Universidade Federal do ABC

Tatiana Sousa Paim

ESTABILIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da CAPES

Santo André, 2018

Universidade Federal do ABC

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Tatiana Sousa Paim

ESTABILIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação
defendida pela aluna Tatiana Sousa Paim,
e orientada pelo Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva.

Santo André, 2018

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Sousa Paim, Tatiana
Estabilidade de Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante / Tatiana Sousa Paim. — 2018.

86 fls.

Orientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2018.

1. Geometria diferencial. 2. Hipersuperfícies. 3. Curvatura média constante. 4. Estabilidade. I. da Silva, Márcio Fabiano. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 18 **de** abril **de 20**18**.**

Assinatura do autor: Tatiana Souza Pavin

Assinatura do orientador: Márcio Fabiano da Silva

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
ppg.matematica@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Tatiana Sousa Paim, realizada em 28 de fevereiro de 2018:

Márcio Fabiano da Silva

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Fabiano Gustavo Braga Brito** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Rosa Chaves

Prof.(a) Dr.(a) **Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves** (Universidade de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Sinue Dayan Barbero Lodovici** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Alexandre Lymberopoulos** (Universidade de São Paulo) – Membro Suplente

"Eu não tenho nenhuma receita particular [para desenvolver novas teorias]. É como estar perdido em uma selva e tentar usar todo o conhecimento que você pode reunir para criar novos truques e, com alguma sorte, você pode encontrar uma saída."

Maryam Mirzakhani

RESUMO

Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de uma variedade n-dimensional orientável M no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. A condição que x tem curvatura média constante não-nula $H = H_0$ é conhecida ser equivalente ao fato que x é um ponto crítico de um problema variacional. Um procedimento padrão de encontrar pontos críticos de tais problemas é, análogo ao método dos multiplicadores de Lagrange, olhar para os pontos críticos de um certo operador definido em termos dos funcionais variacionais. Resulta dessas considerações que a definição de estabilidade para imersões com curvatura média constante não-nula deve exigir que a segunda variação para tal operador seja não-negativa, para variações com suporte compacto que satisfaçam a condição de média nula. Assim, o objetivo desse trabalho é estudar as imersões estáveis compactas com curvatura média constante não-nula — resultado apresentado como o Teorema de Barbosa–Carmo.

Palavras-chave: Geometria diferencial, hipersuperfícies, curvatura média, curvatura média constante, estabilidade

ABSTRACT

Let $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ be an immersion of an orientable n-dimensional manifold M into the euclidian space $\mathbb{R}^{n+1}$. The condition that x has nonzero constant mean curvature $H = H_0$ is known to be equivalent to the fact that x is a critical point of a variational problem. A standard proceduce of finding the critical points of such a problem is, in analogy to the Lagrange multipliers method, to look for the critical of points of an operator defined in terms of variational functionals. It follows from the above considerations that the definition of stability for immersions with nonzero constant mean curvature should require that such operator be nonnegative, for compactly supported variations that satisfy the zero mean condition. Thus, the objective of this work is to study the compact stable immersions with nonzero constant mean curvature — result presented as the Barbosa and Carmo's theorem.

Keywords: Differential geometry, hypersurfaces, mean curvature, constant mean curvature, stability

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Os pré-requisitos à leitura do texto são:

1. Conhecimento de elementos essenciais de Geometria Diferencial das superfícies. Os Capítulos 2 (2.1 e 2.4), 3 (3.2 e 3.3) e 4 (4.1 e 4.6) do livro de Manfredo do Carmo [dC1] são suficientes.

2. Uma certa familiaridade com as definições básicas de variedades diferenciais e formas, além de conceitos elementares e resultados úteis de Geometria Riemanniana. Se o leitor for familiar com tais noções, poderá omitir inteiramente o Capítulo 1 do texto.

Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de uma variedade n-dimensional orientável M^n no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. A condição que x tem curvatura média constante não-nula $H = H_0$ é conhecida ser equivalente ao fato que x é um ponto crítico de um problema variacional (cf. Teorema 2.1.8). Mais precisamente, x tem curvatura média constante não-nula se, e somente se, x é um ponto crítico do funcional área $A(t)$ para quaisquer variações x_t de x com suporte compacto, onde $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $x_0 = x$, que deixam constante o volume $V(t)$ de x_t, isto é, $V(t) = V(0)$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Problemas variacionais deste tipo são conhecidos como problemas isoperimétricos. Um procedimento padrão para encontrar pontos críticos de tais problemas é, em analogia ao método dos multiplicadores de Lagrange, olhar para os pontos críticos do operador de estabilidade definido por

$$J(t) = A(t) + \lambda V(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R} ,$$

para variações x_t com suporte compacto, sem restrições ao volume. Neste caso, quando $\lambda = nH_0$, os pontos críticos para ambos os problemas são os mesmos (cf. Teorema 2.1.9).

Quando se trata da segunda variação, no entanto, os dois problemas não são mais equivalentes. Isto foi apontado na literatura clássica de Cálculo de Variações (Bolza prova em [Bol], págs. 472–473). Prova-se (Teorema 2.1.14) que a segunda variação $A''(0)$, para variações com suporte compacto que deixam o volume $V(t)$ constante, é não negativa se, e somente se, $J''(0)$ é também não negativa, para variações com suporte compacto que satisfazem a seguinte condição adicional

$$\int_M f dM = 0 , \tag{0.1}$$

onde f é a componente normal do campo variacional de x_t.

Resulta dessas considerações que a definição de estabilidade para imersões $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante não-nula determina que a segunda variação $J''(0)$ seja não-negativa, para variações com suporte compacto e que satisfaçam a condição (0.1) de média nula (Corolário 2.1.15). Com essa definição, verificamos que as n-esferas são estáveis (Teorema 2.2.5)

Entretanto, caso definíssemos a estabilidade de uma imersão sob a única condição de que $J''(0) \geq 0$ para variações de suporte compacto, então as esferas não seriam estáveis (Observação 2.2.6), e o limite de estabilidade de um cilindro circular seria a metade do valor esperado (cf. Exemplo 2.7 de [BdC]).

Surge, naturalmente, a questão: *quais são as imersões estáveis completas $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante não-nula?* Para o caso em que M^n é compacta, o artigo de J. Lucas Barbosa e M. do Carmo [BdC] dá uma resposta:

Teorema (Barbosa–do Carmo)**.** *Seja M^n compacta, orientável, e seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante não-nula. Então x é estável se, e somente se, $x(M) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ é uma esfera redonda $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

No caso em que $n = 2$, o teorema acima está relacionado à questão levantada por Heinz Hopf, em 1951, que conjectura se a esfera é a única superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ que tem curvatura média constante (cf. [Hop]). O Teorema de Barbosa–do Carmo, então, diz que uma superfície não esférica compacta imersa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante não é estável, o que, em termos físicos, significa que não pode ser produzida experimentalmente. A partir disso, exemplos de imersões não esféricas $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 2$, com curvatura média constante foram encontrados por Hsiang, Teng e Yu em [HTY] e, pelo teorema acima, foram classificados como hipersuperfícies não estáveis.

O texto está organizado como se segue. O leitor deve interpretar o Capítulo 1 como uma breve revisão de conceitos da geometria intrínseca das subvariedades e uma maneira de se familiarizar com a notação e resultados que servem de base para o capítulo seguinte. O Capítulo 2 condensa todo o nosso estudo de estabilidade em hipersuperfícies com curvatura média constante não-nula. A Seção 2.1 apresenta os fatos básicos dos problemas variacionais mencionados acima, bem como as provas dos resultados que seguem daí. É finalizada com a definição da noção de estabilidade de uma imersão. Por fim, reservamos as Seções 2.2 e 2.3 para apresentar a prova completa do Teorema de Barbosa–do Carmo, passando pelo estudo do espectro do Laplaciano de uma função, alguns lemas que serão usados na prova e um resultado sobre hipersuperfícies totalmente umbílicas compactas.

1 PRELIMINARES

Este capítulo contém uma breve revisão de conceitos de Geometria Diferencial e Riemanniana para o estudo de hipersuperfícies. A ideia principal aqui é estabelecer notações e dar referência aos resultados que embasarão o estudo do próximo capítulo. A maioria dos conceitos apresentados aqui encontram-se nos livros [dC2], [Lee] e [Spi4].

1.1 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Muitas importantes aplicações de variedades (possivelmente a maioria) envolvem o cálculo. Aplicações à geometria, por exemplo, envolvem o estudo de propriedades como volume e curvatura. Tipicamente, os volumes são calculados por integração, e as curvaturas são calculadas atráves de fórmulas envolvendo derivadas de segunda ordem. Portanto, para estender essas ideias às variedades, devemos obter algum meio de dar sentido à diferenciação e integração em uma variedade. Nessa seção, introduziremos a noção de variedades topológicas, o tipo mais básico de variedades.

Definição 1.1.1. Uma *variedade topológica* de dimensão n é um espaço topológico M que possui as seguintes propriedades:

1. *M é um espaço de Hausdorff:* para cada par de pontos $p, q \in M$, existem subconjuntos abertos disjuntos $U, V \subset M$ tais que $p \in U$ e $q \in V$.

2. *M satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade:* existe uma base enumerável para a topologia de M.

3. *M é localmente euclidiano de dimensão n:* todo ponto de M tem uma vizinhança que é homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

A propriedade 3 significa, mais especificamente, que para cada $p \in M$, podemos encontrar: um aberto $U \subset M$ contendo p e um aberto $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tais que $\varphi : U \to \widetilde{U}$ é um homeomorfismo.

Exigir que variedades compartilhem das propriedades acima nos ajuda a garantir que as variedades se comportem da maneira que esperamos a partir da experiência com espaços euclidianos. Uma discussão mais detalhada deste fato pode ser encontrada em [Lee] (p. 1–4)

Definição 1.1.2. Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é uma variedade topológica[1] M com uma família de aplicações bijetoras $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:

1. $\bigcup\limits_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$.

2. Para todo par α, β, com $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ e $\varphi_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ são diferenciáveis.

3. A família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é maximal relativamente às condições 1 e 2.

Seja M uma variedade diferenciável com dimensão n. O par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ é chamado uma *carta coordenada* (ou *sistema de coordenadas*) e a aplicação φ_α é chamada uma *parametrização* de M em p, onde $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$. Desse modo, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma *vizinhança coordenada* em p. Além disso, as funções componentes $(x_1, \ldots, x_n)$ de φ_α^{-1}, definidas por

$$\varphi_\alpha^{-1}(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p)) \; ,$$

são chamadas *coordenadas locais* em $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Uma família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ satisfazendo as condições 1 e 2 é chamada uma *estrutura diferenciável* em M.

O exemplo mais trivial de variedade diferenciável é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, com a estrutura diferenciável dada por $\mathbb{R}^n$ e pela aplicação identidade.

Definição 1.1.3. Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é *orientável* se admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tal que

(i) para todo par α, β, com $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a aplicação diferencial da mudança de coordenadas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.

Caso contrário, dizemos que M é *não-orientável*. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo (i) é chamada *orientação* de M e então M é *orientada*. Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem (i) *determinam a mesma orientação* se a união delas ainda satisfaz (i).

Convém explorar um pouco mais as consequências da Definição 1.1.2. De agora em diante, quando escrevermos uma variedade M^n, o índice superior n indicará a dimensão de M. A seguir, estenderemos a noção de diferenciabilidade às aplicações entre variedades.

1 É possível definir uma variedade diferenciável usando apenas a hipótese de M ser um conjunto arbitrário e, daí, extrair de M uma topologia que segue a Definição 1.1.1, de variedade topológica. Porém, fizemos a escolha apresentada para enfatizar que toda variedade diferenciável que tratarmos aqui é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Definição 1.1.4. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação $f : M \to N$ é *diferenciável em* $p \in M$ se, dada uma parametrização $\psi : V \subset \mathbb{R}^n \to N$ em $f(p)$, existe uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ tal que $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$ e a aplicação

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $\varphi^{-1}(p)$. Denotamos por $\mathcal{C}^\infty(M)$ o *conjunto das funções de M diferenciáveis em p*.

Definição 1.1.5. Sejam M uma variedade diferenciável e um ponto $p \in M$. Uma aplicação linear $X_p : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ é chamada uma *derivação em p* se satisfaz (a regra do produto)

$$X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f) \quad , \tag{1.1}$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. O conjunto de todas as derivações de $\mathcal{C}^\infty(M)$ em p é um espaço vetorial chamado *espaço tangente* a M em p, e é denotado por T_pM. Um elemento de T_pM é chamado um *vetor tangente* em p, e frequentemente omitiremos o ponto p em X_p, escrevendo apenas $X \in T_pM$.

Se M é uma variedade diferenciável n-dimensional, para todo $p \in M$, o conjunto T_pM, com as operações usuais de funções,

$$\begin{aligned} (X+Y)f &= Xf + Yf \ , \\ (cX)f &= cX(f) \ , \end{aligned}$$

forma um espaço vetorial de dimensão n. Além disso, a escolha de uma parametrização $\varphi : U \to M$, com funções coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, determina uma *base associada*

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p , \ \ldots \ , \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\}$$

para T_pM, cuja estrutura linear em T_pM assim definida não depende da parametrização φ.

Definição 1.1.6. Seja M uma variedade diferenciável. Uma *curva (diferenciável)* em M é uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$. Dado $p \in M$, suponha que $\alpha(0) = p$. O *vetor tangente à curva α* em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \alpha) \quad ,$$

para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Um *vetor tangente em p* é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$.

Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = f \circ \alpha$. A aplicação

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$

dada por $df_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α. Além disso, df_p é chamada *diferencial* de f em p.

Nas mesmas condições acima, dizemos que uma aplicação $f : M_1 \to M_2$ é um *difeomorfismo* se ela é diferenciável, bijetora, e a sua inversa f^{-1} é diferenciável. A aplicação f é um *difeomorfismo local* em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $f(p)$ tais que $f : U \to V$ é um difeomorfismo.

Definição 1.1.7. Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ é uma *imersão* se a diferencial $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ é injetora para todo $p \in M$. Se, além disto, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset N$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que f é um *mergulho*. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma *subvariedade* de N.

Observe que se $f : M^m \to N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$. A diferença $n - m$ é chamada a *codimensão* da imersão f.

Na maior parte das questões puramente locais de geometria é indiferente tratar com imersões ou mergulhos. Isto provém da seguinte proposição (cuja demonstração encontra-se em [dC2]), que mostra que toda imersão local (em certo sentido) é um mergulho.

Proposição 1.1.8. *Seja $f : M^m \to N^n$, com $m \leq n$, uma imersão da variedade M na variedade N. Para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que a restrição $f|_V : V \to N$ é um mergulho.*

Para qualquer variedade diferenciável M, definimos o *fibrado tangente* de M, denotado por TM, pela união disjunta dos espaços tangentes em todos os pontos de M,

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM \,.$$

Escrevemos um elemento desta união disjunta como um par ordenado (p, X), onde $p \in M$ e $X \in T_pM$. O fibrado tangente, munido de uma aplicação projeção $\pi : TM \to M$, definida por $\pi(p, X) = p$, fornece uma estrutura diferenciável (de dimensão $2n$), sendo portanto um exemplo não-trivial e bastante importante de variedade diferenciável.

Definição 1.1.9. Um *campo vetorial* X em uma variedade diferenciável M é uma *seção* da aplicação $\pi : TM \to M$. Mais precisamente, um campo vetorial X é uma aplicação contínua $X : M \to TM$, que associa $p \mapsto X_p$, com a propriedade

$$\pi \circ X = Id_M ,$$

ou equivalentemente, $X_p \in T_pM$, para todo $p \in M$. Um campo vetorial é *diferenciável* se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável. Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o *conjunto de todos os campos vetoriais em* M.

Em termos de coordenadas, considerando uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$ é possível escrever um campo $X : M \to TM$ por

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p , \tag{1.2}$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p\}$ é a base associada a φ, com $i = 1, \ldots, n$. Desse modo, X é diferenciável se e só se as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e, portanto, para qualquer) parametrização.

Às vezes é conveniente utilizar a ideia sugerida pela expressão (1.2) e pensar em um campo vetorial como uma aplicação $X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{F}$, do conjunto $\mathcal{C}^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em M no conjunto $\mathcal{F}$ das funções em M, definida do seguinte modo

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) , \tag{1.3}$$

onde f indica, por abuso de notação, a expressão de f na parametrização φ. Pode-se verificar que a função Xf obtida em (1.3) não depende da escolha da parametrização φ, e que X é diferenciável se e só se $X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, isto é, $Xf \in \mathcal{C}^\infty(M)$ para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Em outras palavras, um campo vetorial diferenciável $X \in \mathcal{X}(M)$ define uma aplicação de $\mathcal{C}^\infty(M)$ em si mesmo dada por $f \mapsto Xf$, que é linear sobre $\mathbb{R}$, e satisfaz a regra do produto (1.1) em derivações para campos vetoriais:

$$X(fg) = fX(g) + gX(f) \quad , \tag{1.4}$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Mostra-se que derivações de $\mathcal{C}^\infty(M)$ podem ser identificadas com campos vetoriais diferenciáveis (cf. Proposition 4.7, [Lee]).

A interpretação do campo diferenciável X com um operador em $\mathcal{C}^\infty(M)$ permite-nos considerar os iterados de X. Por exemplo, se X e Y são campos diferenciáveis em M e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, podemos aplicar X a f e obter outra função diferenciável $X(f)$. Aplicando

Y a essa função, obtemos a função $Y(Xf)$, que será ainda diferenciável. Em geral, a operação $f \mapsto Y(Xf)$ não satisfaz a regra do produto (1.4) e portanto não pode ser um campo vetorial.

Entretanto, podemos aplicar os mesmos campos vetorias em ordem oposta obtendo uma função $Y(Xf)$. Aplicando esses dois operadores para f e subtraindo, obtemos um operador $[X,Y] : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, chamado o *colchete de Lie* dos campos X e Y, definido por

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \ . \tag{1.5}$$

Lema 1.1.10. *O colchete de Lie de quaisquer dois pares de campos vetoriais diferenciáveis é um campo vetorial diferenciável.*

Demonstração. Basta mostrar que $[X,Y]$ é uma derivação de $\mathcal{C}^\infty(M)$. Dados $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, temos

$$\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\
&= X(fY(g) + gY(f)) - Y(fX(g) + gX(f)) \\
&= fX(Yg) + Y(g)X(f) + gX(Yf) + Y(f)X(g) \\
&\quad -fY(Xg) - X(g)Y(f) - gY(Xf) - X(f)Y(g) \\
&= fX(Yg) - fY(Xg) + gX(Yf) - gY(Xf) \\
&= f[X,Y]g + g[X,Y]f \ .
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.1.11 (Propriedades dos colchetes)**.** *Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M, a, b são números reais, e f, g são funções diferenciáveis, então valem as seguintes identidades:*

(i) $[X,Y] = -[Y,X]$ *(anticomutatividade),*

(ii) $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$, *(bilinearidade)*
$[X, aY + bZ] = a[X,Y] + b[X,Z]$

(iii) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ *(identidade de Jacobi),*

(iv) $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Demonstração. Os ítens (i) e (ii) seguem da definição de colchete e da expressão dos campos em coordenadas, como em (1.3). Para demonstrar o ítem (iii), note que, por um lado,

$$[[X,Y],Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y] &= [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]] \\
&= XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XZY \\
&= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX\,.
\end{aligned}$$

Finalmente, para demonstrar (iv), calculamos

$$\begin{aligned}
[fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\
&= fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X \\
&= fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X\,.
\end{aligned}$$

□

Dada uma variedade diferenciável M, dizemos que uma família de abertos $V_\alpha \subset M$ com $\bigcup_\alpha V_\alpha = M$ *localmente finita* se todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U tal que $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices. O *suporte* de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é o fecho do conjunto dos pontos onde f é diferente de zero.

Definição 1.1.12. Dizemos que uma família f_α de funções diferenciáveis $f_\alpha : M \to \mathbb{R}$ é uma *partição diferenciável da unidade* se:

1. Para todo α, temos que $f_\alpha \geq 0$ e o suporte de f_α está contido em uma vizinhança coordenada $V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$ de uma estrutura diferenciável $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ de M.
2. A família $\{V_\alpha\}$ é localmente finita.
3. $\sum\limits_\alpha f_\alpha(p) = 1$, para todo $p \in M$ (esta condição faz sentido, pois em cada p, $f_\alpha(p) \neq 0$ para apenas um número finito de índices).

Costuma-se dizer que a partição $\{f_\alpha\}$ da unidade está *subordinada à cobertura* $\{V_\alpha\}$.

1.2 MÉTRICA RIEMANNIANA

Agora, em uma variedade diferenciável, introduziremos em cada ponto uma maneira de medir comprimentos de vetores tangentes que varia diferenciavelmente com o ponto.

Definição 1.2.1. Uma *métrica Riemanniana* (ou *estrutura Riemanniana*) g em uma variedade diferenciável M é uma família diferenciável de produtos internos no espaço tangente de M.

Mais precisamente, g associa a cada ponto $p \in M$ uma uma forma bilinear simétrica positiva definida em T_pM,

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} ,$$

e a condição de diferenciabilidade em g se refere ao fato que a função

$$p \in M \to g_p(X_p, Y_p) \in \mathbb{R}$$

deve ser localmente diferenciável para quaisquer campos vetoriais diferenciáveis $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Uma *variedade Riemanniana* é um par (M, g), onde M é uma variedade diferenciável e g é uma métrica Riemanniana em M.

Faremos uso da notação $\langle X, Y\rangle_p$ para indicar o número $g_p(X, Y)$ para quaisquer $X, Y \in T_pM$. Também omitiremos o índice p em $\langle\ ,\ \rangle_p$ sempre que não houver possibilidade de confusão.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Se $(U, \varphi = (x_1, \ldots , x_n))$ é uma carta de M, uma expressão para g pode ser dada como se segue. Sejam $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots , \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ os campos vetoriais coordenados, e sejam $\{dx_1, \ldots , dx_n\}$ as suas respectivas 1-formas duais. Para quaisquer $p \in M$ e $u, v \in T_pM$, escrevemos

$$u = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p \qquad \text{e} \qquad v = \sum_j u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p .$$

Então, pela bilinearidade de g,

$$g_p(u, v) = \sum_{i,j} u_i u_j g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} g_{ij}(p) u_i u_j ,$$

onde denotamos as funções

$$g_{ij}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) ,$$

e dizemos que são a *expressão da métrica Riemanniana* (ou "os g_{ij} da métrica") no sistema de coordenadas φ. Esta definição não depende da escolha do sistema de coordenadas, e $g_{ij} = g_{ji}$.

Agora vamos estabelecer uma noção de equivalência para a estrutura acima.

Definição 1.2.2. Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ é chamado uma *isometria* se

$$\langle u, v\rangle_p = \left\langle df_p(u), df_p(v)\right\rangle_{f(p)} \tag{1.6}$$

para todo $p \in M$, e $u, v \in T_pM$.

Definição 1.2.3. Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma *isometria local* em $p \in M$ é uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ tal que existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que

$f : U \to f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo (1.6). É usual dizer que a variedade Riemanniana M é *localmente isométrica* à variedade Riemanniana N se para todo p em M existe uma vizinhança U de p em M e uma isometria local $f : U \to f(U) \subset N$.

A seguir, exibimos um exemplo não trivial de isometria local.

Exemplo 1.2.4. *Variedades imersas.* Seja $f : M^n \to N^{n+k}$ uma imersão. Se N tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$ para $u, v \in T_pM$. Como a diferencial df_p é injetora, o produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ é positivo definido. A métrica de M é chamada a *métrica induzida* por f, e f é uma *imersão isométrica*.

Um caso particular importante surge quando temos uma função diferenciável $h : M^{n+k} \to N^k$ e $q \in N$ é um valor regular de h, ou seja, quando $dh_p : T_pM \to T_h(p)N$ é sobrejetora para todo $p \in h^{-1}(q)$. Sabemos então que $h^{-1}(q) \subset M$ é uma subvariedade de M de dimensão n. Logo, podemos dar-lhe a métrica induzida pela inclusão.

Exemplo 1.2.5. *Esfera unitária.* Seja $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$. Então 0 é valor regular de h e $h^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} = \mathbb{S}^{n-1}$ é a *esfera unitária* do $\mathbb{R}^n$. A métrica induzida por $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{S}^{n-1}$ é chamada a *métrica canônica* de $\mathbb{S}^{n-1}$.

Outra importante ferramenta em variedades Riemannianas são os referenciais ortonormais. Se (M, g) é uma variedade Riemanniana n-dimensional, definimos um *referencial ortonormal* para M sendo um referencial local $\{e_1, \dots, e_n\}$ definido em algum aberto $U \subset M$ tal que $\{e_1|_p, \dots, e_n|_p\}$ é uma base ortonormal para T_pM em cada ponto $p \in U$, ou equivalentemente, tal que $\langle e_i, e_j\rangle_g = \delta_{ij}$.

A proposição a seguir garante a existência para métricas Riemannianas em uma variedade diferenciável qualquer (Hausdorff e com base enumerável). Esse resultado será útil para os cálculos em variedades que faremos no capítulo 2.

Proposição 1.2.6. *Toda variedade diferenciável M possui uma métrica Riemanniana.*

Demonstração. Seja $\bigcup_\alpha U_\alpha$ uma cobertura de M por cartas coordenadas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Para cada α, considere uma métrica Riemanniana g_α em U_α cuja expressão local $(g_\alpha)_{ij}$ é a matriz identidade. Seja $\{f_\alpha\}$ uma partição diferenciável da unidade de M subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$, e defina

$$g = \sum_\alpha f_\alpha g_\alpha\ .$$

Como a família de suportes de f_α é localmente finita, a soma acima é localmente finita. Logo g está bem definida, é diferenciável, bilinear e simétrica em cada ponto. Como $f_\alpha \geq 0$ para todo α e $\sum_\alpha f_\alpha = 1$, segue que g é positiva definida, e portanto g é uma métrica Riemanniana em M. $\square$

Para concluir essa seção, mostraremos como a métrica Riemanniana permite definir uma noção de volume em uma variedade Riemanniana orientada M^n.

Sejam $p \in M$ e uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$, com $p \in \varphi(U)$, na orientação de M (dizemos que tal parametrização é positiva). Considere uma base ortonormal positiva $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em T_pM e escreva

$$X_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

na base $\{e_i\}$ por $X_i(p) = \sum_{ij} a_{ij} e_j$. Então

$$g_{ik}(p) = \langle X_i, X_k \rangle(p) = \sum_{jl} a_{ij} a_{kl} \langle e_j, e_l \rangle = \sum_j a_{ij} a_{kj} \ .$$

Como o volume $\mathrm{vol}(X_1(p), \ldots, X_n(p))$ do paralelepípedo formado pelos vetores $X_1(p), \ldots, X_n(p)$ em T_pM é igual a $\mathrm{vol}(e_1, \ldots, e_n) = 1$ multiplicado pelo determinante da matriz (a_{ij}), temos que

$$\mathrm{vol}(X_1(p), \ldots, X_n(p)) = \det(a_{ij}) = \sqrt{\det(g_{ij})}(p) \ .$$

Observe que, se $\psi : V \subset \mathbb{R}^n \to M$ é uma outra parametrização positiva em torno de p, com $Y_i(p) = \dfrac{\partial}{\partial y_i}(p)$ e $h_{ij}(p) = \langle Y_i, Y_j \rangle(p)$, teremos

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(g_{ij})}(p) &= \mathrm{vol}(X_1(p), \ldots, X_n(p)) \\ &= J \mathrm{vol}(Y_1(p), \ldots, Y_n(p)) \\ &= J \sqrt{\det(h_{ij})}(p) \ , \end{aligned}$$

onde

$$J = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \det\left(d\psi^{-1} \circ d\varphi\right)(p) > 0$$

é o determinante da diferencial da mudança de coordenadas.

Seja agora $R \subset M$ uma região (conjunto aberto e conexo) cujo fecho é compacto. Nesse caso, dizemos que R é *(uma variedade) relativamente compacta*. Assumimos que R está contida em uma vizinhança coordenada $\varphi(U)$ de uma parametrização $\varphi : U \to M$ positiva, e que a fronteira de $\varphi^{-1}(R) \subset U$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$ (note que a noção de medida nula em $\mathbb{R}^n$ é invariante por difeomorfismos). Definiremos o *volume* $\mathrm{vol}(R)$ em R pela integral em $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{vol}(R) = \int_{\varphi^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \ldots dx_n \ . \tag{1.7}$$

A expressão acima está bem definida. De fato, se o conjunto R está contido em outra vizinhança coordenada $\psi(V)$ de uma parametrização positiva $\psi : V \subset \mathbb{R}^n \to M$, teremos com as notações acima e pela fórmula de mudança de variáveis em integrais múltiplas (cf. p. 386 de [Lee]),

$$\int_{\varphi^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})}dx_1 \dots dx_n = \int_{\psi^{-1}(R)} \sqrt{\det(h_{ij})}dy_1 \dots dy_n = \mathrm{vol}(R) ,$$

o que mostra que a definição (1.7) não depende do sistema de coordenadas escolhido (aqui, usamos a hipótese da orientabilidade de M, para evitar que $\mathrm{vol}(R)$ troque de sinal).

Observação 1.2.7. Note que o integrando de (1.7) é uma forma diferencial positiva de grau n, chamado usualmente a *forma volume* v de M. Para definir o volume da região compacta R, que não está contida em alguma vizinhança coordenada basta considerar uma partição $\{\xi_i\}$ da unidade subordinada a uma cobertura (finita) de R por vizinhanças coordenadas $\varphi(U_i)$ e tomar

$$\mathrm{vol}(R) = \sum_i \int_{\varphi^{-1}(R)} \xi_i v .$$

A expressão acima não depende da escolha da partição da unidade.

Observação 1.2.8. Pelo que acabamos de ver, basta a existência de uma forma diferencial positiva de grau n (elemento de volume) para que se possa definir uma noção de volume em uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana é apenas uma das maneiras pela qual se obtém um elemento de volume.

1.3 CONEXÃO AFIM; CONEXÃO RIEMANNIANA

Embora possamos munir uma variedade M com uma noção de derivada de aplicações diferenciáveis, não há uma maneira canônica de estabelecer uma diferenciação para campos vetoriais em M. Resolvemos esse problema considerando todas as formas possíveis de definir derivadas de campos vetoriais. Uma escolha desse tipo é chamada de conexão. O nome segue do fato de que, pelo menos ao longo de uma dada curva, uma conexão fornece uma maneira de identificar espaços tangentes de M em pontos diferentes; esta é a ideia do transporte paralelo ao longo da curva. A principal consequência da teoria das conexões para a geometria Riemanniana é que uma métrica Riemanniana em M determina unicamente uma conexão em M, chamada conexão Levi–Civita.

Definição 1.3.1. Uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

denotada por $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ e que tem as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, *(regra de Leibniz)*

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

É possível provar que, dada uma variedade diferenciável M com uma conexão afim ∇, existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c. Denominamos essa correspondência de *derivada covariante* de V ao longo de c, que tem as seguintes propriedades:

(i) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

(ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$.

(iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

Nos ítens (i) e (ii), W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I. Lê-se o símbolo $\nabla_X Y$ na Definição 1.3.1 como a *derivada covariante de Y na direção de X*.

Definição 1.3.2. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado *paralelo* quando

$$\frac{DV}{dt} = 0 ,$$

para todo $t \in I$.

Uma demonstração para o resultado a seguir encontra-se em [dC2], p. 58.

Proposição 1.3.3. *Sejam M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Sejam também $c : I \to M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$, isto é, $V_0 \in T_{c(t_0)}M$. Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$.*

Definição 1.3.4. O campo de vetores $V(t)$ acima (Proposição 1.3.3) é chamado o *transporte paralelo* de $V(t_0)$ ao longo de c.

Definição 1.3.5. Sejam M uma variedade diferenciável e uma métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ de M. Uma *conexão Riemanniana* (ou *conexão de Levi–Civita*) de M é uma conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:

1. ∇ é *simétrica (ou livre de torsão)*, isto é, quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

2. ∇ é *compatível com a métrica Riemanniana* $\langle\ ,\ \rangle$, isto é, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c tivermos $\langle P, P\rangle = k$, onde k é constante. Ou seja,

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \ ,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Em um sistema de coordenadas, o fato de ∇ ser simétrica implica que para todo $i, j = 1, \ldots, n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0 \ , \qquad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Teorema 1.3.6 (Levi–Civita)**.** *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão Riemanniana ∇ em M.*

Demonstração. Primeiro, suponha a existência de uma tal conexão Riemannina ∇. Então, pela compatibilidade de ∇ com a métrica,

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \ , \tag{1.8}$$
$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \ , \tag{1.9}$$
$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \ . \tag{1.10}$$

Somando (1.8) e (1.9) e subtraindo (1.10), e usando a simetria de ∇, temos que

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Z, Y], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle \ .$$

Portanto, temos a seguinte expressão (conhecida como *fórmula de Koszul*)

$$\begin{aligned}\langle Z, \nabla_Y X\rangle &= \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &\quad -\langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Z, Y], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\} \ ,\end{aligned}$$

que implica que ∇ está unicamente determinada pela métrica $\langle\ ,\ \rangle$. Portanto, caso exista, ela será única. Para mostrar a existência, defina ∇ pela fórmula de Koszul e basta mostrar que ∇ está bem definida e satisfaz às condições de ser métrica Riemanniana. $\square$

Definição 1.3.7. Sejam M^n uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Dada uma vizinhança $U \subset M$ de p, uma família $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, de campos de vetores $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de U, tais que, em p,

$$\nabla_{e_i} e_j(p) = 0 \ ,$$

é chamada *referencial (local) geodésico* em p.

1.4 CURVATURAS

Quando Riemann introduziu a noção de métrica em variedades, ele precisava mostrar que elas não eram localmente isométricas ao espaço euclidiano. Para provar isso, ele introduziu a noção de curvatura (cf. Definição 1.4.1), que, nesse sentido, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana. Ainda nesta seção, mostraremos que a curvatura seccional (cf. Definição 1.4.4) se relaciona com as demais curvaturas de uma superfície (cf. Proposição 1.4.5).

Definição 1.4.1. A *curvatura R (de Riemann)* de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ a uma aplicação $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \ , \tag{1.11}$$

para todo $Z \in \mathcal{X}(M)$, e ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Alguns autores, tais como M. do Carmo em [dC2], definem a curvatura R com o sinal oposto na expressão (1.11). A maioria, entretanto, define como acima. A motivação dessa definição vem da observação a seguir.

Note que, se $M = \mathbb{R}^n$ com a métrica usual, então $R(X,Y)Z = 0$ para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, considere $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e, dados $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, podemos escrever

$$X = \sum_{i=1}^n X_i e_i \ , \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i e_i \ , \quad \text{e} \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i e_i \ .$$

Então, pela regra de Leibniz,

$$\nabla_Y Z = \nabla_Y \left(\sum_{i=1}^n Z_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n Z_i \nabla_Y e_i + \sum_{i=1}^n Y(Z_i) e_i = \sum_{i=1}^n Y(Z_i) e_i \ ,$$

pois, sendo e_i um campo constante, a sua derivada covariante na direção de qualquer campo é nula; em particular, $\nabla_Y e_i = 0$. Aplicando novamente a regra de Leibniz, temos que

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X \left(\sum_{i=1}^{n} Y(Z_i) e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Y(Z_i) \nabla_X e_i + \sum_{i=1}^{n} X(Y(Z_i)) e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} X(Y(Z_i)) e_i \ . \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \sum_{i=1}^{n} Y[X(Z_i)] e_i \ .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &= \sum_{i=1}^{n} X(Y(Z_i)) e_i - \sum_{i=1}^{n} Y(X(Z_i)) e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{ X(Y(Z_i)) e_i - Y(X(Z_i)) \} \, e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \, [X, Y](Z_i) e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \, [X, Y](Z_i) e_i + \sum_{i=1}^{n} Z_i \nabla_{[X,Y]} e_i \\ &= \nabla_{[X,Y]} Z \ . \end{aligned}$$

Segue-se que,

$$0 = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = R(X, Y) Z \ .$$

As demonstrações dos resultados a seguir, as Proposição 1.4.2 e Proposição 1.4.3, seguem diretamente da definição de curvatura e das propriedades de conexão Riemanniana, e podem ser encontradas nas páginas 100–103 de [dC2].

Proposição 1.4.2 (Propriedades da curvatura R)**.** *A curvatura R de uma variedade Riemanniana tem as seguintes propriedades:*

(i) R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1) \ , \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2) \ , \end{aligned}$$

com $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$.

(ii) Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$, é linear, isto é,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W \,, \\ R(X, Y)(fZ) &= fR(X, Y)Z \,, \end{aligned}$$

com $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

(iii) Quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ satisfazem a Primeira Identidade de Bianchi,

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \,.$$

Proposição 1.4.3. *Em uma variedade Riemanniana (M, g), para quaisquer $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$, a curvatura R tem as seguintes propriedades:*

(i) $\langle R(X, Y)Z, T\rangle + \langle R(Y, Z)X, T\rangle + \langle R(Z, X)Y, T\rangle = 0$

(ii) $\langle R(X, Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y, X)Z, T\rangle$

(iii) $\langle R(X, Y)Z, T\rangle = -\langle R(X, Y)T, Z\rangle$

(iv) $\langle R(X, Y)Z, T\rangle = \langle R(Z, T)X, Y\rangle$

Relacionado com o operador curvatura está a curvatura seccional, que passamos a definir.

Definição 1.4.4. Dado um ponto $p \in M$, seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM. O número real $K(x, y) = K(\sigma)$, definido por

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{\|x \wedge y\|^2} \,,$$

onde $\|x \wedge y\|^2 = \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2}$ e $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado *curvatura seccional* de σ em p.

Prova-se que o número $K(\sigma)$ não depende da escolha da base de σ (Proposição 3.1 de [dC2]).

Agora, seja $x = z_n$ um vetor unitário em T_pM. Tomemos uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano T_pM ortogonal a x. Considere as seguintes médias:

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i\rangle \,, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1 \,, \tag{1.12}$$

e

$$S(p) = \frac{1}{n}\sum_j Ric_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j}\langle R(z_i, z_j)z_i, z_j\rangle \,, \qquad j = 1, \dots, n \,. \tag{1.13}$$

As expressões acima, (1.12) e (1.13), são chamadas *curvatura de Ricci* na direção x e *curvatura escalar* em p, respectivamente. É possível mostrar ainda que tais expressões não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais (cf. p. 108 de [dC2]).

Variedades Riemannianas que possuem curvatura seccional constante desempenham papel fundamental na Geometria Riemanniana. A seguinte proposição relaciona uma curvatura seccional constante com as curvaturas R, de Ricci e escalar. Pode-se consultar uma demonstração para esse resultado em [Bie], páginas 130 e 131.

Proposição 1.4.5. *Sejam M uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante $K_0 \in \mathbb{R}$ e métrica Riemanniana g. Então as curvaturas de M são dadas pelas fórmulas*

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= K_0[\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y]\,, \\ \langle R(X,Y)Z,W\rangle &= K_0[\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle]\,, \\ Ric &= (n-1)K_0 g\,, \\ S &= n(n-1)K_0\,. \end{aligned}$$

1.5 A SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

Seja $f : M \to \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade $\overline{M}$ de dimensão $k = n + m$. O nosso objetivo aqui é generalizar a noção de segunda forma fundamental em superfícies para f.

Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Isto quer dizer que existe uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e existe um difeomeorfismo $\varphi : \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do $\mathbb{R}^k$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Para simplificar a notação, identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM,\ q \in U$, com $df_p(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$.

O produto interno em $T_p\overline{M}$ o decompõe na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$$

para cada $p \in M$, onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Assim, para cada $p \in M$, se $v \in T_p\overline{M}$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N\,,$$

com $v^T \in T_pM$ e $v^N \in (T_pM)^\perp$. Denominamos v^T a *componente tangencial* de v e v^N a *componente normal* de v. Tal decomposição é diferenciável no sentido que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p,v) \to (p,v^T) \qquad \text{e} \qquad (p,v) \to (p,v^N)$$

são diferenciáveis.

A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Dados X e Y, campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T .$$

É possível verificar que esta é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M.

Para definir a segunda forma fundamental da imersão $f : M \to \overline{M}$, convém introduzir previamente a seguinte definição. Se X e Y são campos locais em M, então

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y \tag{1.14}$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M. O campo $B(X,Y)$ não depende das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$. Portanto $B(X,Y)$ está bem definida. Além disso, a aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^\perp$ dada pela expressão (1.14) é bilinear e simétrica, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(U)$. Como B é bilinear, exprimindo B em um sistema de coordenadas, concluímos que o valor de $B(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. A aplicação $b_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ definida por

$$b_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle ,$$

onde $x, y \in T_pM$, é uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.5.1. A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$\mathrm{II}_\eta(x) = b_\eta(x,x)$$

é chamada *a segunda forma fundamental* de f em p segundo o vetor normal η.

Associamos à aplicação bilinear b_η uma aplicação linear autoadjunta $S_\eta : T_pM \to T_pM$, também conhecida como o *operador forma*, dada por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = b_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle .$$

Consideremos o caso particular em que a codimensão da imersão f é 1, ou seja, $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$. Então a imagem $f(M) \subset \overline{M}$ é denominada *hipersuperfície*. De agora em diante, imersões isométricas de codimensão 1 serão chamadas de hipersuperfícies.

Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, com $\|\eta\| = 1$. Como a aplicação $S_\eta : T_pM \to T_pM$ é simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_1, \dots, e_n\}$ de T_pM com autovalores reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, isto é,

$$S_\eta(e_i) = \lambda_{e_i} e_i, \qquad 1 \leq i \leq n \ . \tag{1.15}$$

Se ambas M e $\overline{M}$ são orientáveis e estão orientadas, então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que, sendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base na orientação de M, $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de $\overline{M}$. Nesse caso, denominamos os e_i por *direções principais* e os $\lambda_i = k_i$ como as *curvaturas principais* de f.

As funções simétricas de _1, . . . , _n são invariantes da imersão. Assim, para todo $p \in M$, podemos definir a *curvatura de Gauss–Kronecker* K por

$$K(p) = \det(S_\eta) = k_1(p) \cdot k_2(p) \cdot \ldots \cdot k_n(p) \ , \tag{1.16}$$

e a *curvatura média* H é definida por

$$H(p) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(S_\eta) = \frac{1}{n}(k_1(p) + \ldots + k_n(p)) \ . \tag{1.17}$$

Definição 1.5.2. Seja M uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $p \in M$. Dizemos que p é um *ponto umbílico* de M se as curvaturas principais coincidem em p.

Definição 1.5.3. Dizemos que uma hipersuperfície M de $\mathbb{R}^{n+1}$ é uma *hipersuperfície umbílica* se todo ponto $p \in M$ é umbílico.

Agora, vamos considerar o caso quando $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$. Com efeito, podemos dar uma interpretação geométrica interessante de S_η. Inicialmente, seja ν uma extensão local de η, unitária e normal a M. Seja a esfera unitária $\mathbb{S}^n_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, e defina a *aplicação normal de Gauss*, $N : M^n \to \mathbb{S}^n$, transladando a origem do campo ν para a origem do $\mathbb{R}^{n+1}$ e fazendo $N(p)$ ser o ponto final do transladado de $\nu(p)$. Como T_pM e $T_{N(p)}(\mathbb{S}^n)$ são paralelos, podemos identificá-los, e vemos que $dN_p : T_pM \to T_pM$ é dada por

$$dN_p(x) = \frac{d}{dt}(\nu \circ c(t))\bigg|_{t=0} = \overline{\nabla}_x \nu = (\overline{\nabla}_x \nu)^T = -S_\eta(x) \ ,$$

onde $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva com $c(0) = p$, $c'(0) = x$, e usamos o fato que $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ para garantir que $\overline{\nabla}_x \nu = (\overline{\nabla}_x \nu)^T$. Logo, segue que $-S_\eta$ é a derivada da aplicação normal de Gauss.

Definição 1.5.4. Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é *mínima* se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ tem-se que o traço de $S_\eta = 0$, isto é, quando a curvatura média H é nula.

A razão da palavra mínima neste contexto é que tais imersões minimizam o volume da métrica induzida. Mais precisamente, se $M \subset \overline{M}$ é uma subvariedade mínima e $D \subset M$ um domínio suficientemente pequeno de M com bordo ∂D regular, então o volume de D na métrica induzida é menor ou igual ao volume de qualquer outra subvariedade de $\overline{M}$ com o mesmo bordo.

1.6 OPERADORES DIFERENCIAIS DE UMA HIPERSUPERFÍCIE

Começamos introduzindo os conceitos de gradiente de uma função diferenciável em M, de divergência de um campo de vetores tangente a uma hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, e de Laplaciano de uma função diferenciável sobre M, estabelecendo então uma versão do Teorema da Divergência que será suficiente para os nossos propósitos. Por fim, definimos ainda o hessiano de uma função diferenciável. Relacionando o traço do hessiano ao Laplaciano de uma função suave, provamos a chamada Primeira Fórmula de Minkowski, cuja utilidade aqui deve-se à aplicação na demonstração do principal teorema dessa dissertação.

O gradiente de uma função

Lembre-se que, dada uma variedade M^n e um sistema de coordenadas local $\phi : V \subset \mathbb{R}^n \to M^n$, definimos na Seção 1.2 uma métrica Riemanniana g. Denotaremos por $g = (g_{ij})$ a matriz da métrica no sistema de coordenadas ϕ e sua inversa será denotada por $g^{-1} = (g^{ij})$.

Sejam $\phi : V \subset \mathbb{R}^n \to M^n$ um sistema de coordenadas na variedade Riemanniana M^n e $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então temos o seguinte:

Definição 1.6.1. Para toda função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e todo $X \in \mathcal{X}(M)$, o *gradiente* de f, denotado por $\mathrm{grad} f$, é o campo vetorial diferenciável sobre M definido por

$$\langle \mathrm{grad} f, X \rangle = X(f) \ .$$

Valem para quaisquer $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ que

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(f_1 + f_2) &= \mathrm{grad} f_1 + \mathrm{grad} f_2 \ , \\ \mathrm{grad}(f_1 f_2) &= f_1 \ \mathrm{grad} f_2 + f_2 \ \mathrm{grad} f_1 \ . \end{aligned}$$

De fato, pela linearidade de X como derivação, temos

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{grad}(f_1+f_2), X\rangle &= X(f_1+f_2) = X(f_1)+X(f_2) \\ &= \langle \operatorname{grad} f_1, X\rangle + \langle \operatorname{grad} f_2, X\rangle \\ &= \langle \operatorname{grad} f_1 + \operatorname{grad} f_2, X\rangle \ ; \end{aligned}$$

e, da regra do produto para campos, temos

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{grad}(f_1 f_2), X\rangle &= X(f_1 f_2) = f_1 X(f_2) + f_2 X(f_1) \\ &= f_1\langle \operatorname{grad} f_2, X\rangle + f_2\langle \operatorname{grad} f_1, X\rangle \\ &= \langle f_1 \operatorname{grad} f_2 + f_2 \operatorname{grad} f_1, X\rangle \ . \end{aligned}$$

Proposição 1.6.2. *Dados $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$, então*

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i \ .$$

Demonstração. Seja $\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. Para qualquer j em $\{1, \ldots, n\}$ fixado, temos que

$$\langle \operatorname{grad} f, e_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j \ .$$

Isto é, $\langle \operatorname{grad} f, e_i\rangle = a_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto, pela definição de gradiente,

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \operatorname{grad} f, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i \ .$$

□

Em coordenadas, temos a seguinte expressão para o gradiente de f:

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \ .$$

A divergência de um campo vetorial

Definição 1.6.3. Seja X um campo vetorial diferenciável em M^n. A *divergência* do campo X, denotada por $\text{div}X$, para todo $v \in T_pM$, é a função diferenciável $\text{div}X : M^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned}(\text{div}X)(p) &= \text{tr}\,\{v \mapsto \nabla_v X(p)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \ ,\end{aligned}$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em M, e $\nabla_v X$ e $\nabla_{e_i} X$ são as derivadas covariantes de X nas direções v e e_i, respectivamente.

A divergência verifica as seguintes propriedades, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

(i) $\text{div}(X+Y) = \text{div}X + \text{div}Y$, pois, das definições de div e de conexão afim,

$$\begin{aligned}\text{div}(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}(X+Y), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X + \nabla_{e_i} Y, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} Y, e_i \rangle \\ &= \text{div}X + \text{div}Y \ .\end{aligned}$$

(ii) $\text{div}(fX) = f\text{div}X + X(f) = f\text{div}X + \langle \text{grad}f, X \rangle$, pois, pela definição de div e pela regra de Leibniz para conexões,

$$\begin{aligned}\text{div}(fX) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}(fX), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f\nabla_{e_i} X + e_i(f)X, e_i \rangle \\ &= f\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle e_i(f)X, e_i \rangle \\ &= f\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i, X \right\rangle \\ &= f\text{div}X + \langle \text{grad}f, X \rangle \ .\end{aligned}$$

Proposição 1.6.4. *Seja X um campo vetorial diferenciável em M^n e considere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ em U, então*

$$\text{div}X = \sum_{i=1}^{n} \left(e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle \right) \ .$$

Demonstração. Note que, pela compatibilidade de ∇ com a métrica Riemanniana,

$$\sum_{i=1}^{n} e_i\langle X, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle X, \nabla_{e_i} e_i\rangle \ ,$$

e, por outro lado, como $X = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$,

$$\sum_{i=1}^{n} e_i\langle X, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i\langle \sum_{j=1}^{n} a_j e_j, e_i\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} e_i(a_j\delta_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i) \ .$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i) - \sum_{i=1}^{n}\langle X, \nabla_{e_i} e_i\rangle \ ,$$

e, portanto, pela definição de divergência, obtemos

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n}\left(e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle\right) \ .$$

□

Em coordenadas, temos a seguinte expressão para a divergência de X:

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{\det(g)}a_i) \ .$$

O Laplaciano de uma função

Em particular, quando $X = \operatorname{grad} f$ é o gradiente de uma função diferenciável $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ na Definição 1.6.3, definimos a divergência de $\operatorname{grad} f$ como o *Laplaciano* de f, e o denotamos por Δf. Isto é, $\Delta f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é a função definida por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \ .$$

Dessa maneira, o Laplaciano define um operador $\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ que tem as seguintes propriedades, para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(i) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$, pois

$$\begin{aligned}\Delta(f+g) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f+g)) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g)\\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + \operatorname{div}(\operatorname{grad} g)\\ &= \Delta f + \Delta g\ .\end{aligned}$$

(ii) $\Delta(\lambda f) = \lambda \Delta f$, pois $\Delta(\lambda f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\lambda f)) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} f) = \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \lambda \Delta f$.

(iii) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle$, pois

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(fg)) = \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f)\\ &= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) + \operatorname{div}(g \operatorname{grad} f)\\ &= f\operatorname{div}(\operatorname{grad} g) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle + g\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + \langle \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} f\rangle\\ &= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle\ .\end{aligned}$$

Proposição 1.6.5. *Dados $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$, então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f)\ .$$

Demonstração. Pela Proposição 1.6.2, temos que $\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i$ em U. Assim, pela definição de Laplaciano de uma função f e da Proposição 1.6.4, temos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f\rangle) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f)\ .$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$ (cf. Definição 1.3.7), temos

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f))(p)\ .$$

□

Em coordenadas, temos a seguinte expressão:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det(g)} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\ .$$

Teorema da Divergência

Suponha conhecido o Teorema de Stokes, cuja demonstração não faremos aqui, mas pode ser consultada em [Lee], p. 359.

Teorema 1.6.6 (Teorema de Stokes)**.** *Seja M^n uma variedade Riemanniana suave orientada com bordo. Seja também ω uma $(n-1)$-forma em M com suporte compacto. Então*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \ .$$

Gostaríamos de generalizar o Teorema da Divergência para subvariedades n-dimensionais com bordo. Vamos começar com algumas definições.

Definição 1.6.7. Sejam M^n uma variedade Riemanniana orientada, o vetor $v \in T_pM$ e ω uma n-forma diferencial em T_pM. Definimos a *contração* $v \lrcorner\, \omega$ como a $(n-1)$-forma

$$(v \lrcorner\, \omega)(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega(v, v_1, \dots, v_{n-1}) \ , \tag{1.18}$$

onde $v, v_1, \dots, v_{n-1} \in T_pM$ são linearmente independentes. Em outras palavras, $v \lrcorner\, \omega$ é obtida a partir de ω inserindo v na primeira coordenada. Mais ainda, se X é um campo vetorial em M e ω é uma n-forma em M, definimos a $(n-1)$-forma $X \lrcorner\, \omega$ por

$$(X \lrcorner\, \omega)(p) = X(p) \lrcorner\, \omega(p) \ . \tag{1.19}$$

Em alguns casos, as fórmulas (1.18) e (1.19) são chamadas de *produto interior* e, nesse caso, as notações $i_v\omega$ e $i(X)\omega$ são indicadas, respectivamente (cf. p. 95 de [dC2] e p. 227–228 de [Spi1]). Ainda em [Spi1], mostra-se que a contração $\lrcorner$ verifica as seguintes propriedades:

(i) $v \lrcorner\, (w \lrcorner\, \omega) = -w \lrcorner\, (v \lrcorner\, \omega)$,

(ii) Se $v_1, \dots, v_n$ é uma base de T_pM, com base dual $\phi_1, \dots, \phi_n$, então

$$v_j \lrcorner\, (\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k}) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i_\alpha \ , \quad \forall i_\alpha \\ (-1)^{\alpha-1}\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\phi_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k} & \text{se } j = i_\alpha \ . \end{cases}$$

(iii) Para quaisquer $\omega_1 \in \Omega^k(T_pM)$ e $\omega_2 \in \Omega^l(T_pM)$, temos

$$v \lrcorner\, (\omega_1 \wedge \omega_2) = (v \lrcorner\, \omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge (v \lrcorner\, \omega_2)$$

(iv) $X \lrcorner\, (\omega_1 \wedge \omega_2) = (X \lrcorner\, \omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge (X \lrcorner\, \omega_2)$

Observe que, para os vetores linearmente independentes $v, v_1, \ldots, v_{n-1} \in T_pM$ em (1.18), a n-forma ω pode ser definida do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\omega(v, v_1, \ldots, v_{n-1})(p) &= \sqrt{\det\left(\langle v_i, v_j\rangle\right)} \\ &= \text{vol. orient. } \{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\} \,,\end{aligned}$$

com $p \in M$. Nesse caso, o volume orientado tem sinal + ou $-$ conforme a base $\{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ pertença à orientação de M ou não, e a n-forma ω pode ser considerada como o elemento de volume de M.

Considerando o que acabamos de discutir, apresentamos uma definição alternativa para a divergência de um campo vetorial, usando a noção de contração.

Lema 1.6.8. *Seja M^n uma variedade Riemanniana orientada, com elemento de volume dV. Então para todo campo vetorial X em M temos*

$$d(X \lrcorner\, dV) = \operatorname{div}(X) dV \,. \tag{1.20}$$

Demonstração. Se a expressão (1.20) vale para X_1 e X_2, então vale para $X_1 + X_2$. Além disso, se (1.20) ainda vale para X, então

$$\begin{aligned}d(fX \lrcorner\, dV) &= d(f(X \lrcorner\, dV)) \\ &= df \wedge (X \lrcorner\, dV) + fd(X \lrcorner\, dV) \\ &= df \wedge (X \lrcorner\, dV) + f \operatorname{div} X dV \,.\end{aligned}$$

Como df é uma 1-forma e $df(X) = X(f)$, pela propriedade (iv) de contração, temos

$$\begin{aligned}0 = X \lrcorner\, (df \wedge dV) &= (X \lrcorner\, df) \wedge dV - df \wedge (X \lrcorner\, dV) \\ &= X(f)dV - df \wedge (X \lrcorner\, dV) \,,\end{aligned}$$

e então, pela propriedade (ii) da divergência (cf. p. 24), a nossa fórmula vira

$$\begin{aligned}d(fX \lrcorner\, dV) &= X(f)dV + f \operatorname{div} X dV \\ &= \operatorname{div}(fX) dV \,.\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula (1.20) é também verdadeira para fX.

Agora, seja $X_1, \ldots, X_n$ um referencial ortonormal orientado positivamente, com formas duais $\theta^1, \ldots, \theta^n$, tais que $dV = \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n$. Pelo que consideramos no parágrafo anterior, é suficiente provar que a expressão (1.20) vale quando X é algum X_i. Tomando então $X = X_1$, pela propriedade (ii) de contração, vemos que

$$X_1 \lrcorner\, dV = X_1 \lrcorner\, (\theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n) = \theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^n \ .$$

Então

$$\begin{aligned} d(X_1 \lrcorner\, dV) &= d(\theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^n) = \sum_{j=2}^{n} (-1)^j \theta^2 \wedge \ldots \wedge d\theta^j \wedge \ldots \wedge \theta^n \\ &= -\sum_{j=2}^{n} (-1)^j \theta^2 \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^j \wedge \theta^i \right) \wedge \ldots \wedge \theta^n \\ &= -\sum_{j=2}^{n} (-1)^j \theta^2 \wedge \ldots \wedge (w_1^j \wedge \theta^1) \wedge \ldots \wedge \theta^n \\ &= -\sum_{j=2}^{n} (-1)^j w_1^j \wedge \theta^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\theta^j} \wedge \ldots \wedge \theta^n \end{aligned}$$

Mas

$$w_1^j = \sum_{k=1}^{n} w_1^j(X_k) \cdot \theta^k = \sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_{X_k} X_1, X_j \rangle \theta^k \ .$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} d(X_1 \lrcorner\, dV) &= \sum_{j=2}^{n} \langle \nabla_{X_j} X_1, X_j \rangle \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^n \\ &= (\mathrm{div} X_1) dV \ . \end{aligned}$$

□

Como um corolário do lema acima, obtemos o teorema geral desejado.

Teorema 1.6.9 (Teorema da Divergência)**.** *Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta orientada com bordo, com normal unitário ν ao longo de ∂M. Denote o elemento de volume de M por dV_n, e o de ∂M por dV_{n-1}. Dado X um campo vetorial em M, então*

$$\int_M \mathrm{div} X dV_n = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle dV_{n-1} \ .$$

Demonstração. Pelo Lema 1.6.8 e pelo Teorema de Stokes (Teorema 1.6.6), temos

$$\int_M \mathrm{div} X dV_n = \int_M d(X \lrcorner\, dV_n) = \int_{\partial M} X \lrcorner\, dV_n \ .$$

Se $(\nu_x, e_2, \ldots, e_n)$ é uma base ortonormal orientada de T_xM para $x \in \partial M$, então

$$\begin{aligned}
(X \lrcorner\, dV_n)_x(e_2, \ldots, e_n) &= dV_n(X, e_2, \ldots, e_n) \\
&= \langle X, \nu \rangle_x (dV_n)_x(\nu_x, e_2, \ldots, e_n) \\
&= \langle X, \nu \rangle_x (X \lrcorner\, dV_n)_x(e_2, \ldots, e_n) \,.
\end{aligned}$$

Ou seja, $X \lrcorner\, dV_n$ coincide com $\langle X, \nu \rangle dV_{n-1}$ em ∂M, e portanto temos as integrais desejadas. □

A seguinte aplicação do Teorema da Divergência será de grande utilidade para as principais demonstrações do nosso trabalho.

Corolário 1.6.10. *Se M^n é uma variedade Riemanniana compacta orientada, sem bordo, e X é um campo vetorial qualquer em M, então*

$$\int_M \operatorname{div} X dV_n = 0 \,.$$

Em particular, para toda função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\int_M \Delta f dV_n = 0 \,.$$

O hessiano de uma função

Definição 1.6.11. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. O *hessiano* de uma função f, denotado por Hess ou ∇^2, é um campo de operadores lineares definido por

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 f)_p : T_pM &\to T_pM \\
v &\mapsto (\nabla^2 f)_p(v) = (\nabla_v \nabla f)(p) \,,
\end{aligned}$$

onde ∇_v é a conexão Riemanniana de M na direção de v e ∇f é o gradiente de f.

Segue das propriedades de conexão Riemanniana que, se X é qualquer extensão de v a uma vizinhança de p em M, então

$$(\nabla^2 f)_p(v) = (\nabla_X \nabla f)(p) \,.$$

Proposição 1.6.12. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $p \in M$, então temos que $(\nabla^2 f)_p : T_pM \to T_pM$ é um operador autoadjunto.*

Demonstração. Sejam $v, w \in T_pM$, e V e W extensões de v e w, respectivamente, a campos definidos em uma vizinhança de $p \in M$. Então, pela simetria e compatibilidade de ∇ com a métrica $\langle\ ,\ \rangle$, temos que

$$\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W]$$

$$V\langle \nabla f, W\rangle = \langle \nabla_V \nabla f, W\rangle + \langle \nabla f, \nabla_V W\rangle \, .$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\langle (\nabla^2 f)_p(v), w \right\rangle &= \langle \nabla_V \nabla f, W\rangle_p \\
&= \left(V\left\langle \nabla f, W\right\rangle\right)(p) - \langle \nabla f, \nabla_V W\rangle_p \\
&= \left(V(Wf)\right)(p) - \langle \nabla f, \nabla_W V + [V,W]\rangle_p \\
&= \left(W(Vf)\right)(p) + ([V,W]f)(p) - \langle \nabla f, \nabla_W V + [V,W]\rangle_p \\
&= \left(W(Vf)\right)(p) - \langle \nabla f, \nabla_W V\rangle_p \\
&= \left\langle (\nabla^2 f)_p(w), v \right\rangle
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.6.13. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

$$\Delta f = \operatorname{tr}(\nabla^2 f) \, .$$

Demonstração. Para cada $p \in M$, seja $U \subset M$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial ortonormal móvel $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Então

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\nabla^2 f)_p &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle (\nabla^2 f)_p(e_i), e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i\rangle \\
&= \operatorname{div}(\nabla f)(p) \\
&= \Delta f(p) \, .
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.6.14. *Sejam M uma variedade Riemanniana e ∇ a sua conexão Riemanniana. Então*

$$\nabla^2 f(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle \, , \tag{1.21}$$

onde ∇f é o campo vetorial identificado com a 1-forma ∇f.

A partir daqui, dada uma hipersuperfície $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, denotaremos por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de M e $\mathbb{R}^{n+1}$, respectivamente, como também vamos denotar os mesmos símbolos para a derivada covariante de uma função (ou o gradiente) definida em M e para uma função definida em $\mathbb{R}^{n+1}$, respectivamente. Nestas condições, denotaremos também por ∇^2 e $\overline{\nabla}^2$ o hessiano e por Δ e $\overline{\Delta}$ o Laplaciano de uma função definida em M e em $\mathbb{R}^{n+1}$, respectivamente. O significado de cada um desses símbolos ficará claro no contexto.

Seja F uma função diferenciável definida sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $M \subset U$ uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$. Associe a $p \in M$ uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n, N\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, onde $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Considerando uma função $f = F|_M$, como f é suave, temos que ∇f coincide com a componente tangencial do campo $\overline{\nabla} f$. Ou seja, para cada $p \in M$, temos

$$\nabla f(p) = \overline{\nabla} F(p) - \langle \overline{\nabla} F(p), \eta(p) \rangle \eta(p) \ . \tag{1.22}$$

Então, pela definição de hessiano e pela equação (1.21), para quaisquer $X, Y \in T_pM$ obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(X,Y) &= \langle \overline{\nabla}_X \nabla f, Y \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla} F, Y \rangle - \langle \overline{\nabla}_X \langle \overline{\nabla} F, \eta \rangle \eta, Y \rangle \\
&= \overline{\nabla}^2 F(X,Y) - \langle X(\langle \overline{\nabla} F, \eta \rangle)\eta + \langle \overline{\nabla} F, \eta \rangle \overline{\nabla}_X \eta, Y \rangle \\
&= \overline{\nabla}^2 F(X,Y) + \langle \overline{\nabla} F, \eta \rangle \langle S_\eta(X), Y \rangle \ .
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Na penúltima igualdade usamos o fato de X, Y serem normais a η e que

$$\langle S_\eta(X), Y \rangle = \langle B(X,Y), \eta \rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \eta \rangle = -\langle \overline{\nabla}_X \eta, Y \rangle \ .$$

Exemplo 1.6.15. Considere a função diferenciável $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(y) = \frac{1}{2}\|y - c\|^2 \ ,$$

para um certo ponto fixo $c \in \mathbb{R}^{n+1}$. Note que, para quaisquer $y, v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla} F(y) &= y - c \ , \qquad \text{e} \\
\overline{\nabla}^2 F(w,v) &= v(\overline{\nabla} F(w)) - \overline{\nabla}(\overline{\nabla}_v w) = \langle w, v \rangle \ .
\end{aligned}$$

Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ e considere $f : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(p) = F|_M(x) = \frac{1}{2}\|x - c\|^2 \ .$$

Aqui, estamos identificando M com $x(M)$ e x com $x(p) \in \mathbb{R}^{n+1}$, ou seja, $f(p) = F(x(p))$. Pelas equações (1.22) e (1.23), obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla f(x) &= (x - c) - \langle x - c, \eta \rangle \eta = (x - c)^T \ , \quad \text{e} \\
\nabla^2 f(X,Y) &= \langle X, Y \rangle + \langle x - c, \eta \rangle \langle S_\eta(X), Y \rangle \ ,
\end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y \in T_pM$.

Para finalizar essa seção, apresentamos uma clássica fórmula integral para hipersuperfícies compactas em $\mathbb{R}^{n+1}$ que, como muitas fórmulas integrais interessantes em Geometria Diferencial, é obtida a partir de uma aplicação do Teorema da Divergência.

Teorema 1.6.16 (Primeira Fórmula de Minkowski)**.** *Seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície mergulhada, compacta e orientada. Se H é a curvatura média de x e N é um campo normal a M, então*

$$\int_M (1 + H\langle x, N\rangle) dM = 0 \,. \tag{1.24}$$

Demonstração. Considere uma função $f : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(p) = \frac{1}{2}\|x(p)\|^2$$

e uma base de direções principais $\{e_1, \dots, e_n\}$ em T_pM. Então, pelo Exemplo 1.6.15 e da igualdade (1.15) para o operador forma, para todo $p \in M$, temos

$$\nabla^2 f(e_i, e_i) \;=\; \langle e_i, e_i\rangle + \langle S_\eta(e_i), e_i\rangle\langle x, N\rangle \;=\; 1 + \langle k_i e_i, e_i\rangle\langle x, N\rangle \;=\; 1 + k_i\langle x, N\rangle \,,$$

em que k_i são as curvaturas principais de M em p. Pelo Corolário 1.6.10, basta mostrar que $\Delta f = 1 + H\langle x, N\rangle$. Com efeito, mostremos que $\Delta f = n(1 + H\langle x, N\rangle)$. Pela Proposição 1.6.13,

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \operatorname{tr}(\nabla^2 f) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(1 + k_i\langle x, N\rangle) \\
&= n + \sum_{i=1}^{n} k_i\langle x, N\rangle \\
&= n + nH\langle x, N\rangle \\
&= n(1 + H\langle x, N\rangle) \,.
\end{aligned}$$

□

Observação 1.6.17. O produto interno $g = \langle x, N\rangle$ será chamado a *função suporte* da hipersuperfície x. Com isso, a Primeira Fórmula de Minkowski na expressão (1.24), vira

$$\int_M (1 + Hg) dM = 0 \,,$$

isto é,

$$\int_M Hg\, dM = -\int_M dM \,.$$

2 HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE

O principal objetivo desse capítulo – e também dessa dissertação – é apresentar todas as ferramentas em Análise Geométrica para demonstrar o teorema de João Lucas Barbosa e Manfredo Perdigão do Carmo (Cf. Teorema 3.1, [BdC]), o qual enunciamos a seguir.

Teorema (Barbosa–do Carmo)**.** *Seja M^n compacta, orientável, e seja $x : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante não-nula. Então x é estável se, e somente se, $x(M) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ é uma esfera redonda $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

Apresentamos resultados em hipersuperfícies com curvatura média constante com bordo na Seção 2.1 Tais hipersuperfícies surgirão como soluções de um problema variacional associado aos funcionais área e volume, e devemos relacionás-la com o problema isoperimétrico clássico. Em seguida, apresentamos a primeira e a segunda fórmulas de variação para a área, e damos a noção de estabilidade de uma hipersuperfície com curvatura média constante.

Nas seções seguintes, 2.2 e 2.3, em duas partes, faremos a demonstração do teorema acima.

2.1 CARACTERIZAÇÃO DE HIPERSUPERFÍCIES ESTÁVEIS

Seja M uma variedade n-dimensional diferenciável e orientável. Seja também $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de M^n no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Neste caso, dizemos que M^n está imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ e é uma hipersuperfície. Se $p \in M$, escrevemos p em vez de $x(p)$, ou simplesmente, x. Representamos ainda por $N : M^n \to \mathbb{S}^n$ a aplicação normal de Gauss (ou uma orientação de M), onde $\mathbb{S}^n$ denota a esfera redonda de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Daqui em diante, sempre que considerarmos um conjunto $D \subset M^n$, quando não mencionado, estaremos supondo que D é relativamente compacto (isto é, o seu fecho $\overline{D}$ é compacto), com bordo ∂D suave possivelmente não-vazio. O Lema 1.11 em [Lee] garante que toda variedade diferenciável possui uma base enumerável de vizinhanças coordenadas relativamente compactas.

A Proposição 1.2.6 nos garante a existência de uma métrica Riemanniana em M. Dotamos $D \subset M^n$ com a métrica $\langle\ ,\ \rangle$ induzida pela imersão $x : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$. Para uma tal imersão, denotamos por $A_D(x)$ a *n-área* de D, definida por

$$A_D(x) = \int_D dM\ , \tag{2.1}$$

onde dM denota o elemento de n-área de M induzido pela imersão x.

No fim da Seção 1.2, vimos que uma métrica Riemanniana possibilita definir uma noção de volume em uma variedade orientada. Calculamos então o volume "orientado", $V_D(x)$, envolvido pela superfície imersa $x(M)$. Para isso, dada $\overline{M}^{n+1}(c)$ uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}(c)$ com curvatura seccional c, seja $x : \overline{D} \to \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão definida no domínio $D \subset M^n$ relativamente compacto. Definimos o *volume* $V_D(x)$ de D associado à imersão x por

$$V_D(x) = \int_D X^* d\overline{M}\ , \tag{2.2}$$

onde $d\overline{M}$ é o elemento de volume na variedade $\overline{M}^{n+1}(c)$ e $X^*d\overline{M}$ é o pull-back da forma volume de $\overline{M}$ para $\overline{D}$. Em particular, quando $\overline{M}^{n+1}(c) = \mathbb{R}^{n+1}$, temos que o volume de $D \subset M^n$ associado à imersão $x : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é dado por

$$\begin{aligned} V_D(x) &= \int_D dx_1 \dots dx_{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\int_D \operatorname{div}(x_1e_1 + \dots + x_{n+1}e_{n+1})dx_1 \dots dx_{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\int_{\partial D} \langle x, N\rangle dM\ , \end{aligned}$$

donde a última linha resulta de uma aplicação do Teorema da Divergência (Teorema 1.6.9), N é o campo vetorial normal unitário determinado pela orientação de M e dM é o elemento de volume na métrica induzida por x.

Assim, se $x : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão de uma variedade com domínio relativamente compacto $D \subset M^n$ com bordo suave, o *volume (algébrico)* de x com respeito à orientação N é definido por

$$V_D(x) = \frac{1}{n+1}\int_D \langle x, N\rangle dM\ . \tag{2.3}$$

Quando ∂D é não-vazio, o número $|V_D(x)|$ mede o volume determinado pela superfície $x(D)$ no cone formado com vértice na origem de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 2.1.1. Seja $D \subset M^n$ um domínio relativamente compacto com bordo ∂D suave. Uma *variação* de uma imersão $x : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma aplicação diferenciável $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que, para cada $p \in \overline{D}$, temos que

1. para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, as aplicações $x_t : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ dadas por $x_t(p) = X(t, p)$ são imersões, e

2. para $t = 0$, temos $x_0(p) = x(p)$.

O *campo variacional* de uma variação x_t, definida nas condições acima, para todo $p \in \overline{D}$, é dado por

$$\xi(p) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} X(t, p) \ .$$

A variação x_t é dita ser *normal* se, para todo $p \in \overline{D}$, o seu campo variacional pode ser escrito na forma

$$\xi(p) = f(p)N(p) \ ,$$

para alguma função $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ suave, onde $N(p)$ denota o vetor normal de $x_0(D)$ em $x_0(p)$.

Definição 2.1.2. Dizemos que uma variação $x_t : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ *fixa o bordo de* x se $x_t(p) = x(p)$, para todo $p \in \partial D$ e todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Em particular, $\xi \equiv 0$ em ∂D.

Dada uma variação $x_t : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ de uma imersão x em $D \subset M^n$ relativamente compacto, pelas fórmulas (2.1) e (2.3), temos que o *funcional área* $A_D(x_t) := A_D(t)$ de D associado à variação x_t é a aplicação

$$A_D(t) = \int_D dM_t \ , \tag{2.4}$$

e o *funcional volume* $V_D(x_t) := V_D(t)$ de D associado à variação x_t é a aplicação

$$V_D(t) = \frac{1}{n+1} \int_D \langle x_t, N_t \rangle dM_t \ , \tag{2.5}$$

onde dM_t e N_t representam o elemento de volume de M induzido por x_t e o campo normal unitário de x_t, respectivamente. Em particular, $A_D(0)$ e $V_D(0)$ são a área e o volume da imersão inicial x.

Definição 2.1.3. Dizemos que uma variação $x_t : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ *preserva o volume de* x se $V_D(t) = V_D(0)$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Tendo definidos os funcionais área $A_D(t)$ e volume $V_D(t)$, podemos obter as suas respectivas fórmulas para a primeira variação em $t = 0$.

Proposição 2.1.4 (Primeira variação para a área). *Se* $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ *é uma variação da imersão* x*, que fixa o bordo, então o funcional área* $A_D(t)$ *é diferenciável em* $t = 0$ *e primeira variação para a área é dada por*

$$A'_D(0) = -\int_D nHf dM \ , \tag{2.6}$$

onde H *é a curvatura média da imersão* x *e* $f = \langle \xi, N \rangle$*.*

Demonstração. Ver Apêndice A. $\square$

Dizemos que M é uma *hipersuperfície com curvatura média constante* se a função H é constante. Pela Definição 1.5.4, quando $H \equiv 0$ em M, dizemos que M é uma *hipersuperfície mínima*.

Da Proposição 2.1.4, obtemos a seguinte caracterização para uma hipersuperfície mínima.

Teorema 2.1.5. *Seja $x : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de um domínio relativamente compacto $D \subset M^n$ com bordo ∂D suave. Então a imersão é mínima se, e somente se, $A'_D(0) = 0$ para qualquer variação que fixa o bordo de x.*

Demonstração. Se $H \equiv 0$, então (2.6) nos dá imediatamente que $A'_D(0) = 0$. Por outro lado, seja $f \in C^\infty(\overline{D})$ uma função com $f > 0$ no interior $int(D)$ do conjunto D, e $f \equiv 0$ em ∂D. Defina a variação

$$x_t(p) = x(p) + tf(p)H(p)N(p) \ ,$$

que fixa o bordo. Note que, em (2.6), temos

$$A'_D(0) = -\int_D nH\langle \xi, N\rangle dM \ ,$$

e daí, tomando o campo variacional de x_t por $\xi(p) = f(p)H(p)N(p)$, obtemos

$$0 = A'_D(0) = -n\int_D fH^2 dM \ .$$

Como f é positiva em $int(M)$, segue-se que $H \equiv 0$ em $\overline{D}$. $\square$

Esse teorema estabelece que *uma hipersuperfície compacta é mínima se, e somente se, ela é um ponto crítico da área para qualquer variação que fixa o bordo*. Como uma consequência, se D é um domínio fechado e M é uma hipersuperfície de menor área dentre todas as hipersuperfícies abrangidas em D, então M é uma hipersuperfície mínima, pois para qualquer variação de M o funcional $A_D(t)$ tem um mínimo em $t = 0$, portanto, $A'_D(0) = 0$.

A recíproca não se mantém, em geral, e existem hipersuperfícies mínimas compactas que não são minimizantes. Um caso especial é estudado na Proposição 2.1.8 do livro [Lop] (Cf. p. 20). Lopéz afirma que um gráfico mínimo sobre um domínio convexo minimiza a área entre todas as superfícies compactas com o mesmo bordo mas apenas de forma local.

Proposição 2.1.6 (Primeira variação para o volume)**.** *Se $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma variação da imersão x, que fixa o bordo, então o funcional volume $V_D(t)$ é diferenciável em $t = 0$ e a primeira variação para o volume é dada por*

$$V'_D(0) = \int_D f dM \ , \tag{2.7}$$

onde $f = \langle \xi, N\rangle$.

Demonstração. Dada uma variação $x_t = X(t,p)$ da imersão x, pela definição de volume em (2.2), podemos identificar o volume de D associado à variação X pela função $V_D : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ definida por

$$V_D(t) = \int_{[0,t]\times D} X^* d\overline{M} \,. \tag{2.8}$$

Fixe um ponto $p \in D$ e considere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança U de $x(p)$. Como $X^* d\overline{M}$ é uma forma volume, existe uma função $a : (-\varepsilon,\varepsilon) \times \overline{D} \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$X^* d\overline{M} = a(t,p) dt \wedge dM \,,$$

onde

$$\begin{aligned} a(t,p) &= X^* d\overline{M}\left(\frac{\partial}{\partial t}, e_1, \ldots, e_n\right) \\ &= d\overline{M}\left(\frac{\partial X}{\partial t}, dx_t e_1, \ldots, dx_t e_n\right) \\ &= \mathrm{vol}\left(\frac{\partial X}{\partial t}, dx_t e_1, \ldots, dx_t e_n\right) \\ &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(t,p), N_t(t,p) \right\rangle , \end{aligned}$$

e N_t é um vetor unitário normal à imersão x_t. Pelo Teorema de Fubbini temos que

$$\int_{[0,t]\times D} a(t,p) dt \wedge dM = \int_{[0,t]} \left(\int_D a(t,p) dt \wedge dM \right) .$$

Portanto, derivando em $t = 0$ a fórmula (2.8) do funcional volume, temos

$$\begin{aligned} V_D'(0) &= \frac{d}{dt}\left(\int_{[0,t]\times D} X^* d\overline{M} \right)\Bigg|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left[\int_{[0,t]} \left(\int_D a(t,p) dt \wedge dM \right) \right]\Bigg|_{t=0} \\ &= \int_D a(t,p) dM \Bigg|_{t=0} \\ &= \int_D \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(t,p), N_t(t,p) \right\rangle dM \Bigg|_{t=0} \\ &= \int_D f dM \,, \end{aligned}$$

onde $f = \langle \xi, N \rangle$. □

Uma vez obtidas as fórmulas para as primeiras variações de área e volume, temos condições de estabelecer uma boa caracterização para uma hipersuperfície com curvatura média constante. Note que em uma variação $x_t : \overline{D} \subset M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ que preserva o volume, o funcional $V_D(t)$ é constante, e assim $V_D'(t) = 0$. Comparando com a prova do Teorema 2.1.5 para hipersuperfícies mínimas e observando a integral (2.7), temos que $f \equiv 0$ em ∂D não é suficiente para que uma hipersuperfície tenha curvatura média constante. Por essa razão, precisamos do seguinte resultado.

Lema 2.1.7. *Seja $x : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de um domínio relativamente compacto $D \subset M$ e seja $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ uma função suave por partes tal que $\int_D f dM = 0$. Então existe uma variação normal que preserva o volume de x cujo campo variacional é da forma $\xi = fN$. Além disso, se $f \equiv 0$ em ∂D, então podemos assumir que a variação fixa o bordo de x.*

Demonstração. Seja g uma função diferenciável em $\overline{D}$ tal que $g \equiv 0$ em ∂D e $\int_D g dM \neq 0$. Se $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, defina a aplicação $X : \overline{D} \times I \times I \to \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$X(p,t,s) \ = \ x(p) + (tf(p) + sg(p))N(p)\ .$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a função X pode ser vista como uma variação de x, fixando s ou t, com $X(p,0,0) = x(p)$. Seja $V_D(t,s)$ o volume da hipersuperfície $X(-,t,s) : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ e considere a equação $V_D(t,s) = c$, onde c é uma constante. Pela fórmula da primeira variação de volume (2.7),

$$\frac{\partial}{\partial s} V_D(t,s)\bigg|_{(t,s)=(0,0)} \ = \ \int_D g dM \ \neq \ 0\ .$$

O Teorema da Função Implícita garante a existência de um difeomorfismo $\varphi : I_1 \to I_2$, onde I_1 e I_2 são intervalos abertos centrados em 0, tal que $\varphi(0) = 0$ e $V_D(t, \varphi(t)) = c$ para todo $t \in I_1$. Isso nos permite considerar a variação de x que preserva volume dada por $x_t(p) = X(p,t,\varphi(t))$. Vamos mostrar que $\xi = fN$. Da derivada de $V_D(t,\varphi(t)) = c$ com respeito a t obtemos

$$0 \ = \ \frac{\partial V_D}{\partial t}(0,0) + \varphi'(0)\frac{\partial V_D}{\partial s} \ = \ \int_D (f + \varphi'(0)g) dM \ = \ \varphi'(0) \int_D g dM\ .$$

Logo, $\varphi'(0) = 0$. Assim,

$$\xi(p) \ = \ \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} x_t(p) \ = \ (f(p) + \varphi'(0)g(p))N(p) \ = \ f(p)N(p)\ .$$

No caso particular em que $f \equiv 0$ em ∂D, como $g \equiv 0$ em ∂D, temos que $x_t(p) = x(p)$ ao longo de ∂D e assim a variação fixa o bordo. □

Teorema 2.1.8. *Seja $x : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de um domínio relativamente compacto $D \subset M^n$. Então a imersão x tem curvatura média constante se, e somente se, $A'(0) = 0$ para qualquer variação que fixa bordo e que preserva o volume de x.*

Demonstração. Suponha que a curvatura média H de x é constante. Para uma variação de x que preserva o volume, temos $V_D'(t) = 0$. Além disso, se a variação fixa o bordo de x, então $\xi \equiv 0$ em ∂D. Como H é constante, sendo $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ uma função suave por partes tal que $f = \langle \xi, N \rangle$, a expressão (2.6) para a primeira variação da área nos dá

$$A_D'(0) = -nH \int_D \langle \xi, N \rangle dM = -nHV_D'(0) = 0.$$

Por outro lado, suponha que x é um ponto crítico da área para uma variação qualquer que fixa bordo e que preserva o volume. Seja

$$H_0 = \frac{1}{A_0} \int_D H dM \,, \tag{2.9}$$

onde A_0 denota a área inicial $A_D(0)$ de $D \subset M^n$. Defina a função $f = H - H_0$. Observe que H é constante se, e somente se, $f \equiv 0$. Suponha, por absurdo, que $f \not\equiv 0$ em um ponto interior. Como $\int_D f dM = 0$, os conjuntos D^+ e D^-, dados por

$$D^+ = \{p \in int(\overline{D}) : \; f(p) > 0\} \,,$$

$$D^- = \{p \in int(\overline{D}) : \; f(p) < 0\} \,,$$

são não-vazios. Fixe os pontos $p^+ \in D^+$ e $p^- \in D^-$, e considere as correspondentes funções $\varphi^+, \varphi^- : \overline{D} \to \mathbb{R}$, tais que são suaves não-negativas com $\text{supp}(\varphi^+) \subset D^+$, $\text{supp}(\varphi^-) \subset D^-$ e $\varphi^+(p^+) = \varphi^-(p^-) = 1$. Em particular, $\varphi^+, \varphi^- \equiv 0$ em ∂D. Sejam

$$\alpha^+ = \int_D \varphi^+ f dM > 0$$

$$\alpha^- = \int_D \varphi^- f dM < 0$$

e $\lambda > 0$ o número real tal que $\alpha^+ + \lambda\alpha^- = 0$. Defina $\varphi = \varphi^+ + \lambda\varphi^-$. Essa função não-nula satisfaz $\varphi \geq 0$ em $int(\overline{D})$, com $\varphi \equiv 0$ em ∂D, e

$$\int_D \varphi f dM \;=\; \int_{D^+} \varphi^+ f dM + \lambda \int_{D^-} \varphi f dM \;=\; 0 \,. \tag{2.10}$$

Pelo Lema 2.1.7, existe uma variação que fixa o bordo e preserva o volume de x, cujo campo variacional é $\xi = (\varphi f)N$. Assim, pela fórmula (2.6) para a primeira variação de área e por (2.10), temos

$$0 \;=\; A_D'(0) \;=\; -n \int_D H\varphi f dM \;=\; -n \int_D (H - H_0)\varphi f dM \;=\; -n \int_D \varphi f^2 dM \,.$$

Logo, $\varphi f^2 \equiv 0$ em $\overline{D}$. Assim, em um ponto p^+, temos que $(\varphi f^2)(p^+) = f(p^+)^2 > 0$, uma contradição. Segue que $H = H_0$ em $\overline{D}$. □

Outra caracterização variacional para uma hipersuperfície com curvatura média constante faz uso do método dos multiplicadores de Lagrange. Dados uma variação x que fixa o bordo (que não necessariamente preserva o volume) e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos o funcional $J_D : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ por

$$J_D(t) = A_D(t) + n\lambda V_D(t) \ , \tag{2.11}$$

Pelas fórmulas (2.6) e (2.7), para as primeiras variações de área e volume, temos

$$\begin{aligned} J'_D(0) &= A'_D(0) + n\lambda V'_D(0) \\ &= -\int_D nHf dM \ + \ n\lambda \int_D f dM \\ &= -n \int_D (H - \lambda) f dM \ . \end{aligned}$$

Isto é, *a primeira variação para o operador* J_D em $t = 0$ é dada por

$$J'_D(0) = -n \int_D (H - \lambda) f dM \ . \tag{2.12}$$

Teorema 2.1.9. *Seja $x : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de um domínio relativamente compacto $D \subset M^n$. Então a hipersuperfície x tem curvatura média constante se, e somente se, $J'_D(0) = 0$ para qualquer variação de x que fixa o bordo, para um certo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha que x tem curvatura média constante H. Tomando $\lambda = H$ em (2.12), segue-se imediatamente que $J'_D(0) = 0$. Reciprocamente, assuma que exista $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $J'_D(0) = 0$ para uma variação que fixa o bordo qualquer. Em particular, isso é válido para qualquer variação x_t que, além de fixar o bordo, também preserva o volume. Daí, como λ é constante, temos

$$0 \ = \ J'_D(0) \ = \ A'_D(0) + n\lambda V'_D(0) \ = \ A'_D(0) \ .$$

Portanto $A'_D(0) = 0$ para qualquer variação que fixa o bordo e que preserva o volume. Pelo Teorema 2.1.8, concluímos que H é constante. □

Entre todos os pontos críticos do funcional área, considere aqueles que são mínimos locais. É natural, portanto, estudar a segunda variação da área pois, nesse caso, uma hipersuperfície de área mínima tem a segunda derivada $A''_D(0)$ não-negativa. Como uma hipersuperfície com curvatura média constante é caracterizada em termos variacionais pelos Teoremas 2.1.8 e 2.1.9, existem duas diferentes noções de estabilidade.

Definição 2.1.10. Seja $D \subseteq M^n$ um domínio relativamente compacto e seja $x : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante H. Dizemos que:

1. A imersão (ou hipersuperfície) x é dita *estável* se $A''_D(0) \geq 0$, para toda variação que fixa o bordo e que preserva o volume.

2. A imersão (ou hipersuperfície) x é dita *fortemente estável* se $J''_D(0) \geq 0$, para toda variação que fixa o bordo.

Com relação à primeira definição, alguns autores preferem usar o termo "estável que preserva o volume" ao invés de "estável".

Proposição 2.1.11 (Segunda variação para a área)**.** *Seja $D \subset M^n$ um domínio relativamente compacto e seja $x : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante H. Se x_t é uma variação de x que fixa o bordo e preserva o volume, com $f = \langle N, \xi \rangle$, então*

$$A''_D(0) = -\int_D f(\Delta f + \|B\|^2 f)dM \,, \tag{2.13}$$

onde Δ denota o operador Laplaciano na métrica induzida em M, e $\|B\|^2 = \sum_i k_i^2$ é o quadrado da norma da segunda forma fundamental B de x e $k_1, \dots, k_n$ são as curvaturas principais de x (Cf. Seção 1.5).

Observação 2.1.12. O termo nos parênteses de (2.13), denotado por $L(f) = \Delta f + \|B\|^2 f$, é chamado de *operador de Jacobi*da imersão.

Analogamente, a fórmula para *a segunda variação do operador J_D* é

$$J''_D(0)(f) = \int_D \big(- f\Delta f - \|B\|^2 f^2 \big)dM \,, \tag{2.14}$$

para toda variação que fixa o bordo da imersão. Aqui, a função f satisfaz $f \equiv 0$ apenas em ∂D.

Lema 2.1.13. *Na fórmula (2.14), $J''_D(0)(f)$ depende apenas de f.*

Seja $\mathcal{F}_D$ o conjunto de todas as funções suaves por partes $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ que satisfazem ambas as condições:

(i) $f \equiv 0$ em ∂D, e

(ii) $\int_D f dM = 0$.

Dizemos que uma função f satisfazendo (i) e (ii) tem *condição de média nula*.

Teorema 2.1.14. *$A''_D(0) \geq 0$ para toda variação que fixa o bordo e preserva o volume se, e somente se, $J''_D(0)(f) \geq 0$ para toda função $f \in \mathcal{F}_D$.*

Demonstração. Suponha que $J''_D(0)(f) \geq 0$ para toda função f em $\mathcal{F}_D$. Seja $x_t : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma variação que fixa o bordo e preserva o volume, e seja fN a componente normal do campo variacional de x. Claramente, $f \equiv 0$ em ∂D e, pela fórmula (2.7) da primeira variação de volume, temos

$$\int_D f dM = V'_D(0) = 0 \ .$$

Assim $f \in \mathcal{F}_D$. Como x_t preserva o volume de x,

$$J''_D(0)(f) = A''_D(0) + nH_0V''_D(0) = A''_D(0) \ , \tag{2.15}$$

onde H_0 é tomado como em (2.9). Pela fórmula (2.14), da segunda variação de J_D, temos que $J''_D(0)$ depende apenas de f e, por hipótese, $J''(0)(f) \geq 0$. Portanto, $A''_D(0) \geq 0$ para a variação x_t.

Por outro lado, suponha que $A''_D(0) \geq 0$ para toda variação que fixa o bordo e preserva o volume de D. Seja $f \in \mathcal{F}_D$ e seja $y_t : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ a variação normal que preserva o volume no Lema 2.1.7. Para essa variação, $V''_D(0) = 0$ em (2.15) e portanto

$$J''_D(0)(f) = A''_D(0) \geq 0 \ ,$$

como queríamos demonstrar. □

Corolário 2.1.15. *A imersão $x : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é estável se, e somente se, $J''_D(0)(f) \geq 0$ para toda $f \in \mathcal{F}_D$.*

2.2 A ESFERA REDONDA É ESTÁVEL

Tendo definido o conceito de estabilidade de uma hipersuperfície, a Definição 2.1.10, podemos demonstrar que uma esfera redonda $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é estável. Esse resultado é a implicação direta do Teorema de Barbosa–do Carmo (enunciado na p. 35). Para uma demonstração desse fato, faremos primeiro uma revisão do estudo do espectro do operador Laplaciano de uma função. A maioria das definições e resultados apresentados aqui encontram-se nos livros [Agm], [Ali], [BGM], [Heb] e [Spi4].

2.2.1 Estudo do espectro do Laplaciano

O objetivo final dessa revisão é apresentar uma estimativa geométrica para o primeiro autovalor do Laplaciano de uma hipersuperfície compacta em $\mathbb{R}^{n+1}$. Para isso, devemos introduzir algumas propriedades sobre o espectro do Laplaciano.

Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma variedade regular e compacta, e $\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ o seu operador Laplaciano, que é linear sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$ e associa cada função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ à função $\Delta f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, bem como definimos na Seção 1.6, p. 25. Além disso, como consequência do Teorema da Divergência em M (Teorema 1.6.9), temos que Δ é *autoadjunto* com respeito ao produto escalar de funções dado por

$$(f, g) = \int_M f(p)g(p)dp \ . \tag{2.16}$$

Com efeito, o produto (2.16) está definido em geral sobre o espaço $L^2(M)$ de funções mensuráveis f sobre M que verificam

$$\int_M f(p)^2 dp < +\infty \ .$$

Evidentemente, $\mathcal{C}^\infty(M) \subset L^2(M)$. Se $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, e ∇f e ∇g indicam os gradientes das funções f e g, então, pelas propriedades de divergência exibidas na Seção 1.6, p. 24, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f) &= \operatorname{div}(f\nabla g) - \operatorname{div}(g\nabla f) \\ &= \langle \nabla f, \nabla g\rangle + f \operatorname{div}(\nabla g) - \langle \nabla g, \nabla f\rangle - g \operatorname{div}(\nabla f) \\ &= f\Delta g - g\Delta f \ , \end{aligned}$$

e integrando essa igualdade sobre M, pelo Corolário 1.6.10, temos que

$$(f, \Delta g) = \int_M f(p)\Delta g(p)dp = \int_M g(p)\Delta f(p)dp = (\Delta f, g) \ ,$$

provando, assim, que Δ é autoadjunto com respeito ao produto (,).

Definição 2.2.1. Dizemos que um número real λ é um *autovalor* [1] de Δ se existe alguma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ não-nula tal que

$$\Delta f + \lambda f = 0 \ . \tag{2.17}$$

Pela linearidade de Δ, resulta que se λ é um autovalor de Δ então o conjunto V_λ de soluções da equação (2.17), incluindo a solução trivial $f = 0$, é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}^\infty(M)$. Nesse caso, se $f \in V_\lambda$ dizemos que f é uma *autofunção* associada ao autovalor λ.

Por exemplo, está claro que $\lambda = 0$ é sempre um autovalor do Laplaciano, para qualquer hipersuperfície compacta M, e que toda função constante é uma autofunção de $\lambda = 0$. O seguinte resultado elementar, devido a Hopf, nos diz que de fato as funções constantes são as únicas autofunções associadas ao autovalor $\lambda = 0$. Com isso, a dimensão do subespaço V_0 é igual a 1.

Lema 2.2.2 (Teorema de E. Hopf)**.** *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma variedade regular e compacta. Se uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ verifica $\Delta f(p) \geq 0$ para todo ponto $p \in M$, então deve ser necessariamente constante (e,*

1 Não confundir esse λ com a notação utilizada na seção anterior para o método dos multiplicadores de Lagrange.

portanto, $\Delta f = 0$). Em particular, as únicas autofunções associadas ao autovalor $\lambda = 0$ são as funções constantes.

Demonstração. A demonstração segue da aplicação do Teorema da Divergência em M, o Corolário 1.6.10. Com efeito, como $\Delta f \geq 0$ em M e

$$\int_M \Delta f(p)dp = 0 \,,$$

devemos ter necessariamente $\Delta f = 0$. Mas então, pela propriedade (ii) da divergência na p. 24,

$$\mathrm{div}(f\nabla f) = \|\nabla f\|^2 + f\Delta f = \|\nabla f\|^2 \,.$$

Aplicando novamente o Corolário 1.6.10 temos que

$$\int_M \|\nabla f(p)\|^2 dp = \int_M \mathrm{div}(f\nabla f)(p)dp = 0 \,.$$

Isso implica que $\nabla f(p) = 0$ em todo $p \in M$ e, portanto, f é constante. □

Por outro lado, se $\lambda \neq 0$ é outro autovalor de Δ, então deve ser necessariamente positivo. Com efeito, suponhamos que $f \neq 0$ é uma autofunção associada ao autovalor $\lambda \neq 0$. Pelo que acabamos de provar, f não pode ser uma função constante. Fazendo $f = g$ na propriedade (iii) do Laplaciano na p. 25, Seção 1.6, temos

$$\frac{1}{2}\Delta f^2 \;=\; f\Delta f + \|\nabla f\|^2 = \; \lambda f^2 + \|\nabla f\|^2 \,,$$

donde $\Delta f = \lambda f$, por (2.17). Integrando essa igualdade sobre M temos que $\int_M \Delta f^2 dM = 0$, pelo Corolário 1.6.10, e portanto

$$\lambda = \frac{\int_M \|\nabla f\|^2 dp}{\int_M f^2(p)dp} > 0 \,,$$

visto que f não é constante. Nesse sentido, uma das propriedades básicas do Laplaciano é que o conjunto dos seus autovalores está formado por uma sucessão monótona crescente de números reais

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k < \ldots \,, \qquad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty \,, \tag{2.18}$$

e a dimensão de cada um dos subespaços de autofunções associadas é finita, $m_k = \dim V_{\lambda_k} < +\infty$ onde $k = 0, 1, \ldots$ (com $m_0 = 1$, como provamos no lema anterior). Além disso, o primeiro autovalor positivo λ_1 admite a seguinte caracterização

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_M \|\nabla f\|^2 dp}{\int_M f^2(p)dp} \,, \tag{2.19}$$

para toda função $f \neq 0$ que verifica a condição

$$\int_M f(p)dp = 0 \ ,$$

sendo, portanto o ínfimo da sequência em (2.18). A igualdade em (2.19) segue se, e só se, f é uma autofunção de λ_1. Para uma demonstração de todos esses resultados pode-se consultar o Theorem 14.6. em [Agm].

Demonstraremos agora que o primeiro autovalor do Laplaciano, λ_1, na esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$, é igual a n. Para isso, utilizamos o seguinte teorema (cf. uma demonstração em [Heb], p. 229.)

Teorema 2.2.3 (Lichnerowicz)**.** *Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta e g a sua métrica Riemanniana. Se a curvatura de Ricci de M satisfaz $Ric \geq k$, em que $k \geq 0$, então*

$$\lambda_1 \geq \frac{nk}{n-1} \ .$$

Pela Proposição 1.4.5, tem-se que a curvatura de Ricci na esfera Euclidiana $(\mathbb{S}^n, \delta)$, em que a curvatura seccional K_0 da esfera é igual a 1 e δ é a métrica canônica, é dada por

$$Ric = (n-1)K_0\delta = (n-1)\delta \geq n-1 \ .$$

Assim, do Teorema de Lichnerowicz, conclui-se que

$$\lambda_1 \geq \frac{n(n-1)}{n-1} = n \ .$$

Utilizando-se este fato, obtém-se o seguinte teorema:

Teorema 2.2.4. *Seja $\lambda_1(\mathbb{S}^n) := \lambda_1$ o primeiro autovalor do Laplaciano na esfera $(\mathbb{S}^n, \delta)$, onde δ é sua a métrica canônica. Então $\lambda_1 = n$.*

Demonstração. Considere sobre a esfera $\mathbb{S}^n$ as coordenadas polares (r, θ), em que $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, fornecidas pelo seguinte difeomorfismo:

$$\begin{aligned} G : (0,\pi) \times \mathbb{S}^{n-1} \quad &\rightarrow \quad \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ (r, \theta) \quad &\mapsto \quad G(r,\theta) = \left(\cos(r), \theta \sin(r)\right) \ . \end{aligned}$$

Assim, a métrica δ tem as seguintes expressões:

$$\delta_{rr} = 1 \ , \quad \delta_{r\theta} = 0 \quad \text{e} \quad \delta_{\theta\theta} = \sin^2 r \ .$$

Note que, como $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in S^{n-1}$, tem-se

$$1 = \theta_1^2 + \ldots + \theta_n^2 \ ,$$

logo,

$$0 = d(\theta_1^2 + \cdots + \theta_n^2) = 2(\theta_1 d\theta_1 + \cdots + \theta_n d\theta_n) \ .$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
\delta &= dt^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} dx^i dx^j \\
&= (d\cos(r))^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} d(\theta_i \sin(r)) d(\theta_j \sin(r)) \\
&= \sin^2(r) dr^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} (\theta_i \cos(r) dr + \sin(r) d\theta_i)(\theta_j \cos(r) dr + \sin(r) d\theta_j) \ .
\end{aligned}$$

Fazendo o produto tensorial das 1-formas $d\theta_i$ e $d\theta_j$, encontra-se

$$\begin{aligned}
\delta &= \sin^2(r) dr^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \theta_i \theta_j \cos^2(r) dr^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \theta_i \cos(r) \sin(r) dr d\theta_j \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \theta_j \cos(r) \sin(r) d\theta_i dr + \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \sin^2(r) d\theta_i d\theta_j \\
&= \sin^2(r) dr^2 + \cos^2(r) dr^2 \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \theta_i \theta_j + \sin^2(r) \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} d\theta_i d\theta_j \\
&\quad + \cos(r) \sin(r) dr \sum_{i=1}^{n} \theta_i d\theta_i + \cos(r) \sin(r) dr \sum_{i=1}^{n} \theta_i d\theta_i \\
&= dr^2 + \sin^2(r) \left(d\theta_1^2 + \cdots d\theta_n^2 \right) \ .
\end{aligned}$$

Como $(d\theta_1^2 + \cdots d\theta_n^2)$ restrita à esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ é exatamente a métrica canônica da mesma, segue-se a afirmação. Portanto, nesta carta local, a métrica de $\mathbb{S}^{n-1}$ é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sin^2(r) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sin^2(r) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Escolhendo a função $\varphi(x) = -\cos(r)$ e usando a fórmula em coordenadas para o Laplaciano (cf. p. 26) tem-se

$$\Delta_\delta \varphi = \frac{1}{\sin^{n-1}(r)} n \sin^{n-1}(r) \cos(r) = n \cos(r) \ .$$

Portanto, $\lambda_1 = n$, visto que $\lambda_1 \geq n$ e n é um autovalor de Δ_δ. $\square$

2.2.2 Demonstração do Teorema 2.2.5

Com o que apresentamos até aqui, estamos preparados para exibir a primeira parte da prova do Teorema de Barbosa–do Carmo, que enunciamos a seguir.

Teorema 2.2.5. *A esfera redonda* $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *é estável.*

Demonstração. Por simplicidade, vamos assumir que a esfera $\mathbb{S}^n$ tem raio 1, e seja $D \subset \mathbb{S}^n$ um domínio relativamente compacto em $\mathbb{S}^n$.

Seja também $f \in \mathcal{F}_D$, uma função com condição de média nula. Isto é, $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ é suave por partes e verifica

$$f \equiv 0 \ \text{ em } \ \partial D \qquad \text{e} \qquad \int_D f dM = 0\,. \tag{2.20}$$

Tomemos uma extensão de f, uma função $\overline{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ suave por partes tal que $\overline{f} \equiv 0$ em $\mathbb{S}^n - D$.

Agora, seja $\lambda_1(\mathbb{S}^n)$ o primeiro autovalor do problema $\Delta g + \lambda g = 0$ com $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^n)$. É sabido do Teorema 2.2.4 que $\lambda_1(\mathbb{S}^n) = n$. Além disso, pela desigualdade (2.19), temos

$$\int_{S^n} \|\nabla g\|^2 dM \geq \lambda_1(\mathbb{S}^n) \int_{\mathbb{S}^n} g^2 dM\,, \tag{2.21}$$

para toda função $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz $\int_{\mathbb{S}^n} g dM = 0$. Aqui, ∇g denota o gradiente de g na métrica induzida pela inclusão $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Usando agora o Teorema da Divergência (Teorema 1.6.9) na fórmula (2.14), da segunda variação do operador J_D, e o fato de que $\|B\|^2 = n$ (cf. Proposição 2.1.11), para a f acima (2.20), temos

$$\begin{aligned} J_D''(0)(f) &= \int_D (-f\Delta f - \|B\|^2 f^2) dM \\ &= \int_D (\|\nabla f\|^2 - \operatorname{div}(f\nabla f) - nf^2) dM \\ &= \int_D (\|\nabla f\|^2 - nf^2) dM\,, \end{aligned}$$

sendo a última igualdade decorrida do Corolário 1.6.10.

Como a desigualdade (2.21) vale para a extensão $\overline{f}$, que também satisfaz a condição de média nula, concluímos que

$$\begin{aligned} J''_D(0)(f) &= \int_D (\|\nabla f\|^2 - nf^2) dM \\ &= \int_D \|\nabla f\|^2 dM - n\int_D f^2 dM \\ &\geq \lambda_1(\mathbb{S}^n)\int_D f^2 dM - n\int_D f^2 dM \\ &= (\lambda_1(\mathbb{S}^n) - n)\int_D f^2 dM \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{F}_D$. Portanto $J''_D(0)(f) \geq 0$ e, pelo Corolário 2.1.15, a esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é estável. □

Observação 2.2.6. Perceba que, se tivéssemos definido a estabilidade de um domínio $D \subset M^n$ exigindo apenas que $J''_D(0) \geq 0$ para variações que fixam o bordo mas que não preservam o volume, a esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ não seria estável. Com efeito, escolha um domínio $D \subset \mathbb{S}^n$ contendo o hemisfério de $\mathbb{S}^n$ e tome $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ como a primeira autofunção para o Laplaciano em D (isto é, $f \equiv 0$ em ∂D). Como o autovalor correspondente $\lambda_1(D)$ satisfaz $\lambda_1(D) < n$, obtemos, por argumento análogo ao acima, que

$$J''_D(0)(f) = (\lambda_1(\mathbb{S}^n) - n)\int_D f^2 dM < 0\,,$$

e isso prova o que afirmamos.

2.3 UMA IMERSÃO ESTÁVEL É UMA ESFERA REDONDA

Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. Escolha um ponto $p \in M$ e uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em um espaço tangente T_pM de M em p. Estenda essa base a um referencial, em uma vizinhança adequada $V \subset M$ de p, por transporte paralelo (cf. Definição 1.3.4) de cada e_i, com $i = 1, \ldots, n$, ao longo de geodésicas provenientes de p. Esse referencial geodésico com tal extensão a uma vizinhança $x(p)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ será novamente denotado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Denote ainda por $\overline{\nabla}$ a conexão de $\mathbb{R}^{n+1}$ e por ∇ a conexão induzida em M. Note que

$$\nabla_{e_i} e_j(p) = 0 \qquad \text{e} \qquad [e_i, e_j](p) = 0\,,$$

para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n$.

Lema 2.3.1. *Com a notação acima, vale a seguinte identidade* *(i)* $\sum_i \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle = -\|B\|^2$.

Assuma que a curvatura média H de x é constante. Então

(ii) $\sum_i \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle (p) = 0$ *, para todo* $k = 1, \ldots, n$.

Demonstração. *(i)* Como $\langle N, N \rangle = 1$, temos que $\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_i \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} (\overline{\nabla}_{e_i} N), N \right\rangle &= -\sum_i \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle \\ &= -\sum_i \left\langle \sum_j \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle e_j \, , \, \sum_k \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle e_k \right\rangle \\ &= -\sum_{i,j} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle^2 \\ &= -\|B\|^2 \, , \end{aligned}$$

o que prova *(i)*.

(ii) Como $\langle N, e_k \rangle = 0$, temos

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle = -\left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} e_k \right\rangle \, ,$$

e consequentemente

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} (\overline{\nabla}_{e_i} N), e_k \right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} e_k \right\rangle = -\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} e_k \right\rangle - \left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} (\overline{\nabla}_{e_i} e_k) \right\rangle \, .$$

Como $\overline{\nabla}_{e_i} N$ é um vetor tangente e a componente tangente de $\overline{\nabla}_{e_i} e_k(p)$ é zero, obtemos

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} (\overline{\nabla}_{e_i} N), e_k \right\rangle (p) = -\left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} (\overline{\nabla}_{e_i} e_k) \right\rangle (p) = -\left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} (\overline{\nabla}_{e_k} e_i) \right\rangle (p) \, .$$

Como $\mathbb{R}^{n+1}$ é plano, temos que

$$\overline{\nabla}_{e_i} (\overline{\nabla}_{e_k} e_i)(p) = \overline{\nabla}_{e_k} (\overline{\nabla}_{e_i} e_i)(p) \, .$$

Assim,

$$\sum_i \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} (\overline{\nabla}_{e_i} N), e_k \right\rangle (p) = -\sum_i \left\langle N, \overline{\nabla}_{e_k} (\overline{\nabla}_{e_i} e_i) \right\rangle (p) = -\left\langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \left(\sum_i \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right) \right\rangle (p) \, .$$

Por outro lado, $\left\langle N, \sum_i \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle = nH$, com H constante. Então

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_k} N, \sum_i \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle = -\left\langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \left(\sum_i \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right) \right\rangle$$

e, finalmente,

$$\sum_i \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}(\overline{\nabla}_{e_i}N), e_k \right\rangle(p) = \left\langle \overline{\nabla}_{e_k}N, \sum_i \overline{\nabla}_{e_i}e_i \right\rangle(p) = 0 \, .$$

Isso completa a prova. □

Proposição 2.3.2. *Sejam $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante e v um vetor fixo unitário em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então a função $f = \langle v, N\rangle$ satisfaz*

$$\Delta f + \|B\|^2 f = 0 \, . \tag{2.22}$$

Demonstração. Dado $p \in M$, considere um referencial geodésico $e_1, \dots, e_n$ ao redor de p. Da Proposição 1.6.5, temos que o Laplaciano de f em p de tal referencial é dado por

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f))(p) \, .$$

Assim, pelo Lema 2.3.1, temos

$$\begin{aligned} \Delta f(p) &= \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(\langle v, N\rangle))(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle v, \overline{\nabla}_{e_i}(\overline{\nabla}_{e_i}N) \right\rangle(p) \\ &= -\langle v, N\rangle \|B\|^2(p) \\ &= -\|B\|^2 f(p) \, . \end{aligned}$$

Como p é arbitrário, a função f satisfaz (2.22). □

Lema 2.3.3. *Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média H. Então*

$$\|B\|^2 \geq nH^2 \, ,$$

e vale a igualdade em um ponto $p \in M$ se, e somente se, p é umbílico.

Demonstração. Sejam $k_1, \dots, k_n$ as curvaturas principais de x em $p \in M$. Então $\|B\|^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2$, e

$$\|B\|^2 - n^2H^2 = -2\sum_{i<j} k_i k_j \, ,$$

para $i, j = 1, \dots, n$. Por indução, temos que

$$\sum_{i<j}(k_i^2 + k_j^2) = (n-1)\sum_i k_i^2 \, .$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{i<j}(k_i - k_j)^2 &= (n-1)\sum_i k_i^2 - 2\sum_{i<j} k_i k_j \\ &= (n-1)\|B\|^2 + \|B\|^2 - n^2H^2 \\ &= n(\|B\|^2 - nH^2) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Segue então que $\|B\|^2 \geq nH^2$, valendo a igualdade apenas quando $k_i = k_j$ para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n$, isto é, quando p é umbílico. □

Lema 2.3.4. *Seja $g = \langle x, N\rangle$ a função suporte de x. Assuma que $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tem curvatura média constante $H = H_0$. Então a função suporte g de x satisfaz*

$$\Delta g = -nH_0 - \|B\|^2 g\ . \tag{2.23}$$

Demonstração. Seja $p \in M$ e considere um referencial geodésico ao redor de p como na Proposição 2.3.2. Como $\overline{\nabla}_{e_i} x = e_i$ e além disso $\langle e_i, N\rangle = 0$, então

$$\begin{aligned}\Delta g(p) &= \sum_i \{e_i e_i \langle x, N\rangle\}(p) \\ &= \sum_i \left[e_i \left\{\langle \overline{\nabla}_{e_i} x, N\rangle + \langle x, \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle\right\}\right](p) \\ &= \sum_i \left\{\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle + \langle x, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\rangle\right\}(p) \\ &= -\sum_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N\rangle(p) + \sum_i \langle x, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\rangle(p)\ .\end{aligned}$$

Segue do Lema 2.3.1 e da definição de H que

$$\Delta g(p) = -nH_0(p) - \|B\|^2 g(p)\ ,$$

como queríamos demonstrar. □

2.3.1 Hipersuperfícies totalmente umbílicas

Definição 2.3.5. Sejam N^{n+1} uma variedade com métrica Riemanniana e ∇ a sua conexão Riemanniana. Diz-se que uma imersão $x : M^n \to N^{n+1}$ é (totalmente) *umbílica* se para todo $p \in M$, a segunda forma fundamental B (cf. Seção 1.5) de x em p satisfaz

$$\langle B(X,Y), \eta\rangle(p) = \lambda(p)\langle X, Y\rangle \ , \tag{2.24}$$

com $\lambda(p) \in \mathbb{R}$, para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e todo campo unitário η normal a $x(M)$. Aqui estamos usando $\langle \ , \ \rangle$ para indicar a métrica g em N e a métrica induzida por x em M.

Sejam $T, X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Da condição (2.24) resulta que

$$-\langle \nabla_X \eta, Y\rangle = \lambda\langle X, Y\rangle \qquad \text{e} \qquad -\langle \nabla_T \eta, Y\rangle = \lambda\langle T, Y\rangle \ .$$

Derivando a primeira equação em relação a T e a segunda em relação a X, temos, para todo Y,

$$\langle \nabla_T\nabla_X\eta - \nabla_X\nabla_T\eta, Y\rangle = -\left\langle T(\lambda)X - X(\lambda)T + \nabla_{[T,X]}\eta, Y\right\rangle \ .$$

Supondo agora que N^{n+1} tem curvatura seccional constante, concluímos que $T(\lambda)X - X(\lambda)T = 0$. Como T e X podem ser escolhidos linearmente independentes, isso significa que $X(\lambda) = 0$, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$, donde λ é constante. Isso prova que:

Lema 2.3.6. *Nas condições acima, dada uma imersão $x : M^n \to N^{n+1}$ umbílica, se N^{n+1} tem curvatura seccional constante, então λ não depende de p.*

Na proposição a seguir, vamos mostrar que tomando $N^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica euclidiana na Definição 2.3.5, uma hipersuperfície umbílica deve ser um n-plano ou uma n-esfera.

Proposição 2.3.7. *Se a imersão $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é umbílica, então $x(M)$ está contida em um n-plano ou em uma n-esfera de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.3.6, λ é constante. Se $\lambda = 0$, temos $\langle \nabla_X\eta, Y\rangle = 0$ para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e todo $\eta \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$. Decorre daí que $x(M)$ está contido em um n-plano afim de $\mathbb{R}^{n+1}$. Agora, se $\lambda \neq 0$, considere a aplicação $y : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$y(p) = x(p) - \frac{\eta(p)}{\lambda} \ , \quad p \in M \ .$$

Sejam $T, Y \in \mathcal{X}(M)$. Observe que

$$\langle \nabla_T y, Y\rangle = \langle T, Y\rangle - \frac{1}{\lambda}\langle \nabla_T\eta, Y\rangle = 0 \ .$$

Resulta daí que $y(M)$ reduz-se a um ponto, digamos x_0, e que x satisfaz

$$\|x(p) - x_0\|^2 = \frac{1}{\lambda^2} ,$$

isto é, $x(M)$ está contida em uma esfera de centro x_0 e raio $1/\lambda$. □

2.3.2 Demonstração do Teorema 2.3.8

Agora, finalmente, apresentamos a segunda parte da demonstração do Teorema de Barbosa–do Carmo, o que conclui a prova.

Teorema 2.3.8. *Sejam M^n uma variedade compacta orientável, e $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura constante não nula. Se x é estável, então $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma esfera redonda $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

Demonstração. Como M é compacta, sabemos que a função suporte g de x satisfaz a Primeira Fórmula Integral de Minkowski (cf. Teorema 1.6.16 e Observação 1.6.17),

$$\int_M HgdM = -\int_M dM . \tag{2.25}$$

Como $H = H_0$ é constante, integrando a expressão (2.23) sobre M e novamente usando o Corolário 1.6.10, temos

$$\int_M \Delta g dM = \int_M (-nH_0 - \|B\|^2 g) dM = 0 ,$$

o que resulta, multiplicando por H_0 em ambos os lados da igualdade, em

$$-\int_M \|B\|^2 g H_0 dM = \int_M nH_0^2 dM , \tag{2.26}$$

Tome $f = H_0 g + 1$. Pela fórmula (2.25), temos

$$\int_M (H_0 g + 1) dM = \int_M H_0 g dM + \int_M dM = -\int_M dM + \int_M dM = 0 .$$

Isto é, $\int_M f dM = 0$, e podemos considerar uma variação de M cuja componente normal do campo variacional é fN e calculamos

$$J''_M(0)(f) = \int_M (-f\Delta f - \|B\|^2 f^2) dM .$$

Pelo Lema 2.3.4, verificamos que

$$\begin{aligned}
-f\Delta f - \|B\|^2 f^2 &= -(H_0 g + 1)\Delta(H_0 g + 1) - \|B\|^2 (H_0 g + 1)^2 \\
&= -(H_0 g + 1) H_0 \Delta g - \|B\|^2 (H_0^2 g^2 + 2H_0 g + 1) \\
&= (H_0 g + 1) H_0 (n H_0 + \|B\|^2 g) - \|B\|^2 (H_0^2 g^2 + 2H_0 g + 1) \\
&= n H_0^3 g + n H_0^2 - \|B\|^2 H_0 g - \|B\|^2 \\
&= n H_0^2 (H_0 g + 1) - \|B\|^2 (H_0 g + 1) \\
&= n H_0^2 f - \|B\|^2 f \, .
\end{aligned}$$

Segue que

$$J''_M(0)(f) = \int_M (n H_0^2 f - \|B\|^2 f) dM = -\int_M \|B\|^2 (H_0 g + 1) dM \, . \tag{2.27}$$

Por hipótese, x é estável e então $J''_M(0)(f) \geq 0$. Daí, por (2.27), temos que

$$-\int_M \|B\|^2 H_0 g dM \geq \int_M \|B\|^2 dM \, .$$

Logo, a partir de (2.26), temos da desigualdade acima e do Lema 2.3.3 que

$$\int_M n H_0^2 dM = -\int_M \|B\|^2 H_0 g dM \geq \int_M \|B\|^2 dM \geq \int_M n H_0^2 dM \, .$$

Segue que $\|B\|^2 = n H_0^2$ e, ainda pelo Lema 2.3.3, todos os pontos de M são umbílicos. Pela compacidade de M e pela Proposição 2.3.7, concluímos que $x(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma n-esfera, como queríamos provar. □

APÊNDICE

A PRIMEIRA VARIAÇÃO PARA A ÁREA

Aqui, demonstramos a fórmula (2.6) para a primeira variação da área A.

Lembremos que o funcional área associado a uma variação $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$, com $\varepsilon > 0$, é a aplicação

$$A_D(t) = \int_D dS_t \ , \tag{A.1}$$

onde dS_t é o elemento de n-área de M^n na métrica induzida pela imersão x_t.

Para facilitar a leitura, abandonaremos a notação de Einstein e ao invés de usar g^{ij}, escreveremos g_{ij} para as componentes da métrica. Denotaremos ainda por g^t a métrica em M^n induzida por x_t. Isto é,

$$g^t(Y, Z) = \langle dx_t Y, dx_t Z \rangle \ , \tag{A.2}$$

onde $Y, Z \in \mathcal{X}(D)$ e $\langle \ , \ \rangle$ é a métrica usual de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Considere $\{\frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}\}$ uma base em uma vizinhança de $p \in M$ e $\{du_1, \ldots, du_n\}$ sua respectiva base dual. Assim, a expressão local do elemento de n-área de M^n na métrica g^t é dada por

$$dS_t = \sqrt{\det(g^t_{ij})} du_1 \wedge \ldots \wedge du_n \ . \tag{A.3}$$

A primeira variação de área será obtida a partir dos seguintes lemas.

Lema A.1. *Sejam $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma variação da imersão $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\{e_1^{t_0}, \ldots, e_n^{t_0}\}$ uma base de T_pM na métrica g^{t_0} e $\overline{E} = \frac{\partial}{\partial t}$ numa vizinhança coordenada de $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$. Então $[e_i^{t_0}, \overline{E}] = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Seja $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to \mathbb{R}$ suave. Queremos calcular $[e_i^{t_0}, \overline{E}](f)$. Tome $q \in M$ e considere $y : W \subset \mathbb{R}^n \to M$ uma parametrização de M em q, onde $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Considere ainda

$$\widetilde{y} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \to (-\varepsilon, \varepsilon) \times M^n$$

a parametrização de $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M^n$ em (t, q), definida por $\widetilde{y}(t, p) = (t, y(q))$. Aqui identificamos $T_{(t,q)}(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ com T_qM. Assim,

$$e^{t_0}(t, q) = \sum_{i=1}^{n} a_i(q) \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad \text{e} \qquad \overline{E} = \frac{\partial}{\partial t} \ .$$

Portanto, se $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então

$$\begin{aligned}
[e_i^{t_0}, \overline{E}](f) &= e_i^{t_0}(\overline{E}(f)) - \overline{E}(e_i^{t_0}(f)) \\
&= e_i^{t_0}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \overline{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(q)\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i(q)\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(q)\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) \\
&= 0 \,.
\end{aligned}$$

□

Observe que a escolha da notação $e_i^{t_0}$ como campo em $\mathcal{X}(M)$ é feita unicamente para concordar com a notação do lema a seguir.

Além disso, note que, se

$$E = dX \cdot \overline{E} = \frac{\partial x}{\partial t} \qquad \text{e} \qquad e_i = dx_t e_i^{t_0} \ ,$$

então $[e_i, E] = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, pois

$$[e_i, E] = dX[e_i^{t_0}, \overline{E}] \ .$$

Lema A.2. *A derivada do elemento de n-área com respeito a t é dada por*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} dS_t = -nH_{t_0} f_{t_0}(p) dS_{t_0} + \sum_{i=1}^{n} e_i \langle T_{t_0}, e_i \rangle_{(t_0,p)} dS_{t_0} \ ,$$

onde $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $p \in M^n$ e T_{t_0} é um vetor tangente à M^n em (t_0, p).

Demonstração. Considere um sistema de coordenadas de vetores ortonormais em $p \in M^n$, definido em uma vizinhança $V \subset M^n$ de p, com respeito à métrica g^{t_0}.

Derivando a expressão (A.3), temos

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} dS_t = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0} \sqrt{\det(g_{ij}^t)} du_1 \wedge \ldots \wedge du_n \ .$$

Precisamos então calcular o lado direito da igualdade.

Temos que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}\sqrt{\det(g_{ij}^t)} &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}\left[\det(g_{ij}^t)\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}\det(g_{ij}^t)}{\underbrace{\sqrt{\det(g_{ij}^{t_0}(p))}}_{1}}\\
&= \frac{1}{2}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}\det(g_{ij}^t)\\
&= \frac{1}{2}(\det)'(g_{ij}^{t_0}(p))\cdot\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}(g_{ij}^t)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}(g_{ij}^t)(p)\right),
\end{aligned}$$

pois $g_{ij}^{t_0}(p) = Id$ e a derivada da função determinante aplicado à matriz identidade resulta no funcional linear traço.

Para calcular os elementos da matriz

$$\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}(g_{ij}^t)\right),$$

considere $e_i^{t_0} = \frac{\partial}{\partial u_i}$ os vetores coordenados da vizinhança normal em p. Assim, $\{e_1^{t_0},\ldots,e_n^{t_0}\}$ é uma base ortonormal de T_pM na métrica g^{t_0} e, além disso, $\nabla_{e_i^{t_0}}e_j^{t_0}(p) = 0$. Denotemos ainda $e_i = dx_t\cdot e_i^{t_0}$ e $E = dx\cdot\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}$. Assim, pela expressão (A.2),

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}(g_{ij}^t) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}\langle dx_t\cdot e_i^{t_0}, dx_t\cdot e_j^{t_0}\rangle.$$

Usando a compatibilidade da conexão com a métrica, temos

$$\langle dx_t\cdot e_i^{t_0}, dx_t\cdot e_j^{t_0}\rangle = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}\langle e_i, e_j\rangle = \langle\overline{\nabla}_E e_i, e_j\rangle + \langle e_i, \overline{\nabla}_E e_j\rangle, \tag{A.4}$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana em $\mathbb{R}^{n+1}$ associada à métrica $\langle\ ,\ \rangle$.

Como $(-\varepsilon,\varepsilon)\times M^n$ tem estrutura diferencial de produto, pelo lema anterior, temos que

$$[e_i, E] = \overline{\nabla}_{e_i}E - e_i\overline{\nabla}_E = 0,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Aplicando a equação acima em (A.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}(g_{ij}^t) &= \langle \overline{\nabla}_E e_i, e_j\rangle + \langle e_i, \overline{\nabla}_E e_j\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{e_i} E, e_j\rangle + \langle e_i, \overline{\nabla}_{e_j} E\rangle \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right), e_j\right\rangle + \left\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_j}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right\rangle .
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}\sqrt{\det(g_{ij}^t)} &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}(g_{ij}^t)(p)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}(g_{ii}^t)(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right), e_i\right\rangle_{(t_0,p)} .
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\frac{\partial x}{\partial t}(p) = f_t(p)N_t(p) + T_t(p) \ ,$$

onde $T_t(p)$ é um vetor tangente à M^n em (t,p) e N_{t_0} é um vetor normal à M^n com relação à métrica g^{t_0}. Segue que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}\sqrt{\det(g_{ij}^t)} &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right), e_i\right\rangle_{(t_0,p)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i(f)\langle N, e_i\rangle_{(t_0,p)} + \sum_{i=1}^{n} f_{t_0}(p)\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_i\rangle_{(t_0,p)} \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i\rangle_{(t_0,p)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_{t_0}(p)\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_i\rangle_{(t_0,p)} + \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i\rangle_{(t_0,p)} \ . \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}$$

Sabendo-se que

$$\begin{aligned}
nH_{t_0} &= \mathrm{tr}(S_{N_{t_0}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle S_{N_{t_0}}(e_i)N, e_i\rangle_{(t_0,p)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{e_i} N_{t_0}, e_i\rangle_{(t_0,p)} \ ,
\end{aligned}$$

no primeiro somatório de (A.5), obtemos

$$f_{t_0}(p)\sum_{i=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{e_i}N_{t_0}, e_i\rangle_{(t_0,p)} = -nH_{t_0}f_{t_0}(p)\ . \tag{A.6}$$

Com o termo do segundo somatório de (A.5), ficamos com

$$\begin{aligned}\langle\overline{\nabla}_{e_i}T, e_i\rangle_{(t_0,p)} &= e_i\langle T_{t_0}, e_i\rangle_{(t_0,p)} - \langle T_{t_0}, \overline{\nabla}_{e_i}e_i\rangle_{(t_0,p)}\\ &= e_i\langle T_{t_0}, e_i\rangle_{(t_0,p)}\ ,\end{aligned} \tag{A.7}$$

pois $\overline{\nabla}_{e_i}e_i(p) = (\overline{\nabla}_{e_i}e_i)^N(p)$. Assim, usando (A.6) e (A.7), a equação (A.5) se iguala a

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}\sqrt{\det(g^t_{ij})} = nH_{t_0}f_{t_0} + e_i\langle T_{t_0}, e_i\rangle_{(t_0,p)}\ .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} dS_t &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0}\sqrt{\det(g^t_{ij})}dS_{t_0}\\ &= -nH_{t_0}f_{t_0}(p)dS_{t_0} + \sum_{i=1}^{n}e_i\langle T_{t_0}, e_i\rangle_{(t_0,p)}dS_{t_0}\ .\end{aligned}$$

□

Enfim, a *fórmula para a primeira variação da área*.

Teorema A.3. *Se $X : (-\varepsilon,\varepsilon)\times\overline{D}\to\mathbb{R}^{n+1}$ é uma variação da imersão x, que preserva o bordo, então a primeira variação da área quando $t = 0$ é dada por*

$$A'_D(0) = -n\int_D fHdS\ , \tag{A.8}$$

onde $f = \left\langle\frac{\partial X}{\partial t}(0,p), N\right\rangle$.

Demonstração. Tome $t_0\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ fixo. Pelo Lema A.2, vale que

$$\begin{aligned}A'_D(t_0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0}\int_D dS_t = \int_D\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} dS_t\\ &= -\int_D nH_{t_0}f_{t_0}(p)dS_{t_0} + \int_D\sum_{i=1}^{n}e_i(\langle T_{t_0}, e_i\rangle_{(t_0,p)})dS_{t_0}\\ &= -\int_D nH_{t_0}f_{t_0}(p)dS_{t_0} + \int_D d\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\langle T_{t_0}, e_i\rangle_{(t_0,p)}du_1\wedge\ldots\wedge\widehat{du_i}\wedge\ldots\wedge du_n\right),\end{aligned}$$

onde $\widehat{du_i}$ significa que o termo du_i está omitido na soma. Segue então do Teorema de Stokes que

$$\begin{aligned} A'_D(t_0) &= -\int_D nH_{t_0}f_{t_0}(p)dS_{t_0} + \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial D}(-1)^{i+1}\langle T_{t_0}, e_i\rangle_{(t_0,p)}du_1\wedge\ldots\wedge\widehat{du_i}\wedge\ldots\wedge du_n \\ &= -\int_D nH_{t_0}f_{t_0}(p)dS_{t_0}\ . \end{aligned}$$

A última igualdade decorre do fato que $T_{t_0}\equiv 0$ em ∂D, devido X ser uma variação que fixa o bordo. Em particular, para $t_0 = 0$,

$$A'_D(0) = -n\int_D HfdS\ .$$

□

B SEGUNDA VARIAÇÃO PARA O OPERADOR J

Aqui, pretendemos demonstrar a fórmula (2.14) para a segunda variação do operador J, para variações (não necessariamente normais) $x_t : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ que fixam o bordo ∂M. Usaremos a notação da Seção 2.1, visto que será conveniente denotar a variação $x_t(p)$ por $X(p,t)$, e introduziremos as seguintes notações adicionais.

Fixamos $p \in M$ e sejam $(u_1, \ldots, u_n)$ as coordenadas em uma vizinhança de p em M. Para encurtar as fórmulas, usaremos as seguintes notações

$$\xi = \frac{\partial X}{\partial t}, \qquad \xi_j = \frac{\partial \xi}{\partial u_j}, \qquad x_j = \frac{\partial X}{\partial u_j}, \qquad N_j = \frac{\partial N}{\partial u_j}.$$

Identificaremos o produto exterior $v_1, \ldots, v_n$ de n vetores $v_i \in \mathbb{R}^{n+1}$, $i = 1, \ldots, n$, com um vetor positivamente orientado $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ normal ao hiperplano gerado por $v_1, \ldots, v_n$ e tal que $\|v\| = \|v_1 \wedge \ldots \wedge v_n\|$. Em particular,

$$N = \frac{X_1 \wedge \ldots \wedge X_n}{\|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n\|}.$$

Como N_j é um vetor tangente, escrevemos

$$N_j = \sum a_{jk} X_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{B.1}$$

Finalmente, temos que

$$g_{ij} = \langle X_i, X_k \rangle, \qquad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}, \qquad g = \det(g_{ij}) = \|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n\|^2.$$

Proposição B.1. *Valem as seguintes identidades:*

$$(nH)^2 - \sum_{kj} (a_{jj} a_{kk} - a_{jk} a_{kj}) = \|B\|^2 \tag{B.2}$$

$$\sum_j \left\langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\frac{\partial N}{\partial t}}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n \right\rangle_j = \sqrt{g}\Delta f + \sum_{jk} \{g^{jk} \sqrt{g} \langle N_k, \xi \rangle\}_j, \tag{B.3}$$

onde $f = \langle \xi, N \rangle$.

Na proposição acima e em todo o texto,

$$X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{V}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n$$

significa que V se encontra na j-ésima posição.

Demonstração. Para provar (B.2), usamos (B.1) e obtemos que os coeficientes B_{ij} da segunda forma fundamental B são dados por

$$\begin{aligned} B_{jl} &= \langle N_j, X_l \rangle \\ &= \langle \sum a_{jk} X_k, X_l \rangle \\ &= \sum a_{jk} \langle X_k, X_l \rangle \\ &= \sum_k a_{jk} g_{kl} \ ; \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{jk} a_{jk} a_{kj} &= \sum_{jk} \left(\sum_l g^{jl} B_{lk} \right) \left(\sum_m g^{jm} B_{mk} \right) \\ &= \|B\|^2 \ . \end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\sum_{kj} (a_{jj} a_{kk} - a_{jk} a_{kj}) = (nH)^2 - \|B\|^2 \ .$$

Para provar (B.3), primeiro, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{X_1 \wedge \ldots \wedge X_n}{\|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n\|} \\ &= \frac{1}{\|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n\|} \sum_j X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\xi_j}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n \\ & \quad + \text{parte normal} \ . \end{aligned}$$

Assim, como

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{jk} \left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial f}{\partial u_k} \right)_j \ ,$$

obtemos, denotando com um sobrescrito, digamos j, a derivada em u_j

$$\sum_j \left\langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\frac{\partial N}{\partial t}}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n, N \right\rangle_j = -\sum_j \left\langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{N}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n, \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle_j$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{jk}\left\{\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overbrace{N}^{j}\wedge\ldots\wedge X_n, X_1\wedge\ldots\wedge\overbrace{\xi_k}^{j}\wedge\ldots\wedge X_n\rangle\frac{1}{\|X_1\wedge\ldots\wedge X_n\|}\right\}_j \\
&= -\sum_{jk}\left\{\frac{(-1)^{j+k}}{\|X_1\wedge\ldots\wedge X_n\|}\langle N,\xi_k\rangle\langle X_1\wedge\ldots\wedge\widehat{X}_j\wedge\ldots\wedge X_n, X_1\wedge\ldots\wedge\widehat{X}_k\wedge\ldots\wedge X_n\rangle\right\}_j \\
&= -\sum_{jk}\left\{\sqrt{g}g^{jk}\langle N,\xi_k\rangle\right\}_j \\
&= -\sqrt{g}\Delta f+\sum_{jk}\left\{\sqrt{g}g^{jk}\langle N_k,\xi\rangle\right\}_j\ ,
\end{aligned}
$$

onde, como usual, $\widehat{X}_j$ significa que o termo X_j está omitido. Isso prova (B.3). □

Finalmente, vamos à demonstração da fórmula da segunda variação de J. Para isso, começamos a partir da fórmula da primeira variação de J, vista na equação (2.12),

$$\frac{dJ}{dt}(t) = -\int_M n(H-H_0)f\|X_1\wedge\ldots\wedge X_n\|du_1\ldots du_n\ .$$

Note que o integrando não depende do sistema de coordenadas e faz sentido integrar em M. Como $H = H_0$ em $t = 0$, temos que

$$J''(0) = -\int_M \frac{\partial}{\partial t}\{n(H-H_0)\}f dM_0\ ,$$

onde $dM_0 = \|X_1\wedge\ldots\wedge X_n\|du_1\ldots du_n$. Portanto, devemos calcular a derivada sob o sinal da integral na expressão acima. Como H_0 é constante, segue que

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial t}(nH-nH_0) &= -\frac{\partial}{\partial t}nH \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\sum_j\frac{1}{\|X_1\wedge\ldots\wedge X_n\|}\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overbrace{N_j}^{j}\wedge\ldots\wedge X_n, N\rangle \\
&= \frac{1}{\|X_1\wedge\ldots\wedge X_n\|}\left\{\sum_{j\neq k}\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overbrace{\xi_k}^{k}\wedge\ldots\wedge\overbrace{N_j}^{j}\wedge\ldots\wedge X_n, N\rangle\right.
\end{aligned}
$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\left\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overbrace{\frac{\partial N_j}{\partial t}}^{j}\wedge\ldots\wedge X_n, N\right\rangle+\sum_{j=1}^{n}\left\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overbrace{N_j}^{j}\wedge\ldots\wedge X_n,\frac{\partial N}{\partial t}\right\rangle\right\}$$

$$-\frac{1}{\|X_1\wedge\ldots\wedge X_n\|}\sum_{kj}\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overbrace{\xi_k}^{k}\wedge\ldots\wedge X_n, X_1\wedge\ldots\wedge X_n\rangle\cdot\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overbrace{N_j}^{j}\wedge\ldots\wedge X_n, N\rangle\ .$$

Como ambos N_j e $\partial N/\partial t$ são vetores tangentes, a terceira soma da expressão acima se anula. Desse modo, a última soma pode ser escrita como

$$\frac{1}{\|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n\|} nH \sum_k \langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\xi_k}^{k} \wedge \ldots \wedge X_n, N \rangle \, .$$

Segue que

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial t}(nH - nH_0) \quad = \quad & \frac{1}{\|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n\|} \Bigg\{ \sum_{j \neq k} \langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\xi}^{k} \wedge \ldots \wedge \overbrace{N_j}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n, N \rangle_k \\
& - \sum_{\substack{j \neq k \neq l \\ j \neq l}} \langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\xi}^{k} \wedge \ldots \wedge \overbrace{N_j}^{j} \wedge \ldots \wedge X_{lk} \wedge \ldots \wedge X_n, N \rangle \\
& - \sum_{j \neq k} \langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\xi}^{k} \wedge \ldots \wedge \overbrace{N_{kj}}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n, N \rangle \\
& - \sum_{j \neq k} \langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\xi}^{k} \wedge \ldots \wedge \overbrace{N_j}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n, N_k \rangle \\
& + \sum_{j} \left\langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\frac{\partial N}{\partial t}}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n, N \right\rangle_j \\
& - \sum_{j \neq k} \left\langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{X_{jk}}^{k} \wedge \ldots \wedge \overbrace{\frac{\partial N}{\partial t}}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n, N \right\rangle \\
& - \sum_{j} \left\langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\frac{\partial N}{\partial t}}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n, N_j \right\rangle + nH \sum_k \langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\xi}^{k} \wedge \ldots \wedge X_n, N \rangle_k \\
& - nH \sum_{j \neq k} \langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\xi}^{k} \wedge \ldots \wedge \overbrace{X_{jk}}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n, N \rangle \\
& - nH \sum_{k} \langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\xi}^{k} \wedge \ldots \wedge X_n, N_k \rangle \Bigg\} \, .
\end{aligned}$$

As $2^a, 3^a, 6^a$ e 9^a somas da expressão acima se anulam, pois cada um desses termos tem um correspondente com sinal oposto. Cada termo na 7^a soma é igual a zero. Usando (B.1), obtemos na 4^a soma

$$\sum_{j \neq k} (a_{jj} a_{kk} - a_{jk} a_{kj}) f \|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n\|$$

e a última soma fica

$$-n^2H^2 f \|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n\| \ .$$

Segue que, usando (B.2),

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial t}(nH - nH_0) &= \frac{1}{\|X_1 \wedge \ldots \wedge X_n\|}\Bigg\{ \sum_{j \neq k} \langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\xi}^{k} \wedge \ldots \wedge \overbrace{N_j}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n, N\rangle_k \\
&+ \sum_j \left\langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\frac{\partial N}{\partial t}}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n, N \right\rangle_j + nH \sum_k \langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\xi}^{k} \wedge \ldots \wedge X_n, N\rangle_k \\
&- \|B\|^2 f \Bigg\} \ .
\end{aligned}$$

Agora, usando (B.3) e notando que os integrandos abaixo não dependem do sistema de coordenadas, obtemos

$$\begin{aligned}
J''(0) &= \int_M (-f\Delta f - \|B\| f^2) dM_0 \\
&+ \int_M \sum_{j \neq k} \langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\xi}^{k} \wedge \ldots \wedge \overbrace{N_j}^{j} \wedge \ldots \wedge X_n, N\rangle_k f du_1 \ldots du_n \\
&- nH_0 \int_M \sum_k \langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overbrace{\xi}^{k} \wedge \ldots \wedge X_n, N\rangle_k f du_1 \ldots du_n \\
&+ \int_M \sum_{jk} [g^{jk} \sqrt{g} \langle N_k, \xi \rangle]_j f du_1 \ldots du_n \ .
\end{aligned}$$

Como $\xi = 0$ em ∂M, pelo Teorema de Stokes, temos que as três últimas integrais são zero. Isso completa a prova.

BIBLIOGRAFIA

[Agm] AGMON, Schmuel; **Lecture on Elliptic Boundary Value Problems,** Jerusalem: D. Van Nostrand Company, Inc., 250–261, 1965.

[Ali] ALIAS, Luis J.; **Análisis Geometrico y Geometria Global de Superficies, Una Introduccion Elemental.** XIV Escola de Geometria Diferencial (Congresso), 2006.

[BdC] BARBOSA, J. Lucas; CARMO, Manfredo P. do; **Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature,** Mathematische Zeitschrift (Springer-Verlag) **185**, 339–353, 1984.

[BdCE] BARBOSA, J. Lucas; CARMO, Manfredo P. do; ESCHENBURG, Jost; **Stability of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Riemannian Manifolds,** Mathematische Zeitschrift (Springer-Verlag) **197**, 123–138, 1988.

[BGM] BERGER, Marcel; GAUDUCHON, Paul; MAZET, Edmond; **Le Spectre d'une Variété Riemannienne,** Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag **194**, 1971.

[Bol] BOLZA, Oscar; **Vorlesungen über Variationsrechnung,** Berlin–Leipzig: Teubner, 1909.

[Bie] BIEZUNER, Rodney J.; **Geometria Riemanniana** (Notas de aula), Belo Horizonte: UFMG, 2017. Disponível em: ⟨http://www.mat.ufmg.br/~rodney⟩. Acesso em: 10 fevereiro 2018.

[dC1] CARMO, Manfredo P. do; **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies,** Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[dC2] ____ . **Geometria Riemanniana,** 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[Kar] GROSSE-BRAUCKMANN, Karsten; **Lectures on Surfaces of Constant Mean Curvature,** Darmstadt, 2010.

[Heb] HEBEY, Emmanuel; **Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés,** Paris: Diderot, 226–232, 1997.

[Hop] HOPF, Heinz; **Differential geometry in the large,** Lectures Notes in Mathematics 1000 (Seminar New York University 1947, Stanford 1956), Springer-Verlag, 1983.

[HTY] HSIANG, W. Y.; TENG, Z. H.; YU, W.; **New examples of constant mean curvature immersions of $(2k-1)$-spheres into euclidian 2k-space,** Ann. of Math. **117**, 609–625, 1983.

[Lee] LEE, John M.; **Introduction to Smooth Manifolds,** 2 ed. Graduate Texts in Mathematics 218. New York: Springer, 2012.

[Lop] LOPÉZ, Rafael; **Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary,** Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2013.

[Spi1] SPIVAK, Michael; **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry vol.1**, Texas: Publish or Perish, Inc., 227–228, 1999.

[Spi4] SPIVAK, Michael; **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry vol.4**, Texas: Publish or Perish, Inc., 1999.

ÍNDICE