

Universidade Federal do ABC

Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFABC



JOÃO PAULO FERREIRA DE MELLO

Funções de Melnikov para classes de sistemas descontínuos no plano

Dissertação de Mestrado

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da Capes

Santo André, 2015



Universidade Federal do ABC

Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFABC

João Paulo Ferreira de Mello

Funções de Melnikov para classes de sistemas descontínuos no plano

Orientador: Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFABC para obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO JOÃO PAULO FERREIRA DE MELLO,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MAURÍCIO FIRMINO SILVA LIMA.

Santo André, 2015

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Ferreira de Mello, João Paulo

Funções de Melnikov para classes de sistemas descontínuos no plano. /
João Paulo Ferreira de Mello — Universidade Federal do ABC, 2015.

77 fls. : il.

Orientador: Maurício Firmino Silva Lima

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2015.

1. Sistemas Dinâmicos Descontínuos. 2. Funções de Melnikov. I. Firmino Silva Lima, Maurício. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2015. III. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Rua Abolição, s/nº – Vila São Pedro – Santo André – SP
CEP 09210-180 · Fone: (11) 4996-0017
ppg.matematica@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato João Paulo Ferreira de Mello, realizada em 13 de março de 2015:

Prof.(a) Dr.(a) **Maurício Firmino Silva Lima** (UFABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Jeferson Cassiano** (UFABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Cláudio Aguiinaldo Buzzi** (UNESP) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Eduardo Guéron** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Cláudio Gomes Pessoa** (UNESP) – Membro Suplente



Universidade Federal do ABC

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, ____ de _____ de 20____.

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Silvia e Osvaldo, pelo amor e apoio incondicional e imprescindível. Agradeço à minha companheira Lanna pelo carinho, incentivo e cuidado nos momentos mais difíceis do Mestrado. Agradeço às minhas irmãs Mariana e Julia, aos meus sobrinhos Gabriela, Lucas, Sara e Noah, e aos meus cunhados Don e Carlos, que formam a melhor família que alguém poderia imaginar. Agradeço às minhas avós América e “Netinha,” e à minha terceira “avó”, tia Neda, que, além de ótimas conversas e histórias, estiveram sempre comigo. Às minhas tias, tios e primos, em especial à minha tia Ana. Obrigado a Deca pela melhor comida da Baixada.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima, que, com paciência e confiança, tornou o Mestrado o momento de maior aprendizado que já tive. Agradeço aos membros da banca examinadora pela atenção e o tempo dispensados ao meu trabalho, em especial ao Prof. Dr. Jéferson Cassiano. Agradeço à UFABC pelo ótimo ambiente de trabalho e à Capes pela bolsa de estudo.

Aos meus amigos de vida Lucas, Rafael, Gustavo, Diego, Thyago, Day, Osmar, Victor, Erich e Luana, esse trabalho talvez seja o melhor pedido de desculpas pela minha ausência. Agradeço aos meus colegas do Programa de Mestrado, em especial à Vanessa e ao Rian, e ao meu grande amigo de Graduação, Diolan.

Por último, agradeço à minha cidade, Santos, que mais uma vez me acolheu, e ao meu amigo Toddy, pelos diversos moveis destruídos.

RESUMO

Neste trabalho estudamos generalizações do Método de Melnikov para sistemas descontínuos no plano. Neste sentido, inicialmente abordamos esse problema como uma variação do estudo [1] onde um campo Hamiltoniano que admite um ciclo heteroclínico, cujo interior é folheado de órbitas periódicas, é perturbado por um campo Hamiltoniano não autônomo. Neste trabalho estendemos esse resultado para perturbações mais gerais (não conservativas) e apresentamos funções de Melnikov nesse novo contexto. Finalmente, abordamos o problema mais geral, relativo à perturbação de campos não conservativos, onde a função de Melnikov, associada a órbita heteroclínica, é obtida.

Palavras-chave: Sistemas Descontínuos; Sistemas Hamiltonianos Descontínuos; Funções de Melnikov

ABSTRACT

In this work we study generalizations of Melnikov's method to planar discontinuous dynamical system. Initially we study this problem as a variation of the work [1] where a Hamiltonian vector field that admits an heteroclinic cycle with its interior foliated by a family of periodic orbits is perturbed by a Hamiltonian perturbation. In this work we extended the results to more general perturbation (non conservative) and we show the Melnikov's functions in this new context. Finally, we approach a more general problem related to a perturbation of the non-conservative vector field where we obtained the Melnikov's function that is associated with a heteroclínic orbit.

Keywords:Discontinuous System. Hamiltonian Discontinuous System; Melnikov's Function

CONTEÚDO

1	INTRODUÇÃO	1
2	SISTEMAS DINÂMICOS CONTÍNUOS	3
2.1	Preliminares	3
2.2	Órbitas Estacionárias	6
2.3	Órbitas Periódicas	8
2.4	Órbitas Heteroclínicas	8
2.5	Sistemas Hamiltonianos	10
2.6	Função de Melnikov	12
3	SISTEMAS DINÂMICOS DESCONTÍNUOS	21
4	FUNÇÕES DE MELNIKOV EM SISTEMAS HAMILTONIANOS DESCONTÍNUOS	27
4.1	Introdução	27
4.1.1	O modelo Rocking Block	27
4.2	Definições Gerais	32
4.3	Aplicação de Poincaré	36
4.4	Coeficiente de Restituição	38
4.5	Sequência de Impactos	39
4.6	Órbitas Periódicas	39
4.7	Função de Melnikov	42
4.8	Existência de (m, n) -órbitas periódicas	47
4.8.1	O caso conservativo, $r = 1$	47
4.8.2	O caso dissipativo, $r < 1$	49
4.9	Conexões Heteroclínicas	51
4.10	Exemplo	57
5	FUNÇÃO DE MELNIKOV PARA SISTEMAS NÃO CONSERVATIVOS	65
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	73

Conteúdo

Referência Bibliográfica 73

1

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a área de Sistemas Dinâmicos Descontínuos tem tido marcante desenvolvimento. O grande número de fenômenos que podem ser modelados usando esses sistemas e a presença de comportamentos que não ocorrem em sistemas contínuos são alguns dos motivos para essa área ter atraído a atenção de engenheiros, físicos e matemáticos. Isso pode ser visto no livro [8].

Como grande parte das pesquisas em sistemas dinâmicos foram feitas para sistemas contínuos, é natural que exista uma grande variedade de métodos para estudar esses sistemas. Uma maneira de se desenvolver ferramentas para a análise dos sistemas descontínuos é generalizar técnicas úteis no caso contínuo para o caso descontínuo. O método no qual faremos tal generalização é o denominado *método de Melnikov* [4].

Considere um sistema dinâmico dado pela equação $\dot{q} = f(q) + \varepsilon g(q, t)$, onde $q \in \mathbb{R}^2$, f, g são continuamente diferenciáveis e g é T -periódica na variável t . Suponha, ainda, que o sistema não perturbado $\dot{q} = f(q)$ possua dois pontos de equilíbrio hiperbólico do tipo sela e que suas variedades estável e instável tenham interseção não vazia, dando origem a duas conexões heteroclínicas. Suponha, ainda, que a região compreendida entre esse "loop" heteroclínico é folheada por órbitas periódicas, (como, por exemplo, o pêndulo simples (Figura (4))). Nessas condições, podemos nos perguntar: quando as conexões heteroclínicas e as órbitas periódicas persistem no sistema $\dot{q} = f(q) + \varepsilon g(q, t)$?

Este trabalho propõe adaptar a teoria das funções de Melnikov no caso contínuo para o caso descontínuo. O caso em que o sistema dinâmico e a perturbação são Hamiltonianos é tratado no trabalho [1]. Fortemente inspirados em tal trabalho, iremos propor uma generalização do mesmo, através do relaxamento de duas hipóteses: a necessidade da perturbação ser Hamiltoniana e a necessidade do sistema a ser perturbado ser Hamiltoniano. No primeiro caso, conseguimos adaptar as técnicas desenvolvidas em [1], tanto para o estudo da continuação de órbitas periódicas quanto para o estudo da persistência da conexão heteroclínica. Na segunda situação, conseguimos modificar o método para o caso das conexões heteroclínicas.

Esse trabalho será dividido da seguinte maneira: no capítulo 2, iremos dar uma visão geral de sistemas dinâmicos contínuos. Incluiremos nele uma breve discussão sobre os teoremas clássicos que usaremos, sobre sistemas Hamiltonianos e sobre as funções de Melnikov clássicas; no capítulo 3, falaremos um pouco sobre Sistemas Dinâmicos Descontínuos; no capítulo 4, desenvolveremos o método de Melnikov para um sistema dinâmico descontínuo satisfazendo certas hipóteses. No final do capítulo 4, apresentaremos um exemplo onde calculamos explicitamente a função de Melnikov subharmônica para um sistema Hamiltoniano descontínuo perturbado; no capítulo 5, apresentaremos a teoria das funções de Melnikov no caso heteroclínico para sistemas dinâmicos quaisquer.

2 | SISTEMAS DINÂMICOS CONTÍNUOS

2.1 PRELIMINARES

O estudo clássico de sistemas dinâmicos está baseado no estudo do comportamento qualitativo das soluções de dois tipo de equações

$$\dot{q}(t) = f(q(t), t, \mu), \quad (1)$$

e

$$q(n+1) = g(q(n), n, \mu), \quad (2)$$

onde $\dot{\cdot} := \frac{d}{dt}$, $f : U \times I \times V \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$, $g : U \times \mathbb{N} \times V \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ com $U \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $I \subset \mathbb{R}$ e $V \subset \mathbb{R}^{n_2}$ abertos.

Chamaremos (1) de *sistema dinâmico contínuo no tempo* e (2) de *sistema dinâmico discreto no tempo*. Os abertos U e V serão chamados, respectivamente, de *espaço de fase* e *espaço de parâmetros*.

Exemplo 2.1.0.1. *Pêndulo Simples.*

Usaremos o modelo do pêndulo simples durante esse capítulo, para exemplificar os conceitos introduzidos. Vale dizer que quando dissermos *pêndulo simples*, estaremos nos referindo ao modelo matemático, e idealizado de um *pêndulo real*. Vamos considerar um corpo de massa m sustentado por uma haste rígida de massa desprezível, de comprimento l . Consideramos, ainda, que o movimento do pêndulo está restrito a um plano no espaço. Além disso, o pêndulo estará sob a ação de uma única força externa, a força peso.

Esse sistema é completamente descrito usando uma única variável, a saber, o deslocamento angular θ . O Lagrangiano com relação a essa variável é dado por

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta).$$

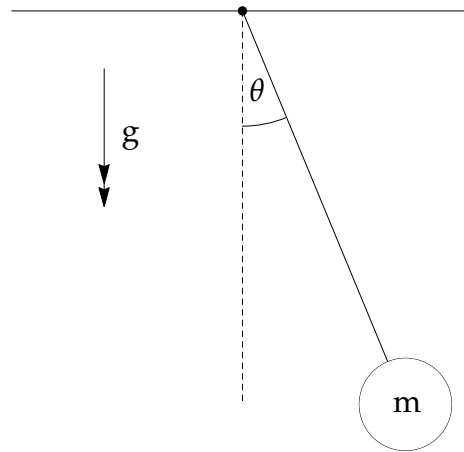


Fig. 1: Esquema do pêndulo simples.

Pela equação de Euler-Lagrange, teremos

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta).$$

Que também pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l} \sin(\theta). \end{aligned} \tag{3}$$

Veja que estamos considerando o comprimento l da haste como um parâmetro. Assim, usando a notação que introduzimos anteriormente, o espaço de fase é dado por $U = \mathbb{R}^2$ e o espaço de parâmetros é dado por $V = (0, \infty)$. Além disso, o campo de vetores f será

$$\begin{aligned} f: U \times V &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, \omega, l) &\mapsto f(\theta, \omega, l) := \left(\omega, -\frac{g}{l} \sin(\theta) \right) \end{aligned}$$

Os resultados que apresentaremos sobre sistemas dinâmicos possuem versões similares para (1) e (2). Como na maior parte deste trabalho iremos tratar de equações diferenciais do tipo (1), que apresentam descontinuidades na variável x , vamos apresentar apenas os teoremas para essas equações.

O primeiro resultado que apresentaremos é fundamental no estudo de sistemas dinâmicos.

Teorema 2.1. (Existência e Unicidade) *Seja $f : U \times I \times V \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ continuamente diferenciável e $|f(q, t, \mu)| < M$ para todos $(q, t, \mu) \in U \times I \times V$. Para qualquer $(q_0, t_0, \mu_0) \in U \times I \times V$ existe única solução da equação*

$$\dot{q} = f(q, t, \mu),$$

passando pelo ponto $q_0 \in U$ no instante $t_0 \in I$, tomando um parâmetro $\mu_0 \in V$. O ponto (q_0, t_0, μ_0) será chamado de condição inicial.

Denotaremos por $\phi(t; q_0, t_0, \mu_0)$ a única solução dada pelo Teorema 2.1 com condição inicial (t_0, q_0, μ_0) . Isso significa que

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t; q_0, t_0, \mu_0) &= f(\phi(t; q_0, t_0, \mu_0), t, \mu_0), \\ \phi(t_0; q_0, t_0, \mu_0) &= q_0.\end{aligned}$$

Geometricamente $\phi(t; q_0, t_0, \mu_0)$ são curvas em U , onde o vetor velocidade dessa curva é dado por $f(\phi(t; q_0, t_0, \mu_0), t, \mu_0)$. Essas curvas preenchem completamente - folheam - o espaço de fase U .

Durante todo o texto iremos nos concentrar no caso de sistemas dinâmicos planares, portanto fixemos $n_1 = 2$.

É natural considerarmos campo de vetores que não dependem explicitamente da variável temporal. Estes sistemas serão chamados de *sistemas dinâmicos autônomos* e podemos escrevê-los como

$$\dot{q} = f(q, \mu),$$

onde f não depende explicitamente da variável t .

Fixado um parâmetro $\mu_0 \in V$, pretendemos descrever algumas propriedades do sistema $\dot{x} = f(x, \mu_0)$. Para não carregarmos a notação, não explicitaremos μ e escreveremos apenas

$$\dot{q} = f(q). \tag{4}$$

Algumas órbitas do sistema (4) desempenham papel fundamental na descrição do retrato de fase, ou seja, na representação geométrica das órbitas $\phi(t; q_0, t_0)$ no espaço de fase. Essas órbitas são as órbitas estacionárias, periódicas e heteroclínicas.

2.2 ÓRBITAS ESTACIONÁRIAS

Seja $\bar{q} \in U$, tal que

$$f(\bar{q}) = 0.$$

O ponto $\bar{q}$ será chamado de *ponto de equilíbrio* e a órbita $\phi(t; \bar{q}, t_0)$ é chamada de *órbita estacionária*. Como o nome sugere, se evoluirmos no tempo a órbita $\phi(t; \bar{q}, t_0)$ ela permanecerá parada no ponto $\bar{q}$ já que $\dot{\phi}(t; \bar{q}, t_0) = 0$.

Diremos que um ponto de equilíbrio $\bar{q}$ é *hiperbólico* se a matrix $Df(\bar{q})$ não possui autovalores com parte real igual a zero.

Para pontos hiperbólicos, temos uma maneira simples de descrever o comportamento local de órbitas que passam próximas a ele. Para isso, precisamos do conceito de conjugação entre sistemas dinâmicos.

Sejam dois campos vetoriais contínuos $g_1 : U' \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g_2 : U'' \rightarrow \mathbb{R}^2$ e considere os sistemas dinâmicos

$$\dot{q}_1 = g_1(q_1), \tag{5}$$

e

$$\dot{q}_2 = g_2(q_2). \tag{6}$$

Vamos supor que (5) e (6) possuem cada um ponto de equilíbrio, denotado respectivamente por $\bar{q}_1$ e $\bar{q}_2$, do tipo hiperbólico. Diremos que eles têm *qualitativamente a mesma estrutura próximo à $\bar{q}_1$ e $\bar{q}_2$* , ou *topologicamente conjugados próximo à $\bar{q}_1$ e $\bar{q}_2$* , se existir abertos $\Omega' \subset U'$ e $\Omega'' \subset U''$, um homeomorfismo $\mathcal{H} : \Omega' \rightarrow \Omega''$, tal que $\mathcal{H}(\bar{q}_1) = \bar{q}_2$ e que $\mathcal{H}$ aplique trajetórias de (5) em trajetórias de (6), preservando a orientação e o tempo.

Uma maneira de descrever o comportamento próximo a pontos estacionários do sistema (4), será descrever o comportamento de um ponto estacionário de um sistema mais simples (em geral uma linearização do sistema original) e daí mostrar que os sistemas têm qualitativamente a mesma estrutura próximo a seus respectivos pontos estacionários. O próximo teorema nos fornece a justifica necessária para realizarmos esses passos.

Teorema 2.2. Teorema de Hartman-Grobman. *Seja $\bar{q} \in U$ um ponto de equilíbrio hiperbólico do sistema (4). Então, os sistemas (4) e $\dot{q} = Df(\bar{q})(\bar{q} - q)$ são topologicamente conjugados numa vizinhança de $\bar{q}$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [5]. Esse teorema simplifica muito a descrição do comportamento próximo a pontos hiperbólicos. Basta classificar-mos todos os possíveis comportamentos próximos a pontos hiperbólicos do sistema linear $\dot{q} = Aq$, onde A é uma matriz 2×2 . Essa classificação pode ser vista em [6].

Os pontos de equilíbrio que mais trabalharemos são dos tipos:

- **pontos de sela:** Um ponto de equilíbrio $\bar{q} \in U$ é chamado de *ponto de sela* se os autovalores da matriz $Df(\bar{q})$ são reais e de sinais opostos.
- **centros:** Um ponto de equilíbrio $\bar{q} \in U$ é chamado *centro* se existe uma vizinhança Ω de $\bar{q}$, tal que qualquer órbita da equação (4) passando por $q_1 \in \Omega$ é uma órbita periódica e $\bar{q}$ está contido no interior da área delimitada por essa órbita.

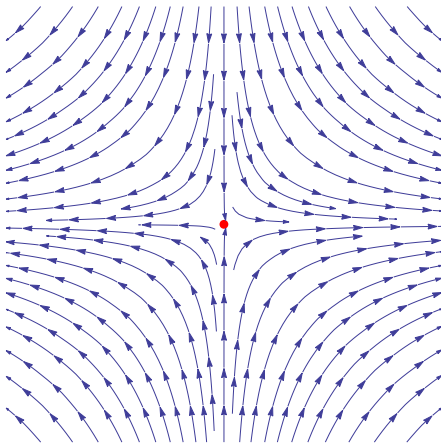


Fig. 2: A origem representa um ponto de sela.

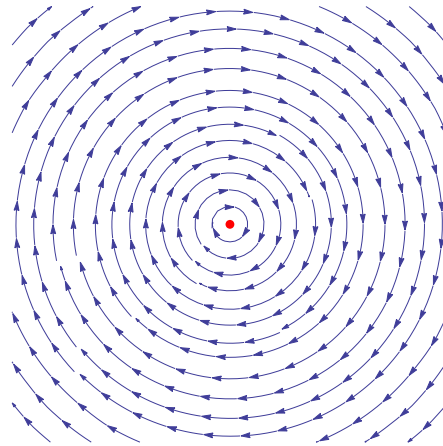


Fig. 3: A origem representa um centro.

Exemplo 2.2.0.2. *Voltando ao pêndulo simples.*

Vamos procurar quais são os pontos de equilíbrio da equação (3). Para isso, vamos procurar $(\theta, \omega) \in U$, tal que

$$f(\theta, \omega, l) = \left(\omega, -\frac{g}{l} \sin(\theta) \right) = (0, 0).$$

Portanto, os pontos de equilíbrio são $p_n := (0, n\pi)$ para $n \in \mathbb{Z}$.

Vamos agora estudar de qual tipo são os pontos de equilíbrio. Para isso, precisamos calcular a matriz Jacobiana de f com relação à (θ, ω)

$$D_{(\theta, \omega)}f(\theta, \omega, l) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{g}{l} \cos(\theta) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Os autovalores da matriz (7) calculada nos pontos de equilíbrio p_n dependem apenas se n é ímpar ou par. Se n for ímpar, então $D_{(\theta, \omega)}f(p_n, l)$ possuirá dois autovalores $\pm \sqrt{\frac{g}{l}}$. Por essa razão, esses pontos são hiperbólicos do tipo sela. Quando n for par, a matriz $D_{(\theta, \omega)}f(p_n, l)$ possuirá autovalores da forma $\pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$. Portanto, se n for par a matriz (7) possuirá autovalores com parte real igual a zero. Isso significa que não são hiperbólicos. Mais adiante, mostraremos que esses são pontos de equilíbrio do tipo centro. $\square$

2.3 ÓRBITAS PERIÓDICAS

Diremos que uma órbita $\phi(t; q_0, t_0)$ do sistema (4) é uma *órbita periódica* se existir $T \in \mathbb{R}^+$, tal que

$$\phi(t; q_0, t_0) = \phi(t + T; q_0, t_0),$$

para todo $t \in I$. Definiremos o *período* de uma órbita periódica como o menor T que satisfaz a igualdade acima.

2.4 ÓRBITAS HETEROCLÍNICAS

Seja $\bar{q} \in U$ um ponto de equilíbrio hiperbólico da equação (4). As *variedades estável* $W^s(\bar{q})$ e *instável* $W^u(\bar{q})$ são definidas, respectivamente, como

$$W^s(\bar{q}) := \{p \in U; \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; p, t_0) = \bar{q}\},$$

$$W^u(\bar{q}) := \{p \in U; \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t; p, t_0) = \bar{q}\}.$$

Sejam $\bar{q}_1, \bar{q}_2 \in U$ dois pontos de equilíbrio hiperbólicos do sistema (4). Diremos que uma órbita $\phi(t; q, t_0)$ é uma *órbita heteroclínica* se

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t; q, t_0) &= \bar{q}_1, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; q, t_0) &= \bar{q}_2.\end{aligned}$$

Quando $\bar{q}_1 = \bar{q}_2$ diremos que a órbita $\phi(t; q, t_0)$ é uma *órbita homoclínica*.

A existência de órbitas heteroclínicas está ligada à presença de intersecções das variedades $W^s(\bar{q}_1)$ e $W^s(\bar{q}_2)$. Assim, se $W^s(\bar{q}_1) \cap W^s(\bar{q}_2) \neq \emptyset$, então existirá uma órbita heteroclínica ligando os pontos $\bar{q}_1$ e $\bar{q}_2$. Os pontos $p \in W^s(\bar{q}_1) \cap W^s(\bar{q}_2)$ serão chamados de *pontos heteroclínicos*. Se num ponto heteroclínico as variedades se encontram transversalmente, chamaremos esse ponto de *ponto heteroclínico transversal*.

Daremos agora uma descrição melhor das variedades estável e instável de um ponto de sela $\bar{q} \in U$ do sistema (4).

Um subconjunto $\mathcal{C} \subset U$ é dito *subconjunto invariante* do sistema (4) se, para qualquer $q_0 \in \mathcal{C}$, temos $\{\phi(t; q_0, t_0), t \in I\} \subset \mathcal{C}$.

Como estamos considerando apenas sistemas planares e $\bar{q}$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico podemos tomar os autovalores a_s e a_u da matriz $Df(\bar{q})$ de tal forma que $a_s < 0$ e $a_u > 0$. A esses autovalores, podemos associar respectivamente os autovetores v_s e v_u . Definimos $E_s = [v_s]$ e $E_u = [v_u]$ e chamamos, respectivamente, de subespaço estável e subespaço instável do ponto $\bar{q}$ com relação à equação linear

$$\dot{q} = Df(\bar{q})(\bar{q} - q).$$

Podemos mostrar que os subespaços E_s e E_u são invariantes com relação à equação acima. Além disso, órbitas começando em E_s se aproximam de $\bar{x}$ assintoticamente a uma taxa exponencial quando $t \rightarrow \infty$ e órbitas começando no subespaço E_u se aproximam de $\bar{x}$ assintoticamente a uma taxa exponencial quando $t \rightarrow -\infty$.

Exemplo 2.4.0.3. *Cálculo dos espaços estável e instável.*

Vamos estudar a equação linear

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Veja que essa equação é do tipo $\dot{q} = Aq$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Essa equação tem a origem como único ponto de equilíbrio. Como a matriz A tem autovalores iguais a $a_s = -2$ e $a_u = 1$ com respectivos autovetores $v_s = (0, 1)$ e $v_u = (1, 0)$, garantimos que a origem é um ponto hiperbólico. Além disso, $E_s = [(0, 1)]$ e $E_u = [(1, 0)]$.

É fácil ver que a solução de (8) é dada por

$$\phi(t; x_0, y_0, t_0) = (x_0 e^{t-t_0}, y_0 e^{-2(t-t_0)}).$$

Então, uma órbita começando num ponto na variedade estável é dada por $(0, y_0 e^{-2(t-t_0)})$. Veja que essa solução se aproxima da origem exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$. Comportamento análogo ocorre quando $t \rightarrow -\infty$ para órbitas começando na variedade instável $\square$.

Procuramos estabelecer uma relação entre a variedade estável (resp. instável) de pontos hiperbólicos de um sistema dinâmico qualquer e o espaço estável (resp. instável) de sua respectiva linearização. O próximo teorema estabelece esse vínculo.

Teorema 2.3. Teorema da Variedade Estável/Instável *Seja $\bar{q}$ um ponto de sela da equação (4). Então,*

- $W^s(\bar{q})$ é uma variedade suave e é tangente ao espaço estável E_s no ponto $\bar{q}$.
- $W^u(\bar{q})$ é uma variedade suave e é tangente ao espaço instável E_u no ponto $\bar{q}$.

Além disso, órbitas começando em $W^s(\bar{q})$ se aproximam de $\bar{q}$ assintoticamente a uma taxa exponencial quando $t \rightarrow \infty$. Analogamente, órbitas começando em $W^u(\bar{q})$ se aproximam de $\bar{q}$ assintoticamente a uma taxa exponencial quando $t \rightarrow -\infty$.

A demonstração desse teorema pode ser vista em [5].

2.5 SISTEMAS HAMILTONIANOS

Considere um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ e uma função $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pelo menos de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$. Um sistema da forma

$$\dot{q} = J \cdot \nabla H(q), \tag{9}$$

onde $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ é chamado de *sistema Hamiltoniano* com η graus de liberdade e a função H é chamada de *Hamiltoniano* do sistema (9). Como falamos anteriormente, estamos interessados em sistemas planares e, portanto, $\eta = 1$.

Sistemas Hamiltonianos aparecem naturalmente em modelos mecânicos quando a perda de energia devido ao atrito não é considerada. No contexto da mecânica clássica, podemos interpretar o Hamiltoniano como sendo a energia total do sistema. O próximo teorema resume o que dissemos.

Teorema 2.4. (Conservação de Energia) *O Hamiltoniano $H(q)$ se mantém constante ao longo das trajetórias do sistema (9).*

Um consequência importante desse teorema é que se $\bar{q}$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico, então suas variedades estável e instável estão no mesmo nível de energia, ou seja, se $c := H(\bar{q})$, então para qualquer $v \in W^{s/u}(\bar{q})$ teremos $H(v) = c$.

De fato, pela continuidade de H e por $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t; t_0, v) = \bar{q}$, teremos

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} H(\phi(t; t_0, v)) = H(\bar{q}) = c.$$

Pelo teorema 2.4 o Hamiltoniano calculado em cima de uma solução de (9) é uma função constante. Segue que $H(\phi(t; t_0, v)) = c$. Em particular, $H(v) = H(\phi(t_0; t_0, v)) = c$.

Uma propriedade importante de sistemas Hamiltonianos é que $\text{div}(J \cdot \nabla H(q)) = 0$. Quando um sistema dinâmico apresenta tal propriedade, dizemos que esse sistema *preserva área*.

Usando esse fato, podemos mostrar que num sistema Hamiltoniano os pontos de equilíbrio só podem ser de dois tipos: do tipo sela e centro.

Teorema 2.5. *Um ponto de equilíbrio de um sistema Hamiltoniano no plano ou é um ponto de sela ou um centro.*

As demonstrações dos dois últimos teoremas podem ser vistas em [7].

Exemplo 2.5.0.4. *Mais uma vez o Pêndulo Simples.*

As equações para o modelo do pêndulo simples formam um sistema Hamiltoniano com Hamiltoniano

$$H(\theta, \omega) = \frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{l} \cos(\theta). \quad (10)$$

Sabendo disso, pelo teorema 2.5 podemos agora dizer que os pontos p_n com n par são pontos de equilíbrio do tipo centro.

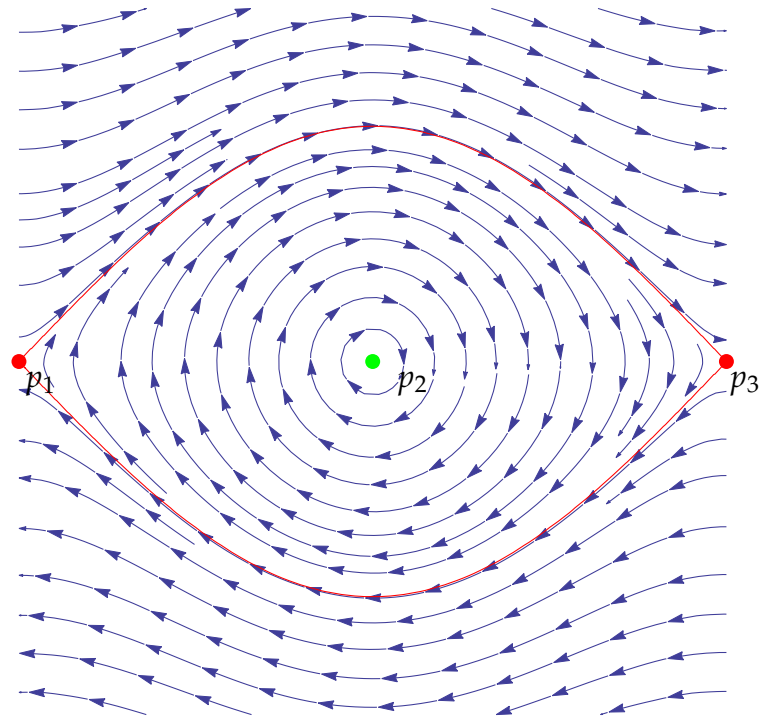


Fig. 4: Retrato de fase de (3). Os pontos p_1 e p_2 são pontos de equilíbrio hiperbólicos do tipo sela e p_3 é um centro.

2.6 FUNÇÃO DE MELNIKOV

Como já dissemos, em mecânica clássica, quando o atrito é desprezado é comum que as equações do modelo matemático de um fenômeno mecânico formem um sistema Hamiltoniano. Essa idealização fornece, além de um sistema dinâmico, que é, em geral, mais simples de ser analisado, um sistema onde vários fenômenos antecipados na teoria concordam com a experiência.

Acontece que o sistema Hamiltoniano advindo dessa idealização apresenta alguns comportamentos que não verificamos na prática. Como no caso do pêndulo, onde o pêndulo real, diferente do pêndulo simples, pode não apresentar órbitas periódicas.

Seria possível extrairmos mais informação sobre o comportamento do modelo físico usando o Hamiltoniano já conhecido?

Para discutirmos uma possível resposta a essa pergunta, vamos fazer algumas hipóteses sobre o sistema (9):

(H1) Existem dois pontos do tipo sela q_1 e q_2 e duas órbitas heteroclínicas $\Phi^+(t)$ e $\Phi^-(t)$, onde

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi^+(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi^-(t) = q_1, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi^+(t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi^-(t) = q_2.\end{aligned}$$

Além disso, as variedades $W^s(q_1)$ e $W^u(q_2)$ se interceptam ao longo de uma órbita, assim como as variedade $W^u(q_1)$ e $W^s(q_2)$.

(H2) Seja $\Theta = \{\Phi^+(t); t \in \mathbb{R}\} \cup \{\Phi^-(t); t \in \mathbb{R}\} \cup \{q_1, q_2\}$. Denotaremos por $\bar{\Theta}$ a região do plano delimitada por Θ . Assumiremos que $\bar{\Theta}$ é folheado por uma família contínua de órbitas periódicas e a denotaremos por $\mathcal{A}$. Diante disso, pelo teorema 2.4, se $c := H(q_1) = H(q_2)$, para cada $\alpha \in (0, c)$ existe única $\Lambda_\alpha \in \mathcal{A}$, tal que, $\forall v \in \Lambda_\alpha$, temos $H(v) = \alpha$.

(H3) Indicaremos por T_α o período da órbita periódica $\Lambda_\alpha \in \mathcal{A}$. Assumiremos que T_α é uma função crescente e continuamente diferenciável com respeito a α no intervalo $(0, c)$.

Essas hipóteses implicam na existência de um ponto de equilíbrio p_3 do tipo centro em $\bar{\Theta}$.

O pêndulo simples é um exemplo de sistema dinâmico que satisfaz as hipóteses **(H1)**, **(H2)** e **(H3)**.

Tomemos agora uma função continuamente diferenciável

$$\begin{aligned}g : U \times I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (q, t) &\mapsto g(q, t),\end{aligned}$$

e T -periódica na variável t .

Para $\varepsilon > 0$ chamaremos a equação

$$\dot{q} = J \cdot \nabla H(q) + \varepsilon g(q, t), \quad (11)$$

de sistema perturbado.

Nosso objetivo agora é obter informações sobre o sistema (11) através das hipóteses feitas sobre o sistema (9). Observe que a equação (11) não é uma equação autônoma. Isso implica que o seu espaço de fase não é mais um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Na verdade, o

espaço de fase de (11) é dado por $U \times (0, T]$, onde os extremos de $(0, T]$ são identificados. Por isso, escreveremos o espaço de fase de (11) como $U \times S^1$, onde $S^1 = \mathbb{R}/T$.

Levando em conta o que foi dito, podemos reescrever (11) como

$$\begin{aligned}\dot{q} &= J \cdot \nabla H(q) + \varepsilon g(q, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= 1,\end{aligned}$$

onde $\varphi \in S^1$, $q \in U$ e $\varepsilon > 0$.

Lembrando que se tomarmos $\varepsilon = 0$ na equação (11), teremos

$$\begin{aligned}\dot{q} &= J \cdot \nabla H(q), \\ \dot{\varphi} &= 1.\end{aligned}\tag{12}$$

No sistema (12), as órbitas estacionárias $q_{1,2,3}$ do sistema (9) tornam-se órbitas T -periódicas dadas por $q_{1,2,3}(\phi) := (q_{1,2,3}, \phi)$. Também temos que $\bar{\Theta} \times S^1$ forma um toro sólido folheado pelos toros $\Lambda_\alpha \times S^1$ com $\alpha \in (0, c)$.

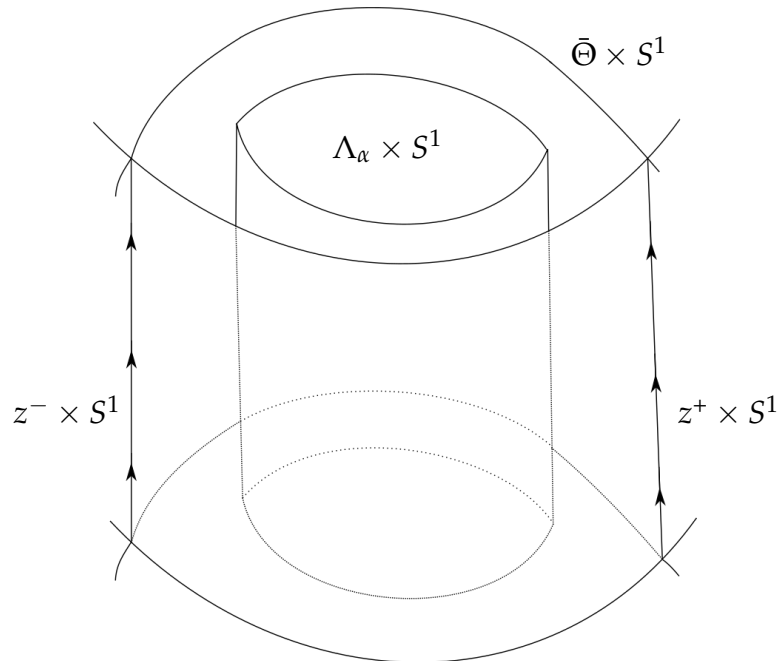


Fig. 5: Esquema da situação descrita acima. Veja que estamos considerando que esses cilindros têm as suas pontas identificadas.

Fixado $t_0 \in S^1$, definimos a secção Σ_0 do espaço $U \times S^1$ como

$$\Sigma_0 = U \times \{t_0\}.$$

Para estudarmos (11) definimos a aplicação de Poincaré

$$\begin{aligned} P_\varepsilon : \Sigma_0 &\rightarrow \Sigma_0 \\ (q, t_0) &\mapsto (\phi(t_0 + T; q, t_0, \varepsilon), t_0). \end{aligned}$$

Se não houver a necessidade de explicitarmos t_0 , vamos denotar $P_\varepsilon(q, t_0)$ apenas por $P_\varepsilon(q)$. Quando $\varepsilon = 0$ a aplicação P_0 possui dois pontos fixos hiperbólicos do tipo sela $q_{1,2}(t_0) = (q_{1,2}, t_0)$ e suas variedades instável/estável são dadas por

$$W^{u/s}(q_{1,2}(t_0)) = W^{u/s}(q_{1,2}) \times \{t_0\}.$$

A próxima proposição nos dá a primeira propriedade que podemos demonstrar do sistema (11).

Proposição 2.6. *Se $q_{1,2}(t_0)$ são pontos fixos hiperbólicos da aplicação P_0 , então a aplicação P_ε possuirá dois pontos fixos hiperbólicos $q_{1,2}(t_0, \varepsilon)$ do mesmo tipo de $q_{1,2}(t_0)$. Além disso, $q_{1,2}(t_0, 0) = q_{1,2}(t_0)$.*

Demonstração: A demonstração que daremos serve para qualquer ponto fixo hiperbólico. Por isso, durante a demonstração, para não carregar a notação, vamos tomar um ponto fixo hiperbólico $\bar{q} \in U$ da aplicação P_0 .

Primeiro vamos mostrar que o ponto fixo $\bar{q}$ persiste sob a ação de uma perturbação de ordem ε da forma $g(q, t)$. Observe que $P_0(\bar{q}) - \bar{q} = 0$ e por conta da hiperbolicidade de $\bar{q}$ a matriz $DP_0(\bar{q})$ não possui autovalores no círculo unitário. Assim

$$\det(D(P_0(\bar{q}) - \bar{q})) = \det(DP_0(\bar{q}) - I) \neq 0,$$

onde I representa a matriz identidade.

Pelo Teorema da Função Implícita existe $\varepsilon_1 > 0$, tal que, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ existe único $\bar{q}(\varepsilon) \in U$ onde $P_\varepsilon(\bar{q}(\varepsilon)) = \bar{q}(\varepsilon)$ e $\bar{q}(\varepsilon)$ é tão diferenciável com relação a ε quanto o fluxo $\phi(t; q, t_0, \varepsilon)$.

Falta mostrar que $\bar{q}(\varepsilon)$ é hiperbólico e do mesmo tipo que $\bar{q}$. Como durante o texto iremos considerar apenas pontos hiperbólicos do tipo sela, vamos pedir que os

autovalores a_s e a_u da matriz $DP_0(\bar{q})$ satisfaçam as desigualdades $a_s < 1$ e $a_u > 1$. É importante observar que os autovalores são simples, ou seja, sua multiplicidade algébrica é igual a um.

Para calcularmos os autovalores da matriz $DP_\varepsilon(\bar{q}(\varepsilon))$ precisamos resolver a equação

$$\det(DP_\varepsilon(\bar{q}(\varepsilon)) - \lambda.I) = 0.$$

Veja que se $\varepsilon = 0$ e $\lambda = a_{u/s}$, temos $\det(DP_0(\bar{q}) - a_{u/s}.I) = 0$. Como os autovalores $a_{u/s}$ são simples, $\frac{d}{d\lambda} \det(DP_0(\bar{q}) - a_{u/s}.I) \neq 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, existe $\varepsilon_2 > 0$, tal que, para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ os autovalores de $\bar{q}(\varepsilon)$ são dados por $a_{s/u}(\varepsilon)$, onde $a_{s/u}(0) = a_{s/u}$.

Por continuidade, podemos tomar $\varepsilon_3 > 0$, tal que, $a_s(\varepsilon) < 1$ e $a_u(\varepsilon) > 1$. Com isso, mostramos que podemos tomar ε pequeno o suficiente para que $\bar{q}(\varepsilon)$ seja um ponto fixo hiperbólico do mesmo tipo que $\bar{q}$. $\square$

Pela proposição anterior podemos tomar $q_{1,2}(t_0, \varepsilon)$ pontos fixos do tipo sela da aplicação P_ε , assim como suas respectivas variedades estável e instável $W^{u/s}(q_{1,2}(t_0, \varepsilon))$.

Quando $\varepsilon = 0$ as variedades $W^{u/s}(q_{1,2}(t_0, 0))$ se encontram, respectivamente, ao longo de uma órbita, com as variedades $W^{s/u}(q_{1,2}(t_0, 0))$. Mas quando $\varepsilon > 0$ as variedades podem coincidir, se separar ou se cruzar. Na verdade, a situação que nos interessa é quando as variedade se cruzam. Para que fique claro o porquê esse comportamento é importante, vamos fazer algumas definições.

Vamos começar tomando um conjunto fechado e invariante $\mathcal{F} \subset U$ do sistema dinâmico (4). Diremos que $\mathcal{F}$ é *topologicamente transitivo com relação ao fluxo* $\phi(t; q_0, t_0)$ se para quaisquer abertos $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathcal{F}$ (considerando a topologia induzida por U) existe um tempo $\bar{t} > t_0$, tal que $\phi(\bar{t}; \Omega_1, t_0) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$.

Diremos que um fluxo $\phi(t; q_0, t_0)$ possui *sensibilidade com relação as condições iniciais em $\mathcal{F}$* se existe $\epsilon > 0$, tal que, para todo $q_0 \in \mathcal{F}$ e para qualquer vizinhança $\mathcal{V} \subset \mathcal{F}$ do ponto q_0 , existe $q_1 \in \mathcal{V}$ e $\bar{t} > t_0$, tal que, $|\phi(\bar{t}; q_0, t_0) - \phi(\bar{t}; q_1, t_0)| > \epsilon$.

Um conjunto $\mathcal{F} \subset U$ fechado e invariante com relação ao fluxo $\phi(t; q_0, t_0)$ é dito *caótico* se:

- O conjunto $\mathcal{F}$ é topologicamente transitivo com relação a $\phi(t; q_0, t_0)$.
- O fluxo $\phi(t; q_0, t_0)$ possui sensibilidade com relação às condições iniciais em $\mathcal{F}$.

A presença de conjuntos invariantes e caóticos foi primeiro observada pelo matemático Henri Poincaré, enquanto estudava perturbações de sistemas Hamiltonianos. Mas a completa compreensão de como esses conjuntos se formam só foi possível através do famoso teorema de Smale-Birkhoff, que garante a existência de um conjunto invariante e caótico numa vizinhança de um ponto heteroclínico transversal.

O método de Melnikov [4] nos fornece uma ferramenta analítica para detectarmos a presença de intersecções transversais em sistemas Hamiltonianos perturbados. O método consiste, primeiramente, em tomar a função de Melnikov

$$\begin{aligned} M : (0, T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t_0 &\mapsto M(t_0) := \int_{-\infty}^{\infty} \langle \nabla H, g \rangle (\Phi(t), t + t_0) dt, \end{aligned} \quad (13)$$

onde $\Phi(t)$ é uma solução heteroclínica do sistema (9). Depois de "calculada" a função de Melnikov, procuramos zeros simples dessa função. Os zeros simples dessa função implicam na existência de pontos heteroclínicos transversais.

Teorema 2.7. *Se $M(t_0)$ tem um zero simples, então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $W^s(q_1(\varepsilon))$ e $W^u(q_2(\varepsilon))$ se intersectam transversalmente.*

Uma alteração desse método pode ser feita para analisarmos a persistência das órbitas periódicas, dadas pela hipótese **(H2)**, sob a ação de uma perturbação $g(q, t)$. Para isso, tome $m, n \in \mathbb{N}$ com $\text{mdc}(m, n) = 1$ e definimos a função de Melnikov sub-harmônica

$$\begin{aligned} M^{m,n} : (0, T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t_0 &\mapsto M^{m,n}(t_0) := \int_0^{nT} \langle \nabla H, g \rangle (\Lambda_\alpha(t), t + t_0) dt, \end{aligned} \quad (14)$$

onde $\Lambda_\alpha(t)$ é uma parametrização da órbita periódica Λ_α de período $T(\alpha) = \frac{nT}{m}$ do sistema (12). Análogo ao caso heteroclínico temos

Teorema 2.8. *Se $M^{m,n}(t_0)$ tem um zero simples, então, para ε pequeno o suficiente, o sistema (11) tem uma órbita periódica de período nT .*

As demonstrações dos teoremas (2.7) e (2.8) podem ser encontradas em [4].

Ressaltamos que, em geral, a obtenção das funções (13) e (14) não podem ser feita analiticamente. Então, o cálculo e a análise dessas funções é feita tanto de maneira analítica quanto numérica. Por isso, os sistemas dinâmicos em que podemos realizar todos

os cálculos analiticamente são difíceis de encontrar e, por consequência, interessantes de se apresentar.

Exemplo 2.6.0.5. *Equação de Duffing.*

Um exemplo de sistema dinâmico onde podemos achar analiticamente a função de Melnikov (13) é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 + \varepsilon \cos(t).\end{aligned}\tag{15}$$

Note que se $\varepsilon = 0$, (15) torna-se

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3,\end{aligned}\tag{16}$$

que é um sistema Hamiltoniano com

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

A perturbação do sistema (16) é a função $\cos(t)$ que é 2π -periódica. O sistema não perturbado possui a origem como um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo sela e outros dois pontos de equilíbrio $p_{1,2} = (\pm 1, 0)$ do tipo centro.

Como podemos ver na figura (6) o sistema (16) possui duas conexões homoclínicas $Y^\pm$. Essas variedades são dadas implicitamente por $H(x, y) = 0$. Como a análise posterior é análoga para as conexões Y^+ e Y^- , vamos estudar apenas a primeira conexão. Uma parametrização de Y^+ é dada por

$$v^+(t) = (\sqrt{2}\operatorname{sech}(t), -\sqrt{2}\operatorname{sech}(t)\tanh(t)).$$

Sabendo a parametrização da conexão homoclínica, podemos calcular a função de Melnikov (13)

$$M(t_0) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(t - t_0) \tanh(t - t_0) \cos(t) dt.$$

Após alguns cálculos utilizando resíduos obtemos,

$$M(t_0) = \sqrt{2}\pi \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(t_0).$$

No intervalo $(0, 2\pi]$ a função $M(t_0)$ possui zeros simples, a saber, π e 2π . Portanto, pelo teorema (2.7) o sistema dinâmico (15) possui um ponto homoclínico transversal.

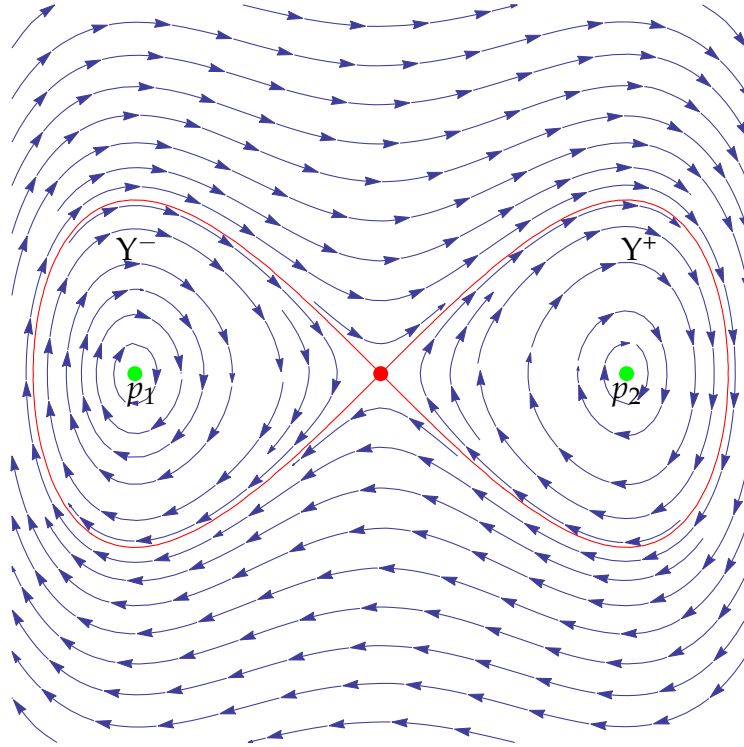


Fig. 6: Retrato de fase da equação (16). A origem é um ponto de sela. Os pontos p_1 e p_2 são pontos de equilíbrio do tipo centro.

3

SISTEMAS DINÂMICOS DESCONTÍNUOS

Sistemas dinâmicos descontínuos são sistemas do tipo (4) onde o campo vetorial $f(q)$ apresenta descontinuidade. Esses sistemas aparecem naturalmente em modelos onde ocorre impactos, atrito, intermitência de vínculos, dentre outros.

Vamos pedir que o conjunto dos pontos de descontinuidade Σ da função f seja uma variedade diferenciável. Portanto, existe uma função $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, tal que $\Sigma = h^{-1}(0)$. Nestas condições, chamaremos Σ de *variedade de descontinuidade* do campo f . A variedade Σ divide o conjunto U em dois abertos disjuntos S^+ e S^- , onde

$$\begin{aligned} S^+ &:= \{q \in U; h(q) > 0\}, \\ S^- &:= \{q \in U; h(q) < 0\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Podemos reescrever o sistema (4) como

$$\dot{q} = \begin{cases} f^+(q) & \text{se } h(q) > 0, \\ f^-(q) & \text{se } h(q) < 0, \end{cases}$$

onde $f^\pm : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sejam de classe $\mathcal{C}^2$.

A presença da variedade de descontinuidade nos impõe o desafio de definir o fluxo de órbitas começando em S^+ (resp. S^-) que encontram em tempo finito a variedade Σ . Para tratarmos esse problema vamos começar classificando de que maneira um campo vetorial encontra a variedade Σ .

Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial $\mathcal{C}^2$. Definimos indutivamente a *derivada de Lie de ordem j do campo F com relação a h* (ou à variedade Σ) como

$$\begin{aligned} F^j h : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto \langle F(q), \nabla F^{j-1} h(q) \rangle, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} Fh : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto \langle F(q), \nabla h(q) \rangle. \end{aligned}$$

Primeiro agruparemos os pontos em Σ da seguinte maneira:

- **Ponto regular.** Um ponto $q \in \Sigma$ é chamado de *ponto regular com relação a F* se $Fh(q) \neq 0$. Nesses pontos o campo vetorial cruza Σ .
- **Ponto de dobra.** Um ponto $q \in \Sigma$ é chamado de *ponto de dobra com relação a F* se $Fh(q) = 0$ e $F^2h(q) \neq 0$. Nesses pontos o campo F tangência quadraticamente Σ no ponto q .
- **Ponto de cúspide.** Um ponto $q \in \Sigma$ é chamado de *ponto de cúspide com relação a F* se $Fh(q) = 0$, $F^2h(q) = 0$ e $F^3h(q) \neq 0$ e o conjunto $\{DFh(x), DF^2h(x), DF^3h(x)\}$ é linearmente independente.

Os pontos de dobra ainda podem ser divididos em:

- **Visível.** Um ponto de dobra $q \in \Sigma$ com relação a F é dito *ponto de dobra visível* quando $F^2h(q) > 0$.
- **Invisível.** Um ponto de dobra $q \in \Sigma$ com relação a F é dito *ponto de dobra invisível* quando $F^2h(q) < 0$.

Quando estamos tomando um campo vetorial descontínuo $f(q)$, a maneira como ele encontra a variedade Σ depende de qual "lado" estamos olhando. Vamos nos concentrar no caso em que $q \in \Sigma$ é um ponto regular para $f^\pm$, ou seja, $f^\pm h(q) \neq 0$.

- **Região de Costura.** Um subconjunto $M_1 \subset \Sigma$ é dito ser uma *região de costura* se para todo $q \in M_1$

$$f^+h(q) \cdot f^-h(q) > 0.$$

- **Região de Escape.** Um subconjunto $M_2 \subset \Sigma$ é dito ser uma *região de escape* se para todo $q \in M_2$

$$f^+h(q) > 0,$$

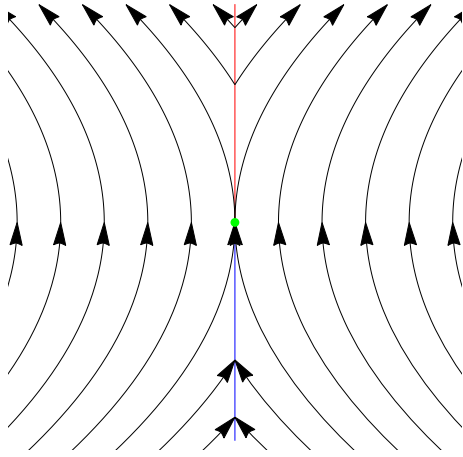


Fig. 7: A origem representa uma dobra dupla visível.

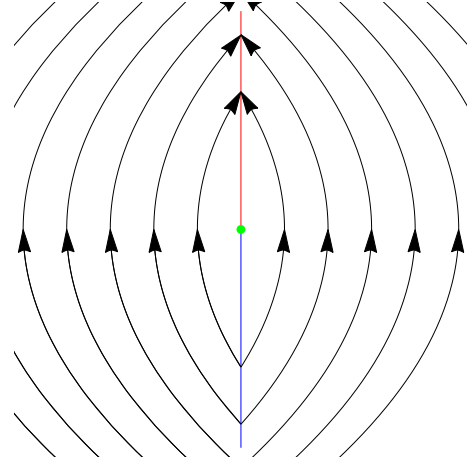


Fig. 8: A origem representa uma dobra dupla invisível.

e

$$f^-h(q) < 0.$$

- **Região de Deslize.** Um subconjunto $M_3 \subset \Sigma$ é dito ser uma *região de deslize* se para todo $q \in M_3$

$$f^+h(q) < 0,$$

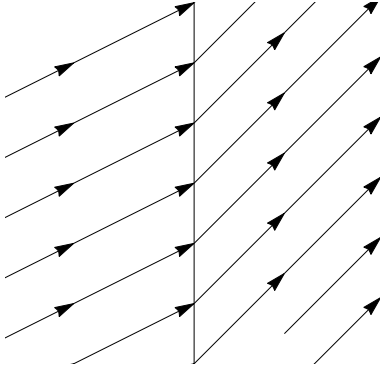
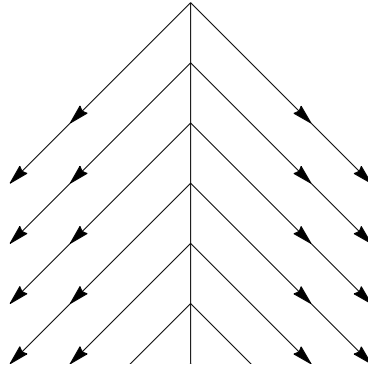
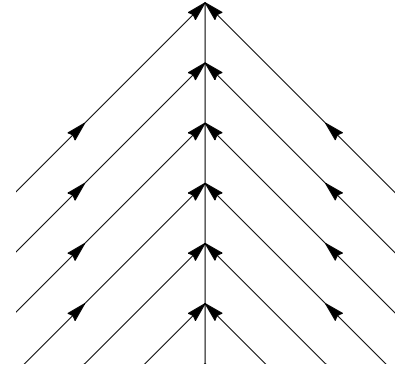
e

$$f^-h(q) > 0.$$

Na região de costura M_1 não temos problema em definir as órbitas que passam por pontos de M_1 . De fato, suponha que uma órbita começando em S^- alcança Σ num ponto $\bar{q} \in M_1$ no instante $t_0 \in I$. Concatenamos essa órbita com a solução do sistema $\dot{q} = f^+(q)$ passando por $\bar{q}$ no instante t_0 .

Quando uma órbita alcança uma região de deslize (resp. escape), precisamos de um formalismo para descrever qual a dinâmica futura (resp. passada) dessa órbita na variedade Σ .

Para isso usaremos o formalismo desenvolvido por Filipov [2]. Esse consiste em, num ponto $q \in M_2$ (resp. M_3), considerar um vetor $F_d(q)$ (resp. $F_e(q)$), combinação linear dos


 Fig. 9: Região de Costura M_1 .

 Fig. 10: Região de Escape M_2 .

 Fig. 11: Região de Deslize M_3 .

vetores $f^+(q)$ e $f^-(q)$, onde $F_d(q)$ (resp. $F_e(q)$) também seja tangente a variedade Σ no pontos q , ou seja,

$$F_d(q) = (1 - \alpha(q))f^+(q) + \alpha(q)f^-(q), \quad (18)$$

onde,

$$\alpha(q) = \frac{f^+h(q)}{(f^+ - f^-)h(q)}. \quad (19)$$

O campo vetorial $F_d(q)$ é chamado de *campo de deslize*. Definimos o *campo escape* por $F_e(q) := -(-F)_d(q)$ e por essa dualidade é suficiente analisarmos apenas o campo $F_d(q)$.

Se um ponto $p \in \Sigma$ é um ponto de dobra com relação à f^+ e a f^- , então dizemos que ele é um *ponto de dobra duplo* ou uma *2-dobra*.

Exemplo 3.0.0.6.

Vamos considerar $h(x, y) = x$, $f^+(x, y) = (y, 1)$ e $f^-(x, y) = (1, 1)$. Assim, Σ coincidirá com o eixo y em $\mathbb{R}^2$. Portanto, os conjuntos dados em (17) serão

$$S^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\},$$

$$S^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0\}.$$

A equação diferencial que queremos analisar será

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} f^+(x, y) = (y, 1) & \text{se } x > 0, \\ f^-(x, y) = (1, 1) & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (20)$$

Primeiro, vamos identificar cada uma das regiões sob a variedade Σ . Como

$$(f^+h(x, y))(f^-h(x, y)) = y,$$

temos duas regiões, uma de costura e outra de deslize, a saber

$$M_1 = \{(0, y) \in \Sigma ; y > 0\},$$

$$M_3 = \{(0, y) \in \Sigma ; y < 0\}.$$

Como já vimos anteriormente, podemos definir o campo deslize sob a região M_3 . Por (18) e (19) temos

$$F_d(x, y) = (0, 1).$$

A origem é um ponto de dobra visível com relação ao campo f^+ . De fato, como $f^+h(x, y) = y$ e $f_1^-h(x, y) = 1$, então,

$$f^+h(0, 0) = 0,$$

$$(f^+)^2h(0, 0) = 1 > 0.$$

Com relação a f^- , a origem é um ponto regular.

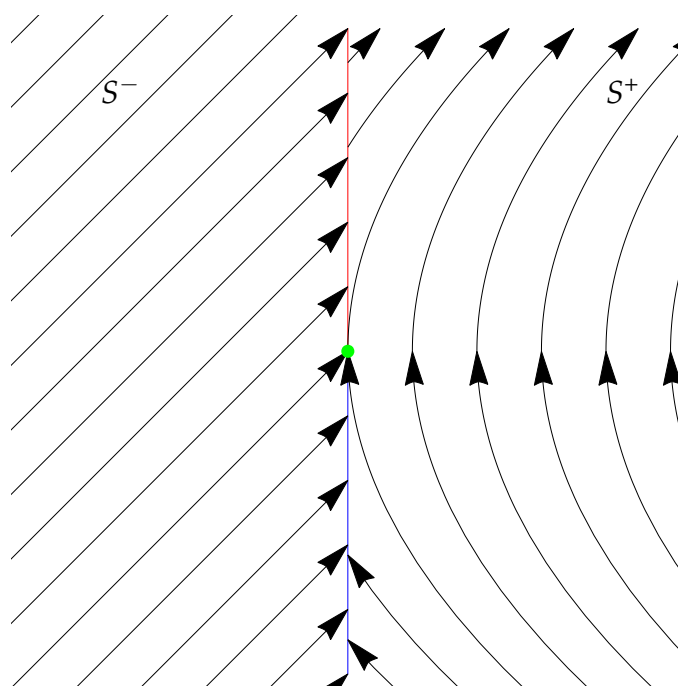


Fig. 12: Retrato de fase da equação (20). O origem é um ponto de dobra visível com relação a f^+ e um ponto regular com relação a f^- . A semireta acima da origem é uma região de costura M_1 e a semireta abaixo da origem é uma região de deslize M_2 .

4

FUNÇÕES DE MELNIKOV EM SISTEMAS HAMILTONIANOS DESCONTÍNUOS

4.1 INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos descontínuos aparecem frequentemente em modelos matemáticos. Fenômenos com mudanças repentinas, como sistemas envolvendo atrito, colisões, vínculos intermitentes ou processo em que ocorrem trocas repentinas de estado podem ser modelados usando tais sistemas dinâmicos.

Um desses fenômenos é o movimento de estruturas feitas pelo homem (prédios, silos, caldeiras, etc) sob a ação de um terremoto. O modelo que motivou o trabalho começou a ser estudado por Hausner [3]. Não é de se estranhar, dada a natureza do problema, que o trabalho desse autor tenha sido publicado no *Bulletin of the Seismological Society of America*.

Após o terremoto de 2011 no Japão, e por consequência o acidente nuclear de Fukushima, podemos ver que essa preocupação é procedente, já que estruturas seguindo padrões rígidos de construção podem colapsar sob a ação de tremores.

4.1.1 O modelo Rocking Block

Considere um paralelepípedo de massa m , rígido, homogêneo de largura l_z , altura l_y e profundidade l_x . Esse bloco está apoiado numa superfície plana ψ e com um coeficiente de atrito grande o suficiente para que o bloco não deslize.

O centro de massa, CM , está localizado na intersecção das diagonais $\overline{AD'}$, $\overline{A'D}$, $\overline{BC'}$ e $\overline{B'C}$. Vamos tomar a origem do sistema de coordenadas em CM . Os eixos x , y e z serão a reta passando por CM e, respectivamente, perpendicular à face $AA'CC'$, à $AA'BB'$ e à $ABCD$. Vamos supor que a superfície esteja sujeita a uma aceleração horizontal $a_H(\tau) = (a_H^x(\tau), 0, 0)$.

Note que o bloco só pode oscilar em torno das arestas $\mathcal{O} = CC'$ e $\mathcal{O}' = DD'$, paralelas ao eixo z . Vamos começar analisando o primeiro caso, representado na figura (14).

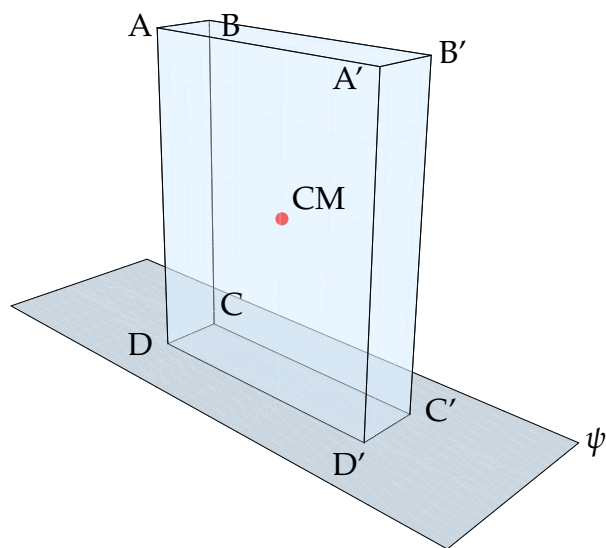


Fig. 13: Esquema do modelo "rocking block".

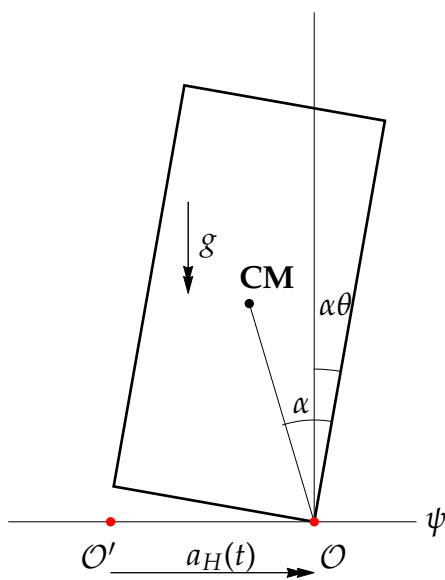


Fig. 14: Visão frontal da figura (13).

Seja $(x(\tau), 0, 0)$ o vetor que descreve o deslocamento da aresta $\mathcal{O}$. Note que $\ddot{x}(\tau) = a_H^x(\tau)$. O deslocamento angular será denotado por $\alpha\theta(\tau)$, com $\theta(\tau) > 0$ se o bloco gira em torno de $\mathcal{O}$ e $\theta(\tau) < 0$ se gira em torno de $\mathcal{O}'$. Portanto, se $r(\tau)$ for o vetor que descreve o movimento do centro de massa ao longo do tempo, teremos

$$w(\tau) = (x(\tau) - R \sin(\alpha - \alpha\theta(\tau)), R \cos(\alpha - \alpha\theta(\tau)), 0). \quad (21)$$

O momento de inércia de um paralelepípedo girando em torno do eixo z é dado por $\mathcal{J}_{CM} = \frac{mR^2}{3}$.

Como estamos considerando um corpo rígido, a energia total do sistema mecânico será dada por

$$K = \frac{m}{2} \| \dot{w}(\tau) \|^2 + \frac{\mathcal{J}_{CM}}{2} (\alpha\dot{\theta}(\tau))^2. \quad (22)$$

Substituindo (21) em (22), teremos

$$K = \frac{m}{2} (\dot{x}(\tau))^2 + mR\alpha\dot{x}(\tau)\dot{\theta}(\tau) \cos(\alpha - \alpha\theta(\tau)) + \frac{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}{2} (\alpha\dot{\theta}(\tau))^2, \quad (23)$$

onde $\mathcal{J}_{\mathcal{O}} = \mathcal{J}_{CM} + mR^2 = \frac{4}{3}mR^2$ é o momento de inércia devido à rotação do bloco em torno da aresta $\mathcal{O}$.

A energia potencial do centro de massa será

$$P = mgR \cos(\alpha - \alpha\theta(\tau)) - \frac{l_y}{2}. \quad (24)$$

Com as expressões da energia cinética (23) e potencial (24) podemos escrever o Lagrangiano como

$$\mathcal{L} = K - P = \frac{m}{2} (\dot{x}(\tau))^2 + mR\alpha\dot{x}(\tau)\dot{\theta}(\tau) \cos(\alpha - \alpha\theta(\tau)) + \frac{\mathcal{J}_{\mathcal{O}}}{2} (\alpha\dot{\theta}(\tau))^2 - mgR \cos(\alpha - \alpha\theta(\tau)) + \frac{l_y}{2}.$$

A equação do movimento é dada pela relação $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$. Após realizarmos alguns cálculos, obteremos

$$\alpha\ddot{\theta}(\tau) + \frac{3}{4R} a_H^x(\tau) \cos(\alpha - \alpha\theta(\tau)) + \frac{3g}{4R} \sin(\alpha - \alpha\theta(\tau)) = 0. \quad (25)$$

Vamos tomar a aceleração horizontal da forma

$$a_H^x(\tau) = \varepsilon \alpha g \cos(\Omega \tau). \quad (26)$$

Substituindo essa última na equação (25), teremos

$$\alpha \ddot{\theta}(\tau) + \frac{3g}{4R} \sin(\alpha - \alpha \theta(\tau)) + \varepsilon \alpha \frac{3g}{4R} \cos(\Omega \tau) \cos(\alpha - \alpha \theta(\tau)) = 0.$$

Se fizermos a mudança de variável $t = Q\tau$, onde, $Q^2 = \frac{3g}{4R}$, obteremos

$$\alpha \ddot{\theta}(t) + \sin(\alpha - \alpha \theta(t)) + \varepsilon \alpha \cos(\omega t) \cos(\alpha - \alpha \theta(t)) = 0, \quad (27)$$

onde, $\omega = \frac{\Omega}{Q}$ e $\theta(t) > 0$. Se fizermos as contas para o caso em que $\theta(t) < 0$ obteremos

$$\alpha \ddot{\theta}(t) - \sin(\alpha + \alpha \theta(t)) + \varepsilon \alpha \cos(\omega t) \cos(\alpha + \alpha \theta(t)) = 0. \quad (28)$$

Se dispormos as equações (27) e (28) juntas, teremos

$$\alpha \ddot{\theta} + \text{sign}(\theta) \sin(\alpha(1 - \text{sign}(\theta)\theta)) = -\alpha \varepsilon \cos(\alpha(1 - \text{sign}(\theta)\theta)) \cos(\omega t), \quad (29)$$

para $\theta \neq 0$.

Iremos ainda considerar uma constante $0 < r < 1$ para representar a perda de energia em cada choque do bloco com o chão. Mais tarde daremos o nome dessa constante de coeficiente de restituição. Contando com r , teremos o seguinte sistema dinâmico

$$\alpha \ddot{\theta} + \text{sign}(\theta) \sin(\alpha(1 - \text{sign}(\theta)\theta)) = -\alpha \varepsilon \cos(\alpha(1 - \text{sign}(\theta)\theta)) \cos(\omega t), \quad (30)$$

$$\dot{\theta}(t_A^+) = r \dot{\theta}(t_B^-) \text{ se } \theta = 0, \quad (31)$$

onde t_A^+ e t_B^- são, respectivamente, os tempos antes e depois do impacto. Vamos supor que o tempo de impacto seja instantâneo, ou seja, $t_A^+ = t_B^-$.

Esse modelo apresenta vínculos que se alternam com o tempo. Quando o bloco está pendendo para a direita, o centro de massa se comporta como um pêndulo invertido com origem em $\mathcal{O}$. Quando está pendendo para a esquerda, o centro de massa também se comporta como um pêndulo invertido, mas agora com relação à origem $\mathcal{O}'$.

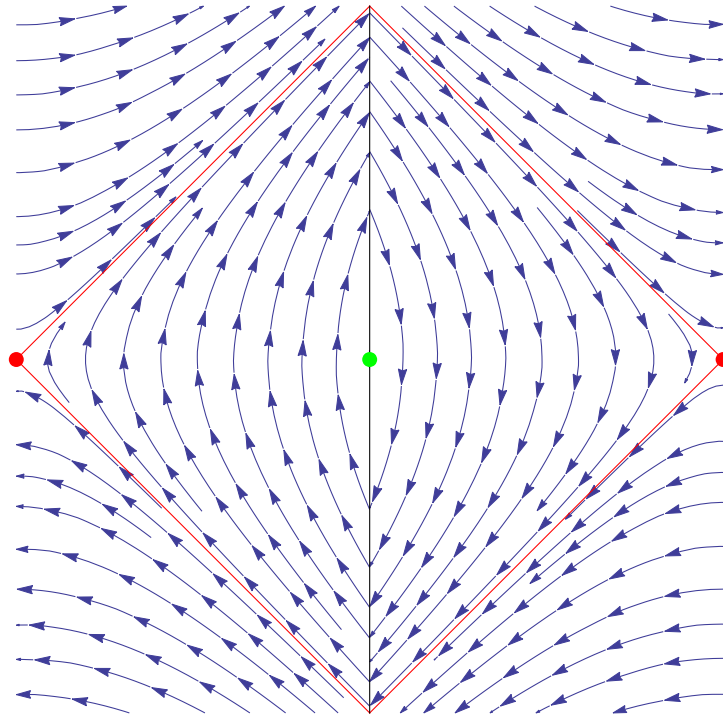


Fig. 15: Retrato de fase do sistema (33).

Para um bloco delgado, ou seja, α pequeno, é razoável considerar que a linearização com respeito a α da equação (30) pode fornecer uma boa aproximação do sistema (30). Essa linearização será dada por

$$\ddot{\theta} - \theta + \text{sign}(\theta) = -\varepsilon \cos(\omega t). \quad (32)$$

Para analisarmos essa equação, procederemos como na teoria clássica de perturbações, ou seja, vamos descrever propriedades do sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) e procurar quais propriedades são preservadas para o sistema perturbado ($\varepsilon > 0$).

Quando $\varepsilon = 0$, a equação (32) será

$$\ddot{\theta} - \theta + \text{sign}(\theta) = 0. \quad (33)$$

Se considerarmos o formalismo de Filippov, podemos mostrar que a equação (33) satisfaz hipóteses análogas, no caso descontínuo, às hipóteses que garantem a validade dos teoremas (2.7) e 2.8. Seria possível adaptarmos esses teoremas para estudarmos equações descontínuas do tipo 32? Responderemos afirmativamente a essa pergunta.

4.2 DEFINIÇÕES GERAIS

Inicialmente, dividiremos o plano em duas regiões

$$\begin{aligned} S^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}, \\ S^- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0\}, \end{aligned}$$

separados por $\Sigma = h^{-1}(0)$, onde $h(x, y) = x$.

Sejam $V^\pm \in C^\infty(\mathbb{R})$ com $V^+(0) = V^-(0)$. Definimos $H(x, y)$ por

$$H(x, y) := \frac{y^2}{2} + V(x) = \begin{cases} H^+(x, y) := \frac{y^2}{2} + V^+(x) & \text{se } x \geq 0, \\ H^-(x, y) := \frac{y^2}{2} + V^-(x) & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (34)$$

e associado a $H(x, y)$, definimos o campo de vetores

$$\mathcal{X}(x, y) := \begin{cases} \mathcal{X}^+(x, y) := J\nabla H^+(x, y) & \text{se } x \geq 0, \\ \mathcal{X}^-(x, y) := J\nabla H^-(x, y) & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (35)$$

onde, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Vale ressaltarmos que $\mathcal{X}(x, y)$ possui Σ como conjunto de descontinuidade. A partir de (35) definimos o sistema dinâmico descontínuo

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathcal{X}(x, y) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x), \end{cases} \quad (36)$$

onde, $' = \frac{d}{dx}$.

Vamos fazer algumas hipóteses com respeito ao sistema (36) para que o seu retrato de fase seja topologicamente equivalente ao mostrado na figura (16).

(H1) A origem $(0, 0)$ é um ponto de dobra dupla invisível. Assim, devemos ter $\mathcal{X}^\pm(0, 0) = 0$,

$$(\mathcal{X}^+)^2 h(0, 0) < 0, \quad (37)$$

$$(\mathcal{X}^-)^2 h(0, 0) > 0. \quad (38)$$

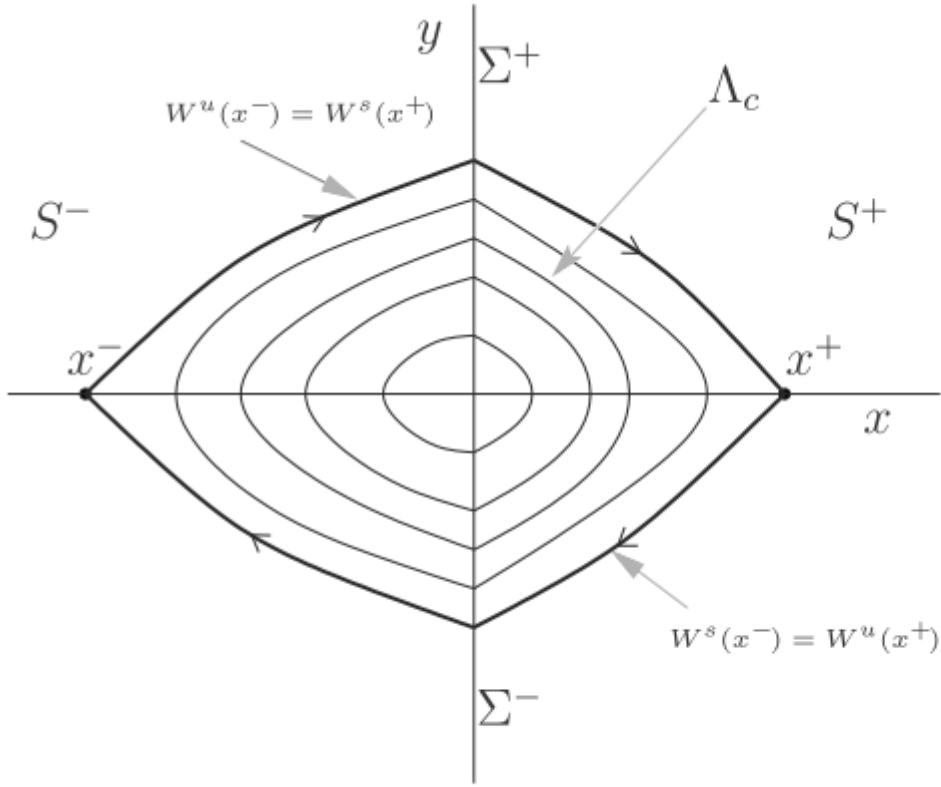


Fig. 16: Retrato de fase de um sistema dinâmico descontínuo que satisfaz às hipóteses dadas a seguir. Essa figura foi retirada do artigo [1].

Podemos dividir a variedade Σ da seguinte forma

$$\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \{(0, 0)\},$$

onde,

$$\begin{aligned} \Sigma^+ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y > 0 \right\}, \\ \Sigma^- &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y < 0 \right\}. \end{aligned}$$

Além disso, $\Sigma^\pm$ são regiões de costura.

Usando que o campo de vetores $\mathcal{X}$ restrito a $S^\pm$ é Hamiltoniano e que $H^+(0, y) = H^-(0, y)$ podemos mostrar um teorema análogo ao teorema (2.4).

Teorema 4.1. *A função (34) se mantém constante ao longo das trajetórias do sistema (36).*

Por conta desse teorema, e da maneira que definimos $\mathcal{X}(x, y)$, diremos que (36) é um sistema Hamiltoniano descontínuo e $H(x, y)$ é o seu Hamiltoniano.

Substituindo as expressões de $\mathcal{X}^\pm(x, y)$ e $h(x, y)$ em (37) teremos

$$(V^+)'(0) > 0,$$

e

$$(V^-)'(0) < 0.$$

(H₂) Existem dois pontos de equilíbrio do tipo sela, $z^\pm = (x^\pm, 0) \in S^\pm$, ambos pertencendo ao nível de energia $H^{-1}(c_1)$, isto é,

$$z^\pm \in \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; H(x, y) = c_1 > 0 \right\}.$$

Por isso temos que

$$H(z^\pm) = V^\pm(x^\pm).$$

Então, temos $c_1 = V^\pm(x^\pm)$ além de $(V^\pm)'(x^\pm) = 0$.

Sejam

$$A^\pm = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(V^\pm)''(x^\pm) & 0 \end{bmatrix},$$

as linearizações da equação (36) calculadas em $z^\pm$. Para que $z^\pm$ sejam pontos de sela, o polinômio característico $p^\pm(\lambda) = \det(A^\pm - \lambda I)$ deve ter raízes reais distintas, diferentes de zero e de sinais opostos. Como $p^\pm(\lambda) = \lambda^2 + (V^\pm)''(x^\pm)$, suas raízes são $\lambda_{1,2}^\pm = \pm \sqrt{-(V^\pm)''(x^\pm)}$. Portanto, devemos ter

$$(V^\pm)''(x^\pm) < 0. \tag{39}$$

(H₃) Sejam $W^{u/s}(z^-)$ as variedades estável e instável do ponto z^- restritas a $S^- \cup \Sigma$ e $W^{u/s}(z^+)$ as variedades estável e instável do ponto z^+ restritas a $S^+ \cup \Sigma$. Assumiremos que essas variedades formem duas conexões heteroclínicas, ou seja,

$$W^u(z^-) \cap \Sigma^+ = W^s(z^+) \cap \Sigma^+ = \{(0, y_+)\},$$

e

$$W^s(z^-) \cap \Sigma^- = W^u(z^+) \cap \Sigma^- = \{(0, y_-)\}.$$

Nessas condições, $y_+ > 0$ e $y_- < 0$. Por consequência do teorema (4.1) temos $W^{u/s}(z^\pm) \subset \{(x, y); H_0^\pm(x, y) = c_1\}$, assim

$$H(0, y_+) = H(0, y_-) = c_1.$$

Portanto, $y^+ = \sqrt{2c_1}$ e $y^- = -\sqrt{2c_1}$.

(H4) A região compreendida entre as duas órbitas heteroclínicas é folheada por uma família de soluções periódicas Λ_c . Esta família pode ser parametrizada pelo nível de energia c , isto é, para cada $0 < c < c_1$,

$$\Lambda_c = \{(x, y) | H(x, y) = c\}.$$

Veja que Λ_c intercepta Σ nos pontos $(0, \pm y_0) \in \Sigma^\pm$, onde $y_0 = \sqrt{2c}$. Dependendo do contexto, também denotaremos Λ_c por Λ_{y_0} .

(H5) O período $\Gamma(c)$ das soluções periódicas Λ_c é uma função $\mathcal{C}^1$ e crescente com relação à c , ou seja, $\frac{d\Gamma}{dc}(c) > 0$ para todo $0 < c < c_1$. Além disso, $\lim_{c \rightarrow c_1} \Gamma(c) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Gamma(c)} = +\infty$. Dependendo do contexto, também denotaremos $\Gamma(c)$ por $\Gamma(y_0)$, onde $y_0 = \sqrt{2c}$.

Chamaremos de $\Gamma^+(y_0)$ o tempo necessário para a órbita Λ_{y_0} ir de Σ^+ até Σ^- . Definimos de maneira análoga $\Gamma^-(y_0)$. Portanto,

$$\Gamma(y_0) = \Gamma^+(y_0) + \Gamma^-(y_0).$$

O próximo passo é considerarmos duas funções

$$\begin{aligned} g^\pm : \mathbb{R}^2 \times S^1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, t) &\mapsto g^\pm(x, y, t), \end{aligned}$$

ambas de classe $\mathcal{C}^1$ e T -periódicas em t . Definimos a perturbação

$$g(x, y, t) = \begin{cases} g^+(x, y, t) & \text{se } x > 0 \\ g^-(x, y, t) & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (40)$$

Vamos estudar a persistência da conexão heteroclínica, dada na hipótese **(H3)** e das órbitas periódicas, dadas por **(H4)**, para o sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathcal{X}(x, y) + \varepsilon g(x, y, t). \quad (41)$$

4.3 APLICAÇÃO DE POINCARÉ

Para estudarmos o sistema (41) precisamos definir uma aplicação de Poincaré. Vamos considerar o retrato de fase estendido $\mathbb{R}^2 \times S^1$: duas variáveis para designar o espaço e outra para o tempo ($\dot{t} = 1$). No espaço de fase estendido, definimos a seção de Poincaré

$$\tilde{\Sigma}^+ := \left\{ (0, y, t_0) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T] \mid 0 < y < \sqrt{2c_1} \right\}.$$

O domínio da aplicação de Poincaré não será todo o $\tilde{\Sigma}^+$, mas sim um aberto $U^+(\varepsilon)$ que não contém a conexão heteroclínica quando $\varepsilon = 0$. A aplicação de Poincaré

$$P_\varepsilon : U^+(\varepsilon) \subset \tilde{\Sigma}^+ \rightarrow \tilde{\Sigma}^+,$$

será definida pela composição de duas outras aplicações, como veremos a seguir. Primeiro, usando a seção

$$\tilde{\Sigma}^- := \{ (0, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid -\sqrt{2c_1} < y < 0 \},$$

definimos a aplicação

$$\begin{aligned} P_\varepsilon^+ : U^+(\varepsilon) \subset \tilde{\Sigma}^+ &\longrightarrow \tilde{\Sigma}^- \\ (0, y_0, t_0) &\longmapsto (0, \Pi_y(\phi^+(t_1; 0, y_0, t_0, \varepsilon)), t_1), \end{aligned}$$

onde $\phi^+(t; 0, y_0, t_0, \varepsilon)$ é solução de (41) passando pelo ponto $(0, y_0)$ no instante t_0 restrito a S^+ , Π_x e Π_y são as projeções sobre os eixos x e y , respectivamente, e $t_1 > t_0$ é o menor valor de t , tal que

$$\Pi_x(\phi^+(t_1; 0, y_0, t_0, \varepsilon)) = 0.$$

O próximo lema nos garante a existência de t_1 para ε pequeno o suficiente.

Lema 4.2. *Para $\varepsilon \simeq 0$, existe t_1 que satisfaz a equação*

$$\Pi_x(\phi^+(t_1; 0, y_0, t_0, \varepsilon)) = 0.$$

Demonstração: A prova é baseada no Teorema da Função Implícita. Note que

- Para $\varepsilon = 0$ e $t = \Gamma^+(y_0)$ é verdade que $\Pi_x(\phi^+(\Gamma^+(y_0); 0, y_0, t_0, 0)) = 0$, onde $y_0 = \sqrt{2c}$.
- $\frac{d}{dt}\Pi_x(\phi^+(t; x, y, t_0, \varepsilon))|_{(\Gamma^+(y_0); 0, y_0, t_0, 0)} = y_0 \neq 0$.

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, para $\varepsilon \simeq 0$ existe $t(\varepsilon)$, tal que $t(0) = \Gamma^+(y_0)$ e

$$\Pi_x(\phi^+(t(\varepsilon); 0, y_0, t_0, \varepsilon)) = 0.$$

□

De maneira similar, vamos considerar

$$\begin{aligned} P_\varepsilon^- : U^-(\varepsilon) \subset \tilde{\Sigma}^- &\longrightarrow \tilde{\Sigma}^+ \\ (0, y_1, t_1) &\longmapsto (0, \Pi_y(\phi^-(t_2; 0, y_1, t_1, \varepsilon)), t_2), \end{aligned}$$

onde $U^-(\varepsilon) \subset \tilde{\Sigma}^-$ é um aberto de $\tilde{\Sigma}^-$ que não contém a conexão heteroclínica, $\phi^-(t; 0, y_1, t_1, \varepsilon)$ é solução de (36), passando pelo ponto $(0, y_1)$ no instante t_1 restrito a S^- e $t_2 > t_1$ é o menor valor de t satisfazendo a condição.

$$\Pi_x(\phi^-(t_2; 0, y_1, t_1, \varepsilon)) = 0.$$

Um lema análogo ao Lema (4.2) garante a existência de t_2 para ε suficientemente pequeno.

Lema 4.3. *Para $\varepsilon \simeq 0$ existe t_2 satisfazendo a equação*

$$\Pi_x(\phi^-(t_2; 0, y_1, t_1, \varepsilon)) = 0.$$

A aplicação de Poincaré P_ε é definida pela seguinte composição:

$$\begin{aligned} P_\varepsilon : U^+(\varepsilon) \subset \tilde{\Sigma}^+ &\rightarrow \tilde{\Sigma}^+ \\ (0, y_0, t_0) &\mapsto P_\varepsilon^- \circ P_\varepsilon^+(0, y_0, t_0). \end{aligned}$$

4.4 COEFICIENTE DE RESTITUIÇÃO

Quando lidamos com sistemas mecânicos onde ocorrem impacto, a energia antes e depois do impacto não é a mesma. Na verdade, a energia depois do impacto é menor que antes. Podemos pensar no impacto de uma bola elástica contra uma superfície plana, ignorando o atrito com o ar. A bola irá quicar na superfície, perder energia com sua deformação e voltar com uma velocidade menor do que quando chegou. Então, a perda de energia é traduzida na perda de velocidade.

Mais precisamente, se a trajetória cruza a variedade Σ num ponto $(0, y_a, t_a)$, esse estado é substituído por $(0, ry_a, t_b)$, onde $r \in (0, 1]$. O parâmetro r é chamado de *coeficiente de restituição*. Como dissemos antes, vamos assumir que o impacto seja instantâneo, ou seja, $t_a = t_b$.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} R_r : \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ (0, y_0, t_0) &\longmapsto (0, ry_0, t_0). \end{aligned} \tag{42}$$

Então, a aplicação de Poincaré para o caso perturbado ($\varepsilon > 0$) e não conservativo ($r < 1$), será

$$\tilde{P}_{\varepsilon, r}(0, y_0, t_0) := (R_r \circ P_\varepsilon^- \circ R_r \circ P_\varepsilon^+)(0, y_0, t_0).$$

Veja que $\tilde{P}_{\varepsilon, r}$ é tão suave quanto o fluxo restrito a $S^\pm$, já que $\tilde{P}_{\varepsilon, r}$ é uma composição de aplicações suaves.

Definiremos $\phi(t; x_0, y_0, t_0, \varepsilon, r)$ a solução do sistema (41) com condição inicial (x_0, y_0, t_0) . Veja que ϕ é a concatenação das soluções ϕ^+ e ϕ^- , ou seja, se $x_0 > 0$ (resp. $x_0 < 0$) aplicamos ϕ^+ (resp. ϕ^-) até a trajetória encontrar Σ , daí aplicamos R_r e continuamos o processo. Se $x_0 = 0$ procedemos de maneira similar, mas agora dependendo do sinal de y_0 . Assim, se $y_0 > 0$ (resp. $y_0 < 0$) aplicamos ϕ^+ (resp. ϕ^-). Iremos

utilizar frequentemente pontos iniciais do tipo $(0, y_0, t_0)$, portanto, o sinal de y_0 será determinante para sabermos a direção da trajetória.

4.5 SEQUÊNCIA DE IMPACTOS

Dado $(0, y_0, t_0) \in \tilde{\Sigma}^+$ definiremos a *sequência de impactos* $(y_{\varepsilon,r}^i, t_{\varepsilon,r}^i)$ como sendo

$$(y_{\varepsilon,r}^i, t_{\varepsilon,r}^i) := \begin{cases} R_r \circ P_{\varepsilon}^-(y_{\varepsilon,r}^{i-1}, t_{\varepsilon,r}^{i-1}) & \text{se } y_{\varepsilon,r}^{i-1} < 0, \\ R_r \circ P_{\varepsilon}^+(y_{\varepsilon,r}^{i-1}, t_{\varepsilon,r}^{i-1}) & \text{se } y_{\varepsilon,r}^{i-1} > 0, \end{cases}$$

onde $(y_{\varepsilon,r}^0, t_{\varepsilon,r}^0) = (y_0, t_0)$. Veja que a sequência será finita caso o fluxo encontre Σ apenas um número finito de vezes, ou seja, a partir de um momento o fluxo permanece em S^+ ou S^- .

Por exemplo, para o caso não perturbado ($\varepsilon = 0$), $r < 1$ e $(0, y_0, t_0) \in \tilde{\Sigma}^+$ teremos que a sequência de impacto será

$$(y_{0,r}^i, t_{0,r}^i) = \begin{cases} (r^i y_0, t_{0,r}^{i-1} + \Gamma^-(-r^{i-1} y_0)) & \text{se } i \text{ é par e } i \geq 2, \\ (-r^i y_0, t_{0,r}^{i-1} + \Gamma^+(r^{i-1} y_0)) & \text{se } i \text{ é ímpar e } i \geq 1. \end{cases}$$

Uma vez definidos os impactos, $(y_{\varepsilon,r}^i, t_{\varepsilon,r}^i)$ podemos escrever de maneira mais rigorosa o que é uma solução ϕ do sistema perturbado (41) com condição inicial $(0, y_0, t_0) \in \tilde{\Sigma}^+$

$$\phi(t; 0, y_0, t_0, \varepsilon, r) := \begin{cases} \phi^+(t; 0, y_{\varepsilon,r}^{2i}, t_{\varepsilon,r}^{2i}, \varepsilon) & \text{se } t_{\varepsilon,r}^{2i} \leq t < t_{\varepsilon,r}^{2i+1}, \\ \phi^-(t; 0, y_{\varepsilon,r}^{2i+1}, t_{\varepsilon,r}^{2i+1}, \varepsilon) & \text{se } t_{\varepsilon,r}^{2i+1} \leq t < t_{\varepsilon,r}^{2i+2}, \end{cases}$$

para $i \geq 1$. Caso o número de impacto seja finito tomamos o último $t_{\varepsilon,r}^i = \infty$.

Chamaremos de *parte $2i$ da órbita* $\phi(t; 0, y_0, t_0, \varepsilon, r)$ à órbita $\phi^+(t; 0, y_{\varepsilon,r}^{2i}, t_{\varepsilon,r}^{2i}, \varepsilon)$. Analogamente, chamaremos de *parte $2i + 1$ da órbita* $\phi(t; 0, y_0, t_0, \varepsilon, r)$ à órbita $\phi^-(t; 0, y_{\varepsilon,r}^{2i+1}, t_{\varepsilon,r}^{2i+1}, \varepsilon)$.

4.6 ÓRBITAS PERIÓDICAS

No próximo lema apresentaremos uma maneira de calcular o período $\Gamma(c)$.

Lema 4.4. Dado $c \in (0, c_1)$, o período $\Gamma(c)$ das órbitas periódicas Λ_c é dado por

$$\Gamma(c) = 2 \left(\int_0^{(V^+)^{-1}(c)} \frac{1}{\sqrt{2(c - V^+(u))}} du + \int_0^{(V^-)^{-1}(c)} \frac{1}{\sqrt{2(c - V^-(u))}} du \right). \quad (43)$$

Demonstração: Vamos denotar a solução periódica Λ_c por $\Lambda_c = (\lambda_c^{(1)}(t), \lambda_c^{(2)}(t))$. Para $0 < t < \Gamma^+(c)$, Λ_c satisfaz as seguintes equações

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_c^{(1)}(t) = \lambda_c^{(2)}(t), \\ \dot{\lambda}_c^{(2)}(t) = -(V^+)'(\lambda_c^{(1)}(t)), \\ \lambda_c^{(1)}(0) = 0, \lambda_c^{(2)}(0) = \sqrt{2c}. \end{cases} \quad (44)$$

onde $\dot{} = \frac{d}{dt}$.

Para essa curva, também é válido

$$H_0(\lambda_c^{(1)}(t), \lambda_c^{(2)}(t)) = c \Rightarrow \lambda_c^{(2)}(t) = \pm \sqrt{2(c - V^+(\lambda_c^{(1)}(t)))}. \quad (45)$$

Sabemos que a curva Λ_c cruza o eixo x , assim, existe $\bar{t} \in (0, \Gamma^+(c))$ tal que $\lambda_c^{(2)}(\bar{t}) = 0$. Por (45) temos que $V^+(\lambda_c^{(1)}(\bar{t})) = c$, então podemos escrever $\lambda_c^{(1)}(\bar{t}) = (V^+)^{-1}(c)$.

Para $t \in (0, \bar{t})$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\lambda}_c^{(1)}(t)}{\lambda_c^{(2)}(t)} = 1 &\Rightarrow \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\lambda_c^{(2)}(t)} \dot{\lambda}_c^{(1)}(t) dt = \bar{t} \Rightarrow \int_0^{\bar{t}} \frac{1}{\sqrt{2(c - V^+(\lambda_c^{(1)}(t)))}} \dot{\lambda}_c^{(1)}(t) dt = \bar{t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{\lambda_c^{(1)}(0)}^{\lambda_c^{(1)}(\bar{t})} \frac{1}{\sqrt{2(c - V^+(u))}} du = \bar{t} \Rightarrow \int_0^{(V^+)^{-1}(c)} \frac{1}{\sqrt{2(c - V^+(u))}} du = \bar{t}, \end{aligned}$$

onde na penúltima implicação consideramos a mudança de variável $u = \lambda_c^{(1)}(t)$. Resumindo,

$$\bar{t} = \int_0^{(V^+)^{-1}(c)} \frac{1}{\sqrt{2(c - V^+(u))}} du.$$

Podemos fazer cálculos análogos para $t \in (\bar{t}, \alpha^+(y))$, daí teremos

$$\Gamma^+(c) - \bar{t} = \int_0^{(V^+)^{-1}(c)} \frac{1}{\sqrt{2(c - V^+(u))}} du.$$

Portanto,

$$\Gamma^+(c) = 2 \int_0^{(V^+)^{-1}(c)} \frac{1}{\sqrt{2(c - V^+(u))}} du.$$

Seguindo um argumento parecido, obtemos

$$\Gamma^-(c) = 2 \int_0^{(V^-)^{-1}(c)} \frac{1}{\sqrt{2(c - V^-(u))}} du.$$

□

Lema 4.5. *Qualquer órbita periódica do sistema (41) tem período nT para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Seja $\gamma(t)$ uma solução periódica do sistema (41) de período τ . Nos basearemos em duas igualdades: $\gamma(t) = \gamma(t + \tau)$ e $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t + \tau)$.

Como $\gamma(t)$ e $\gamma(t + \tau)$ são soluções de (41), segue que

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= J \cdot \nabla H(\gamma(t)) + \varepsilon g_1(\gamma(t), t), \\ \dot{\gamma}(t + \tau) &= J \cdot \nabla H(\gamma(t)) + \varepsilon g_1(\gamma(t), t + \tau). \end{aligned}$$

Daí,

$$g_1(\gamma(t), t) = g_1(\gamma(t), t + \tau).$$

Como g_1 tem período T , segue que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau = nT$.

□

Dado um ponto $(0, \bar{y}_0, \bar{t}_0) \in U^+(\varepsilon) \subset \tilde{\Sigma}^+$, pelo Lema 4.5 uma órbita periódica $\phi(t; 0, \bar{y}_0, \bar{t}_0, \varepsilon, r)$ tem período nT para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, existe $m \geq 1$, tal que

$$\underbrace{P_\varepsilon \circ \dots \circ P_\varepsilon}_{m \text{ vezes}}(\bar{y}_0, \bar{t}_0) = P_\varepsilon^m(\bar{y}_0, \bar{t}_0) = (\bar{y}_0, \bar{t}_0 + nT). \quad (46)$$

Tomaremos o menor m que satisfaz (46). Uma órbita que satisfaz a condição anterior é chamada de (m, n) -órbita periódica. Note que este tipo de órbita pode ser visto como uma solução que cruza $2m$ vezes a variedade de descontinuidade Σ e de período nT .

Quando $\varepsilon = 0$, dizer que uma órbita Λ_{y_0} é uma (m, n) -órbitas periódicas é equivalente a dizer que $T(y_0) = \frac{nT}{m}$.

Reescrevendo (46), usando a sequência de impactos $(y_{\varepsilon,r}^i, t_{\varepsilon,r}^i)$ de uma (m, n) -órbita periódica, teremos

$$\begin{aligned} y_{\varepsilon,r}^{2m} - y_0 &= 0, \\ t_{\varepsilon,r}^{2m} - t_0 - nT &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Observe que podemos utilizar os níveis de H para parametrizar Σ^+ . Desta forma, se $H(0, y_{\varepsilon,r}^{2m}) - H(y_0) = 0$, então $y_{\varepsilon,r}^{2m} - y_0 = 0$. Assim, podemos substituir a condição (47) por

$$\begin{aligned} H(0, y_{\varepsilon,r}^{2m}) - H(0, y_0) &= 0, \\ t_{\varepsilon,r}^{2m} - t_0 - nT &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

4.7 FUNÇÃO DE MELNIKOV

Como estamos lidando com um problema de perturbação, vamos frequentemente expandir expressões em séries de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$. Será o caso de (48). Mas antes, para que tenhamos uma fórmula sucinta para tal expansão, definimos a seguinte integral

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_{\varepsilon,r}^{2m}} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, t_0, \varepsilon, r), t) dt := \\ &:= \sum_{i=0}^{m-1} \left(\int_{t_{\varepsilon,r}^{2i}}^{t_{\varepsilon,r}^{2i+1}} \langle \nabla H^+, g^+ \rangle (\phi^+(t; 0, y_{\varepsilon,r}^{2i}, t_{\varepsilon,r}^{2i}, \varepsilon, r), t) dt + \right. \\ &\quad \left. \int_{t_{\varepsilon,r}^{2i+1}}^{t_{\varepsilon,r}^{2i+2}} \langle \nabla H^-, g^- \rangle (\phi^-(t; 0, y_{\varepsilon,r}^{2i+1}, t_{\varepsilon,r}^{2i+1}, \varepsilon, r), t) dt \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Os próximos dois lemas nos darão a expressão de (48) em torno de $\varepsilon = 0$.

Lema 4.6. *Sejam $m, n \geq 1$ com $\text{mdc}(m, n) = 1$, $(0, \bar{y}_0, \bar{t}_0) \in \tilde{\Sigma}^+$ e $(0, y_{\varepsilon, r}^i, t_{\varepsilon, r}^i)$ a sequência de impactos de uma (m, n) -órbita periódica. Então,*

$$\begin{aligned} H(0, y_{\varepsilon, r}^{2m}) - H(0, y_0) &= r^2 \left[\varepsilon \int_{t_0}^{t_{\varepsilon, r}^{2m}} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, t_0, \varepsilon, r), t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{2m-1} \left(H \left(0, y_{\varepsilon, r}^i \right) - H \left(0, \frac{y_{\varepsilon, r}^i}{r} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Demonstração: Para qualquer $(x^*, y^*) \in S^\pm \cup \Sigma^\pm$, $t \geq t^*$ e $\varepsilon > 0$ temos

$$\frac{d}{dt} (H^\pm(\phi^\pm(t; x^*, y^*, t^*, \varepsilon))) = \varepsilon \langle \nabla H^\pm, g^\pm \rangle (\phi^\pm(t; x^*, y^*, t^*, \varepsilon), t). \quad (51)$$

Se $\phi(t; 0, y_0, t_0, \varepsilon, r)$ é uma (m, n) -órbita periódica do sistema (41) teremos que as partes $2i$ e $2i + 1$ da órbita ϕ irão satisfazer, respectivamente

$$\frac{d}{dt} (H^+(\phi^+(t; 0, y_{\varepsilon, r}^{2i}, t_{\varepsilon, r}^{2i}, \varepsilon))) = \varepsilon \langle \nabla H^+, g^+ \rangle (\phi^+(t; 0, y_{\varepsilon, r}^{2i}, t_{\varepsilon, r}^{2i}, \varepsilon), t), \quad (52)$$

$$\frac{d}{dt} (H^-(\phi^-(t; 0, y_{\varepsilon, r}^{2i+1}, t_{\varepsilon, r}^{2i+1}, \varepsilon))) = \varepsilon \langle \nabla H^-, g^- \rangle (\phi^-(t; 0, y_{\varepsilon, r}^{2i+1}, t_{\varepsilon, r}^{2i+1}, \varepsilon), t). \quad (53)$$

Integrando as expressões (52) e (53) em seus intervalos de definição e levando em conta a igualdade

$$H(0, y_{\varepsilon, r}^{2m}) = r^2 H(\phi(t_{\varepsilon, r}^{2m}; 0, y_0, t_0, \varepsilon, r)),$$

teremos

$$\begin{aligned} \int_{t_{\varepsilon, r}^{2i}}^{t_{\varepsilon, r}^{2i+1}} \varepsilon \langle \nabla H^+, g^+ \rangle (\phi^+(t; 0, y_0, t_0, \varepsilon), t) dt &= \int_{t_{\varepsilon, r}^{2i}}^{t_{\varepsilon, r}^{2i+1}} \frac{d}{dt} (H^+(\phi^+(t; x^*, y^*, t^*, \varepsilon))) dt = \\ &= H^+(\phi^+(t_{\varepsilon, r}^{2i+1}; 0, y_0, t_0, \varepsilon)) - H^+(\phi^+(t_{\varepsilon, r}^{2i}; 0, y_0, t_0, \varepsilon)) = H \left(0, \frac{y_{\varepsilon, r}^{2i+1}}{r} \right) - H \left(0, y_{\varepsilon, r}^{2i} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{t_{\varepsilon, r}^{2i+1}}^{t_{\varepsilon, r}^{2i+2}} \varepsilon \langle \nabla H^-, g^- \rangle (\phi^-(t; 0, y_0, t_0, \varepsilon), t) dt &= \int_{t_{\varepsilon, r}^{2i+1}}^{t_{\varepsilon, r}^{2i+2}} \frac{d}{dt} (H^-(\phi^-(t; x^*, y^*, t^*, \varepsilon))) dt = \\ &= H^-(\phi^-(t_{\varepsilon, r}^{2i+2}; 0, y_0, t_0, \varepsilon)) - H^-(\phi^-(t_{\varepsilon, r}^{2i+1}; 0, y_0, t_0, \varepsilon)) = H \left(0, \frac{y_{\varepsilon, r}^{2i+2}}{r} \right) - H \left(0, y_{\varepsilon, r}^{2i+1} \right). \end{aligned}$$

Somando as duas expressões anteriores chegamos à igualdade

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \left(\int_{t_{\varepsilon,r}^{2i}}^{t_{\varepsilon,r}^{2i+1}} \langle \nabla H^+, g^+ \rangle (\phi(t; 0, y_{\varepsilon,r}^{2i}, t_{\varepsilon,r}^{2i}, \varepsilon, r), t) dt \right) + \\ & \int_{t_{\varepsilon,r}^{2i+1}}^{t_{\varepsilon,r}^{2i+2}} \langle \nabla H^-, g^- \rangle (\phi(t; 0, y_{\varepsilon,r}^{2i+1}, t_{\varepsilon,r}^{2i+1}, \varepsilon, r), t) dt \Bigg) = \\ & \sum_{i=0}^{2m-1} \left(H^+ \left(0, \frac{y_{\varepsilon,r}^i}{r} \right) - H^-(0, y_{\varepsilon,r}^i) \right) + \frac{1}{r^2} \left(H^+ (0, y_{\varepsilon,r}^{2m}) - H^+ (0, y_0) \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Usando (49) podemos reescrever (54) como

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{t_0}^{t_{\varepsilon,r}^{2m}} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, t_0, \varepsilon, r), t) dt &= \sum_{i=0}^{2m-1} \left(H \left(0, \frac{y_{\varepsilon,r}^i}{r} \right) - H(0, y_{\varepsilon,r}^i) \right) + \\ &+ \frac{1}{r^2} \left(H (0, y_{\varepsilon,r}^{2m}) - H (0, y_0) \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} H(0, y_{\varepsilon,r}^{2m}) - H(0, y_0) &= r^2 \left[\varepsilon \int_{t_0}^{t_{\varepsilon,r}^{2m}} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, t_0, \varepsilon, r), t) dt + \right. \\ &\left. + \sum_{i=0}^{2m-1} \left(H (0, y_{\varepsilon,r}^i) - H \left(0, \frac{y_{\varepsilon,r}^i}{r} \right) \right) \right]. \quad \square \end{aligned}$$

Lema 4.7. *Sejam $m, n \geq 1$, $(0, \bar{y}_0, \bar{t}_0) \in \tilde{\Sigma}^+$ e $(0, y_{\varepsilon,r}^i, t_{\varepsilon,r}^i)$ a sequência de impactos de uma (m, n) -órbita periódica. Então, para $\varepsilon \simeq 0$ a expansão de Taylor da expressão (4.6) é dada por:*

$$H(0, y_{\varepsilon,r}^{2m}) - H(0, y_0) = \frac{y_0^2}{2} (r^{4m} - 1) + \varepsilon G^m(y_0, t_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(\varepsilon(r-1)),$$

onde

$$G^m(y_0, t_0) = \int_0^{nT} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, 0, 0, 1), t + t_0) dt.$$

Demonstração: O termo constante da expansão de Taylor para $\varepsilon \simeq 0$, da expressão (50), é obtida calculando $H(0, y_{0,r}^{2m}) - H(0, y_0)$. Pelo Lema 4.6

$$H(0, y_{0,r}^{2m}) - H(0, y_0) = r^2 \sum_{i=0}^{2m-1} \left(H(0, y_{0,r}^i) - H \left(0, \frac{y_{0,r}^i}{r} \right) \right). \quad (55)$$

Acontece que

$$H(0, y_{0,r}^i) = H\left(0, \frac{y_{0,r}^{i+1}}{r}\right).$$

Portanto

$$\begin{aligned} H(0, y_{0,r}^{2m}) - H(0, y_0) &= r^2 \sum_{i=0}^{2m-1} \left(H(0, y_{0,r}^i) - H\left(0, \frac{y_{0,r}^i}{r}\right) \right) = r^2 \left(H(0, y_{0,r}^{2m-1}) - H\left(0, \frac{y_0}{r}\right) \right) = \\ &= r^2 \left(r^{4m} H\left(0, \frac{y_0}{r}\right) - H\left(0, \frac{y_0}{r}\right) \right) = r^2 \left(\frac{y_0^2 r^{4m}}{2r^2} - \frac{y_0^2}{2r^2} \right) = \frac{y_0^2}{2} (r^{4m} - 1). \end{aligned} \quad (56)$$

Para encontrarmos a parte linear em ε da expansão em Taylor, precisamos calcular

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(H(0, y_{\varepsilon,r}^{2m}) - H(0, y_0) \right) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Faremos esse cálculo derivando as duas parcelas dadas na expressão (50). Primeiro

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(\varepsilon \int_{t_0}^{t_{\varepsilon,r}^{2m}} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, t_0, \varepsilon, r), t) dt \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_{0,r}^{2m}} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, t_0, 0, r), t) dt. \quad (57)$$

Agora, precisamos calcular $\frac{d}{d\varepsilon} \sum_{i=0}^{2m-1} \left(H(0, y_{\varepsilon,r}^i) - H\left(0, \frac{y_{\varepsilon,r}^i}{r}\right) \right) \Big|_{\varepsilon=0}$. Como

$$H\left(0, \frac{y_{\varepsilon,r}^i}{r}\right) = \frac{1}{r^2} H\left(0, y_{\varepsilon,r}^i\right),$$

temos

$$\frac{d}{d\varepsilon} \sum_{i=0}^{2m-1} \left(H(0, y_{\varepsilon,r}^i) - H\left(0, \frac{y_{\varepsilon,r}^i}{r}\right) \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \sum_{i=1}^{2m-1} \frac{r^2 - 1}{r^2} H\left(0, y_{\varepsilon,r}^i\right) \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (58)$$

Por (50), (57) e (58) teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \left(H(0, y_{\varepsilon, r}^{2m}) - H(0, y_0) \right) \Big|_{\varepsilon=0} &= r^2 \int_{t_0}^{t_{0,1}^{2m}} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, t_0, 0, r), t) dt + \\ &+ (r^2 - 1) \sum_{i=1}^{2m-1} \frac{d}{d\varepsilon} (H(0, y_{\varepsilon, r}^i)) \Big|_{\varepsilon=0}. \end{aligned}$$

Vamos agora expandir $\frac{d}{d\varepsilon} (H(0, y_{\varepsilon, r}^{2m}) - H(0, y_0)) \Big|_{\varepsilon=0}$ para r próximo de 1. Assim,

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(H(0, y_{\varepsilon, r}^{2m}) - H(0, y_0) \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_{0,1}^{2m}} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, t_0, 0, 1), t) dt + \mathcal{O}(r - 1). \quad (59)$$

Como $\phi(t; 0, y_0, t_0, 0, 1)$ é solução de um sistema autônomo, tem-se:

$$\phi(t; 0, y_0, t_0, 0, 1) = \phi(t - t_0; 0, y_0, 0, 0, 1).$$

Além disso,

$$t_{0,1}^{2m} = t_0 + nT.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_{0,1}^{2m}} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, t_0, 0, 1), t) dt &= \int_{t_0}^{t_0+nT} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, t_0, 0, 1), t) dt = \\ &= \int_0^{nT} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, 0, 0, 1), t + t_0) dt = \int_0^{nT} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, 0, 0, 1), t + t_0) dt. \end{aligned} \quad (60)$$

Definimos

$$G^m(y_0, t_0) = \int_0^{nT} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, 0, 0, 1), t + t_0) dt. \quad (61)$$

Segue de (56), (59), (60) e (61), que

$$\begin{aligned} H(0, y_{\varepsilon, r}^{2m}) - H(0, y_0) &= \frac{y_0^2}{2} (r^{4m} - 1) + \varepsilon(G^m(y_0, t_0) + \mathcal{O}(r - 1)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\ &= \frac{y_0^2}{2} (r^{4m} - 1) + \varepsilon G^m(y_0, t_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(\varepsilon(r - 1)), \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Fixados $m, n \in \mathbb{N}$ e $(0, \bar{y}_0) \in \tilde{\Sigma}^+$, chamaremos de *função de Melnikov subharmônica* a função

$$\begin{aligned} M^{m,n} : (0, T] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t_0 &\longmapsto \int_0^{nT} \langle \nabla H, g \rangle(\phi(t; 0, y_0, 0, 0, 1), t + t_0) dt. \end{aligned} \quad (62)$$

4.8 EXISTÊNCIA DE (m, n) -ÓRBITAS PERIÓDICAS

4.8.1 O caso conservativo, $r = 1$

Teorema 4.8. *Considere o sistema definido em (36) satisfazendo as hipóteses $H_1 - H_5$ quando $\varepsilon = 0$. Seja $(0, \bar{y}_0, \bar{t}_0) \in \tilde{\Sigma}^+$ onde $\bar{t}_0$ é zero simples da função de Melnikov subhamônica $M^{m,n}(t_0)$ e $\phi(t; 0, \bar{y}_0, \bar{t}_0, 0, 1)$ é a (m, n) -órbita periódica do sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) que passa pelo ponto $(0, \bar{y}_0, \bar{t}_0)$.*

Então, existe ε_0 tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, podemos encontrar $y_0(\varepsilon)$ e $t_0(\varepsilon)$ onde $\phi(t; 0, y_0(\varepsilon), t_0(\varepsilon), \varepsilon)$ é uma (m, n) -órbita periódica de (41).

Demonstração: Fixemos m e n primos entre si. Como já tínhamos dito anteriormente, para mostrarmos a existência de uma órbita periódica precisamos resolver a equação

$$\begin{cases} H(0, y_{\varepsilon,1}^{2m}) = H(0, y_0), \\ t_{\varepsilon,1}^{2m} = t_0 + nT. \end{cases} \quad (63)$$

Pelo Lema 4.7 e usando $r = 1$, podemos reescrever (63) como

$$\begin{cases} \varepsilon G^m(y_0, t_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0, \\ t_{\varepsilon,1}^{2m} - t_0 - nT = 0. \end{cases}$$

Para nos auxiliar, considere a função

$$F_{m,n}(0, y_0, t_0, \varepsilon) := \begin{pmatrix} G^m(y_0, t_0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ t_{\varepsilon,1}^{2m} - t_0 - nT \end{pmatrix}.$$

- Veja que $F_{m,n}(0, \bar{y}_0, \bar{t}_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Primeiro, temos que

$$t_{0,1}^{2m} = \bar{t}_0 + m \frac{nT}{m} = \bar{t}_0 + nT \Rightarrow t_{0,1}^{2m} - \bar{t}_0 - nT = 0. \quad (64)$$

Depois $M^{m,n}(t_0) = G^m(\bar{y}_0, t_0)$ e, por hipótese, $\bar{t}_0$ é zero de $M^{m,n}(t_0)$, portanto $G^m(\bar{y}_0, \bar{t}_0) = 0$.

- Seja $\Gamma(y_0)$ definido na hipótese **(H5)**. Então,

$$\det(DF_{m,n}(0, \bar{y}_0, \bar{t}_0, 0)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial G^m}{\partial y_0}(\bar{y}_0, \bar{t}_0) & \frac{\partial G^m}{\partial t_0}(\bar{y}_0, \bar{t}_0) \\ m \frac{d\Gamma}{dy_0}(\bar{y}_0) & 0 \end{vmatrix} = -m \frac{d\Gamma}{dy_0}(\bar{y}_0) \frac{\partial G^m}{\partial t_0}(\bar{y}_0, \bar{t}_0) \neq 0.$$

De fato, por **(H5)** temos que $\frac{d\Gamma}{dy_0}(\bar{y}_0) \neq 0$. Além disso, $\bar{t}_0$ é zero simples da função de Melnikov, assim $\frac{\partial M^{m,n}}{\partial t_0}(\bar{t}_0) = \frac{\partial G^m}{\partial t_0}(\bar{y}_0, \bar{t}_0) \neq 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ existem únicos $y_0(\varepsilon)$ e $t_0(\varepsilon)$, onde $F_{n,m}(0, y_0(\varepsilon), t_0(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} \varepsilon G^m(y_0(\varepsilon), t_0(\varepsilon)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0, \\ t_{\varepsilon,1}^{2m} - t_0(\varepsilon) - nT = 0. \end{cases}$$

Portanto, a órbita $\phi(t; 0, y_0(\varepsilon), t_0(\varepsilon), \varepsilon, 1)$ é uma (m, n) -órbita periódica para o sistema (41). $\square$

Com o que fizemos até agora, podemos descrever uma técnica para encontrarmos órbitas periódicas do sistema dinâmico (41).

Fixados $m, n \in \mathbb{N}$ primos entre si, pelo Lema 4.4 podemos achar $(0, \bar{y}_0) \in \tilde{\Sigma}^+$, tal que $\Lambda_{\bar{y}_0}$ seja uma (m, n) -órbita periódica. Portanto,

$$\Gamma(\bar{y}_0) = \frac{nT}{m} \Rightarrow \bar{y}_0 = \Gamma^{-1}\left(\frac{nT}{m}\right).$$

Após encontrar a órbita $\phi(t; 0, \bar{y}_0, 0, 0, 1)$ podemos calcular a função de Melnikov subharmônica $M^{m,n}(t_0)$. Nos resta procurar $\bar{t}_0 \in (0, T]$, tal que $M^{m,n}(\bar{t}_0) = 0$. Cada zero da função $M^{m,n}(t_0)$ representa uma (m, n) -órbita periódica do sistema (41).

4.8.2 O caso dissipativo, $r < 1$

Nesta seção nos preocuparemos com o caso em que o coeficiente de restituição r é considerado. Mostraremos que neste cenário continuaremos garantindo condições para a persistência da (m, n) -órbita periódica.

Como na demonstração do Teorema 4.8, queremos garantir que a equação

$$\tilde{P}_{\varepsilon, r}^m(\bar{y}_0, \bar{t}_0) = (\bar{y}_0, t_0 + nT) \quad (65)$$

tenha solução para $\varepsilon > 0$ e $0 < r < 1$.

Para isso, usaremos a mesma estratégia. Resolvendo

$$\begin{aligned} H(0, y_{\varepsilon, r}^{2m}) - H(y_0) &= 0, \\ t_{\varepsilon, r}^{2m} - t_0 - nT &= 0. \end{aligned} \quad (66)$$

garantimos a existência de solução de (65).

Teorema 4.9. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ primos entre si, $(0, \bar{y}_0, \bar{t}_0) \in \tilde{\Sigma}^+$, onde $\bar{t}_0$ é um zero simples da função de Melnikov subharmônica $M^{m, n}(t_0)$. Então, existe $\rho > 0$ tal que, dado $\bar{\varepsilon}, \bar{r} > 0$ satisfazendo $0 < \frac{\bar{r}}{\bar{\varepsilon}} < \rho$ existe $\delta_0 > 0$, tal que, se $\varepsilon = \bar{\varepsilon}\delta$ e $r = 1 - \bar{r}\delta$, então para todo $0 < \delta < \delta_0$ existe $(y_0^*, t_0^*) \in \tilde{\Sigma}_0$, onde $\phi(t; 0, y^*, t^*, \varepsilon, r)$ é uma (m, n) -órbita periódica de (41).*

Mostraremos que as equações (66) admitem soluções periódicas para $\varepsilon \simeq 0$ e $r \simeq 1$. Seja $\bar{\varepsilon}, \bar{r} > 0$ e $\delta > 0$ definimos

$$\begin{aligned} \varepsilon(\delta) &= \bar{\varepsilon}\delta \\ r(\delta) &= 1 - \bar{r}\delta \end{aligned} \quad (67)$$

Por (4.7) e (67) temos

$$H(0, y_{\bar{\varepsilon}\delta, 1-\bar{r}\delta}^{2m}) - H(0, y_0) = \frac{\bar{y}_0^2}{2} \left((1 - \bar{r}\delta)^{4m} - 1 \right) + \bar{\varepsilon}\delta G^m(y_0, t_0) + \mathcal{O}(\delta^2).$$

Segue do binômio de Newton que

$$(1 - \bar{r}\delta)^{4m} = 1 - 4mr\delta + \mathcal{O}(\delta^2).$$

Portanto,

$$H(0, y_{\varepsilon(\delta), r(\delta)}^{2m}) - H(0, y_0) = -2m\bar{r}y_0^2\delta + \bar{\varepsilon}\delta M^{m,n}(t_0) + \mathcal{O}(\delta^2).$$

Defina agora,

$$\tilde{F}_{n,m}(0, y_0, t_0, \delta) := \begin{pmatrix} -2m\bar{r}y_0^2 + \bar{\varepsilon}G^m(y_0, t_0) + \mathcal{O}(\delta) \\ t_{\varepsilon,r}^{2m} - t_0 - nT \end{pmatrix}.$$

Observe que $G^m(\bar{y}_0, \bar{t}_0) = M^{m,n}(\bar{t}_0) = 0$ e $\frac{dM^{m,n}}{dt_0}(\bar{t}_0) \neq 0$. Suponha que $\frac{dM^{m,n}}{dt_0}(\bar{t}_0) > 0$. O caso em que $\frac{dM^{m,n}}{dt_0}(\bar{t}_0) < 0$ é análogo. Por continuidade, existe $\lambda > 0$ tal que

$$|t_0 - \bar{t}_0| < \lambda \Rightarrow \frac{dM^{m,n}}{dt_0}(t_0) > 0.$$

Definimos agora

$$\rho := \frac{M^{m,n}(\bar{t}_0 + \lambda)}{2m\bar{y}_0^2}.$$

Para $0 < \frac{\bar{r}}{\bar{\varepsilon}} < \rho$, existirá $\hat{t}_0 \in [0, T]$ tal que

$$M^{m,n}(\hat{t}_0) = \frac{2m\bar{r}\bar{y}_0^2}{\bar{\varepsilon}}.$$

É fácil ver que

$$\tilde{F}_{n,m}(0, \bar{y}_0, \hat{t}_0, 0) = 0.$$

Falta mostrar que $\det(D\tilde{F}_{(y_0, t_0)})(\bar{y}_0, \hat{t}_0, 0) \neq 0$. Mas,

$$D\tilde{F}_{(y_0, t_0)}(\bar{y}_0, \hat{t}_0, 0) = \begin{vmatrix} -4m\bar{r}\bar{y}_0 + \bar{\varepsilon}\frac{\partial G^m}{\partial y_0}(\bar{y}_0, \hat{t}_0) & \frac{\partial G^m}{\partial t_0}(\bar{y}_0, \hat{t}_0) \\ m\frac{d\Gamma}{dy_0}(\bar{y}_0) & 0 \end{vmatrix} = -m\frac{d\Gamma}{dy_0}(\bar{y}_0)\frac{\partial G^m}{\partial t_0}(\bar{y}_0, \hat{t}_0).$$

Por hipótese, $\frac{d\Gamma}{dy_0}(\bar{y}_0) \neq 0$ e $\frac{\partial G^m}{\partial t_0}(\bar{y}_0, \hat{t}_0) = \frac{dM^{m,n}}{dt_0}(\hat{t}_0) \neq 0$. Portanto, é verdade que $\det(D\tilde{F}_{(y_0, t_0)})(\bar{y}_0, \hat{t}_0, 0) \neq 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, existe δ_0 , tal que, para todo $0 < \delta < \delta_0$ existem $y_0(\delta)$ e $t_0(\delta)$, onde $\tilde{F}_{n,m}(0, y_0(\delta), t_0(\delta), \delta) = 0$ e assim a órbita $\phi(t; 0, y_0(\delta), t_0(\delta), \varepsilon(\delta), r(\delta))$ é uma (m, n) -órbita periódica para o sistema (41).

4.9 CONEXÕES HETEROCLÍNICAS

Sabemos que pela hipótese **(H3)** feita relativamente ao sistema (36), existem duas órbitas heteroclínicas conectando os pontos de sela $z^\pm = (x^\pm, 0)$. Caso $r < 1$, a origem será um atrator global. Queremos estudar a persistência das órbitas heteroclínicas no sistema perturbado ($\varepsilon > 0$) nos casos $r = 1$ e $r < 1$. Mostraremos que nos dois casos tais órbitas existem.

Quando consideramos sistemas dinâmicos contínuos, o estudo da persistência de órbitas heteroclínicas pode ser feito usando o já conhecido método de Melnikov.

Nesta seção, modificaremos o método clássico de Melnikov e provaremos sua validade para sistemas descontínuos do tipo (41).

Sabemos que se estendermos separadamente os sistemas $\mathcal{X}^\pm(x, y) + \varepsilon g^\pm(x, y, t)$ para todo $\mathbb{R}^2 \times S^1$ teremos dois sistemas dinâmicos contínuos, onde podemos aplicar a teoria clássica de perturbações. Como $z^\pm$ são pontos de equilíbrio hiperbólicos, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existem duas órbitas T -periódicas hiperbólicas $\Lambda_\varepsilon^\pm = \{z_\varepsilon^\pm(\tau); \tau \in (0, T]\}$ com variedades estáveis e instáveis $W^{s/u}(\Lambda_\varepsilon^\pm)$ de dimensão 2.

Para um $t_0 \in (0, T]$ fixemos a seção de Poincaré

$$\Sigma_0 = \{(x, y, t_0), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Consideremos ainda a aplicação

$$\begin{aligned} \Pi_{t_0} : \Sigma_0 &\longrightarrow \Sigma_0 \\ (x, y, t_0) &\longmapsto \phi(t_0 + T; x, y, t_0, \varepsilon, r), \end{aligned}$$

onde $\phi(t; x^*, y^*, t^*, \varepsilon, r)$ é solução dos sistema (41) e (42) que passa pelo ponto (x^*, y^*, t^*) .

Essa aplicação tem $z_\varepsilon^\pm(t_0)$ como pontos de sela com variedades estáveis e instáveis $W^{s,u}(z_\varepsilon^\pm(t_0))$. Para respondermos às perguntas feitas no início da seção, estudaremos a interseção de $W^{s,u}(z_\varepsilon^\pm(t_0))$ com Σ . No caso não perturbado ($\varepsilon = 0$ e $r = 1$) $W^u(z^\pm)$ e

$W^s(z^\pm)$ intersectam Σ transversalmente nos pontos $(0, y_+)$ e $(0, y_-)$. Vamos nos concentrar na persistência da conexão $(0, y_+)$. Quando consideramos o sistema perturbado para ε próximo de zero, as variedades $W^u(z_\varepsilon^-(t_0))$ e $W^s(z_\varepsilon^+(t_0))$ cruzam Σ nos pontos $(0, y_\varepsilon^u(t_0))$ e $(0, y_\varepsilon^s(t_0))$. Lembrando qual o efeito do parâmetro r definido na seção (1.3), as variedades $W^u(z_\varepsilon^-(t_0))$ e $W^s(z_\varepsilon^+(t_0))$ irão se intersectar quando

$$ry_\varepsilon^u(t_0) = y_\varepsilon^s(t_0),$$

para algum $t_0 \in (0, T]$. Como antes, usaremos o Hamiltoniano H para medir a distância entre os pontos $(0, y_\varepsilon^u(t_0))$ e $(0, y_\varepsilon^s(t_0))$. Definimos

$$\Delta(t_0, \varepsilon, r) = H(0, ry_\varepsilon^u(t_0)) - H(0, y_\varepsilon^s(t_0)) = r^2 H(0, y_\varepsilon^u(t_0)) - H(0, y_\varepsilon^s(t_0)). \quad (68)$$

Então, teremos o seguinte resultado

Teorema 4.10. *Considere o sistema (41), (42) e $(0, y_+) = W^s(z^+) \cap \Sigma$. Defina a função de Melnikov como*

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \nabla H, g \rangle (\phi(t; 0, y_0, t_0, 0, 1), t) dt, \quad (69)$$

onde

$$\phi(t; 0, y_0, t_0, 0, 1) = \begin{cases} \phi^-(t; 0, y_0, t_0, 0, 1) & \text{se } t \leq t_0, \\ \phi^+(t; 0, y_0, t_0, 0, 1) & \text{se } t > t_0, \end{cases}$$

é uma órbita heteroclínica do caso não perturbado. Se $\bar{t}_0 > 0$ é zero simples da função $M(t_0)$, então as seguintes afirmações são verdadeiras

- (a) Se $r = 1$, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ podemos achar um zero simples $\bar{t}(\varepsilon) = \bar{t}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ da função (68). Portanto, as curvas $W^u(z_\varepsilon^-(\bar{t}(\varepsilon)))$ e $W^s(z_\varepsilon^+(\bar{t}(\varepsilon)))$ se intersectam transversalmente no ponto $(0, y_h) \in \Sigma$, ε -próximo ao ponto $(0, y_+)$. Além disso, $\phi(t, 0, y_h, \bar{t}(\varepsilon), \varepsilon, 1)$ é a órbita heteroclínica que liga as órbitas periódicas $\Lambda_\varepsilon^\pm$.
- (b) Se $r < 1$, existe $\rho > 0$, tal que $\bar{\varepsilon}, \bar{r} > 0$ e $0 < \frac{\bar{r}}{\bar{\varepsilon}} < \rho$ podemos achar $\delta_0 > 0$, tal que, se $\varepsilon(\delta) = \bar{\varepsilon}\delta$ e $r(\delta) = 1 - \bar{r}\delta$ com $0 < \delta < \delta_0$, existe $\bar{t}(\delta)$, zero simples da função (68). Assim, as curvas $W^u(z_\varepsilon^-(\bar{t}(\delta)))$ e $W^s(z_\varepsilon^+(\bar{t}(\delta)))$ intersectam Σ transversalmente respectivamente nos pontos $(0, y_h^\pm) \in \Sigma$ satisfazendo $ry_h^- = y_h^+$, tal que, $\phi(t, 0, y_h^\pm, \varepsilon, r)$ é a órbita heteroclínica que liga $\Lambda_\varepsilon^\pm$.

Demonstração: Vamos começar definindo

$$\begin{aligned} F_-(\tau, \varepsilon) &:= H^-(\phi^-(\tau; 0, y_\varepsilon^u(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) - H^-(\phi^-(\tau; z_\varepsilon^-(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) \text{ se } \tau \leq t_0, \\ F_+(\tau, \varepsilon) &:= H^+(\phi^+(\tau; 0, y_\varepsilon^s(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) - H^+(\phi^+(\tau; z_\varepsilon^+(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) \text{ se } \tau \geq t_0. \end{aligned}$$

Quando $\tau = t_0$ teremos

$$\begin{aligned} F_-(t_0, \varepsilon) &= H^-(\phi^-(t_0; 0, y_\varepsilon^u(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) - H^-(\phi^-(t_0; z_\varepsilon^-(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) = \\ &= H^-(0, y_\varepsilon^u(t_0)) - H^-(z_\varepsilon^-(t_0)), \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} F_+(t_0, \varepsilon) &= H^+(\phi^+(t_0; 0, y_\varepsilon^s(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) - H^+(\phi^+(t_0; z_\varepsilon^+(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) = \\ &= H^+(0, y_\varepsilon^s(t_0)) - H^+(z_\varepsilon^+(t_0)). \end{aligned} \quad (71)$$

Reescrevendo (68) usando (70) e (71) teremos

$$\Delta(t_0, \varepsilon, r) = r^2 F_-(t_0, \varepsilon) - F_+(t_0, \varepsilon) + r^2 H^-(z_\varepsilon^-(t_0)) - H^+(z_\varepsilon^+(t_0)). \quad (72)$$

Acontece que

$$H^\pm(z_\varepsilon^\pm(t_0)) = \underbrace{H^\pm(z^\pm)}_{c_1} + \varepsilon \left\langle \underbrace{\nabla H^\pm(x^\pm, 0)}_0, \left(\frac{\partial x_\varepsilon^\pm}{\partial \varepsilon}(t_0) \Big|_{\varepsilon=0}, 0 \right) \right\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = c_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Portanto, (72) se escreve como

$$\Delta(t_0, \varepsilon, r) = r^2 F_-(t_0, \varepsilon) - F_+(t_0, \varepsilon) + (r^2 - 1)c_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Vamos encontrar uma expressão para $F_-(t_0, \varepsilon)$ e $F_+(t_0, \varepsilon)$. Primeiro, veja que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_-}{\partial \tau}(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon \langle \nabla H^-, g^- \rangle (\phi^-(\tau; 0, y_\varepsilon^u(t_0), t_0, \varepsilon, 1) - \phi^-(\tau; z_\varepsilon^-(t_0), t_0, \varepsilon, 1), \tau), \\ \frac{\partial F_+}{\partial \tau}(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon \langle \nabla H^+, g^+ \rangle (\phi^+(\tau; 0, y_\varepsilon^s(t_0), t_0, \varepsilon, 1) - \phi^+(\tau; z_\varepsilon^+(t_0), t_0, \varepsilon, 1), \tau). \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\begin{aligned} F_-(t_0, \varepsilon) - F_-(T^u, \varepsilon) &= \\ &= \int_{T^u}^{t_0} \varepsilon \langle \nabla H^-, g^- \rangle (\phi^-(\tau; 0, y_\varepsilon^u(t_0), t_0, \varepsilon, 1) - \phi^-(\tau; z_\varepsilon^-(t_0), t_0, \varepsilon, 1), \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} F_+(t_0, \varepsilon) - F_+(T^s, \varepsilon) &= \\ &= - \int_{t_0}^{T^s} \varepsilon \langle \nabla H^+, g^+ \rangle (\phi^+(\tau; 0, y_\varepsilon^s(t_0), t_0, \varepsilon, 1) - \phi^+(\tau; z_\varepsilon^+(t_0), t_0, \varepsilon, 1), \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (74)$$

Pelo Teorema da Variável Estável/Instável (2.3), as órbitas em $W^{s/u}(\Lambda_\varepsilon^\pm)$ convergem exponencialmente para $\Lambda_\varepsilon^\pm$ quando $t \rightarrow \infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$). Ou seja, existem constante k, λ e τ_0 , tal que,

$$\begin{aligned} |\phi^-(\tau; 0, y_\varepsilon^u(t_0), t_0, \varepsilon, 1) - \phi^-(\tau; z_\varepsilon^-(t_0), t_0, \varepsilon, 1)| &< ke^{-\lambda\tau} \text{ se } \tau \leq \tau_0, \\ |\phi^+(\tau; 0, y_\varepsilon^s(t_0), t_0, \varepsilon, 1) - \phi^+(\tau; z_\varepsilon^+(t_0), t_0, \varepsilon, 1)| &< ke^{-\lambda\tau} \text{ se } \tau > \tau_0. \end{aligned}$$

Portanto, também existem k', λ' e τ'_0 tal que

$$\begin{aligned} |H^-(\phi^-(\tau; 0, y_\varepsilon^u(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) - H^-(\phi^-(\tau; z_\varepsilon^-(t_0), t_0, \varepsilon, 1))| &< k'e^{-\lambda'\tau} \text{ se } \tau \leq \tau'_0, \\ |H^+(\phi^+(\tau; 0, y_\varepsilon^s(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) - H^+(\phi^+(\tau; z_\varepsilon^+(t_0), t_0, \varepsilon, 1))| &< k'e^{-\lambda'\tau} \text{ se } \tau > \tau'_0. \end{aligned}$$

Pela afirmação acima, teremos

$$F_-(T^u; \varepsilon) = H^-(\phi^-(T^u; 0, y_\varepsilon^u(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) - H^-(\phi^-(T^u; z_\varepsilon^-(t_0), t_0, \varepsilon, 1)).$$

Portanto,

$$\lim_{T^u \rightarrow -\infty} F_-(T^u; \varepsilon) = 0$$

Também

$$F_+(T^s, \varepsilon) = H^+(\phi^-(T^s; 0, y_\varepsilon^s(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) - H^+(\phi^-(T^s; z_\varepsilon^+(t_0), t_0, \varepsilon, 1)).$$

E assim,

$$\lim_{T^s \rightarrow \infty} F_+(T^s, \varepsilon) = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} & \int_{T^u}^{t_0} \varepsilon \langle \nabla H^-, g^- \rangle (\phi^-(\tau; 0, y_\varepsilon^u(t_0), t_0, \varepsilon, 1) - \phi^-(\tau; z_\varepsilon^-(t_0), t_0, \varepsilon, 1), \tau) d\tau = \\ & = H^-(\phi^-(t_0; 0, y_\varepsilon^u(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) - H^-(\phi^-(T^u; 0, y_\varepsilon^u(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) - \\ & H^-(\phi^-(t_0; z_\varepsilon^-(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) + H^-(\phi^-(T^u; z_\varepsilon^-(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) = \\ & = H^-(0, y_\varepsilon^u(t_0)) - H^-(\phi^-(T^u; 0, y_\varepsilon^u(t_0), t_0, \varepsilon, 1)) - \\ & H^-(x_\varepsilon^-(t_0), 0) + H^-(\phi^-(T^u; x_\varepsilon^-(t_0), 0, t_0, \varepsilon, 1)) \xrightarrow{T^u \rightarrow -\infty} H^-(z_\varepsilon^-(t_0)) - H^-(0, y_\varepsilon^u(t_0)). \end{aligned}$$

De maneira análoga

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{T^s} \varepsilon \langle \nabla H^+, g^+ \rangle (\phi^+(\tau; 0, y_\varepsilon^s(t_0), t_0, \varepsilon, 1) - \phi^+(\tau; z_\varepsilon^+(t_0), t_0, \varepsilon, 1), \tau) d\tau \xrightarrow{T^s \rightarrow \infty} \\ & \xrightarrow{T^s \rightarrow \infty} H^+(0, y_\varepsilon^s(t_0)) - H^+(z_\varepsilon^+(t_0)). \end{aligned}$$

Portanto, as integrais convergem e por (73) e (74) temos

$$F_-(t_0, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{t_0} \varepsilon \langle \nabla H^-, g^- \rangle (\phi^-(\tau; 0, y_\varepsilon^u(t_0), t_0, \varepsilon, 1) - \phi^-(\tau; z_\varepsilon^-(t_0), t_0, \varepsilon, 1), \tau) d\tau,$$

e

$$F_+(t_0, \varepsilon) = \int_{t_0}^{\infty} \varepsilon \langle \nabla H^+, g^+ \rangle (\phi^+(\tau; 0, y_\varepsilon^s(t_0), t_0, \varepsilon, 1) - \phi^+(\tau; z_\varepsilon^+(t_0), t_0, \varepsilon, 1), \tau) d\tau.$$

Expandindo $F_\pm$ em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$

$$\begin{aligned} F_-(t_0, \varepsilon) &= \varepsilon \int_{-\infty}^{t_0} \langle \nabla H^-, g^- \rangle (\phi^-(\tau; 0, y_0, t_0, 0, 1), \tau) d\tau + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ F_+(t_0, \varepsilon) &= \varepsilon \int_{t_0}^{\infty} \langle \nabla H^+, g^+ \rangle (\phi^+(\tau; 0, y_0, t_0, 0, 1), \tau) d\tau + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{75}$$

Substituindo (75) em (72)

$$\Delta(t_0, \varepsilon, r) = (r^2 - 1)F_-(t_0, \varepsilon) - \varepsilon M(t_0) + (r^2 - 1)c_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{76}$$

A partir daqui dividiremos o estudo em dois casos: quando $r = 1$ e quando $0 < r < 1$.

Caso (a): $r=1$.

Por (76), teremos

$$\Delta(t_0, \varepsilon, 1) = -\varepsilon M(t_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Se existir $t^* \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, tal que $\Delta(t^*, \varepsilon, 1) = 0$, então as variedades $W^{s/u}(z^\pm(t^*))$ se interseptam.

Para nos auxiliar, definimos a função

$$\tilde{\Delta}(t_0, \varepsilon) = M(t_0) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (77)$$

Veja que $\Delta(t_0, \varepsilon, 1) = \varepsilon \tilde{\Delta}(t_0, \varepsilon)$. A expressão (77) satisfaz as próximas duas igualdades, pois por hipótese $\bar{t}_0$ é zero simples da função $M(t_0)$.

- $\tilde{\Delta}(\bar{t}_0, 0) = 0$.
- $\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial t_0}(\bar{t}_0, 0) = \frac{\partial M}{\partial t_0}(\bar{t}_0) \neq 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ existe único $\bar{t}_0(\varepsilon) \in (0, T]$, com $\bar{t}_0(0) = \bar{t}_0$ e

$$\tilde{\Delta}(\bar{t}(\varepsilon), \varepsilon) = 0.$$

Portanto, $\Delta(\bar{t}(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ e, assim, podemos concluir que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ as órbitas heteroclínicas são persistentes no sistema (41).

Caso (b): $r < 1$.

Sejam $\bar{\varepsilon}, \bar{r} > 0, \delta > 0$ e

$$\begin{aligned} \varepsilon(\delta) &= \bar{\varepsilon}\delta, \\ r(\delta) &= 1 - \bar{r}\delta. \end{aligned}$$

Substituindo as últimas igualdade em (76)

$$\Delta(t_0, \delta) = \delta ((\bar{r}\delta - 2\bar{r})(F_-(t_0, \delta) + c_1) + \bar{\varepsilon}M(t_0) + \mathcal{O}(\delta)).$$

Vamos estudar a função $\tilde{\Delta}(t_0, \delta) = \frac{1}{\delta}\Delta(t_0, \delta)$.

Como $\bar{t}_0$ é zero simples da função $M(t_0)$ definida em (69), então $\frac{dM}{dt_0}(\bar{t}_0) \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\frac{dM}{dt_0}(\bar{t}_0) > 0$. Por continuidade, existe $\lambda > 0$ tal que

$$|t_0 - \bar{t}_0| < \lambda \Rightarrow \frac{dM}{dt_0}(t_0) > 0.$$

Defina

$$\rho := \frac{M(\bar{t}_0 + \lambda)}{2c_1}.$$

e tome $\bar{r}, \bar{\varepsilon} > 0$ tais que $0 < \frac{\bar{r}}{\bar{\varepsilon}} < \rho$. Então,

$$M(\bar{t}_0) < \frac{2c_1\bar{r}}{\bar{\varepsilon}} < M(\bar{t}_0 + \lambda),$$

Mais uma vez, por continuidade existe $\hat{t}_0 \in (\bar{t}_0, \bar{t}_0 + \lambda)$ tal que $M(\hat{t}_0) = \frac{2c_1\bar{r}}{\bar{\varepsilon}}$.

Pelo Teorema da Função Implícita, existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \delta < \delta_0$ existem únicos $\bar{t}(\delta)$ e $\bar{y}(\delta)$ com $\bar{t}(0) = \bar{t}_0$, $\bar{y}(0) = \bar{y}_0$ e $\Delta(\bar{t}(\delta), \bar{y}(\delta)) = 0$. $\square$

4.10 EXEMPLO

Considere a equação diferencial descontínua e linear por partes, dada em (33)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - \text{sign}(x).\end{aligned}\tag{78}$$

Descreveremos o último sistema em termos da notação do capítulo anterior. Note que o sistema acima é Hamiltoniano, com função Hamiltoniana dada por

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x),\tag{79}$$

onde

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + |x|.$$

Consideramos o sistema perturbado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - \text{sign}(x) - \varepsilon g(x, y, t).\end{aligned}$$

Definimos também o campo vetorial descontínuo $\mathcal{X}(x, y) = (y, x - \text{sign}(x))$. Como esse é um sistema linear por partes, podemos obter explicitamente as expressões, em termos de funções elementares, das soluções de (78) passando por $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ num instante $t_0 \in \mathbb{R}$. As soluções são

$$\begin{aligned}x^\pm(t) &= c_1^\pm e^t + c_2^\pm e^{-t} \pm 1, \\ y^\pm(t) &= c_1^\pm e^t - c_2^\pm e^{-t},\end{aligned}\tag{80}$$

onde

$$\begin{aligned}c_1^\pm &= \frac{x_0 + y_0 \mp 1}{2} e^{-t_0}, \\ c_2^\pm &= \frac{x_0 - y_0 \mp 1}{2} e^{t_0}.\end{aligned}\tag{81}$$

Vamos mostrar que o sistema (78) satisfaz as cinco hipóteses dadas na seção (4.2).

(H1) Como $V''(x) = -1 < 0$ por (39), os pontos de equilíbrio $z^\pm = (\pm 1, 0)$ são pontos de sela. Definimos $c_1 := H(1, 0) = \frac{1}{2}$.

(H2) Note que $(V^+)'(0) > 0$ e $(V^-)'(0) < 0$. Assim a origem é uma 2-dobra invisível.

(H3) Considere as curvas

$$\begin{aligned}\Psi_u^+(t) &= (1 - e^t, -e^{-t}), \\ \Psi_s^+(t) &= (1 - e^{-t}, e^{-t}),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Psi_u^-(t) &= (e^t - 1, e^t), \\ \Psi_s^-(t) &= (e^{-t} - 1, -e^{-t}).\end{aligned}$$

Veja que essas são soluções heteroclínicas com

$$\begin{aligned} W^u(z^+) &= \{\Psi_u^+(t); t \in (-\infty, 0)\}, \\ W^s(z^+) &= \{\Psi_s^+(t); t \in (0, \infty)\}. \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} W^u(z^-) &= \{\Psi_u^-(t); t \in (-\infty, 0)\}, \\ W^s(z^-) &= \{\Psi_s^-(t); t \in (0, \infty)\}. \end{aligned}$$

Note que, $\Psi_u^+(0) = \Psi_s^-(0) = (0, -1)$ e $\Psi_s^+(0) = \Psi_u^-(0) = (0, 1)$. Então, $W^s(z^-) \cap \Sigma^- = W^u(z^+) \cap \Sigma^- = \{(0, -1)\}$ e $W^u(z^-) \cap \Sigma^+ = W^s(z^+) \cap \Sigma^+ = \{(0, 1)\}$.

(H4) Seja $c \in (0, c_1)$ e $y_0 := \sqrt{2c}$. Queremos mostrar que a solução $\phi(t; 0, y_0, 0, 0, 1)$ é uma órbita periódica.

Veja que o Hamiltoniano (79) satisfaz $H(x, y) = H(-x, y)$ e $H(x, y) = H(x, -y)$. Portanto, as órbitas do sistema (78) são simétricas com relação aos eixos x e y . Por essas duas simetrias concluímos que uma condição suficiente para que uma órbita seja periódica é que ela cruze o eixo x e y .

Como as soluções do sistema (78) são concatenações de órbitas em $S^\pm$ é suficiente mostrarmos que dado $(0, y_0) \in \tilde{\Sigma}^+$ e $t_0 \in S^1$, então $\phi^+(t; 0, y_0, t_0, 0, 1)$ cruza o eixo x . Isso ocorre pois $\phi^+(t; 0, y_0, t_0, 0, 1)$ é um ramo de hipérbole que tem as retas $y = x - 1$ e $y = 1 - x$ como assíntotas. Assim, em algum momento $\phi^+(t; 0, y_0, t_0, 0, 1)$ volta a encontrar o eixo y . Como a origem é o único ponto de dobra, a solução $\phi^+(t; 0, y_0, t_0, 0, 1)$ tem que cruzar o eixo x .

(H5) Pelas simetrias já mencionadas, o período $\Gamma(y_0)$ é igual a $4\tilde{t}$, onde $\tilde{t}$ é o tempo necessário para que a órbita $\phi^+(t; 0, y_0, 0, 0, 1)$ alcance o eixo x . Usando as soluções (80) teremos que $\tilde{t}$ é raiz da equação

$$\frac{y_0 - 1}{2}e^t - \frac{-y_0 - 1}{2}e^{-t} = 0.$$

Segue que $\tilde{t} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + y_0}{1 - y_0} \right)$. Assim,

$$\Gamma(y_0) = 2 \ln \left(\frac{1 + y_0}{1 - y_0} \right). \quad (82)$$

Essa é uma função continuamente diferenciável e crescente para $0 < y_0 < 1$.

Como valem todas as hipóteses, podemos aplicar os teoremas (4.8) e (4.10) .

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $\Gamma(\bar{y}_0) = \frac{nT}{m}$. Por (82) temos

$$\bar{y}_0 = \Gamma^{-1} \left(\frac{nT}{m} \right) = \frac{e^{\frac{nT}{2m}} - 1}{e^{\frac{nT}{2m}} + 1}.$$

Definimos $q_c(t) := \phi(t; 0, \bar{y}_0, 0, 0, 1)$, ou seja, a órbita periódica do sistema não perturbado, passando pelo ponto $(0, \bar{y}_0)$ no instante zero.

Veja que

$$q_c(t) = \begin{cases} q_c^1(t) := (x^+(t), y^+(t)) & \text{se } 0 \leq t < \frac{nT}{2m}, \\ q_c^2(t) := (x^-(t - \frac{nT}{2m}), y^-(t - \frac{nT}{2m})) & \text{se } \frac{nT}{2m} \leq t < \frac{nT}{m}. \end{cases} \quad (83)$$

Definimos

$$Q_c(t) := \begin{cases} q_c^{2i+1}(t) := q_c^1 \left(t - \frac{inT}{m} \right) & \text{se } \frac{inT}{m} \leq t < \frac{(2i+1)nT}{2m}, \\ q_c^{2i+2}(t) := q_c^2 \left(t - \frac{inT}{2m} \right) & \text{se } \frac{(2i+1)nT}{2m} \leq t < \frac{(i+1)nT}{m}. \end{cases}$$

A órbita $Q_c(t)$ percorre a mesma trajetória que a órbita $q_c(t)$ um número m de vezes.

Podemos agora calcular a função de Melnikov subharmônica (62)

$$\begin{aligned} M^{m,n}(t_0) &= \int_0^{nT} \langle \nabla H, g \rangle(Q_c(t), t + t_0) dt = \\ &= \int_0^{nT} \Pi_y(Q_c(t)) \cdot g(Q_c(t), t + t_0) dt. \end{aligned}$$

Por definição

$$\begin{aligned}
 M^{m,n}(t_0) &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\frac{inT}{m}}^{\frac{(2i+1)nT}{2m}} \Pi_y(q_c^{2i+1}(t)) g(q_c^{2i+1}(t), t + t_0) dt + \\
 &+ \int_{\frac{(2i+1)nT}{2m}}^{\frac{(i+1)nT}{m}} \Pi_y(q_c^{2i+2}(t)) g(q_c^{2i+2}(t), t + t_0) dt \stackrel{*}{=} \\
 &\stackrel{*}{=} \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^{\frac{nT}{2m}} \Pi_y(q_c^1(t)) g\left(q_c^1(t), t + t_0 + \frac{inT}{m}\right) dt + \\
 &+ \int_0^{\frac{nT}{2m}} \Pi_y\left(q_c^2\left(t + \frac{nT}{2m}\right)\right) g\left(q_c^2\left(t + \frac{nT}{2m}\right), t + t_0 + \frac{(2i+1)nT}{2m}\right) dt = \\
 &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^{\frac{nT}{2m}} \Pi_y(q_c^1(t)) \left(g\left(q_c^1(t), t + t_0 + \frac{inT}{m}\right) - \right. \\
 &\left. g\left(q_c^1(t), t + t_0 + \frac{(2i+1)nT}{2m}\right) \right),
 \end{aligned} \tag{84}$$

onde em $(\star)$ fizemos uma mudança de variável do tipo $s = t - \frac{inT}{m}$ para a primeira integral e uma mudança do tipo $s = t - \frac{(2i+1)nT}{2m}$ para a segunda integral. Para não carregar na notação, mantivemos a variável de integração igual a t em vez de s .

Além disso, por (80), (81) e (83) temos

$$\Pi_y(q_c^1(t)) = c_1 e^t - c_2 e^{-t}, \tag{85}$$

e

$$c_1 = \frac{y_0 - 1}{2}, \quad c_2 = \frac{-y_0 - 1}{2}.$$

Vamos considerar a perturbação dada por $g(x, y, t) := \sum_{j=1}^k \cos(j\omega t)$. Observe que a função g tem período T igual a $\frac{2\pi}{\omega}$. Substituindo a expressão de g em (84) e usando (85) obteremos

$$M^{m,n}(t_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^k \int_0^{\frac{nT}{2m}} (c_1 e^t - c_2 e^{-t}) S(t, t_0, i, j) dt, \tag{86}$$

onde

$$S(t, t_0, i, j) = \cos\left(j\omega\left(t + t_0 + \frac{inT}{m}\right)\right) - \cos\left(j\omega\left(t + t_0 + \frac{(2i+1)nT}{2m}\right)\right). \tag{87}$$

Veja que (87) satisfaz o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{S}(t, t_0, i, j) = -(j\omega)^2 S(t, t_0, i, j), \\ S(-t_0, t_0, i, j) = \cos\left(\frac{j\omega nT}{m}\right) - \cos\left(\frac{(2i+1)j\omega nT}{2m}\right), \\ \dot{S}(-t_0, t_0, i, j) = -(j\omega) \left(\sin\left(\frac{j\omega nT}{m}\right) - \sin\left(\frac{(2i+1)j\omega nT}{2m}\right) \right). \end{cases} \quad (88)$$

Assim, podemos reescrever (87) como

$$S(t, t_0, i, j) = S(-t_0, t_0, i, j) \cos(j\omega(t + t_0)) - \dot{S}(-t_0, t_0, i, j) \sin(j\omega(t + t_0)). \quad (89)$$

Usando a integração por partes, a integral (86) ficará

$$\begin{aligned} M^{m,n}(t_0) = & \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{c_1 e^t}{1 + (j\omega)^2} \right) (S(t, t_0, i, j) - \dot{S}(t, t_0, i, j)) \Big|_0^{\frac{nT}{2m}} - \\ & - \left(\frac{c_2 e^{-t}}{1 + (j\omega)^2} \right) (S(t, t_0, i, j) + \dot{S}(t, t_0, i, j)) \Big|_0^{\frac{nT}{2m}}. \end{aligned}$$

Para que tenhamos uma expressão concisa, definimos

$$\begin{aligned} A(t) &:= \frac{c_1 e^t}{1 + (j\omega)^2}, \\ B(t) &:= \frac{c_2 e^{-t}}{1 + (j\omega)^2}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) &= A(t)(S(t, t_0, i, j) + j\omega \dot{S}(t, t_0, i, j)) + B(t)(S(t, t_0, i, j) - j\omega \dot{S}(t, t_0, i, j)), \\ \bar{B}(t) &= A(t)(-\dot{S}(t, t_0, i, j) + j\omega S(t, t_0, i, j)) + B(t)(-\dot{S}(t, t_0, i, j) - j\omega S(t, t_0, i, j)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$M^{m,n}(t_0) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{m-1} \bar{A}(t) \cos(j\omega(t + t_0)) + \bar{B}(t) \sin(j\omega(t + t_0)) \Big|_0^{\frac{nT}{2m}}.$$

Simplificando a última expressão teremos,

$$\begin{aligned} M^{m,n}(t_0) &= 4 \sum_{j=1}^k C(j) \cdot \left(\sum_{i=0}^{m-1} \cos \left(\frac{(2i+1)jn\pi}{m} \right) \cos(j\omega t_0) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{m-1} \sin \left(\frac{(2i+1)jn\pi}{m} \right) \sin(j\omega t_0) \right), \end{aligned}$$

onde $C(j) = \sin \left(\frac{jn\pi}{2m} \right) \left(jw\bar{y}_0 \cdot \cos \left(\frac{\pi jn}{2m} \right) - \sin \left(\frac{\pi jn}{2m} \right) \right)$. Veja que se n for par, então $C(j) = 0$. Por isso, a partir de agora só consideraremos n ímpar.

Vamos nos concentrar agora nas somas

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{m-1} \sin \left(\frac{(2i+1)jn\pi}{m} \right), \\ &\sum_{i=0}^{m-1} \cos \left(\frac{(2i+1)jn\pi}{m} \right). \end{aligned}$$

Para somas finitas de senos e cossenos temos as fórmulas

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} \sin(\mathcal{A} + i\mathcal{B}) &= \sin \left(\mathcal{A} + \frac{m-1}{2}\mathcal{B} \right) \frac{\sin \left(\frac{m\mathcal{B}}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\mathcal{B}}{2} \right)}, \\ \sum_{i=0}^{m-1} \cos(\mathcal{A} + i\mathcal{B}) &= \cos \left(\mathcal{A} + \frac{m-1}{2}\mathcal{B} \right) \frac{\sin \left(\frac{m\mathcal{B}}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\mathcal{B}}{2} \right)}, \end{aligned}$$

desde que $\mathcal{B} \neq 2\mu\pi$, onde $\mu \in \mathbb{N}$. No caso em que estamos interessados $\mathcal{A} = \frac{jn\pi}{m}$ e $\mathcal{B} = \frac{2jn\pi}{m}$. Podemos usar as fórmulas acima se m não divide j . Vamos começar supondo que m não divide j . Note que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} \sin \left(\frac{(2i+1)jn\pi}{m} \right) &= \sin(jn\pi) \frac{\sin(jn\pi)}{\sin \left(\frac{jn\pi}{m} \right)} = 0, \\ \sum_{i=0}^{m-1} \cos \left(\frac{(2i+1)jn\pi}{m} \right) &= \cos(jn\pi) \frac{\sin(jn\pi)}{\sin \left(\frac{jn\pi}{m} \right)} = 0. \end{aligned}$$

Quando m divide j , existirá $\sigma \in \mathbb{N}$, tal que $j = \sigma m$. Então,

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sin\left(\frac{(2i+1)jn\pi}{m}\right) = \sum_{i=0}^{m-1} \sin((2i+1)j\sigma n\pi) = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \cos\left(\frac{(2i+1)jn\pi}{m}\right) = \sum_{i=0}^{m-1} \cos((2i+1)\sigma n\pi) = \sum_{i=0}^{m-1} \cos(\sigma jn\pi) = \begin{cases} m & \text{se } \sigma \text{ for par,} \\ -m & \text{se } \sigma \text{ for impar.} \end{cases}$$

Se σ for par, então $C(j) = C(\sigma m) = 0$. Se σ for impar, então $C(j) = C(\sigma m) = -1$. Assim,

$$M^{m,n}(t_0) = \frac{4m}{1+(j\omega)^2} \sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ j=\sigma m \\ \sigma \text{ impar}}} \cos(j\omega t_0). \quad (90)$$

Para explicitar a dependência da função (90) com relação ao parâmetro $k \in \mathbb{N}$, vamos denotá-la por $M_k^{m,n}(t_0)$.

Fixemos alguns valores para $m, n, k \in \mathbb{N}$ e busquemos os zeros da função (90). Começamos com $m = k = 1$ e $n = 1$, teremos

$$M_1^{3,1}(t_0) = \frac{4 \cos(\omega t_0)}{1 + \omega^2}.$$

Essa função tem dois zeros simples, a saber, $\frac{\pi}{2\omega}$ e $\frac{3\pi}{2\omega}$. Portanto, o sistema perturbado tem duas $(1, 1)$ -órbitas periódicas.

Caso $m = k = 2$ e $n = 1$, (90) será

$$M_2^{2,1}(t_0) = \frac{8 \cos(2\omega t_0)}{1 + 4\omega^2}.$$

A função $M_2^{2,1}(t_0)$ terá 4 zeros simples da forma $\frac{\eta\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{4\omega}$ com $1 \leq \eta \leq 4$, cada um representando uma $(2, 1)$ -órbita periódica diferente.

Na verdade, se fixarmos $k = m$ e n impar, tal que $\text{mdc}(m, n) = 1$, teremos que a função de Melnikov subharmônica será

$$M_k^{m,n}(t_0) = \frac{4m \cos(m\omega t_0)}{1 + (m\omega)^2}. \quad (91)$$

Essa função terá $2m$ zeros simples da forma $\frac{\eta\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{2m\omega}$, com $1 \leq \eta \leq 2m$. Com isso, garantimos a existência de $2m$ diferentes (m, n) -órbitas periódicas.

5

FUNÇÃO DE MELNIKOV PARA SISTEMAS NÃO CONSERVATIVOS

Durante todo o capítulo anterior, assumimos que o campo de vetores do sistema não perturbado era Hamiltoniano. No caso do estudo da persistência da conexão heteroclínica podemos relaxar essa hipótese e obter um resultado análogo ao teorema (4.10) para campo de vetores mais gerais.

Mantendo a notação introduzida no último capítulo, vamos tomar um campo

$$f(q) = \begin{cases} f^+(q) & \text{se } q \in S^+, \\ f^-(q) & \text{se } q \in S^-, \end{cases}$$

onde $q = (x, y) \in U$ e $f^\pm : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ são de classe $\mathcal{C}^1$. Vamos exigir que o campo f satisfaça as seguintes hipóteses:

(H1) Cada campo $f^\pm|_{S^\pm}$ possui um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo sela denotado por $z^\pm$.

(H2) As variedades $W^u(z^-)$ e $W^s(z^+)$ cruzam Σ transversalmente e formam uma conexão heteroclínica, ou seja,

$$W^u(z^-) \cap \Sigma = W^s(z^+) \cap \Sigma = \{(0, \bar{y})\}.$$

Da mesma maneira que fizemos na seção (4.9), queremos garantir a persistência da conexão, dada em **(H2)**, para a equação

$$\dot{q} = f(q) + \varepsilon g(q, t), \tag{92}$$

onde, $g(q, t)$ está definida em (40).

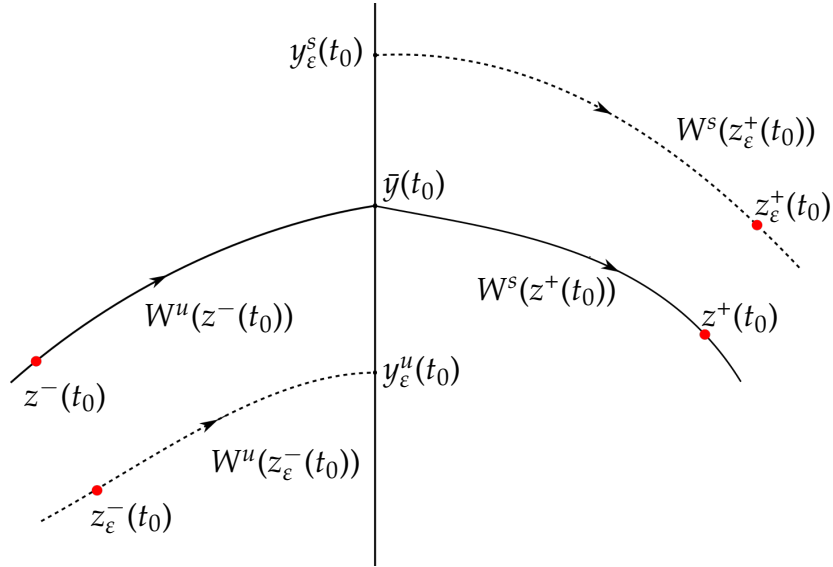


Fig. 17: Retrato de fase de um sistema dinâmico que satisfaz as condições descritas neste capítulo.

A equação diferencial (92) não é autônoma, assim, podemos reescrevê-la tomando o tempo t como uma variável

$$\begin{cases} \dot{q} = f(q) + \varepsilon g(q, \varphi), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \quad (93)$$

Relembrando que o espaço de fase de (93) é dado por $\mathbb{R}^2 \times S^1$, em que $S^1 = \mathbb{R}/T$.

Se tomarmos $\varepsilon = 0$ na equação (93), teremos

$$\begin{cases} \dot{q} = f(q), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \quad (94)$$

Pelas hipóteses **(H1)** e **(H2)**, esse sistema possuirá duas órbitas T -periódicas, hiperbólicas do tipo sela $z^\pm(\varphi) = (z^\pm, \varphi)$, com $\varphi \in S^1$.

Fixado $t_0 \in S^1$, definimos a seção de Poincaré

$$\Sigma_0 = U \times \{t_0\}$$

e, associado a Σ_0 , definimos a aplicação de Poincaré

$$\begin{aligned} P_\varepsilon : \Sigma_0 &\longrightarrow \Sigma_0 \\ (q, t_0) &\longmapsto (\phi(t_0 + T; q, t_0, \varepsilon), t_0), \end{aligned} \quad (95)$$

onde, $\phi(t; q, t_0, \varepsilon)$ é a solução do sistema (93) com condição inicial $(q, t_0) \in \Sigma_0$.

Veja que a aplicação P_0 possuirá dois pontos fixos hiperbólicos do tipo sela $z^\pm(t_0)$. Assim, definimos

$$\{(0, \bar{y}, t_0)\} := W^u(z^-(t_0)) \cap (\Sigma \times \{t_0\}) = W^s(z^+(t_0)) \cap (\Sigma \times \{t_0\}).$$

Já vimos que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno a aplicação P_ε continuará tendo dois pontos fixos hiperbólicos do tipo sela $z_\varepsilon^\pm(t_0)$, onde, $z_\varepsilon^\pm(t_0) = z^\pm(t_0)$. Como $z_\varepsilon^\pm(t_0)$ depende de ε de maneira continuamente diferenciável, podemos ainda tomar $\varepsilon > 0$ pequeno de tal maneira que as variedades $W^u(z_\varepsilon^-(t_0))$ e $W^s(z_\varepsilon^+(t_0))$ continuem cruzando $\Sigma \times \{t_0\}$ transversalmente. Assim, definimos

$$\begin{aligned} \{(0, y_\varepsilon^u(t_0), t_0)\} &:= W^u(z_\varepsilon^-(t_0)) \cap (\Sigma \times \{t_0\}), \\ \{(0, y_\varepsilon^s(t_0), t_0)\} &:= W^s(z_\varepsilon^+(t_0)) \cap (\Sigma \times \{t_0\}). \end{aligned}$$

Observe que se $y_\varepsilon^u(t_0) = y_\varepsilon^s(t_0)$, então teremos uma conexão heteroclínica para o sistema (92). Daremos uma condição suficiente afim de que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, exista $t_0 \in S^1$, tal que a igualdade seja verdadeira.

Começaremos fazendo algumas definições. Denotaremos a solução heteroclínica do sistema não perturbado (94) por

$$\Phi(t, t_0) := \begin{cases} \Phi^-(t, t_0) := \phi^-(t; 0, \bar{y}, t_0) & \text{se } t < t_0, \\ \Phi^+(t, t_0) := \phi^+(t; 0, \bar{y}, t_0) & \text{se } t > t_0. \end{cases}$$

Definimos também

$$\begin{aligned} \Phi^-(t, t_0, \varepsilon) &:= \phi^-(t; 0, y_\varepsilon^u(t_0), t_0, \varepsilon), \\ \Phi^+(t, t_0, \varepsilon) &:= \phi^+(t; 0, y_\varepsilon^s(t_0), t_0, \varepsilon). \end{aligned}$$

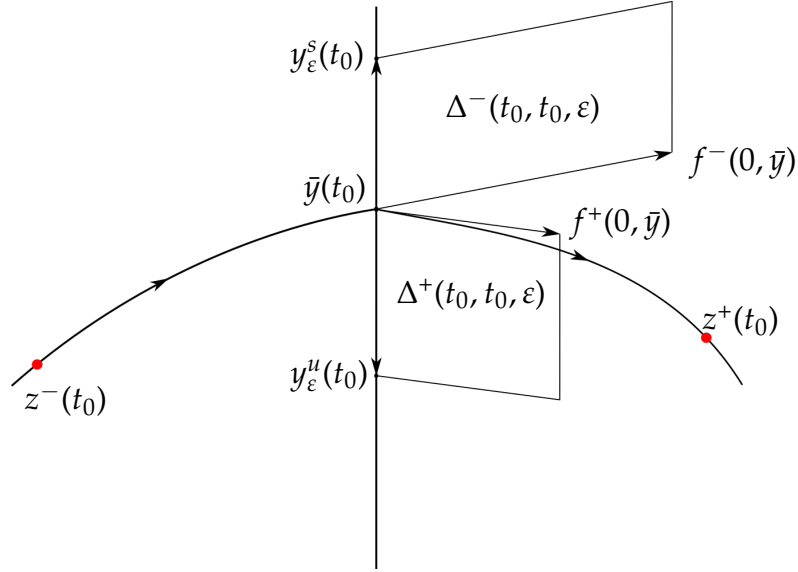


Fig. 18: O paralelogramo definido pelos vetores $f^+(0, \bar{y})$ e $(0, y_\epsilon^s(t_0) - \bar{y})$ tem área igual ao módulo do vetor $\Delta^+(t_0, t_0, \epsilon)$. Comportamento análogo ocorre com o paralelogramo definido pelos vetores $f^-(0, \bar{y})$ e $(0, y_\epsilon^u(t_0) - \bar{y})$.

Se expandirmos $\Phi^\pm(t, t_0, \epsilon)$ em série de Taylor em torno de $\epsilon = 0$ teremos

$$\begin{aligned} \Phi^\pm(t, t_0, \epsilon) &= \Phi^\pm(t, t_0) + \epsilon \underbrace{\frac{\partial \Phi^\pm}{\partial \epsilon}(t, t_0, 0)}_{=: \Phi_1^\pm(t, t_0)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \\ &= \Phi^\pm(t, t_0) + \epsilon \Phi_1^\pm(t, t_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (96)$$

É fácil ver que

$$\dot{\Phi}^\pm(t, t_0, \epsilon) = \dot{\Phi}^\pm(t, t_0) + \epsilon \dot{\Phi}_1^\pm(t, t_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}^\pm(t, t_0, \epsilon) &= f^\pm(\Phi^\pm(t, t_0, \epsilon)) + \epsilon g^\pm(\Phi^\pm(t, t_0, \epsilon), t) \\ &= f^\pm(\Phi^\pm(t, t_0)) + \epsilon (Df^\pm(\Phi^\pm(t, t_0))\Phi_1^\pm(t, t_0) + g(\Phi^\pm(t, t_0), t)) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Comparando as duas últimas igualdades, podemos mostrar que $\Phi_1^\pm(t, t_0)$ satisfaz a equação

$$\dot{\Phi}_1^\pm(t, t_0) = Df^\pm(\Phi^\pm(t, t_0))\Phi_1^\pm(t, t_0) + g(\Phi^\pm(t, t_0), t). \quad (97)$$

Agora, vamos definir os campos de vetores

$$\Delta^+(t, t_0, \varepsilon) = (f^+(\Phi^+(t, t_0)), t - t_0) \wedge (\Phi^+(t, t_0, \varepsilon) - \Phi^+(t, t_0)) \quad (98)$$

$$\Delta^-(t, t_0, \varepsilon) = -(f^-(\Phi^-(t, t_0)), t - t_0) \wedge (\Phi^-(t, t_0) - \Phi^-(t, t_0, \varepsilon)), \quad (99)$$

onde $\wedge$ representa o produto vetorial.

O interessante desses dois vetores é que se tomarmos $t = t_0$, por exemplo em $\Delta^+(t, t_0, \varepsilon)$, obteremos

$$\Delta^+(t_0, t_0, \varepsilon) = (f^+(0, \bar{y}), 0) \wedge (\Phi^+(t_0, t_0, \varepsilon) - \Phi^+(t_0, t_0)) = (f^+(0, \bar{y}), 0) \wedge (0, y_\varepsilon^s(t_0) - \bar{y}, 0).$$

Portanto,

$$\Delta^+(t_0, t_0, \varepsilon) = \|f^+(0, \bar{y})\| |y_\varepsilon^s(t_0) - \bar{y}| \sin(\theta^+) \vec{n}_+, \quad (100)$$

onde θ^+ é o ângulo formado entre $f^+(0, \bar{y})$ e $(0, 1)$ e $\vec{n}_+$ é o vetor unitário, perpendicular aos pontos $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ com direção definida pela regra da mão direita, ou seja, $\vec{n}_+$ é igual ao vetor $(0, 0, 1)$ se $y_\varepsilon^s(t_0) > \bar{y}$ e $\vec{n}_+$ é igual ao vetor $(0, 0, -1)$ se $y_\varepsilon^s(t_0) < \bar{y}$.

De maneira análoga, temos

$$\Delta^-(t_0, t_0, \varepsilon) = \|f^-(0, \bar{y})\| |y_\varepsilon^u(t_0) - \bar{y}| \sin(\theta^-) \vec{n}_-, \quad (101)$$

onde θ^- é o ângulo formado entre $f^-(0, \bar{y})$ e $(0, 1)$ e $\vec{n}_-$ é o vetor unitário, perpendicular aos pontos $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ com direção definida pela regra da mão direita, ou seja, $\vec{n}_-$ é igual ao vetor $(0, 0, 1)$ se $y_\varepsilon^u(t_0) > \bar{y}$ e $\vec{n}_-$ é igual ao vetor $(0, 0, -1)$ se $y_\varepsilon^u(t_0) < \bar{y}$.

Desta maneira se

$$|y_\varepsilon^s(t_0) - \bar{y}| \vec{n}_+ = |y_\varepsilon^u(t_0) - \bar{y}| \vec{n}_-, \quad (102)$$

então, $y_\varepsilon^s(t_0) = y_\varepsilon^u(t_0)$, obtendo assim uma conexão heteroclínica para a equação (92).

Por (100), (101) e (102) podemos dizer que uma condição suficiente para que ocorra um conexão heteroclínica na equação perturbada é

$$\frac{\Delta^+(t_0, t_0, \varepsilon)}{\|f^+(0, \bar{y})\| \sin(\theta^+)} = \frac{\Delta^-(t_0, t_0, \varepsilon)}{\|f^-(0, \bar{y})\| \sin(\theta^-)}.$$

Se $k^\pm = \frac{1}{\|f^\pm(0, \bar{y})\| \sin(\theta^\pm)}$ a igualdade acima poderá ser reescrita da forma

$$k^+ \Delta^+(t_0, t_0, \varepsilon) = k^- \Delta^-(t_0, t_0, \varepsilon).$$

Vamos agora expandir $\Delta^\pm(t_0, t_0, \varepsilon)$ em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$. Começaremos substituindo (96) em (98) e (99) para obtermos

$$\Delta^+(t, t_0, \varepsilon) = \varepsilon \underbrace{f^+(\Phi^+(t, t_0)) \wedge \Phi_1^+(t, t_0)}_{=:\Delta_1^+(t, t_0)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (103)$$

$$\Delta^-(t, t_0, \varepsilon) = -\varepsilon \underbrace{(-f^-(\Phi^-(t, t_0)) \wedge \Phi_1^-(t, t_0))}_{=:\Delta_1^-(t, t_0)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (104)$$

Derivando $\Delta_1^+(t, t_0)$ com relação a t teremos

$$\dot{\Delta}_1^+(t, t_0) = Df^+(\Phi^+(t, t_0))f^+(\Phi^+(t, t_0)) \wedge \Phi_1^+(t, t_0) + f^+(\Phi^+(t, t_0)) \wedge \dot{\Phi}_1^+(t, t_0). \quad (105)$$

Se substituirmos em (105) a equação (97) teremos a seguinte equação diferencial

$$\dot{\Delta}_1^+(t, t_0) = \text{tr}(Df^+(\Phi^+(t, t_0))\Delta_1^+(t, t_0) + f^+(\Phi^+(t, t_0)) \wedge g^+(\Phi^+(t, t_0), t), \quad (106)$$

onde $\text{tr}(\star)$ denota o traço de $\star$.

A solução de (106) será

$$\begin{aligned} \Delta_1^+(t, t_0) &= e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(Df^+(\Phi^+(u, t_0)))du} (\Delta_1^+(t_0, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^u \text{tr}(Df^+(\Phi^+(s, t_0)))ds} f^+(\Phi^+(u, t_0)) \wedge g^+(\Phi^+(u, t_0), t) du. \end{aligned} \quad (107)$$

Fazendo contas análogas para $\Delta_1^-(t, t_0)$ chegaremos na equação

$$\dot{\Delta}_1^-(t, t_0) = -\text{tr}(Df^-(\Phi^-(t, t_0))\Delta_1^-(t, t_0) - f^-(\Phi^-(t, t_0)) \wedge g^-(\Phi^-(t, t_0), t), \quad (108)$$

que tem solução dada por

$$\begin{aligned} \Delta_1^-(t, t_0) &= e^{\int_t^{t_0} \text{tr}(Df^-(\Phi^-(u, t_0)))du} (\Delta_1^-(t_0, t_0) + \\ &+ \int_t^{t_0} e^{\int_u^{t_0} \text{tr}(Df^-(\Phi^-(s, t_0)))ds} f^-(\Phi^-(u, t_0)) \wedge g^-(\Phi^-(u, t_0), t) du. \end{aligned} \quad (109)$$

Por conta de $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f^\pm(\Phi^\pm(t, t_0)) = 0$ e $\Phi_1^\pm(t, t_0)$ serem limitadas, temos $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Delta_1^\pm(t, t_0) = 0$. Esse fato junto com as soluções (107) e (109) obtemos

$$\Delta_1^+(t_0, t_0) = - \int_{t_0}^\infty e^{\int_{t_0}^u \text{tr}(Df^+(\Phi^+(s, t_0)))ds} f^+(\Phi^+(u, t_0)) \wedge g^+(\Phi^+(u, t_0), t) du,$$

e

$$\Delta_1^-(t_0, t_0) = - \int_{-\infty}^{t_0} e^{\int_u^{t_0} \text{tr}(Df^-(\Phi^-(s, t_0)))ds} f^-(\Phi^-(u, t_0)) \wedge g^-(\Phi^-(u, t_0), t) du.$$

Vamos definir a função de Melnikov por

$$\begin{aligned} M(t_0) &:= k^+ \Delta_1^+(t_0, t_0) + k^- \Delta_1^-(t_0, t_0) = \\ &= -k^+ \int_{t_0}^{\infty} e^{\int_{t_0}^u \text{tr}(Df^+(\Phi^+(s, t_0)))ds} f^+(\Phi^+(u, t_0)) \wedge g^+(\Phi^+(u, t_0), t) du - \\ &\quad -k^- \int_{-\infty}^{t_0} e^{\int_u^{t_0} \text{tr}(Df^-(\Phi^-(s, t_0)))ds} f^-(\Phi^-(u, t_0)) \wedge g^-(\Phi^-(u, t_0), t) du. \end{aligned} \quad (110)$$

Assim, se

$$D(t_0, \varepsilon) := k^+ \Delta^+(t_0, t_0, \varepsilon) - k^- \Delta^-(t_0, t_0, \varepsilon) = \varepsilon M(t_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (111)$$

e se para cada $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente existir um zero simple $t_0 \in S^1$ da função $D(t_0, \varepsilon) = 0$, então $W^u(z_\varepsilon^-(t_0))$ e $W^s(z_\varepsilon^+(t_0))$ se encontram transversalmente num ponto $(0, y_\varepsilon(t_0))$, onde $y_\varepsilon(t_0) := y_\varepsilon^s(t_0) = y_\varepsilon^u(t_0)$. Portanto, é suficiente mostrarmos que $D(t_0, \varepsilon) = 0$.

Teorema 5.1. *Suponha que $M(t_0)$ possua um zero simples $\bar{t}_0 \in S^1$. Então, existirá $\varepsilon_0 > 0$, tal que, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ existe $\bar{t}_0(\varepsilon) = t_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ zero simples de $D(t_0, \varepsilon)$.*

Demonstração: Primeiro, definimos $\bar{D}(t_0, \varepsilon) := M(t_0) + \mathcal{O}(\varepsilon)$, onde $D(t_0, \varepsilon) = \varepsilon \cdot \bar{D}(t_0, \varepsilon)$. Veja que $\bar{D}(\bar{t}_0, 0) = 0$ e $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t_0}(\bar{t}_0, 0) = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t_0}(\bar{t}_0) \neq 0$. Pelo Teorema da função implícita, existe $\varepsilon_0 > 0$, onde $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, existe $\bar{t}_0(\varepsilon) = t_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$, tal que, $\bar{t}_0(\varepsilon)$ zero simples de $\bar{D}(t_0, \varepsilon)$. Portanto, $\bar{t}_0(\varepsilon)$ também é zero simple de $D(t_0, \varepsilon)$ $\square$

6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Começamos este trabalho generalizando o método de Melnikov para sistemas descontínuos com perturbações não Hamiltonianas, adaptando as técnicas apresentadas em [1].

Para nos certificarmos da importância do método trabalhado, apresentamos o modelo “Rocking block”. Para esse modelo derivamos as suas equações de movimento e mostramos que satisfaz as hipóteses do teorema (4.8). Depois o perturbamos por uma função na forma de uma soma finita de cossenos de período $\frac{2\pi}{j}$ com $1 \leq j \leq k$ e $k \in \mathbb{N}$ e calculamos a função de Melnikov subhamônica (62). Mostramos também que se dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $\text{mdc}(m, n) = 1$ e $k = m$ o sistema perturbado apresenta, pelo menos, $2m$ (m, n) -órbitas periódicas. Talvez aqui seja interessante futuramente estudarmos o que ocorre quando $m \neq k$ para que tenhamos uma descrição completa da persistência das (m, n) -órbitas periódicas com relação ao parâmetro k .

Por fim, mostramos que no caso do estudo das conexões heteroclínicas podemos tomar os campos a serem perturbados tanto Hamiltonianos quanto não Hamiltonianos. Para este último adequamos as idéias apresentadas no contexto contínuo em [4]. Futuramente iremos adaptar também a função de Melnikov subharmonica para o caso em que o sistema dinâmico não perturbado possa ser não Hamiltoniano.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A.Granados, S.J.Hogan, T.M.Seara. *The Melnikov Method and Subharmonic Orbits in a Piecewise-Smooth System*. SIAM J. Applied Dynamical Systems. v.11, n.3, p.801-830, 2012.
- [2] A. F. Filippov, *Differential Equation with Discontinuous Righthand Sides*, Kluwer (1988).
- [3] G.W.Housner. *The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes*. Bulletin of the Seismological of America. v.53, n.2,p.403-417, Fev /1963
- [4] J.Guckenheiner, P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Field*. Nova Iorque, Springer-Verlag.
- [5] J. Palis Jr, W. de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. 1.ed. New York, Heidelberg, Berlin. Springer-Verlag, 1982.
- [6] J.Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro, IMPA. Projeto Euclides, 1979.
- [7] L. Perko. *Differential Equation and Dynamical Systems*. 3.ed. Nova Iorque: Springer - Verlag, 2001(Text in Applied Mathematics).
- [8] M. di Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys, P. Kowalczyk. *Piecewise-smooth Dynamical Systems - Theory and Applications* 1. ed. London: Springer, 2008 (Text in Applied Mathematics).