Universidade Federal do ABC

Maria Clara Lima Marques do Nascimento

Grupos topológicos enumeravelmente compactos sem sequências não triviais convergentes

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Santo André, 2022

Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Maria Clara Lima Marques do Nascimento

Grupos topológicos enumeravelmente compactos sem sequências não triviais convergentes

Orientadora: Profa. Dra. Ana Carolina Boero

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre em Matemática

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna Maria Clara Lima Marques do Nascimento, e orientada pela Profa. Dra. Ana Carolina Boero.

Santo André, 2022

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Nascimento, Maria Clara Lima Marques do
Grupos topológicos enumeravelmente compactos sem sequências não triviais convergentes / Maria Clara Lima Marques do Nascimento. — 2022.

74 fls.

Orientadora: Ana Carolina Boero

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2022.

1. Topologia conjuntista. 2. Grupos topológicos. 3. Compacidade enumerável. 4. Axioma de Martin. 5. ZFC. I. Boero, Ana Carolina. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2022. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única da autora e com a anuência da orientadora.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata, MARIA CLARA LIMA MARQUES DO NASCIMENTO realizada em 27 de Setembro de 2022:

Documento assinado digitalmente
gov.br IRENE CASTRO PEREIRA
Data: 27/09/2022 17:34:13-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

____
Prof.(a) IRENE CASTRO PEREIRA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Documento assinado digitalmente
gov.br RODRIGO ROQUE DIAS
Data: 27/09/2022 19:43:28-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

____
Prof.(a) RODRIGO ROQUE DIAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

____
Prof.(a) DAHISY VALADAO DE SOUZA LIMA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

____
Prof.(a) LUCIA RENATO JUNQUEIRA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

____
Prof.(a) MARIANA RODRIGUES DA SILVEIRA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Documento assinado digitalmente
gov.br ANA CAROLINA BOERO
Data: 27/09/2022 16:10:34-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

____
Prof.(a) ANA CAROLINA BOERO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora, Prof.ª Dr.ª Ana Carolina Boero por me apoiar em toda a minha trajetória. De forma mais pessoal, gostaria de agradecê-la por por todas as vezes que me corrigiu, me direcionou e por sempre acreditar em mim e no nosso projeto, mais ainda por me fazer entender a importância de cada etapa do processo até aqui. Obrigada por compreender os momentos onde estive mais fragilizada e por comemorar comigo cada pequena conquista.

Agradeço à Universidade Federal do ABC, mais especificamente ao Centro de Matemática, Computação e Cognição, por todas as oportunidades de desenvolvimento pessoal e profissional. As experiências acumuladas ao longo desse período, além de imensa importância e relevância para a profissional que irei me tornar, serão guardadas para sempre em meu coração. Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço aos meus amigos e colegas que, direta ou indiretamente, contribuiram com o desenvolvimento deste trabalho, gostaria de completar dizendo que o que sou hoje carrega muito do que aprendi e vivenciei com vocês. Não citarei nomes para não correr o risco de esquecer alguém.

Agradeço ao meu marido por sempre me apoiar, empoderar e acreditar em todos os meus sonhos. Obrigada por me permitir ser amada e, mais importante, me fazer sentir amada todos os dias.

Agradeço à minha família por todo apoio e esforço para que eu chegasse até aqui. Em especial agradeço aos meus pais e irmãos por sempre me incentivarem a fazer o que me faz feliz, me apoiar em cada decisão e por me amarem incondicionalmente.

Em especial, agradeço a Deus por sempre abençoar minha vida.

RESUMO

Em 1980, assumindo o Axioma de Martin, van Douwen construiu um grupo booleano enumeravelmente compacto sem sequências não triviais convergentes e mostrou (em ZFC) que um tal grupo possui dois subgrupos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto. Nas décadas seguintes, assumindo hipóteses adicionais a ZFC, muitas outras construções de grupos enumeravelmente compactos sem sequências não triviais convergentes foram apresentadas, até que, em 2020, Hrušàk et al. obtiveram um tal grupo em ZFC, resolvendo um dos principais problemas em aberto da área. Nesta dissertação, começamos estudando o trabalho de van Douwen e seguimos explorando outras construções de grupos enumeravelmente compactos sem sequências não triviais convergentes que assumem hipóteses cada vez mais fracas, até, finalmente, apresentarmos a construção em ZFC.

Palavras-chave: compacidade enumerável; grupos topológicos; Axioma de Martin; ultrafiltros seletivos; ZFC

ABSTRACT

In 1980, assuming Martin's Axiom, van Douwen constructed a countably compact Boolean group without non-trivial convergent sequences and showed (in ZFC) that such a group has two countably compact subgroups whose product is not countably compact. In the following decades, assuming additional hypotheses to ZFC, many other constructions of countably compact groups without non-trivial convergent sequences were presented, until, in 2020, Hrušàk et al. obtained such a group in ZFC, solving one of the main open problems in the area. In this dissertation, we start by studying van Douwen's work and continue exploring other constructions of countably compact groups without non-trivial convergent sequences that assume increasingly weak hypotheses, until, finally, we present the construction in ZFC.

Keywords: countably compactness; topological groups; Martin's Axiom; selective ultrafilters; ZFC

CONTEÚDO

Introdução 1
1 Notações e resultados preliminares 3
1.1 Teoria dos conjuntos 3
1.2 Topologia geral 5
1.3 Grupos topológicos 9
2 A técnica de van Douwen 13
3 Construções assumindo alguma versão de MA 17
3.1 O Axioma de Martin 17
3.2 A construção de van Douwen 19
3.3 A construção de Koszmider, Tomita e Watson 26
4 Construção assumindo a existência de um ultrafiltro seletivo 35
4.1 Ultraprodutos 35
4.2 Ultrafiltros seletivos 37
4.3 A construção de García-Ferreira, Tomita e Watson 39
5 Construção em ZFC 47
6 Considerações finais 57
Referências Bibliográficas 58

INTRODUÇÃO

Um dos resultados mais célebres da Topologia Geral é o Teorema de Tychonoff, que estabelece a produtividade da compacidade no âmbito dos espaços topológicos. Uma pergunta que surge naturalmente é se outras noções de compacidade, como a compacidade enumerável e a pseudocompacidade, também são preservadas por produtos.

Em 1952, Terasaka [21], seguido por Novák [18] em 1953 construíram dois espaços topológicos enumeravelmente compactos cujo produto não é pseudocompacto.[1] Todavia, em 1966, Comfort e Ross [4] mostraram que um produto qualquer de grupos topológicos pseudocompactos é pseudocompacto. Isto motivou Comfort [3] a perguntar:

Pergunta 1. *Existem dois grupos topológicos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto?*

A primeira resposta para essa pergunta foi dada por van Douwen [5] em 1980. Ele fez isso em duas etapas:

- Em ZFC, ele mostrou que todo grupo booleano enumeravelmente compacto sem sequências não triviais convergentes contém dois subgrupos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto.
- Usando o Axioma de Martin (MA), ele construiu um subgrupo enumeravelmente compacto de $2^{\mathfrak{c}}$ sem sequências não triviais convergentes.

Neste sentido, surge a seguinte pergunta:

Pergunta 2. *Existe, em ZFC, um grupo topológico enumeravelmente compacto sem sequências não triviais convergentes?*

O Teorema de Ivanovskij-Kuz'minov [15] diz que todo grupo topológico compacto é um espaço diádico (a saber, imagem por uma aplicação contínua de 2^{κ} para algum cardinal κ) e disto segue que todo grupo topológico compacto infinito possui uma sequência não trivial convergente. Em 1969, Sirota [20] estabeleceu (em ZFC) a existência de um grupo topológico pseudocompacto infinito sem sequências não triviais convergentes.

1 Dizemos que um espaço topológico X é *pseudocompacto* se toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada.

O primeiro exemplo de grupo topológico enumeravelmente compacto sem sequências não triviais convergentes foi construído por Hajnal e Juhász [8] em 1976 assumindo CH. Ao assumir MA para ordens parciais enumeráveis, Hart e van Mill [9] e Tomita [23] obtiveram, respectivamente, um grupo topológico enumeravelmente compacto (com sequências não triviais convergentes) cujo quadrado não é enumeravelmente compacto e um grupo topológico cujo quadrado é enumeravelmente compacto, mas o cubo não. Essas construções melhoram o exemplo obtido por van Douwen [5] sob MA.

Em 2000, ainda assumindo MA para ordens parciais enumeráveis, Koszmider, Tomita e Watson [12] mostraram que é possível munir o grupo abeliano livre de tamanho $\mathfrak{c}$ de uma topologia que o torna um grupo topológico enumeravelmente compacto sem sequências não triviais convergentes.

Em 2005, Garcia-Ferreira, Tomita e Watson [7] assumiram a existência de um ultrafiltro seletivo p sobre ω para construir um grupo topológico p-compacto (e, consequentemente, enumeravelmente compacto) sem sequências não triviais convergentes.

Muitos outros resultados foram obtidos nas últimas décadas até que, em 2020, Hrušàk et al. [11] construíram em ZFC um subgrupo infinito de $2^{\mathfrak{c}}$, enumeravelmente compacto e sem sequências não triviais convergentes e, usando o resultado de van Douwen, obtiveram dois grupos topológicos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto.

Nesta dissertação, começamos estudando o trabalho de van Douwen e seguimos explorando outras construções de grupos enumeravelmente compactos sem sequências não triviais convergentes que assumem hipóteses cada vez mais fracas, até, finalmente, apresentarmos a construção em ZFC.

Este trabalho é composto por seis capítulos. O primeiro deles é destinado a estabelecer notações e resultados preliminares utilizados no decorrer do texto. No segundo, explicamos como van Douwen [5] obteve dois grupos topológicos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto a partir de um grupo booleano enumeravelmente compacto sem sequências não triviais convergentes. No terceiro capítulo apresentamos as construções de van Douwen [5] e de Koszmider, Tomita e Watson [12], as quais dependem de alguma versão do Axioma de Martin. No quarto capítulo estudamos a construção proposta por Garcia-Ferreira, Tomita e Watson [7], assumindo a existência de um ultrafiltro seletivo. No quinto capítulo exploramos a recente construção em ZFC proposta por Hrušàk et al. [11]. Por fim, o sexto capítulo traz as considerações finais deste trabalho.

1 NOTAÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é apresentar definições que auxiliem a leitura do texto, bem como enunciar resultados que serão utilizados adiante e firmar algumas notações. As principais referências são [27], [6], [10] e [13].

1.1 TEORIA DOS CONJUNTOS

Denotaremos a cardinalidade do contínuo por $\mathfrak{c}$ ou, ainda, por 2^ω.

Dado um conjunto S, escrevemos

$$[S]^{<\omega} = \{I \subseteq S : |I| < \omega\} \text{ e } [S]^\omega = \{I \subseteq S : |I| = \omega\}.$$

Definição 1.1. *Dizemos que uma família infinita $\mathcal{A}$ de subconjuntos infinitos de ω é uma* família quase disjunta *se $A \cap B$ é finito, quaisquer que sejam $A, B \in \mathcal{A}$ distintos.*

Proposição 1.2. *Existe uma família quase disjunta de tamanho $\mathfrak{c}$.*

Demonstração. Basta exibirmos uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos infinitos de $2^{<\omega}$ que tem cardinalidade $\mathfrak{c}$ e é tal que a intersecção de quaisquer dois elementos distintos de $\mathcal{A}$ é finita.

Para cada $f \in 2^\omega$, seja $A_f = \{f{\restriction}_n : n \in \omega\}$. Se $f, g \in 2^\omega$ são diferentes, então existe $n \in \omega$ tal que $f(n) \neq g(n)$ e, portanto, se $m \in \omega$ é tal que $f{\restriction}_m = g{\restriction}_m$, então $m < n$. Logo, $A_f \cap A_g$ é finito. Assim, $\{A_f : f \in 2^\omega\}$ é uma família de subconjuntos infinitos de $2^{<\omega}$ que tem cardinalidade $\mathfrak{c}$ e é tal que $A_f \cap A_g$ é finito para quaisquer $f, g \in 2^\omega$ distintos. □

Definição 1.3. *Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{A}$ forma um* Δ-sistema *se existe um conjunto R (denominado a* raiz *do Δ-sistema) tal que $A \cap B = R$, quaisquer que sejam $A, B \in \mathcal{A}$ distintos.*

A seguinte proposição é conhecida como Lema do Δ-sistema.

Proposição 1.4. *Se $\mathcal{A}$ é uma família não enumerável de conjuntos finitos, então existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ não enumerável que forma um Δ-sistema.*

Demonstração. Como $|\mathcal{A}| > \omega$, podemos supor sem perda de generalidade que existe $n \in \omega$ tal que $|A| = n$ para cada $A \in \mathcal{A}$. Vamos provar o resultado por indução em n.

No caso em que $n = 1$, perceba que dados $A, B \in \mathcal{A}$ tais que $A \neq B$ então $A \cap B = \emptyset$ e, portanto, temos o resultado para $\Delta = \emptyset$.

Agora, suponha que o resultado vale para $n - 1$ e mostremos que vale para n. Vamos considerar dois casos:

Caso 1: Existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $\{A \in \mathcal{A} : A_0 \cap A \neq \emptyset\}$ é não enumerável.

Neste caso, existe $a \in A_0$ tal que $\mathcal{A}_a = \{A \in \mathcal{A} : a \in A\}$ é não enumerável. Em particular, temos que $\mathcal{A}'_a = \{A \setminus \{a\} : A \in \mathcal{A}_a\}$ é uma família de conjuntos não enumeráveis de tamanho $n - 1$ e, por hipótese de indução, contém um Δ-sistema não enumerável $\mathcal{G}$ de raiz Δ. Dessa forma, $\mathcal{B} = \{G \cup \{a\} : G \in \mathcal{G}\}$ forma um Δ-sistema de raiz $\Delta \cup \{a\}$.

Caso 2: Para cada $A \in \mathcal{A}$ o conjunto $S_A = \{B \in \mathcal{A} : A \cap B \neq \emptyset\}$ é no máximo enumerável.

Neste caso, vamos construir, por indução transfinita, uma sequência injetora $\{A_{\xi_\alpha} : \alpha < \omega_1\}$ de subconjuntos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos. Dado $a \in A_0$, note que existe $\xi < \omega_1$ tal que $a \notin A_\eta$ para todo $\eta \geq \xi$. Repetindo esse processo, como A_0 é finito, existe $\xi_0 < \omega_1$ tal que $A_0 \cap A_\eta = \emptyset$ para todo $\eta \geq \xi_0$. Por um argumento análogo, existe $\xi_1 < \omega_1$ tal que $A_{\xi_1} \cap A_\eta = \emptyset$ para todo $\eta \geq \xi_1$. De modo geral, para $\alpha < \omega_1$ ordinal limite, definimos $\xi_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \xi_\beta < \omega_1$ e, no caso de um ordinal sucessor, repetimos o processo anterior. Perceba que isso pode ser feito pois para cada $\xi < \omega_1$ o conjunto

$$\{B \in \mathcal{A} : B \cap A_\zeta \neq \emptyset \text{ para algum } \zeta < \xi\} = \bigcup_{\zeta<\xi} S_{A_\zeta}$$

é no máximo enumerável. Dessa forma, $\mathcal{B} = \{A_{\xi_\alpha} : \alpha < \omega_1\}$ é um Δ-sistema de raiz $\Delta = \emptyset$. □

Agora, iremos definir as noções de filtro e ultrafiltro que aparecem nos Capítulos 4 e 5.

Definição 1.5. *Seja X um conjunto não vazio. Dizemos que $\mathcal{F} \subseteq \wp(X)$ é um* filtro *sobre X se as seguintes condições estão satisfeitas:*

(1) $X \in \mathcal{F}$ e $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(2) se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$;

(3) se $A \in \mathcal{F}$ e $B \subseteq X$ são tais que $A \subseteq B$, então $B \in \mathcal{F}$.

Exemplo 1.6. *(i) Se X é um conjunto não vazio e $a \in X$, então $\mathcal{F}_a = \{A \subseteq X : a \in A\}$ é um filtro sobre X.*

(ii) Se X é um conjunto infinito, então $\mathcal{F}_F = \{A \subseteq X : X \setminus A$ é finito$\}$ é um filtro sobre X, denominado filtro cofinito *(ou, ainda,* filtro de Fréchet*).*

Definição 1.7. *Dizemos que uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um conjunto X possui a* propriedade da intersecção finita *se, para qualquer $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$ finito e não vazio, temos que $\bigcap \tilde{\mathcal{A}} \neq \emptyset$.*

Note que toda família de subconjuntos de um conjunto X que goza da propriedade da intersecção finita gera um filtro sobre X — a saber, se $\mathcal{A}$ é uma família de subconjuntos de X com esta propriedade, temos que

$$\mathcal{F} = \left\{A \subseteq X : \text{ existe } \tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A} \text{ finito e não vazio tal que } \bigcap \tilde{\mathcal{A}} \subseteq A\right\}$$

é o filtro gerado por $\mathcal{A}$.

Definição 1.8. *Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{F}$ um filtro sobre X.*

(1) Dizemos que $\mathcal{F}$ é livre *se $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Caso contrário, dizemos que $\mathcal{F}$ é* principal.

(2) Dizemos que $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro *se $\mathcal{F}$ não está contido propriamente num outro filtro sobre X — ou, equivalentemente, se para cada $A \subseteq X$, ou $A \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Um ultrafiltro sobre X é principal se, e somente se, é da forma $\mathcal{F}_a$ para algum $a \in X$. Além disso, um ultrafiltro sobre X é livre se, e somente se, contém o filtro cofinito.

Segue do Lema de Kuratowski-Zorn que todo filtro pode ser estendido a um ultrafiltro.

Denotaremos por ω^* a coleção dos ultrafiltros livres sobre ω.

1.2 TOPOLOGIA GERAL

No que segue, cometeremos, muitas vezes, o abuso de notação de escrever simplesmente X, ao invés de (X, τ), para denotar o espaço topológico constituído do conjunto X e da topologia τ.

Definição 1.9. *Dizemos que um espaço topológico X é T_1 se, para quaisquer $x \in X$ e $y \in X$ distintos, existem $U \subseteq X$ e $V \subseteq X$ abertos tais que $x \in U$, $y \in V$, $x \notin V$ e $y \notin U$.*

Proposição 1.10. *Seja X um espaço topológico. Então X é T_1 se, e somente se, $\{x\}$ é fechado em X, qualquer que seja $x \in X$.*

Definição 1.11. *Dizemos que um espaço topológico X é* de Hausdorff, *ou T_2, se, para quaisquer $x \in X$ e $y \in X$ distintos, existem $U \subseteq X$ e $V \subseteq X$ abertos tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Definição 1.12. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é T_3 se, para cada $x \in X$ e para cada $F \subseteq X$ fechado tais que $x \notin F$, existem $U \subseteq X$ e $V \subseteq X$ abertos disjuntos tais que $x \in U$ e $F \subseteq V$. Ainda, dizemos que um espaço topológico X é* regular *se X é T_1 e T_3.*

Proposição 1.13. *Seja X um espaço topológico. Então X é T_3 se, e somente se, para todo $x \in X$ e para toda vizinhança aberta U de x, existe V vizinhança aberta de x tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Definição 1.14. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é* compacto *se toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita, onde por cobertura aberta de X deve-se entender uma coleção $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de subconjuntos abertos de X tais que $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ e por possui subcobertura finita deve-se entender que existe $\tilde{A} \subseteq A$ finito tal que $X = \bigcup_{\alpha \in \tilde{A}} U_\alpha$.*

Proposição 1.15. *Se X é um espaço topológico, então as seguintes condições são equivalentes:*

(1) X é compacto;

(2) se $\mathcal{F}$ é uma família de subconjuntos fechados de X que satisfaz a propriedade da intersecção finita, então $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Definição 1.16. *Sejam X um espaço topológico, $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de pontos de X e $A \subseteq X$.*

(1) Dizemos que $x \in X$ é um ponto de acumulação da sequência *$(x_n)_{n\in\omega}$ se, para cada vizinhança aberta U de x, $\{m \in \omega : x_m \in U\}$ é infinito.*

(2) Dizemos que $x \in X$ é um limite da sequência *$(x_n)_{n\in\omega}$ (ou, ainda, que $(x_n)_{n\in\omega}$* converge para *x) se para cada vizinhança aberta U de x o conjunto $\{m \in \omega : x_m \in U\}$ é cofinito.*

(3) Dizemos que $x \in X$ é um ponto de acumulação de *A se, para cada vizinhança aberta U de x, $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.*

*(4) Dizemos que $x \in X$ é um ω-*ponto de acumulação de *A se, para cada vizinhança aberta U de x, $|A \cap U| \geq \omega$.*

Definição 1.17. *Dizemos que um espaço topológico X é* enumeravelmente compacto *se alguma das seguintes condições equivalentes vale:*

(1) Toda cobertura aberta enumerável de X admite subcobertura finita.

(2) Toda sequência de pontos de X possui um ponto de acumulação.

(3) Todo subconjunto infinito de X possui um ω-ponto de acumulação.

Note que, se X é T_1, então X é enumeravelmente compacto se, e somente se, todo subconjunto infinito de X possui um ponto de acumulação.

Proposição 1.18. *Se X é um espaço topológico, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) X é enumeravelmente compacto;

(ii) se $\{F_n : n \in \omega\}$ é uma família de subconjuntos fechados de X que satisfaz a propriedade da intersecção finita, então $\bigcap_{n\in\omega} F_n \neq \emptyset$.

Proposição 1.19. *Se X é um espaço topológico enumeravelmente compacto, então todo subconjunto fechado de X é enumeravelmente compacto.*

A seguinte definição foi introduzida em [1] e está fortemente ligada à noção de compacidade enumerável.

Definição 1.20. *Sejam p um ultrafiltro sobre ω e $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de pontos de um espaço topológico X. Dizemos que $x \in X$ é* p-limite *de $(x_n)_{n\in\omega}$ se para cada vizinhança aberta U de x, $\{n \in \omega : x_n \in U\} \in p$. Neste caso, escrevemos $x = p\text{-}\lim\{x_n : n \in \omega\}$.*

Observe que, se p é o ultrafiltro principal gerado por m, ou seja, $p = \{A \subseteq \omega : m \in A\}$, então x é p-limite da sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ se, e somente se, toda vizinhança aberta U de x contém o ponto x_m. Em particular, se X é T_1, então x_m é o único p-limite de $(x_n)_{n\in\omega}$. Isso faz com que a definição de p-limite se torne mais interessante se consideramos p livre, já que neste caso, se x é limite da sequência $(x_n)_{n\in\omega}$, então x também é p-limite de $(x_n)_{n\in\omega}$.

Ainda, é importante ressaltar que, se X é de Hausdorff, então toda sequência de pontos de X tem no máximo um p-limite.

Proposição 1.21. *Se $p \in \omega^*$ e $\{X_i : i \in I\}$ é uma família de espaços topológicos, então $y = (y_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I} X_i$ é p-limite da sequência $((x_i^n)_{i\in I})_{n\in\omega} \subseteq \Pi_{i\in I} X_i$ se, e somente se, $y_i = p\text{-}\lim\{x_i^n : n \in \omega\}$ para todo $i \in I$.*

Demonstração. Suponha que $y = p\text{-}\lim\{(x_i^n)_{i\in I} : n \in \omega\}$ e considere $j \in I$. Se V_j é uma vizinhança de y_j em X_j, então $\{n \in \omega : x_j^n \in V_j\} = \{n \in \omega : (x_i^n)_{i\in I} \in V\}$, onde $V = \Pi_{i\in I} V_i$ e $V_i = X_i$ para todo $i \in I \setminus \{j\}$. Logo, $y_j = p\text{-}\lim\{x_j^n : n \in \omega\}$.

Reciprocamente, suponha que $y_i = p\text{-}\lim\{x_i^n : n \in \omega\}$ para todo $i \in I$. Seja $V = \Pi_{i\in I} V_i$ um aberto básico não trivial de $\Pi_{i\in I} X_i$ tal que $y = (y_i)_{i\in I} \in V$. Note que o conjunto $F = \{i \in I : V_i \neq X_i\}$ é um subconjunto finito de I e, portanto, $\{n \in \omega : (x_i^n)_{i\in I} \in V\} = \bigcap_{i\in F}\{n \in \omega : x_i^n \in V_i\} \in p$. □

Proposição 1.22. *Sejam X um espaço topológico, $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de pontos de X e $x \in X$. Temos que x é ponto de acumulação de $(x_n)_{n\in\omega}$ se, e somente se, existe $p \in \omega^*$ tal que $x = p\text{-}\lim\{x_n : n \in \omega\}$.*

Demonstração. Se x é ponto de acumulação de $(x_n)_{n\in\omega}$, então para cada vizinhança aberta U de x, o conjunto $A_U = \{m \in \omega : x_m \in U\}$ é infinito e a família $\mathcal{F} = \{A_U : U$ é uma vizinhança aberta de $x\}$ é tal que se U e V são vizinhanças abertas de x, então $A_U \cap A_V = A_{U\cap V}$ e, consequentemente, está contida em algum ultrafiltro $p \in \omega^*$. Portanto, $x = p\text{-}\lim\{x_n : n \in \omega\}$.

Reciprocamente, se existe $p \in \omega^*$ tal que $x = p\text{-}\lim\{x_n : n \in \omega\}$, temos que para cada vizinhança aberta U de x o conjunto $\{m \in \omega : x_m \in U\} \in p$ e, portanto, é infinito. Logo, x é ponto de acumulação de $(x_n)_{n\in\omega}$. □

O seguinte resultado decorre imediatamente da Definição 1.17 e da Proposição 1.22.

Corolário 1.23. *Um espaço topológico X é enumeravelmente compacto se, e somente se, toda sequência de pontos de X possui p-limite, para algum $p \in \omega^*$.*

Definição 1.24. *Seja $p \in \omega^*$. Um espaço topológico X é dito* p-compacto *se toda sequência de pontos de X possui p-limite.*

É imediato que todo espaço p-compacto é enumeravelmente compacto. No entanto, como pode ser visto em [25], a recíproca dessa afirmação não é verdadeira, uma vez que a p-compacidade é preservada sob produtos arbitrários, e o mesmo não ocorre com a compacidade enumerável. Consequentemente, existem espaços enumeravelmente compactos que não são p-compactos para nenhum $p \in \omega^*$.

1.3 GRUPOS TOPOLÓGICOS

Definição 1.25. *Um* grupo *é uma quádrupla* $(G, \cdot, ^{-1}, e)$*, sendo* G *um conjunto,* $\cdot$ *uma operação binária sobre* G*,* $^{-1}$ *uma operação unária sobre* G *e* $e \in G$*, satisfazendo, para quaisquer* $x, y, z \in G$*, as seguintes condições:*

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
2. $x \cdot e = e \cdot x = x$;
3. $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Dizemos que G é um grupo *abeliano* quando $x \cdot y = y \cdot x$ para quaisquer $x, y \in G$. Ainda, dizemos que G é um grupo *booleano* se todo $x \in G$ é de ordem 2, isto é, $x \cdot x = e$. Note que se G é booleano, então G é abeliano.

No que segue, cometeremos o abuso de notação de escrever, simplesmente, G para denotar o grupo $(G, \cdot, ^{-1}, e)$. Além disso, quando o grupo considerado for abeliano, representaremos por $+$ a sua operação binária, por $-$ a sua operação unária e por 0 o seu elemento neutro e, além de abreviar $x + (-y)$ por $x - y$. Por fim, gostariamos de ressaltar que a operação $\cdot$ será frequentemente omitida deste ponto em diante.

Definição 1.26. *Um* grupo topológico *é um grupo* G *munido de uma topologia que torna contínuas tanto a sua operação binária* $(x, y) \mapsto x \cdot y$ *quanto a sua operação unária* $x \mapsto x^{-1}$.

Exemplo 1.27.

- $2 = \{0, 1\}$ *munido da operação* $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$ *e* $1 + 1 = 0$ *e da topologia discreta é um grupo topológico;*
- $\mathbb{R}$ *munido da adição e topologia usuais, bem como seu subgrupo* $\mathbb{Z}$ *munido da topologia de subespaço, são exemplos de grupos topológicos;*
- $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *munido da multiplicação e com a topologia herdada de* $\mathbb{C}$ *é um grupo topológico;*
- *o grupo quociente* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *munido da topologia quociente também é um grupo topológico, o qual é topologicamente isomorfo a* $\mathbb{T}$ *munido da multiplicação e topologia usuais.*

Não é dificil demonstrar os seguintes resultados.

Proposição 1.28. *Todo subgrupo de um grupo topológico munido da topologia induzida é um grupo topológico.*

Proposição 1.29. *Sejam G um grupo e $\{H_i : i \in I\}$ uma família de grupos topológicos. Para cada $i \in I$, seja $\phi_i : G \to H_i$ um homomorfismo de grupos. Temos que a topologia fraca induzida pela família $\{\phi_i : i \in I\}$ (isto é, a topologia gerada pelos conjuntos da forma $\phi_i^{-1}[A]$ onde $i \in I$ e A é um subconjunto aberto de H_i) torna G um grupo topológico. Ainda, se cada H_i é de Hausdorff e para cada $g \in G$ existe $i \in I$ tal que $\phi_i(g) \neq e_i$ (onde e_i é o elemento neutro de H_i), então a topologia em questão é de Hausdorff.*

Como caso particular da proposição anterior, temos que o produto de grupos topológicos é um grupo topológico com a topologia produto. Em particular, dados α um ordinal e G um grupo topológico, o grupo G^α munido da topologia produto é um grupo topológico.

Dado um grupo topológico G, para cada elemento $g \in G$ definimos a *translação à esquerda associada ao elemento g* como a função $t_g : G \to G$ dada por $t_g(x) = gx$ para todo $x \in G$. Note que t_g é contínua e que a translação à esquerda $t_{g^{-1}}$ é a inversa de t_g. Logo, t_g é um homeomorfismo. De forma análoga, podemos definir *translações à direita*.

Proposição 1.30. *Se G é um grupo topológico, então G é homogêneo (isto é, dados $x, y \in G$ existe um homeomorfismo $f : G \to G$ tal que $f(x) = y$).*

Demonstração. Sendo t_g a translação à esquerda de G com $g = yx^{-1}$, temos que $t_g(x) = (yx^{-1})x = y(x^{-1}x) = ye = y$. □

Dados G um grupo topológico, $x \in G$ e $U \subseteq G$, denotaremos o conjunto $t_x[U]$ por xU. Perceba que, se U é aberto em G, então xU é aberto para cada $x \in G$.

Além disso, se A e B são subconjuntos de G, escreveremos AB para denotar o conjunto $\{ab : a \in A \text{ e } b \in B\}$ e A^{-1} para denotar o conjunto $\{a^{-1} : a \in A\}$. Ainda, abreviaremos AA por A^2.

O seguinte resultado nos permite concluir que, na classe dos grupos topológicos, a propriedade T_1 implica regularidade.

Proposição 1.31. *Sejam G um grupo topológico e e o elemento neutro de G. Se $\{e\}$ é fechado em G, então G é regular.*

Demonstração. Como as translações à esquerda são homeomorfismos, temos que G é T_1. Ainda, como G é homogêneo, para concluir que G é T_3 basta verificar que, dada uma vizinhança aberta de e, é possível encontrar uma segunda vizinhança aberta de e cujo fecho está contido na primeira.

Para tanto, seja U uma vizinhança aberta de e em G. Pela continuidade da multiplicação, existe V uma vizinhança aberta de e em G tal que $V^2 \subseteq U$. Temos que $W = V \cap V^{-1}$ é uma vizinhança aberta de e tal que $W = W^{-1}$. Vamos mostrar que $\overline{W} \subseteq U$. De fato, seja $x \in \overline{W}$. Como xW é uma vizinhança aberta de x, temos que $xW \cap W \neq \emptyset$. Escolha $a, b \in W$ tal que $xa = b$ e note que $x = ba^{-1} \in WW^{-1} = W^2 \subseteq V^2 \subseteq U$. $\square$

Lema 1.32. *Se G é um grupo topológico e $x \in G$ é um ponto isolado (isto é, $\{x\}$ é aberto em G), então G é discreto.*

Demonstração. Seja $x \in G$ um ponto isolado. Pela Proposição 1.30, dado qualquer $y \in G$ existe um homeomorfismo $f : G \to G$ tal que $f(x) = y$. Dessa forma, y é um ponto isolado e, portanto, G é discreto. $\square$

Proposição 1.33. *Sejam G um grupo topológico e $p \in \omega^*$. Se $(x_n)_{n\in\omega}$ e $(y_n)_{n\in\omega}$ são sequências de pontos de G e $x, y \in G$ são tais que $x = p\text{-}\lim\{x_n : n \in \omega\}$ e $y = p\text{-}\lim\{y_n : n \in \omega\}$, então $x \cdot y = p\text{-}\lim\{x_n \cdot y_n : n \in \omega\}$.*

Demonstração. Seja V uma vizinhança aberta de $x \cdot y$ em G. Como $\cdot : G \times G \to G$ é contínua, temos que $\cdot^{-1}[V]$ é aberto em $G \times G$. Assim, existem abertos V_x e V_y de G tais que $x \in V_x$, $y \in V_y$ e $V_x \times V_y \subseteq \cdot^{-1}[V]$ e, portanto, $V_x \cdot V_y \subseteq V$. Como $x = p\text{-}\lim\{x_n : n \in \omega\}$ e $y = p\text{-}\lim\{y_n : n \in \omega\}$, temos que $A_x = \{n \in \omega : x_n \in V_x\}$ e $A_y = \{n \in \omega : y_n \in V_y\}$ são elementos de p. Disto segue que $\{n \in \omega : x_n \cdot y_n \in V\} \supseteq \{n \in \omega : x_n \cdot y_n \in V_x \cdot V_y\} \supseteq A_x \cap A_y \in p$ e, portanto, $x \cdot y = p\text{-}\lim\{x_n \cdot y_n : n \in \omega\}$. $\square$

2 A TÉCNICA DE VAN DOUWEN

Neste capítulo apresentaremos a técnica proposta por van Douwen [5] para obter dois grupos topológicos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto. Essa técnica pressupõe a existência de um grupo infinito, booleano, enumeravelmente compacto e sem sequências não triviais convergentes, isto é, um *grupo de van Douwen*.

Nos próximos capítulos iremos descrever algumas das construções de grupos de van Douwen que surgiram nas últimas décadas. No entanto, dado o objetivo deste capítulo, iremos assumir a partir de agora a existência de um tal grupo.

Lema 2.1. *Se E é um grupo topológico infinito, regular*[1] *e enumeravelmente compacto, então* $|E| \geq \mathfrak{c}$.

Demonstração. Sendo E infinito, existem $x_0, y_0 \in E$ tais que $x_0 \neq y_0$. Como E é regular, existem $U_0, U_1 \subseteq E$ abertos tais que $x_0 \in U_0$, $x_1 \in U_1$ e $\overline{U}_0 \cap \overline{U}_1 = \emptyset$.

Tanto U_0 quanto U_1 possuem pelo menos dois pontos distintos, pois caso contrário o grupo E possuiria um ponto isolado e, pelo Lema 1.32, E seria discreto, uma contradição com o fato de que E é enumeravelmente compacto e infinito.

Podemos repetir, para os abertos U_0 e U_1, o mesmo argumento apresentado acima e obter $U_{00}, U_{01} \subseteq U_0$ e $U_{10}, U_{11} \subseteq U_1$ abertos em E tais que $\overline{U}_{00} \cap \overline{U}_{01} = \emptyset, \overline{U}_{10} \cap \overline{U}_{11} = \emptyset, \overline{U}_{00} \cup \overline{U}_{01} \subseteq \overline{U}_0$ e $\overline{U}_{10} \cup \overline{U}_{11} \subseteq \overline{U}_1$.

Note que repetindo, recursivamente, os mesmos argumentos obtemos 2^ω cadeias de fechados $E \supseteq \overline{U_{f_1}} \supseteq ... \supseteq \overline{U_{f_n}} \supseteq ...$, onde $f_n : n \to \{0,1\}$ para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ e, para $m < n$, $f_m = f_n\restriction_m$.

Como E é enumeravelmente compacto temos, pela Proposição 1.18, que cada uma dessas cadeias tem intersecção não vazia. Tomando um ponto em cada uma dessas

1 Estamos assumindo que todos os espaços topológicos considerados neste texto são de Hausdorff. Logo, segue da Proposição 1.31 que todos os grupos topológicos considerados neste texto são regulares. Optamos por incluir explicitamente esta hipótese no enunciado para destacar o seu papel na demonstração desse resultado.

interseções temos, por construção, que esses pontos são dois a dois distintos. Logo, existem pelo menos $\mathfrak{c}$ pontos em E. $\square$

Lema 2.2. *Se E é um grupo topológico infinito, regular, enumeravelmente compacto e sem sequências não triviais convergentes, então todo subconjunto infinito enumerável de E admite pelo menos $\mathfrak{c}$ pontos de acumulação.*

Demonstração. Seja $X = \{x_n : n \in \omega\}$ um subconjunto infinito enumerável de E indexado injetivamente. Como E é enumeravelmente compacto, temos que X possui pelo menos um ponto de acumulação em E. Se este ponto de acumulação fosse único, teríamos uma sequência não trivial convergente em E, contradizendo a hipótese.[2]

Dessa forma, X possui pelo menos dois pontos de acumulação distintos em E. Usando a regularidade de E, podemos separar esses pontos por abertos disjuntos U_0 e U_1 de modo que seus fechos ainda sejam disjuntos. Cada um desses abertos determina um subconjunto infinito enumerável de X dado por $(X \setminus \{x_0\}) \cap U_i$, onde $i < 2$.

Note que cada um desses subconjuntos possui, pelos mesmos argumentos apresentados acima, ao menos dois pontos de acumulação distintos e, portanto, podemos tomar $U_{i0}, U_{i1} \subseteq U_i$ abertos em X tais que $\overline{U}_{i0} \cap \overline{U}_{i1} = \emptyset, (X \setminus \{x_0, x_1\}) \cap U_i \cap U_{i0}$ e $(X \setminus \{x_0, x_1\}) \cap U_i \cap U_{i1}$ são infinitos.

Repetindo, recursivamente, os mesmos argumentos, para cada $s \in 2^\omega$ e $n \in \omega \setminus \{0\}$ podemos definir $X_{s\restriction_n} = (X \setminus \{x_0, \dots, x_{n-1}\}) \cap U_{s\restriction_1} \cap \dots \cap U_{s\restriction_n}$. Como E é enumeravelmente compacto, temos que $\bigcap_{n\in\omega\setminus\{0\}} \overline{X_{s\restriction_n}} \neq \emptyset$. Fixemos $y_s \in \bigcap_{n\in\omega\setminus\{0\}} \overline{X_{s\restriction_n}}$, que é um ponto de acumulação de X.

Iremos mostrar que se $r, s \in 2^\omega$ são distintos, então $y_r \neq y_s$. De fato, se $s \neq r$, existe $m \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $s(m) \neq r(m)$. Tome o menor m com essa propriedade. Por construção, temos que $\overline{U_{s\restriction_{m+1}}} \cap \overline{U_{r\restriction_{m+1}}} = \emptyset$. Dessa forma, $y_r \neq y_s$. Portanto, X admite pelo menos $\mathfrak{c}$ pontos de acumulação. $\square$

Procederemos à apresentação da técnica citada acima.

Lema 2.3. *Se E é um grupo de van Douwen, então existem subgrupos enumeravelmente compactos E_0 e E_1 de E tais que $|E_0 \cap E_1| = \omega$.*

2 Se $x \in E$ fosse o único ponto de acumulação de X, então a sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ convergiria para x. De fato, se $(x_n)_{n\in\omega}$ não convergisse para x, existiria uma vizinhança aberta U de x tal que, para cada $N \in \omega$, seria possível encontrar $n_N > N$ de modo que $x_{n_N} \notin U$. Considere $Y = \{x_{n_N} : N \in \omega\} \subseteq X$. Como E é enumeravelmente compacto, Y admite um ponto de acumulação $y \in E$. Note que $y \neq x$, pois x não é ponto de acumulação de Y. Portanto, X teria pelo menos dois pontos de acumulação — a saber, x e y.

Demonstração. Defina recursivamente a seguinte coleção $\{\sigma_\alpha : \alpha \leq \mathfrak{c}\}$ de ordinais:

$$\sigma_\alpha = \begin{cases} \omega, \text{ se } \alpha = 0 \\ \sigma_\beta + |\sigma_\beta|, \text{ se } \alpha = \beta + 1 \\ \sup_{\lambda < \alpha} \sigma_\lambda, \text{ se } \alpha \text{ é ordinal limite.} \end{cases}$$

Note que, se $\alpha < \mathfrak{c}$, então $\sigma_\alpha < \mathfrak{c}$ e $\sigma_\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Dado que $\sigma_\mathfrak{c} = \mathfrak{c} = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \sigma_\alpha$, podemos tomar uma enumeração $\{I_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ do conjunto $[\mathfrak{c}]^\omega$ tal que, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, $I_\alpha \subseteq \sigma_\alpha$.

Vamos construir duas sequências transfinitas estritamentes crescentes $\{E_{0,\alpha} : \alpha < \mathfrak{c}\}$ e $\{E_{1,\alpha} : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de subgrupos de E. Indexaremos cada $E_{i,\alpha}$ como $E_{i,\alpha} = \{y_{i,\xi} : \xi < \sigma_\alpha\}$, e garantiremos que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(1) se $\xi < \eta < \sigma_\alpha$, então $y_{i,\xi} \neq y_{i,\eta}$ ($i < 2$, $\alpha \leq \mathfrak{c}$);

(2) $E_{0,\alpha} \cap E_{1,\alpha} = E_{0,0}$ ($\alpha \leq \mathfrak{c}$);

(3) $\{y_{i,\xi} : \xi \in I_\alpha\}$ possui um ponto de acumulação em $E_{i,\alpha+1}$.

Para o caso em que $\alpha = 0$, fixemos E_0 um subgrupo infinito enumerável de E e façamos $E_{0,0} = E_0 = E_{1,0}$. Dessa forma, podemos indexar injetivamente $E_{i,0}$ como $E_{i,0} = \{y_{i,\xi} : \xi < \sigma_0\}$, o que assegura (1). Além disso, a condição (2) é claramente satisfeita e não precisamos cuidar de (3) neste caso.

No caso em que $\alpha < \mathfrak{c}$ é um ordinal limite, tomamos $E_{i,\alpha} = \bigcup_{\lambda<\alpha} E_{i,\lambda}$. Como $\sigma_\alpha = \sup_{\lambda<\alpha} \sigma_\lambda$ podemos indexar injetivamente $E_{i,\alpha}$ como $E_{i,\alpha} = \{y_{i,\xi} : \xi < \sigma_\alpha\}$, assegurando (1). Como (2) está, por hipótese, estabelecida para cada $\lambda < \alpha$ temos que $E_{i,\alpha}$ satisfaz (2) e novamente não precisamos cuidar de (3) neste caso.

Consideraremos agora o caso em que α é um ordinal sucessor, isto é, $\alpha = \beta + 1$ para algum $\beta < \mathfrak{c}$. Suponha $E_{i,\beta}$ conhecido. Para $i < 2$ escolha um ponto de acumulação c_i de $\{y_{i,\xi} : \xi \in I_\beta\}$ tal que $c_0 \notin E_{0,\beta} + E_{1,\beta}$ e $c_1 \notin \{0, c_0\} + E_{0,\beta} + E_{1,\beta}$. Note que isto é possível pois $|\sigma_\beta| < \mathfrak{c}$ e, sendo $\{y_{i,\xi} : \xi \in I_\beta\}$ infinito pela condição (1), o Lema 2.2 garante que este conjunto possui pelo menos $\mathfrak{c}$ pontos de acumulação. Definimos

$$E_{i,\beta+1} = \{0, c_i\} + E_{i,\beta} \ (i < 2).$$

Como $|E_{i,\beta}| = |\sigma_\beta|$ e $c_i \notin E_{i,\beta}$, temos que

$$|E_{i,\beta+1} - E_{i,\beta}| = |\sigma_\beta| \ (i < 2)$$

e dessa forma podemos indexar injetivamente $E_{i,\beta+1} - E_{i,\beta}$ por $\{y_{i,\xi} : \sigma_\beta \leq \xi < \sigma_{\beta+1}\}$, e isso assegura (1).

Agora, para mostrar que $E_{i,\beta+1}$ satifaz a condição (2), note que $(c_0 + E_{0,\beta}) \cap E_{1,\beta} = \emptyset$ (pois $c_0 \notin E_{0,\beta} + E_{1,\beta}$) e $E_{0,\beta+1} \cap (E_{1,\beta} + c_1) = \emptyset$ (pois $c_1 \notin E_{0,\beta+1} + E_{1,\beta}$). Isto, aliado ao fato de que $E_{i,\beta+1} = \{0, c_i\} + E_{i,\beta}$ para $i < 2$, nos permite concluir que

$$E_{0,\beta+1} \cap E_{1,\beta+1} = E_{0,\beta+1} \cap E_{1,\beta} = E_{0,\beta} \cap E_{1,\beta} = E_{0,0}.$$

Por fim, pela maneira como escolhemos c_i para $i < 2$, temos que $\{y_{i,\xi} : \xi \in I_\beta\}$ possui um ponto de acumulação em $E_{i,\beta+1}$. Logo, a condição (3) é satisfeita.

Agora, defina E_0 como $E_{0,\mathfrak{c}}$ e E_1 como $E_{1,\mathfrak{c}}$ e observe que $|E_0 \cap E_1| = |E_{0,\mathfrak{c}} \cap E_{1,\mathfrak{c}}| = \omega$, por (2). Resta mostrar que E_0 e E_1 são enumeravelmente compactos. Para tanto, seja X_i um subconjunto infinito enumerável de E_i. Tome $\delta < \mathfrak{c}$ tal que $X_i = \{x_{i,\xi} : \xi \in I_\delta\}$. A condição (3) garante que esse conjunto possui um ponto de acumulação em $E_{i,\delta+1}$. Como $E_{i,\mathfrak{c}} = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_{i,\alpha}$, concluímos que X_i possui um ponto de acumulação em E_i. □

Teorema 2.4. *Se E é um grupo de van Douwen, então existem subgrupos enumeravelmente compactos E_0 e E_1 de E tais que $E_0 \times E_1$ não é enumeravelmente compacto.*

Demonstração. Seja E um grupo de van Douwen. De acordo com o Lema 2.3, existem E_0 e E_1 subgrupos enumeravelmente compactos de E tais que $|E_0 \cap E_1| = \omega$. Vamos mostrar que $E_0 \times E_1$ não é enumeravelmente compacto. Suponha, por contradição, que $E_0 \times E_1$ seja enumeravelmente compacto. Considere o seguinte subgrupo de $E_0 \times E_1$:

$$\Delta = \{(x, y) \in E_0 \times E_1 : x = y\} = \{(x, x) : x \in E_0 \cap E_1\}.$$

Note que Δ é fechado (pois E é de Hausdorff) e infinito enumerável (pois $|E_0 \cap E_1| = \omega$). Como a propriedade de ser enumeravelmente compacto é hereditária para subconjuntos fechados, temos que Δ é enumeravelmente compacto. Isto, contudo, contradiz o Lema 2.1. Logo, $E_0 \times E_1$ não pode ser enumeravelmente compacto. □

3 CONSTRUÇÕES ASSUMINDO ALGUMA VERSÃO DE MA

No capítulo anterior apresentamos a técnica de van Douwen para exibir dois grupos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto. A construção apresentada é feita em ZFC, mas pressupõe a existência de um grupo de van Douwen. Neste capítulo, apresentaremos algumas maneiras de se obter grupos topológicos enumeravelmente compactos sem sequências não triviais convergentes (booleanos ou não) assumindo diferentes versões do Axioma de Martin.

3.1 O AXIOMA DE MARTIN

Conforme mencionamos acima, as construções apresentadas nas Seções 3.2 e 3.3 dependerão, num dado momento, de alguma versão do Axioma de Martin e, para conseguirmos enunciá-lo, precisaremos das definições que se seguem.

Definição 3.1. *Seja* $(\mathbb{P}, \leq)$ *uma ordem parcial. Dizemos que* $A \subseteq \mathbb{P}$ *é uma* anticadeia *em* $\mathbb{P}$ *se para quaisquer* $p, q \in A$ *distintos não existe* $r \in \mathbb{P}$ *tal que* $r \leq p$ *e* $r \leq q$*. Dizemos que* $\mathbb{P}$ *satisfaz a* countable chain condition *(ccc) se toda anticadeia em* $\mathbb{P}$ *é enumerável.*

Definição 3.2. *Seja* $(\mathbb{P}, \leq)$ *uma ordem parcial. Dizemos que* $D \subseteq \mathbb{P}$ *é* denso *em* $\mathbb{P}$ *se, para todo* $p \in \mathbb{P}$*, existe* $d \in D$ *tal que* $d \leq p$*.*

Definição 3.3. *Seja* $(\mathbb{P}, \leq)$ *uma ordem parcial. Dizemos que* $F \subseteq \mathbb{P}$ *é um* filtro *se*

- $F \neq \emptyset$*;*
- *para quaisquer* $p, q \in F$*, existe* $r \in F$ *tal que* $r \leq p$ *e* $r \leq q$*;*
- *se* $q \in F$ *e* $p \in P$ *são tais que* $q \leq p$*, então* $p \in F$*.*

Definição 3.4. *Sejam* $(\mathbb{P}, \leq)$ *uma ordem parcial e* $\mathcal{D}$ *uma família de subconjuntos densos de* $\mathbb{P}$*. Dizemos que um filtro* F *sobre* $\mathbb{P}$ *é* $\mathcal{D}$-genérico *se, para todo* $D \in \mathcal{D}$*, temos que* $F \cap D \neq \emptyset$*.*

Definição 3.5. *Seja κ um cardinal infinito. Denotamos por* MA(κ) *a afirmação*

> para toda ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$ ccc e toda família $\mathcal{D}$ de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ tal que $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, existe um filtro $\mathcal{D}$-genérico sobre $\mathbb{P}$.

Chamamos de Axioma de Martin (MA) *a afirmação*

> para todo $\kappa < \mathfrak{c}$ vale MA(κ).

A seguinte proposição, também conhecida como Lema de Rasiowa-Sikorski, mostra que quando a família de densos $\mathcal{D}$ é enumerável podemos garantir a existência de filtros $\mathcal{D}$-genéricos. Desta forma, MA(ω) vale trivialmente (nem precisamos supor $\mathbb{P}$ ccc).

Proposição 3.6. *Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se $\mathcal{D}$ é uma família enumerável de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, então existe um filtro $\mathcal{D}$-genérico em $\mathbb{P}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ uma família enumerável de densos em $\mathbb{P}$. Considere p_0 um elemento arbitrário de D_0. Seja $n < \omega \setminus \{0\}$ e suponha que para cada $i < n$, $p_i \in D_i$ foi escolhido de forma que $p_{n-1} \leq p_{n-2} \leq \ldots \leq p_1 \leq p_0$. Como D_n é denso em $\mathbb{P}$, existe $p_n \in D_n$ tal que $p_n \leq p_{n-1}$.

Considere $E = \{p_n : n \in \omega\}$ e defina $F = \{p \in \mathbb{P} : \exists q \in E \text{ tal que } q \leq p\}$. Temos que F é um filtro $\mathcal{D}$-genérico sobre $\mathbb{P}$. □

Agora, iremos demonstrar que não vale MA($\mathfrak{c}$).

Sejam X e Y conjuntos. Denotaremos por $\mathrm{Fn}(X, Y)$ o conjunto das funções finitas cujo domínio está contido em X e cuja imagem está contida em Y.

Proposição 3.7. *Se X e Y são conjuntos infinitos, então* $|\mathrm{Fn}(X, Y)| = \max\{|X|, |Y|\}$.

Demonstração. Como $\mathrm{Fn}(X, Y) \subseteq [X \times Y]^{<\omega}$ e $|[X \times Y]^{<\omega}| = |X \times Y|$, temos que $|\mathrm{Fn}(X, Y)| \leq |X \times Y| = \max\{|X|, |Y|\}$. Vamos considerar o caso em que $|X| \geq |Y|$ e o caso em que $|Y| \geq |X|$. No primeiro caso, se considerarmos $y \in Y$ fixado e definirmos $f_x = \{(x, y)\}$ para cada $x \in X$, vemos que $|\mathrm{Fn}(X, Y)| \geq |X| = |X \times Y|$. No segundo caso, se considerarmos $x \in X$ fixado e definirmos $f_y = \{(x, y)\}$ para cada $y \in Y$, vemos que $|\mathrm{Fn}(X, Y)| \geq |Y| = |X \times Y|$. Logo, $|\mathrm{Fn}(X, Y)| = \max\{|X|, |Y|\}$. □

Dadas $f, g \in \mathrm{Fn}(X, Y)$, escreveremos $f \leq g$ para denotar $f \supseteq g$. Note que $(\mathrm{Fn}(X, Y), \leq)$ é uma ordem parcial. De fato,

- $\leq$ é *reflexiva*, pois para cada $f \in \mathrm{Fn}(X, Y)$ temos que $f \supseteq f$. Logo, $f \leq f$.

- $\leq$ é *antissimétrica*, pois se $f, g \in \mathbb{P}$ são tais que $f \leq g$ e $g \leq f$, então $f \supseteq g$ e $g \supseteq f$. Logo, $f = g$.
- $\leq$ é *transitiva*, pois se $f, g, h \in \mathbb{P}$ são tais que $f \leq g$ e $g \leq h$, então $f \supseteq g$ e $g \supseteq h$, donde concluimos que $f \supseteq h$. Logo, $f \leq h$.

Lema 3.8. *Sejam X e Y conjuntos tais que X é infinito e $|Y| \geq 2$. Se $x \in X$ e $f : X \to Y$ é uma função, então os conjuntos*

$$D_x = \{p \in \mathrm{Fn}(X, Y) : x \in \operatorname{dom} p\}$$

e

$$E_f = \{p \in \mathrm{Fn}(X, Y) : \exists a \in \operatorname{dom} p \text{ tal que } p(a) \neq f(a)\}$$

são densos em $\mathrm{Fn}(X, Y)$.

Demonstração. Seja $p \in \mathrm{Fn}(X, Y)$. Se $x \in \operatorname{dom} p$, então $p \in D_x$. Caso contrário, $q = p \cup \{(x, y)\}$ para algum $y \in Y$ é tal que $q \in D_x$ e $q \leq p$.

Seja $a \in X \setminus \operatorname{dom} p$. Como $|Y| \geq 2$, é possível tomar $y \in Y$ tal que $y \neq f(a)$. Perceba que $q = p \cup \{(a, y)\}$ é tal que $q \in E_f$ e $q \leq p$. □

Proposição 3.9. *Não vale MA($\mathfrak{c}$).*

Demonstração. Primeiramente, note que $(\mathrm{Fn}(\omega, 2), \leq)$ é ccc, já que $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$ é enumerável. Suponha que vale MA($\mathfrak{c}$). Então existe G filtro $\mathcal{D}$-genérico sobre $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$, onde

$$\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_f : f \in 2^\omega\}$$

e D_n e E_f seguem a notação do Lema 3.8.

Seja $g = \bigcup G$. Temos que g é uma função. De fato, sejam $g_0, g_1 \in G$ e seja $x \in \operatorname{dom}(g_0) \cap \operatorname{dom}(g_1)$. Como G é filtro, existe $h \in G$ tal que $h \leq g_0$ e $h \leq g_1$. Logo, $h \supseteq g_0$ e $h \supseteq g_1$. Em particular, $x \in \operatorname{dom}(h)$ e $g_0(x) = h(x) = g_1(x)$. Além disso, dado $n \in \omega$, como $G \cap D_n \neq \emptyset$, temos que $n \in \operatorname{dom}(g)$. Assim, $g \in 2^\omega$. Mas dada $f \in 2^\omega$ qualquer, como $G \cap E_f \neq \emptyset$, temos que $g \neq f$, uma contradição. □

3.2 A CONSTRUÇÃO DE VAN DOUWEN

Com o auxílio de MA, van Douwen [5] construiu um subgrupo de $2^\mathfrak{c}$ enumeravelmente compacto e sem sequências não triviais convergentes. Antes de adentrar na construção de van Douwen iremos apresentar alguns resultados sobre grupos booleanos que serão importantes para o desenvolvimento desta seção.

Primeiramente, note que se E é um grupo booleano (e, portanto, abeliano), temos que se A, B são subgrupos de G, então $\langle A \cup B \rangle = A + B$.

Os resultados a seguir mostram como é possível estender homomorfismos em grupos booleanos.

Lema 3.10. *Sejam G e H grupos booleanos, A e B subgrupos de G e $p : A \to H$ e $q : B \to H$ homomorfismos. Se $p\restriction_{A\cap B} = q\restriction_{A\cap B}$, então existe um homomorfismo $r : A + B \to H$ que estende p e q.*

Demonstração. Considere $r : A + B \to H$ definida por $r(a + b) = p(a) + q(b)$ onde $a \in A$ e $b \in B$. Vamos mostrar que r está bem definida. Para tanto, suponha que $a, c \in A$ e $b, d \in B$ são tais que $a + b = c + d$. Neste caso $a + c = b + d \in A \cap B$ e assim $p(a + c) = q(b + d)$. Como p e q são homomorfismos temos que $p(a) + p(c) = q(b) + q(d)$. Dado que H é booleano, $p(a) + q(b) = p(c) + q(d)$, isto é, $r(a + b) = r(c + d)$ e, portanto, r está bem definida. Claramente r é um homomorfismo que estende p e q. $\square$

Corolário 3.11. *Sejam G e H grupos booleanos. Se A é um subgrupo de G e $q : A \to H$ é um homomorfismo, então para cada $y \in G \setminus A$ e $b \in H$ existe um homomorfismo $p : \{0, y\} + A \to H$ que estende q e é tal que $p(y) = b$.*

Demonstração. Considere o subgrupo $B = \{0, y\}$ de G, e defina $r : B \to H$ por $r(y) = b$ e $r(0) = 0_H$. Temos que r é um homomorfismo e $A \cap B = \{0\}$. Pelo Lema 3.10, existe um homomorfismo $p : B + A = \{0, y\} + A \to H$ que estende q e r tal que $p(y) = p(y + 0) = r(y) + q(0) = b + 0 = b$. $\square$

O próximo lema é essencial para a construção proposta.

Lema 3.12. *Assuma MA. Sejam H um grupo booleano, $I \in [H]^\omega$ e $\mathcal{K} \subseteq [H]^\omega$. Se $|H| < \mathfrak{c}$ e $|\mathcal{K}| < \mathfrak{c}$, então existe um homomorfismo $h : H \to 2$ tal que:*

1. *$|I \cap h^{-1}[\{i\}]| = \omega$ para $i < 2$;*
2. *$K \cap h^{-1}[\{0\}] \neq \emptyset$ para $K \in \mathcal{K}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{I}$ uma coleção infinita de subconjuntos infinitos de I dois a dois disjuntos e considere $\mathcal{L} = \mathcal{I} \cup \mathcal{K}$. É suficiente encontrar um homomorfismo $h : H \to 2$ tal que para cada $L \in \mathcal{L}$ e $i \in \{0, 1\}$, $L \cap h^{-1}[\{i\}] \neq \emptyset$. Considere o conjunto

$$\mathbb{P} = \{p : \text{ existe um subgrupo finito } A \text{ de } H \text{ tal que } p : A \to 2 \text{ é um homomorfismo}\}$$

munido da seguinte ordem parcial: dados $p, q \in \mathbb{P}$,

$$p \leq q \iff p \supseteq q.$$

Se $F \subseteq \mathbb{P}$ é um filtro, então $S = \bigcup_{p \in F} \mathrm{dom}(p)$ é um subgrupo de H. De fato, dados $x, y \in S$, tome $p, q \in F$ tais que $x \in \mathrm{dom}(p)$ e $y \in \mathrm{dom}(q)$. Como F é filtro, existe $r \in F$ tal que $r \leq p, q$. Assim, $x, y \in \mathrm{dom}(r)$ e disso segue que $x - y \in \mathrm{dom}(r) \subseteq S$, pois $\mathrm{dom}(r)$ é subgrupo de H. Portanto S é subgrupo de H.

Note também que $\bigcup F : S \to 2$ é um homomorfismo. De fato, dados $x, y \in S$, existem $p, q \in F$ tal que $x \in \mathrm{dom}(p)$ e $y \in \mathrm{dom}(q)$. Novamente, como F é filtro, existe $r \in F$ tal que $r \leq p, q$ e, portanto, $x, y \in \mathrm{dom}(r)$. Dessa forma temos que $\bigcup F(x+y) = r(x+y)$ e como r é um homomorfismo temos que $r(x+y) = r(x) + r(y)$. Logo, $\bigcup F(x+y) = r(x+y) = r(x) + r(y) = \bigcup F(x) + \bigcup F(y)$.

Sejam

$$\mathcal{D} = \{D_x : x \in H\} \text{ e } \mathcal{E} = \{E_{L,i} : L \in \mathcal{L} \text{ e } i \in \{0, 1\}\}$$

onde

$$D_x = \{p \in \mathbb{P} : x \in \mathrm{dom}(p)\} \text{ e}$$

$$E_{L,i} = \{p \in \mathbb{P} : \exists y \in L \cap \mathrm{dom}(p) \text{ tal que } p(y) = i\}.$$

Note que:

- $\mathbb{P}$ satisfaz a *ccc*: Seja $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$ não enumerável. Temos que encontrar $p, q \in \mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{P}$ tais que $r \leq p, q$. Para cada $A \in [H]^{<\omega}$ existe apenas uma quantidade finita de funções de A em 2, e disto temos que $\{\mathrm{dom}(p) : p \in \mathbb{Q}\}$ é não enumerável. Segue do lema do Δ-sistema que existem $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{Q}$ não enumerável e $B \in [H]^{<\omega}$ satisfazendo que $\mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q) = B$ para quaisquer $p, q \in \mathbb{Q}'$ distintos. Como existe só um número finito de funções de B em 2, existem $p, q \in \mathbb{Q}'$ distintos tais que $p \restriction_B = q \restriction_B$. Pelo Lema 3.10, existe um homomorfismo $r : \mathrm{dom}(p) + \mathrm{dom}(q) \to 2$ que estende p e q. Note que $r \in \mathbb{P}$, logo $p, q \in \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{Q}$ são compatíveis e, portanto, $\mathbb{Q}$ não é uma anticadeia.

- Cada membro de $\mathcal{D}$ é denso: Sejam $q \in \mathbb{P}$ e $y \in H$ arbitrários. Temos que encontrar $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq q$ e $y \in \mathrm{dom}(p)$. Se $y \in \mathrm{dom}(q)$, tome $p = q$. Se $y \notin \mathrm{dom}(q)$, pelo Corolário 3.11 existe um homomorfismo $p : \{0, y\} + \mathrm{dom}(q) \to 2$ que estende q, ou seja, D_y é denso.

- Cada membro de $\mathcal{E}$ é denso: Sejam $q \in \mathbb{P}$, $L \in \mathcal{L}$ e $i < 2$ arbitrários. Temos que encontrar $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq q$ e $p(y) = i$ para algum $y \in L \cap \mathrm{dom}(p)$. Como L é infinito e $\mathrm{dom}(q)$ é finito, podemos tomar $y \in L \setminus \mathrm{dom}(q)$. Pelo Corolário 3.11 existe um homomorfismo $p : \{0, y\} + \mathrm{dom}(q) \to 2$ que estende q tal que $p(y) = i$. Logo, $E_{L,i}$ é denso em $\mathbb{P}$.

Observe que $|\mathcal{D} \cup \mathcal{E}| \leq |\mathcal{D}| + |\mathcal{E}| = |H| + 2|\mathcal{K}| < \mathfrak{c}$. De MA segue que existe um filtro F que intersecta todo membro da família $\mathcal{D} \cup \mathcal{E}$. Como $F \cap D_x \neq \emptyset$ para todo $x \in H$ temos que $S = \bigcup_{p \in F} \mathrm{dom}(p) = H$. Além disso, para todo $L \in \mathcal{L}$ e $i < 2$, $F \cap E_{L,i} \neq \emptyset$. Logo existe $y \in L$ satisfazendo $\bigcup F(y) = i$. Assim, o homomorfismo $h := \bigcup F : H \to 2$ é tal que para cada $L \in \mathcal{L}$ e $i < 2$, $L \cap h^{-1}[\{i\}] \neq \emptyset$. □

Agora, procederemos à construção do grupo desejado.

Teorema 3.13. *Assumindo MA, existe um subgrupo E de $2^{\mathfrak{c}}$ enumeravelmente compacto e sem sequências não triviais convergentes.*

Demonstração. Para obter E, vamos construir subgrupos E_α de 2^α para $\alpha \in [\omega, \mathfrak{c}]$ e fazer $E := E_{\mathfrak{c}}$. Para cada $\alpha \in [\omega, \mathfrak{c}]$, E_α será indexado como $E_\alpha = \{x_{\alpha,\xi} : \xi < \sigma_\alpha\}$ onde os ordinais σ_α são dados da seguinte forma:

$$\sigma_\alpha = \begin{cases} \omega, \text{ se } \alpha = \omega \\ \sigma_\beta + |\sigma_\beta|, \text{ se } \alpha = \beta + 1 \\ \sup_{\omega \leq \lambda < \alpha} \sigma_\lambda, \text{ se } \alpha \text{ é ordinal limite.} \end{cases}$$

Temos que $\sigma_\alpha < \mathfrak{c}$ para $\alpha < \mathfrak{c}$, e $\sigma_{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$. Enumeramos $[\mathfrak{c}]^\omega$ como $\{I_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ de forma que $I_\xi \subseteq \sigma_\xi$ onde $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$.

A construção deverá respeitar as seguintes condições:

(1) se $\xi < \eta < \sigma_\alpha$, então $x_{\alpha,\xi} \neq x_{\alpha,\eta}$ ($\omega \leq \alpha \leq \mathfrak{c}$);

(2) se $\xi < \sigma_\alpha$, então $x_{\alpha,\xi} \subseteq x_{\beta,\xi}$ ($\omega \leq \alpha < \beta \leq \mathfrak{c}$);

(3) se $\xi, \eta, \zeta < \sigma_\alpha$ satisfazem $x_{\alpha,\xi} + x_{\alpha,\eta} = x_{\alpha,\zeta}$, então $x_{\beta,\xi} + x_{\beta,\eta} = x_{\beta,\zeta}$ ($\omega \leq \alpha < \beta \leq \mathfrak{c}$);

(4) se $\xi \in [\omega, \alpha[$, então existe $\lambda_\xi < \sigma_{\xi+1}$ tal que x_{α,λ_ξ} é ponto de acumulação de $\{x_{\alpha,\eta} : \eta \in I_\xi\}$ ($\omega < \alpha \leq \mathfrak{c}$);

(5) $|\{\eta \in I_\xi : x_{\xi+1,\eta}(\xi) = i\}| = \omega$ para $i < 2$ ($\omega \leq \xi < \mathfrak{c}$).

As três primeiras condições garantem, respectivamente, que os E_α's serão sempre infinitos, que as aproximações serão cada vez melhores e que a estrutura de grupo será mantida. Ainda, as duas últimas irão garantir que E será enumeravelmente compacto e sem sequências não triviais convergentes.

Faremos a construção por recursão em α. Primeiramente, seja E_ω um subgrupo infinito enumerável de 2^ω indexado como $E_\omega = \{x_{\omega,n} : n < \omega\}$, de forma que $x_{\omega,n} \neq x_{\omega,m}$ para $m, n \in \omega$ distintos. Perceba que, neste caso, basta cuidar para que (1) seja atendida.

Seja $\delta \in]\omega, \mathfrak{c}]$. Suponha que E_α já foi definido para cada $\alpha \in [\omega, \delta[$ de modo a respeitar as condições (1)-(5). Temos dois casos a considerar:

Caso 1: δ é um ordinal limite.

Neste caso temos que $\sigma_\delta = \sup_{\omega \leq \alpha < \delta} \sigma_\alpha$ e assim, para cada $\xi < \sigma_\delta$ existe $\alpha < \delta$ tal que $\xi < \sigma_\alpha$. Desta forma, a condição (2) nos leva a definir para cada $\xi < \sigma_\delta$

$$x_{\delta,\xi} = \bigcup \{x_{\alpha,\xi} : \omega \leq \alpha < \delta \text{ e } \xi < \sigma_\alpha\}.$$

Vejamos que $E_\delta := \{x_{\delta,\xi} : \xi < \sigma_\alpha\}$ atende às condições (1) - (4).

(1) Suponha $\xi < \eta < \sigma_\delta$ e tome $\alpha < \delta$ de modo que $\eta < \sigma_\alpha$. Pela hipótese de indução, $x_{\alpha,\xi} \neq x_{\alpha,\eta}$. Portanto, existe $t < \alpha$ de forma que $x_{\alpha,\xi}(t) \neq x_{\alpha,\eta}(t)$. Por construção temos que $x_{\delta,\xi}(t) \neq x_{\delta,\eta}(t)$. Logo, $x_{\delta,\xi} \neq x_{\delta,\eta}$.

(2) Se $\omega \leq \alpha < \delta$ e $\xi < \sigma_\alpha$, da definição de $x_{\delta,\xi}$ segue que $x_{\alpha,\xi} \subseteq x_{\delta,\xi}$.

(3) Suponha que $\omega \leq \alpha < \delta$ e $\xi, \eta, \zeta < \sigma_\alpha$ são tais que $x_{\alpha,\xi} + x_{\alpha,\eta} = x_{\alpha,\zeta}$. Seja $t < \delta$. Temos que mostrar que $x_{\delta,\xi}(t) + x_{\delta,\eta}(t) = x_{\delta,\zeta}(t)$. Note que para $\nu < \sigma_\alpha$ temos $x_{\delta,\nu}\restriction_\alpha = x_{\alpha,\nu}$. Logo, basta considerar o caso em que $t \in [\alpha, \delta[$. Como δ é limite, podemos tomar $\theta < \delta$ tal que $t < \theta$, e pela hipótese de indução $x_{\theta,\xi} + x_{\theta,\eta} = x_{\theta,\zeta}$, donde temos $x_{\theta,\xi}(t) + x_{\theta,\eta}(t) = x_{\theta,\zeta}(t)$. Pela definição dos $x_{\delta,\mu}$ com $\mu < \sigma_\alpha$ temos que $x_{\delta,\xi}(t) + x_{\delta,\eta}(t) = x_{\delta,\zeta}(t)$.

(4) Seja $\xi \in [\omega, \delta[$. Tome $L \in [\delta]^{<\omega}$. Temos que encontrar $\eta \in I_\xi$ de forma que $x_{\delta,\eta} \neq x_{\delta,\lambda_\xi}$ e $x_{\delta,\lambda_\xi}\restriction_L \subseteq x_{\delta,\eta}$. Como δ é limite, existe γ satisfazendo $\omega \leq \gamma < \delta$ tal que $L \subseteq \gamma$ e $\lambda_\xi < \sigma_\gamma$. Pela hipótese de indução, x_{γ,λ_ξ} é ponto de acumulação da sequência $\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\xi\} \subseteq 2^\gamma$. Disto, temos que existe $\eta \in I_\xi$ tal que $x_{\gamma,\eta} \neq x_{\gamma,\lambda_\xi}$ e $x_{\gamma,\lambda_\xi}\restriction_L \subseteq x_{\gamma,\eta}$. Como $x_{\gamma,\lambda_\xi} \subseteq x_{\delta,\lambda_\xi}$ temos que $x_{\delta,\eta} \neq x_{\delta,\lambda_\xi}$ e $x_{\delta,\lambda_\xi}\restriction_L = x_{\gamma,\lambda_\xi}\restriction_L \subseteq x_{\gamma,\eta} \subseteq x_{\delta,\eta}$. Logo, x_{δ,λ_ξ} é ponto de acumulação de $\{x_{\delta,\eta} : \eta \in I_\xi\}$.

Perceba que, pela forma como (5) foi enunciada, não precisamos tratá-la neste caso.

Caso 2: δ é um ordinal sucessor.

Suponha que $\delta = \gamma + 1$. Para definir $E_\delta \subseteq 2^\delta$ vamos inicialmente "duplicar" $E_\gamma \subseteq 2^\gamma$ e depois estender todas essas funções a $\gamma + 1$. Pela condição (1), temos que o conjunto $\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\gamma\}$ é infinito. Logo, existe $c \in 2^\gamma$ tal que c é ponto de acumulação de $\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\gamma\}$ já que 2^γ é compacto. Tome $c' \in 2^\gamma \setminus E_\gamma$, com $c' = c$ se $c \notin E_\gamma$ e seja $H = \{0, c'\} + E_\gamma$. Como $E_\gamma \cap (c' + E_\gamma) = \emptyset$, podemos indexar $H \setminus E_\gamma$ injetivamente como $\{x_{\gamma,\xi} : \sigma_\gamma \leq \xi < \sigma_{\gamma+1}\}$. Seja λ_γ determinado por $x_{\gamma,\lambda_\gamma} = c$. Da definição de λ_γ e da hipótese de indução temos que se $\omega \leq \xi \leq \gamma$ então x_{γ,λ_ξ} é um ponto de acumulação de $\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\xi\}$.

Agora que já "duplicamos" E_γ, temos que estender todas as funções de H a $\gamma + 1$, e é justamente neste ponto onde recorremos ao Axioma de Martin. A ideia é encontrar $h : H \to 2$ que permita definir para cada elemento de H sua γ-ésima coordenada. Uma tal função h deve satisfazer as seguintes condições:

(a) h é homomorfismo;

(b) se $\omega \leq \xi \leq \gamma$, então x_{γ,λ_ξ} é um ponto de acumulação de

$$\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\xi \text{ e } h(x_{\gamma,\eta}) = h(x_{\gamma,\lambda_\xi})\};$$

(c) $|\{\eta \in I_\gamma : h(x_{\gamma,\eta}) = i\}| = \omega$ para $i < 2$.

É conveniente substituir (b) por uma condição mais simples de se trabalhar. Para tanto, se $\omega \leq \xi \leq \gamma$ defina

$$\mathcal{K}_\xi = \{\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\xi, x_{\gamma,\eta} \neq x_{\gamma,\lambda_\xi} \text{ e } x_{\gamma,\lambda_\xi}\restriction_L \subseteq x_{\gamma,\eta}\} : L \in [\gamma]^{<\omega}\}.$$

Agora, seja

$$\mathcal{K} = \bigcup\{\{x_{\gamma,\lambda_\xi} + K : K \in \mathcal{K}_\xi\} : \omega \leq \xi \leq \gamma\}.$$

Temos que (b) é equivalente à seguinte condição:

(b') $\forall K \in \mathcal{K}, \exists x \in K$ tal que $h(x) = 0$.

Iremos mostrar agora que (b) e (b') são equivalentes.

(b) $\implies$ (b'): Seja $M \in \mathcal{K}$. Então $M = x_{\gamma,\lambda_\xi} + K$ para algum $K \in \mathcal{K}_\xi$ e algum $\xi \in [\omega, \gamma]$. Pela definição de $\mathcal{K}_\xi$, existe $L \in [\gamma]^{<\omega}$ tal que $K = \{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\xi, x_{\gamma,\eta} \neq x_{\gamma,\lambda_\xi} \text{ e } x_{\gamma,\lambda_\xi}\restriction_L \subseteq x_{\gamma,\eta}\}$. Pela condição (b), x_{γ,λ_ξ} é ponto de acumulação de $B_\xi = \{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\xi \text{ e } h(x_{\gamma,\eta}) = h(x_{\gamma,\lambda_\xi})\}$. Considere a vizinhança básica de x_{γ,λ_ξ} dada por $U_L = \{x \in 2^\gamma : x_{\gamma,\lambda_\xi}\restriction_L \subseteq x\}$. Então existe $\eta \in I_\xi$ tal que $x_{\gamma,\eta} \in B_\xi \cap U_L$, onde $\eta \neq \lambda_\xi$. Note que $x_{\gamma,\eta} \in K \in \mathcal{K}_\xi$. Logo

$x := x_{\gamma,\lambda_\xi} + x_{\gamma,\eta} \in M$ e $h(x) = h(x_{\gamma,\lambda_\xi} + x_{\gamma,\eta}) = h(x_{\gamma,\lambda_\xi}) + h(x_{\gamma,\eta}) = h(x_{\gamma,\eta}) + h(x_{\gamma,\eta}) = 0$, pois o contradomínio de h é um grupo booleano.

(b') $\implies$ (b): Seja $L \in [\gamma]^{<\omega}$ e sejam B_ξ e U_L como acima. Seja $A_L = \{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\xi\} \cap (U_L \setminus \{x_{\gamma,\lambda_\xi}\})$. Note que $A_L \in \mathcal{K}_\xi$. Considere agora $x_{\gamma,\lambda_\xi} + A_L \in \mathcal{K}$. Pela condição (b') existe $x \in x_{\gamma,\lambda_\xi} + A_L$ tal que $h(x) = 0$, ou seja, existe $\eta \in I_\xi$ tal que $h(x_{\gamma,\lambda_\xi} + x_{\gamma,\eta}) = h(x_{\gamma,\lambda_\xi}) + h(x_{\gamma,\eta}) = 0$, isto é, $h(x_{\gamma,\lambda_\xi}) = h(x_{\gamma,\eta})$. Note que $x_{\gamma,\eta} \in B_\xi \cap (U_L \setminus \{x_{\gamma,\lambda_\xi}\})$, logo x_{γ,λ_ξ} é ponto de acumulação de B_ξ.

Pela definição de x_{γ,λ_ξ}, para cada $L \in [\gamma]^{<\omega}$ temos que o conjunto $\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\xi, x_{\gamma,\eta} \neq x_{\gamma,\lambda_\xi}$ e $x_{\gamma,\lambda_\xi}\restriction_L \subseteq x_{\gamma,\eta}\}$ é infinito. Logo, cada elemento de $\mathcal{K}$ é infinito. Podemos, então, aplicar o Lema 3.12 considerando $I = \{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\xi\}$ e $\mathcal{K} = \bigcup\{\{x_{\gamma,\lambda_\xi} + K : K \in \mathcal{K}_\xi\} : \omega \leq \xi \leq \gamma\}$ cuja cardinalidade é $|\gamma| < \mathfrak{c}$.

Obtemos então um homomorfismo $h : H \to 2$ tal que:

- $|\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\gamma$ e $h(x_{\gamma,\eta}) = i\}| = \omega$ $\forall i < 2$;
- $\forall K \in \mathcal{K}, \exists x \in K$ tal que $h(x) = 0$.

Portanto, h satisfaz as condições (a), (b') e (c).

Definimos então

$$E_{\gamma+1} = \{x^\frown h(x) : x \in H\}$$

e o indexamos como $E_{\gamma+1} = \{x_{\gamma+1,\xi} : \xi < \sigma_{\gamma+1}\}$ onde $x_{\gamma+1,\xi} \restriction_\gamma = x_{\gamma,\xi}$ e $x_{\gamma+1,\xi}(\gamma) = h(x_{\gamma,\xi})$. Vejamos que $E_{\gamma+1}$ satisfaz as condições (1)-(5).

Pela maneira como $E_{\gamma+1}$ foi construído, é imediato que as condições (1) e (2) estão satisfeitas. Agora, se $\xi, \eta, \zeta < \sigma_\gamma$ são tais que $x_{\gamma,\xi} + x_{\gamma,\eta} = x_{\gamma,\zeta}$, temos

$$\begin{aligned}
(x_{\gamma+1,\xi} + x_{\gamma+1,\eta})(\gamma) &= x_{\gamma+1,\xi}(\gamma) + x_{\gamma+1,\eta}(\gamma) \\
&= h(x_{\gamma,\xi}) + h(x_{\gamma,\eta}) \\
&= h(x_{\gamma,\xi} + x_{\gamma,\eta}) \\
&= h(x_{\gamma,\zeta}) \\
&= x_{\gamma+1,\zeta}(\gamma).
\end{aligned}$$

Como $x_{\gamma+1,\xi}\restriction_\gamma = x_{\gamma,\xi}, x_{\gamma+1,\eta}\restriction_\gamma = x_{\gamma,\eta}$ e $x_{\gamma+1,\zeta}\restriction_\gamma = x_{\gamma,\zeta}$, temos que $x_{\gamma+1,\xi} + x_{\gamma+1,\eta} = x_{\gamma+1,\zeta}$. Assim, concluímos que $E_{\gamma+1}$ satisfaz a condição (3).

Considere $\xi \in [\omega, \gamma+1[$. Mostraremos que $x_{\gamma+1,\lambda_\xi}$ é ponto de acumulação de $\{x_{\gamma+1,\eta} : \eta \in I_\xi\}$. Tome $L \in [\gamma+1]^{<\omega}$. Suponha, primeiramente, que $\gamma \notin L$. Dado que x_{γ,λ_ξ} é ponto de acumulação de $\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\xi\}$, o conjunto $\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\xi, x_{\gamma,\eta} \neq$

x_{γ,λ_ξ} e $x_{\gamma,\lambda_\xi}\restriction_L \subseteq x_{\gamma,\eta}\}$ é infinito. Para cada η temos que $x_{\gamma+1,\eta} = x_{\gamma,\eta}{}^\frown h(x_{\gamma,\eta})$, o que implica que o conjunto $\{x_{\gamma+1,\eta} : \eta \in I_\xi, x_{\gamma+1,\eta} \neq x_{\gamma+1,\lambda_\xi}$ e $x_{\gamma+1,\lambda_\xi}\restriction_L \subseteq x_{\gamma+1,\eta}\}$ é infinito. Agora, suponha que $\gamma \in L$. Pela condição (b) sabemos que x_{γ,λ_ξ} é ponto de acumulação de $\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\xi$ e $h(x_{\gamma,\eta}) = h(x_{\gamma,\lambda_\xi})\}$. Logo, o conjunto $\{x_{\gamma+1,\eta} : \eta \in I_\xi, x_{\gamma+1,\eta} \neq x_{\gamma+1,\lambda_\xi}$ e $x_{\gamma+1,\lambda_\xi}\restriction_L \subseteq x_{\gamma+1,\eta}\}$ também é infinito. Portanto, $x_{\gamma+1,\lambda_\xi}$ é ponto de acumulação de $\{x_{\gamma+1,\eta} : \eta \in I_\xi\}$, ou seja, $E_{\gamma+1}$ satisfaz a condição (4).

Por fim, seja $i \in \{0,1\}$. Note que para cada $\eta \in I_\gamma$, $x_{\gamma+1,\eta}(\gamma) = h(x_{\gamma,\eta})$. Logo, $|\{\eta \in I_\gamma : x_{\gamma+1,\eta}(\gamma) = i\}| = |\{\eta \in I_\gamma : h(x_{\gamma,\eta}) = i\}| = \omega$, pois h satisfaz (c). Disto segue que $E_{\gamma+1}$ satisfaz a condição (5).

Isto completa a construção indutiva.

Resta mostrar que $E = E_\mathfrak{c}$ é um grupo de van Douwen.

Observe que E é enumeravelmente compacto e não possui sequências não triviais convergentes, pois todo subconjunto infinito enumerável de E possui dois pontos de acumulação. De fato, se $A \in [E]^\omega$, então existe $\xi < \mathfrak{c}$ tal que $A = \{x_{\mathfrak{c},\eta} : \eta \in I_\xi\}$. Agora, vamos particionar I_ξ em dois conjuntos $I_{\xi,0}$ e $I_{\xi,1}$, onde $I_{\xi,0} = \{\eta \in I_\xi : x_{\xi+1,\eta}(\xi) = 0\}$ e $I_{\xi,1} = \{\eta \in I_\xi : x_{\xi+1,\eta}(\xi) = 1\}$. Note que $I_{\xi,0}$ e $I_{\xi,1}$ estão em $[\mathfrak{c}]^\omega$ pela condição (5). Dessa maneira, temos que $I_{\xi,0} = I_{\zeta_0}$ e $I_{\xi,1} = I_{\zeta_1}$ para certos $\zeta_0, \zeta_1 \in [\omega, \mathfrak{c}[$. Assim a condição (4) nos diz que $x_{\mathfrak{c},\lambda_{\zeta_0}}$ será ponto de acumulação de $\{x_{\alpha,\theta} : \theta \in I_{\zeta_0}\}$ e $x_{\mathfrak{c},\lambda_{\zeta_1}}$ será ponto de acumulação de $\{x_{\alpha,\theta} : \theta \in I_{\zeta_1}\}$. Mas cada um destes é subconjunto de $\{x_{\mathfrak{c},\eta} : \eta \in I_\xi\}$.

Logo, E é um grupo de van Douwen. □

3.3 A CONSTRUÇÃO DE KOSZMIDER, TOMITA E WATSON

Nesta seção, exibiremos a construção proposta por Koszmider, Tomita e Watson [12] que mostra que é possível munir o grupo abeliano livre de tamanho $\mathfrak{c}$ de uma topologia que o torna um grupo enumeravelmente compacto sem sequências não triviais convergentes assumindo MA para ordens parciais enumeráveis.[1]

1 Dado um grupo abeliano G, dizemos que $X \subseteq G$ é uma *base* para G se X é linearmente independente (ou seja, para quaisquer $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ distintos e quaisquer $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{Z}$, se $n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_mx_m = 0$, então $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 0$) e $G = \langle X \rangle$ (isto é, G é o grupo gerado pelo conjunto X). Um grupo abeliano é dito *abeliano livre* se possui uma base. Note que um grupo abeliano possui uma base não vazia se, e somente se, é uma soma direta de grupos cíclicos infinitos.

Nosso objetivo será construir um subconjunto linearmente independente $X = \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ de $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$ de modo que o subgrupo G de $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$ gerado por X, munido da topologia de subespaço, seja enumeravelmente compacto e não possua sequências não triviais convergentes.

Note que cada elemento de $G = \langle X \rangle$ pode ser escrito como uma combinação linear finita de elementos de X com coeficientes inteiros e, portanto, é possível associar cada $g \in G \setminus \{0\}$ a uma $j \in \mathrm{Fn}(\mathfrak{c}, \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \setminus \{\emptyset\}$ de modo que

$$g = \sum_{\mu \in \mathrm{dom}(j)} j(\mu) x_\mu.$$

Fixemos uma indexação $\{j_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ de $\mathrm{Fn}(\mathfrak{c}, \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \setminus \{\emptyset\}$ satisfazendo $\mathrm{dom}(j_\xi) \subseteq \xi$ para todo $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$.[2] Observe que X será linearmente independente se $\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(j_\xi)} j_\xi(\mu) x_\mu \neq 0 \in \mathbb{T}^\mathfrak{c}$ para todo $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$ e, para que isto ocorra, é suficiente garantir que $\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(j_\xi)} j_\xi(\mu) x_\mu(\xi) \neq 0 \in \mathbb{T}$ qualquer que seja $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$.

Podemos, ainda, associar a cada subconjunto infinito enumerável de G que não contém 0, digamos $\{y_n : n \in \omega\}$, uma função injetora $h : \omega \to \mathrm{Fn}(\mathfrak{c}, \mathbf{Z} \setminus \{0\}) \setminus \{\emptyset\}$ de modo que, para cada $n \in \omega$,

$$y_n = \sum_{\mu \in \mathrm{dom}(h(n))} h(n)(\mu) x_\mu.$$

Fixemos uma indexação $\{h_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ do conjunto de todas as funções injetoras $h : \omega \to \mathrm{Fn}(\mathfrak{c}, \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \setminus \{\emptyset\}$ satisfazendo $\bigcup_{n \in \omega} \mathrm{dom}(h_\xi(n)) \subseteq \xi$.[3] A fim de que G tenha as propriedades desejadas, asseguraremos que, para cada $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$, x_ξ será um ponto de acumulação de $\{\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(h_\xi(n))} h_\xi(n)(\mu) x_\mu : n \in \omega\}$. Dessa maneira, todo subconjunto infinito enumerável de G terá $\mathfrak{c}$ pontos de acumulação e G será enumeravelmente compacto sem sequências não triviais convergentes.

2 Como $|\mathrm{Fn}(\mathfrak{c}, \mathbb{Z} \setminus \{0\})| = \mathfrak{c}$, podemos considerar uma indexação $\{\tilde{j}_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ de $\mathrm{Fn}(\mathfrak{c}, \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ tal que, para cada $j \in Fn(\mathfrak{c}, \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, o conjunto $A_j = \{\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[: j = \tilde{j}_\xi\}$ tenha cardinalidade $\mathfrak{c}$. Fixemos $j \in \mathrm{Fn}(\mathfrak{c}, \mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Como $\mathrm{dom}(j) \subseteq \mathfrak{c}$, $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) > \omega$ e $|\mathrm{dom}(j)| < \omega$, existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\mathrm{dom}(j) \subseteq \alpha$. Seja $\xi \in A_j$. Se $\xi < \alpha$, façamos $j_\xi = \{(0, 1)\}$. Se $\xi \geq \alpha$, façamos $j_\xi = \tilde{j}_\xi$. Temos que $\{j_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ é uma indexação de $Fn(\mathfrak{c}, \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ tal que $\mathrm{dom}(j_\xi) \subseteq \xi$ para todo $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$.

3 Denotemos por H o conjunto de todas as funções injetoras de ω em $\mathrm{Fn}(\mathfrak{c}, \mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Como $|H| = \mathfrak{c}$, podemos considerar uma indexação $\{\tilde{h}_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ de H tal que, para cada $h \in H$, o conjunto $A_h = \{\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[: h = \tilde{h}_\xi\}$ tenha cardinalidade $\mathfrak{c}$. Fixemos $h \in H$. Como $\bigcup_{n \in \omega} \mathrm{dom}(h(n)) \subseteq \mathfrak{c}$, $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) > \omega$ e $|\bigcup_{n \in \omega} \mathrm{dom}(h(n))| \leq \omega$, existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\bigcup_{n \in \omega} \mathrm{dom}(h(n)) \subseteq \alpha$. Seja $\xi \in A_h$. Se $\xi < \alpha$, façamos $h_\xi = g$, onde $g(n) = \{(\xi, n + 1)\}$ para cada $n \in \omega$. Note que $g \in H$. Se $\xi \geq \alpha$, façamos $h_\xi = \tilde{h}_\xi$. Temos que $\{h_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ é uma indexação de H tal que $\bigcup_{n \in \omega} \mathrm{dom}(h_\xi(n)) \subseteq \xi$ para todo $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$.

O próximo lema é essencial para a demonstração do principal resultado desta seção. No que se segue, $\mathcal{B}$ denotará uma base enumerável de $\mathbb{T}$ consistindo de arcos abertos não vazios e, por conveniência, contendo $\mathbb{T}$.

Lema 3.14. *Sejam I um conjunto de índices e $h : \omega \to \mathrm{Fn}(\mathfrak{c}, \mathbf{Z} \setminus \{0\}) \setminus \{\emptyset\}$ uma função. Sejam U um subconjunto aberto de $\mathbb{T}$, $A \in [\omega]^\omega$ e $f : I \to \mathcal{B}$ tal que $\{i \in I : f(i) \neq \mathbb{T}\}$ é finito. Então existem $m \in A$ e $g : I \to \mathcal{B}$ tais que $\overline{g(i)} \subseteq f(i)$ para todo $i \in I$, $\{i \in I : g(i) \neq \mathbb{T}\}$ é finito e $\sum_{i \in \mathrm{dom}(h(m))} h(m)(i)g(i) \subseteq U$.*

Demonstração. Como $\bigcup_{n \in A} \mathrm{dom}(h(n))$ pode ser infinito ou finito, temos dois casos a considerar.

Caso 1: Existe $A_1 \subseteq A$ infinito tal que $\mathrm{dom}(h(k)) \neq \mathrm{dom}(h(n))$ quaisquer que sejam $k, n \in A_1$ distintos.

Neste caso, existem $m \in A_1$ e $\mu \in I$ tais que $\mu \in \mathrm{dom}(h(m)) \setminus \{i \in I : f(i) \neq \mathbb{T}\}$. Seja $D = \mathrm{dom}(h(m)) \cup \{i \in I : f(i) \neq \mathbb{T}\}$. Para cada $i \in D \setminus \{\mu\}$ fixe $a_i \in f(i)$. Tome $a_\mu \in \mathbb{T}$ tal que $\sum_{i \in \mathrm{dom}(h(m))} h(m)(i)a_i \in U$. Pela continuidade da soma (e lembrando que $\mathbb{T}$ é regular), para cada $i \in D$ existe $U_i \in \mathcal{B}$ tal que $a_i \in U_i$, $\overline{U_i} \subseteq f(i)$ e $\sum_{i \in \mathrm{dom}(h(m))} h(m)(i)U_i \subseteq U$. Defina $g(i) = U_i$ para cada $i \in D$ e $g(i) = \mathbb{T}$ para cada $i \in I \setminus D$.

Caso 2: Existem $A_2 \subseteq A$ infinito e $D \in [I]^{<\omega}$ tal que $\mathrm{dom}(h(n)) = D$ para todo $n \in A_2$.

Como h é injetora, existe $\mu \in D$ tal que $\{h(n)(\mu) : n \in A_2\} \subseteq \mathbb{Z}$ é infinito (e, portanto, ilimitado em $\mathbb{Z}$). Assim, podemos tomar $m \in A_2$ tal que $h(m)(\mu)f(\mu) = \mathbb{T}$. Para cada $i \in D \setminus \{\mu\}$, fixe $a_i \in f(i)$. Tome $a_\mu \in f(\mu)$ tal que $\sum_{i \in D} h(m)(i)a_i \in U$. Como no caso anterior, para cada $i \in D$ existe $U_i \in \mathcal{B}$ tal que $a_i \in U_i$, $\overline{U_i} \subseteq f(i)$ e $\sum_{i \in \mathrm{dom}(h(m))} h(m)(i)U_i \subseteq U$. Defina $g(i) = U_i$ para cada $i \in D$ e $g(i) = \mathbb{T}$ para cada $i \in I \setminus D$. □

Vamos agora enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção.

Teorema 3.15. *Assumindo MA para ordens parciais enumeráveis, é possível munir o grupo abeliano livre de tamanho $\mathfrak{c}$ de uma topologia que o torna um grupo topológico enumeravelmente compacto sem sequências não triviais convergentes.*

Demonstração. Conforme havíamos dito, construiremos um subconjunto linearmente independente $X = \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ de $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$ por recursão em ξ de modo que $G = \langle X \rangle$, munido da topologia de subespaço, seja enumeravelmente compacto e não possua sequências não triviais convergentes. Para cada $n \in \omega$, definimos $x_n\restriction_\omega \in \mathbb{T}^\omega$ arbitrariamente. Seja $\beta \in [\omega, \mathfrak{c}[$ e suponha que, para cada $\alpha < \beta$, as seguintes condições estão satisfeitas:

(1) $x_\xi\restriction_\alpha \in \mathbb{T}^\alpha$ está definido para cada $\xi < \alpha$ e, se $\xi < \gamma < \alpha$, então $x_\xi\restriction_\gamma \subseteq x_\xi\restriction_\alpha$;

(2) $\sum_{\mu\in\mathrm{dom}(j_\xi)} j_\xi(\mu)x_\mu\restriction_\alpha(\xi) \neq 0 \in \mathbb{T}$ para cada $\xi \in [\omega, \alpha[$;

(3) $x_\xi\restriction_\alpha$ é um ponto de acumulação de

$$\left\{\sum_{\mu\in\mathrm{dom}(h_\xi(n))} h_\xi(n)(\mu)x_\mu\restriction_\alpha : n \in \omega\right\}$$

para cada $\xi \in [\omega, \alpha[$.

Vamos obter $\{x_\xi\restriction_\beta : \xi < \beta\} \subseteq \mathbb{T}^\beta$ de modo que:

(1) se $\xi < \gamma < \beta$, então $x_\xi\restriction_\gamma \subseteq x_\xi\restriction_\beta$;

(2) $\sum_{\mu\in\mathrm{dom}(j_\xi)} j_\xi(\mu)x_\mu\restriction_\beta(\xi) \neq 0 \in \mathbb{T}$ para cada $\xi \in [\omega, \beta[$;

(3) $x_\xi\restriction_\beta$ é um ponto de acumulação de

$$\left\{\sum_{\mu\in\mathrm{dom}(h_\xi(n))} h_\xi(n)(\mu)x_\mu\restriction_\beta : n \in \omega\right\}$$

para cada $\xi \in [\omega, \beta[$.

Temos dois casos a considerar.

Caso 1: β é um ordinal limite.

Neste caso, para cada $\xi < \beta$, definimos

$$x_\xi\restriction_\beta = \bigcup_{\alpha\in]\xi,\beta[} x_\xi\restriction_\alpha$$

o que assegura (1). Seja $\xi \in [\omega, \beta[$. Como β é limite, existe $\alpha \in [\omega, \beta[$ tal que $\xi < \alpha$. Logo,

$$\sum_{\mu\in\mathrm{dom}(j_\xi)} j_\xi(\mu)x_\xi\restriction_\beta(\xi) = \sum_{\mu\in\mathrm{dom}(j_\xi)} j_\xi(\mu)x_\xi\restriction_\alpha(\xi) \neq 0 \in \mathbb{T}$$

por hipótese. Para mostrar que (3) também está satisfeita, considere $\xi \in [\omega, \beta[$. Queremos mostrar que $x_\xi\restriction_\beta$ é ponto de acumulação de $\{\sum_{\mu\in\mathrm{dom}(h_\xi(n))} h_\xi(n)(\mu)x_\mu\restriction_\beta : n \in \omega\}$.

Para tanto, considere V uma vizinhança aberta de $x_\xi\restriction_\beta$ em $\mathbb{T}^\beta$ tal que $V = \prod_{\gamma<\beta} V_\gamma$ com $\{\gamma < \beta : V_\gamma \neq \mathbb{T}\}$ finito. Como β é limite, existe $\alpha < \beta$ tal que $V_\gamma = \mathbb{T}$ para todo $\gamma \in [\alpha, \beta[$. Note que $U = \prod_{\gamma<\alpha} V_\gamma$ é uma vizinhança $x_\xi\restriction_\alpha$ em $\mathbb{T}^\alpha$. Como, por hipótese, $x_\xi\restriction_\alpha$ é ponto de acumulação de $\{\sum_{\mu\in\mathrm{dom}(h_\xi(n))} h_\xi(n)(\mu)x_\mu\restriction_\alpha : n \in \omega\}$ temos que, para cada $\xi \in [\omega, \alpha[$, $(\{\sum_{\mu\in\mathrm{dom}(h_\xi(n))} h_\xi(n)(\mu)x_\mu\restriction_\alpha : n \in \omega\} \setminus \{x_\xi\restriction_\alpha\}) \cap U \neq \emptyset$, o que implica que $(\{\sum_{\mu\in\mathrm{dom}(h_\xi(n))} h_\xi(n)(\mu)x_\mu\restriction_\beta : n \in \omega\} \setminus \{x_\xi\restriction_\beta\}) \cap V \neq \emptyset$ (pela forma como tomamos α).

Caso 2: β é um ordinal sucessor, isto é, $\beta = \alpha + 1$ para algum $\alpha < \mathfrak{c}$.

Primeiramente, definimos $x_\alpha\restriction_\alpha \in \mathbb{T}^\alpha$ como sendo um ponto de acumulação do conjunto

$$\left\{ \sum_{\mu\in\mathrm{dom}(h_\alpha(n))} h_\alpha(n)(\mu)x_\mu\restriction_\alpha : n \in \omega \right\}.$$

Note que isso é possível, pois $\mathbb{T}^\alpha$ é compacto.

Para conciliar as condições (2) e (3), estenderemos os $x_\xi\restriction_\alpha \in \mathbb{T}^\alpha$ a $x_\xi\restriction_\beta \in \mathbb{T}^\beta$ em duas etapas: primeiro, trabalharemos com os $\xi's$ que estão diretamente relacionados a $\mathrm{dom}(j_\alpha)$; depois, cuidaremos dos demais. Para tanto, definimos recursivamente os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} S(n) &= \omega, \text{ se } n \in \omega, \text{ e} \\ S(\xi) &= \{\xi\} \cup \bigcup \{S(\mu) : \mu \in \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{dom}(h_\xi(n))\}, \text{se } \xi \in [\omega, \mathfrak{c}[. \end{aligned}$$

Se $F \subseteq \mathfrak{c}$, escreveremos $S(F) = \bigcup_{\xi\in F} S(\xi)$. Note que $S(\xi)$ é enumerável para todo $\xi < \mathfrak{c}$ e, se $\mu \in S(\xi) \setminus \omega$, então $\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{dom}(h_\mu(n)) \subseteq S(\xi)$.[4]

Agora, lançaremos mão de MA para ordens parciais enumeráveis para obter uma função $\Phi : S(\mathrm{dom}(j_\alpha)) \to \mathbb{T}$, a qual será utilizada para definir $x_\xi\restriction_\beta(\alpha)$ para todo $\xi \in S(\mathrm{dom}(j_\alpha))$.

Seja

$$\mathbb{P} = \left\{ f \in \mathrm{Fn}(S(\mathrm{dom}(j_\alpha)), \mathcal{B}) : \mathrm{dom}(j_\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(f) \text{ e } 0 \notin \overline{\sum_{\mu\in\mathrm{dom}(j_\alpha)} j_\alpha(\mu)f(\mu)} \right\}.$$

4 A demonstração se dá por indução em ξ. Para cada $n \in \omega$, $S(n) = \omega$ é enumerável e a segunda afirmação é satisfeita por vacuidade. Seja $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$ e suponha que, para cada $\mu < \xi$, $S(\mu)$ é enumerável. Como $\mathrm{dom}(h_\xi(n))$ é finito para cada $n \in \omega$, temos que $\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{dom}(h_\xi(n))$ é enumerável. Logo, $S(\xi) = \{\xi\} \cup \bigcup\{S(\mu) : \mu \in \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{dom}(h_\xi(n))\}$ é também enumerável. Por fim, seja $\mu \in S(\xi)$. Por definição de $S(\xi)$, temos que $\mu = \xi$ ou $\mu \in S(\nu)$ para algum $\nu \in \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{dom}(h_\xi(n))$. Se $\mu = \xi$ temos que $\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{dom}(h_\mu(n)) \subseteq S(\xi) = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{dom}(h_\xi(n))$. No segundo caso, temos que $\nu < \xi$ pois $\nu \in \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{dom}(h_\xi(n)) \subseteq \xi$. Como $\mu \in S(\nu)$, temos por hipótese de indução que $\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{dom}(h_\mu(n)) \subseteq S(\nu) \subseteq S(\xi)$.

Dados $f, g \in \mathbb{P}$, escreveremos $f \leq g$ exatamente quando $\text{dom}(g) \subseteq \text{dom}(f)$ e, para cada $\mu \in \text{dom}(g)$, $f(\mu) = g(\mu)$ ou $\overline{f(\mu)} \subseteq g(\mu)$. Note que $(\mathbb{P}, \leq)$ é uma ordem parcial. De fato,

- $\leq$ *é reflexiva*, pois para cada $f \in \mathbb{P}$, temos que $\text{dom}(f) \subseteq \text{dom}(f)$ e, para cada $\mu \in \text{dom}(f)$, temos que $f(\mu) = f(\mu)$. Logo, $f \leq f$.

- $\leq$ *é antissimétrica*, pois se $f, g \in \mathbb{P}$ são tais que $f \leq g$ e $g \leq f$, então $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$. Além disso, para cada $\mu \in \text{dom}(g) = \text{dom}(f)$, temos duas possibilidades: $f(\mu) = g(\mu)$, ou $\overline{f(\mu)} \subseteq g(\mu)$ e $\overline{g(\mu)} \subseteq f(\mu)$, donde concluímos que $f(\mu) = g(\mu)$. Logo, $f = g$.

- $\leq$ *é transitiva*, pois se $f, g, h \in \mathbb{P}$ são tais que $f \leq g$ e $g \leq h$, então $\text{dom}(g) \subseteq \text{dom}(f)$ e $\text{dom}(h) \subseteq \text{dom}(g)$, donde concluímos que $\text{dom}(h) \subseteq \text{dom}(f)$. Seja $\mu \in \text{dom}(h)$. Como $f \leq g$, temos que $f(\mu) = g(\mu)$, ou $\overline{f(\mu)} \subseteq g(\mu)$. Analogamente, como $g \leq h$, temos que $g(\mu) = h(\mu)$, ou $\overline{g(\mu)} \subseteq h(\mu)$. Disto segue que $f(\mu) = h(\mu)$, ou $\overline{f(\mu)} \subseteq h(\mu)$. Logo, $f \leq h$.

Para cada $F \subseteq \alpha$ finito, $n \in \omega$ e $\nu \in S(\text{dom}(j_\alpha))$, seja

$$E(\nu, F, n) = \left\{ m \in \omega : \forall \theta \in F \left\| \sum_{\mu \in \text{dom}(h_\nu(m))} h_\nu(m)(\mu) x_\mu{\restriction}_\alpha(\theta) - x_\nu{\restriction}_\alpha(\theta) \right\| < \frac{1}{n+1} \right\}$$

onde $\| \ \|$ é a norma usual em $\mathbb{R}^2$ restrita a $\mathbb{T}$.[5]

Afirmação 3.16. *Para quaisquer $F \in [\alpha]^{<\omega}$, $n, k \in \omega$ e $\nu \in S(\text{dom}(j_\alpha))$, o conjunto*

$$D = \Bigg\{ g \in \mathbb{P} : \exists m \in E(\nu, F, n) \setminus k, \text{dom}(h_\nu(m)) \subseteq \text{dom}(g),$$
$$\sum_{\mu \in \text{dom}(h_\nu(m))} h_\nu(m)(\mu) g(\mu) \subseteq g(\nu) \text{ e } diam(g(\nu)) < \frac{1}{n+1} \Bigg\}$$

é denso em $\mathbb{P}$.

5 Lembre-se de que $x_\nu{\restriction}_\alpha$ é um ponto de acumulação do conjunto $\{\sum_{\mu \in \text{dom}(h_\nu(n))} h_\nu(n)(\mu) x_\nu{\restriction}_\alpha : n \in \omega\}$. Assim, ao considerar uma vizinhança básica de $x_\nu{\restriction}_\alpha$, $V = \prod_{\gamma < \alpha} V_\gamma$, sabemos que $F = \{\gamma < \alpha : V_\gamma \neq \mathbb{T}\}$ é finito. Se, para cada $\theta \in F$, tomarmos V_θ como sendo o arco centrado em $x_\nu{\restriction}_\alpha(\theta)$ de diâmetro menor que $\frac{1}{n+1}$, o conjunto $E(\nu, F, n)$ ficará responsável por guardar os índices dos pontos do conjunto $\{\sum_{\mu \in \text{dom}(h_\nu(n))} h_\nu(n)(\mu) x_\nu{\restriction}_\alpha : n \in \omega\}$ que caem dentro de V.

Demonstração. Precisamos mostrar que dada $f \in \mathbb{P}$ é possível encontrar $g \in D$ tal que $g \leq f$. Faremos isso com o auxílio do Lema 3.14.

Tome $I = \mathfrak{c}$, $h = h_\nu$, $A = E(\nu, F, n) \setminus k$ e U um aberto de $\mathbb{T}$ definido da seguinte forma: se $\nu \in \mathrm{dom}(f)$ e $f(\nu) \neq \mathbb{T}$, então U será igual a um arco centrado no centro de $f(\nu)$ com diametro menor que $\frac{1}{n+1}$ e cujo fecho continua contido em $f(\nu)$; caso contrário, tomamos U como sendo um arco qualquer com diametro menor que $\frac{1}{n+1}$.

Considere $\tilde{f} : I \to \mathcal{B}$ dada por

$$\tilde{f}(\xi) = \begin{cases} f(\xi), & \text{se } \xi \in \mathrm{dom}(f) \\ \mathbb{T}, & \text{se } \xi \notin \mathrm{dom}(f) \end{cases}$$

Perceba que $B_{\tilde{f}} = \{\xi \in I : \tilde{f}(\xi) \neq \mathbb{T}\} \subseteq \mathrm{dom}(f)$ e, portanto, é finito. Segue do Lema 3.14 que existem $m \in A$ e $\tilde{g} : I \to \mathcal{B}$ tais que $\overline{\tilde{g}(\xi)} \subseteq \tilde{f}(\xi)$ para todo $\xi \in I$, $B_{\tilde{g}} := \{\xi \in I : \tilde{g}(\xi) \neq \mathbb{T}\}$ é finito e $\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(h(m))} h(m)(\mu)\tilde{g}(\mu) \subseteq U$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\tilde{g}(\xi) = \mathbb{T}$ para $\xi \notin S(\mathrm{dom}(j_\alpha))$, pois $\mathrm{dom}(h_\nu(m)) \subseteq S(\mathrm{dom}(j_\alpha))$ (já que $\nu \in S(\mathrm{dom}(j_\alpha))$) e, além disso, $\mathrm{dom}(f) \subseteq S(\mathrm{dom}(j_\alpha))$, o que significa que fora de $S(\mathrm{dom}(j_\alpha))$ não exigimos nada de $\tilde{g}$. Portanto, $B_{\tilde{g}} \subseteq S(\mathrm{dom}(j_\alpha))$.

Podemos supor também que $\tilde{g}(\nu) = U$ porque, como $\mathrm{dom}(h_\nu(m)) \subseteq \nu$, $\tilde{g}(\nu)$ não interfere nas condições satisfeitas previamente por $\tilde{g}$ e, além disso, $\overline{U} \subseteq \tilde{f}(\nu)$.

Seja, portanto, $g : B_{\tilde{g}} \cup \mathrm{dom}(f) \to \mathcal{B}$ dada por $g(\xi) = \tilde{g}(\xi)$. Note que $\mathrm{dom}(g) = B_{\tilde{g}} \cup \mathrm{dom}(f) \subseteq S(\mathrm{dom}(j_\alpha))$ é finito e $\mathrm{im}(g) \subseteq \mathcal{B}$. Como $f \in \mathbb{P}$ temos que $\mathrm{dom}(j_\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ e, ainda, $0 \notin \overline{\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(j_\alpha)} j_\alpha(\mu) f(\mu)} \supseteq \overline{\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(j_\alpha)} j_\alpha(\mu) g(\mu)}$, pois $\overline{g(\mu)} \subseteq f(\mu)$ para todo $\mu \in \mathrm{dom}(j_\alpha)$. Portanto, $0 \notin \overline{\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(j_\alpha)} j_\alpha(\mu) g(\mu)}$, donde concluímos que $g \in \mathbb{P}$.

O próximo passo é mostrar que $g \in D$. Perceba que $\mathrm{dom}(h_\nu(m)) \subseteq B_{\tilde{g}} \subseteq \mathrm{dom}(g)$, pois se $\mu_0 \in \mathrm{dom}(h_\nu(m))$ fosse tal que $\mu_0 \notin B_{\tilde{g}}$, teríamos que $\tilde{g}(\mu_0) = \mathbb{T}$ e, portanto, $\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(h_\nu(m))} h_\nu(m)(\mu)\tilde{g}(\mu) = \mathbb{T}$ não estaria contido em U. Como $g(\nu) = \tilde{g}(\nu) = U$, temos que $\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(h_\nu(m))} h_\nu(m)(\mu)\tilde{g}(\mu) = \sum_{\mu \in \mathrm{dom}(h_\nu(m))} h_\nu(m)(\mu) g(\mu) \subseteq g(\nu)$ e $diam(g(\nu)) < \frac{1}{n+1}$. Portanto, $g \in D$.

Por fim, como $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ e vale que $\overline{\tilde{g}(\xi)} \subseteq \tilde{f}(\xi)$ para todo $\xi \in I$, temos que $g \leq f$. □

Seja $\mathcal{D}$ a coleção dos subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ dados pela Afirmação 3.16. Dado que $\mathbb{P}$ é enumerável e $|\mathcal{D}| \leq \max\{|\alpha|, \omega\} < \mathfrak{c}$, MA para ordens parciais enumeráveis garante a existência de um filtro $\mathcal{D}$-genérico G sobre $\mathbb{P}$.

Seja $\nu \in S(\mathrm{dom}(j_\alpha))$. Note que $\bigcap_{f \in G, \nu \in \mathrm{dom}(f)} \overline{f(\nu)} \neq \emptyset$. De fato, sejam $f, g \in G$ tais que $\nu \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$. Como G é filtro, existe $r \in G$ tal que $r \leq f, g$. Logo,

$r(\nu) \subseteq f(\nu) \cap g(\nu)$. Assim, temos que $f(\nu) \cap g(\nu) \neq \emptyset$ e, portanto, $\overline{f(\nu)} \cap \overline{g(\nu)} \neq \emptyset$. Como $\mathbb{T}$ é compacto, segue que $\bigcap_{f \in G, \nu \in \mathrm{dom}(f)} \overline{f(\nu)} \neq \emptyset$. Dessa maneira, para cada $\nu \in S(\mathrm{dom}(j_\alpha))$ podemos escolher $\Phi(\nu) \in \bigcap_{f \in G, \nu \in \mathrm{dom}(f)} \overline{f(\nu)}$, obtendo assim uma aplicação $\Phi : S(\mathrm{dom}(j_\alpha)) \to \mathbb{T}$.

Definimos, para cada $\xi \in S(\mathrm{dom}(j_\alpha))$, $x_\xi\restriction_\beta(\alpha) = \Phi(\xi)$. Como a condição (2) está satisfeita para todo $\xi < \alpha$, basta mostrar que a mesma é válida para $\xi = \alpha$. Dada $f \in G$ temos que

$$\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(j_\alpha)} j_\alpha(\mu) x_\mu\restriction_\beta(\alpha) = \sum_{\mu \in \mathrm{dom}(j_\alpha)} j_\alpha(\mu)\Phi(\mu) \in \sum_{\mu \in \mathrm{dom}(j_\alpha)} j_\alpha(\mu)\overline{f(\mu)} \subseteq \overline{\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(j_\alpha)} j_\alpha(\mu) f(\mu)}.$$

Pela definição de $\mathbb{P}$, $0 \notin \overline{\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(j_\alpha)} j_\alpha(\mu) f(\mu)}$, donde concluímos que

$$\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(j_\alpha)} j_\alpha(\mu) x_\mu\restriction_\beta(\alpha) \neq 0.$$

Assim, a condição (2) é satisfeita no passo β.

Vamos, agora, definir recursivamente $x_\xi\restriction_\beta(\alpha)$ para cada $\xi \in \beta \setminus S(\mathrm{dom}(j_\alpha))$. Seja $\xi \in \beta \setminus S(\mathrm{dom}(j_\alpha))$ e suponha que, para todo $\eta \in S(\mathrm{dom}(j_\alpha)) \cup \xi$, $x_\eta\restriction_\beta(\alpha)$ esteja definido de modo a respeitar as condições (1)-(3).

Por hipótese, $x_\xi\restriction_\alpha$ é ponto de acumulação de $\left\{\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(h_\xi(n))} h_\xi(n)(\mu) x_\mu\restriction_\alpha : n \in \omega\right\}$ e $x_\mu\restriction_\beta(\alpha)$ já foi definido para cada $\mu \in \bigcup_{n \in \omega} \mathrm{dom}(h_\xi(n)) \subseteq \xi$. Considere o subconjunto infinito de $\mathbb{T}$ dado por $\{\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(h_\xi(n))} h_\xi(n)(\mu) x_\mu\restriction_\beta(\alpha) : n \in \omega\}$. Como $\mathbb{T}$ é compacto, existe $a \in \mathbb{T}$ ponto de acumulação de tal conjunto, donde segue que o ponto $x_\xi\restriction_\alpha{}^\frown a$ é um ponto de acumulação de

$$\left\{\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(h_\xi(n))} h_\xi(n)(\mu) x_\mu\restriction_\alpha : n \in \omega\right\}^\frown \left\{\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(h_\xi(n))} h_\xi(n)(\mu) x_\mu \restriction_\beta (\alpha) : n \in \omega\right\}.$$

Assim, fazendo $x_\xi\restriction_\beta(\alpha) = a$, temos que a condição (1) vale para todo $\xi < \beta$ e a condição (3) vale para todo $\xi \in [\omega, \beta[$.

Ao fim do processo indutivo, para cada $\xi < \mathfrak{c}$ define-se $x_\xi = \bigcup_{\eta \in]\xi, \mathfrak{c}[} x_\xi\restriction_\eta$.

Note que se $X = \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ e $G = \langle X \rangle$, então a condição (2) garante que X é linearmente independente, e disto segue que G é algebricamente isomorfo ao grupo abeliano livre de tamanho $\mathfrak{c}$.

Observe também que G, visto como subespaço de $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$, é enumeravelmente compacto e sem sequências não triviais convergentes. De fato, sabemos que cada subconjunto infinito enumerável S de G (que não contém o 0) é "codificado" por uma função injetora $h : \omega \to \mathrm{Fn}(\mathfrak{c}, \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \setminus \{\emptyset\}$ e que $|\{\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[: h_\xi = h\}| = \mathfrak{c}$. Da condição (3) segue que x_ξ é ponto de acumulação de $\{\sum_{\mu \in \mathrm{dom}(h_\xi(n))} h_\xi(n)(\mu) x_\mu : n \in \omega\}$ e do fato de X ser linearmente independente segue que $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é uma enumeração injetora de X. Logo, cada subconjunto infinito enumerável de G possui $\mathfrak{c}$ pontos de acumulação em G e, portanto, G é um grupo enumeravelmente compacto sem sequências não triviais convergentes. $\square$

4 CONSTRUÇÃO ASSUMINDO A EXISTÊNCIA DE UM ULTRAFILTRO SELETIVO

Neste capítulo, apresentaremos uma construção de um grupo de van Douwen, proposta por García-Ferreira, Tomita e Watson [7], assumindo a existência de um ultrafiltro seletivo.

4.1 ULTRAPRODUTOS

Os ultraprodutos foram introduzidos por Łoś em 1955. Essa estrutura surgiu inicialmente na teoria de modelos, mas forneceu motivação para que um conceito similar fosse definido em topologia geral. Foi demonstrado que essa construção preserva muitas propriedades conhecidas de topologia (como Hausdorff e completamente regular) mas também falha em preservar muitas outras (como normalidade e compacidade).

Sejam G um grupo e $p \in \omega^*$. Dadas $f, g \in G^\omega$, escrevemos

$$f \sim g \Leftrightarrow \{n \in \omega : f(n) = g(n)\} \in p.$$

Note que $\sim$ é uma relação de equivalência no conjunto G^ω:

- $\sim$ é reflexiva: $\{n \in \omega : f(n) = f(n)\} = \omega \in p$.
- $\sim$ é simétrica: se $f \sim g$, então $\{n \in \omega : g(n) = f(n)\} = \{n \in \omega : f(n) = g(n)\} \in p$. Logo, $g \sim f$.
- $\sim$ é transitiva: se $f \sim g$ e $g \sim h$ então $\{n \in \omega : f(n) = g(n)\} \in p$ e $\{n \in \omega : g(n) = h(n)\}$. Perceba que $\{n \in \omega : f(n) = g(n)\} \cap \{n \in \omega : g(n) = h(n)\} \subseteq \{n \in \omega : f(n) = h(n)\}$ e, portanto, temos que $\{n \in \omega : f(n) = h(n)\} \in p$. Logo, $f \sim h$.

A classe de equivalência de f, $[f]_p$, é o conjunto $\{g \in G^\omega : g \sim f\}$. Denote por $\text{ult}_p(G)$ o conjunto $G^\omega/\sim$ de todas as classes de equivalência determinadas por $\sim$ em G^ω. O conjunto $\text{ult}_p(G)$ é denominado o *ultraproduto de G associado ao ultrafiltro p*.

Neste capítulo, trabalharemos com o ultraproduto $\mathrm{ult}_p([\mathfrak{c}]^{<\omega})$, onde $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$ está munido da operação de diferença simétrica.

Proposição 4.1. *Seja $p \in \omega^*$. O conjunto $ult_p([\mathfrak{c}]^{<\omega})$ munido da operação*

$$[f]_p \Delta [g]_p = [f \Delta g]_p$$

onde

$$(f\Delta g)(n) = f(n)\Delta g(n) \text{ para todo } n \in \omega$$

é um grupo booleano (e, portanto, é um espaço vetorial sobre 2*).*

Demonstração. Sejam $f_1, f_2, g_1, g_2 \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ e suponha que $[f_1]_p = [f_2]_p$ e $[g_1]_p = [g_2]_p$. Queremos mostrar que $[f_1\Delta g_1]_p = [f_2\Delta g_2]_p$. Seja $k \in [f_1\Delta g_1]_p$; neste caso $A = \{n \in \omega : k(n) = f_1(n)\Delta g_1(n)\} \in p$. Como $[f_1]_p = [f_2]_p$, temos que $B = \{n \in \omega : f_1(n) = f_2(n)\} \in p$. Note que $C = \{n \in \omega : k(n) = f_2(n)\Delta g_1(n)\} \in p$, pois $C \supseteq A \cap B \in p$. Ainda, como $[g_1]_p = [g_2]_p$, temos que $D = \{n \in \omega : g_1(n) = g_2(n)\} \in p$. Disto segue que $C \cap D \subseteq \{n \in \omega : k(n) = f_2(n)\Delta g_2(n)\}$. Logo, $\{n \in \omega : k(n) = f_2(n)\Delta g_2(n)\} \in p$, concluímos disto que $k \in [f_2\Delta g_2]_p$. Como duas classes de equivalência são iguais ou disjuntas, temos o resultado.

Como a diferença simétrica é associativa e comutativa, concluímos que Δ é uma operação associativa e comutativa definida em $\mathrm{ult}_p([\mathfrak{c}]^{<\omega})$. Considere $\vec{0}$ a função constante definida por $\vec{0}(n) = \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Assim, para cada $f \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ e $n \in \omega$, $f\Delta\vec{0}(n) = f(n)\Delta\vec{0}(n) = f(n)\Delta\emptyset = f(n)$. Logo, $\{n \in \omega : f\Delta\vec{0}(n) = f(n)\} \in p$ e, portanto, $[f\Delta\vec{0}]_p = [f]_p = [\vec{0}\Delta f]_p$. Portanto, $[\vec{0}]_p$ é o elemento neutro da operação Δ. Ainda, se $f \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$, temos que $f(n)\Delta f(n) = \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Logo, $[f]_p\Delta[f]_p = [f\Delta f]_p = [\vec{0}]_p$. Portanto, $[f]_p$ é o elemento inverso de $[f]_p$. □

O espaço vetorial acima satisfaz as propriedades listadas na proposição a seguir.

Proposição 4.2. *Se $\mathcal{A} = \{[g_\alpha]_p : \alpha \in I\} \subseteq \mathrm{ult}_p([\mathfrak{c}]^{<\omega})$ é uma indexação injetora, então:*

(i) $\mathcal{A}$ é linearmente independente se, e somente se, para cada $F \in [I]^{<\omega}$ temos que $\{n \in \omega : \Delta_{\alpha\in F}g_\alpha(n) \neq \emptyset\} \in p$;

(ii) $\mathcal{A}$ gera $\mathrm{ult}_p([\mathfrak{c}]^{<\omega})$ se, e somente se, para cada $g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ existe $F \in [I]^{<\omega}$ tal que $\{n \in \omega : g(n) = \Delta_{\alpha\in F}g_\alpha(n)\} \in p$.

Demonstração. (i) A família $\mathcal{A}$ é linearmente independente se, e somente se, $\Delta_{\alpha\in F}[g_\alpha] \neq [\vec{0}]$ para cada $F \in [I]^{<\omega}$. Perceba que se isto é satisfeito se, e somente se, $A = \{n \in \omega : \Delta_{\alpha\in F}g_\alpha(n) \neq \emptyset\} \in p$.

(ii) A família $\mathcal{A}$ gera $\mathrm{ult}_p([\mathfrak{c}]^{<\omega})$ se, e somente se, para cada $g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$, existe $F \in [I]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $[g]_p = \Delta_{\alpha\in F}[g_\alpha]_p$. Perceba que isto é satisfeito se, e somente se, $A = \{n \in \omega : g(n) = \Delta_{\alpha\in F} g_\alpha(n)\} \in p$. □

4.2 ULTRAFILTROS SELETIVOS

Definição 4.3. *Um ultrafiltro $p \in \omega^*$ é dito* seletivo *se para cada $f : \omega \to \omega$ existe $A \in p$ tal que $f\restriction_A$ é constante ou injetora.*

Proposição 4.4. *Seja $p \in \omega^*$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) Para cada $f : \omega \to \omega$ existe $A \in p$ tal que $f\restriction_A$ é constante ou injetora.

(ii) Se $\{P_n : n \in \omega\}$ é uma partição de ω, então existe $m \in \omega$ tal que $P_m \in p$ ou existe $B \in p$ tal que $|B \cap P_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$.

(iii) Para cada $g : [\omega]^2 \to \{0,1\}$ existe $C \in p$ tal que C é g-homogêneo (isto é, existe $j \in \{0,1\}$ tal que $g(\{a,b\}) = j$ para todo $\{a,b\} \in [C]^2$).

(iv) Para cada partição $\{P_0, P_1\}$ de $[\omega]^2$ existem $D \in p$ e $j \in \{0,1\}$ tais que $[D]^2 \subseteq P_j$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$: Seja $\{P_n : n \in \omega\}$ uma partição de ω e consideremos $f : \omega \to \omega$ dada por $f(x) = n$ se, e somente se, $x \in P_n$. Por hipótese, existe $A \in p$ tal que $f\restriction_A$ é constante ou injetora. No primeiro caso temos que existe $n \in \omega$ tal que $P_n \in p$. No segundo, temos que $|A \cap P_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Seja $f : \omega \to \omega$ e consideremos $\{P_n : n \in \omega\}$ a partição de ω definida pela seguinte relação de equivalência em ω: $n \sim m$ se, e somente se, $f(n) = f(m)$. Por hipótese, existe $m \in \omega$ tal que $P_m \in p$ ou existe $B \in p$ tal que $|B \cap P_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$. No primeiro caso, se considerarmos $A = P_m$, temos que $f\restriction_A$ é constante. No segundo, se considerarmos $A = B$, temos que $f\restriction_A$ é injetora.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Seja $g : [\omega]^2 \to \{0,1\}$. Definamos $X_0^0 = \{n \in \omega \setminus \{0\} : g(\{n,0\}) = 0\}$ e $X_1^0 = \{n \in \omega \setminus \{0\} : g(\{n,0\}) = 1\}$. Temos que $\omega \setminus \{0\} = X_0^0 \cup X_1^0$ e $X_0^0 \cap X_1^0 = \emptyset$. Como $\omega \setminus \{0\} \in p$, existe $i \in \{0,1\}$ tal que $X_i^0 \in p$. Façamos $A_0 = X_i^0$ e $l_0 = i$. Seja $m \in \omega$ e suponhamos definidos $A_m \in p$ e $l_m \in \{0,1\}$. Consideremos $X_0^{m+1} = \{n \in A_m \setminus (m+1) : g(\{n, m+1\}) = 0\}$ e $X_1^{m+1} = \{n \in A_m \setminus (m+1) : g(\{n, m+1\}) = 1\}$. Novamente, existe $i \in \{0,1\}$ tal que $X_i^{m+1} \in p$. Façamos $A_{m+1} = X_i^{m+1}$ e $l_{m+1} = i$.

Observamos que $A_0 \supseteq A_1 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq ....$ Sejam $P_0 = \omega \setminus A_0$ e $P_{n+1} = A_n \setminus A_{n+1}$ para cada $n \in \omega$. Temos que $\{P_n : n \in \omega\}$ é uma partição de ω tal que $P_n \notin p$, qualquer que seja $n \in \omega$. De (iii) segue que existe $A \in p$ tal que $|A \cap P_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$. Fixemos um tal A e consideremos $f : \omega \to \omega$ dada por $f(0) = 0$ e

$$f(n+1) = \max\{f(n), \max(A \setminus A_{f(n)})\} + 1$$

para cada $n \in \omega$. Uma vez que f é estritamente crescente e $f(0) = 0$, temos que $\{[f(n), f(n+1)[: n \in \omega\}$ é uma partição de ω. Como cada elemento dessa partição é um subconjunto finito de ω, nenhum deles pertence a p. De (iii) segue que existe $B \in p$ tal que $|B \cap [f(n), f(n+1)[| \leq 1$ para todo $n \in \omega$. Note que $A \cap B \in p$.

Sejam $\{x_n : n \in \omega\}$ uma enumeração crescente de $A \cap B$, $Y_0 = \{x_{2n} : n \in \omega\}$ e $Y_1 = \{x_{2n+1} : n \in \omega\}$. Tomemos $i \in \{0, 1\}$ tal que $Y_i \in p$ e façamos $D = Y_i$. Afirmamos que se $m, n \in D$ e $m < n$, então $n \in A_m$. De fato, da definição de D segue que existe $k \in \omega$ tal que

$$m < f(k) < f(k+1) \leq n$$

e, portanto, $n > \max(A \setminus A_{f(k)})$. Como $n \in A$, temos que $n \in A_{f(k)}$. Contudo, $A_m \supseteq A_{f(k)}$ uma vez que $m < f(k)$. Logo, $n \in A_m$.

Sejam $D_0 = \{n \in D : l_n = 0\}, D_1 = \{n \in D : l_n = 1\}$ e $i \in \{0, 1\}$ tais que $D_i \in p$. Temos que $C = D_i$ é g-homogêneo. De fato, se $\{m, n\} \in [C]^2$ e $m < n$, então $g(\{m, n\}) = l_m = i$, uma vez que $n \in A_m$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Seja $\{P_n : n \in \omega\}$ uma partição de ω. Suponhamos que $P_n \notin p$, para cada $n \in \omega$. Definamos $g : [\omega]^2 \to \{0, 1\}$ da seguinte forma: $g(\{x, y\}) = 0$ se $\{x, y\} \subseteq P_n$ para algum $n \in \omega$ e $g(\{x, y\}) = 1$, caso contrário. Por hipótese, existe $A \in p$ tal que g é constante em $[A]^2$. Como estamos supondo que $P_n \notin p$, para cada $n \in \omega$, temos que $|A \cap P_n| \leq 1$, para cada $n \in \omega$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Seja $\{P_0, P_1\}$ uma partição de $[\omega]^2$. Consideremos $g : [\omega]^2 \to \{0, 1\}$ dada por $g(\{x, y\}) = 0$ se $\{x, y\} \in P_0$ e $g(\{x, y\}) = 1$ se $\{x, y\} \in P_1$. Por hipótese, existe $C \in p$ tal que C é g-homogêneo e, portanto, existe $j \in \{0, 1\}$ tal que $[C]^2 \subseteq P_j$.

$(iv) \Rightarrow (iii)$: Seja $g : [\omega]^2 \to \{0, 1\}$. Consideremos $\{P_0, P_1\}$ a seguinte partição de $[\omega]^2$: $\{x, y\} \in P_0$ se, e somente se, $g(\{x, y\}) = 0$. Por hipótese, existem $D \in p$ e $j \in \{0, 1\}$ tais que $[D]^2 \subseteq P_j$. Logo, D é g-homogêneo. □

Definição 4.5. *Um ultrafiltro $p \in \omega^*$ é dito um* P-ponto *se para cada sequência $\{A_n : n \in \omega\}$ de elementos de p existe $A \in p$ tal que $A \setminus A_n$ é finito para todo $n \in \omega$.*

Lema 4.6. *Todo ultrafiltro seletivo é um P-ponto.*

Demonstração. Seja $\{A_n : n \in \omega\}$ uma sequência de elementos de p. Defina $B_0 = \omega$ e $B_n = \bigcap_{i<n} A_n$ para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$. Note que $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots \supseteq B_n \supseteq \ldots$ e que $B_n \in p$ para cada $n \in \omega$. Isto induz uma partição em ω dada pelos conjuntos $C_n = B_n \setminus B_{n+1}$, onde $n \in \omega$. Como $B_{n+1} \in p$, temos que $C_n \notin p$ para cada $n \in \omega$. Como p é seletivo, do item (ii) da Proposição 4.4 segue que existe $A \in p$ tal que $|A \cap C_n| \leq 1$ para cada $n \in \omega$. Assim, $A \setminus A_n \subseteq \bigcup_{m<n+1}(A \cap C_m)$ é finito para todo $n \in \omega$. □

A existência de ultrafiltros seletivos é independente de ZFC. Assumindo CH ou MA, é possível mostrar que existem $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos. Por outro lado, Kunen [14] mostrou que existe um modelo de ZFC no qual não há ultrafiltros seletivos.

4.3 A CONSTRUÇÃO DE GARCÍA-FERREIRA, TOMITA E WATSON

Nesta seção, apresentaremos a construção de García-Ferreira, Tomita e Watson [7] de um grupo de van Douwen, assumindo a existência de um ultrafiltro seletivo.

Fixado um ultrafiltro seletivo p, nosso objetivo será construir um subconjunto linearmente independente $X = \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ de $2^{\mathfrak{c}}$ de modo que o grupo $G = \langle X \rangle$ seja p-compacto e sem sequências não triviais convergentes.

Para alcançar nosso objetivo, faremos uso de algumas propriedades do ultraproduto $\mathrm{ult}_p([\mathfrak{c}]^{<\omega})$. Da seletividade de p segue que esse ultraproduto será constituído das classes de funções injetoras e das classes de funções constantes de ω em $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$. Selecionaremos uma família de funções injetoras $\{f_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ que, além de representar convenientemente certas subsequências de sequências injetoras de elementos de $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$, é tal que $\{[f_\xi]_p : \xi < \mathfrak{c}\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é uma base para $\mathrm{ult}_p([\mathfrak{c}]^{<\omega})$.

Por fim, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, construiremos um homomorfismo de grupos $\Phi_\alpha : [\mathfrak{c}]^{<\omega} \to 2$ satisfazendo $\Phi_\alpha(\{\xi\}) = p\text{-}\lim\{\Phi_\alpha(f_\xi(n)) : n \in \omega\}$ e tal que $\Phi_\alpha(F_\alpha) = 1$, onde $\{F_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é uma enumeração de $[\mathfrak{c}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$. Ao definir, para cada $\xi < \mathfrak{c}$, x_ξ por $x_\xi(\alpha) = \Phi_\alpha(\{\xi\})$ teremos que $X = \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ será linearmente independente e $G = \langle X \rangle$ será p-compacto e sem sequências não triviais convergentes.

No que se segue, se $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq 2^{\mathfrak{c}}$ e $F \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$, escreveremos $x_F = \sum_{\xi \in F} x_\xi$. Além disso, a função constante $f \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ dada por $f(n) = F$ para todo $n \in \omega$ será denotada por $\vec{F}$. Por fim, se $\alpha < \mathfrak{c}$ é um ordinal, então $\overrightarrow{\{\alpha\}}$ será denotado por $\vec{\alpha}$.

Lema 4.7. *Se $p \in \omega^*$ é um ultrafiltro seletivo, então*

$$\mathrm{ult}_p([\mathfrak{c}]^{<\omega}) = \{[f]_p : f \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega \text{ é injetora}\} \cup \{[\vec{F}]_p : F \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}\}.$$

Demonstração. Dada $g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$, como $\mathrm{im}(g)$ é enumerável, existe uma função injetora $h : \mathrm{im}(g) \to \omega$. A seletividade de p nos diz que existe $A \in p$ tal que a restrição da função $h \circ g : \omega \to \omega$ a A é constante ou injetora. Logo, $g\restriction_A$ é constante ou injetora.

No caso em que $g\restriction_A$ é constante, isto é, $g(n) = F \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ para todo $n \in A$, note que $[g]_p = [\vec{F}]_p$, pois $\{n \in \omega : f(n) = g(n)\} \supseteq A \in p$.

No caso em que $g\restriction_A$ é injetora, estendemos $g\restriction_A$ a uma função $f : \omega \to [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ injetora. Note que $[g]_p = [f]_p$, pois $\{n \in \omega : f(n) = g(n)\} \supseteq A \in p$. □

Vamos selecionar as sequências de $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$ que serão invocadas na construção dos homomorfismos.

Proposição 4.8. *Se $p \in \omega^*$ é um ultrafiltro seletivo, então existe uma família de funções injetoras $\{f_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ indexada injetivamente tal que:*

(1) $\bigcup_{n<\omega} f_\xi(n) \subseteq \max\{\omega, \xi\}$, *para todo* $\xi < \mathfrak{c}$;

(2) $\{[f_\xi]_p : \xi < \mathfrak{c}\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ *é uma base para* $\mathrm{ult}_p([\mathfrak{c}]^{<\omega})$;

(3) para cada $g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ injetora, existem $\zeta_0, \zeta_1 < \mathfrak{c}$ distintos e duas sequências crescentes de inteiros positivos $(n^0_k)_{k<\omega}$ e $(n^1_k)_{k<\omega}$ tais que $f_{\zeta_i}(k) = g(n^i_k)$, quaisquer que sejam $k < \omega$ e $i < 2$.

Demonstração. Seja $\{g_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ uma enumeração de $\{g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega : g \text{ é injetora}\}$ de modo que cada elemento deste conjunto é listado pelo menos duas vezes e tal que $\bigcup_{n\in\omega} g_\xi(n) \subseteq \max\{\omega, \xi\}$, para cada $\xi < \mathfrak{c}$.[1]

1 Como $|([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega| = \mathfrak{c}$, podemos considerar uma indexação $\{\tilde{g}_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ de $\{g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega : g \text{ é injetora}\}$ tal que, para cada g neste conjunto, o conjunto $A_g = \{\xi < \mathfrak{c} : g = \tilde{g}_\xi\}$ tenha cardinalidade $\mathfrak{c}$. Fixemos g um elemento de $\{g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega : g \text{ é injetora}\}$. Como $\bigcup_{n\in\omega} g(n) \subseteq \mathfrak{c}$, $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) > \omega$ e $|\bigcup_{n<\omega} g(n)| \leq \omega$, existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\bigcup_{n\in\omega} g(n) \subseteq \alpha$. Seja $\xi \in A_g$. Se $\xi < \alpha$, façamos $g_\xi = f$, onde $f(n) = \{n\}$ para cada $n \in \omega$. Note que $f \in \{g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega : g \text{ é injetora}\}$. Se $\xi > \alpha$, façamos $g_\xi = \tilde{g}_\xi$. Temos que $\{g_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é uma indexação de $\{g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega : g \text{ é injetora}\}$ de modo que cada elemento deste conjunto é listado $\mathfrak{c}$ vezes e tal que $\bigcup_{n\in\omega} g_\xi(n) \subseteq \max\{\omega, \xi\}$, para cada $\xi < \mathfrak{c}$.

A demonstração será feita por recursão transfinita. Seja $\alpha < \mathfrak{c}$ e suponha que, para cada $\xi < \alpha$, tenhamos definido uma função injetora $f_\xi : \omega \to [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ tal que:

(i) para cada $m < \omega$ existe $n < \omega$ tal que $f_\xi(m) = g_\xi(n)$;

(ii) $\{[f_\zeta]_p : \zeta < \xi\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente;

(iii) se $\{[f_\zeta]_p : \zeta < \xi\} \cup \{[g_\xi]_p\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente, então $f_\xi = g_\xi$.

Se $\{[f_\xi]_p : \xi < \alpha\} \cup \{[g_\alpha]_p\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente, definamos $f_\alpha = g_\alpha$.

Vamos supor que $\{[f_\xi]_p : \xi < \alpha\} \cup \{[g_\alpha]_p\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ não seja linearmente independente. Seja $\{A_\mu : \mu < \mathfrak{c}\}$ uma família quase disjunta de subconjuntos infinitos de ω. Para cada $\mu < \mathfrak{c}$, seja $h_\mu : \omega \to A_\mu$ uma bijeção. Considere

$$\begin{aligned} h_{\alpha,\mu} : \omega &\to [\mathfrak{c}]^{<\omega} \\ n &\mapsto g_\alpha(h_\mu(n)) \end{aligned}$$

Note que se $\mu < \nu < \mathfrak{c}$, então $\{n \in \omega : h_{\alpha,\mu}(n) = h_{\alpha,\nu}(n)\}$ é finito (pois g_α é injetora e $\{A_\mu : \mu < \mathfrak{c}\}$ é quase disjunta). Consequentemente, $\{[h_{\alpha,\mu}]_p : \mu < \mathfrak{c}\}$ é uma indexação injetora. Desta forma, podemos encontrar $\mu_\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $[h_{\alpha,\mu_\alpha}]_p \notin \langle\{[f_\xi]_p : \xi < \alpha\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \max\{\omega, \alpha\}\}\rangle$. Definamos $f_\alpha = h_{\alpha,\mu_\alpha}$. Claramente, as condições (i) e (iii) estão satisfeitas para α. Temos que mostrar que a condição (ii) vale. De fato, sabemos que $\{[f_\xi]_p : \xi \leq \alpha\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \max\{\omega, \alpha\}\}$ é linearmente independente pela forma como definimos f_α. Como $\bigcup_{n<\omega} f_\xi(n) \subseteq \max\{\omega, \alpha\}$ para cada $\xi < \alpha$, temos também que $\{[f_\xi]_p : \xi \leq \alpha\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente, o que mostra que a condição (ii) está satisfeita.

Afirmamos que a família $\{f_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ satisfaz as condições (1)-(3). De fato, é imediato que (1) é satisfeita. Além disso, a construção acima mostra que $\{[f_\xi]_p : \xi < \mathfrak{c}\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}\}$ é uma base para $\mathrm{ult}_p([\mathfrak{c}]^{<\omega})$.

Resta mostrar que vale a condição (3). Para tanto, seja $g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ injetora e sejam $\zeta_0, \zeta_1 < \mathfrak{c}$ tais que $\zeta_0 < \zeta_1$ e $g = g_{\zeta_0} = g_{\zeta_1}$. O item (i) nos diz que para cada $k < \omega$ existe $n_k^i < \omega$ tal que $f_{\zeta_i}(k) = g_{\zeta_i}(n_k^i) = g(n_k^i)$, onde $i < 2$. Como f_{ζ_i} é injetora, temos que $(n_k^i)_{k<\omega}$ é uma sequência injetora de inteiros positivos e, portanto, possui uma subsequência crescente. Dessa forma, o item (3) é satisfeito. $\square$

No que segue, fixamos um ultrafiltro seletivo $p \in \omega^*$, uma família de funções injetoras $\{f_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ satisfazendo as condições da Proposição 4.8 e uma enumeração $\{F_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de $[\mathfrak{c}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$.

Mostraremos agora que se formos capazes de obter os homomorfismos que definirão as coordenadas dos elementos de X da maneira que planejamos, então de fato teremos que X será um subconjunto linearmente independente de $2^\mathfrak{c}$ e o grupo $G = \langle X \rangle$ será p-compacto e sem sequências não triviais convergentes.

Proposição 4.9. *Suponha que para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ exista um homomorfismo de grupos $\Phi_\alpha : [\mathfrak{c}]^{<\omega} \to 2$ tal que:*

(1) $\Phi_\alpha(\{\xi\}) = p\text{-}\lim\{\Phi_\alpha(f_\xi(n)) : n \in \omega\}$, para todo $\xi < \mathfrak{c}$;

(2) $\Phi_\alpha(F_\alpha) = 1$.

Para cada $\xi < \mathfrak{c}$, definimos $x_\xi \in 2^\mathfrak{c}$ por $x_\xi(\alpha) = \Phi_\alpha(\{\xi\})$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$. Então, o conjunto $X = \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente e $G = \langle X \rangle$ é um grupo p-compacto sem sequências não triviais convergentes.

Demonstração. Seja $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\} \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ de modo que $\xi_i \neq \xi_j$ se $i \neq j$. Tome $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $F_\alpha = \{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$. Do item (2) segue que

$$(x_{\xi_0} + \ldots + x_{\xi_k})(\alpha) = x_{\xi_0}(\alpha) + \ldots + x_{\xi_k}(\alpha) = \Phi_\alpha(\{\xi_0\}) + \ldots + \Phi_\alpha(\{\xi_k\}) = \Phi_\alpha(F_\alpha) = 1$$

o que mostra que $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente em $2^\mathfrak{c}$.

Mostraremos agora que $G = \langle X \rangle$ é p-compacto. Primeiro, note que pelo item (1) e pelo Lema 1.21 temos que

$$x_\xi = p\text{-}\lim\left\{\sum_{\mu \in f_\xi(n)} x_\mu : n \in \omega\right\} = p\text{-}\lim\{x_{f_\xi(n)} : n \in \omega\}, \text{ para todo } \xi < \mathfrak{c}.$$

Seja $(a_n)_{n<\omega}$ uma sequência de elementos de G e seja $g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ tal que $a_n = x_{g(n)}$ para todo $n \in \omega$. Como p é seletivo, existe $A \in p$ tal que $g{\restriction}_A$ é constante ou injetora. No caso em que $g{\restriction}_A$ é constante, existe $F \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ tal que $\{n \in \omega : x_{g(n)} = x_F\} \in p$. Logo, $x_F = p\text{-}\lim\{x_{g(n)} : n \in \omega\}$. Se $g{\restriction}_A$ é injetora, podemos supor que existe $h \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ injetora tal que $g{\restriction}_A = h{\restriction}_A$. Como $\{[f_\xi]_p : \xi < \mathfrak{c}\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é uma base para $\mathrm{ult}_p([\mathfrak{c}]^{<\omega})$, existem $\xi_0, \ldots, \xi_k < \mathfrak{c}$ distintos e $E \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ tal que $[h]_p = (\Delta_{i \leq k}[f_{\xi_i}]_p) \,\Delta\, (\Delta_{\mu \in E}[\vec{\mu}]_p)$. Consequentemente, podemos encontrar $B \in p$ tal que $B \subseteq A$ e

$h(n) = (\Delta_{i\leq k} f_{\xi_i}(n)) \,\Delta\, E$ para todo $n \in B$. Segue, então, que $x_{h(n)} = \sum_{i\leq k} x_{f_{\xi_i}(n)} + x_E$, para todo $n \in B$. O Lema 1.33 nos permite concluir que

$$\sum_{i\leq k} x_{\xi_i} + x_E = p\text{-lim}\{x_{h(n)} : n \in \omega\},$$

o que mostra que G é p-compacto.

Por fim, seja $(y_n)_{n<\omega}$ uma sequência não trivial de elementos de G. Se o conjunto $\{y_n : n \in \omega\}$ for finito, do fato dessa sequência ser não trivial segue que pelo menos dois de seus termos ocorrem infinitas vezes. Logo, $(y_n)_{n<\omega}$ possui duas subsequências constantes e, portanto, dois pontos de acumulação distintos. Neste caso, $(y_n)_{n<\omega}$ não é convergente. Se o conjunto $\{y_n : n \in \omega\}$ for infinito, conseguimos encontrar uma subsequência injetora dessa sequência e, portanto, podemos supor sem perda de generalidade que existe $g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^{\omega}$ injetora tal que $y_n = x_{g(n)}$ para cada $n \in \omega$. O item (3) da Proposição 4.8 nos permite tomar $\zeta_0, \zeta_1 < \mathfrak{c}$ distintos e duas sequências crescentes de inteiros positivos $(n_k^0)_{k\in\omega}$ e $(n_k^1)_{k\in\omega}$ tais que $f_{\zeta_i}(k) = g(n_k^i)$, quaisquer que sejam $k < \omega$ e $i < 2$. Uma vez que $x_{\zeta_i} = p\text{-lim}\{x_{f_{\zeta_i}(k)} : k \in \omega\} = p\text{-lim}\{x_{g(n_k^i)} : k \in \omega\} = p\text{-lim}\{y_{n_k^i} : k \in \omega\}$, temos que x_{ζ_0} e x_{ζ_1} são ambos pontos de acumulação do conjunto $\{y_n : n \in \omega\}$ e, portanto, a sequência $(y_n)_{n<\omega}$ não é convergente. $\square$

O resultado a seguir é bastante técnico e será usado para mostrar que, de fato, conseguimos construir homomorfismos de grupos satisfazendo as condições da Proposição 4.9.

Lema 4.10. *Para cada $E_0 \in [\mathfrak{c}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ existem $\{b_i : i < \omega\} \in p$ e $\{E_i : 0 < i < \omega\} \subseteq [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ tais que:*

(1) $\omega \subseteq \bigcup_{i<\omega} E_i$;

(2) $E_i \cup \left[\bigcup_{\xi\in E_i} f_\xi(b_i)\right] \subseteq E_{i+1}$, para todo $i < \omega$;

(3) $\{f_\xi(b_i) : \xi \in E_i\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in E_i\}$ é linearmente independente, para todo $i < \omega$.

Demonstração. Considere $F_0 = E_0$ e $F_{n+1} = n \cup F_n \cup \left[\bigcup_{\xi\in F_n} \bigcup_{m\leq n} f_\xi(m)\right]$ para $n \in \omega$. Como $\{[f_\xi]_p : \xi < \mathfrak{c}\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente, temos que

$$A_n = \{k \in \omega : \{f_\xi(k) : \xi \in F_n\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in F_n\} \text{ é linearmente independente}\} \in p$$

para todo $n \in \omega$. Com efeito, sendo $\{[f_\xi]_p : \xi < \mathfrak{c}\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ linearmente independente, a Proposição 4.2 nos diz que para cada $F_n \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ o conjunto $\{k \in \omega : \Delta(\{f_\xi(k) : \xi \in F_n\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in F_n\}) \neq \emptyset\} \in p$. Dessa forma, concluímos que $A_n \in p$.

Como p é seletivo, podemos encontrar $A = \{a_n : n < \omega\} \in p$ tal que $m < a_m < a_n$ e $a_n \in A_n$ quaisquer que sejam $m < n < \omega$. De fato, como p é um P-ponto (pois é seletivo), existe $D \in p$ tal que $D \setminus A_n$ é finito para todo $n \in \omega$. Fixe $h : \omega \to \omega$ uma função crescente tal que $D \setminus A_n \subseteq h(n)$ para todo $n \in \omega$. Note que h define uma partição em ω: $\{[0, h(1)]\} \cup \{[h(n)+1, h(n+1)] : n \geq 1\}$. Como p é seletivo, da Proposição 4.4 segue que existe $C \in p$ tal que $|[0, h(1)] \cap C| = 1$ e $|[h(n)+1, h(n+1)] \cap C| = 1$ para cada $n \geq 1$. Considere $A = (C \cap D) \setminus ([0, h(1)] \cap C)$. Temos que $A \cap h(1) = \emptyset$, $A \subseteq D$, $A \in p$ e $|[h(n)+1, h(n+1)] \cap A| \leq 1$ para cada $n \in \omega$. Considere $\{a_n : n < \omega\}$ uma enumeração crescente de A. Temos que $a_n > h(n)$, $n < a_n$ e $a_n \in A_n$ (pois $D \setminus A_n \subseteq h(n)$).

Definamos $P = P_0 \cup P_1$ uma partição de $[\omega]^2$ da seguinte maneira:

$$\{a, b\} \in P_0 \text{ se, e somente se, } a < b, a, b \in A, a = a_m, b = a_n \text{ e } a_m < n.$$

Como p é seletivo, decorre da Proposição 4.4 que existe $B \in p$ tal que $B \subseteq A$ e $[B]^2 \subseteq P_0$ ou $[B]^2 \subseteq P_1$. Tome $I \in [\omega]^\omega$ tal que $B = \{a_n : n \in I\}$ e seja $\{i_k : k < \omega\}$ uma enumeração crescente de I. Suponha que $[B]^2 \subseteq P_1$. Neste caso, $\{a_{i_0}, a_{i_k}\} \in P_1$ para cada $k \in \omega$ e, portanto, $a_{i_0} \geq i_k$ para cada $k \in [1, \omega[$, o que é absurdo.

Portanto, $[B]^2 \subseteq P_0$. Consequentemente, temos que $i_k < a_{i_k} < i_{k+1}$ e disto segue que

$$F_{i_k} \cup \left[\bigcup_{\xi \in F_{i_k}} f_\xi(a_{i_k}) \right] \subseteq F_{i_{k+1}} \cup \left[\bigcup_{\xi \in F_{i_k}} \bigcup_{m < i_{k+1}} f_\xi(m) \right] \subseteq F_{i_{k+1}}$$

para todo $k < \omega$. Note que, para cada $k < \omega$,

$$\{f_\xi(a_{i_k}) : \xi \in F_{i_k}\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in F_{i_k}\}$$

é linearmente independente, pois $a_{i_k} \in A_{i_k}$.

Então, para cada $k \in [1, \omega[$, definamos $E_k = F_{i_k}$ e, para cada $k < \omega$, façamos $b_k = a_{i_k}$. Observe que $\{b_k : k \in \omega\} = B \in p$ e, pelo que foi visto anteriormente, as condições (2) e (3) estão satisfeitas. Por fim, note que $E_0 \subseteq F_{i_0}$ e

$$\omega \subseteq \bigcup_{n<\omega} F_n = \bigcup_{k<\omega} F_{i_k} = \bigcup_{k<\omega} E_k. \qquad \square$$

Teorema 4.11. *Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, existe um homomorfismo de grupos $\Phi_\alpha : [\mathfrak{c}]^{<\omega} \to 2$ tal que:*

(1) $\Phi_\alpha(\{\xi\}) = p\text{-}\lim\{\Phi_\alpha(f_\xi(n)) : n \in \omega\}$, para todo $\xi < \mathfrak{c}$;

(2) $\Phi_\alpha(F_\alpha) = 1$.

Demonstração. Seja $\alpha < \mathfrak{c}$. Aplicando o Lema 4.10 a $E_0 = F_\alpha$, obtemos $\{b_i : i < \omega\} \in p$ e $\{E_i : 0 < i < \omega\} \subseteq [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ satisfazendo as seguintes condições:

- $\omega \subseteq \bigcup_{i<\omega} E_i$;
- $E_i \cup \bigcup_{\xi \in E_i} f_\xi(b_i) \subseteq E_{i+1}$, para todo $i < \omega$;
- $\{f_\xi(b_i) : \xi \in E_i\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in E_i\}$ é linearmente independente, para todo $i < \omega$.

Primeiro, definiremos Φ_α em $[E]^{<\omega}$ por recursão. Começamos fixando $\mu \in E_0$ e definindo $\Phi_\alpha(\{\xi\}) = 0$ se $\xi \in E_0 \setminus \{\mu\}$ e $\Phi_\alpha(\{\mu\}) = 1$. Como $F_\alpha = E_0$, a condição (2) está satisfeita. Usando o fato de que $\{\{\xi\} : \xi \in E_0\}$ é uma base para $[E_0]^{<\omega}$ estendemos Φ_α a um homomorfismo de $[E_0]^{<\omega}$ em 2. Como o conjunto $\{f_\xi(b_0) : \xi \in E_0\} \cup \{\{\xi\} : \xi \in E_0\}$ é linearmente independente, podemos definir $\Phi_\alpha(f_\xi(b_0)) = \Phi_\alpha(\{\xi\})$ para cada $\xi \in E_0$. Agora, seja $i < \omega$. Suponha que Φ_α já tenha sido definida em $[E_i]^{<\omega}$ e que tenhamos $\Phi_\alpha(f_\xi(b_i)) = \Phi_\alpha(\{\xi\})$ para cada $\xi \in E_i$. Como $E_i \cup \bigcup_{\xi \in E_i} f_\xi(b_i) \subseteq E_{i+1}$ e $\{f_\xi(b_{i+1}) : \xi \in E_{i+1}\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in E_{i+1}\}$ é linearmente independente, podemos estender Φ_α a um homomorfismo de $[E_{i+1}]^{<\omega}$ em 2 e pedir que $\Phi_\alpha(f_\xi(b_{i+1})) = \Phi_\alpha(\{\xi\})$ para todo $\xi \in E_{i+1}$. Dessa forma, definimos Φ_α em $[E]^{<\omega}$, onde $E = \bigcup_{i \in \omega} E_i$. Note que $\{n < \omega : \Phi_\alpha(f_\xi(n)) = \Phi_\alpha(\{\xi\})\} \in p$ para cada $\xi \in E$.

O próximo passo é estender Φ_α a $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$. Faremos isso por recursão transfinita em $\gamma \in \mathfrak{c} \setminus E$. Seja $\gamma \in \mathfrak{c} \setminus E$ e suponha que Φ_α já tenha sido definida em $[E \cup \gamma]^{<\omega}$. Como $f_\gamma(n) \subseteq \gamma$ para todo $n < \omega$, $\Phi_\alpha(\{\mu\})$ já foi definido para cada $\mu < \gamma$ e $\{\{\gamma\}\} \cup \{\{\mu\} : \mu < \gamma\}\}$ é linearmente independente, Φ_α pode ser estendida a $[E \cup (\gamma + 1)]^{<\omega}$ de modo que $\Phi_\alpha(\{\gamma\}) = p\text{-lim}\{\Phi_\alpha(f_\gamma(n)) : n \in \omega\}$.

Claramente, $\Phi_\alpha : [\mathfrak{c}]^{<\omega} \to 2$ satisfaz (1) e (2). $\square$

5 CONSTRUÇÃO EM ZFC

Neste capítulo, apresentaremos a construção em ZFC de um grupo de van Douwen proposta por Hrušàk et al. [11].

Nosso objetivo será munir o grupo booleano $([\mathfrak{c}]^{<\omega}, \Delta)$, onde Δ denota a operação de diferença simétrica entre conjuntos, de uma topologia que o torna um grupo topológico de Hausdorff, enumeravelmente compacto e sem sequências não triviais convergentes. Começaremos selecionando uma família de funções injetoras $\{f_\alpha : \alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[\} \subseteq ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ de forma que algumas condições convenientes sejam satisfeitas. Em seguida, faremos uso de um filtro "esperto" para gerar uma família de ultrafiltros $\{p_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq \omega^*$ com boas propriedades. Após isso, definiremos uma topologia sobre $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$ e mostraremos que ela possui as propriedades desejadas.

O próximo resultado é responsável por selecionar as sequências de $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$ que serão utilizadas no decorrer da construção.

Proposição 5.1. *Existe uma família de funções injetoras* $\{f_\alpha : \alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[\} \subseteq ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ *tal que:*

(1) para cada $X \subseteq [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ *infinito, existe* $\alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[$ *tal que* $\mathrm{im}(f_\alpha) \subseteq X$*;*

(2) $\mathrm{im}(f_\alpha)$ *é um subconjunto linearmente independente de* $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$*, para todo* $\alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[$*;*

(3) $\mathrm{im}(f_\alpha) \subseteq [\alpha]^{<\omega}$*, para todo* $\alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[$*.*

Demonstração. Seja $\{f_\alpha : \alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[\}$ uma enumeração de

$$\{g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega : \ g \text{ é injetora e } \{g(n) : n \in \omega\} \text{ é linearmente independente}\}$$

tal que $\mathrm{im}(f_\alpha) \subseteq [\alpha]^{<\omega}$ para todo $\alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[$.[1]

1 Denotemos por $\mathcal{A}$ o conjunto $\{g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega : \ g$ é injetora e $\{g(n) : n \in \omega\}$ é linearmente independente$\}$. Como $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$, podemos considerar uma indexação $\{\tilde{g}_\alpha : \alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[\}$ de $\mathcal{A}$ tal que, para cada $g \in \mathcal{A}$, o conjunto $A_g = \{\alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[\, : g = \tilde{g}_\alpha\}$ tenha cardinalidade $\mathfrak{c}$. Fixemos um elemento g de $\mathcal{A}$. Como $\bigcup_{n\in\omega} g(n) \subseteq \mathfrak{c}$, $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) > \omega$ e $|\bigcup_{n\in\omega} g(n)| \leq \omega$, existe $\xi < \mathfrak{c}$ tal que $\bigcup_{n\in\omega} g(n) \subseteq \xi$. Seja $\alpha \in A_g$. Se $\alpha < \xi$, façamos $f_\alpha = f$, onde $f(n) = \{n\}$ para cada $n \in \omega$. Se $\alpha \geq \xi$, façamos $f_\alpha = \tilde{g}_\alpha$. Temos que $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ é uma indexação de $\mathcal{A}$ tal que cada elemento desse conjunto é listado $\mathfrak{c}$ vezes e tal que $\bigcup_{n\in\omega} f_\alpha(n) \subseteq \alpha$ (e, consequentemente, $\mathrm{im}(f_\alpha) \subseteq [\alpha]^{<\omega}$) para todo $\alpha < \mathfrak{c}$.

Note que as condições (2) e (3) estão satisfeitas. Mostraremos agora que (1) também está satisfeita. Para tanto, seja X um subconjunto infinito de $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que X é infinito e indexá-lo injetivamente por $X = \{A_n : n \in \omega\}$. Exibiremos $\{B_k : k \in \omega\} \subseteq [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ linearmente independente tal que, para cada $k \in \omega$, $B_k = A_n$ para algum $n \in \omega$. Façamos $B_0 = A_0$. Agora, suponha que, fixado $k \in \omega$, já estão construídos B_i com $i \leq k$ de forma que $B_{i+1} \setminus \bigcup_{0 \leq j \leq i} B_j \neq \emptyset$. Seja $a = \max\{n \in \omega :$ existe $i \in \{0, \ldots, k\}$ tal que $A_n = B_i\}$. Como $\bigcup_{n \in \omega} A_n$ é infinito (pois, do contrário, a indexação de X não seria injetora), temos que $\bigcup_{n \in \omega} A_n \setminus \bigcup_{n \leq a} A_n \neq \emptyset$. Dessa forma, existe $b \in \omega$ tal que $A_b \setminus \bigcup_{n < a} A_n \neq \emptyset$. Façamos $B_{k+1} = A_b$. Da forma como construímos $\{B_k : k \in \omega\}$, temos que esse é um conjunto linearmente independente contido em X. Por fim, da maneira como construímos $\{f_\alpha : \alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[\}$, temos que existe $\alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[$ tal que $\{B_k : k \in \omega\} = \{f_\alpha(k) : k \in \omega\}$, donde concluímos que $\mathrm{im}(f_\alpha) \subseteq X$. □

O seguinte resultado, retirado de [24], é um fato de álgebra linear que irá nos auxiliar com o que deve ser demonstrado nos resultados seguintes.

Lema 5.2. *Sejam A, B e C subconjuntos de um espaço vetorial. Suponha que A seja finito e que $A \cup C$ e $B \cup C$ sejam linearmente independentes. Então existe $B' \subseteq B$ tal que $|B'| \leq |A|$ e $A \cup C \cup (B \setminus B')$ é linearmente independente.*

Demonstração. A demonstração do resultado se dá por indução em $|A|$. Primeiramente, suponha que $|A| = 1$, isto é, o conjunto A é formado por um único elemento $a \neq 0$. Se $A \cup B \cup C$ for linearmente independente, tomamos $B' = \emptyset$. Caso contrário, existe uma combinação linear não trivial de elementos em $A \cup B \cup C$ que é igual a 0. Como $A \cup C$ e $B \cup C$ são linearmente independentes, temos que a e algum elemento de B devem aparecer nessa combinação linear. Assim,

$$a = Cl(C)_1 + Cl(B)_1$$

para $Cl(B)_1 \neq 0$ e $Cl(C)_1$ combinações lineares de elementos de B e de C, respectivamente. Escolha $b \in B$ que aparece em $Cl(B)_1$. Afirmamos que $A \cup C \cup (B \setminus \{b\})$ é linearmente independente. Do contrário,

$$a = Cl(C)_2 + Cl(B)_2$$

para $Cl(B)_2 \neq 0$ e $Cl(C)_2$ combinações lineares de elementos de $B \setminus \{b\}$ e de C, respectivamente. Mas isso não pode acontecer, uma vez que $B \cup C$ é linearmente independente e $Cl(B)_1 \neq Cl(B)_2$. Portanto, tomando $B' = \{b\}$, provamos o resultado para $|A| = 1$.

Agora, suponha que o resultado seja válido para conjuntos de tamanho $n \in \omega$, e que A possua tamanho $n+1$. Neste caso, tomando $a \in A$, podemos aplicar o resultado aos conjuntos $A \setminus \{a\}$, B e C. Então, encontramos $B_0 \subseteq B$ tal que $|B_0| \leq n$ e $(A \setminus \{a\}) \cup C \cup (B \setminus A_0)$ é linearmente independente. Agora, aplique o resultado para o caso de conjuntos com um elemento para os conjuntos $\{a\}$, $B \setminus B_0$ e $(A \setminus \{a\}) \cup C$. Neste caso, encontramos $b \in B \setminus B_0$ tal que $\{a\} \cup ((A \setminus \{a\}) \cup C) \cup ((B \setminus B_0) \setminus \{b\})$ é linearmente independente. Tomando $B' = B_0 \cup \{b\}$ temos o resultado. □

Corolário 5.3. *Sejam A e B subconjuntos linearmente independentes de um espaço vetorial, com A finito. Então existe $B' \subseteq B$ tal que $|B'| \leq |A|$ e $A \cup (B \setminus B')$ é linearmente independente.*

Demonstração. Basta aplicar o lema anterior para $C = \emptyset$. □

No resultado seguinte apresentaremos a construção da família de ultrafiltros $\{p_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq \omega^*$ mencionada anteriormente.

Proposição 5.4. *Existe $\{p_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq \omega^*$ tal que, para cada $D \in [\mathfrak{c}]^\omega$ e cada família de funções injetoras $\{f_\alpha : \alpha \in D\} \subseteq ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ tal que, para cada $\alpha \in D$, $\mathrm{im}(f_\alpha)$ é linearmente independente, existe $\{U_\alpha : \alpha \in D\}$ satisfazendo:*

(1) $\{U_\alpha : \alpha \in D\}$ é uma família de subconjuntos de ω dois a dois disjuntos;

(2) $U_\alpha \in p_\alpha$, para todo $\alpha \in D$;

(3) $\{f_\alpha(n) : \alpha \in D \text{ e } n \in U_\alpha\}$ é um subconjunto linearmente independente de $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$.

Demonstração. Considere a família $\{I_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos de ω construída recursivamente da seguinte maneira: $I_0 = \{0\}$ e, para cada $n \in \omega$,

$$I_{n+1} = \bigcup_{i=l+1}^{(l+1)+(n+1)\cdot\sum_{m\leq n}|I_m|} \{i\}$$

onde $l = \max \bigcup_{m\leq n} I_m$. Note que $\{I_n : n \in \omega\}$ é uma partição de ω tal que

$$|I_n| > n \cdot \sum_{m<n} |I_m|.$$

Seja

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq \omega : |I_n \setminus B| \leq \sum_{m<n} |I_m| \text{ para todo } n \in \omega\}.$$

Observe que a intersecção de toda subfamília finita de $\mathcal{B}$ é infinita. De fato, sejam $\{B_0, ..., B_k\} \in \mathcal{B}$. Vamos mostrar que $\bigcap_{i=0}^k B_i$ é infinita. Para tanto, basta mostrar que

$(\bigcap_{i=0}^{k} B_i) \cap I_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq k$, pois $\{I_n : n \in \omega\}$ é uma partição de ω e $I_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Fixe $n \geq k$ e note que, como $|I_n| > n \cdot \sum_{m<n} |I_m|$ e $|I_n \setminus B_i| \leq \sum_{m<n} |I_m|$ para cada $i \in \{0, ..., k\}$, temos que $|B_i \cap I_n| > (n-1) \cdot \sum_{m<n} |I_m|$. Dessa forma, como $n \geq k$, temos que $(\bigcap_{i=0}^{k} B_i) \cap I_n \neq \emptyset$. Logo, o filtro $\mathcal{F}$ gerado por $\mathcal{B}$ será livre.

Ainda, se $A \subseteq \omega$ é infinito temos que $|F \cap (\bigcup_{n \in A} I_n)| = \omega$, para cada $F \in \mathcal{F}$. De fato, seja $F \in \mathcal{F}$. Como $|\bigcup_{n \in A} I_n| = \omega$, temos que $|F \cap \bigcup_{n \in A} I_n| \leq \omega$. Vamos mostrar que $F \cap \bigcup_{n \in A} I_n$ é infinito e disto seguirá que $|F \cap \bigcup_{n \in A} I_n| = \omega$. Como $F \in \mathcal{F}$, existem $B_0, ..., B_k \in \mathcal{B}$ tais que $\bigcap_{i \leq k} B_i \subseteq F$. Do que vimos anteriormente, segue que $(\bigcap_{i \leq k} B_i) \cap I_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq k$. Como A é infinito, temos que $A \setminus \{0, ..., k\}$ ainda é infinito, assim $(\bigcap_{i \leq k} B_i) \cap (\bigcup_{n \in A \setminus \{0,...,k\}} I_n)$ é infinito, uma vez que $\{I_n : n \in \omega\}$ é uma partição de ω. Logo, $F \cap (\bigcup_{n \in A} I_n)$ é infinito.

Seja $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ uma família quase disjunta de subconjuntos infinitos de ω e seja, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, $p_\alpha \in \omega^*$ que contém o conjunto

$$\left\{ F \cap \bigcup_{n \in A_\alpha} I_n : F \in \mathcal{F} \right\}.$$ [2]

Vamos mostrar que a família de ultrafiltros $\{p_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ assim definida satisfaz o que é desejado.

Para tanto, fixemos $D = \{\alpha_n : n \in \omega\} \in [\mathfrak{c}]^\omega$ e $\{f_\alpha : \alpha \in D\} \subseteq ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ família de funções injetoras tal que $\{f_\alpha(n) : n \in \omega\}$ é linearmente independente, para todo $\alpha \in D$. Seja $\{B_n : n \in \omega\}$ a partição de ω definida recursivamente da seguinte forma:

$$B_0 = A_{\alpha_0} \cup \{0\} \text{ e}$$

$$B_{n+1} = (A_{\alpha_{n+1}} \cup \{n+1\}) \setminus \cup_{i<n+1} B_i, \text{ para cada } n \in \omega.$$

Note que $B_n =^* A_{\alpha_n}$ para cada $n \in \omega$.[3]

Para cada $k \in \omega$, seja n_k definido por $k \in B_{n_k}$. Vamos construir $\{C_k : k \in \omega\}$ satisfazendo, para cada $k \in \omega$:

1) $C_k \subseteq I_k$;

2) $|C_k| \leq \sum_{m<k} |I_m|$;

2 Note cada A_α é infinito e $|F \cap \cup_{n \in A_\alpha} I_n| = \omega$, assim o conjunto $\{F \cap \cup_{n \in A_\alpha} I_n : F \in \mathcal{F}\}$ satisfaz a propriedade da intersecção finita forte, isto é, toda subfamília finita e não vazia de $\mathcal{F}$ possui intersecção infinita.

3 Sejam A e B conjuntos. Dizemos que $A \subseteq^* B$ se $A \setminus B$ é finito. Ainda, dizemos que $A =^* B$ se $A \subseteq^* B$ e $B \subseteq^* A$.

3) $f_{\alpha_{n_0}}[I_0 \setminus C_0] \cup f_{\alpha_{n_1}}[I_1 \setminus C_1] \cup ... \cup f_{\alpha_{n_k}}[I_k \setminus C_k]$ é linearmente independente.

Seja $C_0 = \emptyset$. Dado $N > 0$, suponha que os conjuntos $C_1, \ldots, C_{N-1}$ já foram construídos satisfazendo as condições acima. Como $f_{\alpha_N}[I_N]$ e $f_{\alpha_{n_0}}[I_0] \cup f_{\alpha_{n_1}}[I_1 \setminus C_1] \cup ... \cup f_{\alpha_{n_{N-1}}}[I_{N-1} \setminus C_{N-1}]$ são linearmente independentes, do Corolário 5.3 segue que existe $C_N \subseteq I_N$ tal que

$$|C_N| \leq \sum_{m<N} |I_m|$$

e

$$f_{\alpha_{n_0}}[I_0] \cup f_{\alpha_{n_1}}[I_1 \setminus C_1] \cup ... \cup f_{\alpha_{n_N}}[I_N \setminus C_N]$$

é linearmente independente. Portanto, existe uma família $\{C_k : k \in \omega\}$ satisfazendo as condições anteriores.

Consequentemente, o conjunto

$$B = \cup_{l \in \omega}(I_l \setminus C_l)$$

satisfaz as seguintes condições:

i) $I_0 \subseteq B$;

ii) $|I_l \setminus B| = |C_l| \leq \sum_{m<l} |I_m|$ para todo $l \in \omega$;

iii) $\{f_{\alpha_{nl}}(m) : k \in \omega, m \in B \cap I_l, l \in B_k\}$ é linearmente independente.

De fato, note que i) e ii) são imediatas. Para mostrar que o item iii) está satisfeito, perceba que o conjunto

$$\{f_{\alpha_{nl}}(m) : k \in \omega, m \in B \cap I_l, l \in B_k\}$$

também pode ser escrito como

$$\bigcup_{k \in \omega} \bigcup_{l \in B_k} f_{\alpha_{n_l}}[I_l \setminus C_l].$$

Vamos mostrar que todo subconjunto finito desse conjunto é linearmente independente, o que garante, por definição, que ele é linearmente independente. De fato, seja G um subconjunto finito de $\bigcup_{k \in \omega} \bigcup_{l \in B_k} f_{\alpha_{n_l}}[I_l \setminus C_l]$. Perceba que G está contido em uma união finita de conjuntos da forma $f_{\alpha_{n_l}}[I_l \setminus C_l]$ para l em algum B_k com $k \in \omega$. Assim, G está contido em algum conjunto que satisfaz a condição 3) e, por estar contido em um conjunto linearmente independente, temos que G é linearmente independente.

Do item ii) segue que $B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Definindo, para cada $n \in \omega$,

$$U_n = B \cap \bigcup_{l \in B_n} I_l$$

temos que $\{U_n : n \in \omega\}$ é uma família de subconjuntos de ω dois a dois disjuntos e, portanto, (1) está satisfeita. Além disso, como $B_n =^* A_{\alpha_n}$ e $B \in \mathcal{F}$ segue que $U_n \in p_{\alpha_n}$. Finalmente, por iii),

$$\{f_{\alpha_n}(m) : n \in \omega, m \in U_n\}$$

é linearmente independente. $\square$

Seja $\{f_\alpha : \alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[\} \subseteq ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ uma família de funções dada pela Proposição 5.1 e seja $\{p_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq \omega^*$ uma família de ultrafiltros dada pela Proposição 5.4. Defina recursivamente, para cada homomorfismo $\Phi : [\omega]^{<\omega} \to 2$, o homomorfismo $\overline{\Phi} : [\mathfrak{c}]^{<\omega} \to 2$ que estende Φ e é tal que

$$\overline{\Phi}(\{\alpha\}) = p_\alpha\text{-}\lim\{\overline{\Phi}(f_\alpha(n)) : n \in \omega\} \text{ para todo } \alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[.$$

Seja τ a topologia fraca induzida pela família $\{\overline{\Phi} : \Phi \in \mathrm{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2)\}$, onde $\mathrm{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2)$ denota o conjunto dos homomorfismos de $[\omega]^{<\omega}$ em 2. Note que τ tem como base a coleção de todas as interseções finitas dos conjuntos

$$\{\overline{\Phi}^{-1}[U] : U \subseteq 2 \text{ e } \Phi \in \mathrm{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2)\}$$

Assim, para cada $\alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[$, temos que

$$\{\alpha\} = p_\alpha\text{-}\lim\{f_\alpha(n) : n \in \omega\}.$$

De fato, seja $V \in \tau$ tal que $\{\alpha\} \in V$ e sejam $k \in \omega$, $U_1, \ldots, U_k \subset 2$ e $\Phi_{\alpha_1}, \ldots, \Phi_{\alpha_k} \in \mathrm{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2)$ tais que $\{\alpha\} \in \bigcap_{i=1}^k \overline{\Phi_{\alpha_i}}^{-1}[U_i] \subseteq V$. Como cada U_i é vizinhança aberta de $\overline{\Phi}(\{\alpha_i\})$ e $\overline{\Phi}(\{\alpha_i\}) = p_\alpha\text{-}\lim\{\overline{\Phi}(f_{\alpha_i}(n)) : n \in \omega\}$, temos que $\{n \in \omega : \overline{\Phi}(f_{\alpha_i}(n)) \in U_i\} \in p_\alpha$, e disto concluímos que $\{n \in \omega : f_\alpha(n) \in \overline{\Phi_{\alpha_i}}^{-1}[U_i]\} \in p_\alpha$ para cada $i \in \{0, ..., k\}$. Como $\cap_{i \in \{0,...,k\}} \overline{\Phi}^{-1}(U_i) \subseteq V$, temos que $\{n \in \omega : f_\alpha(n) \in V\} \in p_\alpha$, donde segue o resultado.

Como $\{f_\alpha : \alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[\} \subseteq ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ é tal que, para cada $X \subseteq [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ infinito, existe $\alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[$ satisfazendo $\mathrm{im}(f_\alpha) \subseteq X$, temos que $\{\alpha\}$ é um ponto de acumulação de X, uma vez que $\{\alpha\} = p_\alpha\text{-}\lim\{f_\alpha(n) : n \in \omega\}$. Portanto, $([\mathfrak{c}]^{<\omega}, \tau)$ é enumeravelmente compacto.

A seguinte noção será introduzida para que, por meio da Proposição 5.8, sejamos capazes de concluir que $([\mathfrak{c}]^{<\omega}, \tau)$ não possui sequências não triviais convergentes.

Definição 5.5. *Dizemos que $D \in [\mathfrak{c}]^\omega$ é* convenientemente fechado *se $\omega \subseteq D$ e $\bigcup_{n\in\omega} f_\alpha(n) \subseteq D$ para todo $\alpha \in D \setminus \omega$.*

Lema 5.6. *Sejam $D \in [\mathfrak{c}]^\omega$ convenientemente fechado, $D_0 \in [D]^{<\omega}$ e $F : D_0 \to 2$ uma função. Então existe um homomorfismo $\Psi : [D]^{<\omega} \to 2$ tal que, para cada $\alpha \in D \setminus \omega$, as seguintes condições estão satisfeitas:*

(1) $\Psi(\{\alpha\}) = p_\alpha\text{-}\lim\{\Psi(f_\alpha(n)) : n \in \omega\}$;

(2) $|\{n \in \omega : \Psi(f_\alpha(n)) = i\}| = \omega$, para cada $i < 2$;

(3) $\Psi(\{d\}) = F(d)$, para cada $d \in D_0$.

Demonstração. Enumere $D \setminus \omega$ como $\{\alpha_n : n \in \omega\}$, de modo que $\{\alpha_0, ..., \alpha_r\} = D_0 \cap \omega$. Seja $D_0 \setminus \omega = \{d_0, ..., d_l\}$. Da Proposição 5.4 obtemos $\{U_\alpha : \alpha \in D \setminus \omega\}$ tal que:

I) $\{U_\alpha : \alpha \in D \setminus \omega\}$ é uma família de subconjuntos de ω dois a dois disjuntos;

II) $U_\alpha \in p_\alpha$, para todo $\alpha \in D \setminus \omega$;

III) $\{f_\alpha(n) : \alpha \in D \setminus \omega$ e $n \in U_\alpha\}$ é um subconjunto linearmente independente de $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$.

Tomando

$$E_0 = \{\{d_0\}, ..., \{d_l\}\} \cup \{\{\alpha_0\}, ..., \{\alpha_r\}\} \cup \{f_{\alpha_m}(n) : m \in \{0, \ldots, r\} \text{ e } n \in U_{\alpha_m}\}$$

definimos um homomorfismo $\Psi_0 : \langle E_0 \rangle \to 2$ tal que, para cada $j \in \{0, ..., l\}$,

$$\Psi_0(\{d_j\}) = F(d_j)$$

e, para cada $i \in \{0, ..., r\}$,

$$\Psi_0(\{\alpha_i\}) = F(\alpha_i),$$

$$\Psi_0(\{\alpha_i\}) = p_{\alpha_i}\text{-}\lim\{\Psi_0(f_{\alpha_i}(n)) : n \in \omega\}$$

e

$$|\{n \in \omega : \Psi_0(f_{\alpha_i}(n)) = 0\}| = |\{n \in \omega : \Psi_0(f_{\alpha_i}(n)) = 1\}| = \omega.$$

Isso pode ser feito, pois

$$\{\{d_0\}, ..., \{d_l\}\} \cup \{\{\alpha_0\}, ..., \{\alpha_r\}\}$$

e

$$\{f_{\alpha_m}(n) : m \in \{0, \dots, r\} \text{ e } n \in U_{\alpha_m}\}$$

são linearmente independentes, e, portanto, pelo Corolário 5.3, existe $R_0 \subseteq \{f_{\alpha_m}(n) : m \in \{0, \dots, r\} \text{ e } n \in U_{\alpha_m}\}$ tal que $|R_0| \leq r + l + 2$ e

$$\{\{d_0\}, ..., \{d_l\}\} \cup \{\{\alpha_0\}, ..., \{\alpha_r\}\} \cup (\{f_{\alpha_m}(n) : m \in \{0, \dots, r\} \text{ e } n \in U_{\alpha_m}\} \setminus R_0)$$

é linearmente independente. Note que, ao fazer $\{f_{\alpha_i}(n) : n \in U_{\alpha_i}\} \setminus R_0$, estamos retirando, para cada $i \in \{0, \dots r\}$, um subconjunto finito G_i de $\{f_{\alpha_i}(n) : n \in U_{\alpha_i}\}$. Seja $F_i = \{n \in U_{\alpha_i} : f_{\alpha_i}(n) \in G_i\}$. Como $U_{\alpha_i} \setminus F_i \in p_{\alpha_i}$, podemos particionar esse conjunto em dois subconjuntos infinitos C_i e D_i tais que $C_i \in p_{\alpha_i}$. Estipulamos, então, que $\Psi_0(\{\alpha_i\}) = F(\alpha_i)$. Depois, definimos $\Psi(f_{\alpha_i}(n)) = \Psi_0(\{\alpha_i\})$ para todo $n \in C_i$. Como $C_i \in p_{\alpha_i}$, temos que $\Psi_0(\{\alpha_i\}) = p_{\alpha_i}\text{-}\lim\{\Psi(f_{\alpha_i}(n)) : n \in \omega\}$. Observe que temos liberdade para definir $\Psi_0(f_{\alpha_i}(n))$ para $n \in D_i$, e usaremos essa liberdade para assegurar que a condição (2) do enunciado será satisfeita. Mais precisamente, particionamos D_i em dois conjuntos infinitos $D_{i,0}$ e $D_{i,1}$, e estipulamos que $\Psi_0(f_{\alpha_i}(n)) = 0$ se $n \in D_{i,0}$ e $\Psi_0(f_{\alpha_i}(n)) = 1$ se $n \in D_{i,1}$.

Definiremos agora, de forma recursiva, homomorfismos

$$\Psi_k : \langle E_0 \cup \{f_{\alpha_m}(n) : r < m \leq r + k \text{ e } n \in U_{\alpha_m}\} \cup \{\{\alpha_i\} : r < i \leq r + k\}\rangle \to 2$$

satisfazendo, para cada $k \in \omega$, as seguintes condições:

1) Ψ_0 é o homomorfismo definido anteriormente;

2) $\Psi_k(\{\alpha_{r+k}\}) = p_{\alpha_{r+k}}\text{-}\lim\{\Psi_k(f_{\alpha_{r+k}}(n)) : n \in U_{\alpha_{r+k}}\}$;

3) $|\{n \in \omega : \Psi_0(f_{\alpha_{k+r}}(n)) = 0\}| = |\{n \in \omega : \Psi_0(f_{\alpha_{k+r}}(n)) = 1\}| = \omega$;

4) Ψ_{k+1} estende Ψ_k.

Suponha que, para $N \in \omega$, tenhamos definido homomorfismos $\Psi_0, ..., \Psi_N$ satisfazendo as condições 1) a 4). Vamos definir

$$\Psi_{N+1} : \langle E_0 \cup \{f_{\alpha_m}(n) : r < m \leq r + N + 1 \text{ e } n \in U_{\alpha_m}\} \cup \{\{\alpha_i\} : r < i \leq r + N + 1\}\rangle \to 2.$$

Considerando os conjuntos

$$A = \{\{d_0\}, ..., \{d_l\}\} \cup \{\{\alpha_0\}, ..., \{\alpha_{r+N}\}\},$$

$$B = \{f_{\alpha_{r+N+1}}(n) : n \in U_{\alpha_{r+N+1}}\}$$

e

$$\tilde{C} = \{f_{\alpha_m}(n) : 0 \leq m \leq r+N \text{ e } n \in U_{\alpha_m}\},$$

temos que $B \cup \tilde{C}$ é linearmente independente por III) e conseguimos encontrar $C \subseteq \tilde{C}$ de forma que $A \cup C$ é linearmente independente e $\langle A \cup C \rangle = \langle A \cup \tilde{C} \rangle$. Assim, aplicando o Lema 5.2 aos conjuntos A, B e C, existe um subconjunto finito R_{N+1} de $\{f_{\alpha_{r+N+1}}(n) : n \in U_{\alpha_{r+N+1}}\}$ tal que

$$\langle \{\{d_0\}, \dots, \{d_l\}\} \cup \{\{\alpha_0\}, \dots, \{\alpha_{r+N}\}\} \cup \{f_{\alpha_m}(n) : 0 \leq m \leq r+N \text{ e } n \in U_{\alpha_m}\} \rangle \\ \cap \langle \{f_{\alpha_{r+N+1}}(n) : n \in U_{\alpha_{r+N+1}}\} \setminus R_{N+1} \rangle = \{\emptyset\}.$$

Portanto, definimos Ψ_{N+1} como sendo igual a Ψ_N em

$$\langle \{\{d_0\}, \dots, \{d_l\}\} \cup \{\{\alpha_0\}, \dots, \{\alpha_{r+N}\}\} \cup \{f_{\alpha_m}(n) : 0 \leq m \leq r+N \text{ e } n \in U_{\alpha_m}\} \rangle$$

e de modo a satisfazer

$$\Psi_{N+1}(\{\alpha_{r+N+1}\}) = p_{\alpha_{r+N+1}}\text{-}\lim\{\Psi_{N+1}(f_{\alpha_{r+N+1}}(n)) : n \in \omega\}$$

e

$$|\{n \in \omega : \Psi_0(f_{\alpha_{N+1+r}}(n)) = 0\}| = |\{n \in \omega : \Psi_0(f_{\alpha_{N+1+r}}(n)) = 1\}| = \omega.$$ [4]

Provamos que existem homomorfismos Ψ_k satisfazendo 1), 2), 3) e 4) para cada $k \in \omega$. Se $\Psi : [D]^{<\omega} \to 2$ é um homomorfismo que estende $\bigcup_{k \in \omega} \Psi_k$, então as condições (1), (2) e (3) estão satisfeitas. $\square$

Proposição 5.7. $([\mathfrak{c}]^{<\omega}, \tau)$ *é de Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $X, Y \in [\mathfrak{c}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ e seja $D \in [\mathfrak{c}]^{\omega}$ um conjunto convenientemente fechado tal que $X \cup Y \subseteq D$. Considerando $D_0 = X \cup Y$ e $F : D_0 \to 2$ dada por $F(\beta) = 1$ e $F(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in D_0 \setminus \{\beta\}$, o Lema 5.6 garante a existência de um homomorfismo $\Psi : [D]^{<\omega} \to 2$ satisfazendo $\Psi(\{\alpha\}) = p_\alpha\text{-}\lim\{\Psi(f_\alpha(n)) : n \in \omega\}$ para todo $\alpha \in D \setminus \omega$ e tal que $\Psi(X) = F(X) = 1$ e $\Psi(Y) = F(Y) = 0$. Consequentemente, se $\Phi = \Psi\restriction_{[\omega]^{<\omega}}$, o homomorfismo $\overline{\Phi} : [\mathfrak{c}]^{<\omega} \to 2$ é tal que $\overline{\Phi}(X) = 1$ e $\overline{\Phi}(Y) = 0$, pois $\overline{\Phi}\restriction_{[D]^{<\omega}} = \Psi$, donde temos o resultado. $\square$

4 A justificativa de que é possível fazer isso é análoga à feita para mostrar que Ψ_0 possui as propriedades desejadas.

Proposição 5.8. *Se para cada $D \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ convenientemente fechado e $\alpha \in D \setminus \omega$ existe um homomorfismo $\Psi : [D]^{<\omega} \to 2$ tal que*

(1) $\Psi(\{\beta\}) = p_\beta\text{-}\lim\{\Psi(f_\beta(n)) : n \in \omega\}$, *para todo* $\beta \in D \setminus \omega$

(2) $|\{n \in \omega : \Psi(f_\alpha(n)) = i\}| = \omega$ *para cada* $i < 2$

então $([\mathfrak{c}]^{<\omega}, \tau)$ *não possui sequências não triviais convergentes.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n<\omega}$ uma sequência não trivial de pontos de $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$. Se o conjunto $X = \{x_n : n \in \omega\}$ for finito, do fato dessa sequência ser não trivial segue que pelo menos dois de seus termos ocorrem infinitas vezes. Logo, $(x_n)_{n<\omega}$ não é convergente, pois $([\mathfrak{c}]^{<\omega}, \tau)$ é de Hausdorff.

Se o conjunto $X = \{x_n : n \in \omega\}$ for infinito, existe $\alpha \in [\omega, \mathfrak{c}[$ tal que $\operatorname{im}(f_\alpha) \subseteq X$. Defina, recursivamente, a seguinte coleção de conjuntos:

$$D_n = \omega, \text{ se } n \in \omega$$

$$D_\xi = \{\xi\} \cup \bigcup\{D_\mu : \mu \in \bigcup_{n\in\omega} f_\xi(n)\} \text{ se } \xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$$

Note que, $\omega \subseteq D_\xi$ para cada $\xi < \mathfrak{c}$ e D_ξ é convenientemente fechado para cada $\xi < \mathfrak{c}$.[5] Considere $D = D_\alpha$, e seja Ψ o homomorfismo dado pelo enunciado. Por (1), temos que, se Φ for definido por $\Phi = \Psi\restriction_{[\omega]^{<\omega}}$, então $\Psi = \overline{\Phi}\restriction_{[D]^{<\omega}}$. Logo, $(x_n)_{n\in\omega}$ não é convergente, pois $\operatorname{im}(f_\alpha) \subseteq X$ e $\overline{\Phi}$ assume tanto o valor 0 quanto o valor 1 infinitas vezes no conjunto $\{f_\alpha(n) : n \in \omega\}$. □

Reunimos no seguinte resultado o que foi discutido anteriormente.

Teorema 5.9. *Existe um grupo topológico booleano de Hausdorff, enumeravelmente compacto e sem sequências não triviais convergentes.*

Demonstração. Do que foi discutido anteriormente, concluímos que $([\mathfrak{c}]^{<\omega}, \tau)$ é um grupo topológico de Hausdorff, enumeravelmente compacto e sem sequências não triviais convergentes. □

5 A demonstração de tal fato é análoga à demonstração apresentada na Seção 3.3 para os conjuntos $S(\xi)$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste breve capítulo, faremos alguns comentários sobre o conteúdo deste trabalho.

Apresentamos, no Capítulo 2, a técnica proposta por van Douwen [5] para obter dois grupos topológicos cujo produto não é enumeravelmente compacto. Como vimos anteriormente, essa técnica pressupõe a existência de um grupo de van Douwen. Dado que tal grupo é booleano, é natural questionar se existe um resultado similar para grupos não booleanos. E a resposta, neste caso, é positiva, já que Tomita [22] mostrou, em ZFC, que a existência de um grupo abeliano enumeravelmente compacto sem sequências não triviais convergentes implica a existência de um grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto, melhorando o resultado de van Douwen e tornando ainda mais interessante a construção de grupos abelianos (não necessariamente booleanos) enumeravelmente compactos sem sequências não triviais convergentes.

Com o objetivo de conhecer ténicas variadas de construção de grupos de van Douwen, optamos por estudar resultados que assumem diferentes hipóteses adicionais a ZFC. Na Seção 3.2, mostramos como obter um grupo de van Douwen assumindo o Axioma de Martin e, no Capítulo 4, vimos que é suficiente assumir a existência de um ultrafiltro seletivo para obter um tal grupo. Por fim, no Capítulo 5, apresentamos a construção de um grupo de van Douwen em ZFC.

Optamos, ainda, por apresentar um exemplo de grupo topológico enumeravelmente compacto sem sequências não triviais convergentes que fosse de não torção, pois, por exemplo, nesse tipo de grupo é possível construir o que é conhecido por *semigrupo de Wallace*. Uma breve contextualização: Numakura [17] mostrou, em 1952, que todo semigrupo cancelativo (à direita e à esquerda) compacto é um grupo topológico. Três anos mais tarde, Wallace [26] perguntou se todo semigrupo cancelativo enumeravelmente compacto é, necessariamente, um grupo topológico. Um contraexemplo para a pergunta de Wallace é denominado um *semigrupo de Wallace*. Em 1996, Robbie e Svetlichny [19] responderam negativamente a pergunta de Wallace assumindo CH. Em

2007, Madariaga-Garcia e Tomita [16] construíram um semigrupo de Wallace assumindo a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos (dois a dois incomparáveis segundo a ordem de Rudin-Keisler em ω^*). Em 2019, Boero, Castro-Pereira e Tomita [2] obtiveram um semigrupo de Wallace assumindo a existência de um único ultrafiltro seletivo. Observamos que todos os exemplos mencionados são semigrupos de um grupo abeliano livre enumeravelmente compacto sem sequências não triviais convergentes.

Outra motivação para o estudo da construção apresentada na Seção 3.3 é que a noção de conjunto convenientemente fechado, introduzida explicitamente na Definição 5.5, já aparecia nesta construção, mesmo sem que um nome lhe fosse atríbuido em um primeiro momento.

Por fim, gostaríamos de enfatizar que o problema abaixo ainda se encontra em aberto:

Problema. *Existe, em ZFC, um grupo de não torção, enumeravelmente compacto e sem sequências não triviais convergentes?*

BIBLIOGRAFIA

[1] A. R. Bernstein, *A new kind of compactness for topological spaces*, Fund. Math. **66** (1970), 185-193.

[2] A. C. Boero, I. C. Pereira e A. H. Tomita, *Countably compact group topologies on the free Abelian group of size continuum (and a Wallace semigroup) from a selective ultrafilter*, Acta Math. Hungar. **159** (2019), 414-428.

[3] W. W. Comfort, *Problems on topological groups and other homogeneous spaces*, Open problems in topology, North-Holland, Amsterdam, 1990, 313-347.

[4] W. W. Comfort e K. A. Ross, *Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups*, Pacific J. Math. **16** (1966), 483-496.

[5] E. K. van Douwen, *The product of two countably compact topological groups*, Trans. Amer. Math. Society **262** (1980), 417–427.

[6] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Berlin, 1989.

[7] S. Garcia-Ferreira, A. H. Tomita e S. Watson. *Countably compact groups from a selective ultrafilter*, Proc. Amer. Math. Society **133** (2005), 937-943.

[8] A. Hajnal e I. Juhász, *A separable normal topological group need not be Lindelöf*, Gen. Topology Appl. **6** (1976), 199-205.

[9] K. P. Hart e J. van Mill, *A countably compact topological group H such that $H \times H$ is not countably compact*, Trans. Amer. Math. Society **323** (1991), 811-821.

[10] K. Hrbacek e T. Jech, *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, New York, 1999.

[11] M. Hrušák, J. van Mill, U. A. Ramos-García e S. Shelah, *Countably compact groups without non-trivial convergent sequences*, Trans. Amer. Math. Society **374** (2020), 1277-1296.

[12] P. B. Koszmider, A. H. Tomita e S. Watson, *Forcing countably compact group topologies on a larger free abelian group*, Topology Proc. **25** (2000), 563-574.

[13] K. Kunen, *Set Theory: an introduction to independence proofs*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[14] K. Kunen, *Some points in $\beta\mathbb{N}$*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **78** (1980), 385-398.

[15] V. Kuz'minov, *Alexandrov's hypothesis in the theory of topological groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **125** (1959), 727-729.

[16] R. E. Madariaga-Garcia e A. H. Tomita, *Countably compact topological group topologies on free Abelian groups from selective ultrafilters*, Topology Appl. **154** (2007), 1470-1480.

[17] K. Numakura, *On bicompact semigroups*, Math. J. Okayama Univ. **1** (1952), 99-108.

[18] J. Novák, *On the cartesian product of two compact spaces*, Fund. Math. **40** (1953), 106-112.

[19] D. Robbie e S. Svetlichny, *An answer to A. D. Wallace's question about countably compact cancellative semigroups*, Proc. Amer. Math. Society **124** (1996), 325-330.

[20] S. M. Sirota, *The product of topological groups and extremal disconnectedness*, Trans. Amer. Math. Society **169** (1969), 169-180.

[21] H. Terasaka, *On cartesian product of compact spaces*, Osaka Math. J. **4** (1952), 11-15.

[22] A. H. Tomita, *Square of countably compact groups without non-trivial convergent sequences*, Topology Appl. **153** (2005), 107-122.

[23] A. H. Tomita, *A group under $MA_{countable}$ whose square is countably compact but whose cube is not*, Topology Appl. **91** (1999), 91-104.

[24] A. H. Tomita e J. Trianon-Fraga, *Some pseudocompact-like properties in certain topological groups*, Topology Appl. **314** (2022).

[25] J. E. Vaughan, *Countable compact and sequentially compact spaces*, Handbook of Set-Theoretic Topology, North Holland, Amsterdam, 1984, 569-602.

[26] A. D. Wallace, *The structure of topological semigroups*, Bull. Amer. Math. Soc. **61** (1955), 95-112.

[27] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, Mineola, 2004.