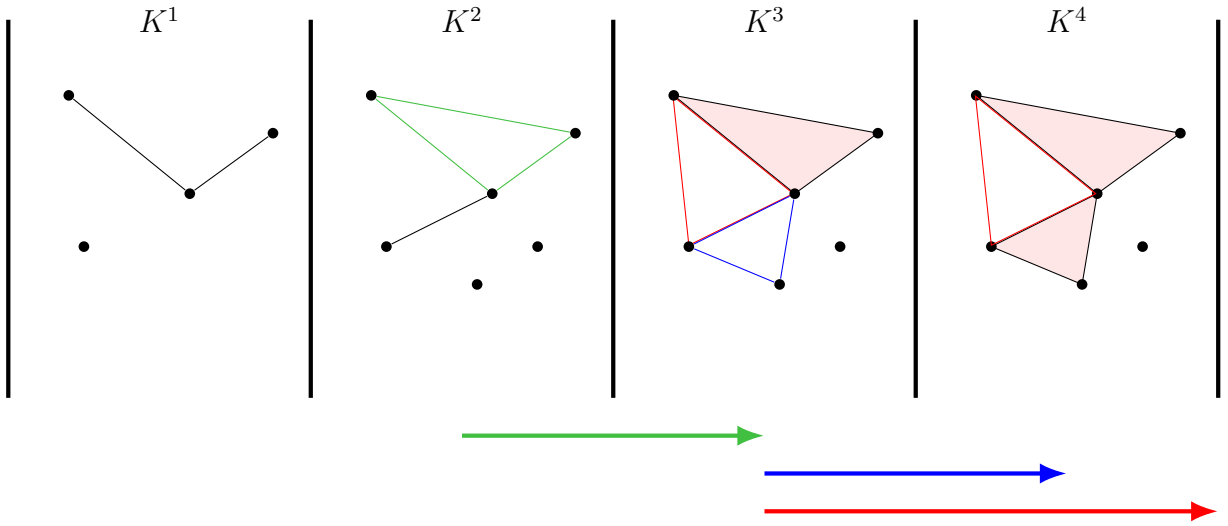


Figura 3.4: Código de barras 1-dimensional de $\emptyset \subseteq K^1 \subseteq K^2 \subseteq K^3 \subseteq K^4$.

Vamos interpretar esse novo código de barras referente à homologia 1-dimensional:

- K^1 : Não existem buracos e consequentemente não há nenhuma barra nessa etapa.
- K^2 : Com o surgimento de um buraco representado em verde, surge uma barra na mesma cor representando esse aparecimento.
- K^3 : Enquanto surgem dois novos buracos, um em azul e outro em vermelho, o remanescente de K^2 torna-se trivial pelo surgimento de uma face. Consequentemente no código de barras, enquanto a barra verde cessa indicando o desaparecimento do buraco de mesma cor, surgem duas barras, uma azul e uma vermelha.
- K^4 : Por fim, o buraco azul torna-se trivial enquanto o vermelho se mantém. No código de barras isso é indicado pelo fim da barra azul enquanto a vermelha segue indefinidamente.

3 Homologia Persistente

Podemos ainda representar o comportamento e evolução dos números de Betti por meio da **tabela p -dimensional de $\beta_p^{i,j}$** . Vamos aproveitar o exemplo anterior para entender como ocorre essa representação:

$\beta_0^{i,j} \rightarrow$	$\begin{array}{c cccc} & \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \cdot & 3 & 2 & 2 \\ 3 & \cdot & \cdot & 2 & 2 \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \end{array}$	$\beta_1^{i,j} \rightarrow$	$\begin{array}{c cccc} & \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 3 & \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}$

Para interpretar a tabela, notamos primeiro que os valores da diagonal principal representam os números de Betti nas etapas 1, 2, 3 e 4 da filtração, por exemplo, o número de Betti 0-dimensional em K^2 é $\beta_0^{2,2} = 3$. Outro ponto importante a observar é que os valores abaixo da diagonal são indefinidos uma vez que estamos a analisar a evolução dos números de Betti em subconjuntos aninhados, ou seja, tais que $\emptyset \subseteq K^1 \subseteq K^2 \subseteq K^3 \subseteq K^4$. Por fim, para cada $i < j \in \{1, 2, 3, 4\}$ temos que $\beta_p^{i,j}$ deve ser interpretado como a quantidade de p -ciclos que estão em K^j que já existiam em K^i , isto é, que permaneceram após a evolução das etapas, por exemplo:

- $\beta_0^{1,3} = 1$ indica que, as componentes existentes em K^1 (nesse caso eram duas) passaram a ser apenas uma em K^3 , ou seja, uma delas se fundiu à outra.
- $\beta_0^{2,3} = 2$ mostra que, das três componentes que havias em K^2 apenas duas permaneceram em K^3 , ou seja, uma delas se conectou a outra.
- $\beta_1^{2,3} = 0$ significa que, da quantidade de ciclos que existiam em K^2 , todos se tornaram triviais em K^3 .
- $\beta_1^{3,4} = 1$ essa igualdade por fim, mostra que de todos os ciclos de K^3 (dois nesse caso), apenas um se manteve, consequentemente um se tornou trivial.

Vamos aqui formalizar um conceito que foi utilizado de modo intuitivo nos diagramas das funções f e g e nos códigos de barras apresentados. É a chamada **regra do mais velho**, ela nos diz que dado um ponto de conexão entre duas componentes, a mais antiga das componentes na fusão permanece e a mais jovem cessa. Em termos mais técnicos, dizemos:

Seja $\mathbb{X}$ um espaço topológico conexo e $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos uma família $\mathcal{A}$ e uma filtração $\mathbb{X}_a \subseteq \mathbb{X}_b$ sempre que $a \leq b$, onde $X_a = \{x \in X | f(x) \leq a\}$.

Sejam $a \leq b$ dois índices e seja $N(a, b)$ o número de componentes em $\mathbb{X}_b$ que possuem intersecção não vazia com $\mathbb{X}_a$, ou seja, o número de componentes existentes em algum índice maior ou igual a a que chegam até um índice menor ou igual a b , então cada

uma dessas componentes seguirá um caminho único, o mais longo possível, que abrange todo o intervalo entre a e b . Segue-se que $N(a, b)$ será o número de caminhos na decomposição de f em uma árvore $G(f)$. Tomando como exemplo o gráfico da figura 3.1, temos a seguinte árvore e suas conexões representadas na Figura 3.5:

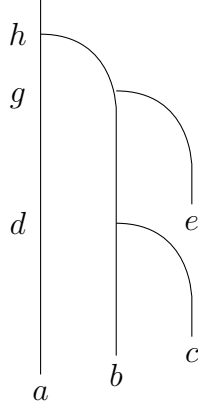


Figura 3.5: Árvore de $G(f)$.

Com essa representação fica bastante claro o que diz a regra do mais velho, de fato a componente surgida em a permanece enquanto as outras vão se conectando a ela ou às próximas surgidas. A segunda componente segue o mesmo padrão com as próximas componentes se conectando a ela, às próximas ou eventualmente à primeira, mas nunca o contrário. Desse modo, qualquer decomposição de caminho que não seja gerada usando a regra do mais velho poderá apresentar diferentes configurações, em particular, essa regra gera uma decomposição de caminho única para a qual o número de caminhos que abrangem $[a, b]$ é igual a $N(a, b)$ para todos os valores de $a \leq b$, e desse modo, nos garantindo que qualquer representação baseada nessa decomposição será única.

3.2 Álgebra dos espaços vetoriais persistentes

De modo a formalizar as ideias apresentadas anteriormente nessa seção introduziremos a álgebra dos espaços vetoriais persistentes. Um dos principais resultados demonstrados nessa seção é que temos uma decomposição natural e coerente dos diferentes grupos de homologia de uma filtração e assim podemos definir independente de escolhas não naturais os instantes de nascimento e morte dos geradores de homologia.

Definição 3.1. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo, dizemos que um **espaço vetorial persistente** sobre $\mathbb{K}$ é uma família de $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais $\{V_r\}_{r \in [0, \infty)}$ e uma família de transformações lineares*

$$\phi^{r, r'} : V_r \rightarrow V_{r'} \text{ para todo } r \leq r'.$$

Tais transformações satisfazem $\phi^{r', r''} \phi^{r, r'} = \phi^{r, r''}$ para todo $r \leq r' \leq r''$.

Sempre que não houver dúvidas quanto ao conjunto a qual ϕ estiver atuando, vamos omitir o índice de modo a otimizar a notação.

Definição 3.2. Uma transformação f entre diferentes espaços vetoriais persistentes $\{V_r\}$ e $\{W_r\}$ ambos sobre $\mathbb{K}$ é a família de transformações lineares $f_r : V_r \rightarrow W_r$ sendo o diagrama a seguir comutativo para todo $r \leq r'$.

$$\begin{array}{ccc} V_r & \xrightarrow{\phi_V^{r,r'}} & V_{r'} \\ f_r \downarrow & & \downarrow f_{r'} \\ W_r & \xrightarrow{\phi_W^{r,r'}} & W_{r'} \end{array}$$

Em outras palavras, queremos que seja válida a igualdade

$$f_{r'} \circ \phi_V^{r,r'} = \phi_W^{r,r'} \circ f_r.$$

Essa transformação será um isomorfismo se admitir inversa.

Definição 3.3. Um **subespaço vetorial persistente** de $\{V_r\}$ é uma família de subespaços $U_r \subseteq V_r$ para todo $r \in [0, \infty)$ de tal modo que $\phi^{r,r'}(U_r) \subseteq U_{r'}$ para todo $r \leq r'$.

Podemos estender a noção de espaço quociente também para espaços vetoriais persistentes como segue:

Definição 3.4. Seja $\{U_r\} \subseteq \{V_r\}$ um subespaço vetorial persistente podemos construir o espaço vetorial persistente quociente $\{V_r/U_r\}$ a partir das transformações lineares $\phi_{V/U}^{r,r'}$ tais que:

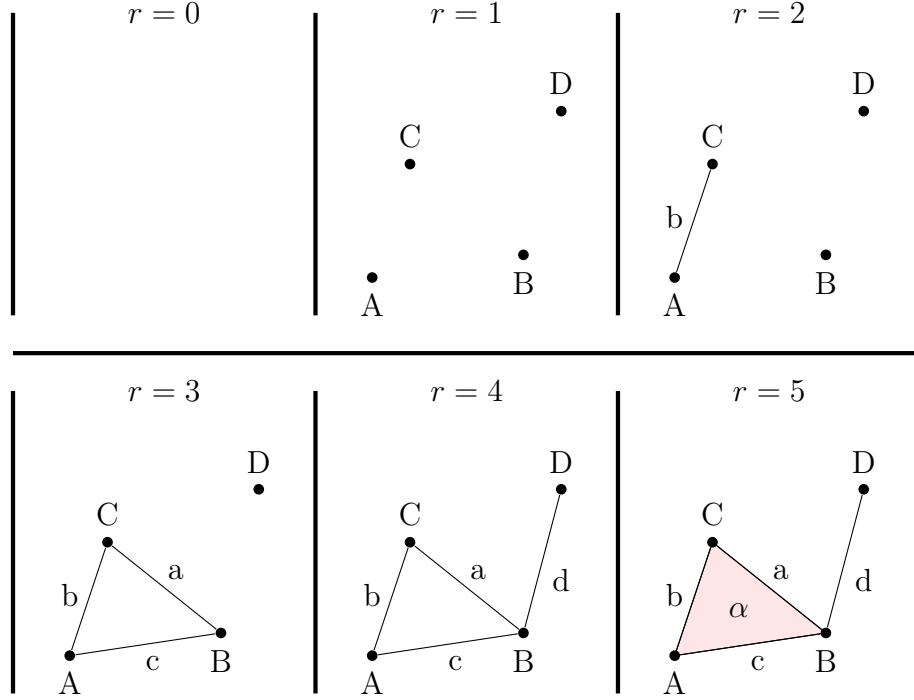
$$\begin{array}{ccc} \phi_{V/U}^{r,r'} : & V_r/U_r & \longrightarrow & V_{r'}/U_{r'} \\ & [v] & \longmapsto & [\phi_V^{r,r'}] \end{array}$$

Definição 3.5. Seja um conjunto X e uma função $\rho : X \rightarrow [0, \infty)$, denotamos por (X, ρ) um conjunto X munido de uma filtração ρ não negativa sobre os reais, ou ainda, (X, ρ) é um conjunto $\mathbb{R}_+$ -filtrado. Desse modo, o **espaço vetorial persistente livre** relacionado ao par (X, ρ) é o espaço vetorial persistente $\{W_r\}$ com $\{W_r\} \in V(X)$ gerado por:

$$X[r] = \{x \in X : \rho(x) \leq r\} \subseteq X.$$

Note que $X[r] \subseteq X[r']$ para $r \leq r'$ implica na seguinte inclusão $W_r \subseteq W_{r'}$. Quando não houver dúvidas quanto ao conjunto a qual a filtração se refere ou não interferir nos resultados, diremos apenas um conjunto filtrado ou conjunto munido de uma filtração.

Vamos ver alguns exemplos de espaços vetoriais persistente livre do conjunto X gerado por $\mathcal{X} = [A, B, C, D, a, b, c, d, \alpha]$ com a filtração mostrada na Figura 3.6:


 Figura 3.6: Exemplo de uma filtração para $\mathcal{X} = \{A, B, C, D, a, b, c, d, \alpha\}$.

Perceba pela filtração apresentada que, se quisermos obter por exemplo $X[3]$, devemos encontrar todo $x \in \mathcal{X} \subseteq X$ que tenha surgido em algum $r \leq 3$. Como nesse exemplo estamos trabalhando apenas com valores inteiros, consideramos $\rho(2.001) = \rho(3)$, $\rho(2.7) = \rho(3)$, e assim segue para quaisquer valores em $(2, 3]$. Obviamente o raciocínio se estende para todo $r \in [0, \infty)$.

Desse modo, temos os seguintes valores para ρ :

$$\begin{aligned}\rho(A) &= \rho(B) = \rho(C) = \rho(D) = 1 \\ \rho(b) &= 2 \\ \rho(a) &= \rho(c) = 3 \\ \rho(d) &= 4 \\ \rho(\alpha) &= 5\end{aligned}$$

De posse desses valores é possível obter os seguintes conjuntos geradores (e consequentemente os espaços vetoriais persistentes livres gerados por eles):

- Para $0 \leq r < 1$, $X[r] = \emptyset$.
- Para $0 \leq r < 2$, $X[r] = [A, B, C, D]$.
- Para $0 \leq r < 3$, $X[r] = [A, B, C, D, b]$.
- Para $0 \leq r < 4$, $X[r] = [A, B, C, D, a, b, c]$.

- Para $0 \leq r < 5$, $X[r] = [A, B, C, D, a, b, c, d]$.
- Para $r \geq 5$, $X[r] = [A, B, C, D, a, b, c, d, \alpha] = \mathcal{X}$.

Proposição 3.6. *A combinação linear $\sum_x a_x x \in V(X)$ pertence a W_r se, e somente se $a_x = 0$ para todo x tal que $\rho(x) > r$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $\sum_x a_x x \in W_r$, desse modo, $\sum_x a_x x$ está no espaço gerado por $X[r] = \{x \in X : \rho(x) \leq r\}$, ou seja, todo $x \in X$ tal que $\rho(x) > r$ não consta em sua combinação linear e portanto, podemos atribuir a eles escalares nulos.

$(\Leftarrow)$ Seja $\sum_x a_x x \in V(X)$ tal que $a_x = 0$ para todo x tal que $\rho(x) > r$, desse modo, todo x nessa combinação é tal que $\rho(x) \leq r$, ou seja, está no espaço gerado por $X[r]$ e portanto, pertence a W_r .

□

Denotamos por $\{V(X, \rho)_r\}$ o espaço vetorial persistente e dizemos que ele é um espaço vetorial persistente livre se existe um isomorfismo entre ele e um da forma $V(X, \rho)$ para algum par ordenado (X, ρ) . Por fim, dizemos que é **finitamente gerado** se X for finito.

Definição 3.7. *Um espaço vetorial persistente será **finitamente apresentado** se for isomorfo a um espaço vetorial persistente da forma $\{W_r\}/\text{im}(f)$ para alguma transformação linear $f : V_r \rightarrow W_r$ entre os espaços vetoriais persistentes livres finitamente gerados V_r e W_r , onde $\text{im}(f)$ é a imagem da transformação linear f .*

Sabemos que a escolha de bases para espaços vetoriais U e V munidos de uma transformação $T : U \rightarrow V$ permite a representação das operações entre esses espaços por meio de matrizes. Vamos mostrar que tais representações também são possíveis entre espaços vetoriais persistentes livres.

Definição 3.8. *Sejam X e Y conjuntos finitos e $\mathbb{K}$ um corpo, uma $\mathbb{K}(YX)$ -matriz é a matriz com entradas em $\mathbb{K}$ relacionando os conjuntos X e Y , ou seja, tais que $Y = f(X)$. Definimos também $r(y)$ para a linha correspondente a $y \in Y$ e $c(x)$ para a coluna correspondente a $x \in X$.*

Quando não houver dúvidas quanto ao corpo em questão denotaremos a matriz relacionando os conjuntos X e Y apenas por (YX) -matriz.

Para todo espaço vetorial persistente livre finitamente gerado $\{V_r\} = \{V(X, \rho)_r\}$ temos que $V(X, \rho)_r = V(X)$ para algum r suficientemente grande, desse modo, para toda transformação linear de espaços vetoriais persistentes livres finitamente gerados

$$f : \{V(X, \rho)_r\} \longrightarrow \{V(Y, \tau)_r\}.$$

Dessa forma, f nos dá a transformação linear $f_\infty : V(X) \longrightarrow V(Y)$ entre espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ sendo então possível determinar uma (YX) -matriz $A(f) = [a_{yx}]$ em relação às bases $\{\varphi_x\}_{x \in X}$ de $V(X)$ e $\{\varphi_y\}_{y \in Y}$ de $V(Y)$.

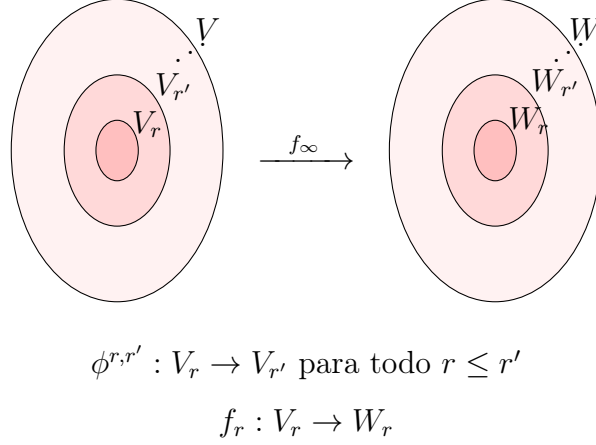


Figura 3.7: Representação de um espaço vetorial persistente finitamente gerado.

Proposição 3.9. *Toda (YX) -matriz $A(f) = [a_{yx}]$ possui a propriedade de que os coeficientes a_{yx} para $\tau(y) > \rho(x)$ são nulos.*

Demonstração. Note que toda combinação $\sum_y a_{yx} y$ pode ser escrita como $\sum_{y \in Y} a_{yx} \{\varphi_y\}$ e pela Proposição 3.6, $\sum_{y \in Y} a_{yx} \{\varphi_y\}$ pertence a $V(Y, \tau)_{\rho(x)}$ somente se $a_{yx} = 0$ para todo $\tau(y) > \rho(x)$. Logo, os coeficientes de $\sum_y a_{yx} y$ na forma desejada estão em $[a_{yx}] = A(f)$. $\square$

Proposição 3.10. *Toda (YX) -matriz A satisfazendo a condição anterior determina de modo único uma transformação linear de espaços vetoriais persistentes*

$$f_A : \{V(X, \rho)_r\} \longrightarrow \{V(Y, \tau)_r\},$$

em que as correspondências $f \longrightarrow A(f)$ e $A \longrightarrow f_A$ são inversas entre si.

Demonstração. Basta notar que, todo $x \in \varphi_x$ pertence a $V(X, \rho)_{\rho(x)}$, além disso, definindo $f(\varphi_x) = \sum_{y \in Y} a_{yx} \{\varphi_y\}$, obtemos $f : \{V(X, \rho)_r\} \longrightarrow \{V(Y, \tau)_r\}$. $\square$

Definição 3.11. *Sejam (X, ρ) e (Y, τ) dois conjuntos munidos de suas respectivas filtrações. Se a (YX) -matriz atender às proposições 3.9 e 3.10, diremos que é uma (YX) -matriz filtrada por τ e ρ e vamos denotá-la por $\mathbb{K}(Y_\tau X_\rho)$ -matriz, ou quando for conveniente, simplesmente por $(Y_\tau X_\rho)$ -matriz.*

Antes de prosseguir vamos ver um exemplo usando Complexos Simpliciais que ilustra bem essas duas proposições e conseqüentemente que uma construção usando o operador ∂ definido no Capítulo 2 satisfaz às proposições estabelecidas.

Dadas as bases $\varphi_x = \{A, B, C, D, a, b, c, d, \alpha\}$ de um Complexo Simplicial X e $\varphi_y = \{A, B, C, D, a, b, c\}$ de um Complexo Y a partir da filtração a seguir e do operador ∂ , obtemos os seguintes resultados:

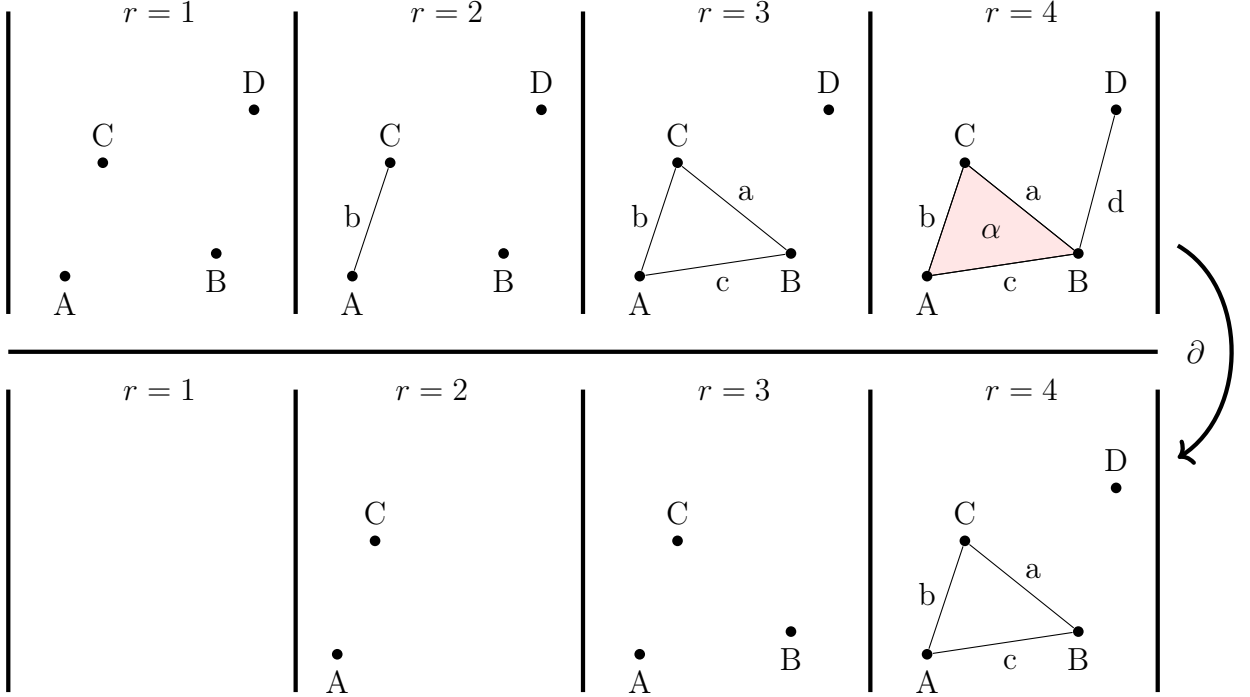


Figura 3.8: Exemplo de uma filtração com $\partial(X) = Y$.

Vamos calcular $\partial(\varphi_x)$ sobre Z_2 :

- $\partial(A) = \partial(B) = \partial(C) = \partial(D) = 0A + 0B + 0C + 0D + 0a + 0b + 0c + 0d$
- $\partial(a) = 0A + 1B + 1C + 0D + 0a + 0b + 0c + 0d$
- $\partial(b) = 1A + 0B + 1C + 0D + 0a + 0b + 0c + 0d$
- $\partial(c) = 1A + 1B + 0C + 0D + 0a + 0b + 0c + 0d$
- $\partial(d) = 0A + 1B + 0C + 1D + 0a + 0b + 0c + 0d$
- $\partial(\alpha) = 0A + 0B + 0C + 0D + 1a + 1b + 1c + 0d$

Pela filtração, $\rho(A) = 1$ desse modo, todo $y \in Y$ que faça parte da combinação linear de $\partial(A)$ deve ser tal que $1 \geq \tau(y)$. Entretanto, nenhum y satisfaz essa desigualdade, e portanto podemos afirmar que todo coeficiente em $\sum_{y \in Y} a_{xy} \{\varphi_y\}$ é nulo. O mesmo ocorre com $\rho(B)$, $\rho(C)$ e $\rho(D)$.

Para $\rho(a) = 3$, todo coeficiente não nulo de $\sum_{y \in Y} a_{xy} \{\varphi_y\}$ deve ser tal que $3 \geq \tau(y)$ o que de fato ocorre uma vez que $\tau(B) = \tau(C) = 3$. E de modo análogo para $\rho(c)$.

Analisando $\rho(b) = 2$ temos o mesmo comportamento uma vez que os únicos $y \in Y$ que fazem parte da combinação linear de $\partial(b)$ são A e C e temos $\tau(A) = 2 = \tau(C)$, que satisfazem a desigualdade necessária. Por fim, $\rho(\alpha) = 4 = \rho(d)$ e $\tau(a) = \tau(b) = \tau(c) = \tau(D) = 4$, logo, a desigualdade é satisfeita.

Partindo das informações obtidas, vamos construir a respectiva $\mathbb{Z}_2(Y_\tau X_\rho)$ -matriz. Duas características significativas dela, são o fato de ser uma matriz triangular superior, dado a maneira como os simplexos surgem na filtração e que os valores da diagonal principal (ou equivalente quando não for uma matriz quadrada) serem nulos.

$$A(f) = \begin{matrix} & A & C & B & D & b & c & a & d & \alpha \\ \begin{matrix} A \\ C \\ B \\ D \\ b \\ c \\ a \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ . & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ . & . & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Desse modo, tomando (X, ρ) e (Y, τ) , temos que toda matriz $A = [a_{yx}]$ satisfazendo as Proposições 3.9 e 3.10 determina um espaço vetorial persistente por meio da correspondência θ :

$$A \xrightarrow{\theta} V(X, \rho) / \text{im}(f_A) \quad (3.1)$$

Proposição 3.12. *Toda matriz A satisfazendo a Proposição 3.9 descreve um espaço vetorial persistente finitamente apresentado. Por outro lado, todo espaço vetorial persistente finitamente apresentado é isomorfo a um $\theta(A)$ para alguma matriz A .*

Demonstração. Segue diretamente da correspondência entre matrizes e transformações lineares apresentada na Proposição 3.10. $\square$

Seja (X, ρ) munido de uma $\mathbb{R}_+$ -filtração. A partir da correspondência entre matrizes e transformações lineares, os automorfismos de $V(X, \rho)$ podem ser identificados como o conjunto de todas as $(X_\rho X_\rho)$ -matriz inversíveis.

Proposição 3.13. *Sejam (X, ρ) e (Y, τ) conjuntos $\mathbb{R}_+$ -filtrados e seja A uma $(Y_\tau X_\rho)$ -matriz. Tomando B e C , $(Y_\tau Y_\tau)$ -matriz e $(X_\rho X_\rho)$ -matriz respectivamente, então a matriz BAC é uma $(Y_\tau X_\rho)$ -matriz e o espaço vetorial persistente $\theta(A)$ é isomorfo a $\theta(BAC)$.*

Usaremos este resultado para classificar a menos de isomorfismo todos os espaços vetoriais persistentes finitamente apresentados. Começaremos introduzindo os blocos fundamentais para tal classificação.

Definição 3.14. *Dado o par ordenado (a, b) para $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ e $a < b$. O espaço $\mathbb{P}(a, b)$ é definido como $\mathbb{P}(a, b) = \mathbb{K}$ para $r \in [a, b)$ e $\mathbb{P}(a, b) = \{0\}$ quando $r \notin [a, b)$. Nesse caso, devemos interpretar a transformação $\phi^{r, r'} = \text{id}$ sempre que $r, r' \in [a, b)$.*

Dada a importância dos espaços $\mathbb{P}(a, b)$ vamos apresentar uma representação matricial simples dos mesmos. Para o caso de b finito, podemos escolher (X, ρ) e (Y, τ) como conjuntos $\mathbb{R}_+$ -filtrados com $X = \{x\}$ e $Y = \{y\}$ e tais que $\rho(x) = b$ e $\tau(y) = a$, então a $(Y_1 X_1)$ -matriz $[1]$ é filtrada por ρ e τ somente se $a \leq b$ e temos que $\mathbb{P}(a, b)$ é isomorfo a $\theta([1])$, pela Equação 3.1. Quando $b = \infty$, $\mathbb{P}(a, b)$ é isomorfo ao espaço vetorial persistente $V_k(X, \rho)$ e desse modo, pode ser escrito como $\theta([0])$, em que $[0]$ denota a transformação linear nula do espaço vetorial persistente $\{0\}$.

Teorema 3.15. *Todo espaço vetorial persistente finitamente apresentado sobre $\mathbb{K}$ é isomorfo a uma soma direta da forma*

$$\mathbb{P}(a_1, b_1) \oplus \mathbb{P}(a_2, b_2) \oplus \cdots \oplus \mathbb{P}(a_n, b_n) \quad (3.2)$$

para algum $a_i \in [0, \infty)$, $b_i \in [0, \infty]$ e $a_i < b_i$ para todo i .

Demonstração. Claramente uma $(Y_\tau X_\rho)$ -matriz A com a propriedade de que cada linha e coluna possuam no máximo um elemento não nulo e igual a 1 satisfaz a Proposição 3.10, portanto é uma $\theta([A])$. Tomando todos os pares $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ tais que $a_{y_i, x_i} = 1$ para $i = \{1, 2, \dots, n\}$, então existe uma decomposição

$$\theta(A) \cong \bigoplus_{y=\{y_1, \dots, y_m\}} \mathbb{P}(\tau(y), \infty) \oplus \bigoplus_i \mathbb{P}(\tau(y_i), \rho(x_i)) \quad (3.3)$$

Por fim, resta demonstrar tal propriedade em uma $(Y_\tau X_\rho)$ -matriz qualquer.

Basta construir as matrizes B e C , que são respectivamente uma matriz (ρ, ρ) -adaptada (X, X) e uma matriz (σ, σ) -adaptada (Y, Y) , de modo que BAC tenha a propriedade de que cada linha e coluna tem no máximo um elemento não nulo, que é igual a 1. Para ver que podemos fazer isso, adaptamos a abordagem de operações de linhas e

colunas para este contexto. As operações de linhas e colunas (ρ, σ) -adaptadas consistem em todas as multiplicações possíveis de uma linha ou coluna por um elemento não nulo de k , todas as adições possíveis de um múltiplo de $r(x)$ a $r(x')$ quando $\rho(x) \geq \rho(x')$, e todas as adições possíveis de um múltiplo de $c(y)$ a $c(y')$ quando $\sigma(y) \geq \sigma(y')$. Afirmamos que, realizando operações de linhas e colunas (ρ, σ) -adaptadas, podemos obter uma matriz com no máximo um elemento não nulo em cada linha e coluna.

Para isso, obtenha y que maximize o valor de $\tau(y)$ sobre o conjunto de todos os y tais que $r(y) \neq 0$. Depois encontre o x que maximize o valor de $\rho(x)$ sobre o conjunto de todos os x tais que $a_{y,x} \neq 0$. Pelo modo como y foi escolhido, podemos adicionar múltiplos de $r(y)$ a todas as outras linhas de modo a cancelar $c(x)$ exceto na entrada yx . Podemos agora adicionar múltiplos de $c(x)$ a todas as outras colunas de modo a cancelar $r(y)$ exceto na entrada yx . Obteremos ao fim desse processo uma linha $r(y)$ e uma coluna $c(x)$ ambas compostas apenas por zeros exceto na entrada yx , basta agora multiplicar $r(y)$ por $\frac{1}{a_{yx}}$ e obteremos uma matriz em que o único elemento não nulo em $r(y)$ e $c(x)$ será o 1 resultante na entrada yx . Excluindo $r(y)$ e $c(x)$ da matriz obteremos uma nova $(Y \setminus \{y\}_{\tau'} X \setminus \{x\}_{\rho'})$ -matriz em que τ' e ρ' são as restrições de τ e ρ para os conjuntos $Y \setminus \{y\}$ e $X \setminus \{x\}$ respectivamente. Podemos agora aplicar esse processo indutivamente à nova matriz e cada operação em suas linhas ou colunas não terá efeito sobre $r(y)$ ou $c(x)$. Após iterar esse processo um número finito de vezes chegaremos à uma matriz composta apenas por zeros e uns e obviamente pelo modo como foi obtida terá no máximo uma entrada diferente de zero em cada linha e coluna chegando por fim no resultado pretendido. $\square$

Na Seção 3.5 apresentamos um exemplo computacional do algoritmo descrito na demonstração do teorema anterior e que pode auxiliar na compreensão dos detalhes da demonstração anterior.

Vamos mostrar agora que qualquer decomposição na forma 3.2 para um determinado espaço vetorial persistente é única.

Proposição 3.16. *Suponha que $\{V_r\}$ seja um espaço vetorial persistente finitamente apresentado sobre $\mathbb{K}$ possuindo as seguintes decomposições*

$$\{V_r\} \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{P}(a_i, b_i) \quad e \quad \{V_r\} \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbb{P}(c_j, d_j)$$

em que I e J são conjuntos finitos. Então $\#(I) = \#(J)$ e o conjunto de pares (a_i, b_i) que aparece na primeira decomposição é idêntico ao conjunto de pares (c_j, d_j) que aparece na segunda decomposição.

Demonstração. Sejam $a_{\min}$ e $c_{\min}$ os valores minimais de a_i e c_j respectivamente, $a_{\min}$ pode ser caracterizado como $\min\{r | V_r \neq 0\}$ e disso segue que $a_{\min} = c_{\min}$. Seja agora

b_{min} definido por $\min\{b_i | a_i = a_{min}\}$ fazendo a definição correspondente para d_{min} , temos que b_{min} também pode ser caracterizado por $\min\{r' | N(\phi^{r,r'}) \neq 0\}$ em que N denota o espaço nulo, desse modo, $b_{min} = d_{min}$ o que nos mostra que $\mathbb{P}(a_{min}, b_{min})$ aparece em ambas as decomposições. Em cada uma das decomposições, considere a soma de todas as ocorrências das parcelas $\mathbb{P}(a_{min}, b_{min})$, elas representam subespaços vetoriais persistentes de $\{V_r\}$ e podem ser caracterizados como o subespaço vetorial persistente $\{W_r\}$ em que W_r representa o espaço nulo da transformação linear

$$\text{im}(\phi^{a,r}) \xrightarrow{\phi^{r,b}|_{\text{im}(\phi^{a,r})}} V_b$$

Segue então que os valores da forma $\mathbb{P}(a_{min}, b_{min})$ em ambas as decomposições são os mesmos. Denote por I' o subconjunto de I após remover todo i tal que $a_i = a_{min}$ e $b_i = b_{min}$, analogamente para J' . Podemos desse modo tomar o quociente de $\{V_r\}$ por $\{W_r\}$ obtendo assim

$$\{V_r\}/\{W_r\} \cong \bigoplus_{i \in I'} \mathbb{P}(a_i, b_i) \quad e \quad \{V_r\}/\{W_r\} \cong \bigoplus_{j \in J'} \mathbb{P}(c_j, d_j).$$

Por indução nos valores das parcelas das decomposições obtemos o resultado esperado. $\square$

3.3 Homologia persistente

Baseado no que vimos no capítulo anterior, sabemos que por meio de um complexo simplicial e uma transformação ∂ em que a cada simplexo associa seu bordo pudemos construir complexos de cadeias e a partir de operações nesses simplexos obter os grupos de homologia associados à esse complexo de cadeias. Vamos a partir daqui mostrar que isso também é possível para complexo de cadeias persistentes. Nesse caso, o complexo de cadeias em dado parâmetro se comporta de modo natural e não se altera ao incluirmos injetivamente em um conjunto maior de simplexos, desse modo, podemos representar o comportamento das mudanças nas homologias por meio de uma soma direta de pares como vimos no tópico anterior e isso nos permitirá fazer representações por meio de tabelas, código de barras e diagrama de persistência.

Seja K um complexo simplicial e $\mathcal{F}(K)$ uma filtração discreta, para toda dimensão p e todo $i = \{0, \dots, m\}$ denotamos por C_p^i, Z_p^i e B_p^i o conjunto das p -cadeias, p -ciclos e p -bordos de K^i respectivamente, dos quais extraímos as seguintes inclusões:

$$\begin{aligned} Z_p^0 &\subseteq Z_p^1 \subseteq \dots \subseteq Z_p^m = Z_p(K) \\ B_p^0 &\subseteq B_p^1 \subseteq \dots \subseteq B_p^m = B_p(K) \end{aligned}$$

Desse conjunto de inclusões temos:

Para todo $i \leq j$ definimos a aplicação inclusão entre os espaços K^i e K^j dada por $\phi_p^{i,j} : K^i \hookrightarrow K^j$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Uma vez que $Z_p^i \subseteq K^i$, por maior razão temos $\phi_p^{i,j} : Z_p(K^i) \hookrightarrow Z_p(K^j)$ o que por sua vez, induz à seguinte aplicação:

$$\psi_p^{i,j} : H_p(K^i) \rightarrow H_p(K^j).$$

Essa por sua vez nos permite obter a sequência de grupos de homologia conectada por homomorfismos como segue:

$$0 = H_p(K^0) \xrightarrow{\psi_p^{0,1}} H_p(K^1) \xrightarrow{\psi_p^{1,2}} \dots \xrightarrow{\psi_p^{m-1,m}} H_p(K^m) = H_p(K)$$

Definição 3.17. *O p -ésimo grupo de homologia persistente é a imagem dos homomorfismos induzidos $\text{im } \psi_p^{i,j} = H_p^{i,j}$ para $0 \leq i \leq j \leq m$.*

A medida que evoluímos de um conjunto K^{i-1} para um conjunto K^i , obtemos novas classes de homologia e perdemos outras sempre que elas se tornam triviais ou se fundem como sugere a Figura 3.9:

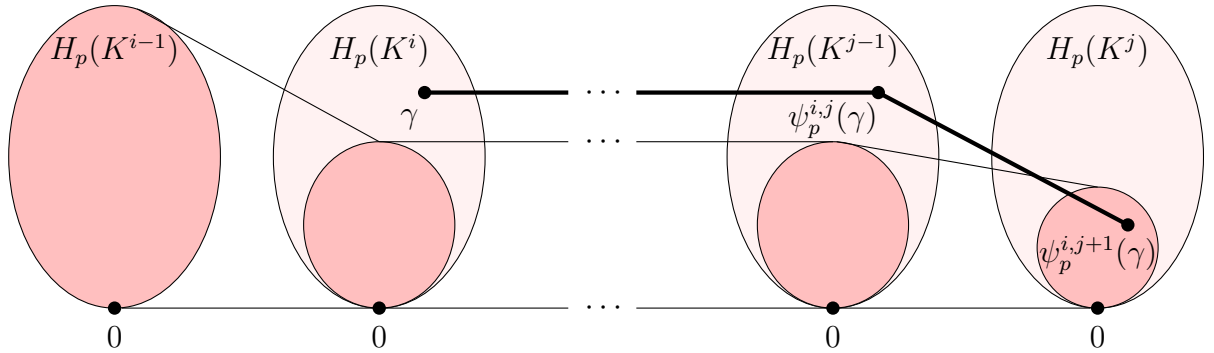


Figura 3.9: A classe γ nasce em K^i uma vez que não está na imagem de H_p^{i-1} e morre ao entrar em K^j sendo essa a primeira vez que sua imagem se funde à imagem de H_p^{i-1} .

Definição 3.18. *O p -ésimo número de Betti persistente representado por $\beta_p^{i,j}$ é a dimensão do espaço vetorial $H_p^{i,j} = Z_p^i / (B_p^j \cap Z_p^i)$ para $0 \leq i \leq j \leq m$.*

O p -ésimo número de Betti persistente $\beta_p^{i,j}$ representa o número de classes independentes de homologia de p -ciclos que constam em K^i mas que não são bordos em K^j . Intuitivamente, um p -ciclo de K^i que gera um elemento não trivial em $H_p^{i,j}$, é um ciclo que surgiu na filtração antes da etapa $(i+1)$ e passou a ser bordo apenas após a etapa j . Diremos que uma classe de homologia será criada quando um simplexo σ_i for adicionado na filtração, nesse caso será chamado de **simplexo positivo**, em outras

palavras, se ele estiver contido em um $(p+1)$ -ciclo de K^i mas que não seja bordo de algum $(p+2)$ -simplexo e será um **simplexo negativo** em caso contrário.

Lema 3.19. *Dado σ_i um p -simplexo positivo, existe um p -ciclo que não é bordo em K^i que contém σ_i e que não contém nenhum outro simplexo positivo.*

Demonstração. Suponha verdadeiro o resultado para todos os simplexos positivos adicionados à filtração antes de σ_i .

Sendo σ_i positivo, existe um p -ciclo c' em K^i contendo σ_i . Sejam σ_{i_j} , $j = 1, \dots, k$, os p -simplexos positivos contidos nesse ciclo, diferentes de σ_i , e c_j os p -ciclos que não são bordos contendo σ_{i_j} e que não contêm nenhum outro p -simplexo positivo. Desse modo, $c = c' + c_1 + \dots + c_k$ é um p -ciclo em que σ_i é o único p -simplexo positivo. Visto que não pode existir nenhum $(p+1)$ -simplexo em K^i a conter σ_i em seu bordo, desse modo, c é um ciclo que não é bordo. A unicidade de c é provada de modo análogo. $\square$

A partir desse resultado, podemos construir uma base para H_p^i de maneira indutiva:

- A base de H_p^0 é vazia.
- Assumindo que já conhecemos uma base para H_p^{i-1} , temos:
 - i) Sendo σ_i um p -simplexo positivo, adicionamos à base de H_p^{i-1} a classe de homologia do ciclo c_i associado à σ_i de modo a obter uma base para H_p^i . Sendo c_i a soma de σ_i a simplexos negativos, não é homólogo a nenhuma combinação linear de ciclos que definam uma base de H_p^{i-1} . Dado então que $\dim(H_p^i) = \dim(H_p^{i-1}) + 1$, obtemos então uma base para H_p^i .
 - ii) Sendo σ_i um $(p+1)$ -simplexo negativo, sejam $c_{i_1}, \dots, c_{i_k}$ os ciclos associados aos simplexos positivos $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k}$ cujas classes de homologia formam uma base para H_p^{i-1} . O bordo $d = \partial\sigma_i$ de σ_i é um p -ciclo que não é bordo em K^{i-1} mas que é em K^i . Desse modo, ele pode ser escrito de modo único como

$$d = \partial\sigma_i = \sum_{p=1}^k \lambda_p c_{j_p} + b$$

em que $\lambda_p \in \{0, 1\}$ e b é bordo em K^{i-1} . Denotando $\text{low}(i) = \max\{j_p : \lambda_p = 1\}$, obtemos uma base de H_p^i retirando a classe e homologia de $c_{\text{low}(i)}$ da base de H_p^{i-1} . Uma vez que $\dim(H_p^{i-1}) = \dim(H_p^i) - 1$ basta notar que $c_{\text{low}(i)}$ é uma combinação linear dos ciclos $c_{j_p} \in Z_p^i$, $j_p \neq \text{low}(i)$ que é equivalente à decomposição mencionada de d .

- Assim obtemos uma base para H_p^i .

3.4 Algoritmos

Vamos apresentar um algoritmo que compute os números de Betti sobre $\mathbb{Z}_2$ de complexos simpliciais partindo de sua construção recursiva no qual em cada etapa é adicionado um novo simplexo e atualizado os valores anteriormente obtidos.

Dado um complexo simplicial finito K de dimensão d , munido da filtração discreta, uma vez que partiremos de $K^0 = \emptyset$, temos inicialmente $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_d = 0$ para os d números de Betti e a cada inclusão de um novo simplexo σ_i faremos as atualizações condizentes nos β_i , $i = 0, \dots, d$. Em cada uma dessas inclusões, teremos duas possibilidades a considerar, ou σ_i estará contido em um ciclo $\mathbf{c}$, ou não, e dessa forma, ou esse simplexo irá criar ou irá destruir um gerador de homologia. A figura 3.10 ilustra cada uma dessas situações em um simplexo K^{i-1} .

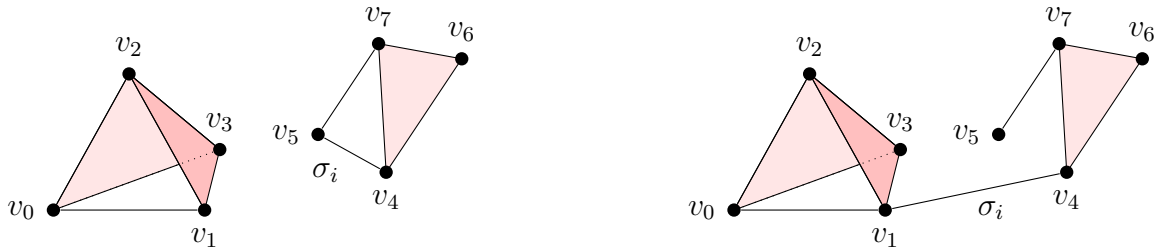


Figura 3.10: Exemplo de adição de um 1-simplexo σ_i e seu impacto em um complexo simplicial K^{i-1} .

Vamos conhecer o algoritmo:

Algoritmo 3.1: Computação dos números de Betti.

```

1 Input: Uma filtração de um complexo simplicial  $d$ -dimensional  $K$  contendo
   contendo  $m$  simplexos.
2    $\beta_0 \leftarrow 0; \beta_1 \leftarrow 0; \dots; \beta_d \leftarrow 0;$ 
3 for  $i = 1$  até  $m$  do
4    $k = \dim \sigma_i - 1$ 
5 if  $\sigma_i$  está contido em um  $(K+1)$ -ciclo em  $K^i$  then
6    $\beta_{k+1} \leftarrow \beta_{k+1} + 1$ 
7 else
8    $\beta_k \leftarrow \beta_k - 1$ 
9 Output: Os números de Betti  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_d$  of  $K$ .
```

Para mostrarmos de fato que o algoritmo funciona, precisamos entender exatamente como evolui o processo de filtração de K . Suponha que em determinada etapa K^{i-1} tenhamos obtidos seus números de Betti. Vamos adicionar um simplexo σ_i de dimensão $(k+1)$ de modo a obter K^i , temos:

Caso 1: Assumindo que σ_i está contido em um $(k+1)$ -ciclo c em K^i , então c não é homólogo a nenhum $(k+1)$ -ciclo já existente em K^{i-1} caso contrário, existiria um $(k+1)$ -ciclo c' em K^{i-1} de modo que $c + c'$ fosse bordo de uma $(k+2)$ -cadeia $d \in K^i$. No entanto, como $\sigma_i \notin c'$, teria que estar contido em $c + c' = \partial d$, uma contradição. Desse modo, c cria uma classe de homologia independente das já existentes em K^{i-1} .

Como consequência, podemos assegurar a veracidade da desigualdade

$$\beta_{k+1}(K^i) \geq \beta_{k+1}(K^{i-1}) + 1. \quad (3.4)$$

Para concluir esse caso, basta lembrar que a adição de qualquer simplexo aumentará a dimensão do conjunto a qual pertence em no máximo uma unidade, desse modo, tomando dois ciclos c e c' que contenham σ_i , $c + c'$ será um $(k+1)$ -ciclo em K^{i-1} , e desse modo, c' estará contido no subespaço gerado por c e $Z_{k+1}(K^{i-1})$. Assim, $\dim(Z_{k+1}(K^i)) \leq \dim(Z_{k+1}(K^{i-1})) + 1$. Como $B_{k+1}(K^{i-1}) \subset B_{k+1}(K^i)$, temos a desigualdade

$$\beta_{k+1}(K^i) \leq \beta_{k+1}(K^{i-1}) + 1. \quad (3.5)$$

De 3.4 e 3.5 podemos então afirmar que, ao adicionar um simplexo σ_i contido em algum $(k+1)$ -ciclo de K^i , teremos $\beta_{k+1}(K^i) = \beta_{k+1}(K^{i-1}) + 1$.

Caso 2: Suponha agora que σ_i não está contido em nenhum $(k+1)$ -ciclo de K^i . Suponha também que o k -ciclo $\partial\sigma_i$ seja bordo em K^{i-1} . Desse modo, existe $c \in K^{i-1}$ de modo que $\partial c = \partial\sigma_i$, ou ainda, $\partial(c + \sigma_i) = 0$. Assim $c + \sigma_i$ é um $(k+1)$ -ciclo em K^i contendo σ_i , uma contradição. Logo $\partial\sigma_i \in K^{i-1}$ era ciclo em K^{i-1} , após a adição de σ_i passa a ser bordo, do qual obtemos a igualdade

$$\beta_k(K^i) + 1 \leq \beta_k(K^{i-1}). \quad (3.6)$$

De modo análogo ao anterior, a partir do fato que $\dim(Z_k(K^i)) + 1 \geq \dim(Z_k(K^{i-1}))$ e também $Z_k(K^i) \subset Z_k(K^{i-1})$, obtemos que

$$\beta_k(K^i) + 1 \geq \beta_k(K^{i-1}). \quad (3.7)$$

Por fim, de 3.6 e 3.7 concluímos que, ao adicionar um simplexo σ_i que não está contido em algum $(k+1)$ -ciclo de K^i , teremos $\beta_k(K^i) = \beta_k(K^{i-1}) - 1$.

Definição 3.20. O par ordenado composto pelos simplexos $(\sigma_{\text{low}(j)}, \sigma_j)$ é chamado **par persistente** de uma filtração $\mathcal{F}(K)$, onde $\text{low}(j)$ é o maior índice de um p -simplexo positivo associado a $\partial\sigma_j$.

Intuitivamente a classe de homologia criada por $\sigma_{\text{low}(j)}$ em $K^{\text{low}(j)}$ é destruída por σ_j em K^j e essa dinâmica entre os simplexos nos permite obter os pares persistentes.

Vemos a seguir um primeiro algoritmo para calcular esses pares de persistência de uma filtração $\mathcal{F}$ de um complexo K de dimensão d contendo m simplexes baseado nas inclusões de simplexes positivos e negativos.

Algoritmo 3.2: Computação de pares persistente.

```

1 Input: Uma filtração de um complexo simplicial  $d$ -dimensional  $K$  contendo  $m$ 
   simplexos.
2  $L_0 = L_1 = \dots = L_{d-1} = \emptyset$ 
3 for  $j = 0$  até  $m$  do
4    $k = \dim \sigma_j - 1$ 
5   if  $\sigma_j$  for negativo then
6      $\text{low}(j) = \text{maior índice de um } p\text{-simplexo positivo associado a } \partial\sigma_j;$ 
7      $L_k \leftarrow L_k \cup \{(\sigma_{\text{low}(j)}, \sigma_j)\};$ 
8 Output: Retorna os pares persistentes em cada dimensão  $L_0, L_1, \dots, L_{d-1};$ .
```

Note porém que, em detrimento ao primeiro algoritmo apresentado que calculava os números de Betti, esse possui uma limitação, ele não consegue determinar exatamente os valores $\text{low}(j)$. Podemos entretanto superar isso a partir da versão matricial desse algoritmo que nada mais é do que uma versão computacional do resultado apresentado em 3.2 como veremos a seguir:

Seja K um complexo simplicial e $\mathcal{F}(K)$ sua filtração, vamos conhecer um algoritmo que se baseia na redução da matriz do operador bordo dos simplexes.

Seja $M = (m_{i,j})_{i,j=1,\dots,m}$ uma matriz quadrada de ordem m com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, ela será a matriz de incidência de uma filtração simplicial K quando:

- i) $m_{i,j} = 1$ se σ_i é face de σ_j ;
- ii) $m_{i,j} = 0$ em caso contrário.

Dessa forma, se σ_j é um $(k+1)$ -simplexo, a j -ésima coluna de M representará o conjunto das faces k -dimensionais contidas no bordo de σ_j . Para toda coluna C_j de M , usaremos $\text{low}(j)$ para denotar o índice mais alto de M que seja um termo não nulo na coluna de C_j , ou seja: $i = \text{low}(j) \iff m_{i,j} = 1$ e $m_{i',j} = 0$ para todo $i' > i$.

No caso em que a coluna C_j for nula, $\text{low}(j)$ é indefinido. O processo de redução de uma matriz M ocorre percorrendo as colunas e identificando a linha não nula de maior índice, indicada por $i = \text{low}(j)$. Se houver alguma outra coluna $j' < j$ de modo que $\text{low}(j') = \text{low}(j)$, somamos a coluna C_j a essa coluna $C_{j'}$ e repetimos o processo. Quando não mais existir j' tal que $\text{low}(j') = \text{low}(j)$, somamos a linha R_i às linhas $R_{i'}$. A matriz resultante indicada por M' será composta por colunas nulas e não nulas. Cada coluna nula representará um simplexo positivo e cada coluna não nula um simplexo negativo.

3 Homologia Persistente

Diremos que dois simplexos σ_i e σ_j se relacionam quando $i = \text{low}(j)$. Ao simplexo que não se relacionar a nenhum outro, diremos ser um simplexo persistente. Assim, temos o seguinte algoritmo para calcular a matriz reduzida M' e consequentemente os pares persistentes:

Algoritmo 3.3: Computação persistente matricial.

```

1 Input: Uma filtração de um complexo simplicial  $d$ -dimensional  $K$  contendo
    $m$  simplexos e a matriz  $M$  de seu operador bordo.
2 for  $j = 1$  até  $m$  do
3   while existir  $j' < j$  tal que  $\text{low}(j) = \text{low}(j')$  do
4      $C_{j'} = C_j + C_{j'} \pmod{2}$ 
5      $R_j = R_j + R_{j'} \pmod{2}$ 
6 Output: Retorne os pares  $(\sigma_{\text{low}(j)}, \sigma_j)$ .
```

Vamos entender como o algoritmo funciona por meio da seguinte proposição:

Proposição 3.21. *Dada uma filtração $\mathcal{F}$ o algoritmo apresentado calcula os pares persistentes.*

Demonstração. Em cada passo do algoritmo a coluna C_j da matriz M' representa uma cadeia da forma

$$\partial\left(\sigma_j + \sum_{i < j} \lambda_i \sigma_i\right), \text{ com } \lambda_i \in \{0, 1\}.$$

Tal resultado se dá por indução, uma vez que, cada coluna j é da forma $M_{i,j}\sigma = \partial\sigma_j$ em $\mathbb{Z}_2$, além disso, cada coluna é somada a apenas uma outra de índice inferior.

No fim do algoritmo, se C_j é tal que $\text{low}(j)$ está definido, então $\sigma_{\text{low}(j)}$ está contido em um k -bordo (com k sendo a dimensão de $\sigma_{\text{low}(j)}$). De fato, neste caso, a coluna C_j representa uma cadeia da forma

$$\sigma_{\text{low}(j)} + \sum_{p < \text{low}(j)} \lambda'_p \sigma_p, \text{ com } \lambda'_p \in \{0, 1\}.$$

Mas pela afirmação anterior, C_j representará um bordo em K_j , e uma vez que $\partial \circ \partial = 0$, temos que a cadeia anterior é um ciclo contendo $\sigma_{\text{low}(j)}$. Ao fim do algoritmo, se C_j é tal que $\text{low}(j)$ está definido, então $(\sigma_{\text{low}(j)}, \sigma_j)$ é um par persistente.

De fato, pelas afirmações anteriores, podemos escrever

$$\begin{aligned} \partial\left(\sigma_j + \sum_{i < j} \lambda_i \sigma_i\right) &= \sigma_{\text{low}(j)} + \sum_{p < \text{low}(j)} \lambda'_p \sigma_p \implies \\ \implies \partial(\sigma_j) &= \sigma_{\text{low}(j)} + \sum_{p < \text{low}(j)} \lambda'_p \sigma_p + \partial\left(\sum_{i < j} \lambda_i \sigma_i\right) \end{aligned}$$

uma vez que estamos em $\mathbb{Z}_2$ e portanto, $-\lambda = \lambda$.

Perceba que do exposto, afirmamos que $\sigma_{\text{low}(j)}$ é um simplexo positivo criado no instante $\text{low}(j)$ de tal forma que é o último simplexo adicionado na construção do bordo, ou seja, sua adição define um gerador de homologia. Ao fim do algoritmo, se C_j contém apenas zeros, significa que σ_j é positivo, ou seja, houve a criação de um ciclo e portanto, $(\sigma_{\text{low}(j)}, \sigma_j)$ é um par persistente. $\square$

3.5 Diagramas de persistência e códigos de barras

Nesse tópico vamos juntar as ferramentas vistas e a partir de um complexo simplicial K e uma **filtração** $\mathcal{F}$, construir sua $\mathbb{Z}_2(XX)$ -matriz. Após isso, observar como se dá a interação com o operador ∂ e consequentemente obter sua representação na forma de soma direta. Como vimos, essa decomposição finalmente nos permitirá conhecer seu diagrama de persistência. Veremos como essas ferramentas fornecem informações acerca das propriedades topológicas do complexo simplicial. Mais especificamente, iremos observar o número de componentes conexas e buracos e acompanhar como eles interagem e evoluem à medida que os parâmetros se alteram. Para isso, vamos trabalhar com uma filtração em que o comportamento das homologias 0 e 1 dimensional estão descritas nas tabelas 3.1 e 3.2 e sua $\mathbb{Z}_2(XX)$ -matriz na Figura 3.11 representando sua filtração.

Definição 3.22 (Multiconjunto). *Um **multiconjunto** $\mathcal{A} = (S, m)$ é um par que consiste de um conjunto S e uma função $m : S \rightarrow \{1, 2, \dots\} \cup \{+\infty\}$, chamada de **função multiplicidade**. Cada $s \in S$ é dito um elemento de $\mathcal{A}$ com multiplicidade $m(s)$.*

Se a filtração estiver indexada por uma sequência crescente de números reais:

$$\emptyset = K^{\alpha_0} \subset K^{\alpha_1} \subset \dots \subset K^{\alpha_m} = K, \quad \text{com } \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m,$$

o par persistente de simplexes $(\sigma_{\text{low}(j)}, \sigma_j)$ é representado no diagrama como o ponto com coordenadas $(\alpha_{\text{low}(j)}, \alpha_j)$. Entretanto, como a sequência não é necessariamente estritamente crescente, podemos ter diversos pares associados a um mesmo ponto no plano. Assim, um **diagrama de persistência** é um multiconjunto $\mathcal{A} = (S, m)$ onde $S \subset \overline{\mathbb{R}}^2$, com $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, e a função m conta a quantidade de pares associados ao ponto dado.

Por razões técnicas, que serão discutidas mais a frente adicionamos a este conjunto finito de pontos a diagonal $y = x$ do plano, obtendo assim o diagrama persistente de dimensão k da filtração. Por convenção, os pontos da diagonal têm multiplicidade infinita. Se um simplexo σ_i não estiver emparelhado, adicionamos o ponto de coordenadas $(\alpha_i, +\infty)$ ao diagrama de persistência.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\beta_0^{i,j} \rightarrow$								
1	4	3	2	1	1	1	1	1
2	.	3	2	1	1	1	1	1
3	.	.	2	1	1	1	1	1
4	.	.	.	1	1	1	1	1
5	.	.	.	.	2	2	2	2
6	.	.	.	.	.	2	2	2
7	.	.	.	.	.	.	2	2
8	.	.	.	.	.	.	.	2

Tabela 3.1: Tabela p -dimensional de $\beta_0^{i,j}$ para 3.11.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\beta_1^{i,j} \rightarrow$								
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	.	0	0	0	0	0	0	0
3	.	.	0	0	0	0	0	0
4	.	.	.	0	0	0	0	0
5	.	.	.	.	0	0	0	0
6	.	.	.	.	.	1	0	0
7	.	.	.	.	.	.	0	0
8	.	.	.	.	.	.	.	1

Tabela 3.2: Tabela p -dimensional de $\beta_1^{i,j}$ para 3.11.

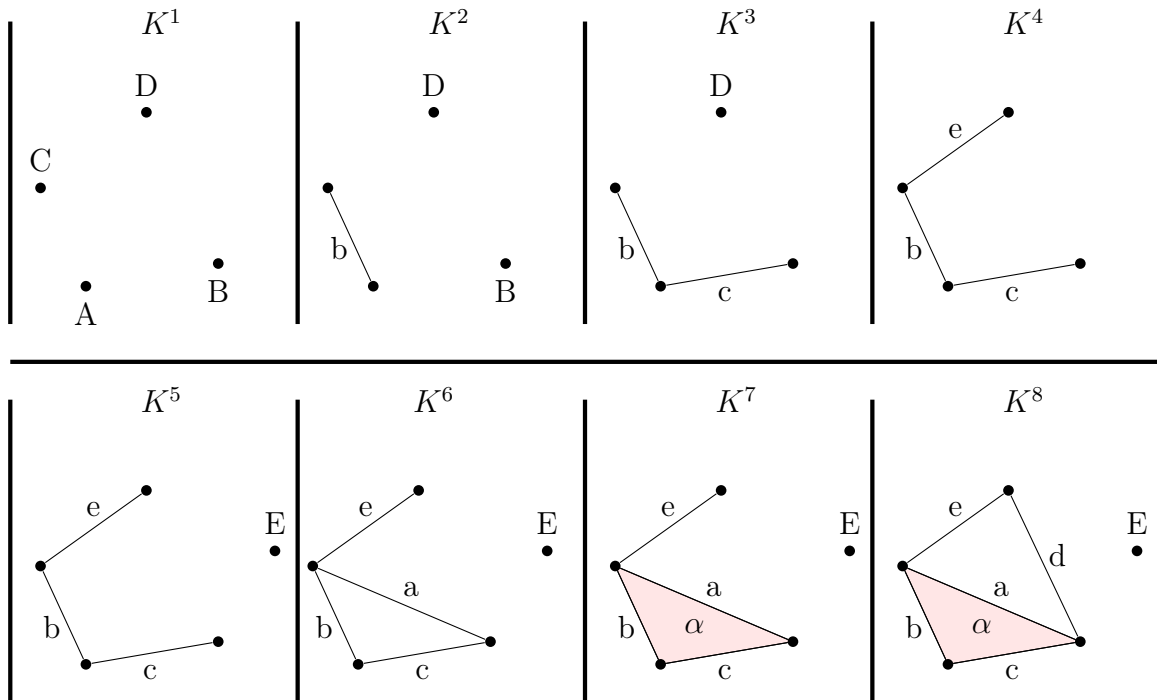


Figura 3.11: Filtração de um complexo simplicial K .

$$M = \begin{matrix} & A & B & C & D & b & c & e & E & a & \alpha & d \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ b \\ c \\ e \\ E \\ a \\ \alpha \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ . & . & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Da matriz extraímos os seguintes resultados:

$$\text{low}(5) = 3 = \text{low}(9), \quad \text{low}(6) = 2, \quad \text{low}(7) = 4 = \text{low}(11) \text{ e } \text{low}(10) = 9.$$

Como descrito no algoritmo, dada a igualdade $\text{low}(5) = \text{low}(9)$, devemos somar C_5 a $C_9 \pmod{2}$ de modo a obter uma nova C_9 . Após esse processo, teremos $\text{low}(9) = 2 = \text{low}(6)$, do qual repetiremos o processo com C_9 e C_6 resultando $\text{low}(9) = 0$. Dada também a igualdade $\text{low}(7) = \text{low}(11)$, somamos C_7 a $C_{11} \pmod{2}$ de modo a obter uma nova C_{11} . Após esse processo, teremos $\text{low}(5) = 3 = \text{low}(11)$, do qual repetiremos o processo com C_5 e C_{11} resultando $\text{low}(6) = 2 = \text{low}(11)$ e finalizando o processo com essas duas novas colunas obteremos finalmente $\text{low}(11) = 0$. Por fim, fazendo as somas nas linhas necessárias, fazemos com que apenas $\text{low}(5)$, $\text{low}(6)$, $\text{low}(7)$ e $\text{low}(10)$ sejam não nulos, obtendo portanto a matriz reduzida M' :

$$M' = \begin{matrix} & A & B & C & D & b & c & e & E & a & \alpha & d \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ b \\ c \\ e \\ E \\ a \\ \alpha \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Utilizando aqui o exposto na Proposição 3.21 é possível obter os seguintes pares persistentes $(B, c), (C, b), (D, e)$ e (a, α) e que por sua vez nos permitem escrever a decomposição a seguir:

$$\mathbb{P}(A, \infty) \oplus \mathbb{P}(E, \infty) \oplus \mathbb{P}(d, \infty) \oplus \mathbb{P}(B, c) \oplus \mathbb{P}(C, b) \oplus \mathbb{P}(D, e) \oplus \mathbb{P}(a, \alpha).$$

Essa decomposição por sua vez nos permite construir o diagrama de persistência em que cada uma das parcelas na forma $\mathbb{P}(a, b)$ será representada por um ponto no diagrama indicando o simplexo que deu início a um novo gerador de homologia e o simplexo que pôs fim a esse gerador, indicado no eixo horizontal e vertical respectivamente. As parcelas com a forma $\mathbb{P}(a, \infty)$ que representam os geradores que nasceram em algum momento da filtração e permaneceram por tempo indeterminado, serão representados por pontos que indicam o simplexo que deu início ao gerador de homologia no eixo horizontal e estarão dispostos de tal modo que não haverá uma representação de morte desse gerador, esse fato será indicado por uma linha pontilhada no alto do diagrama. Obtemos desse modo o diagrama da Figura 3.12:

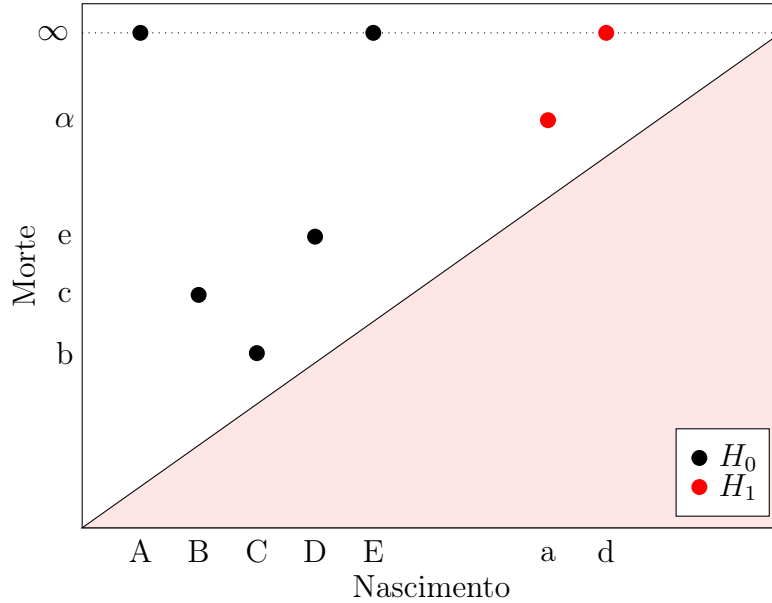


Figura 3.12: Diagrama de persistência para exemplo da Figura 3.11.

Por fim, vamos mostrar uma última maneira de representar os invariantes topológicos persistentes associados a um complexo filtrado (a medida que essa filtração evolui). A potencialidade dessa nova representação é a capacidade de filtrar qualitativamente o ruído e permitir a captura apenas das propriedades referentes ao parâmetro da filtração. Enquanto o diagrama de persistência descreve quais simplexos deram origem aos geradores e quais eliminaram, ele não permite dizer exatamente qual foi a duração desses geradores a menos que se faça um diagrama em escala, o que pode ser inviável quando se trabalha com uma grande quantidade de dados. Já, o parâmetro horizontal usado no

código de barras via de regra são as etapas da filtração, o que possibilitará analisar com precisão o nascimento e morte dos geradores bem como sua duração. Obviamente ao se construir um código de barras, podemos utilizar outros parâmetros como por exemplo os simplexos envolvidos na filtração como foi feito com o diagrama de persistência mas isso acabaria por torná-lo uma cópia do primeiro apenas com uma formatação diferente, o que acabaria por inutilizar seu maior propósito e portanto não apresentaria muitas vantagens. Dessa forma, para construir os códigos de barras precisamos da seguinte:

Definição 3.23. *Um P -intervalo $\mathbb{P}(i, j)$ é a representação de um par ordenado (i, j) com $0 \leq i < j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

Em cada etapa da filtração, a homologia do complexo K^i representa um espaço vetorial sobre um corpo, escolhendo bases convenientes, teremos representações desses espaços para todos os momentos da filtração. Em particular, cada $P(i, j)$ representa uma base para um gerador que nasceu em K^i e morreu em K^j e consequentemente, podemos associar cada um desses P -intervalos a uma das parcelas existentes na decomposição em soma direta da filtração. Às parcelas da forma $\mathbb{P}(a, \infty)$ associamos um P -intervalo da forma $P(i, \infty)$ em que o gerador $a + \sigma_p + \dots + \sigma_q \in K^{i+j}$ para todo $j \geq 0$. Às parcelas da forma $\mathbb{P}(a, b)$ associamos um P -intervalo da forma $P(i, j)$ em que o gerador $a + \sigma_p + \dots + \sigma_q \in K^{i+j}$ para todo $0 \leq j < k$ e $b \in K^k$ obtendo portanto o conjunto $S = \{P(i_1, j_1), \dots, P(i_n, j_n)\}$ de todos os P -intervalos de uma filtração e podemos escrever a representação

$$\bigoplus_{l=\{l_1, \dots, l_m\}} P(l, \infty) \oplus \bigoplus_n P(i_n, j_n)$$

observando que os valores que constam nos P -intervalos nada mais são do que etapas da filtração, a partir da relação 3.3, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 3.24. *Existe uma bijeção entre um conjunto S formado por uma quantidade finita de P -intervalos e um espaço vetorial persistente finitamente gerado representado por uma soma direta.*

Desse modo, podemos usar a decomposição $\mathbb{P}(A, \infty) \oplus \mathbb{P}(E, \infty) \oplus \mathbb{P}(d, \infty) \oplus \mathbb{P}(B, c) \oplus \mathbb{P}(C, b) \oplus \mathbb{P}(D, e) \oplus \mathbb{P}(a, \alpha)$ obtida anteriormente e a partir de algumas mudanças nos parâmetros, substituir os simplexos nas entradas pelo instante da filtração em que ele surge e obter a decomposição a seguir:

$$P(1, \infty) \oplus P(1, 3) \oplus P(1, 2) \oplus P(1, 4) \oplus P(5, \infty) \oplus P(6, 7) \oplus P(8, \infty).$$

Finalmente obtemos o código de barras em que cada segmento horizontal representa um gerador de homologia surgido ao longo da filtração. Esses segmentos terão seu ta-

manho em acordo com os instantes de nascimentos e mortes dos geradores representados como nos mostra a Figura 3.13:

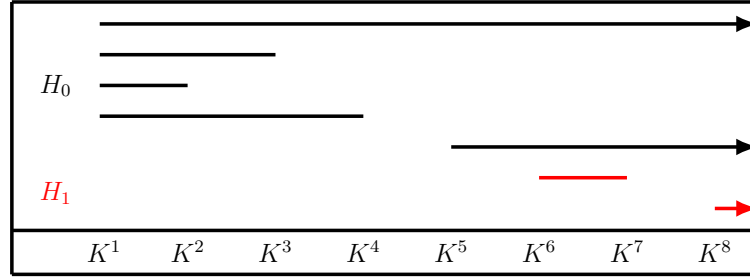


Figura 3.13: Código de barras 0 e 1 dimensional para exemplo da Figura 3.11.

3.6 Distância bottleneck e estabilidade

Definição 3.25 (Distância Bottleneck). *Sejam D_1 e D_2 diagramas de persistência. A distância bottleneck entre D_1 e D_2 é definida como*

$$d_B(D_1, D_2) = \inf_{\gamma} \sup_{p \in D_1} \|p - \gamma(p)\|_{\infty},$$

onde γ varia no conjunto de todas as bijeções entre os multiconjuntos D_1 e D_2 , e $\|p - q\|_{\infty} = \max\{|x_p - x_q|, |y_p - y_q|\}$. Por convenção, se $y_p = y_q = +\infty$, então $\|p - q\|_{\infty} = |x_p - x_q|$.

Proposição 3.26. *A distância bottleneck d_B define uma métrica.*

Demonstração. Sejam D_1, D_2 e D_3 diagramas de persistência. Provaremos que d_B satisfaz as propriedades de uma métrica:

1. **Não negatividade:** Como $\|p - \gamma(p)\|_{\infty} \geq 0$ para todo p , segue que

$$d_B(D_1, D_2) \geq 0.$$

2. **Simetria:** Seja γ uma bijeção de D_1 em D_2 . Para qualquer $p \in D_1$, existe um único $q \in D_2$ tal que $\gamma^{-1}(q) = p$. Assim,

$$\|p - \gamma(p)\|_{\infty} = \|q - \gamma^{-1}(q)\|_{\infty}.$$

Como para cada bijeção γ existe uma única λ satisfazendo a igualdade acima, segue que

$$d_B(D_1, D_2) = d_B(D_2, D_1).$$

3. **Identidade dos indiscerníveis:** Se $D_1 = D_2$, então a bijeção identidade $\text{id} : D_1 \rightarrow D_2$ satisfaz $\|p - \text{id}(p)\| = 0$, logo $d_B(D_1, D_2) = 0$. Reciprocamente, se $d_B(D_1, D_2) = 0$, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe γ tal que

$$\sup_{p \in D_1} \|p - \gamma(p)\|_\infty < \varepsilon.$$

Como um diagrama de persistência é fechado, concluímos que $D_1 = D_2$.

4. **Desigualdade triangular:** Sejam A, B e Γ os conjuntos de bijeções entre D_1 e D_2 , D_2 e D_3 , e D_1 e D_3 , respectivamente. Para $a \in A$ e $b \in B$, considere $b \circ a \in \Gamma$. Então, para todo $p \in D_1$,

$$\|p - b(a(p))\|_\infty \leq \|p - a(p)\|_\infty + \|a(p) - b(a(p))\|_\infty.$$

Tomando supremos e ínfimos apropriados, obtemos

$$d_B(D_1, D_3) \leq d_B(D_1, D_2) + d_B(D_2, D_3).$$

Assim, d_B é uma métrica. □

Essa definição justifica a inclusão da diagonal nos diagramas de persistência, pois permite calcular a distância entre dois diagramas com quantidades diferentes de pontos, associando pontos excedentes à diagonal.

Perceba que com essa definição, buscamos uma bijeção dentre todas as possíveis que seja a mais natural possível, e de fato, visualmente ela é bastante intuitiva pois minimiza o máximo possível a distância entre os pontos que serão pareados. Vejamos um exemplo na Figura 3.14 com o conjunto $D_1 = \{(1, \infty), (3, 4.5), (4, 6), (7, 9)\}$ em vermelho e o conjunto $D_2 = \{(1.5, \infty), (2.8, 4), (4.3, 5.8), (7.5, 9.5), (4, 4.4), (6, 6.5)\}$ em preto, analisando apenas três das bijeções.

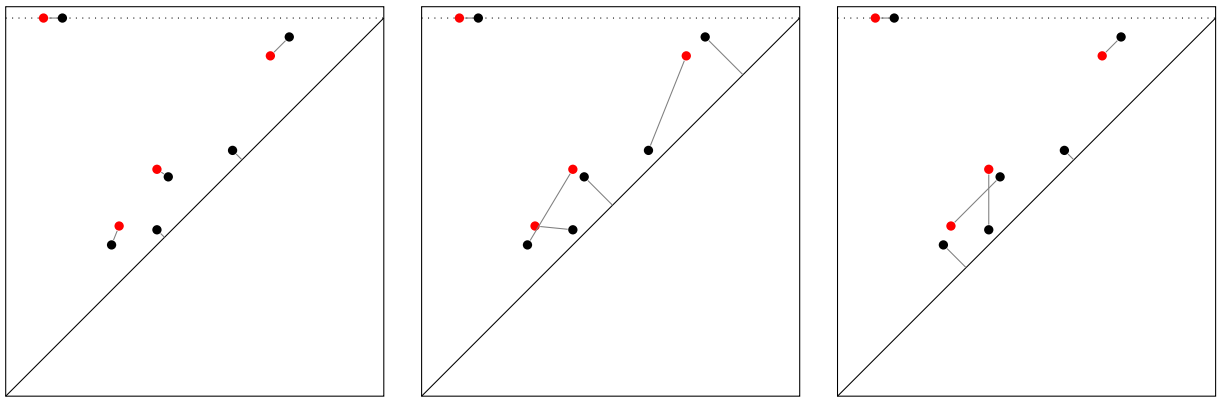


Figura 3.14: Diferentes bijeções para os conjuntos D_1 e D_2 .

3 Homologia Persistente

Agora calculando $\sup_{p \in D_1} \|p - \gamma(p)\|_\infty$ para as bijeções acima, encontramos os seguintes resultados para a primeira, segunda e terceira bijeção respectivamente:

$$\sup_{p \in D_1} \|(7.5, 9.5), (7, 9)\|_\infty = 0.5$$

$$\sup_{p \in D_1} \|(7, 9), (6, 6.5)\|_\infty = 2.5$$

$$\sup_{p \in D_1} \|(4, 6), (4, 4.4)\|_\infty = 1.6.$$

E a partir desses valores, podemos tomar as bolas centradas nos pontos de D_1 (relativas à métrica em questão) e que contenham os pontos de D_2 que devem ser pareados como nos mostra a Figura 3.15:

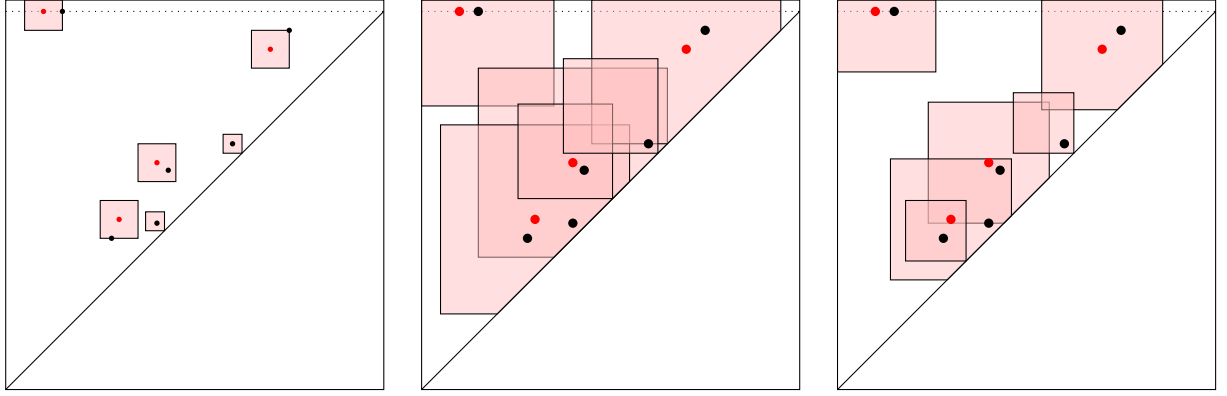
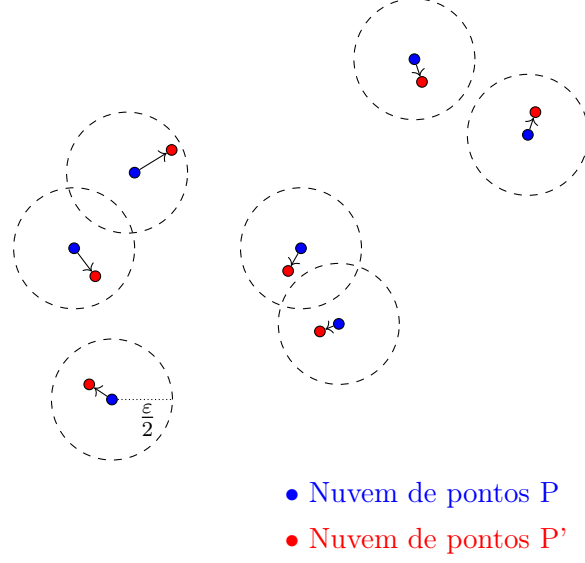


Figura 3.15: Diferentes tamanhos de bolas centradas em torno de pontos de D_1 .

Por fim, dentre as bijeções possíveis, tomamos a que apresenta a bola com o menor raio, para nosso exemplo com D_1 e D_2 , o diagrama com a menor bola máxima (incluindo as bijeções que não foram ilustrados) é o primeiro da esquerda, portanto, a distância bottleneck é $d_B(D_1, D_2) = 0.5$

O próximo passo é a definição de uma distância entre dois módulos de persistência. Para tal, apresentaremos um caso particular, que sirva de construção intuitiva de tal distância.

Seja $P = \{p_i \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq i \leq m\}$ uma nuvem de pontos e seja $P' = \{p'_i \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq i \leq m\}$ uma nuvem de pontos obtida por uma perturbação de amplitude $\varepsilon/2$ em P como mostra a figura 3.16. Vimos como obter uma bijeção entre P e P' , dada por $p_i \mapsto p'_i$, para cada i , com $\|p_i - p'_i\| < \varepsilon/2$. Podemos considerar, sem perda de generalidade, que essa perturbação é tal que a coleção de subconjuntos LI da nuvem não se altera.


 Figura 3.16: Perturbação da nuvem de pontos P .

Se $\{p_{j_1}, \dots, p_{j_n}\} \in \check{C}_r(P)$, então para cada $i, l \in \{1, \dots, n\}$, temos que $\|p_{j_i} - p_{j_l}\| \leq r$, logo, $\|p'_{j_i} - p'_{j_l}\| \leq \|p'_{j_i} - p_{j_i}\| + \|p_{j_i} - p_{j_l}\| + \|p_{j_l} - p'_{j_l}\| < \varepsilon/2 + r + \varepsilon/2 = r + \varepsilon$, ou seja, $\{p'_{j_1}, \dots, p'_{j_n}\} \in \check{C}_{r+\varepsilon}(P')$. Do qual, concluímos, a menos de bijeção, que

$$\check{C}_r(P) \subseteq \check{C}_{r+\varepsilon}(P').$$

Por simetria, claramente podemos considerar P como perturbação de amplitude $\varepsilon/2$ de P' , obtendo

$$\check{C}_r(P') \subseteq \check{C}_{r+\varepsilon}(P).$$

Sejam as filtrações $\mathcal{F}_1 = \{\check{C}_r(P) : r \in \mathbb{R}^+\}$ e $\mathcal{F}_2 = \{\check{C}_r(P') : r \in \mathbb{R}^+\}$, $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, temos as inclusões:

$$\forall r \in \mathbb{R}, \check{C}_r(P) \subseteq \check{C}_{r+\varepsilon}(P') \text{ e } \check{C}_r(P') \subseteq \check{C}_{r+\varepsilon}(P).$$

Mais precisamente, dados $r, t \in \mathbb{R}$, com $r \leq t$, os seguintes diagramas, onde os mapas são inclusões, são comutativos:

$$\begin{array}{ccc} \check{C}_r(P) & \longrightarrow & \check{C}_t(P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{C}_{r+\varepsilon}(P') & \longrightarrow & \check{C}_{t+\varepsilon}(P') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \check{C}_{r+\varepsilon}(P) & \longrightarrow & \check{C}_{t+\varepsilon}(P) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \check{C}_r(P') & \longrightarrow & \check{C}_t(P'). \end{array}$$

3 Homologia Persistente

Logo obtemos os módulos de persistência $H_p(\mathcal{F}_1)$ e $H_p(\mathcal{F}_2)$, bem como, os homomorfismos $\phi_r : H_p(\check{C}_r(P)) \rightarrow H_p(\check{C}_{r+\varepsilon}(P'))$ e $\psi_r : H_p(\check{C}_r(P')) \rightarrow H_p(\check{C}_{r+\varepsilon}(P))$ induzidos pela inclusão. Temos, assim, os seguintes diagramas comutativos induzidos, onde $i_{*,p}$ e $j_{*,p}$ são os homomorfismos induzidos pela inclusão nas filtrações $H_p(\mathcal{F}_1)$ e $H_p(\mathcal{F}_2)$, respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} H_p(\check{C}_r(P)) & \xrightarrow{i_{*,p}^{r,t}} & H_p(\check{C}_t(P)) \\ \downarrow \phi_r & & \downarrow \phi_t \\ H_p(\check{C}_{r+\varepsilon}(P')) & \xrightarrow{j_{*,p}^{r+\varepsilon,t+\varepsilon}} & H_p(\check{C}_{t+\varepsilon}(P')) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H_p(\check{C}_{r+\varepsilon}(P)) & \xrightarrow{i_{*,p}^{r+\varepsilon,t+\varepsilon}} & H_p(\check{C}_{t+\varepsilon}(P)) \\ \uparrow \psi_r & & \uparrow \psi_t \\ H_p(\check{C}_r(P')) & \xrightarrow{j_{*,p}^{r,t}} & H_p(\check{C}_t(P')) \end{array}$$

Uma vez que existem relações entre os complexos e esses por sua vez induzem relações nos módulos, podemos definir uma distância para os pontos de nossa amostra e os pontos de nosso diagrama de persistência de tal forma que esses também, obedecerão a uma relação, como nos mostram os resultados a seguir:

Definição 3.27. *Seja (X, d) um espaço métrico e suponha que $A, B \subset X$ sejam subconjuntos finitos. A **distância de Hausdorff** $d_H(A, B)$ é definida como*

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(a, b), \max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b) \right\}.$$

Podemos também definir a distância de Gromov-Hausdorff.

Definição 3.28. *Suponha que A, B sejam espaços métricos finitos. A **distância de Gromov-Hausdorff** $d_{GH}(A, B)$ é definida como*

$$d_{GH}(A, B) = \inf_{\mu, \nu} \{d_H(\mu(A), \nu(B))\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os mergulhos isométricos $\mu : A \rightarrow X$ e $\nu : B \rightarrow X$ em um espaço métrico X .

Teorema 3.29 (Teorema de estabilidade). *Suponha que os diagramas de persistência D_1 e D_2 representem homologias persistentes de filtrações $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ obtidas por filtrações de Čech de espaços métricos A e B satisfazendo a condição $d_{GH}(A, B) \leq \varepsilon$ então, $d_B(A, B) \leq \varepsilon$.*

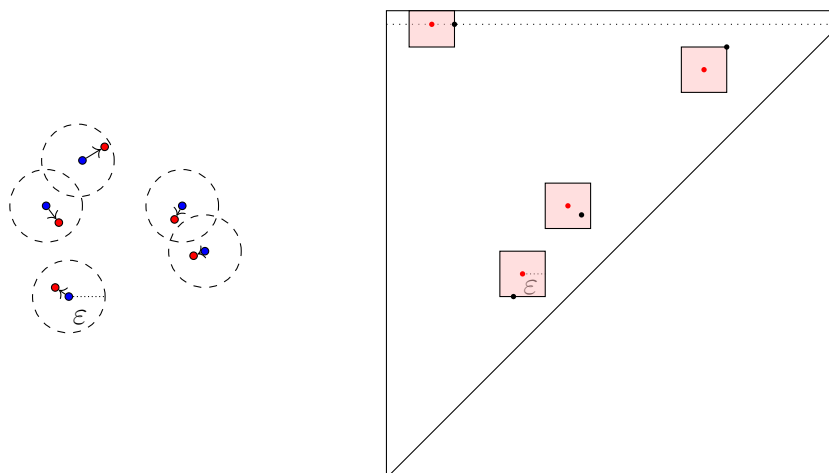


Figura 3.17: Pareamento de tamanho ε .

O ponto fulcral desse teorema é que pequenas mudanças no conjunto de entrada levam a pequenas mudanças no conjunto de saída, ou seja, pequenas perturbações na filtração resultam pequenas alterações no diagrama de persistência. A distância Bottleneck nesse caso, fornece uma métrica robusta para comparar diagramas, assegurando que pequenos ruídos ou perturbações nas filtrações não causarão grandes discrepâncias nos diagramas de persistência e desse modo, tornarão os diagramas estáveis contra esses ruídos.

4 Detecção de Curvatura

Vimos nos capítulos anteriores, como obter as características topológicas de um conjunto de pontos aleatórios em um plano e a partir deles, construir os Complexos de Čech e o diagrama de persistência. Esses diagramas possuem duas principais características, o *signal topológico*, que traz informações acerca da topologia do conjunto de pontos e o *ruído topológico*, que são os pontos decorrentes das imperfeições ou pequenas flutuações nos processos de medição. No diagrama, o ruído possui vida curta e indica que algum fenômeno surgiu e desapareceu muito rapidamente não contribuindo de modo significativo na recuperação da topologia subjacente, assim é visto como algo indesejado e que precisa ser eliminados por meio de técnicas estatísticas. Entretanto nesse capítulo apresentaremos evidências teóricas e computacionais mostrando que, apesar de não conterem informações relevantes na busca da topologia, codificam importantes evidências acerca do espaço a qual residem os pontos amostrados. Em particular, mostraremos que é possível extrair informações sobre a curvatura do espaço ambiente analisando a persistência da família mais abundante contida no ruído topológico, qual seja, a família dos triângulos. Nesse capítulos, tais triângulos estarão em uma variedade M_K Riemanniana 2-dimensional completa simplesmente conexa e de curvatura K constante, essa curvatura pode ser nula, positiva ou negativa. Para o caso em que $K = 0$, temos o espaço $\mathbb{R}^2$ munido da métrica euclidiana. Nesse espaço os resultados serão tomados como conhecidos e apenas enunciaremos e demonstraremos os que dizem respeito ao estudo da homologia persistente. Para o caso em que $K > 0$ usaremos a esfera de raio R e trabalharemos com o modelo do disco de Poincaré para o caso em que $K < 0$. Iniciaremos o capítulo apresentando alguns fatos sobre espaços de curvatura positiva e negativa bem como algumas propriedades sobre triângulos que serão importantes no estudo de sua persistência. Esses resultados e teoremas estarão separados em dois tópicos distintos, um para K negativo e um para K positivo. Quando algum resultado for o mesmo nos três modelos, acrescentaremos a observação (**K qualquer**). Posteriormente veremos como sortear pontos aleatórios uniformes em círculos de diferentes curvaturas e tirar informações da persistência calculada nos triângulos construídos com eles. A ideia é buscar evidências que nos ajudem a diferenciar os resultados referentes ao seu

espaço ambiente. Por fim, faremos algumas simulações em *Python* e por meio de um algoritmo de *Machine Learning* mostraremos que é sim possível recuperar a curvatura de um espaço usando a persistência existente nos triângulos oriundos do ruído de um conjunto de pontos aleatórios. Nesse capítulo as obras que nos serviram de apoio para os conceitos geométricos foram (Andrade, 2013) e (Whittlesey, 2019). Finalmente, indicamos a leitura do artigo (Bubenik *et al.*, 2020) que serviu de inspiração para a busca dos resultados obtidos e fundamentação para a construção dos principais resultados sobre homologia em triângulos usados nesse capítulo.

4.1 Geometria Hiperbólica

Quando $K < 0$ o modelo utilizado para M_K será o disco hiperbólico plano de Poincaré de curvatura K , isto é, consideramos no plano euclidiano o conjunto $M_K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < R\}$ com raio $R = \frac{1}{\sqrt{-K}}$ e métrica Riemanniana

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2})^2}.$$

No que se segue, apresentaremos uma descrição axiomática e elementar dos fatos que utilizaremos, evitando o uso de resultados de geometria Riemanniana. Uma boa referência para tal abordagem é (Andrade, 2013).

Nesse conjunto, um segmento geodésico (hiperbólico) h é definido da seguinte forma:

Definição 4.1. *Dado um disco M_K , os **segmentos geodésicos** são as intersecções de M_K com retas euclidianas passando pela origem de M_K ou a intersecção de M_K com círculos euclidianos ortogonais ao bordo $\mathbb{S}^1$.*

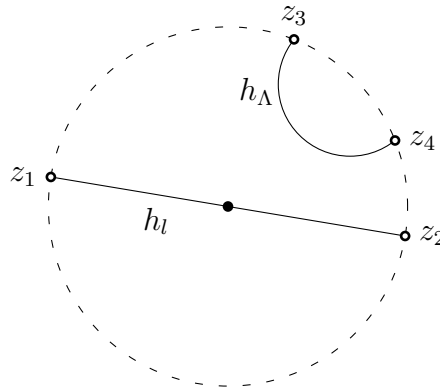


Figura 4.1: Representação da reta do primeiro tipo por h_l e da reta do segundo tipo por h_Λ . No segundo caso, dizemos que o Λ é o **círculo gerador** dessa reta hiperbólica.

Por definição, os **pontos ideais** da uma reta hiperbólica h são os pontos z_1 e z_2 obtidos pela intersecção $l \cap \mathbb{S}^1$ assim como os pontos z_3 e z_4 em $\Lambda \cap \mathbb{S}^1$. Note porém que os pontos ideais não pertencem às retas uma vez que elas são determinadas pela intersecção das retas com M_K .

Sejam A e C dois pontos distintos em M_K , existe uma única reta $\overleftrightarrow{AC}$ contendo os pontos A e C e um único segmento geodésico entre tais pontos de modo que $\overline{AC} \subset \overleftrightarrow{AC}$.

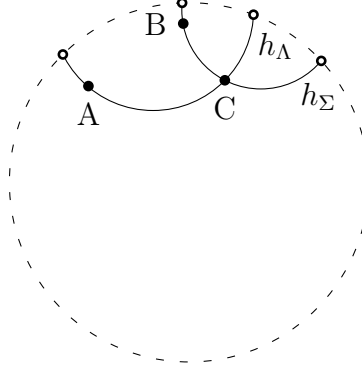


Figura 4.2: Retas hiperbólicas e segmentos geodésicos em M_K .

Dados três pontos A, B, C em M_K que não pertençam os três a um mesmo segmento geodésico hiperbólico, um ângulo hiperbólico em M_K com vértice C é a união das semirretas $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$. Ele será denotado como é usual na geometria euclidiana, isto é, $\angle ACB$. Uma das vantagens em se usar o modelo de Poincaré é que a medida dos ângulos hiperbólicos coincide com a medida usual de ângulos em $\mathbb{R}^2$. Para isso, basta tomar os vetores tangentes a cada uma das retas no ponto de intersecção entre elas.

Definição 4.2. (Triângulo hiperbólico) Sejam pontos A, B, C em M_K não hiperbolicamente colineares, existe um único segmento geodésico entre cada par de pontos. Tome $\Delta(ABC) = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$ chamado triângulo de vértices A, B, C e arestas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. O subespaço $M_K - \Delta(ABC)$ possui duas componentes conexas e apenas uma delas terá área finita chamada interior do triângulo $\Delta(ABC)$.

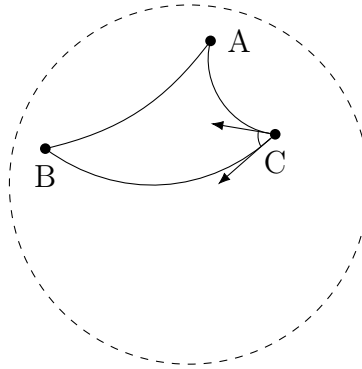


Figura 4.3: Triângulo hiperbólico $\Delta(ABC)$ em M_K .

A circunferência circunscrita de um triângulo é a circunferência que contém os vértices desse triângulo e cujo centro chamamos circuncentro. Ao contrário da Geometria Euclidiana em que todo triângulo possui uma circunferência circunscrita, no caso em que $K < 0$ um triângulo qualquer em M_K pode ou não possuir uma circunferência circunscrita como podemos ver em (Beardon, 2022), mas caso exista seu circuncentro será único.

Definição 4.3. *Mediatriz A mediatriz de um segmento $\overline{PQ}$ é a reta perpendicular a $\overline{PQ}$ passando pelo seu ponto médio.*

Lema 4.4. *Sejam P e Q dois pontos distintos em M_K (K qualquer). Então a mediatriz de um segmento $\overline{PQ}$ consiste em todos os pontos equidistantes de P e Q .*

Demonstração. Suponha um ponto A equidistante de P e Q . Seja l a reta passando por A de modo a dividir o ângulo $\angle PAQ$ em dois iguais e tome o ponto $D = l \cap \overline{PQ}$. Pelo critério LAL , $\Delta(PAD) \cong \Delta(QAD)$. Desse modo, $\overline{PD} \cong \overline{DQ}$ e portanto, D é o ponto médio de $\overline{PQ}$. Além disso, $\angle PDA \cong \angle QDA$ e como sua soma perfaz π , conclui-se que cada um é um ângulo reto, portanto, l é a mediatriz de $\overline{PQ}$.

Por outro lado, se $A \in l$ e D é o ponto médio de $\overline{PQ}$, então pelo critério LAL , $\Delta(PDA) \cong \Delta(QDA)$ do qual $\overline{PA} \cong \overline{QA}$. $\square$

Teorema 4.5. *Dado um triângulo em M_K (K qualquer), as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) As mediatrizes de dois lados de um triângulo se intersectam;*
- ii) O triângulo possui uma circunferência circunscrita;*
- iii) As três mediatrizes de um triângulo possuem um ponto em comum.*

Demonstração. Sejam A, B, C vértices de um triângulo:

i) $\Rightarrow$ ii) Assuma que P é a intersecção das mediatrizes de dois lados de $\Delta(ABC)$. Então P é equidistante de A, B, C . Logo, P é o circuncentro desse triângulo.

ii) $\Rightarrow$ iii) Seja P o circuncentro de $\Delta(ABC)$, então P é equidistante de A, B, C , logo P pertence à mediatriz de cada um dos lados desse triângulo.

iii) $\Rightarrow$ i) Trivial. $\square$

4.1.1 Trigonometria hiperbólica

Um dos aspectos mais marcantes da trigonometria hiperbólica é que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor que π . Essa característica está ligada à curvatura negativa do espaço hiperbólico que distorce as medidas angulares de modo que, quanto maior o triângulo, menor a soma dos ângulos. A diferença entre π e a soma dos ângulos internos do triângulo é chamada de **déficit angular** ou **defeito angular**. No disco de Poincaré, a área de um triângulo hiperbólico está diretamente relacionada ao seu déficit angular e obedece a relação $\text{Área}(\Delta(ABC)) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ onde α , β e γ são os ângulos internos do triângulo.

Definição 4.6. *Dados dois pontos quaisquer u, v em M_K , a **distância hiperbólica** entre u e v é dada por $2R \tanh^{-1} \left(\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| \right)$ em que $R = \frac{1}{\sqrt{-K}}$, $z = u/R$ e $w = v/R$.*

Teorema 4.7. (Lei dos senos hiperbólicos). *Seja $\Delta(ABC)$ um triângulo hiperbólico de lados a, b, c e ângulos opostos respectivamente α, β, γ , então:*

$$\frac{\text{sen}(\alpha)\sqrt{-K}}{\sinh(a\sqrt{-K})} = \frac{\text{sen}(\beta)\sqrt{-K}}{\sinh(b\sqrt{-K})} = \frac{\text{sen}(\gamma)\sqrt{-K}}{\sinh(c\sqrt{-K})}$$

Teorema 4.8. (Lei dos cossenos hiperbólicos). *Seja $\Delta(ABC)$ um triângulo hiperbólico de lados a, b, c e ângulos opostos respectivamente α, β, γ , então:*

$$\cosh(c\sqrt{-K}) = \cosh(a\sqrt{-K}) \cosh(b\sqrt{-K}) - \sinh(a\sqrt{-K}) \sinh(b\sqrt{-K}) \cos(\gamma)$$

4.2 Geometria Esférica

Quando $K > 0$ o modelo utilizado para M_K será a esfera de raio $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$ centrada na origem de $\mathbb{R}^3$, ou seja, o conjunto $M_K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Podemos também representar os pontos por meio de coordenadas polares, ou seja, (r, θ) com $r \in [0, 1]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ ou ainda em coordenadas esféricas padrão (θ, φ) , com θ sendo a colatitude, o ângulo complementar à latitude no eixo z , e φ o ângulo em relação ao eixo x no plano xy , nesse caso, a métrica assumirá a forma

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Também nesse caso iremos utilizar uma descrição mais elementar dessa geometria.

Definição 4.9. *A intersecção de uma esfera com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e raio da superfície esférica. Damos o nome de **círculo máximo** a essa circunferência.*

Definição 4.10. Considere S uma esfera de centro O e raio R e uma reta r contendo O . Aos dois pontos diametralmente opostos obtidos pela intersecção de S com r damos o nome de **antípodas** (ou pontos antipodais).

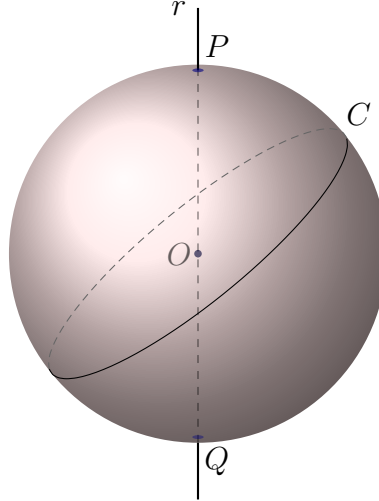


Figura 4.4: Círculo máximo C e pontos antípodas P e Q .

Dados dois pontos P e Q , se eles são pontos antípodas, representamos esse fato escrevendo $P = Q^a$ (ou $Q = P^a$).

Proposição 4.11. Por dois pontos P e Q sobre uma esfera, sempre passa um círculo máximo. Se esses pontos não forem antípodas, este círculo máximo é único.

Demonstração. Se P e Q não são antípodas, então os pontos P , Q e O não são colineares, desse modo, definem apenas um plano que os contém e desse modo, produzem apenas um círculo máximo intersectado com a esfera. No caso em que P e Q são antípodas, os pontos P , Q e O são colineares pertencendo desse modo a infinitos planos e por consequência, produzindo infinitos círculos máximos. $\square$

Quando se quer referir a um círculo máximo específico citando seus pontos antipodais, são necessários três pontos, ou seja, o círculo máximo que passa por M , P e Q^a (ou M , P^a e Q).

Proposição 4.12. Dois círculos máximos de uma esfera cortam-se mutuamente em dois pontos antipodais. Além disso, eles dividem o grande círculo em duas partes iguais às quais chamamos de **semicírculos máximos**.

Demonstração. Sejam dois círculos máximos C_1 e C_2 em uma esfera de centro O e raio R . Sejam P e Q os pontos resultantes da intersecção entre esses círculos máximos. O segmento $\overline{OP}$ possui medida R bem como o segmento $\overline{OQ}$. Desse modo, $\overline{OP} + \overline{OQ} = 2R$ e assim, os pontos P , O e Q estão alinhados, portanto, P e Q são antipodais. Segue

também que, sendo $2R$ o diâmetro da esfera, segue que o arco $\widehat{PQ}$ equivale a metade dos círculos máximos. $\square$

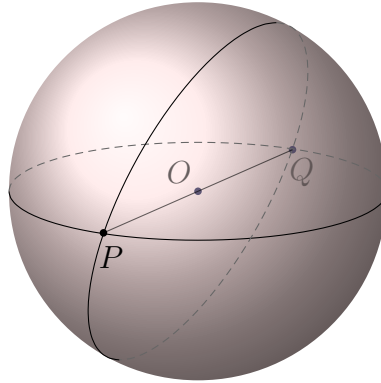


Figura 4.5: Semicírculos máximos.

Dados dois pontos A e B não antipodais em M_K , uma **geodésica** é o caminho mais curto entre esses pontos, ou seja, é o comprimento do menor arco do círculo máximo que passa por esses pontos como mostra a Figura 4.6.

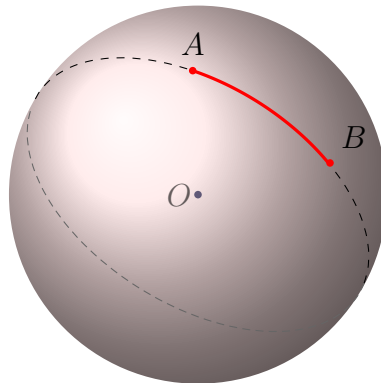


Figura 4.6: Geodésica $\overline{AB}$.

Definição 4.13. (*Ângulo esférico*) *Ângulo esférico é o ângulo formado por dois arcos de círculos máximos com um extremidade em comum. Sua medida é a mesma do ângulo euclidiano obtida pelos dois planos que contêm esses arcos.*

Podemos ainda relacionar a medida de um ângulo esférico com a medida do ângulo central e dos ângulos da pirâmide formada pelos pontos $ABCO$ e desse modo, obter um triângulo na esfera como mostra a Figura 4.7.

Definição 4.14. (*Triângulo esférico*) *Sejam pontos A , B e C em M_K não pertencentes a um mesmo círculo máximo, existe um único segmento geodésico entre cada par de pontos. Tome $\Delta(ABC) = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$ chamado triângulo de vértices A , B , C e arestas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. O subespaço $M_K - \Delta(ABC)$ possui duas componentes conexas de área finita. A de menor área chamamos de interior do triângulo $\Delta(ABC)$.*

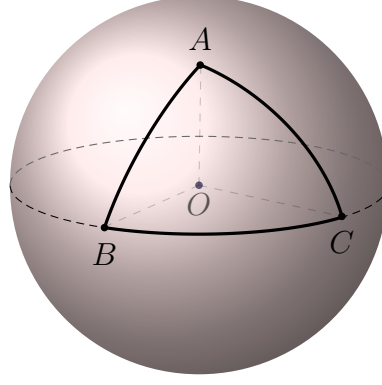


Figura 4.7: Triângulo esférico $\Delta(ABC)$ em M_K .

4.2.1 Trigonometria esférica

A principal característica da trigonometria esférica é que a soma dos ângulos internos de triângulos sempre excede π e a área de um triângulo esférico na superfície de uma esfera é calculada com base no **excesso angular**, ou seja, $\text{Área}(\Delta(ABC)) = R^2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ sendo α , β e γ os ângulos internos do triângulo.

Definição 4.15. *Sejam x e y vetores em S e seja $\theta(x, y)$ o ângulo Euclidiano entre esses vetores, a **distância esférica** entre x e y é definida como o número real $d_S(x, y) = \theta(x, y)$ dado por $R \tan^{-1} \left(\frac{|x \times y|}{x \cdot y} \right)$ após converter os pontos para coordenadas cartesianas, ou seja, $(R \sin(\frac{r}{R}) \cos \theta, R \sin(\frac{r}{R}) \sin \theta, R \cos(\frac{r}{R}))$. Note que $0 \leq d_S(x, y) \leq R\pi$ e $d_S(x, y) = R\pi$ se, e somente se, esses vetores são vetores antipodais. Dois vetores x e y em S são ditos **vetores antipodais** se, e somente se, $y = -x$.*

Teorema 4.16. (Lei dos senos esféricos). *Seja $\Delta(ABC)$ um triângulo esférico com medidas de seus lados a, b, c e ângulos opostos respectivamente α, β, γ , então:*

$$\frac{\sin(\alpha)\sqrt{K}}{\sin(a\sqrt{K})} = \frac{\sin(\beta)\sqrt{K}}{\sin(b\sqrt{K})} = \frac{\sin(\gamma)\sqrt{K}}{\sin(c\sqrt{K})}$$

Teorema 4.17. (Lei dos cossenos esféricos). *Seja $\Delta(ABC)$ um triângulo esférico com medidas de seus lados a, b, c e ângulos opostos respectivamente α, β, γ , então:*

$$\cos(c\sqrt{K}) = \cos(a\sqrt{K}) \cos(b\sqrt{K}) - \sin(a\sqrt{K}) \sin(b\sqrt{K}) \cos(\gamma)$$

4.3 Triângulos e sua homologia persistente

Nessa seção vamos mostrar como triângulos contribuem para a homologia persistente em um complexo de Čech construído em M_K . Em particular, qual o intervalo maximal com que um conjunto de 3 pontos contribui para um gerador não trivial em H_1 em função de K . Veremos ainda que para todo K o intervalo de contribuição é maximizado por um

triângulo equilátero e assim obter uma relação que apenas dependa de K e das medidas dos lados desse triângulo.

Seja U um conjunto finito de pontos em M_K . Sejam A, B, C pontos em U , vamos assumir que sejam não colineares, quando $K > 0$ vamos assumir também que a distância entre quaisquer dois desses pontos seja estritamente menor que $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ (não antipodais). Do ponto de vista teórico podemos representar dois triângulos por A, B, C . Há o ente geométrico (triângulo) $\Delta(ABC)$ subconjunto de M_K e o conjunto abstrato $\{A, B, C\} \subset U$ que pertence a um complexo de Čech obtido em U . Vamos nos referir a ambos simplesmente como o triângulo $\Delta(ABC)$ ou quando nos for conveniente simplesmente por triângulo T e ficará claro pelo contexto a qual estamos nos referindo.

Chamamos de **nascimento do triângulo** T , representado por $n(T)$ quando

$$n(T) = \min\{R \mid B_R(X) \cap B_R(Y) \neq \emptyset \forall X, Y \in \{A, B, C\}\}.$$

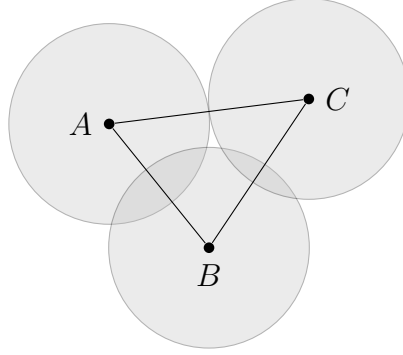


Figura 4.8: Nascimento de um triângulo T .

Nesse caso, os bordos do triângulo T contribuirão com um 1-ciclo na filtração sempre que $r \geq n(T)$. Por outro lado, $m(T)$ é chamado **morte do triângulo** T quando

$$m(T) = \min\{R \mid B_R(A) \cap B_R(B) \cap B_R(C) \neq \emptyset\}.$$

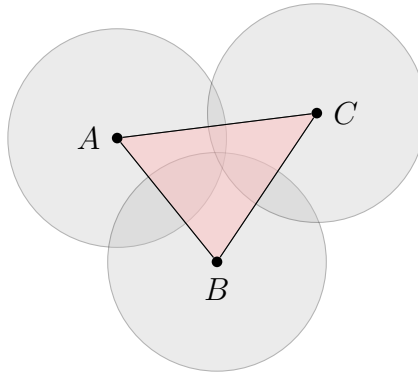


Figura 4.9: Morte de um triângulo T .

O triângulo T contribuirá ao 2-simplexo na filtração sempre que $r \geq m(T)$.

Desse modo, T induz um gerador de $H_1(\mathcal{F})$ para todo $r \geq n(T)$ e esse elemento está na classe trivial para $r \geq m(T)$ como nos mostram as figuras 4.8 e 4.9 respectivamente. Em particular, se $n(T) = m(T)$, então T não contribui com nenhum gerador não trivial para a homologia persistente em questão. O intervalo de persistência $[n(T), m(T)]$ é calculado pela diferença $m(T) - n(T)$ que mostra o tamanho do período em que T contribuiu para a homologia, entretanto, em situações em que não importa o período mas sim a razão entre os momentos de nascimento e morte, usamos $p(T) = \frac{m(T)}{n(T)}$ o qual nos referimos por **persistência (multiplicativa) de T** .

Definição 4.18. A *homologia persistente multiplicativa* é definida considerando um quociente dos instantes de nascimento e morte de cada classe de homologia. No caso de triângulos ela é dada por

$$p(T) = \frac{m(T)}{n(T)}.$$

No que se segue denotaremos a homologia persistente multiplicativa como homologia persistente, quando não houver risco de confusão.

Antes de iniciarmos o estudo da homologia persistente dos triângulos, vamos fixar algumas relações que serão usadas ao longo dessa seção. Dado um triângulo T da forma $\Delta(ABC)$, representaremos os comprimentos de seus lados por a, b, c opostos aos vértices A, B, C respectivamente de modo que $a \geq b \geq c$. Note que o nascimento de T é metade do tamanho do maior lado, ou seja, $n(T) = \frac{a}{2}$. Também M será o ponto médio do lado formado pelo segmento $\overline{BC}$ e m denotará a distância entre o ponto M e o vértice A , vide Figura 4.10. Se T possuir um circuncírculo, denotaremos seu circuncentro por P . Quando $K > 0$ assumiremos que $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$ sendo R o raio da esfera construída em M_K e também que $a < \pi R$. Por fim, em alguns momentos, a fim de auxiliar na compreensão do resultado e na visualização do que está sendo provado, usaremos figuras para o caso euclidiano, lembrando porém que a demonstração serve para os três casos.

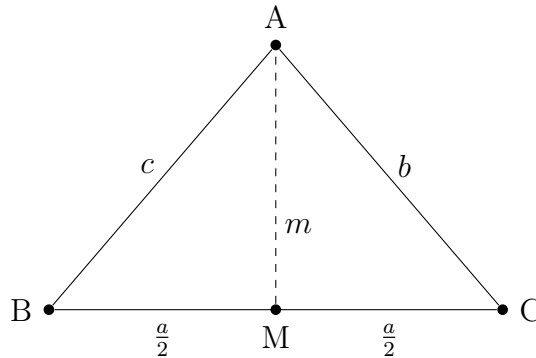


Figura 4.10: Triângulo euclidiano $\Delta(ABC)$.

Proposição 4.19. *Dado um triângulo T em M_K , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) T induz um gerador de $H_1(\mathcal{F})$, isto é, $n(T) < m(T)$;
- ii) $\frac{a}{2} < m$;
- iii) T possui um circuncírculo e seu circuncentro P está no interior de T .

Além disso, se alguma dessas condições for satisfeita, então $n(T)$ é igual a $\frac{a}{2}$ e $m(T)$ é igual ao circunraio.

Lema 4.20. *Sejam P e Q pontos em M_K e l a reta passando por Q perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$, (para o caso $K > 0$, vamos assumir também que $d(P, Q) < \frac{\pi}{2}R$). Sejam $t > 0$, H o semiplano limitado por $\overleftrightarrow{PQ}$ e Q_t o ponto de H em l tal que $d(Q, Q_t) = t$. Então $d(P, Q_t)$ é uma função estritamente crescente de t .*

Demonstração. Seja T o triângulo de vértices P, Q, Q_t e lados correspondentes $\overline{QQ_t}$, $\overline{PQ_t}$ e $\overline{PQ}$, reto em Q . Basta aplicar a lei dos cossenos aos diferentes casos, observando que $\cos(\angle PQQ_t) = 0$ □

Lema 4.21. *Seja um triângulo T em uma filtração $\mathcal{F}$. Então $n(T) < m(T)$ se e somente se $\frac{a}{2} < m$.*

Demonstração. Perceba que se $\frac{a}{2} \geq m$, no instante em que $B_{\frac{a}{2}}(B) \cap B_{\frac{a}{2}}(C) = \{M\}$, já ocorreria a morte do triângulo T uma vez M já pertence ao círculo $B_{\frac{a}{2}}(A)$. Isso nos permite inferir que $n(T) = m(T)$ quando $\frac{a}{2} \geq m$. Sendo assim, obtemos que:

$$B_{\frac{a}{2}}(A) \cap B_{\frac{a}{2}}(B) \cap B_{\frac{a}{2}}(C) \neq \emptyset \iff M \in B_{\frac{a}{2}}(A) \implies n(T) < m(T) \iff \frac{a}{2} < m.$$

□

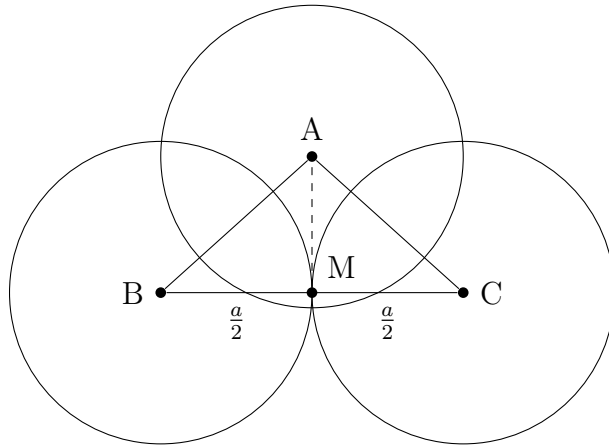


Figura 4.11: Triângulo euclidiano $\Delta(ABC)$ com $n(T) = m(T)$.

Lema 4.22. *Suponha que $\frac{a}{2} < m$, então T possui um circuncentro P e ele está contido no interior de T .*

Demonstração. Sabemos que $d(C, M) = \frac{a}{2}$ então $d(A, M) > d(C, M)$. Seja l a mediatriz de $\overline{BC}$, sendo $b \geq c$, l intersecta $\overline{AC}$ em algum ponto N , obtendo desse modo que $d(A, N) = d(A, C) - d(N, C)$ (Se $A = N$ a igualdade é óbvia). Para $K > 0$, teremos $d(M, C) = \frac{a}{2} < \frac{\pi}{2}R$. Logo, para todo K , podemos aplicar o Lema 4.20 para obter que $d(N, C) > d(M, C) = \frac{a}{2}$ e dado que $\overline{AC} = b \leq a$, segue:

$$d(A, N) = d(A, C) - d(C, N) = b - d(C, N) < a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

o que nos permite concluir que $d(A, N) < d(C, N)$.

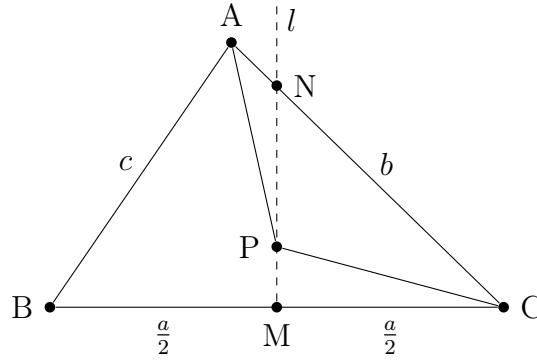


Figura 4.12: Triângulo euclidiano $\Delta(ABC)$ com circuncentro P .

Vamos agora definir a função $F(X) = d(A, X) - d(C, X)$ para algum ponto X se movendo ao longo de l indo de M até N . Note que:

$$F(M) = d(A, M) - d(C, M) \Rightarrow F(M) > 0 \text{ pois } d(A, M) > d(C, M)$$

$$F(N) = d(A, N) - d(C, N) \Rightarrow F(N) < 0 \text{ pois } d(A, N) < d(C, N).$$

Pela continuidade da função distância e pelo teorema do valor intermediário, existe um ponto P no interior de $\overline{MN}$ de modo que tal que $F(P) = 0$ o que nos garante que $d(A, P) = d(P, C)$.

Estando P na mediatriz de $\overline{BC}$ e da igualdade obtida, temos que P é o circuncentro de T . Dado ainda que P está no interior de $\overline{MN}$ e esse segmento está contido em T por construção, temos que P está no interior de T . $\square$

Lema 4.23. *Suponha que $\frac{a}{2} < m$ e que exista $R > 0$ e um ponto D tal que $D \in B_R(A) \cap B_R(B) \cap B_R(C)$ mas D não é circuncentro de $\Delta(ABC)$. Então existe $R' < R$ tal que $B_{R'}(A) \cap B_{R'}(B) \cap B_{R'}(C) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Dado que D não é circuncentro, deve existir ao menos um vértice tal que a distância até D é menor que R . Suponha sem perda de generalidade que $d(A, D) < R$, temos dois casos a considerar:

- Suponha que $D \notin \overleftrightarrow{BC}$. Tome l a reta contendo D e perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$, seja $D' \neq D$ um ponto de l entre D e $\overleftrightarrow{BC}$ de modo que $d(D, D') < R - d(D, A)$. Isso implica que $d(A, D') < R$. Por construção e do Lema 4.20, D' está mais próximo de B e C do que de D , assim, $d(B, D') < d(B, D) \leq R$ e de modo similar, obtemos $d(C, D') < R$. Tomando agora $R' = \max\{d(A, D'), d(B, D'), d(C, D')\}$ concluímos que $R' < R$ e $D' \in B_{R'}(A) \cap B_{R'}(B) \cap B_{R'}(C)$.
- Suponha agora que $D \in \overleftrightarrow{BC}$, sem perda de generalidade, suponha $d(B, D) \leq d(C, D)$. Deve ocorrer uma das situações, ou $d(B, D) < d(C, D) \leq R$ ou $d(B, D) = d(C, D) = \frac{a}{2} < m \leq R$, o que nos mostra que nesse caso, D é o ponto médio de $\overline{BC}$.

De qualquer modo, $d(D, B) < R$ então podemos repetir a mesma prova usando o ponto B em vez de A . $\square$

E finalmente temos o suficiente para seguir com a prova da Proposição 4.19:

Demonstração.

$i) \iff ii)$ Imediato pelo Lema 4.21.

$ii) \Rightarrow iii)$ Imediato pelo Lema 4.22.

$iii) \Rightarrow ii)$ Seja P o circuncentro de T e l a mediatriz de $\overline{BC}$, pelo Lema 4.20, temos que $\frac{a}{2} = d(B, M) < d(B, P) = d(A, P)$.

Tome agora um ponto Q em l de modo que $\overleftrightarrow{AQ}$ seja perpendicular a l . Desse modo, $\overleftrightarrow{AQ}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são ambos perpendiculares a l . Quando $K \leq 0$ temos $\overleftrightarrow{AQ}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ paralelas.

Vejamos o que ocorre quando $K > 0$. Os dois pontos de intersecção entre $\overleftrightarrow{AQ}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ possuem ambos distância $\frac{\pi}{2}R$ de l . Dado que $b \geq c$, l intersecta $\overline{AC}$, desse modo, $d(A, Q) \leq d(A, C) \leq a < \frac{\pi}{2}R$. Sendo assim, para todo K , temos que $\overline{AQ}$ não intersecta $\overleftrightarrow{BC}$, logo, Q e A estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$. Por um argumento similar, segue também que $\overleftrightarrow{AQ}$ não intersecta $\overline{BC}$.

Note agora que Q não pode estar no interior de T . Suponha que Q esteja no interior de T e seja S o ponto onde l e $\overline{AC}$ se intersectam. Dessa forma, Q está no interior do segmento $\overline{SM}$. Dado que $\overleftrightarrow{AQ}$ intersecta um lado do triângulo $\Delta(MSC)$, ele deve intersectar um dos outros dois lados. Como $\overleftrightarrow{AQ}$ não intersecta $\overline{MC} \subseteq \overline{BC}$ então deve

cruzar $\overline{SC} \subseteq \overleftrightarrow{AC}$. Porém, isso significaria que $\overleftrightarrow{AQ}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ se cruzam em dois pontos não antipodais. Uma contradição.

Dado que Q e P estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$ e P está no interior de T e Q não, devemos ter que $P \in \overline{QM}$. Além disso, temos $d(P, Q) < d(MQ)$ e pelo Lema 4.20 obtemos que $d(A, P) < d(A, M) = m$. Aliando essa desigualdade à primeira obtida que dizia ser $\frac{a}{2} < d(A, P)$, obtemos que $\frac{a}{2} < d(A, P) < d(A, M) = m$, ou seja, $\frac{a}{2} < m$.

Finalmente suponha que *i*), *ii*) e *iii*) sejam válidas, seja $R = m(T)$. Por definição, $B_R(A) \cap B_R(B) \cap B_R(C) \neq \emptyset$, do Lema 4.23 temos que $B_R(A) \cap B_R(B) \cap B_R(C) = \{P\}$, e desse modo, $R = d(P, A) = d(P, B) = d(P, C)$ e portanto, R é o circunraio de T . $\square$

4.4 Triângulos mais persistentes

Nessa seção vamos mostrar que entre os triângulos T com nascimento fixo $n(T)$, aqueles com persistência $p(T) = \frac{m(T)}{n(T)}$ máxima, são os equiláteros.

Seja T um triângulo com vértices A, B, C e lados correspondentes $a \geq b \geq c$, assumamos ainda que $n(T) < m(T)$. Se $K > 0$ assumimos também que $a < \frac{2}{3}\pi R$ onde $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$.

Teorema 4.24. *Suponha T um triângulo não equilátero, então existe um triângulo equilátero T' com $n(T') = n(T)$ e $m(T') > m(T)$.*

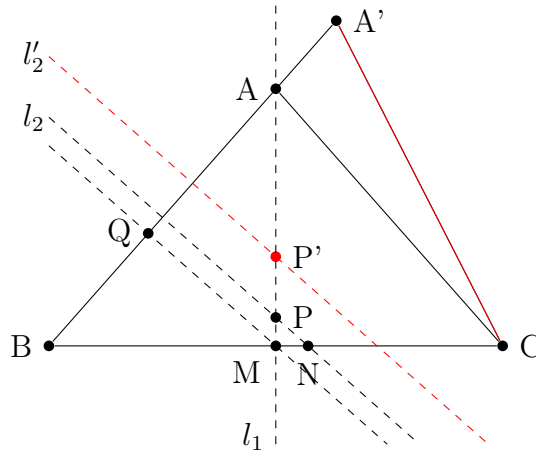


Figura 4.13: Substituição de triângulo euclidiano $\Delta(ABC)$ por isósceles $\Delta(A'BC)$.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que T pode ser substituído por um triângulo isósceles com dois lados de medida a . Se T já não estiver nessa forma, então existe algum lado com medida estritamente maior que os outros dois, ou seja, $a > b \geq c$. Sejam l_1 , l_2 e l'_2 as mediatrizes de $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{A'B}$ respectivamente. Pela Proposição 4.19 essas mediatrizes se intersectam em um ponto P interior ao triângulo e circuncentro de T . Seja A'

o ponto em $\overleftrightarrow{AB}$ de modo que A esteja entre A' e B e que $\max\{d(B, A'), d(C, A')\} = a$. Seja T' o triângulo formado por A' , B e C , por construção, T' possui dois lados de medida a de modo que a ainda é o maior lado dos triângulos, além disso, $n(T') = n(T)$. Vamos mostrar que T' satisfaz $m(T') > n(T')$ usando o Lema 4.19. Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$, uma vez que $a > b$, l_2 intersecta $\overline{BC}$ em algum ponto N . Dado que P é interior ao triângulo T , N e B estão em lados opostos em relação à l_1 . Desse modo, M e B estão do mesmo lado em relação à l_2 e por isso, M e A em lados opostos de l_2 .

Seja agora Q um ponto de $\overleftrightarrow{AB}$ de modo que $\overrightarrow{MQ}$ seja perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, então tanto $\overleftrightarrow{AB}$ quanto l_2 são retas perpendiculares a $\overrightarrow{MQ}$. Quando $K \leq 0$, isso significa que $\overrightarrow{MQ}$ e l_2 são paralelas. Para o caso $K > 0$, existem dois pontos de intersecção entre as retas, e ambos distam $\frac{\pi}{2}R$ de $\overleftrightarrow{AB}$, nesse caso, $d(M, Q) \leq d(M, B) = \frac{a}{2} < \frac{\pi}{2}R$. Desse modo, para todo K , temos que o segmento $\overline{MQ}$ não intersecta l_2 internamente ao triângulo e portanto, M e Q estão do mesmo lado em relação à reta l_2 o que implica que Q e A estão em lados opostos em relação à l_2 . Uma vez que A está mais próximo de l_2 do que A' , segue que A está mais próximo de Q do que A' , pelo Lema 4.20, $d(A', M) > d(A, M) > \frac{a}{2}$ o que implica serem válidas para T' as afirmações da Proposição 4.19.

Seja P' o circuncentro do triângulo T' e l_2 a mediatriz de $\overline{A'B}$, então P' está em l_1 e $d(M, P') > d(M, P)$. Uma vez que l_1 é perpendicular a $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC}$, a distância de qualquer ponto de l_1 até B aumenta a medida que esse ponto se afasta de M , desse modo, $d(B, P') > d(B, P)$ ou de modo equivalente, $m(T') > m(T)$.

Sendo assim, podemos assumir que T possua dois lados de medida a , ou seja, $a = b > c$. Considere os círculos de raio a centrados em B e C .

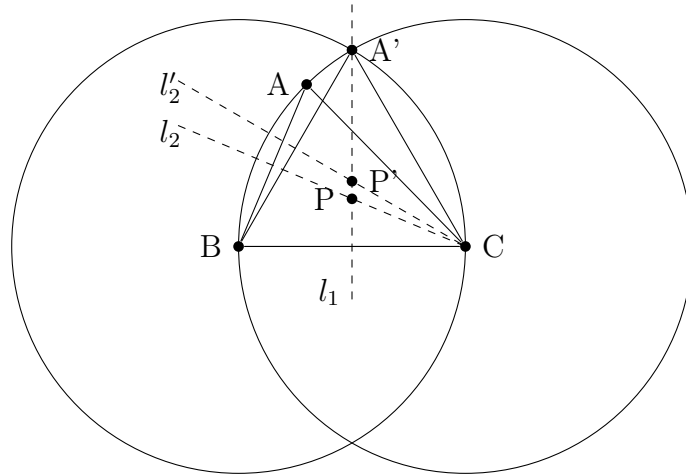


Figura 4.14: Substituição de triângulo euclidiano isósceles $\Delta(ABC)$ por equilátero $\Delta(A'BC)$.

Quando $K \leq 0$ sabemos que eles se intersectam em dois pontos distintos de lados opostos em relação a $\overleftrightarrow{BC}$. Para o caso $K > 0$, denote por M' o ponto da esfera antipodal a M . Sendo $d(B, M) = \frac{a}{2} < a$ e assumindo que $a < \frac{2\pi}{3}R$, temos $d(B, M') = \pi R - \frac{a}{2} >$

$\frac{2\pi}{3}R > a$. Observe que estando M e M' em l_1 , existem dois pontos em l_1 , um em cada lado de $\overleftrightarrow{BC}$, cuja distância até B é exatamente a . Ainda pelo fato de estarem em l_1 , a distância até C , também é exatamente a , e assim, estão na intersecção dos dois círculos.

Seja A' o ponto de intersecção dos dois círculos do mesmo lado de A em relação a $\overleftrightarrow{BC}$. Seja T' o triângulo formado pelos vértices A' , B e C , por construção, T' é equilátero com lados medindo a e consequentemente $n(T') = \frac{a}{2} = n(T)$.

Seja l'_2 a mediatriz de $\overline{A'B}$, por construção, o ângulo relativo ao vértice C em T é menor que o ângulo relativo ao vértice C em T' e uma vez que ambos são isósceles, l_2 e l'_2 bisseccionam respectivamente esses ângulos. Desse modo, o ângulo formado por $\overline{BC}$ e l_2 é menor que o ângulo formado por $\overline{BC}$ e l'_2 , segue que o ponto P onde l_2 intersecta l_1 está mais próximo de $\overline{BC}$ do que o ponto P' onde l'_2 intersecta l_1 .

Como antes, isso implica que $d(B, P') > d(B, P)$ e dado que P e P' são circuncentros de T e T' , temos que $m(T') > m(T)$. $\square$

4.5 Persistência em triângulos equiláteros

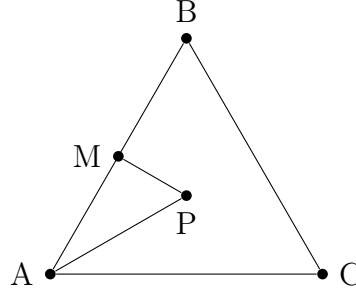
Vamos agora deduzir fórmulas para o cálculo da persistência em triângulos equiláteros. Em geral, é possível estabelecer fórmulas para quaisquer triângulos em função dos lados e de K , observando que $n(T)$ será metade de seu maior lado e $m(T)$ seu circunraio, entretanto, nos casos gerais, as fórmulas que se obtém não são suficientemente esclarecedoras, e para o caso equilátero, a lei dos senos simplifica sobremaneira os resultados possibilitando inferir alguns resultados úteis como veremos a seguir.

Teorema 4.25. *Seja $T_{K,a}$ um triângulo equilátero em M_K com lados de medida a , temos:*

$$p(T_{K,a}) = \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{-K}} \sinh^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sinh \left(\frac{a\sqrt{-K}}{2} \right) \right) & \text{se } K < 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \text{se } K = 0 \\ \frac{2}{a\sqrt{K}} \sin^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{a\sqrt{K}}{2} \right) \right) & \text{se } K > 0 \end{cases}$$

Demonstração. Seja T um triângulo equilátero de vértices A , B e C e lados a . Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e P o circuncentro de T . Uma vez que P é circuncentro, está na intersecção das mediatrizes de T . Sabemos que $\angle AMP = \frac{\pi}{2}$, além disso, as mediatrizes dividem T em 6 triângulos congruentes sendo um dos vértices o ponto P . Os ângulos que circundam o ponto P , medem todos $\frac{\pi}{3}$ uma vez que a soma dos 6 devem totalizar 2π , além disso, temos que a medida de $\overline{AM}$ é $n(T) = \frac{a}{2}$ e a medida de $\overline{AP}$ é $m(T)$.

Vamos aplicar a lei dos senos ao triângulo $\Delta(AMP)$ em cada um dos casos de K :


 Figura 4.15: $n(T) = d(A, M)$ e $m(T) = d(A, P)$.

Para $K = 0$, temos

$$\frac{m(T)}{n(T)} = \frac{d(A, P)}{d(A, M)} = \frac{\text{sen}(\angle AMP)}{\text{sen}(\angle APM)} = \frac{\text{sen}(\pi/2)}{\text{sen}(\pi/3)} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Para $K > 0$, temos

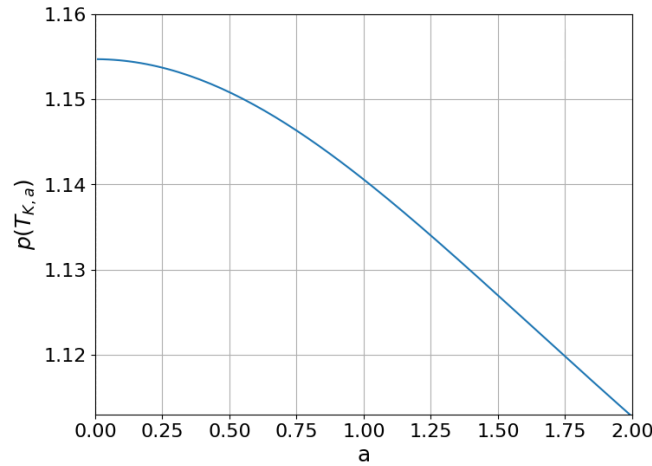
$$\frac{\text{sen}(m(T)\sqrt{K})}{\text{sen}(n(T)\sqrt{K})} = \frac{2}{\sqrt{3}} \implies m(T) = \frac{1}{\sqrt{K}} \text{sen}^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \text{sen} \left(\frac{a\sqrt{K}}{2} \right) \right).$$

Por fim, para $K < 0$, temos

$$\frac{\text{senh}(m(T)\sqrt{-K})}{\text{senh}(n(T)\sqrt{-K})} = \frac{2}{\sqrt{3}} \implies m(T) = \frac{1}{\sqrt{-K}} \text{senh}^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \text{senh} \left(\frac{a\sqrt{-K}}{2} \right) \right).$$

□

A partir das igualdades obtidas no Teorema 4.25 vamos analisar a variação dos valores de persistência em triângulos equiláteros em cada um dos casos estudados a medida que ocorrem alterações na curvatura K e no valor a dos lados do triângulo.


 Figura 4.16: Gráfico da persistência em função de a com $K = -1$.

Na Figura 4.16 temos a variação da persistência de um triângulo hiperbólico equilátero em função dos lados para $K = -1$. A curva atinge valores cada vez maiores a medida que a se aproxima de 0 (consequentemente o triângulo de um euclidiano com persistência igual a $\frac{2}{\sqrt{3}}$). Conforme a aumenta, a persistência diminui e terá como limitante inferior o valor 1, caso em que os instantes de nascimento e morte são iguais.

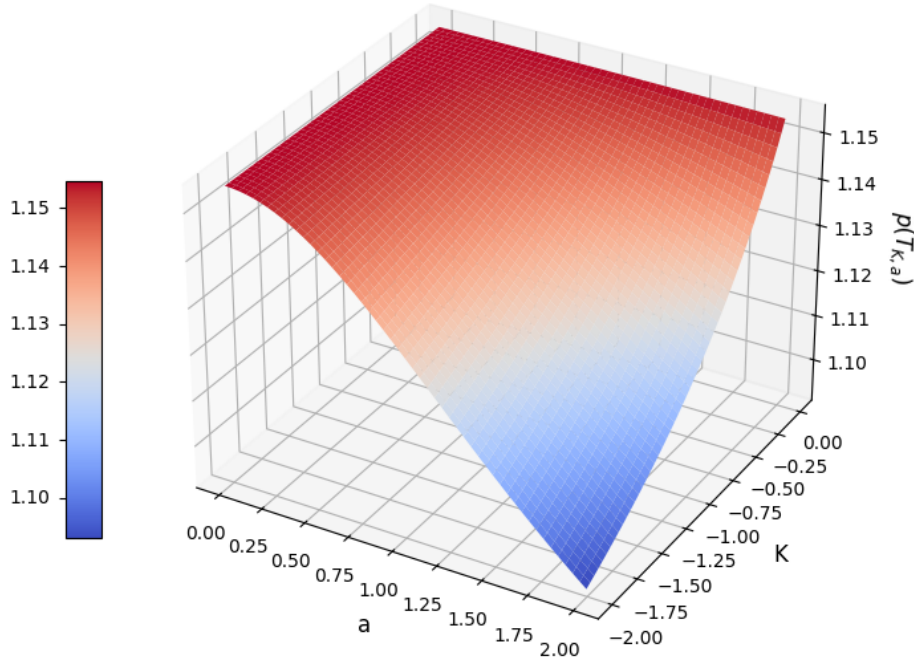


Figura 4.17: Gráfico da persistência em função de a e K .

A Figura 4.17 mostra a variação da persistência conforme a curvatura e o lado variam em $-2 < K < 0$ e $0 < a < 2$. Corroborando ao que foi dito, os maiores valores de persistência ocorrem quando a curvatura e os lados do triângulo hiperbólico tendem a zero o que faz sentido, uma vez que em ambos os casos, o triângulo tende a um euclidiano, seja por meio da curvatura nula, seja por meio dos lados cada vez menores.

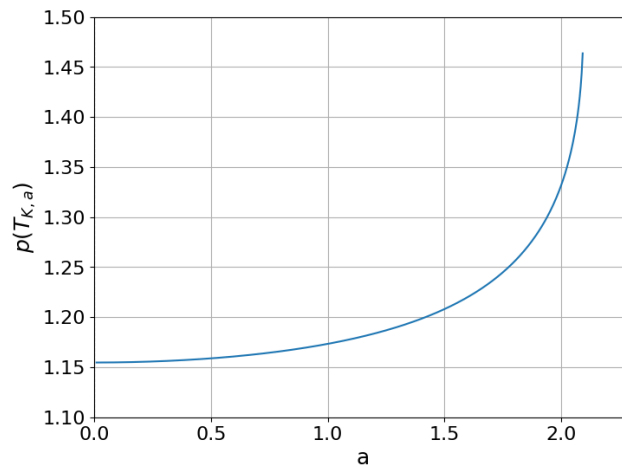


Figura 4.18: Gráfico da persistência em função de a com $K = 1$.

A Figura 4.18 mostra a variação da persistência de um triângulo esférico em função de seus lados a para uma curvatura fixa $K = 1$. É possível observar um comportamento oposto ao anterior, os menores valores de persistência estão próximos à origem, ou seja, quando os lados do triângulo tendem a zero e consequentemente o triângulo se aproxima de um euclidiano. A medida que o valor de a aumenta, a persistência aumenta até atingir um valor limite como nos mostrará a Figura 4.19. Entretanto, antes de plotá-la, é preciso analisar os valores a serem usados no domínio da função de modo a não obter mais de um período do gráfico e consequentemente incorrer em equívocos de interpretação. Desse modo, dado que $\sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, temos as desigualdades:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{a\sqrt{K}}{2}\right) \leq 1, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} &\leq \sin\left(\frac{a\sqrt{K}}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\pi}{3} &\leq \frac{a\sqrt{K}}{2} \leq \frac{\pi}{3} \\ -\frac{2\pi}{3} &\leq a\sqrt{K} \leq \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

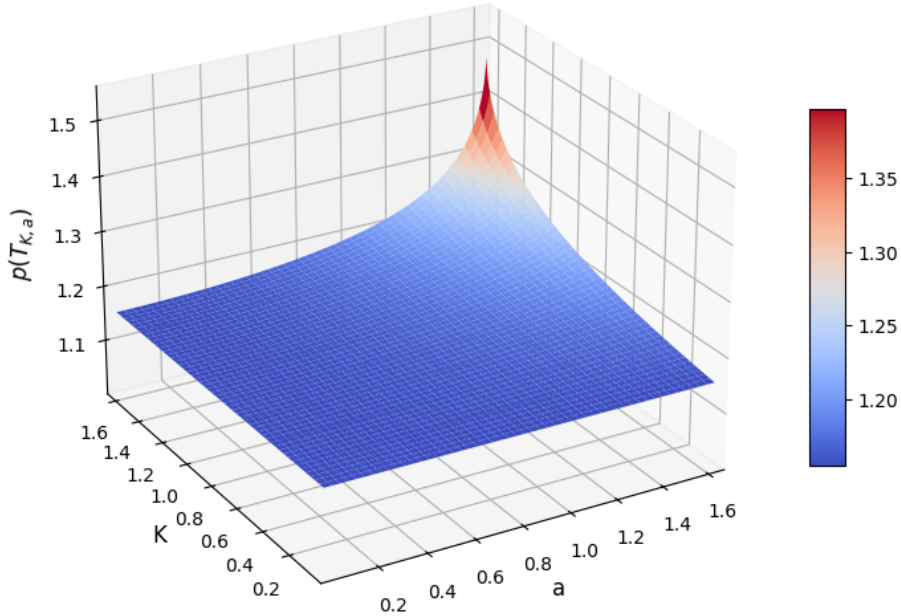


Figura 4.19: Gráfico da persistência em função de a e K .

Novamente corroborando o que foi dito, obtemos os menores valores de persistência quando a curvatura e os lados do triângulo esférico tendem a zero e em qualquer um dos

casos, o triângulo tende a um equilátero euclidiano, seja por meio da curvatura nula, seja por meio dos lados cada vez menores.

4.6 Simulação e resultados

Nesta seção, usamos um *Random Forest Classifier* para analisar e classificar o comportamento da Homologia persistente em triângulos formados aleatoriamente nas diferentes curvaturas de superfícies. Até onde temos conhecimento esta abordagem é inédita. Dada a eficiência e relativa simplicidade desses modelos, eles são amplamente utilizados em problemas de classificação devido à sua capacidade de lidar com dados de alta dimensionalidade, não lineares ou casos em que há interações complexas entre variáveis. Ele consiste em um modelo de aprendizado de máquina baseado em árvores de decisão por meio de *ensemble learning*, ou seja, combinação de diferentes tomadas de decisões vindas de múltiplos modelos individuais. Em cada etapa e a cada decisão tomada, os resultados vão sendo refinados e melhorados. Cada uma dessas árvores é construída a partir de um subconjunto aleatório de dados usados para treinamento e um outro subconjunto usado para a divisão em cada um dos nós. Combinando os múltiplos resultados obtidos nas decisões, obtemos resultados mais precisos e com menor risco de *overfitting* (quando o modelo se concentra tanto no conjunto de treino que perde a capacidade de generalizar os resultados para diferentes valores de dados). Implementamos um conjunto de códigos capazes de gerar pontos em diferentes ambientes e a partir da análise de um conjunto de pontos usados para treino, decidir qual o espaço ambiente do conjunto completo. Com uma grande quantidade de pontos aleatórios, construímos também histogramas cumulativos e de densidade para buscar parâmetros que corroborem os resultados obtidos com a simulação. Para gerar os pontos em um disco de raio u a partir dos parâmetros r e θ , e garantir que ambos possuam distribuição uniforme, foi necessário usar uma função específica em cada caso em acordo com o processo de amostragem inversa. Nesse processo, são sorteados pontos em uma distribuição conhecendo apenas o inverso da distribuição cumulativa F e pontos uniformes em $[0, 1]$ da qual posteriormente calcula-se F^{-1} nesses pontos como assegura o Teorema 4.26:

Teorema 4.26. *Seja F uma função de distribuição cumulativa contínua inversível em algum domínio D . Se U possuir distribuição uniforme em $[0, 1]$, então $F^{-1}(U)$ possui função de distribuição cumulativa F .*

Para o caso euclidiano, em que $K = 0$, consideramos o disco de raio 1 centrado na origem. Parametrizamos os pontos por um ângulo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e um raio $0 \leq r \leq 1$ tomados de forma independente e tal que θ seja tomado uniformemente em seu intervalo. Para r , a probabilidade de um ponto estar dentro do disco com determinado valor r , deve ser igual à proporção da área nesse disco em relação à área do disco de raio unitário.

Dado que a área desse disco é $\pi 1^2$, então a função distribuição cumulativa para um valor r qualquer é dada por

$$F(r) = \frac{\pi r^2}{\pi 1^2} = r^2.$$

e em acordo com o Teorema 4.26 a função de distribuição cumulativa inversa é

$$r = F^{-1}(u) = \sqrt{u}$$

o que nos permite tomar u uniformemente em $[0, 1]$ e usar $F^{-1}(u)$ para obter a amostra desejada para r .

Para o caso hiperbólico, em que $K < 0$, a parametrização dos pontos segue a mesma lógica do caso anterior, ou seja, um ângulo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e um raio $0 \leq r \leq 1$ independentes com θ tomado uniformemente em seu intervalo. A área de um círculo hiperbólico de raio r e curvatura K pode ser obtida a partir da relação $A(r) = \frac{4\pi}{-K} \sinh^2 \left(\frac{r\sqrt{-K}}{2} \right)$ e desse modo, a distribuição cumulativa em função de r é

$$F(r) = \frac{\frac{4\pi}{-K} \sinh^2 \left(\frac{r\sqrt{-K}}{2} \right)}{\frac{4\pi}{-K} \sinh^2 \left(\frac{1\sqrt{-K}}{2} \right)} = \frac{\sinh^2 \left(\frac{r\sqrt{-K}}{2} \right)}{\sinh^2 \left(\frac{1\sqrt{-K}}{2} \right)}.$$

novamente pelo Teorema 4.26 obtemos a função de distribuição cumulativa inversa

$$r = F^{-1}(u) = \frac{2}{\sqrt{-K}} \sinh^{-1} \left(\sqrt{u} \sinh \left(\frac{\sqrt{-K}}{2} \right) \right)$$

assim podemos tomar u uniformemente no intervalo $[0, 1]$ e usar $F^{-1}(u)$ para obter a amostra desejada para r .

Por fim, no caso esférico, $K > 0$, assumimos $K \leq 2$ o que garante que somos capazes de incorporar um disco de raio unitário no hemisfério superior da esfera. Novamente seguindo o mesmo procedimento de amostragem, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ uniformemente em seu intervalo e $0 \leq r \leq 1$ em acordo com a relação $A(r) = \frac{4\pi}{K} \sin^2 \left(\frac{r\sqrt{K}}{2} \right)$ que nos fornece a área de um círculo de raio r e curvatura K . A distribuição cumulativa em função de r é dada por

$$F(r) = \frac{\frac{4\pi}{K} \sin^2 \left(\frac{r\sqrt{K}}{2} \right)}{\frac{4\pi}{K} \sin^2 \left(\frac{1\sqrt{K}}{2} \right)} = \frac{\sin^2 \left(\frac{r\sqrt{K}}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{1\sqrt{K}}{2} \right)}.$$

e do Teorema 4.26 obtemos a função de distribuição cumulativa inversa

$$r = F^{-1}(u) = \frac{2}{\sqrt{K}} \sin^{-1} \left(\sqrt{u} \sin \left(\frac{\sqrt{K}}{2} \right) \right).$$

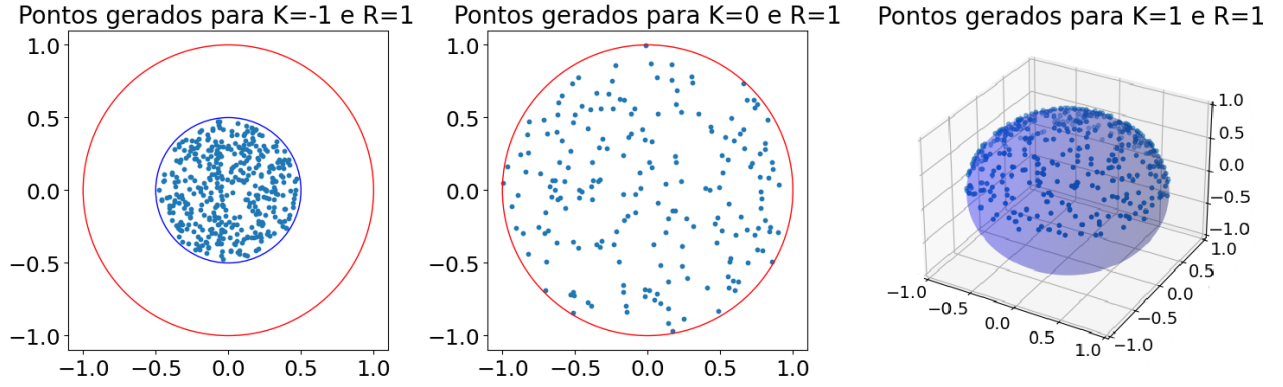


Figura 4.20: Pontos sorteados aleatoriamente em diferentes curvaturas.

Uma vez garantida a uniformidade nas distribuições em ambos os parâmetros, sorteamos 1000 pontos aleatórios em discos de raio um nas diferentes curvaturas, calculamos a persistência nos triângulos obtidos e construímos histogramas cumulativo e de densidade. Esses histogramas apresentam algumas diferenças em relação à distribuição dos valores em acordo com o espaço ambiente, em particular os valores máximos atingidos são expressivamente distintos e podem ser bem observados na Figura 4.21 em que temos os Histogramas para valores de $R = 1$ e $K = -1, 0$ e 1 . E na Figura 4.22 em que temos a mesma situação mas representada em Histogramas cumulativos.

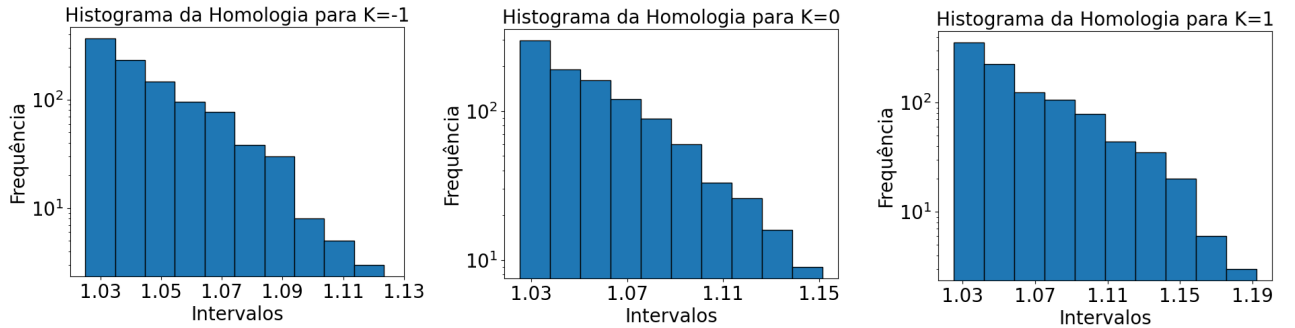


Figura 4.21: Histogramas para $R = 1$ e $K = -1, 0$ e 1 .

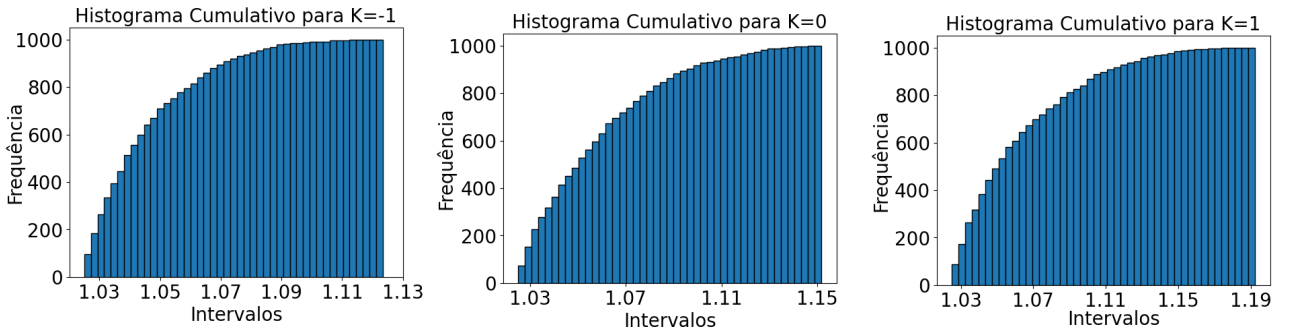


Figura 4.22: Histogramas cumulativos para $R = 1$ e $K = -1, 0$ e 1 .

A seguir, na Figura 4.23 organizamos as três funções que fornecem os valores máximos de persistência em função dos lados de um triângulo equilátero para as curvaturas $K = -1, 0$ e 1 de K de modo a facilitar a análise que faremos. É importante ressaltar que para fins práticos de observação e comparação, usaremos o valor 1.155 como aproximação para o valor máximo $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

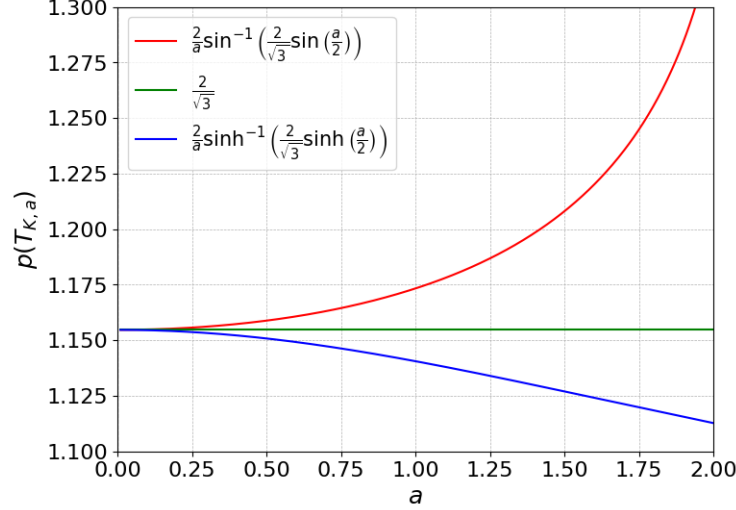


Figura 4.23: Valores de persistência para as diferentes funções.

Perceba que para $K < 0$ os maiores valores atingidos de persistência, não chegaram sequer a 1.13, a curva em azul na Figura 4.23 nos garante que é possível atingir valores próximos de 1.155 mas para isso, o triângulo analisado teria que ser equilátero e com tamanho dos lados próximos a zero o que o torna muitíssimo improvável de ocorrer. Para o caso em que $K = 0$ temos uma situação parecida, entretanto, menos crítica, uma vez que para atingir os valores próximos ao máximo, basta que se tenha um triângulo equilátero não havendo necessidade de exigir um tamanho específico para os lados, dado que serão todos congruentes. Por fim, para uma curvatura $K > 0$, obtivemos valores máximos maiores que 1, 19, o que se justifica observando a curva em vermelho na Figura 4.23. Ainda que essas diferenças sejam numericamente sutis, elas nos fornecem indícios consistentes para diferenciar cada um dos três casos.

De posse das informações apresentadas, implementamos em *Python* uma série de algoritmos com o intuito de gerar, processar e organizar dados de persistência geométrica em diferentes curvaturas $K = -2, -2, 0, 1, 2$. Eles trabalharam de forma integrada para produzir um conjunto de dados estruturado que foi utilizado no treinamento de um modelo de aprendizado de máquina

Os principais passos desse código são, gerar uma quantidade de triângulos aleatórios em diferentes espaços geométricos e calcular a persistência deles. Posteriormente, cria um dicionário com os resultados agrupados por curvatura, em que cada valor de

curvatura K possui seus próprios parâmetros e métricas específicas. Após essa etapa, utilizamos o algoritmo Random Forest para realizar aprendizado não supervisionado e, com base nessa abordagem, classificar os dados em três grupos distintos. Em seguida, comparamos os resultados obtidos com os valores esperados para avaliar a eficácia do método.

Na tabela a seguir está o relatório com o resultado dessa classificação:

Relatório de classificação para nosso modelo

Tabela 4.1: Relatório de Classificação.

Classe (Curvatura)	Precisão	Revocação	F1-Score	Suporte
-2	1.00	1.00	1.00	18
-1	1.00	1.00	1.00	24
0	1.00	1.00	1.00	20
1	1.00	1.00	1.00	21
2	1.00	1.00	1.00	17
Acurácia	1.00 (100 instâncias)			
Média Macro	1.00	1.00	1.00	100
Média Ponderada	1.00	1.00	1.00	100

O relatório de classificação avalia o desempenho do modelo em termos de métricas fundamentais. Aqui está o significado de cada métrica listada na tabela:

- **Classe:** Representa as diferentes categorias que o modelo tentou prever, em nosso caso, as diferentes curvaturas -2 , -1 , 0 , 1 , e 2 .
- **Precisão:** Mede a proporção de previsões corretas entre todas as previsões feitas para cada classe específica. Ela é calculada da seguinte maneira:

$$\text{Precisão} = \frac{\text{VP}}{\text{VP} + \text{FP}}$$

em que:

- VP: Representa os Verdadeiros Positivos, isto é, o número de instâncias corretamente classificadas como pertencentes à classe em análise.
- FP: Representa os Falsos Positivos, ou seja, o número de instâncias classificadas incorretamente como pertencentes à classe analisada.

- **Revocação:** Mede a proporção de instâncias reais de uma classe que o modelo identificou corretamente. É calculada por:

$$\text{Revocação} = \frac{\text{VP}}{\text{VP} + \text{FN}}$$

em que:

- FN: São os Falsos Negativos, isto é, o número de instâncias que pertencem à classe, mas não foram classificadas corretamente.

- **F1-Score:** É a média harmônica entre a precisão e a revocação. Combina ambos os valores para fornecer uma visão equilibrada do desempenho do modelo. Seu cálculo se dá por:

$$\text{F1-Score} = 2 \cdot \frac{\text{Precisão} \cdot \text{Revocação}}{\text{Precisão} + \text{Revocação}}$$

- **Suporte:** Refere-se ao número total de instâncias reais de cada classe no conjunto de dados. Este valor é importante para entender o equilíbrio entre as classes. Por exemplo, classes com menor suporte podem ser mais difíceis de prever com precisão.
- **Acurácia:** Proporção de previsões corretas em relação ao total de exemplos avaliados. Para calcular essa acurácia, temos:

$$\text{Acurácia} = \frac{\text{Número de previsões corretas}}{\text{Número total de previsões}}$$

- **Média Macro:** É a média aritmética dos valores de precisão, revocação e F1-Score para todas as classes, sem levar em consideração o número de exemplos (*suporte*) em cada classe. Para obtermos esse parâmetro fazemos:

$$\text{Média Macro} = \frac{\sum(\text{Métrica para cada classe})}{\text{Número de classes}}$$

- **Média Ponderada:** É a média dos valores de precisão, revocação e F1-Score, ponderada pelo número de exemplos (*suporte*) de cada classe. Para calcular a média ponderada fazemos:

$$\text{Média Ponderada} = \frac{\sum(\text{Métrica para cada classe} \times \text{Suporte da classe})}{\text{Número total de exemplos}}$$

Resumo do Relatório e conclusão

Em nosso teste, obtivemos valores 1.00 para os três parâmetros Precisão, Revocação e F1-Score, isso indica que o modelo realizou previsões perfeitas para todas as classes, classificando corretamente todas as instâncias no conjunto de teste.

Em relação à avaliação do desempenho do modelo em prever corretamente as classes dos dados, seguem os resultados obtidos e a conclusão final:

Uma vez obtido valor 1.00 de Acurácia, isso implica que nosso modelo acertou 100% das previsões, o valor 1.00 para a Média Macro, aponta que o algoritmo obteve um desempenho equilibrado em todas as classes com métrica perfeita para cada uma delas. Por fim, tendo obtido resultado 1.00 para a Média Ponderada, significa que o número de exemplos exitosos em cada classe também está perfeito e muito bem equilibrado.

A guisa de conclusão, o relatório sugere que o modelo está perfeito em todas as métricas, o que indica um modelo extremamente bem ajustado e funcional, sendo uma melhoria ao modelo apresentado em (Bubenik *et al.*, 2020).

4.7 Códigos

4.7.1 Pacotes

```
1 import math
2 import random
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from scipy.optimize import fsolve
6 import heapq
7 from concurrent.futures import ProcessPoolExecutor
8 import multiprocessing
9 from sklearn.ensemble import RandomForestClassifier
10 random.seed(None)
```

4.7.2 Conversão $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

```
1 """Converte pares ordenados em números complexos"""
2
3 def para_complexo(coord):
4     x, y = coord
5     return complex(x, y)
```

4.7.3 Distâncias

```

1 """Calcula a distância euclidiana em um disco de curvatura nula entre um
   ponto e a origem"""
2
3 def norma_euclidiana(p):
4     return np.sqrt(p[0]**2 + p[1]**2)

```

```

1 """Calcula a distância euclidiana em um disco de curvatura nula entre
   dois pontos"""
2
3 def distancia_euclidiana(p1, p2):
4     return math.sqrt((p1[0] - p2[0])**2 + (p1[1] - p2[1])**2)

```

```

1 """Calcula a distância hiperbólica dados dois pontos em um disco de
   Poincaré"""
2
3 def distancia_hiperbolica(p1, p2, K=-1):
4     # Converte os pontos em números complexos
5     z1 = para_complexo(p1)
6     z2 = para_complexo(p2)
7
8     # Verifica se os pontos estão dentro do disco unitário
9     if abs(z1) < 1 and abs(z2) < 1:
10         raise ValueError("Os pontos devem estar dentro do disco unitário")
11
12     # Calcula o numerador e o denominador
13     numerador1 = abs(z1 - z2)
14     denominador1 = abs(1 - z1.conjugate() * z2)
15
16     # Calcula a distância hiperbólica usando arc\tanh
17     return 2*1/np.sqrt(-K) * np.arc\tanh(numerador1 / denominador1)

```

```

1 """Calcula a distância esférica dados dois pontos na superfície de uma
   esfera"""
2
3 def distancia_esferica(P1, P2, K=1):
4     R=1/K
5     P1 = np.array(P1)
6     P2 = np.array(P2)
7
8     # Produto escalar entre os dois pontos
9     dot_product = np.dot(P1, P2)
10

```

4 Detecção de Curvatura

```
11 # Normas dos vetores (devem ser iguais a R se os pontos estiverem na
    superfície)
12 norm_P1 = np.linalg.norm(P1)
13 norm_P2 = np.linalg.norm(P2)
14
15 # Cálculo do cosseno do ângulo entre os pontos
16 cos_theta = dot_product / (norm_P1 * norm_P2)
17
18 # Ajuste numérico para evitar erros de domínio
19 cos_theta = np.clip(cos_theta, -1.0, 1.0)
20
21 # Cálculo do ângulo
22 theta = np.arccos(cos_theta)
23
24 # Distância esférica
25 d = R * theta
26
27 return d
```

4.7.4 Ponto médio hiperbólico

```
1 """Calcula o ponto médio hiperbólico dados dois pontos no disco de
    Poincaré"""
2
3 def ponto_medio_hiperbolico(a,b,K=-1):
4     # Verifica se K é negativo
5     if K >= 0:
6         raise ValueError("A curvatura K deve ser negativa.")
7
8     # Fator de escala k
9     k = np.sqrt(-1 / K)
10
11     # Converte entrada para números complexos se necessário
12     if isinstance(a, tuple) or isinstance(a, list):
13         a = complex(a[0], a[1])
14     if isinstance(b, tuple) or isinstance(b, list):
15         b = complex(b[0], b[1])
16
17     # Verifica se os pontos estão dentro do disco unitário
18     if abs(a) >= 1 or abs(b) >= 1:
19         raise ValueError("Os pontos devem estar dentro do disco unitário.")
20
21     # Passo 1: Define a transformação de Möbius que mapeia 'a' para a
    origem
22     def mobius_transform(z):
```

```

23         return (z - a) / (1 - np.conj(a) * z)
24
25     # Transformação inversa
26     def mobius_inverse(w):
27         return (w + a) / (1 + np.conj(a) * w)
28
29     # Passo 2: Aplica a transformação em 'b'
30     b_prime = mobius_transform(b)
31
32     # Passo 3: Calcula a distância hiperbólica ajustada entre 0 e b_prime
33     abs_b_prime = abs(b_prime)
34     numerator = 1 + abs_b_prime
35     denominator = 1 - abs_b_prime
36     d = 2 * k * np.arctanh(abs_b_prime) # Distância escalada por k
37
38     # Passo 4: Calcula a posição de M' (ponto médio no caminho hiperbólico)
39     d_half = d / 2 # Metade da distância
40     abs_m_prime = np.tanh(d_half / (2 * k)) # Ajuste com fator k
41
42     # Passo 5: Determina M' na direção de b_prime
43     m_prime = (abs_m_prime / abs_b_prime) * b_prime if abs_b_prime != 0
44     else 0
45
46     # Passo 6: Aplica a transformação inversa para obter o ponto médio M
47     m = mobius_inverse(m_prime)
48
49     return (m.real, m.imag)

```

4.7.5 Ponto médio esférico

```

1  """Calcula o ponto médio esférico dados dois pontos na esfera"""
2
3  def ponto_medio_esferico(a,b,K=1):
4      #Normaliza os vetores
5      A = a/(K*np.sqrt(np.dot(a,a)))
6      B = b/(K*np.sqrt(np.dot(b,b)))
7
8      #Calcula soma vetorial
9      E = [(A[0]+B[0]),(A[1]+B[1]),(A[2]+B[2])]
10
11     #Normaliza o vetor
12     E = E/(K*np.sqrt(np.dot(E,E)))
13     return E

```

4.7.6 Circuncentros

```

1  """Calcula o circuncentro de um triângulo euclidiano dados 3 pontos"""
2
3  def circuncentro(p1, p2, p3):
4      x1, y1 = p1
5      x2, y2 = p2
6      x3, y3 = p3
7
8      # Calcula o determinante
9      d = 2 * (x1*(y2 - y3) + x2*(y3 - y1) + x3*(y1 - y2))
10
11     if d == 0:
12         raise ValueError("Os três pontos são colineares; o circuncentro é indefinido.")
13
14     # Calcula os quadrados
15     X1 = x1**2
16     Y1 = y1**2
17     X2 = x2**2
18     Y2 = y2**2
19     X3 = x3**2
20     Y3 = y3**2
21
22     # Calcula as coordenadas do circuncentro
23     ux = ((X1 + Y1)*(y2 - y3)+(X2 + Y2)*(y3 - y1)+(X3 + Y3)*(y1 - y2))/d
24     uy = ((X1 + Y1)*(x3 - x2)+(X2 + Y2)*(x1 - x3)+(X3 + Y3)*(x2 - x1))/d
25
26     return (ux, uy)

```

```

1  """Calcula o circuncentro de um triângulo hiperbólico dados 3 pontos no
   disco de Poincaré"""
2
3  def hyperbolic_circumcenter(p1, p2, p3, K):
4      if K >= 0:
5          raise ValueError("A curvatura K deve ser negativa para geometria hiperbólica.")
6
7      # Calcula o raio R a partir da curvatura K
8      R = 1 / math.sqrt(-K)
9
10     # Extrai as coordenadas dos pontos
11     x1, y1 = p1[0], p1[1]
12     x2, y2 = p2[0], p2[1]
13     x3, y3 = p3[0], p3[1]
14

```

```

15 # Calcula os valores de 'a' para cada ponto
16 r1_sq = x1**2 + y1**2
17 r2_sq = x2**2 + y2**2
18 r3_sq = x3**2 + y3**2
19
20 a1 = R**2 - r1_sq
21 a2 = R**2 - r2_sq
22 a3 = R**2 - r3_sq
23
24 # Define as equações a serem resolvidas
25 def equations(p):
26     x, y = p
27     eq1 = (((x - x1)**2 + (y - y1)**2) / a1) - (((x - x2)**2 + (y -
28 y2)**2) / a2)
29     eq2 = (((x - x1)**2 + (y - y1)**2) / a1) - (((x - x3)**2 + (y -
30 y3)**2) / a3)
31     return [eq1, eq2]
32
33 # Chute inicial (centroide dos vértices)
34 x0 = (x1 + x2 + x3) / 3
35 y0 = (y1 + y2 + y3) / 3
36
37 # Resolve as equações usando fsolve
38 sol = fsolve(equations, (x0, y0))
39 xc, yc = sol
40
41 zc = (xc, yc)
42 return zc

```

```

1 """Calcula o circuncentro de um triângulo esférico dados 3 pontos em uma
2 esfera"""
3
4 def circuncentro_esferico(A, B, C, K):
5     A = np.array(A)
6     B = np.array(B)
7     C = np.array(C)
8     R=1/K
9
10    # Vetores dos lados do triângulo
11    a = B - A
12    b = C - A
13
14    # Vetor normal ao plano do triângulo
15    N = np.cross(a, b)
16    N_norm_sq = np.dot(N, N)
17    D = 2 * N_norm_sq

```

```

17
18     if D == 0:
19         raise ValueError("Os pontos são colineares; o circuncentro esférico é indefinido.")
20
21     # Produtos vetoriais necessários
22     b_cross_c = np.cross(B, C)
23     c_cross_a = np.cross(C, A)
24     a_cross_b = np.cross(A, B)
25
26     # Cálculo do circuncentro em coordenadas 3D
27     O = (np.dot(A, A) * b_cross_c + np.dot(B, B) * c_cross_a + np.dot(C, C) * a_cross_b) / D
28
29     # Normaliza para obter o ponto na esfera
30     U = O / np.linalg.norm(O)*R
31
32     return U

```

4.7.7 Gerando Dados

```

1  """Retorna os primeiros 30 elementos de uma lista, se a lista tiver menos
2     de 30 elementos, retorna a lista completa."""
3
4  def primeiros_n_elementos(lista, n):
5
6     return lista[:n]
7
8  def gerar_persistencia(numero, Raio_maximo, K=):
9
10     minimo_persistencia=1.025 #valor mínimo aceitável
11     if K ==0:
12         pontos = []
13         N = []
14         dP_p1 = []
15         medidas = []
16         persist=[]
17         def F(x):
18             return math.sqrt(x)
19         while len(persist)<numero:
20             for i in range(100*numero):
21                 r = F(random.uniform(0, Raio_maximo))
22                 theta = random.uniform(0, 2 * math.pi)
23                 x = r * math.cos(theta)
24                 y = r * math.sin(theta)
25                 pontos.append((x, y))

```

```

24 # Remove o excesso de pontos para um número múltiplo de 3
25 if len(pontos) % 3 != 0:
26     pontos = pontos[:-(len(pontos) % 3)]
27
28 # Separa os pontos em uma lista de ternas
29 ternas = [(pontos[i], pontos[i + 1], pontos[i + 2]) for i in range
30 (0, len(pontos), 3)]
31
32 # Nomeia as ternas
33 for idx, terna in enumerate(ternas, start=1):
34     p1, p2, p3 = terna
35
36 # Calcula os comprimentos dos segmentos
37 d1 = distancia_euclidiana(p1, p2)
38 d2 = distancia_euclidiana(p2, p3)
39 d3 = distancia_euclidiana(p1, p3)
40
41 # Encontra o maior segmento
42 maior_segmento = max(d1, d2, d3)
43
44 # Determina qual o maior segmento, seu ponto médio e o vértice
45 oposto
46 if maior_segmento == d1:
47     ponto_medio = ((p1[0] + p2[0]) / 2, (p1[1] + p2[1]) / 2)
48     vertice_oposto = p3
49 elif maior_segmento == d2:
50     ponto_medio = ((p2[0] + p3[0]) / 2, (p2[1] + p3[1]) / 2)
51     vertice_oposto = p1
52 else:
53     ponto_medio = ((p1[0] + p3[0]) / 2, (p1[1] + p3[1]) / 2)
54     vertice_oposto = p2
55
56 # Calcula a distância do ponto médio até o vértice oposto
57 distancia_ponto_medio_ate_oposto = distancia_euclidiana(
58 ponto_medio, vertice_oposto)
59
60 # Guarda as duas medidas em pares ordenados
61 medidas.append((maior_segmento,
62 distancia_ponto_medio_ate_oposto))
63
64 # Cria um filtro descartando os triângulos de persistência nula
65 if (maior_segmento / 2) < distancia_ponto_medio_ate_oposto:
66     N.append(max(d1, d2, d3)/2)
67
68 # Encontra o circuncírculo
69 circumcirc = circuncentro(p1,p2,p3)
70 pt_center = (circumcirc[0], circumcirc[1])

```

```

67         dP_p1.append(distancia_euclidiana(p1, pt_center))
68
69         persist = [m/n for n, m in zip(N, dP_p1)]
70         persist = list(filter(lambda n: n > minimo_persistencia,
71                                persist))
72         persist = list(filter(lambda n: n < 1.3321, persist))
73
74         return primeiros_n_elementos(persist, numero)
75
76     if K < 0:
77         pontos = []
78         nt = []
79         dPp1 = []
80         medidas = []
81         persist = []
82         Raio_maximo = min(Raio_maximo, 0.98)
83
84         def F(x):
85             return 2/math.sqrt(-K)*math.asinh(math.sqrt(x)*math.sinh(math.sqrt
86             (-K)/2))
87
88         while len(persist) < numero:
89
90             for i in range(140*numero):
91                 r = F(random.uniform(0, Raio_maximo))
92                 theta = random.uniform(0, 2 * math.pi)
93                 x = r * math.cos(theta)
94                 y = r * math.sin(theta)
95                 pontos.append((x, y))
96
97         # Remove o excesso de pontos para ter um número múltiplo de 3
98         if len(pontos) % 3 != 0:
99             pontos = pontos[:-(len(pontos) % 3)]
100
101         # Separa os pontos em uma lista de ternas
102         ternas = [(pontos[i], pontos[i + 1], pontos[i + 2]) for i in range
103                   (0, len(pontos), 3)]
104
105         # Pega as ternas e nomeia
106         for idx, terna in enumerate(ternas, start=1):
107             p1, p2, p3 = terna
108
109             # Calcula os comprimentos hiperbólicos dos segmentos
110             d1 = distancia_hiperbolica(p1, p2, K)
111             d2 = distancia_hiperbolica(p2, p3, K)
112             d3 = distancia_hiperbolica(p1, p3, K)
113
114             # Encontra o maior segmento

```

```

111     maior_segmento = max(d1, d2, d3)
112
113     # Determina qual segmento é o maior e calcular o ponto médio e
114     # o vértice oposto
115     if maior_segmento == d1:
116         ponto_medio = ponto_medio_hiperbolico(p1, p2,K)
117         vertice_oposto = p3
118     elif maior_segmento == d2:
119         ponto_medio = ponto_medio_hiperbolico(p2, p3,K)
120         vertice_oposto = p1
121     else:
122         ponto_medio = ponto_medio_hiperbolico(p1, p3,K)
123         vertice_oposto = p2
124
125     # Calcula a distância hiperbólica do ponto médio até o vértice
126     # oposto
127     distancia_ponto_medio_ate_oposto = distancia_hiperbolica(
128         ponto_medio, vertice_oposto,K)
129
130     if distancia_ponto_medio_ate_oposto is None:
131         continue
132
133     # Guarda as duas medidas (comprimento do maior segmento e a
134     # distância até o vértice oposto)
135     medidas.append((maior_segmento,
136         distancia_ponto_medio_ate_oposto))
137
138     if (maior_segmento / 2) < distancia_ponto_medio_ate_oposto:
139         nt.append(max(d1, d2, d3)/2)
140
141     circuncentroh = hyperbolic_circumcenter(p1, p2, p3,K)
142
143     dPp1.append(distancia_hiperbolica(p1, circuncentroh,K))
144
145     persist = [m/n for n, m in zip(nt, dPp1)]
146     persist = list(filter(lambda n: n > minimo_persistencia,
147         persist))
148     persist = list(filter(lambda n: n < 1.15470053837, persist))
149     return primeiros_n_elementos(persist, numero)
150
151 if K > 0:
152     R=1/K
153     pontos = []
154     nt = []
155     dPp1 = []
156     medidas = []
157     persist = []

```

```

152 Raio_maximo=min(Raio_maximo,2.07/K)
153
154 def F(x):
155     return 2/math.sqrt(K)*math.asin(math.sqrt(x)*math.sin(math.sqrt(K)
156 /2))
157
158 while len(persist)<numero :
159
160     for i in range(100*numero):
161         r = F(random.uniform(0, Raio_maximo))
162         theta = random.uniform(0, 2 * math.pi)
163         x = R *math.sin(r/R)* math.cos(theta)
164         y = R *math.sin(r/R)* math.sin(theta)
165         z= R *math.cos(r/R)
166         pontos.append((x, y, z))
167
168 # Remove o excesso de pontos para ter um número múltiplo de 3
169 if len(pontos) % 3 != 0:
170     pontos = pontos[:-(len(pontos) % 3)]
171
172 # Separa os pontos em uma lista de ternas
173 ternas = [(pontos[i], pontos[i + 1], pontos[i + 2]) for i in range
174 (0, len(pontos), 3)]
175
176 # Pega as ternas e nomeia
177 for idx, terna in enumerate(ternas, start=1):
178     p1, p2, p3 = terna
179
180 # Calcular os comprimentos esfericos dos segmentos
181 d1 = distancia_esferica(p1,p2,K)
182 d2 = distancia_esferica(p2,p3,K)
183 d3 = distancia_esferica(p1,p3,K)
184
185 # Encontra o maior segmento
186 maior_segmento = max(d1, d2, d3)
187
188 # Determina qual segmento é o maior e calcula o ponto médio e o
189 vértice oposto
190 if maior_segmento == d1:
191     ponto_medio = ponto_medio_esferico(p1,p2,K)
192     vertice_oposto = p3
193 elif maior_segmento == d2:
194     ponto_medio = ponto_medio_esferico(p3,p2,K)
195     vertice_oposto = p1
196 else:
197     ponto_medio = ponto_medio_esferico(p1,p3,K)
198     vertice_oposto = p2

```

```

196     # Calcula a distancia_esferica do ponto médio até o vértice
197     oposto
198     distancia_ponto_medio_ate_oposto = distancia_esferica(
199     ponto_medio, vertice_oposto,K)
200
201     # Guarda as duas medidas (comprimento do maior segmento e a
202     distância até o vértice oposto)
203     medidas.append((maior_segmento,
204     distancia_ponto_medio_ate_oposto))
205
206     if (maior_segmento / 2) < distancia_ponto_medio_ate_oposto:
207         nt.append(max(d1, d2, d3)/2)
208         circumcirc = circuncentro_esferico(p1,p2,p3,K)
209         pt_center = (circumcirc[0], circumcirc[1], circumcirc[2])
210         dPp1.append(distancia_esferica(p1, pt_center,K))
211         persist = [m/n for n, m in zip(nt, dPp1)]
212         persist = list(filter(lambda n: n > minimo_persistencia,
213         persist))
214         persist = list(filter(lambda n: n < 1.3321, persist))
215         return primeiros_n_elementos(persist, numero)
216
217 def gerar_persistenciamax(numero, Raio_maximo, K):
218     # Obtem os maiores elementos
219     maiores_elementos = heapq.nlargest(numero, gerar_persistencia(numero
220     =numero, Raio_maximo=Raio_maximo, K=K))
221
222     # Ordena os maiores elementos
223     maiores_elementos.sort(reverse=True)
224
225     return maiores_elementos

```

4.7.8 Computando persistência

```

1  """Calcula a persistência dos triângulos em cada um dos casos"""
2
3  def compute_persistencia(args):
4      numero, Raio_maximo, k = args
5      try:
6          return gerar_persistenciamax(numero=numero, Raio_maximo=
7              Raio_maximo, K=k)
8      except Exception as e:
9          # Loga o erro e retorna um valor padrão
10         print(f"Erro em compute_persistencia com K={k}: {e}")
11
12 def gerar_resultados(numero=30, Raio_maximo=2, numeroportipo=20,
13     curvaturas=[0, 1, -1, 2, -2]):
14
15     resultados = {
16         "K=0": [],
17         "K=1": [],
18         "K=-1": [],
19         "K=2": [],
20         "K=-2": []
21     }
22
23     # Loop sobre os valores de K
24     for k in curvaturas:
25         # Cria uma lista de argumentos para passar ao executor
26         args_list = [(numero, Raio_maximo, k) for _ in range(
27             numeroportipo)]
28
29         # Executa as chamadas em paralelo
30         with ProcessPoolExecutor(max_workers=8) as executor:
31             resultados_list = list(executor.map(compute_persistencia,
32                 args_list))
33             resultados_list = [x for x in resultados_list if x is not None]
34
35         # Adiciona os resultados ao dicionário
36         resultados[f"K={k}"].extend(resultados_list)
37
38     return resultados

```

4.7.9 Classificador Random Forest

```

1  dadostreino = gerar_resultados(numero=100, Raio_maximo=2.05, numeroportipo
    =100, curvaturas=[0,1,-1, 2, -2])
2  datatreino = [sublista for key in dadostreino for sublista in dadostreino
    [key]]

```

```

1  """Organiza os dados para treinamento, cria um modelo e faz treinamento
    com todo o conjunto."""
2
3  # Inicializa listas para as features (X) e labels (y)
4  X = []
5  Y = []
6
7  # Mapeamento de labels para valores numéricos
8  mapeamento_labels = {'K=0': 0, 'K=1': 1, 'K=-1': -1, 'K=2': 2, 'K=-2': -2}
9
10 # Prepara os dados
11 for label_str, lista_features in dadostreino.items():
12     label = mapeamento_labels[label_str]
13     for features in lista_features:
14         X.append(features)
15         Y.append(label)
16
17 # Converte para arrays NumPy
18 X = np.array(X)
19 Y = np.array(Y)
20
21 # Cria o classificador Random Forest
22 clf = RandomForestClassifier()
23
24 # Treina o classificador
25 clf.fit(X, Y)

```

```

1  """Organiza os dados em treino e teste, analisa os dados de teste e
    fornece um relatório."""
2
3  from sklearn.model_selection import train_test_split
4  from sklearn.metrics import accuracy_score, classification_report
5
6  # Divide os dados em treinamento e teste
7  X_train, X_test, Y_train, Y_test = train_test_split(X, Y, test_size=0.2)
8
9  # Treina o classificador com o conjunto de treinamento
10 clf.fit(X_train, Y_train)
11

```

```
12 # Faz previsões no conjunto de teste
13 Y_pred = clf.predict(X_test)
14
15 # Calcula a acurácia
16 acuracia = accuracy_score(Y_test, Y_pred)
17
18 print(f'Acurácia do classificador: {acuracia}')
```

```
19
20 # Relatório detalhado
21 print("Relatório de Classificação:")
22 print(classification_report(Y_test, Y_pred))
```

4.7.10 Histogramas

```
1 """Constroi um histograma com 1000 dados em curvatura K=0"""
2
3 dadoshistoK0=gerar_persistencia(numero=1000, Raio_maximo=1, K=0)
4
5 plt.hist(dadoshistogramaK0, edgecolor='black')
6 plt.yscale('log')
7 y_ticks = [10**1, 10**2]
8 plt.yticks(y_ticks, labels=[r'$10^1$', r'$10^2$'], fontsize=16)
9 x_ticks = [1.03, 1.07, 1.11, 1.15]
10 plt.xticks(x_ticks, fontsize=16)
11 plt.title('Histograma da Homologia para K=0', fontsize=20)
12 plt.xlabel('Intervalos', fontsize=20)
13 plt.ylabel('Frequência', fontsize=20)
14
15 plt.show()
```

```
1 """Constroi um histograma cumulativo com 1000 dados em curvatura K=0"""
2
3 plt.hist(dadoshistoK0, bins=45, edgecolor='black', cumulative=True)
4
5 x_ticks = [1.03, 1.07, 1.11, 1.15]
6 plt.xticks(x_ticks, fontsize=16)
7 plt.yticks(fontsize=16)
8 plt.title('Histograma Cumulativo para K=0', fontsize=20)
9 plt.xlabel('Intervalos', fontsize=20)
10 plt.ylabel('Frequência', fontsize=20)
11
12 plt.show()
```

```

1  """Constroi um histograma com 1000 dados em curvatura K=1"""
2
3  dadoshistoK1=gerar_persistencia(numero=1000, Raio_maximo=1, K=1)
4
5  plt.hist(dadoshistoK1, edgecolor='black')
6  plt.yscale('log')
7  y_ticks = [10**1, 10**2]
8  plt.yticks(y_ticks, labels=[r'$10^1$', r'$10^2$'], fontsize=16)
9  x_ticks = [1.03, 1.07, 1.11, 1.15, 1.19]
10 plt.xticks(x_ticks, fontsize=16)
11 plt.title('Histograma da Homologia para K=1', fontsize=20)
12 plt.xlabel('Intervalos', fontsize=20)
13 plt.ylabel('Frequência', fontsize=20)
14
15 plt.show()

```

```

1  """Constroi um histograma cumulativo com 1000 dados em curvatura K=1"""
2
3  plt.hist(dadoshistoK1, bins=45, edgecolor='black', cumulative=True)
4
5  x_ticks = [1.03, 1.07, 1.11, 1.15, 1.19]
6  plt.xticks(x_ticks, fontsize=16)
7  plt.yticks(fontsize=16)
8  plt.title('Histograma Cumulativo para K=1', fontsize=20)
9  plt.xlabel('Intervalos', fontsize=20)
10 plt.ylabel('Frequência', fontsize=20)
11
12 plt.show()

```

```

1  """Constroi um histograma com 1000 dados em curvatura K=-1"""
2
3  dadoshistoKmenos1=gerar_persistencia(numero=1000, Raio_maximo=1, K=-1)
4
5  plt.hist(dadoshistoKmenos1, edgecolor='black')
6  plt.yscale('log')
7  y_ticks = [10**1, 10**2]
8  plt.yticks(y_ticks, labels=[r'$10^1$', r'$10^2$'], fontsize=16)
9  x_ticks = [1.03, 1.05, 1.07, 1.09, 1.11, 1.13]
10 plt.xticks(x_ticks, fontsize=16)
11 plt.title('Histograma da Homologia para K=-1', fontsize=20)
12 plt.xlabel('Intervalos', fontsize=20)
13 plt.ylabel('Frequência', fontsize=20)
14
15 plt.show()

```

```
1 """Constroi um histograma cumulativo com 1000 dados em curvatura  $K=-1$ """
2
3 plt.hist(dadoshistoKmenos1, bins=45, edgecolor='black', cumulative=True)
4
5 x_ticks = [1.03, 1.05, 1.07, 1.09, 1.11, 1.13]
6 plt.xticks(x_ticks, fontsize=16)
7 plt.yticks(fontsize=16)
8 plt.title('Histograma Cumulativo para  $K=-1$ ', fontsize=20)
9 plt.xlabel('Intervalos', fontsize=20)
10 plt.ylabel('Frequência', fontsize=20)
11
12 plt.show()
```

Referências

- ANDRADE, Plácido. **Introdução à Geometria Hiperbólica: O modelo de poincaré**. [S. l.]: SBM, 2013.
- BEARDON, Alan. Circumscribed hyperbolic triangles. **Archiv der Mathematik**, v. 119, p. 1–10, ago. 2022. DOI: [10.1007/s00013-022-01761-x](https://doi.org/10.1007/s00013-022-01761-x).
- BOISSONNAT, Jean-Daniel; CHAZAL, Frédéric; YVINEC, Mariette. **Geometric and topological inference**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2018. v. 57.
- BUBENIK, Peter *et al.* Persistent homology detects curvature. **Inverse Problems**, IOP Publishing, v. 36, n. 2, p. 025008, 2020.
- CARLSSON, Gunnar; VEJDEMO-JOHANSSON, Mikael. **Topological data analysis with applications**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2021.
- EDELSBRUNNER, Herbert. **A short course in computational geometry and topology**. [S. l.]: Springer, 2014.
- EDELSBRUNNER, Herbert; HARER, John L. **Computational topology: an introduction**. [S. l.]: American Mathematical Society, 2022.
- EDELSBRUNNER; LETSCHER; ZOMORODIAN. Topological persistence and simplification. **Discrete & computational geometry**, Springer, v. 28, p. 511–533, 2002.
- HATCHER, Allen. **Algebraic topology**. [S. l.]: AMS, 2005.
- LIMA, Dahisy; MIRANDA, Daniel. **Introdução à Topologia Algébrica**. [S. l.]: Notas de Aula - UFABC, 2023.
- LIMA, Elon Lages. **Homologia básica**. [S. l.]: IMPA, 2009.
- RATCLIFFE, John G; RATCLIFFE, John G. Hyperbolic Geometry. **Foundations of Hyperbolic Manifolds**, Springer, p. 52–96, 2019.

Referências

ROMAN, Steven; AXLER, S; GEHRING, FW. **Advanced linear algebra**. [S. l.]: Springer, 2005. v. 3.

VIRK, Žiga. **Introduction to Persistent Homology**. [S. l.]: Založba UL FRI, 2022.

WHITTLESEY, Marshall. **Spherical geometry and its applications**. [S. l.]: Chapman e Hall/CRC, 2019.

Índice

R -módulo

fiel, 3

livre, 3

à direita, 1

à esquerda, 1

R -submódulo, 2

l -esqueleto, 24

$\mathbb{K}(YX)$ -matriz, 46

k -simplexo, 19

p -cadeia, 4

p -ciclo, 4

p -ésimo operador bordo, 5

acíclico, 11

antípodas, 76

anulador, 3

base, 3

bordo, 21

cadeia, 4

característica de Euler-Poincaré, 28

ciclo, 4

ciclos homólogos, 11

cinde, 8

cobertura aberta, 31

cokernel, 2

complexo

de Rips, 32

de Čech, 31

simplicial, 23

complexo de cadeias, 4

de uma filtração, 53

simpliciais, 25

conexo por caminhos, 26

conjunto gerador, 3

coordenadas baricêntricas, 20

círculo gerador, 72

círculo máximo, 75

Código de barras de uma filtração, 40

diagrama de persistência

de uma filtração, 59

em uma função, 38

diferencial, 24

dimensão do simplexo K , 24

distância de Gromov-Hausdorff, 68

distância de Hausdorff, 68

distância esférica, 78

distância hiperbólica, 75

domínio de ideais principais, 3

domínio de integridade, 3

déficit angular, 75

elemento de torção, 3

espaço vetorial persistente, 43

finitamente gerado, 46

livre, 44

excesso angular, 78

face, 20

face oposta ao vértice, 21

- faces de bordo, 20
- filtração, 33
- filtração $\mathcal{F}$, 59
- finitamente gerado
 - R -módulo, 3
- finitamente apresentado, 46
- fronteira, 21
- função multiplicidade, 59
- geodésica, 77
- grupo de homologia, 11
- homologia, 11
- homologia persistente multiplicativa, 80
- homologia simplicial, 26
- homomorfismo
 - de R -módulos, 2
 - de bordo, 24
 - de conexão, 14
 - induzido por f , 15
- isomorfismo de R -módulos, 2
- Lei dos cossenos esféricos, 78
- Lei dos cossenos hiperbólicos, 75
- Lei dos senos esféricos, 78
- Lei dos senos hiperbólicos, 75
- Lema da cobra, 11
- Lema do Zig-Zag, 16
- livre, 3
- livre de torção, 3
- Mayer-Vietoris, 14
- morfismo, 14
- morte, 38
- morte do triângulo T , 79
- multiconjunto, 59
- módulo
 - cíclico, 3
 - de cadeias simpliciais, 24
 - de homologia simplicial, 26
 - dos n -bordos, 26
 - dos p -ciclos, 25
 - quociente, 2
- nascimento, 38
- nascimento do triângulo T , 79
- nervo, 31
- número de Betti, 28
- número de Betti persistente, 53
- operador bordo, 5
- orientação, 22
- orientação induzida, 22
- par persistente, 56
- persistência (multiplicativa) de T , 80
- ponto de bordo, 21
- ponto interior de σ , 21
- pontos ideais, 73
- regra do mais velho, 42
- segmentos geodésicos, 72
- semicírculos máximos, 76
- sequência exata, 5
 - curta, 6
 - em C_i , 5
- simplexo
 - aberto, 21
 - negativo, 54
 - orientado, 22
 - positivo, 53
- soma direta, 2
- subcomplexo simplicial, 24
- subespaço vetorial persistente, 44
- tabela p -dimensional de $\beta_p^{i,j}$, 42
- Triângulo esférico, 77
- Triângulo hiperbólico, 73
- vetores antipodais, 78
- Ângulo esférico, 77