Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Programa de Pós-graduação em Matemática

DIEGO SOUSA DE OLIVEIRA

ESPECTRO DE OPERADORES DE LAPLACE SOB PRESCRIÇÃO DE SIMETRIAS

Santo André, SP
2024

DIEGO SOUSA DE OLIVEIRA

ESPECTRO DE OPERADORES DE LAPLACE SOB PRESCRIÇÃO DE SIMETRIAS

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Centro de Matemática, Computação e Cognição , da Universidade Federal do ABC, para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos

Santo André, SP
2024

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Sousa de Oliveira, Diego
Espectro de operadores de Laplace sob prescrição de simetrias / Diego Sousa de Oliveira. — 2024.

192 fls.

Orientação de: Marcus Antonio Mendonça Marrocos

Tese (Doutorado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2024.

1. Laplaciano. 2. espectro. 3. representações. 4. espaços homogêneos. 5. simetrias. I. Mendonça Marrocos, Marcus Antonio. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2024. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência do orientador.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

Ata de Defesa de Tese de Doutorado e Folha de Assinaturas

No dia 12 de Julho de 2024 às 10:00, no local: Auditório 801 no 8º andar do Bloco B do Campus Santo André da Universidade Federal do ABC, realizou-se a Defesa da Tese de Doutorado, que constou da apresentação do trabalho intitulado **"Espectro de operadores de Laplace sob prescrição de simetrias"** de autoria do candidato, **DIEGO SOUSA DE OLIVEIRA**, RA nº 23201931097, discente do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da UFABC, sob orientação do Profº MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o candidato foi considerado APROVADO pela Banca Examinadora.

E, para constar, foi lavrada a presente ata e folha de assinaturas assinada pelos membros da Banca.

gov.br Documento assinado digitalmente
MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS
Data: 16/07/2024 16:25:28-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS, UFAM
Presidente - Interno ao Programa

gov.br Documento assinado digitalmente
ZHANNA GENNADYEVNA KUZNETSOVA
Data: 19/07/2024 17:15:52-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dra. ZHANNA GENNADYEVNA KUZNETSOVA, UFABC
Membro Titular - Examinador(a) Interno ao Programa

gov.br Documento assinado digitalmente
CRISTIAN FAVIO COLETTI
Data: 18/07/2024 15:09:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. CRISTIAN FAVIO COLETTI, UFABC
Membro Titular - Examinador(a) Interno ao Programa

gov.br Documento assinado digitalmente
LINO ANDERSON DA SILVA GRAMA
Data: 18/07/2024 15:31:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Dr. LINO ANDERSON DA SILVA GRAMA
Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

Dr. DRAGOMIR MITKOV TSONEV, UFAM
Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

Dr. ROLDAO DA ROCHA JUNIOR, UFABC
Membro Suplente - Examinador(a) Interno ao Programa

Dr. JOSE NAZARENO VIEIRA GOMES, UFSCAR
Membro Suplente - Examinador(a) Externo à Instituição

Dr. GERMAN ALONSO BENITEZ MONSALVE, UFAM
Membro Suplente - Examinador(a) Externo à Instituição

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

Folha de Ressalvas

(não incluir esta Folha de Ressalvas na versão final da Tese)

Ressalvas e sugestões da Banca examinadora:

Os membros que participaram de modo remoto foram:

CRISTIAN FAVIO COLETTI
ZHANNA GENNADYEVNA KUZNETSOVA
LINO ANDERSON DA SILVA GRAMA

Por sugestão da banca examinadora, o **novo título** passa a ser (em letra de forma e legível):

Indique o **idioma** da dissertação/tese: ☐ **Português** ☐ **Inglês** ☐ **Outro:** ___________________

a) Novo Título em **Português** (se a dissertação/tese é em português):

b) Novo Título em **Inglês** (preenchimento obrigatório para dissertação/tese em qualquer idioma):

c) Novo Título em **outro idioma**, conforme o idioma indicado acima, se houver:

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Este trabalho também teve incentivo do programa interno de fomento de bolsas da Universidade Federal do ABC, nos primeiros anos. Agradeço imensamente aos fomentos, às políticas, aos órgãos e aos indivíduos responsáveis por incentivar a pesquisa e o acesso ao conhecimento.

Agradeço a todos os que me ajudaram na elaboração deste trabalho. Em especial, pelo gigantesco suporte e parceria de longa data, ao professor Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos. Agradeço também à equipe em geral da Universidade Federal do ABC, a qual possibilitou um curso de qualidade e bem estruturado. Menciono ainda a importância de estudantes e docentes ligados aos programas de matemática, por comporem um grupo extremamente prestativo e agregador. Agradeço a parceria com o professor Cristian F. Coletti e com o estimado amigo Lucas R. de Lima, que juntamente comigo e com o professor Marcus A.M. Marrocos, desenvolveram um importante conjunto de resultados desta pesquisa. Agradeço ao professor Dragomir da UFAM pela atenção e por ter se engajado no nosso trabalho ao longo desses anos, aceitando convites de bancas e rodas de conversa, além de trocar figurinhas e materiais.

Por fim, e não menos importante, agradeço ao suporte estrutural e emocional advindos da minha família e das pessoas afetivamente próximas, integrantes imprescindíveis deste processo, em especial à minha companheira de vida e de todos os dias, Beatriz Nunes da Silva, ao cruzar meu caminho nos capítulos dessa grande história de doutorado e agregando um valor imensurável desde então (além de ter que me aguentar, claro!).

Resumo

Esta tese tem por objetivo central investigar o espectro de operadores laplacianos, generalizações e similares, indexados por um parâmetro G-invariante e definidos sobre espaços homogêneos contínuos ou discretos. Em cada contexto, determinamos a configuração espectral genérica para os autoespaços. Dados um grupo de Lie G e certos operadores laplacianos generalizados agindo em seções de fibrados vetoriais homogêneos, determinamos um grupo mais geral de simetrias $\widetilde{G}$ contendo G e um critério algébrico descrevendo a $\widetilde{G}$-simplicidade do espectro para uma métrica invariante à esquerda genérica. Similarmente, para um dado espaço homogêneo normal $M = G/K$, encontramos um conjunto de simetrias generalizadas $\widetilde{G}$ contendo G e satisfazendo a $\widetilde{G}$-simplicidade do espectro. Finalmente, sobre um grafo de Cayley com conjunto de vértices dado por um grupo finito G, estabelecemos um critério para determinar quando o espectro do laplaciano discreto associado a um peso invariante à esquerda genérico é G-simples.

Palavras-chave: Laplaciano, espectro G-simples, propriedades genéricas, espaços homogêneos, grupos de Lie, espaços simétricos, representações, grafos homogêneos, grafos de Cayley.

Abstract

In this thesis we investigate the spectrum of Laplacian operators, of their generalizations and of other similar operators, indexed by a G-invariant parameter. They are defined on continuous or discrete homogeneous spaces. In each specific context, we establish the generic spectral setting for the eigenspaces. Given a Lie group G and certain generalized Laplacian operators acting on sections of homogeneous vector bundles, we determine a more general group of symmetries $\widetilde{G}$ containing G and an algebraic criterion describing the $\widetilde{G}$-simplicity of the spectrum for a generic left-invariant metric. Similarly, for a given normal homogeneous space $M = G/K$, we find a set of generalized symmetries $\widetilde{G}$ containing G and satisfying the $\widetilde{G}$-simplicity of the spectrum. Finally, on a Cayley graph with a vertex set given by a finite group G, we establish a criterion for determining when the spectrum of the discrete Laplacian associated with a generic left-invariant weight is G-simple.

Keywords: Laplace operator, G-simple spectrum, generic properties, homogeneous spaces, Lie groups, symmetric spaces, representation theory, homogeneous graphs, Cayley graphs.

Como ler este material

Este material é destinado a estudantes e pesquisadores que possuam um conhecimento sólido em cursos base típicos dos programas de graduação e pós-graduação em matemática. Para um melhor acompanhamento, eis alguns direcionamentos:

Pré-requisitos

Assumimos um conhecimento prévio em variedades diferenciáveis e geometria riemanniana, permeando o cálculo diferencial de funções e campos tensoriais. Em especial, abrangendo o estudo das formas diferenciais. Eis algumas referências: [Do Carmo, 1992, Do Carmo, 1994, Lee, 1997, Lee, 2012].

Precisaremos ainda do conhecimento de propriedades espectrais elementares de operadores laplacianos em variedades compactas, as quais podem ser encontradas em [Caminha, 2014, Rosenberg, 1997].

Assumimos também aspectos da teoria de representações de grupos e álgebras de Lie, apresentada em [Bröcker and tom Dieck, 1985, Hall, 2015]. Aprofundando-se um pouco mais na teoria de Lie, desejaremos ter posse de noções sobre espaços homogêneos, com especial atenção para os espaços simétricos e suas descrições via álgebras de Lie ortogonais involutivas. O apêndice engloba o essencial referente a esta parte. Referências auxiliares: [Arvanitoyeorgos, 2003, Caselle and Magnea, 2004, Eschenburg, 2016, Gilmore, 2008, Gorodski, 2021, Helgason, 2001, Helgason, 2022].

O apêndice deste material contempla ainda o conhecimento necessário acerca de operadores em grafos, especialmente os de Cayley e de Schreier. Referências auxiliares:

[Babai, 1979, Cannizzo, 2014, Chung, 1997, Chung, 2005, Conder, 1992, Fitzgerald, 2020, Kaski, 2002, Li, 2002, Lim, 2020].

Referências centrais

As principais ideias, inspirações e focos de investigação deste projeto são originárias de [Petrecca and Röser, 2018, Schueth, 2017]. Adjacentemente, mencionamos [Chung and Sternberg, 1992, Fegan, 1980, Ikeda and Taniguchi, 1978, Jakobson et al., 2008, Lauret et al., 2015, Uhlenbeck, 1976, Zelditch, 1990] por também conterem ideias centrais complementares.

Divisão dos capítulos

A *Introdução* contém a linha de raciocínio discutida neste trabalho, focando nas ideias intuitivas e questionamentos relevantes para entender o que estamos nos propondo a investigar. Ela conta com um breve histórico do problema principal e uma coletânea resumida dos principais avanços conquistados nesta tese.

O *Capítulo 1 (Abordagens e resultados modernos)* reúne então os principais resultados modernos e ferramentas desenvolvidas nos artigos das referências centrais, as quais foram listadas há pouco.

A partir daí, estamos prontos para formalizar e esmiuçar as investigações deste projeto no *Capítulo 2 (Avanços e contribuições)*. Este capítulo contribui com uma série de resultados, análises e questões inovadoras, propiciando um avanço no conhecimento da área de pesquisa, aqui estudada. Trabalharemos propriedades preliminares e técnicas que nos permitam caminhar na direção do entendimento dos problemas abordados.

Sempre que necessário, o leitor poderá recorrer ao *Apêndice A*, o qual reúne, de maneira condensada, o básico e essencial para o entendimento da pesquisa, englobando diversas áreas matemáticas importantes de maneira interdisciplinar. Aborda-se os seguintes conceitos de teorias clássicas: grupos e álgebras de Lie; espaços homogêneos; espaços simétricos; autoespaços de operadores laplacianos; e versões discretizadas análogas aos conceitos anteriores, por meio dos grafos de Cayley e de Schreier. Assim, o leitor pode decidir pular ou não este capítulo a depender de seu conhecimento prévio nos assuntos tratados. ATENÇÃO: o apêndice é extremamente denso, reunindo o conteúdo de várias teorias extensas. Ele não tem a finalidade de ser didático, apenas de compilar a parte essencial dos pré-requisitos num único espaço. Assim, seu desenvolvimento serve apenas como um lembrete para especialistas, ou ainda como um material de apoio mínimo para aqueles que não possuem todos os pré-requisitos mas que desejam acompanhar esta tese.

Cada capítulo contém uma introdução própria onde direcionamos o estudo com motivações, intuições e as principais ideias. Estas introduções, por capítulo, articulam-se muito bem com o capítulo introdutório desta tese, sendo importantíssimas para o desenvolvimento da compreensão como um todo.

Guia de definições rápidas e notações usuais

Lista de definições rápidas e notações usuais 1.

- G é um grupo de Lie contendo K como subgrupo fechado; $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ são suas álgebras de Lie, resp. Fixamos $\mathfrak{t}$ uma subálgebra abeliana maximal em $\mathfrak{g}$. B é a forma de Killing de $\mathfrak{g}$.
- $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ denota a complexificação de $\mathfrak{g}$ e $U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ sua álgebra de Lie universal envelopante, identificada a partir dos operadores diferenciais invariantes à esquerda.
- $M = G/K$ é o espaço homogêneo expresso pelo par algébrico (G, K). Consideramos ainda decomposições ortogonais $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ e $\mathfrak{t} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a}$, onde $\mathfrak{m} \simeq T_eM$ e $\mathfrak{a}$ é um subespaço de $\mathfrak{m}$, abeliano maximal (fixado), induzidas por métricas G-invariantes. Se $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ semi-simples e (G, K) um par simétrico, então $(\mathfrak{t}, R_{\mathfrak{g}})$ e $(\mathfrak{a}, R_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}})$ são os sistemas de raízes de G e G/K, respectivamente.
- $\mathcal{G} := \mathcal{G}(G/K; S)$ é o grafo homogêneo (de Schreier) com conjunto de vértices dado pelo G-espaço G/K e conjunto gerador $S \subset G$.
- Δ_κ denota um operador laplaciano com parâmetro geométrico κ. O conjunto A_λ denota o λ-autoespaço do operador $\Delta_g|_A$ (sempre que esta restrição fizer sentido).

Lista de definições rápidas e notações usuais 2.

- $\mathrm{Rep}(G, \mathbb{K})$ denota um conjunto completo de representantes de classes de G-módulos (representações), com escalares em $\mathbb{K}$, da forma (Π, V), onde Π é o homomorfismo (ou ação linear) sobre o espaço vetorial V. Dada $(\Pi, V) \in \mathrm{Rep}(G, \mathbb{C})$, denotamos por Π_* ou π (ou ainda $d\Pi_e$) o homomorfismo definido em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, complexificado, induzido por Π.

- $\mathrm{Irr}(G, \mathbb{K})$ denota o subconjunto de $\mathrm{Rep}(G, \mathbb{K})$ dos G-módulos (representações) irredutíveis, com escalares em $\mathbb{K}$.

- R e L (ou R^K e L^K) são as representações induzidas pelas translações à direita e à esquerda, respectivamente, sobre o espaço $L^2(G, \mathbb{C})$ (ou $L^2(G/K, \mathbb{C})$).

- $V^K := \{v \in V;\ \forall k \in K,\ k \cdot v = v\}$, para cada G-módulo V e $K \subset G$.

- $\widehat{G}$ denota o subconjunto de $\mathrm{Irr}(G, \mathbb{C})$ dos G-módulos irredutíveis que admitem um produto interno hermitiano G-invariante (quando G é compacto, $\widehat{G} = \mathrm{Irr}(G, \mathbb{C})$). Denotamos $\widehat{G}^+$, $\widehat{G}^-$ e $\widehat{G}^0$ como sendo os subconjuntos de $\widehat{G}$ formado pelas representações irredutíveis de tipos real, quaterniônico e complexo, respectivamente. $\widehat{G}_K$ é o subconjunto das representações $V \in \widehat{G}$ tais que $\dim V^K > 0$. $\widehat{G}_K^+ := \widehat{G}_K \cap \widehat{G}^+$, $\widehat{G}_K^- := \widehat{G}_K \cap \widehat{G}^-$ e $\widehat{G}_K^0 := \widehat{G}_K \cap \widehat{G}^0$.

- Fixada uma G-representação (Σ, U) e dada $V \in \widehat{G}$, denotamos sua componente V-isotípica por $\mathrm{Isot}_\Sigma(V)$ ou $\mathrm{Isot}_U(V)$.

- $C^\ell(G, K; U) := \mathrm{Ind}_K^G U = \{f \in C^\ell(G, U);\ \forall k \in K, x \in G,\ f(xk) = k^{-1} f(x)\}$ é o G-módulo induzido pelo K-módulo U (fixada uma regularidade de classe C^ℓ – em geral $\ell = \infty$). Podemos ainda trocar C^ℓ por L^2 nos casos em que esteja subentendido os produtos internos e completamentos envolvidos, possibilitando-nos considerar $\mathrm{Ind}_K^G U$ como $L^2(G, K; U)$, assumindo esse contexto de " regularidade L^2 ".

Sumário

Introdução

Por que estudar operadores laplacianos e similares?

Operadores como o de Laplace-Beltrami $\Delta := -\operatorname{div}\nabla(\cdot)$, ou o hodge-laplaciano $\Delta := (d + d^*)^2$ e similares (como, por exemplo, os hamiltonianos e o operador de Dirac) se relacionam a muitas aplicações como: sistemas físicos clássicos ou quânticos; a difusão de calor numa dada superfície; propagações de vírus, tumores e outras doenças; a evolução de uma rede neural; processamento de dados; etc [Afrouzi and Rasouli, 2007, Zachmanoglou and Thoe, 1986, Ranjan, 2012, de Lange et al., 2014]. Especialmente em física, tais operadores possibilitam o estudo de dinâmica e de fenômenos físicos em diversas áreas como física quântica, mecânica newtoniana, relatividade geral, astronomia, ondulatória, mecânica de fluídos, teoria das cordas, apenas para citar algumas delas [Moretti, 2017, Simon, 2007, Mantoiu et al., 2016, Helffer, 2013]. Em matemática pura, tais operadores ajudam a descrever a geometria e a topologia da variedade, por exemplo.

Por que estudar espaços homogêneos?

Espaços homogêneos formam uma importante classe de exemplos na teoria de variedades. Um espaço homogêneo é uma G-variedade onde o grupo de Lie G age transitivamente em M. Neste caso, M pode ser identificada como uma variedade quociente da forma G/K, onde o subgrupo K pode ser tomado como o subgrupo de isotropia de G de qualquer ponto base fixado $p \in M$. Tais espaços generalizam a classe dos grupos de Lie, os quais são protótipos para estudar uma vasta gama de modelos envolvendo simetrias e outras transformações geométricas ou até mesmo topológicas.

A origem dos grupos de Lie, por exemplo, é devida a Sophus Lie e seu interesse na conexão da teoria de grupos com soluções de equações diferenciais típicas de modelos envolvendo dinâmicas diversas. Paralelamente, Felix Klein aplicou os grupos de Lie como grupos de transformações agindo sobre um determinado objeto geométrico e usou essa abordagem para entrar na seguinte questão fundamental: "o que afinal é uma geometria?" [Arvanitoyeorgos, 2003]. Os grupos de Lie também generalizam a teoria algébrica matricial, estendendo-se para diversos segmentos como ciências da computação aplicadas a diversas aplicações interdisciplinares.

Outra subclasse importante dos espaços homogêneos é a classe dos espaços simétricos, descrevendo importantes modelos no universo e em geometria diferencial pura. Especialmente em relatividade geral, é comum estudar os espaços simétricos lorentzianos, os quais incluem exemplos como os espaços de Minkowski, De Sitter and anti-de Sitter [Cahen, 1972]. É possível também aplicar os espaços simétricos em alguns tópicos relacionados a algoritmos e análise numérica como, por exemplo, decomposições polares matriciais, métodos de decomposição para o cálculo de exponenciais de matrizes, composição de integradores numéricos auto-adjuntos e sistemas dinâmicos temporais simétricos [Munthe-Kaas et al., 2001]. Finalmente, podemos mencionar a importância destes espaços para a teoria de matrizes aleatórias e seus desdobramentos em sistemas desordenados, problemas de transportamento quântico, o estudo de matéria condensada e cromo-dinâmica quântica, mostrando a vastidão de assuntos de pesquisa relacionados [Caselle and Magnea, 2004].

O estudo dos espaços homogêneos está intimamente relacionado a um importante ramo da matemática: a teoria de Lie. Este ramo se conecta a outras temáticas importante em matemática como geometria algébrica, geometria diferencial, álgebra de operadores, equações diferenciais parciais, teoria dos números e física matemática [Baklouti and Nomura, 2018].

Por que estudar a teoria espectral?

O espectro de operadores laplacianos fornece informações sobre as estruturas nas quais estes operadores são definidos. Em diversas aplicações em física, os autovalores medem dados relevantes como níveis e estados de energia em mecânica quântica, frequências especiais em ondulatória e quantias escalares importantes em outros tipos de sistemas. Na teoria de variedades, eles não somente fornecem informações geométricas, como também permitem análise harmônica e detecção de invariantes topológicos como os que aparecem nos estudos de homologia ou co-homologia.

O espectro de um dado laplaciano também mede a presença de simetrias geométricas em algum sentido, por exemplo, a presença de isometrias na variedade dada. Esta observação se deve ao fato de que tal operador comuta com as isometrias por *pullback* e, reciprocamente, cada difeomorfismo comutando com o mesmo operador é na verdade uma isometria [Kobayashi and Nomizu, 1963, Watson, 1973]. Por exemplo, se o espectro do operador de Laplace-Beltrami $\Delta := -\mathrm{div}\,\nabla(\cdot)$ é simples, então não há uma presença significante de simetrias geométricas. Esta simplicidade do espectro foi demonstrada para uma métrica riemanniana genérica numa variedade compacta e conexa [Uhlenbeck, 1976]. Aqui, a palavra "genérica" remete à ideia de validade para a maioria das métricas no sentido topológico de conjuntos de segunda categoria de Baire, isto é, existe um subconjunto *residual (complementar de um subconjunto magro)* no espaço total de métricas riemannianas tal que, para cada métrica neste subconjunto, o espectro é simples. Estas considerações fazem com que a presença de simetrias na variedade em questão, munida de uma métrica arbitrária, seja um comportamento especial e raro.

O comportamento descrito no parágrafo anterior é muito próximo ao que acontece com operadores hamiltonianos em um sistema quântico, onde a configuração genérica reflete o fato de que o hamiltoniano efetivo não tem nenhuma degenerescência. Por outro lado, a presença de simetrias está relacionada à existência de degenerescências no sistema. Além disso, existem simetrias relacionadas a certas degenerescências não óbvias que não são aparentes na estrutura geométrica original do sistema num primeiro momento. Estas simetrias são denominadas como *simetrias ocultas latentes* no contexto do artigo [Röntgen et al., 2021]. Degenerescências induzidas por simetrias latentes podem ser preservadas mesmo sob uma quebra da simetria rotacional ou outras pertubações na estrutura geométrica original. A presença de degenerescências advindas de simetrias óbvias e não óbvias podem inclusive determinar a propriedade de integrabilidade de um sistema dinâmico em certos modelos físicos [Cariglia, 2014].

O análogo do trabalho de Uhlenbeck para o hodge-laplaciano $\Delta = (d + d^*)^2$ não é óbvio e seu panorama genérico demanda hipóteses adicionais e adaptações. Existem alguns avanços e respostas parciais sobre variedades fechadas de dimensões 3 e 5, conforme estudado por Enciso e Peralta-Salas [Enciso and Peralta-Salas, 2012], e também por Gier [Gier, 2014].

No problema espectral de um operador laplaciano, quando a variedade M admite um grupo prescrito de isometrias G agindo sobre ela, os auto-espaços necessariamente devem ser G-módulos para cada métrica G-invariante. Assim, a configuração espectral mínima que podemos esperar é que cada auto-espaço seja um G-módulo irredutível ao menos, e a multiplicidade do autovalor correspondente depende do grau deste G-módulo irredutível. Portanto, no espaço restringido de métricas G-invariantes em M, não podemos esperar que o espectro seja simples na configuração genérica. Ao invés disso, devemos nos perguntar se o espectro é G-simples (real ou complexo), ou seja, se os auto-espaços são G-módulos irredutíveis (reais ou complexos) para uma métrica G-invariante genérica. Os G-módulos organizam as simetrias geométricas dadas pelas isometrias em G. Se existir transformações não óbvias (ocultas num primeiro momento) deixando o espectro invariante, na configuração genérica, isto significa que o espectro não pode ser G-simples para uma métrica G-invariante genérica. No contexto dos hamiltonianos em sistemas físicos, não ter um espectro G-simples genérico pode significar que, na maior parte dos casos, existem degenerescências que não são induzidas pelas simetrias geométricas do grupo prescrito G. Assim, o problema espectral pode ter simetrias importantes não óbvias desempenhando um papel essencial na organização dos auto-espaços no panorama genérico. As degenerescências associadas a um auto-espaço, neste contexto, podem ser classificadas como normais ou acidentais, caso este auto-espaço seja um G-módulo irredutível ou não, respectivamente [Wigner, 2012].

Ao colecionarmos todas as simetrias dadas por G e por outras possíveis simetrias não óbvias que deixem o espectro invariante para uma métrica G-invariante genérica, estamos aptos a encontrar um conjunto mais geral de simetrias generalizadas $\widetilde{G}$, com certa estrutura matemática, descrevendo o problema espectral mais adequadamente. As simetrias de $\widetilde{G}$ que não pertencem a G podem ser interpretadas como simetrias ocultas para o espectro no panorama genérico.

A pergunta sobre a G-simplicidade real do espectro do operador de Laplace-Beltrami associado a uma métrica G-invariante genérica numa G-variedade M foi formulada dentro do problema 42 na lista de problemas abertos de Yau [Yau, 1993]. Vale mencionar que Yau, décadas atrás em sua formulação, já estava ciente de possíveis transformações não óbvias (ocultas, à primeira vista), fora do grupo prescrito de isometrias G, comutando com o laplaciano e deixando seus auto-espaços invariantes.

Alguns avanços surgiram desde a formulação do problema de Yau. Zelditch [Zelditch, 1990] provou que G-variedades, com G um grupo finito de isometrias cujos graus de suas representações irredutíveis são majoradas pela dimensão de M, possuem a propriedade genérica do espectro G-simples. Resultados na mesma direção também podem ser encontrados em [Marrocos and Gomes, 2019, Cianci et al., 2024], onde os autores, junto com outras propriedades, mostram que os auto-espaços são representações irredutíveis do grupo prescrito de simetrias G para uma métrica G-invariante genérica. Schueth [Schueth, 2017] provou o problema para uma métrica invariante à esquerda genérica em certos grupos de Lie compactos G envolvendo produtos de $SU(2)$ e de toros. Após isso, Petrecca and Röser [Petrecca and Röser, 2018] provaram a G-simplicidade do espectro para um espaço simétrico compacto de *rank* 1, da forma $M = G/K$, e também provaram que o mesmo resultado não é válido para para espaços simétricos irredutíveis de *rank* ≥ 2.

A resposta negativa da G-simplicidade genérica do espectro para espaços simétricos de *rank* $\geq\ 2$ abre caminho para investigarmos possíveis simetrias ocultas (não óbvias) responsáveis por explicar não G-simplicidade genérica do espectro para estas variedades altamente simétricas e, mais geralmente, para espaços homogêneos arbitrários.

Uma outra possível rota de investigação é considerar o mesmo problema formulado por Yau, porém para generalizações do operador de Laplace-Beltrami e para outros operadores com características similares. Podemos mencionar alguns resultados adjacentes. Para o hodge-laplaciano, por exemplo, Ikeda e Taniguchi [Ikeda and Taniguchi, 1978] já tinham estabelecido um ferramental algébrico, em 1978, para lidar com os auto-espaços usando a teoria de representações, embora eles tivessem outros interesses específicos. Recentemente, Semmelmann and Weingart [Semmelmann and Weingart, 2019] consideraram a classe dos *standard Laplace operators*, e Casarino, Ciatti and Martini [Casarino et al., 2022] estudaram os operadores de Grushin.

Em algum sentido, os operadores generalizados desta pesquisa tem características similares às dos operadores mencionados no parágrafo precedente, especialmente a nível algébrico abstrato da teoria de representações. Sob certas circunstâncias e parâmetros, tais operadores generalizam os operadores de Laplace-Beltrami e de Hodge-Laplace, e até mesmo operadores de Casimir.

O que seria “simetria” para nossos propósitos?

Nossa pesquisa tem como investigação principal o estudo do espectro de operadores laplacianos, generalizações e similares, sob a presença de simetrias. Em geral, tais operadores serão definidos sobre espaços homogêneos compactos (contínuos ou discretos).

Cabe mencionar que a palavra simetria é amplamente usada na matemática. Por exemplo, em geometria costumamos usá-la para expressar aplicações que preservam determinada estrutura geométrica (no contexto da geometria riemanniana, isto nos leva à noção de isometria). Em alguns tópicos de álgebra, simetria é algum tipo de aplicação preservando certa estrutura algébrica. Simetria pode ser ainda um conjunto de aplicações que agem sobre uma determinada função ou operador, preservando alguma propriedade de interesse. E por aí vai...

No nosso contexto, uma simetria é qualquer aplicação ou transformação definida sobre a variedade dada ou sobre suas estruturas adjacentes responsáveis por deixar os auto-espaços do operador de interesse invariantes. Para uma métrica G-invariante, o grupo G é usualmente um conjunto natural de simetrias de natureza geométrica para os auto-espaços. Neste contexto, podemos considerar o termo *simetria oculta* como qualquer uma destas simetrias que não sejam óbvias ou aparentes num primeiro momento, não pertencentes a G, e mesmo assim desempenhando um papel fundamental na descrição dos auto-espaços para uma métrica G-invariante genérica.

Como decidir se existem simetrias ocultas na configuração genérica do problema espectral dado e como encontramos estas transformações não aparentes? Para motivar e ilustrar esta questão, é interessante comentarmos um pouco sobre o grupo de simetrias $SO(4)$ no problema do átomo de hidrogênio, o qual se relaciona também ao problema de Kepler tridimensional e ao problema espectral do laplaciano [Singer, 2006, Ch.9]. No problema de Kepler, por exemplo, nós esperamos, numa primeira vista, que a conservação de certos níveis de energia sejam descritas apenas pelas simetrias do grupo $SO(3)$, já que $SO(3)$ é o grupo conexo natural de isometrias do espaço euclidiano tridimensional. Porém, pode ser mostrado que existem certos movimentos não óbvios em $\mathbb{R}^3$ que também conservam estes níveis de energia e que, sob a projeção estereográfica da esfera $\mathbb{S}^3$ sem o polo norte, correspondem a isometrias do grupo $SO(4)$ (o qual tem uma ação padrão sobre $\mathbb{S}^3$). Assim, as transformações destes movimentos não óbvios podem ser consideradas simetrias ocultas para este problema físico.

A busca por simetrias ocultas depende do contexto e de características específicas do problema.

O problema principal

Pelas discussões e análises prévias, podemos formular o seguinte problema geral de investigação, inspirado na formulação feita por Yau dentro do problema 42 em sua lista de problemas em aberto:

Problema Principal: Seja M uma G-variedade conexa fechada, com G agindo isometricamente sobre M. Considere um operador laplaciano ou algum outro operador com propriedades similares, indexado por uma métrica G-invariante g e denote-o por Δ_g. É verdade que, para uma métrica G-invariante genérica g, os auto-espaços de Δ_g são representações irredutíveis de G? Caso contrário, existe alguma estrutura matemática $\widetilde{G}$ englobando G e possíveis simetrias ocultas descrevendo a situação genérica, dentro do espaço das métricas G-invariantes, de modo que o espectro apresente a menor configuração possível para os auto-espaços em termos deste conjunto de simetrias generalizado $\widetilde{G}$?

Esta tese pode ser vista como uma sequência da evolução histórica do problema de Yau discorrida há pouco, neste capítulo introdutório. Daremos continuidade especialmente às investigações sobre espaços homogêneos como as que foram feitas nos trabalhos de [Schueth, 2017] e [Petrecca and Röser, 2018], cujos principais resultados são abordados no Capítulo 1. Os avanços propriamente ditos são tema para o Capítulo 2.

Generalizações do laplaciano consideradas nesta pesquisa

Seja g uma métrica $(G \times K)$-invariante em G correspondendo a uma métrica G-invariante em um espaço homogêneo compacto e conexo $M = G/K$, e (τ, U) uma K-representação U com K-ação τ. Para uma base g-ortonormal $\{Y_j\}$, o elemento quadrático $\sum_j Y_j^2$ pertence à álgebra universal envelopante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$.

Pretendemos construir operadores Δ_{g,U^*}, no G-módulo

$$C^\infty(G,K;U^*) := \{f \in C^\infty(G,U^*) \mid \forall x \in G, \forall k \in K, f(xk) = \tau^*(k^{-1})f(x)\},$$

usando as ações induzidas pelas representações regulares à esquerda e à direita em elementos da forma $\sum_j Y_j^2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$. Também assumiremos que U^* admite uma forma real $U^*_{\mathbb{R}}$ e que o operador complexo que construiremos Δ_{g,U^*} admitirá uma versão real $\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}}$.

Mas especificamente, na Seção 2.3, definiremos, para um grupo de Lie conexo e compacto G com métrica invariante à esquerda g, os operadores

$$\Delta_{g,U^*} := -\sum_j R_*(Y_j)^2 : C^\infty(G,U^*) \to C^\infty(G;U^*),$$

$$\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}} := -\sum_j R_*(Y_j)^2 : C^\infty(G,U^*_{\mathbb{R}}) \to C^\infty(G;U^*_{\mathbb{R}}),$$

onde $R_* : \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \to \mathrm{End}\,(C^\infty(G;U^*))$é a extensão à álgebra universal envelopante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ da representação de álgebras de Lie induzida pela representação regular à direita $R : G \to GL\,(C^\infty(G;U^*))$, meramente tomada como a derivada de R no elemento neutro do grupo G.

Similarmente, ainda na Seção 2.3, para um espaço homogêneo compacto e conexo $M = G/K$ com métrica G-invariante normal g, faremos uma leve adaptação nos operadores, definindo-os como

$$\Delta_{g,U^*} := -\sum_j L_*(Y_j)^2 : C^\infty(G,K;U^*) \to C^\infty(G,K;U^*),$$

$$\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}} := -\sum_j L_*(Y_j)^2 : C^\infty(G,K;U^*_{\mathbb{R}}) \to C^\infty(G,K;U^*_{\mathbb{R}}),$$

onde L_* é induzido pela representação regular à esquerda.

Em ambos os casos, quando tomamos $U^* = \mathbb{C}$, então Δ_{g,U^*} coincide com a versão complexa do operador de Laplace-Beltrami, a menos de identificações. Similarmente, $\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}}$ corresponde à versão real do mesmo operador.

Para os espaços homogêneos normais, compactos e conexos, podemos considerar a decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ induzida pelo quociente $M = G/K$, com representação de isotropia $\mathfrak{m}$, e a representação p-exterior complexificada $U^* = \wedge^p \mathfrak{m}^{*\mathbb{C}}$. Neste caso, conforme demonstrado em [Ikeda and Taniguchi, 1978], Δ_{g,U^*} será o operador de Casimir e coincidirá com o hodge-laplaciano de M agindo em p-formas diferenciais complexas (a menos de identificações). Similarmente, $\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}}$ será a versão real deste hodge-laplaciano.

A fim de verificarmos que $\Delta_{g,U^*} : C^\infty(G, K; U^*) \to C^\infty(G, K; U^*)$ esteja bem definido, precisamos necessariamente que $\Delta_{g,U^*} f \in C^\infty(G, K; U^*)$ para toda $f \in C^\infty(G, K; U^*)$. Tal condição necessária representa o fato de que Δ_{g,U^*} comuta com a $\tau^*(K)$-ação em U^* em algum sentido. Assim,a representação U^* por si só produzirá certas simetrias ocultas estruturais comutando com o operador Δ_{g,U^*}. Isto deve ter um impacto na configuração final dos auto-espaços.

Com isto, o panorama genérico esperado no espaço das métricas G-invariantes é que os auto-espaços de Δ_{g,U^*} sejam descritos pelas simetrias geométricas do grupo prescrito G, pela estrutura algébrica adjacente à representação U^* e possivelmente outras simetrias ocultas induzidas por condições inerentes ao problema espectral neste contexto.

A ideia principal a fim de estabelecer o panorama genérico para o espectro de Δ_{g,U^*} é controlar as multiplicidades dos autovalores dentro de cada submódulo irredutível de $C^\infty(G, K; U^*)$, de modo a serem as menores possíveis. Além disso, é de suma importância garantir que G-submódulos irredutíveis não equivalentes do espaço $C^\infty(G, K; U^*)$ não compartilhem autovalores em comum, a menos que eles estejam relacionados por certas simetrias ocultas nas estruturas adjacentes dos objetos considerados no problema espectral.

Avanços e contribuições presentes nesta tese

As grandes contribuições desta pesquisa estão relacionados às perguntas e questões adjacentes apresentadas dentro do problema 42 da lista de problemas em aberto de Yau. Durante as análises, decidimos a situação genérica dos auto-espaços dos operadores de interesse, organizando-os a partir das simetrias naturais do problema espectral e outras possíveis estruturas englobando simetrias ocultas, não tão aparentes num primeiro momento.

Boa parte dos avanços históricos para o problema de Yau, mencionados anteriormente, foram obtidos para a versão real do laplaciano. Contudo, por conveniência da teoria de representações, vale a pena considerar sua complexificação. Acontece que as representações com escalares complexos englobam representações de tipos real, quaterniônico e complexo puro. A soma direta de uma representação de tipo complexo puro com sua dual é também uma representação quaterniônica. O tipo quaterniônico está intimamente relacionado à categoria das representações com escalares quaterniônicos. Neste contexto, há uma ação padrão do grupo de quatérnios Q_8 sobre o anel quaterniônico $\mathbb{H}$. Esta ação também comuta com o laplaciano complexificado. Assim, as transformações Q_8 podem ser consideradas simetrias ocultas neste contexto. Daí, a configuração mínima para os auto-espaços em um espaço homogêneo $M = G/K$ com métrica riemanniana G-invariante é que eles sejam ao menos $(Q_8 \times G)$-representações irredutíveis, sempre que existirem representações de tipo complexo puro ou de tipo quaterniônico. Isso mostra que considerar apenas o grupo G é insuficiente para organizar todas as simetrias de interesse para os autoespaços, neste cenário. A descrição das propriedades enunciadas há pouco e do procedimento em questão é a primeira contribuição deste trabalho e é apresentada na Seção 2.1.

Nossa segunda contribuição reside no estudo do laplaciano em espaços simétricos com *rank* arbitrário (e, mais geralmente, sobre espaços homogêneos normais). Na Seção 2.2, exibimos um cenário de configuração mínima para os auto-espaços do laplaciano destes espaços, indexados por métricas G-invariantes. Para isso, buscamos simetrias, até então não estudadas, nos reticulados construídos sobre os sistemas de raízes. De certa forma, esta abordagem se assemelha àquela do artigo [Röntgen et al., 2021], uma vez que os autores buscam as simetrias ocultas latentes também em reticulados, porém envolvendo configurações quânticas de partículas no contexto deles. Mostramos que estas simetrias ocultas dos sistemas de raízes podem ser organizadas pela ação transitiva de certos grupos combinatórios de transformações ortogonais deslocadas agindo sobre os pesos maiores de representações irredutíveis com um mesmo autovalor de Casimir.

As contribuições que obtemos na sequência, nas Seções 2.3, 2.4 e 2.5, tratam essencialmente de adaptar as técnicas e métodos obtidos nos resultados anteriores e na literatura moderna para os operadores generalizados da forma Δ_{g,U^*} e $\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}}$, mencionados anteriormente, incluindo inclusive generalizações do operador hodge-laplaciano associado a métricas normais. A fim de obter a configuração mínima dos autoespaços nestes novos cenários para uma métrica G-invariante genérica também precisamos investigar e organizar novos formatos de simetrias ocultas até então não considerados, além claro de organizar as simetrias ocultas já mapeadas, como aquelas provenientes do grupo de quatérnions Q_8 ou então aquelas presentes nos sistemas de raízes. Cabe chamar uma atenção especial para a contribuição desenvolvida na Seção 2.5, motivada pela necessidade de se considerar simetrias de naturezas cada vez mais distintas para organizar os autoespaços dos operadores de interesse. Isto nos leva automaticamente à necessidade de generalizar o próprio conceito de representação. Passa a ser indispensável criar uma teoria para englobar representações de categorias distintas responsáveis por colecionar todas as simetrias relevantes e multifacetadas presentes no problema espectral.

Um último conjunto de resultados desenvolvidos em nossa pesquisa é a Seção 2.6, onde obtemos análogos do problema principal, até então estudados em geometria riemanniana, porém agora para espaços discretos como os grafos de Cayley ou grafos homogêneos, em geral.

Cabe mencionar ainda que a forma de interpretarmos, analisarmos e abordarmos os problemas, além de formular os questionamentos principais e adjacentes, forma por si só uma contribuição que possibilita diversos pontos de vistas diferenciados para absorver e alavancar a teoria, fomentando ideias e motivações para dar continuidade em pesquisas futuras.

Todos os teoremas, corolários e exemplos do Capítulo 2 foram desenvolvidos pelo autor, com a devida orientação.[1] A Seção 2.6 foi desenvolvida de forma colaborativa.[2]

[1] Orientação pelo Prof. Dr. Marcus A.M. Marrocos.

[2] A Seção 2.6 teve colaboração de Marcus A.M. Marrocos, Lucas R. de Lima e Cristian F. Coletti.

1 Abordagens e resultados modernos

Convenção 1. Todos os grupos de Lie (denotados em geral por G) e espaços homogêneos, denotados em geral por $M = G/K$ e via de regra com K subgrupo de Lie fechado em G, são assumidos como sendo variedades compactas, conexas e com G-ação induzida pelas translações à esquerda de G, a menos de menção contrária, ao longo deste capítulo.

Introdução

Estamos interessados no problema espectral de operadores laplacianos e similares, isto é, a descrição de seus autoespaços. Laplacianos, em geral, têm a propriedade de comutar com a ação de cada isometria por *pullback*. Tal ação, sobre um dado autovetor deste tipo de operador, acarreta na produção de possíveis novos autovetores, podendo influir na multiplicidade do autovalor correspondente. Isso faz com que os autoespaços se organizem em representações dos grupos de isometrias referentes aos parâmetros geométricos considerados. Se estas representações forem irredutíveis, isto significa que cada autovalor não possui multiplicidades além do que as influenciadas pelas simetrias de natureza geométrica advindas das isometrias em questão.

Veremos como expressar laplacianos definidos sobre certas variedades, com parâmetro geométrico G-invariante, em termos de representações regulares induzidas por translações de G. Isto nos permitirá estudar a restrição do operador a cada componente V-isotípica, com V uma representação irredutível de G, a qual é um espaço vetorial de dimensão finita. Deste modo, o problema espectral recai em álgebra linear de dimensão finita, via estudo de polinômios característicos. No fim das contas, precisamos apenas colecionar todas estas restrições e ver a “cara” final de cada autoespaço. Dito de outra forma, o problema espectral recairá na análise comparativa entre a decomposição L^2 em autoespaços do laplaciano e a decomposição L^2 das componentes isotípicas das representações irredutíveis do grupo de interesse. A primeira decomposição mencionada é obtida por análise funcional usual e a segunda é obtida pela construção do Teorema de Peter-Weyl.

Diversos trabalhos têm caminhado na direção da abordagem descrita acima. [Schueth, 2017] expressa o operador de Laplace-Beltrami Δ_g, para uma métrica invariante à esquerda g num dado grupo de Lie compacto G, em termos da representação regular induzida pelas translações à direita $R : G \to GL(L^2(G, \mathbb{C}))$. No caso, verificamos a identidade

$$\Delta_g = -\sum_j (R_*(Y_j))^2$$

para uma dada base g-ortonormal $\{Y_j\} \subset \mathfrak{g}$. Como consequência, Δ_g pode ser estudado isoladamente em cada componente (Π, V)-isotípica de $L^2(G, \mathbb{C})$, bastando apenas analisar o espectro de operadores da forma

$$\Delta_g^V := -\sum_j (\Pi_*(Y_j))^2 : V \to V \quad .$$

[Petrecca and Röser, 2018] apresentam uma generalização da construção acima para espaços homogêneos da forma $M = G/K$, munidos de métricas G-invariantes. A diferença essencial é que devemos analisar as componentes isotípicas de $L^2(G/K, \mathbb{C})$ ao invés de $L^2(G, \mathbb{C})$. Contudo, é bem conhecido que $L^2(G/K, \mathbb{C})$ se identifica como uma sub-representação de $L^2(G, \mathbb{C})$ e as componentes isotípicas que devem ser consideradas são aquelas provenientes das representações irredutíveis esféricas, isto é, representações (Π, V) tais que o subespaço $V^K := \{v \in V \mid k \cdot v = v, \ \forall k \in K\}$ é não trivial. Sendo assim, a construção de [Schueth, 2017] se transfere de maneira muito bem comportada para este contexto. Aqui, a análise espectral recai no estudo de operadores da forma

$$\Delta_g^{V^K} := -\sum_{j > \dim K} (\Pi_*(Y_j))^2 : V^K \to V^K \quad ,$$

onde $\{Y_j\}_{j>\dim K}$ é uma base ortonormal de $\mathfrak{m}$ expressa por restrição de uma base ortonormal $\{Y_j\}_{j=1}^{\dim G}$ de $\mathfrak{g}$, na decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ induzida pelo par algébrico (G, K) a partir de uma métrica G-invariante.

Quando as métricas consideradas têm natureza bi-invariante então o operador de Laplace-Beltrami se manifesta, em cada uma das construções precedentes, como um elemento de Casimir. Este, por sua vez, possui autovalor com fórmula explícita sobre cada representação irredutível, dependendo apenas do peso maior correspondente – a famosa *fórmula de Freudenthal*.

As ideias discutidas anteriormente são essencialmente o conteúdo da Seção 1.1.

Na mesma linha de raciocínio sobre a descrição de operadores por meio de representações algébricas, quando tomamos Δ_g como o hodge-laplaciano podemos citar [Ikeda and Taniguchi, 1978] e [Fegan, 1980]. Nestes trabalhos, Δ_g é expresso em termos de elementos de Casimir agindo sobre formas diferenciais em certos espaços homogêneos. Exploraremos esta temática na Seção 1.2.

1.1 Laplaciano em espaços homogêneos com métricas G-invariantes

Nesta seção, seguiremos de perto a construção dos operadores de Laplace-Beltrami considerados por [Petrecca and Röser, 2018] (os quais referiremos nesta seção simplesmente por “laplacianos”). A organização teórica deste artigo generaliza o critério para grupos de Lie estabelecido por [Schueth, 2017], porém para uma classe maior de variedades: espaços homogêneos com métricas G-invariantes. A diferença crucial dos trabalhos citados está no conjunto de exemplos que os autores se propõem a investigar: [Schueth, 2017] considera grupos de Lie compactos munidos de métricas invariantes à esquerda; [Petrecca and Röser, 2018], por outro lado, aplica o critério a espaços simétricos, considerando métricas com natureza bi-invariante, em essência.

O principal resultado desta seção é o Teorema 1.1.17 (e suas aplicações).

Expressando o laplaciano em termos de representações translacionais

Seja $M = G/K$ um espaço homogêneo conexo e compacto (com G compacto), munido da G-ação induzida pelas translações à esquerda e de uma métrica G-invariante g.

Sabemos que g corresponde a um produto interno Ad_K-invariante $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definido sobre $\mathfrak{g}$ (estendendo-se unicamente a um produto interno hermitiano na álgebra de Lie complexificada $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$). Este produto interno induz uma decomposição ortogonal $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ (isto é, $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^{\perp}$).[1]

Sabemos ainda, pela construção da reciprocidade de Frobenius, que $C^{\infty}(G/K, \mathbb{C})$ se identifica como o G-módulo $C^{\infty}(G, K; \mathbb{C}) = \mathrm{Ind}_K^G \mathbb{C}$, com ação induzida pelas translações à esquerda.[2]

Daí, a menos de isomorfismos canônicos, o operador de Laplace-Beltrami Δ_g, para M, é um operador que age sobre $C^{\infty}(G, K; \mathbb{C})$ (ou, se preferir, ele age sobre $L^2(G, K; \mathbb{C})$, usando completamentos e análise funcional usual). Nesta situação, o laplaciano pode ser expresso em termos da representação regular à direita $R : G \to GL(L^2(G, \mathbb{C}))$. Visto de outra ótica, podemos vê-lo a partir da representação induzida $R_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(L^2(G, \mathbb{C}))$ (ou ainda, usando outro formato, em termos da extensão $R_* : U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{gl}(L^2(G, \mathbb{C}))$ à álgebra de Lie universal envelopante $U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$), conforme resultado seguinte:

Proposição 1.1.1. [a] *Seja $M = G/K$ com métrica G-invariante g correspondente a produto interno $Ad(K)$-invariante $\langle\cdot,\cdot\rangle$ para $\mathfrak{g}$ (conforme parágrafos precedentes) e decomposição ortogonal $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$. Suponha que $\{Y_j\}_{j=1}^{\dim G}$ é uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$, de modo que o subconjunto $\{Y_j\}_{j>\dim K}$ é uma base ortonormal para $\mathfrak{m}$. Então, a menos de identificações canônicas, o operador de Laplace-Beltrami (ou simplesmente laplaciano) Δ_g satisfaz, para toda $f \in C^{\infty}(G, K; \mathbb{C})$,*

$$\Delta_g f = -\sum_{j>\dim K} \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} R(\exp(tY_j))f \ .$$

[1] Ver Seção A.2, para o conteúdo deste parágrafo.
[2] Aqui, enxergamos $\mathbb{C}$ como a K-representação trivial. Para mais detalhes, ver Seção A.3.

Ou ainda, $\Delta_g : C^\infty(M,\mathbb{C}) \to C^\infty(M,\mathbb{C})$ se identifica como o operador

$$\Delta_g = -\sum_{j>\dim K} (R_*(Y_j))^2 : C^\infty(G,K;\mathbb{C}) \to C^\infty(G,K;\mathbb{C})$$

[a] Ver [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1] e [Schueth, 2017, Sec.2].

Seja $\widehat{G}$ um conjunto completo de representações irredutíveis de G, duas a duas não equivalentes. Denote por $\widehat{G}_K$ o subconjunto das representações de $\widehat{G}$ que são esféricas com respeito ao par (G,K) (isto é, formada pelas $V \in \widehat{G}$ tais que $\dim V^K > 0$).

É bem conhecido que $L^2(G,K;\mathbb{C}) \simeq L^2(G/K,\mathbb{C})$ define uma sub-representação de $L^2(G,\mathbb{C})$ (com a ação L induzida pelas translações à esquerda L). Além disso, pelos teoremas de Peter-Weyl e de reciprocidade de Frobenius, sabe-se que $L^2(G,K,\mathbb{C})$ admite uma decomposição em soma de Hilbert da forma

$$L^2(G,K;\mathbb{C}) = \bigoplus_{V\in\widehat{G}_K} \mathrm{Isot}_L(V^*) \ ,$$

onde a componente V^*-isotípica $\mathrm{Isot}_L(V^*)$ de $L^2(G,K;\mathbb{C})$ é isomorfa a $V^K \otimes V^*$.[3]

Aliando esta decomposição à Proposição 1.1.1, temos um indício de que o laplaciano Δ_g pode ser descrito em termos dos operadores $(\Pi_*(Y_j))^2$, para as representações (Π,V) variando no conjunto $\widehat{G}_K$. Esta ideia nos motiva a definir os seguintes operadores:

Definição 1.1.2. Seja $(\Pi,V) \in \mathrm{Rep}(G,\mathbb{C})$ e $\{Y_j\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ como na Proposição 1.1.1. Definimos:

$$\Delta_g^V := -\sum_j (\Pi_*(Y_j))^2 : V \to V$$

e a restrição $\Delta_g^{V^K} := \Delta_g^V|_{V^K}$.

Pelas considerações e condições apresentadas há pouco, veremos que é possível descrever o operador de Laplace-Beltrami Δ_g em cada componente isotípica, relacionando-o aos operadores da Definição 1.1.2, conforme conteúdo do próximo resultado.

[3] Ver Seção A.3. Neste caso, $V^K \otimes V^*$ tem a G-ação tensorial, onde a G-ação de V^K é trivial e a G-ação de V^* é a dual à G-ação de V.

Proposição 1.1.3. [a] *Considere as mesmas condições da Proposição 1.1.1 e* $\mathit{Isot}_L(V^*)$ *a componente* (Π^*, V^*)*-isotípica do espaço* $L^2(G, K; \mathbb{C})$*, munido da ação induzida pelas translações à esquerda. Então*

1. $\Delta_g(\mathit{Isot}_L(V^*)) \subset \mathit{Isot}_L(V^*)$ *e* $\mathit{im}\Delta_g^{V^K} \subset V^K$*. Em particular, os operadores*

$$\Delta_g : \mathit{Isot}_L(V^*) \to \mathit{Isot}_L(V^*)$$
$$\Delta_g^{V^K} : V^K \to V^K$$

estão bem definidos.

2. *O isomorfismo* $\mathit{Isot}_L(V^*) \simeq V^K \otimes V^*$ *induz a seguinte identificação de operadores:*

$$\Delta_g|_{\mathit{Isot}_L(V^*)} \simeq \Delta_g^{V^K} \otimes \mathit{id} : V^K \otimes V^* \to V^K \otimes V^* .$$

3. *Para toda* $\eta \in (V^*)^K$ *e* $v \in V^K$, $(\Delta_g^{(V^*)^K}\eta)(v) = \eta(\Delta_g^{V^K} v)$.

[a] Ver [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1] (compare também com [Schueth, 2017, Sec.2]).

A última proposição acarretará em algumas consequências interessantes sobre o espectro de Δ_g, numa análise que basicamente recai em álgebra linear elementar. Primeiramente, notamos que Δ_g nada mais é do que uma disposição de blocos (numa "diagonal infinita") correspondentes às componentes isotípicas de $L^2(G, K; \mathbb{C})$. Daí, o espectro de Δ_g restrito ao "bloco" $V^K \otimes V^*$ depende apenas do espectro de $\Delta_g^{V^K}$. Mais especificamente, se λ é um autovalor de $\Delta_g^{V^K}$, com multiplicidade m_λ, então λ é um autovalor de $\Delta_g|_{\mathrm{Isot}_L(V^*)}$ e este último possui λ-autoespaço isomorfo a $(V^*)^{\oplus m_\lambda}$. Discorremos mais sobre este tipo de problemática adiante.

Decidindo se uma dada métrica G-invariante é G-simples

Novamente consideraremos $M = G/K$ compacto conexo, com G-ação induzida pelas translações à esquerda de G. Fixe uma métrica G-invariante g e, por um abuso de notação, denote também pelo mesmo símbolo g seu produto interno Ad_K-invariante correspondente em $\mathfrak{g}$. Assim g induz uma decomposição ortogonal $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$.

Definição 1.1.4. Dizemos que um operador linear, definido sobre uma G-representação V, é *G-simples* (ou, se preferir, que tem *espectro G-simples*) se seus autoespaços são sub-representações irredutíveis de V.

Diremos que a métrica g (ou que o laplaciano Δ_g) é *G-simples complexa(o)* (resp. *G-simples real*) se Δ_g, visto como operador sobre $C^\infty(G, K; \mathbb{C})$ (resp. sobre $C^\infty(G, K; \mathbb{R})$), é G-simples.[a]

[a] Note que $C^\infty(G, K; \mathbb{R}) := C^\infty(G, K; \mathbb{C}) \cap C^\infty(G, \mathbb{R})$. Note também que não faz qualquer diferença trocar "C^∞" por "L^2" nesta definição, visto que as autofunções de Δ_g são sempre suaves, de qualquer maneira.

Colecionando os autoespaços de todos os operadores $\Delta_g|_{\mathrm{Isot}_L(V^*)}$, para $V^* \in \widehat{G}_K$, poderemos estabelecer um critério para determinar a G-simplicidade da métrica g. Pelo conteúdo da Proposição 1.1.3, este estudo recai na determinação do espectro dos operadores $\Delta_g^{V^K}$. Eis alguns desdobramentos:

Proposição 1.1.5. [a] *Seja $V \in \widehat{G}_K$. Valem:*

1. *λ é autovalor de $\Delta_g|_{\mathrm{Isot}_L(V^*)}$ se, e somente se, λ é autovalor de $\Delta_g^{V^K}$. Mais ainda, se λ tem multiplicidade $m(\lambda)$ com respeito ao operador $\Delta_g^{V^K}$, então o autoespaço $\mathrm{Isot}_L(V^*)_\lambda$, para o operador $\Delta|_{\mathrm{Isot}_L(V^*)}$, é isomorfo a $(V^*)^{\oplus m(\lambda)}$.*

2. *$\Delta_g|_{\mathrm{Isot}_L(V^*)}$ tem espectro G-simples se, e somente se, $\Delta_g^{V^K}$ tem espectro simples.*

3. *$\Delta_g^{V^K}$ e $\Delta_g^{(V^*)^K}$ possuem mesmos autovalores e multiplicidades.*

4. *Se V é de tipo quaterniônico, com aplicação de estrutura J, então os autoespaços do operador Δ_g^V são J-invariantes. Consequentemente, cada autovalor de $\Delta_g^{V^K}$ tem dimensão par.*

[a] Ver [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1] (compare também com [Schueth, 2017, Sec.2]). Os três primeiros itens podem ser obtidos em termos da Proposição 1.1.3 da seguinte forma: os dois primeiros itens são consequências imediatas do fato de que $\Delta_g|_{\mathrm{Isot}(V^*)}$ se identifica como $\Delta_g^{V^K} \otimes \mathrm{id}$; o terceiro item segue do fato que para toda $\eta \in (V^*)^K$, vale que $\Delta_g^{V^*}\eta|_{V^K} = \eta \circ \Delta_g^V|_{V^K}$. O quarto item tem a ver com as propriedades algébricas das representações de tipo quaterniônico, as quais se identificam, categorialmente, como representações com escalares em $\mathbb{H}$, dobrando a dimensão quando vistas sobre $\mathbb{C}$ (lembramos ainda que J é G-equivariante anti-linear).

O último item da proposição precedente também vale para uma $V \in \mathrm{Rep}(G, \mathbb{C})$ de tipo quaterniônico qualquer e seu argumento reside no lema seguinte:

Lema 1.1.6. *Sejam $V \in Rep(G, \mathbb{C})$ e j a aplicação de estrutura de $V \oplus \overline{V}$. Então*

1. $v \in V_\lambda^K$ *se, e somente se,* $v \in \overline{V}_\lambda^K$. *Deste modo,* $(V^K \oplus \overline{V}^K)_\lambda = V_\lambda^K \oplus \overline{V}_\lambda^K$.

2. $\Delta_g^{V^K \oplus \overline{V}^K}$ *comuta com* $j : V^K \oplus \overline{V}^K \to V^K \oplus \overline{V}^K$ *e seus autoespaços são* j*-invariantes.*

Demonstração. (1) Por construção, lembramos que V e $\overline{V}$ coincidem como conjuntos e são isomorfos vetorialmente. Um dado produto interno unitário de V, induz um G-isomorfismo musical da forma $\flat : \overline{V} \to V^*$ com inverso $\sharp : V^* \to \overline{V}$. Por [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1], temos

$$\Delta_g^{(V^*)^K}(\flat v) = \flat v \circ \Delta_g^{V^K} = \flat(\Delta_g^{V^K} v)$$

(a última igualdade é simplesmente pelo fato do operador ser hermitiano). Deste modo, compondo com $\sharp$ à esquerda, temos que o operador $\Delta_g^{V^K} : V^K \to V^K$ é essencialmente identificado, a menos de isomorfismos, como o operador

$$\Delta_g^{\overline{V}^K} = \sharp \Delta_g^{(V^*)^K} \flat : \overline{V}^K \to \overline{V}^K,$$

o que prova o primeiro item.

(2) Seja λ um autovalor arbitrário de $\Delta_g^{V^K}$ e tome $u \in V_\lambda^K$ e $v \in \overline{V}_\lambda^K$. É bem conhecido que a aplicação de estrutura em $V \oplus \overline{V}$ pode ser tomada de modo a satisfazer $j(u, v) = (-v, u)$ para $u, v \in V$ arbitrários (ver [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.II.6]). Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta_g^{V^K \oplus \overline{V}^K} j(u, v) &= (-\Delta_g^{V^K} v, \Delta_g^{\overline{V}^K} u) \\
&= \lambda(-v, u) \\
&= \lambda j(u, v) \\
&= j(\lambda u, \lambda v) \\
&= j(\Delta_g^{V^K} u, \Delta_g^{\overline{V}^K} v) \\
&= j \Delta_g^{V^K \oplus \overline{V}^K}(u, v)
\end{aligned}$$

∎

Corolário 1.1.7. [a] *Se (G, K) admite alguma representação $V \in \widehat{G}_K$ de tipo complexo ou de tipo quaterniônico, então g não é G-simples complexa.*

[a] Ver [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1] (compare também com [Schueth, 2017, Sec.2]). Este resultado pode ser facilmente lido, a partir da Proposição 1.1.5 da seguinte forma: se V é de tipo complexo, então as componentes isotípicas de V e V^* são ortogonais, porém produzem os mesmos autovalores para Δ_g; se V é de tipo quaterniônico então cada autovalor de $\Delta_g^{V^K}$ tem dimensão par e, portanto, multiplicidade ≥ 2.

O corolário precedente nos mostra que a existência representações de tipo complexo ou quaterniônico forma uma obstrução para G-simplicidade complexa da métrica G-invariante g. Esse tipo de obstrução não existe para o estudo da G-simplicidade real, conforme comentaremos um pouco no parágrafo seguinte, ainda de forma intuitiva num primeiro momento.

Sabemos que, em ambos os casos, a soma direta $V \oplus V^*$ é a complexificação de um único G-módulo irredutível U com escalares reais.[4] Assim, se intersectamos cada subespaço de $C^\infty(G, K; \mathbb{C})$ com $C^\infty(G, \mathbb{R})$, em cada etapa da construção, então o G-módulo $\mathrm{Isot}_L(V) \oplus \mathrm{Isot}_L(V^*)$ recai em uma única componente isotípica $\mathrm{Isot}_L(U)$ com escalares reais, em $C^\infty(G, K; \mathbb{R})$. Isso faz com que as multiplicidades pares dos autovalores nas componentes isotípicas de representações de tipo quaterniônico caiam pela metade, ao efetuar a passagem para escalares reais. Similarmente, para o caso de tipo complexo, as componentes isotípicas ortogonais de V e V^*, que produzem mesmos autovalores, recaem em apenas uma componente isotípica, na passagem para escalares reais. Logo, os empecilhos que ocorriam para G-simplicidade complexa no Corolário 1.1.7 não são empecilhos para a G-simplicidade real da métrica g.

Diante das circunstâncias, voltaremos nossa atenção para a obtenção de um critério que decida a G-simplicidade real da métrica G-invariante g. Pelos comentários feitos há pouco, é desejável considerarmos as componentes isotípicas de uma dada representação V e de sua dual V^*, simultaneamente, motivando-nos à seguinte definição:

[4] Ver Proposição A.1.18.

Definição 1.1.8. Dados $V_1, \ldots, V_k \in \widehat{G}$, denotamos por $\mathrm{Isot}_L(V_1^*, \ldots, V_k^*)$ o G-submódulo $\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Isot}_L(V_j^*)$ de $C^\infty(G, K; \mathbb{C})$ (munido da ação linear L). Definimos ainda

$$\mathrm{Isot}_L^{\mathbb{R}}(V_1^*, \ldots, V_k^*) := \mathrm{Isot}_L(V_1^*, \ldots, V_k^*) \cap C^\infty(G, \mathbb{R}) ,$$

visto como G-módulo com escalares reais.

Observação 1.1.9. Note que, dada $V \in \widehat{G}_K$,

$$\mathrm{Isot}_L(V, V^*) = \begin{cases} \mathrm{Isot}_L(V^*), \text{ se } V \text{ é de tipo real ou quaterniônico} \\ \mathrm{Isot}_L(V^*) \oplus \mathrm{Isot}_L(V), \text{ se } V \text{ é de tipo complexo} \end{cases}$$

e, além disso, $\mathrm{Isot}_L(V, V^*)$ é a complexificação de $\mathrm{Isot}_L^{\mathbb{R}}(V, V^*)$.

A passagem para o estudo da G-simplicidade real de g está contida, essencialmente, no conteúdo da próxima proposição:

Proposição 1.1.10. [a] *Seja $V \in \widehat{G}_K$. Defina $\mathcal{E}_V := \mathrm{Isot}_L^{\mathbb{R}}(V, V^*)$. Então $\Delta_g(\mathcal{E}_V) \subset \mathcal{E}_V$. Além disso, $\Delta_g|_{\mathcal{E}_V}$ tem espectro G-simples real se, e somente se, para todo autovalor λ de $\Delta_g^{V^K}$, com multiplicidade $m(\lambda)$, vale que*

$$m(\lambda) = \begin{cases} 1, \text{ se } V \text{ é de tipo real ou complexo} \\ 2, \text{ se } V \text{ é de tipo quaterniônico} \end{cases} .$$

[a] Ver [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1].

A partir daqui, obtemos o seguinte critério:

Proposição 1.1.11. [a] *A métrica G-invariante g, de $M = G/K$, é G-simples real se, e somente, são as satisfeitas as seguintes condições simultaneamente:*

1. *Para todas $V_1, V_2 \in \widehat{G}_K$, com $V_1 \ncong V_2, V_2^*$, vale que os operadores $\Delta_g^{V_1^K}$ e $\Delta_g^{V_2^K}$ não compartilham nenhum autovalor.*

2. *Para toda $V \in \widehat{G}_K$, de tipo real ou complexo, $\Delta_g^{V^K}$ tem espectro simples.*

3. *Para toda $V \in \widehat{G}_K$, de tipo quaterniônico, cada autovalor de $\Delta_g^{V^K}$ tem multiplicidade 2.*

[a] Ver [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1] (compare também com [Schueth, 2017, Sec.3]).

Na próxima etapa do texto, enunciaremos um critério similar, porém levando em conta a situação genérica dentro do espaço de métricas G-invariantes.

Decidindo a situação genérica para a G-simplicidade do espectro

Seja $M = G/K$ compacto conexo, com G-ação induzida pelas translações à esquerda de G. Fixemos g_0 um produto interno Ad_G-invariante em $\mathfrak{g}$ e tome a decomposição g_0-ortonormal $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, ou seja, $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^\perp$ com respeito a g_0. Em particular o produto interno g_0, restrito a $\mathfrak{m}$, é Ad_K-invariante. Fixemos ainda uma base $\{Y_j\}$ g_0-ortonormal para $\mathfrak{g}$ tal que $\{Y_j\}_{j>\dim K}$ é base de $\mathfrak{m}$.

É bem conhecido que as métricas G-invariantes de M estão em correspondência com os operadores $\kappa \in GL(\mathfrak{m})$ que satisfazem: (i) κ é Ad_K-equivariante; (ii) κ é g_0-simétrico com autovalores positivos. Mais especificamente, dado $\kappa \in GL(\mathfrak{m})$ satisfazendo (i) e (ii), temos que o produto interno $g_\kappa := g_0(\kappa^{-1}(\cdot)\,,\cdot\,)$, definido sobre $\mathfrak{m}$, corresponde a uma única métrica G-invariante sobre M, também denotada por g_κ (usando um pequeno abuso de notação).[5]

Definição 1.1.12. Consideramos os seguintes subespaços topológicos de $GL(\mathfrak{m})$:

$$\mathrm{sym}_K(\mathfrak{m}) := \{\kappa \in GL(\mathfrak{m});\ \kappa \text{ é } \mathrm{Ad}_K\text{-equivariante simétrico}\}$$
$$\mathrm{sym}_K^+(\mathfrak{m}) := \{\kappa \in \mathrm{sym}_K(\mathfrak{m});\ \text{todos os autovalores de } \kappa \text{ são positivos}\}$$

[5] As correspondências desse parágrafo podem ser consultadas no Teorema A.2.2.

Escrevemos $\Delta_\kappa := \Delta_{g_\kappa}$, $\Delta_\kappa^V := \Delta_{g_\kappa}^V$ e $\Delta_\kappa^{V^K} := \Delta_{g_\kappa}^{V^K}$, para todo $\kappa \in \mathrm{sym}_K^+(\mathfrak{m})$.

Considere (κ_{ij}) a matriz de κ na base g_0-ortonormal $\{Y_j\}_{j>\dim K}$. Dados $\kappa \in \mathrm{sym}_K(\mathfrak{m})$ e $(\Pi, V) \in \mathrm{Rep}(G, \mathbb{C})$, definimos

$$D^V(\kappa) := -\sum_{i,j>\dim K} \kappa_{ij}\Pi_*(Y_i \cdot Y_j) : V^K \to V^K \ ,$$

enxergando Π_* como o homomorfismo estendido $\Pi_* : U(g^{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{gl}(V)$. [a]

Tais operadores induzem uma aplicação $D^V(\cdot) : \mathrm{sym}_K(\mathfrak{m}) \to \mathrm{End}(V^K)$. A partir desta, definimos também a aplicação $p_V : \mathrm{sym}_K(\mathfrak{m}) \ni \kappa \mapsto p_V(\kappa) \in \mathbb{C}[t]$, tal que $p_V(\kappa)$ é o polinômio característico de $D^V(\kappa)$.

[a] Nessas condições, vale que $\Pi_*(Y_i \cdot Y_j) = \Pi_*(Y_i)\Pi_*(Y_j)$.

Note que, por construção, para todos $\kappa \in \mathrm{sym}_K^+(\mathfrak{m})$ e $V \in \widehat{G}_K$, temos $D^V(\kappa) = \Delta_\kappa^{V^K}$.

Identificando o conjunto das métricas G-invariantes de $M = G/K$ como sendo $\mathrm{sym}_K^+(\mathfrak{m})$, podemos definir formalmente o que queremos dizer com a frase "o laplaciano é genericamente G-simples".

Definição 1.1.13. Dizemos que o laplaciano é *genericamente G-simples real* (resp. *complexo*) se o subconjunto $\{\kappa \in \mathrm{sym}_K^+(\mathfrak{m});\ \Delta_\kappa$ é G-simples real (resp. complexo)$\}$ é residual em $\mathrm{sym}_K^+(\mathfrak{m})$. Neste caso, dizemos que M possui métrica G-simples real (resp. complexa) genérica.

Lema 1.1.14. [a] *Existe uma aplicação, denominada* resultante *e denotada por res* : $\mathbb{C}[t] \times \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$, *tal que para quaisquer polinômios complexos* $p, q \in \mathbb{C}[t]$, *vale que*

1. *res*$(p, q) = 0 \iff$ *p e q possuem algum zero em comum.*

2. *res é uma aplicação polinomial, isto é, cada escalar res*(p, q) *é um polinômio (em várias variáveis) nos coeficientes de p e q.*

3. $(\forall \ell \geq 1)$ *res* $\left(p, \frac{d^\ell}{dt^\ell}p\right) = 0 \quad \iff \quad$ *p admite algum zero de multiplicidade* $\geq \ell + 1$.

[a] Ver [Schueth, 2017, Sec.3] ou [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1].

Definição 1.1.15. Tomemos res $: \mathbb{C}[t] \times \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$ como no Lema 1.1.14. A partir desta, dadas $U, V \in \widehat{G}$, construímos ainda aplicações $a_{U,V}, b_V, c_V : \mathrm{sym}_K(\mathfrak{m}) \to \mathbb{C}$, definidas para cada $\kappa \in \mathrm{sym}_K(\mathfrak{m})$ por:

$$\begin{aligned} a_{U,V}(\kappa) &:= \mathrm{res}\,(p_U(\kappa), p_V(\kappa)) \\ b_V(\kappa) &:= \mathrm{res}\,\left(p_V(\kappa), \tfrac{d}{dt} p_V(\kappa)\right) \\ c_V(\kappa) &:= \mathrm{res}\,\left(p_V(\kappa), \tfrac{d^2}{dt^2} p_V(\kappa)\right) \end{aligned}$$

e $a^+_{U,V}, b^+_V, c^+_V : \mathrm{sym}^+_K(\mathfrak{m}) \to \mathbb{C}$ são as restrições de $a_{U,V}$, b_V e c_V ao conjunto $\mathrm{sym}^+_K(\mathfrak{m})$, respectivamente.

Neste viés, o critério estabelecido pela Proposição 1.1.11 pode ser relido por:

Proposição 1.1.16. [a] *Dado $\kappa \in \mathrm{sym}^+_K(\mathfrak{m})$, então Δ_κ é G-simples real se, e somente se, são satisfeitas as seguintes condições simultaneamente:*

1. *Para todas $U, V \in \widehat{G}_K$, com $U \ncong V, V^*$, vale que $a_{U,V}(\kappa) \neq 0$.*
2. *Para toda $V \in \widehat{G}_K$, de tipo real ou complexo, vale que $b_V(\kappa) \neq 0$.*
3. *Para toda $V \in \widehat{G}_K$, de tipo quaterniônico, vale que $c_V(\kappa) \neq 0$.*

[a] Ver [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1] (compare também com [Schueth, 2017, Sec.3]).

Assim, os zeros das aplicações $a^+_{U,V}$, b^+_V ou c^+_V representam obstruções para que as métricas correspondentes sejam G-simples reais.

Observamos que o conjunto $\mathrm{sym}^+_K(\mathfrak{m})$ é um aberto de $\mathrm{sym}_K(\mathfrak{m})$. Como a aplicação $a_{U.V}$ é polinomial, então ela é identicamente nula se, e somente se, sua restrição ao aberto $\mathrm{sym}^+_K(\mathfrak{m})$ é identicamente nula, isto é, se, e somente se, $a^+_{U.V}$ é identicamente nula. Em particular, se existir $\kappa \in \mathrm{sym}_K(\mathfrak{m})$ tal que $a_{U,V}(\kappa) \neq 0$, então $a^+_{U,V}$ não pode ser identicamente nula. Um efeito totalmente análogo ocorre para as aplicações b_V e c_V.

Pelas considerações precedentes e pelo fato de $\widehat{G}_K$ ser no máximo enumerável, temos que os itens 1, 2 e 3 da Proposição 1.1.16 podem “falhar” no máximo na união enumerável de zeros polinomiais.

A fim de estabelecer a situação genérica, a ideia é garantir que as aplicações $a^+_{U,V}$, b^+_V e c^+_V não sejam identicamente nulas (o que equivale a dizer que $a_{U,V}$, b_V e c_V não são identicamente nulas), notando que os possíveis enumeráveis zeros polinomiais violando algum dos itens do critério formam um subconjunto magro $\mathcal{N}$, em $\mathrm{sym}^+_K(\mathfrak{m})$ (logo, magro em $\mathrm{sym}_K(\mathfrak{m})$). Deste modo, o complementar $\mathrm{sym}^+_K(\mathfrak{m}) - \mathcal{N}$ será residual e fornecerá exatamente as métricas onde a G-simplicidade dada pelo critério funciona.

Juntando todas as análises, chegamos a um critério mais robusto:

Teorema 1.1.17. [a] *Existe uma métrica G-simples real para M se, e somente se, os seguintes itens são simultaneamente satisfeitos:*

1. *Para todas $U, V \in \widehat{G}_K$, com $U \ncong V, V^*$, vale que $a_{U,V}$ não é identicamente nulo.*
2. *Para toda $V \in \widehat{G}_K$, de tipo real ou complexo, vale que b_V não é identicamente nulo..*
3. *Para toda $V \in \widehat{G}_K$, de tipo quaterniônico, vale que vale que c_V não é identicamente nulo.*

Mais ainda, a existência de tal métrica equivale a dizer que o operador de Laplace-Beltrami em M é genericamente G-simples real.

[a] Ver [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1] (compare também com [Schueth, 2017, Sec.3]).

Note que os itens 1, 2 e 3 do teorema enunciado há pouco são mais flexíveis do que os itens 1, 2 e 3 da Proposição 1.1.16. De fato, no teorema, temos um conjunto maior (em relação à proposição) que podemos por o critério à prova – o conjunto $\mathrm{sym}_K(\mathfrak{m})$ – enquanto que, na proposição, a verificação do critério fica restrita ao aberto $\mathrm{sym}^+_K(\mathfrak{m})$.

A seguir, vemos que o critério apresentado pelo teorema se adapta facilmente ao cenário em que consideramos quocientes por subgrupos discretos centrais no espaço homogêneo em questão.

Lema 1.1.18. [a] *Seja* Γ *um subgrupo discreto de* $Z(G)$*. Defina* $G' := G/\Gamma$, $K' := K/(K \cap \Gamma)$ *e considere o espaço homogêneo* $M' := G'/K'$*. Se o laplaciano em* M *é genericamente* G*-simples real então o laplaciano em* M' *é genericamente* G'*-simples real.*

[a] Ver [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1] (compare também com [Schueth, 2017, Sec.4]).

Aplicações do Teorema 1.1.17

A seguir, veremos algumas aplicações do Teorema 1.1.17, verificadas recentemente.

Aplicação 1: métricas invariantes à esquerda em certos grupos de Lie compactos

[Schueth, 2017] verificou o critério dado pelo Teorema 1.1.17 para certos grupos de Lie compactos G munidos da G-ação induzida pelas translações à esquerda, ou seja, considerando o universo das métricas invariantes à esquerda, conforme enunciado a seguir:

Teorema 1.1.19 ([Schueth, 2017]). [a] *Considere* G *um grupo de Lie compacto munido da* G*-ação transitiva induzida pelas translações à esquerda. Então o laplaciano é genericamente* G*-simples real para grupos da forma*

$$(SU(2) \times \cdots \times SU(2) \times T^n)/\Gamma \; ,$$

onde Γ *é um subgrupo discreto central. Em particular, para uma métrica invariante à esquerda genérica* g*, o laplaciano* Δ_g *é* G*-simples real para* $G \in \{SU(2), T^n, SO(3), U(2), SO(4)\}$*, por exemplo.*

[a] Ver [Schueth, 2017, Sec.4].

Aplicação 2: espaços simétricos compactos

[Petrecca and Röser, 2018] aplicaram o critério do Teorema 1.1.17 sobre espaços simétricos compactos dividindo a análise em dois casos, essencialmente: (i) espaços simétricos de *rank* igual a 1 (e produtos destes) ; (ii) espaços simétricos de *rank* ≥ 2 (que não podem ser expressos como produtos de espaços simétricos de *rank* 1). O critério dá um retorno positivo para os espaços da classe (i) e um retorno negativo para os espaços da classe (ii), conforme:

Teorema 1.1.20 ([Petrecca and Röser, 2018]). [a] *Seja $M = G/K$ um espaço simétrico compacto.*

1. *Suponha que M é irredutível como espaço simétrico. Então o laplaciano em M é genericamente G-simples real se, e somente se, rank$(M) = 1$. Em particular, os únicos grupos de Lie simples e compactos G que admitem métrica bi-invariante $(G \times G)$-simples real genérica são os de rank 1.*

2. *Se M pode ser expresso como um produto cartesiano de espaços simétricos compactos de rank 1, então o laplaciano em M é genericamente G-simples real.*

3. *Para $M = G \simeq G/\{e\}$, munido de uma métrica bi-invariante g arbitrária e da G-ação transitiva bilateral, vale que Δ_g não é G-simples real.*

[a] Ver [Petrecca and Röser, 2018, Intro e Sec.2].

É curioso que existam exemplos de variedades compactas com simetrias prescritas por um grupo G que, mesmo após organizadas em G-representações irredutíveis, o laplaciano não seja genericamente G-simples real. Exploraremos, por exemplo, onde está a "falha" que faz com que critério dê um retorno negativo na situação descrita pelo item 3 e também no caso dos espaços simétricos compactos irredutíveis de rank ≥ 2 (este último caso se relaciona, essencialmente, com uma manifestação direta de propriedades algébricas inerentes aos sistemas de raízes correspondentes).

Aplicação 2A: entendendo a "falha" em espaços simétricos irredutíveis de rank ≥ 2

Assuma $M = G/K$ espaço simétrico irredutível, simplesmente conexo, compacto e com rank ≥ 2. Suponha que $(\mathfrak{a}, R_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}})$ é o sistema de raízes de $\mathfrak{m}$ e $(\mathfrak{t}, R_{\mathfrak{g}})$ é o sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ (ver Definição A.2.7 e Teorema A.2.8). Os detalhes da argumentação a seguir podem ser consultadas em [Petrecca and Röser, 2018, Sec.2].

Lembramos que $\mathfrak{g}$ está munida de um produto interno Ad_G-invariante g_0 que induz decomposições ortogonais $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ e $\mathfrak{t} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a}$. Denote V^{μ} a representação com peso maior μ. Nesta configuração, segue do teorema de Cartan-Helgason que cada operador $\Delta_{\kappa}^{(V^{\mu})^K}$, com $V^{\mu} \in \widehat{G}_K$, é a restrição do elemento de Casimir de V^{μ} a $(V^{\mu})^K$, com autovalor de Casimir dado por

$$c_{\mu} := e_{\kappa} \cdot g_0(\mu + 2\delta, \mu) \ ,$$

onde δ é a meia soma de raízes positivas de $R_{\mathfrak{g}}$ e e_{κ} é um escalar real positivo. Note que, definindo

$$a_{\mu} := g_0(\mu + \delta, \mu + \delta)^{1/2}$$

temos que $a_{\mu} = a_{\rho}$ se, e somente se, $c_{\mu} = c_{\rho}$. Caso existam $V^{\mu}, V^{\rho} \in \widehat{G}_K$, com $V^{\mu} \ncong V^{\rho}, (V^{\rho})^*$, tais que $a_{\mu} = a_{\rho}$, então temos automaticamente que o primeiro item do Teorema 1.1.17 falha. De fato, é justamente isso que acontece em rank ≥ 2, conforme proposição seguinte:

Proposição 1.1.21. [a] *Nas condições descritas anteriormente, vale que:*

1. *Se rank$(M) \geq 3$, então existem $V^{\mu}, V^{\rho} \in \widehat{G}_K$ e uma g_0-isometria linear do sistema de raízes $\phi : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ tais que: (i) $V^{\mu} \ncong V^{\rho}, (V^{\rho})^*$; (ii) se $\tilde{\delta}$ é a componente g_0-ortogonal de δ sobre $\mathfrak{m}$, então $\phi(\tilde{\delta}) = \tilde{\delta}$; (iii) $\phi(\mu) = \rho$ e $a_{\mu} = a_{\rho}$ (ou seja, $c_{\mu} = c_{\rho}$).*

2. *Se rank$(M) = 2$, então existem $V^{\mu}, V^{\rho} \in \widehat{G}_K$, com $V^{\mu} \ncong V^{\rho}, (V^{\rho})^*$ tais que $a_{\mu} = a_{\rho}$ (ou seja, $c_{\mu} = c_{\rho}$) e, neste caso, os pesos maiores μ e ρ não necessariamente estão relacionadas por uma isometria $\phi : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ do sistema de raízes.*

[a] Ver [Petrecca and Röser, 2018, Sec.2]. Para o primeiro item, os autores fornecem um argumento geral, enquanto o segundo item é feito caso a caso, usando a teoria de classificação de espaços simétricos de *rank* 2.

Aplicação 2B: entendendo por que, sobre G, nenhuma métrica bi-invariante pode ser G-simples real

Considere a ação bilateral $G \times G \ni (x, y) \mapsto r_{x^{-1}} \circ \ell_x(y) \in G$ (assuma, por hora, que $Z(G) = \emptyset$ a fim de que esta ação seja efetiva, apenas para simplificar as ideias expostas a seguir). Então as métricas G-invariantes, com respeito a esta ação, só precisam prescrever como simetrias os difeomorfismo da forma $r_{x^{-1}} \circ \ell_x$, os quais devem comutar com o laplaciano, considerando a ação por *pullback* de Diff(G).

Porém, toda métrica G-invariante, neste contexto, é também $(G \times G)$-invariante (bi-invariante), o que implica que os difeomorfismos da forma $r_{y^{-1}} \circ \ell_x$, com $x, y \in G$ arbitrários, também comutam com o laplaciano. Ou seja, usando G para prescrever as simetrias, automaticamente ganhamos um grupo maior $G \times G$ de simetrias existentes. Deste modo, as representações de G não são suficientes para organizar todas as simetrias que comutam com laplaciano para as métricas de interesse. Por esta análise, devemos considerar então pelo menos $(G \times G)$-representações.

Suponha que $G = (G \times G)/\Delta G$ é um grupo de Lie compacto simples. Pelo Teorema 1.1.20, só podemos esperar que uma métrica $(G \times G)$-invariante genérica seja $(G \times G)$-simples real, caso rank$(G) = 1$.

Assuma rank$(G) = 1$, $G' := G \times G$ e $K' := \Delta G$. Então $\widehat{G'_{K'}} = \{V^* \otimes V;\ V \in \widehat{G}\}$ (isto decorre imediatamente do fato que $(V_1 \otimes V_2)^{K'} \simeq \mathrm{Hom}_G(V_1^*, V_2)$, junto ao lema de Schur). Daí as componentes isotípicas da ação de G' que aparecem na decomposição de Peter-Weyl em $L^2(G, \mathbb{C})$ são (a menos de equivalências) da forma $V^* \otimes V$, com $V \in \widehat{G}$. Para métricas bi-invariantes, o laplaciano em cada uma dessas componentes isotípicas é expresso como o elemento de Casimir da representação correspondente e, portanto, possui um único autovalor. Ou seja, garantindo que componentes isotípicas distintas forneçam autovalores distintos, então cada autoespaço corresponde exatamente a uma dessas componentes isotípicas. Assim, ao final do processo, teremos o laplaciano genericamente $(G \times G)$-simples real. Isso é sempre verdade nesta configuração, conforme as análises de [Petrecca and Röser, 2018].

Por outro lado, visto como G-módulo (ação bilateral), cada componente isotípica (a qual corresponde a um autoespaço de uma dada métrica G-invariante arbitrária) da forma $V^* \otimes V$ nunca é irredutível e, portanto, não podemos esperar, de modo algum, que o laplaciano seja G-simples real.

1.2 Laplacianos mais gerais com métricas G-invariantes

Uma das perguntas que norteiam esta tese é a seguinte: dado um operador laplaciano mais geral (como o hodge-laplaciano, por exemplo), indexado por métricas G-invariantes em espaços homogêneos da forma G/K, existe um critério análogo ao do Teorema 1.1.17?

Nesta seção, estudaremos tais operadores bem como suas propriedades algébricas básicas e possíveis relações com a teoria de representações, similares às que obtivemos na Seção 1.1 para o operador de Laplace-Beltrami. Tal estudo será útil para abordarmos a questão enunciada há pouco, no capítulo seguinte.

Essencialmente, seguiremos as abordagens presentes em [Ikeda and Taniguchi, 1978], [Fegan, 1980], e [Lauret et al., 2015]. Assuma $M = G/K$ um espaço homogêneo conexo, com G compacto semi-simples (a menos de menções contrárias). Fixemos então uma métrica riemanniana G-invariante arbitrária g em M. Então g corresponde a um produto interno Ad_K-invariante em $\mathfrak{g}$, o qual, por um pequeno abuso de notação, também denotamos por g. Assim, g induz uma decomposição ortogonal $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$.

Operadores em seções de fibrados da forma $E = G \times_K U$

Suponha $U \in \mathrm{Rep}(K, \mathbb{C})$ munido de um produto interno (hermitiano) K-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Construindo a K-ação à direita sobre $G \times U$, dada por

$$(x, u) \cdot k := (xk\,,\, k^{-1} \cdot u)\ ,$$

para todos $k \in K$ e $(x, u) \in G \times U$, então obtemos o espaço de órbitas $G \times_K U$. Um elemento de $G \times_K U$ é uma K-órbita de um dado elemento $(x, u) \in G \times U$, a qual é denotada por $[x, u]$. Podemos então construir um fibrado com espaço total $G \times_K U$, espaço base $M = G/K$ e fibras unitariamente isomorfas à K-representação U, dado pela projeção

$$\mathrm{pr} : G \times_K U \ni [x, u] \mapsto xK \in G/K$$

(a qual é uma submersão para uma única estrutura diferenciável sobre $G \times_K U$). Este fibrado é denotado simplesmente por $E = G \times_K U$ e o espaço de suas seções (suaves) é denotado por $\Gamma^\infty(E)$.

Revisando a Definição A.3.3 e o Teorema A.3.4, podemos definir uma G-ação dada por

$$(L_x \cdot s)(yK) := x \cdot s(x^{-1}yK)$$

para todos $x, y \in G$ e $s \in \Gamma^\infty(E)$, de modo que o espaço de seções $\Gamma^\infty(E)$ é equivalente ao G-módulo $\mathrm{Ind}_K^G(U) = C^\infty(G, K; U)$ (com G-ação induzida pelas translações à esquerda). Esta equivalência é dada pela associação

$$C^\infty(G, K; U) \ni f \mapsto s_f \in \Gamma^\infty(E)$$

onde $s_f(xK) := [x, f(x)]$, para todo $x \in G$.

Como cada fibra E_{xK} em E é unitariamente equivalente a U, então usaremos a mesma notação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (de U) para o produto interno de E_{xK}. Assim temos um produto interno em $C^\infty(G, K; U)$ definido por

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{L^2} := \int_G \langle f_1(x), f_2(x) \rangle dx \quad [6],$$

para todas $f_1, f_2 \in C^\infty(G, K; U)$, induzindo o completamento $L^2(G, K; U)$.

Sabemos que $C^\infty(G, K; U)$ é um G-submódulo de $C^\infty(G, U)$ com a ação L induzida pelas translações à esquerda. Se consideramos a ação R, induzida pelas translações à direita, então temos G-módulos equivalentes, via

$$\mathcal{T} : (L, C^\infty(G, U)) \ni f \mapsto f \circ \mathrm{inv} \in (R, C^\infty(G, U)) \quad [7] \tag{$\mathcal{T}$}$$

O homomorfismo $L : G \to GL(C^\infty(G, U))$ induz um homomorfismo de álgebras de Lie $L_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(C^\infty(G, U))$, o qual se estende a um homomorfismo de álgebras associativas com

[6] $\int_G (\cdot) dx$ é a integral de Haar bi-invariante de G (normalizada para ter volume total unitário).
[7] $\mathrm{inv} : G \ni x \mapsto x^{-1} \in G$ é a aplicação de inversão de G.

unidade $L_* : U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \to \mathrm{End}(C^\infty(G,U))$ satisfazendo

$$L_*(Y)f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(\exp(tY))f$$

para todos $Y \in \mathfrak{g}$ e $f \in C^\infty(G,U)$. De maneira totalmente análoga, temos o homomorfismo $R_* : U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{gl}(C^\infty(G,U))$.

Lembramos que a álgebra universal envelopante $U(\mathfrak{g})$ pode ser identificada como a álgebra dos operadores diferenciais invariantes à esquerda (de todas as ordens), agindo sobre $C^\infty(G,U)$.

Definição 1.2.1. Seja $\{Y_j\}$ uma base ortonormal (com respeito à alguma métrica invariante dada) de $\mathfrak{g}$. Para cada $f \in C^\infty(G,U)$, consideramos

$$\mathcal{C}(Y_1,\ldots,Y_{\dim G})f := -\sum_j Y_j^2 f\ ,$$

enxergando cada Y_j^2 como um operador derivador, invariante à esquerda, de ordem 2 e, associado a um G-submódulo (Π, V), de $C^\infty(G,U)$, temos

$$\Pi_*(\mathcal{C}(Y_1,\ldots,Y_{\dim G})) = -\sum_j \Pi_*(Y_j)^2 : V \to V\ ,$$

usando a ação estendida de Π à álgebra universal envelopante $U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$.

Proposição 1.2.2. [a]

Seja (Π, V) uma sub-representação de $C^\infty(G,U)$. Suponha que $\{Y_j\}$ é uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$, com respeito a uma métrica bi-invariante correspondente, tal que

$$\mathcal{C}(Y_1,\ldots,Y_{\dim G}) = \mathcal{C}$$

(isto é, coincide com o elemento de Casimir correspondente). Então para toda $f \in V \subset C^\infty(G,U)$, vale que

$$\Pi_*(\mathcal{C})f = \mathcal{C}\, f$$

Em particular, para $V = C^\infty(G,K;U)$, vale que para toda $f \in C^\infty(G,K;U)$

$$L_*(\mathcal{C})f = \mathcal{C}\, f$$

[a] Ver [Ikeda and Taniguchi, 1978, Sec.2]

O hodge-laplaciano como elemento de Casimir

Tomemos $U = \wedge^p(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^*$ e consideremos (M,g) um espaço homogêneo $M = G/K$, com métrica g correspondendo a uma métrica bi-invariante sobre G. É possível verificar que, à luz da identificação

$$\Omega^p(M,\mathbb{C}) = C^\infty(G,K;\wedge^p(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^*)$$

temos que o hodge-laplaciano Δ_g, agindo em $\Omega^p(M,\mathbb{C})$ se identifica como o Casimir em $C^\infty(G,K;\wedge^p(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^*)$, com base ortonormal de $\mathfrak{g}$ construída a partir da métrica riemanniana $(G\times G)$-invariante g. Ou seja, se $\{Y_j\}$ é uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$ tal que $\{Y_j\}_{j>\dim K}$ é base ortonormal de $\mathfrak{m}$, com $\mathcal{C}(Y_1,\ldots,Y_{\dim G}) = \mathcal{C}$, então:

Teorema 1.2.3. [a] *Nas condições precedentes, vale que*

$$\begin{aligned} \Delta_g : \Omega^p(M,\mathbb{C}) \to \Omega^p(M,\mathbb{C}) \quad &\simeq \quad L_*(\mathcal{C}) \quad : C^\infty(G,K;\wedge^p(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^*) \to C^\infty(G,K;\wedge^p(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^*) \\ &\simeq \quad \mathcal{C} \quad : C^\infty(G,K;\wedge^p(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^*) \to C^\infty(G,K;\wedge^p(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^*) \end{aligned} .$$

[a] Ver [Ikeda and Taniguchi, 1978, Sec.2].

O teorema recém-enunciado pode ser útil em nossa pesquisa no seguinte sentido: o hodge-laplaciano em certas configurações, sobre M, se comporta de maneira algébrica muito similar ao laplaciano $\Delta_g : C^\infty(G,K;\mathbb{C}) \to C^\infty(G,K;\mathbb{C})$ estudado por [Petrecca and Röser, 2018]. Podemos então tentar estabelecer um paralelo entre estas construções.

2 Avanços e contribuições

Convenção 2. Todos os grupos de Lie (denotados em geral por G) e espaços homogêneos, denotados em geral por $M = G/K$ e via de regra com K subgrupo de Lie fechado em G, são assumidos como sendo variedades compactas, conexas e com G-ação induzida pelas translações à esquerda de G, a menos de menção contrária, ao longo deste capítulo. Similarmente, na seção de discretizações, consideramos apenas grafos homogêneos $\mathcal{G}$, finitos e conexos, munidos de ações efetivas de um dado grupo finito G.

Introdução

O objetivo central deste capítulo é apresentar questões, resultados (juntamente às suas demonstrações) e análises das investigações centrais que nos propusemos a fazer na pesquisa desta tese de doutorado, dando nossa contribuição autoral.

Mas qual seria o conteúdo desta pesquisa? Resumidamente, nosso objetivo central é desenvolver um avanço científico-matemático da Seção 1.1, para além das fronteiras do que é conhecido atualmente na bibliografia mundo afora.

Lembramos que o núcleo central da Seção 1.1 era apresentado pelo Teorema 1.1.17, o qual nada mais era do que um critério para decidir quando um dado espaço homogêneo (conexo e compacto) $M = G/K$ admitia uma métrica G-invariante tal que o operador de Laplace-beltrami tivesse espectro G-simples real, a partir da verificação de três identidades polinomiais. Mais ainda, analisávamos se esta propriedade era genérica no espaço das métricas G-invariantes. Algumas das aplicações deste resultado foram desenvolvidas em [Schueth, 2017, Petrecca and Röser, 2018].

O avanço científico-matemático mencionado surgirá dos seguintes questionamentos:

Q1. Existe um critério de irredutibilidade para os autoespaços complexos do operador de Laplace-Beltrami complexificado, indexado por métricas G-invariantes sobre $M = G/K$, análogo ao Teorema 1.1.17?

Q2. Sabemos que o Teorema 1.1.17 se aplica bem para os espaços simétricos de *rank* 1. Como obter avanços e descrições mais precisas da configuração dos autoespaços do operador de Laplace-Beltrami para os espaços simétricos de *rank* arbitrário?

Q3. Considerando outros tipos de operadores laplacianos e suas generalizações sobre certos espaços homogêneos, tanto na versão real quanto na complexificada, será que podemos obter um critério análogo de irredutibilidade para seus autoespaços, similar ao Teorema 1.1.17? Quais adaptações seriam necessárias?

Q4. Podemos aplicar a questão Q3 sobre laplacianos agindo sobre o espaço de p-formas diferenciáveis, para um grau p fixado sobre M, ou mais geralmente sobre o espaço total de formas diferenciáveis sobre M?

Q5. Todas as simetrias ou aplicações que influenciam na organização dos autoespaços de operadores laplacianos e suas generalizações, munidos de métricas G-invariantes sobre um dado espaço homogêneo $M = G/K$, são descritas por categorias de grupos? Será que em alguns casos precisamos organizar simetrias generalizadas provenientes de outras categorias como as de álgebras ou de semi-grupos, por exemplo? Como organizá-las num único conceito de representação que permita discutir a irredutibilidade dos autoespaços a partir delas?

Q6. Será que podemos desenvolver uma teoria análoga à Seção 1.1 para estruturas homogêneas discretas, com parâmetros invariantes pela ação de determinado grupo, como grafos de Cayley ou, mais geralmente, de Schreier?

Cada seção deste capítulo responde a uma das questões acima. Todos os teoremas, corolários e exemplos deste capítulo são inovações autorais desta tese.

Na Seção 2.1 abordamos a questão Q1. A resposta passa por propriedades algébricas da categoria das representações com escalares complexos, sobre o grupo analisado. Há um resultado que afirma que tal categoria engloba a categoria das representações com escalares reais e também a categoria das representações com escalares quaterniônicos. Devido a esta configuração, naturalmente surge uma ação do grupo de quatérnios Q_8 induzido pelas aplicações de estrutura das representações irredutíveis de tipo quaterniônico ou representações não irredutíveis da forma $\mathbb{H} \otimes V \simeq V \otimes \overline{V}$ para V de tipo complexo puro. Assim, sempre que existirem representações de tipo complexo ou de tipo quaterniônico na descrição dos autoespaços do operador de Laplace-Beltrami complexificado, deve-se levar em conta a ação adicional do grupo Q_8. Mais especificamente, métricas G-simples reais, na versão real do operador, estarão associadas a métricas $(Q_8 \times G)$-simples complexas, para a versão complexa, neste cenário.

Na Seção 2.2 abordamos a questão Q2. Veremos que nos espaços simétricos irredutíveis de *rank* maior que 1 sempre há representações não isomorfas associadas a um mesmo autovalor. Isto será devido a certos tipos de simetrias presentes nos sistemas de raízes associados. Assim, a situação genérica para a configuração dos autoespaços do laplaciano deve levar em conta o papel destas simetrias. Veremos que os pesos maiores correspondentes às representações que contribuem para um mesmo autoespaço estão também relacionados por uma ação transitiva de um certo grupo formado por tais simetrias. Neste cenário, vemos a necessidade de organizar os autoespaços do laplaciano com métricas G-invariante a partir de simetrias de naturezas distintas: (i) as simetrias geométricas provenientes do grupo de isometrias prescrito; (ii) simetrias de natureza algébrica presentes no sistema de raízes a nível da teoria de álgebras de Lie. Juntando estes dois tipos de simetrias distintos, temos uma descrição espectral nova.

Na Seção 2.3 abordamos a questão Q3. Até então, estávamos estudando o laplaciano agindo em funções a valores reais ou complexos sobre $M = G/K$. Veremos como encontrar "laplacianos generalizados" agindo sobre funções U^*-valoradas, onde U^* é uma K-representação dada. Este novo cenário exige incorporar um pouco da teoria de fibrados vetoriais homogêneos e a própria representação U^* induz por si só simetrias para os autoespaços que não enxergávamos antes. Estas novas simetrias são decodificadas por grupos ortogonais formados a partir de U^* e algumas variações. Para $U^* = \mathbb{C}$, Temos o grupo ortogonal $O(\mathbb{C})$ que age em $\mathbb{C}$ de forma trivial como a ação escalar complexa, ou seja, não ganhamos nada de novo visto que já tínhamos a estrutura vetorial desde o início. Para U^* arbitrário obtemos respostas análogas as questões Q1 e Q2, porém devemos considerar adicionalmente as ações destes grupos ortogonais induzidos pela presença de U^* no contradomínio das funções U^*-valoradas, sobre as quais os "laplacianos generalizados" agem.

Na Seção 2.4 abordamos a questão Q4, a qual é um caso particular da temática da questão Q3 discutida no parágrafo anterior, tomando $U^* := \wedge^p m^{*\mathbb{C}}$ (para analisar p-formas, com p fixado) ou então $U^* := \bigoplus_p \wedge^p m^{*\mathbb{C}}$ (para analisar o espaço total de formas). Além disso, como é de se esperar, veremos que a partir de alguns isomorfismos, os operadores considerados são na verdade hodge-laplacianos ou generalizações destes, em certos contextos.

Na Seção 2.5 abordamos a questão Q5. Esta seção busca sintetizar todas as simetrias ou aplicações que impactem na organização espectral dos operadores e espaços homogêneos estudados nas questões anteriores. Conforme comentamos brevemente, estas simetrias podem ter diversas naturezas, podendo estar presentes no grupo de isometrias, em estruturas algébricas sobre os sistemas de raízes, em certos grupos ortogonais relacionados às funções U^*-valoradas sobre as quais os operadores agem, podendo inclusive existirem diversas outras tipos a depender do contexto considerado. Inclusive, veremos que tais simetrias ou aplicações que influenciam na descrição dos autoespaços dos laplacianos considerados podem nem sequer serem invertíveis. Sendo assim, a organização de simetrias de diversas facetas demanda diferentes noções de representações, cada qual associada a uma categoria diferente. Com isto, pretendemos generalizar a própria noção de representação para incorporar todas as simetrias presentes em nosso estudo espectral numa só teoria, discutindo o que seria a irredutibilidade dos autoespaços nesta visão multifacetada. Recorremos à teoria de categorias para tal análise, produzindo um novo estudo que pode produzir *insights* para pesquisadores que trabalham com mais de uma noção de representação no mesmo problema.

Por fim, na Seção 2.6 abordamos a questão Q6, na qual discorremos sobre o laplaciano discreto Δ_ω de um dado grafo homogêneo da forma G/K, com G um grupo finito e ω um peso G-invariante. Note que o item 4 do Teorema A.6.3 nos dá um indício de que Δ_ω também pode ser estudado em termos da representação regular induzida pelas translações à direita. A partir daí e de algumas adaptações entre geometria diferencial de variedades e espaços discretos, conseguiremos estabelecer uma teoria para grafos homogêneos análoga à Seção 1.1, a fim de decidir se, genericamente, os autoespaços do laplaciano discreto são irredutíveis para uma família de pesos G-invariantes sobre o grafo homogêneo considerado. Como é de se esperar, neste novo contexto a noção de irredutibilidade para os autoespaços se relacionará com as representações irredutíveis do grupo G.

2.1 O critério de irredutibilidade para as autofunções complexas

Para o desenvolvimento da atual seção, recomendamos relembrar a Seção 1.1 e fazer uma breve revisão das propriedades envolvendo as representações de tipo real, complexo e quaterniônico (a qual pode ser feita combinando o Apêndice A com a referência [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.II.6]).

No Teorema 1.1.17, estabelecemos um critério para decidir quando um dado espaço homogêneo (conexo e compacto) M admitia uma métrica G-simples real, a partir da verificação de três identidades polinomiais. A primeira delas tinha a ver com separar os autovalores em componentes isotípicas distintas (salvo pares de componentes de representações duais não isomorfas, as quais produzem os mesmos autovalores de qualquer forma). A segunda e a terceira se relacionavam ao fato de confinar, dentro de cada componente, as multiplicidades de cada autovalor como sendo as menores possíveis, diante de cada tipo de representação (real, complexa ou quaterniônica).

Tal critério serve apenas para a análise das autofunções reais, pois no contexto das autofunções complexas, há obstruções claras: a existência de representações de tipo complexo ou quaterniônico automaticamente impede a existência de um laplaciano com espectro G-simples complexo. Basicamente, isto se dá pois

- no caso de existir alguma V irredutível de tipo complexo, há pelo menos duas representações irredutíveis não-isomorfas que contribuem para o mesmo autoespaço: V e V^* (quando restringimos a análise às autofunções reais, isto não é uma obstrução, visto que $V \oplus V^*$ é a complexificação de uma única representação irredutível real);

- já para uma V irredutível de tipo quaterniônico, cada autoespaço acaba sendo "dobrado" da forma "$V \oplus V$" (quando restringimos a análise às autofunções reais, isto também não é um problema, visto que $V \oplus V$ é a complexificação de uma única representação irredutível real, o que elimina este efeito "em dobro").

Ainda assim, a mesma questão cabe para o estudo das autofunções complexas:

Questão 2.1.1. *Dentro do espaço de métricas G-invariantes sobre $M = G/K$, existe uma situação genérica que estabelece os autoespaços complexos do laplaciano como representações irredutíveis? Em outras palavras, existe uma configuração em que, para uma métrica genérica g, cada autoespaço do operador $\Delta_g : L^2(G, K; \mathbb{C}) \to L^2(G, K; \mathbb{C})$ é $\tilde{G}$-simples para algum grupo ou estrutura algébrica $\tilde{G}$ que organize as simetrias (geométricas e estruturais) do problema espectral com isometrias prescritas por G?*

A resposta para a pergunta acima é sim e a justificativa reside na seguinte ideia: ao prescrever as isometrias a partir G e estudar representações com escalares em $\mathbb{C}$, automaticamente ganhamos simetrias algébricas dadas pelo grupo de quatérnions Q_8, comutando com o laplaciano. Daí, o correto é não esperar G-simplicidade complexa, mas sim $\tilde{G}$-simplicidade complexa, para $\tilde{G} := Q_8 \times G$ (veremos como se dá esse processo).

O laplaciano age em $L^2(G, K; \mathbb{C})$ (munido da ação à esquerda L). A ação de Q_8 que comutará com o laplaciano será construída a partir de aplicações de estrutura J dentro de espaços da forma $\mathrm{Isot}_L(V, \overline{V})$ (lembramos que este espaço é a soma das componentes isotípicas de V e $\overline{V}$, em $L^2(G, K; \mathbb{C})$). A partir daí, teremos o grupo

$Q_8 := \{\pm \mathrm{id}, \pm i\,\mathrm{id}, \pm J, \pm iJ\}$ agindo nas componentes isotípicas de $L^2(G, K, \mathbb{C})$, contendo as seguintes propriedades:

- para V de tipo complexo, Q_8 relaciona as autofunções de $\Delta_g^{V^K}$ e de $\Delta_g^{\overline{V}^K}$;
- para V de tipo quaterniônico, existe um subespaço $U(K)$ responsável por decompor o operador $\Delta_g^{V^K}$ como o operador "dobrado" $\Delta_g^{U(K)} \oplus \Delta_g^{U(K)} : U(K) \oplus \overline{U(K)} \to U(K) \oplus \overline{U(K)}$, com $\overline{U(K)}$ e $U(K)$ isomorfos vetorialmente e relacionados pela ação de Q_8 (justificando a obstrução do "dobro" dos autoespaços, neste tipo de representação).

Ao final da análise, nossa pesquisa obterá como resultado:

Teorema 2.1.2. *Uma métrica G-invariante g sobre $M = G/K$ é G-simples real se, e somente se,*

1. *g é G-simples complexa, caso $\widehat{G}_K$ contenha apenas representações de tipo real.*
2. *g é $(Q_8 \times G)$-simples complexa, caso $\widehat{G}_K$ contenha alguma representação de tipo complexo ou quaterniônico.*

Daqui para o final desta seção, faremos a prova do resultado precedente, quebrando-a em alguns resultados secundários.

Demonstrando o Teorema 2.1.2

Consideramos $\mathcal{A} := \bigoplus_{V \in \widehat{G}_K} V^K \otimes \overline{V}$, identificando-o como a decomposição de Peter-Weyl do espaço $L^2(G, K; \mathbb{C}) \simeq L^2(M, \mathbb{C})$. Em particular, o laplaciano Δ_g, para uma métrica G-invariante g, se identifica como

$$\Delta_g \simeq \bigoplus_{V \in \widehat{G}_K} \Delta_g^{V^K} \otimes \mathrm{id}_{\overline{V}} : \bigoplus_{V \in \widehat{G}_K} V^K \otimes \overline{V} \to \bigoplus_{V \in \widehat{G}_K} V^K \otimes \overline{V} \quad .$$

Na proposição e no lema seguintes não há nada que mereça grandes verificações. Contudo, são importantes para organizar as ideias envolvidas:

Proposição 2.1.3. [a] *Seja $V \in \widehat{G}_K$. Então:*

1.

$$Isot_L(V, \overline{V}) \simeq \begin{cases} V^K \otimes \overline{V} \simeq \overline{V}^{\oplus \dim_{\mathbb{C}} V^K}, \text{ se } V \text{ é de tipo real ou quaterniônico} \\ (V^K \otimes \overline{V}) \oplus (\overline{V}^K \otimes V) \simeq (V \oplus \overline{V})^{\oplus \dim_{\mathbb{C}} V^K}, \text{ se } V \text{ é de tipo complexo} \end{cases}$$

2. *Se V é de tipo complexo, então $V \oplus \overline{V}$ é de tipo quaterniônico e é isomorfa a $\mathbb{H} \otimes V$.*

3. *A representação fiel de Q_8 em $\mathbb{H}$, com escalares complexos, é irredutível de grau 2 e as demais representações irredutíveis (com escalares complexos) de Q_8 são unidimensionais. Em particular, $V \oplus \overline{V} \simeq \mathbb{H} \otimes V$ é uma representação irredutível de $Q_8 \times G$.*

[a] Já vimos o primeiro item na Seção 1.1. Para o segundo item, veja [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.II.6]. O terceiro item é um resultado clássico de representações de grupos finitos e pode ser consultado em [Subwiki, 2012] e [Subwiki, 2016].

Lema 2.1.4. [a] *Seja $V \in Rep(G, \mathbb{C})$ de tipo quaterniônico. Então:*

1. *V se identifica como uma representação com escalares em $\mathbb{H}$. Além disso, a multiplicação por j, neste espaço, define a aplicação de estrutura $J_V : V \to \overline{V}$ tal que $J_V^2 \simeq -id_V$, isto é, $J_V(v) \simeq j \cdot v$, para todo $v \in V$.*

2. *Identificando V como uma representação com escalares em $\mathbb{H}$, existe um subespaço vetorial U, com metade da dimensão de V, tal que $V = U \oplus \overline{U}$ (decomposição apenas vetorial), onde $\overline{U} = jU$. Mais ainda, nesta construção, a aplicação de estrutura de V é dada por*

$$j(u_1, u_2) = (-u_2, u_1)$$

para todo $(u_1, u_2) \in U \oplus \overline{U}$.

3. *A aplicação de estrutura de V se restringe a $j : V^K \to V^K$. Além disso, os autoespaços de $\Delta_g^{V^K}$ são j-invariantes, com $j : V^K \to V^K$ comutando com o operador $\Delta_g^{V^K}$.*

[a] Os dois primeiros itens podem ser consultados em [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.II.6]. O terceiro item se dá simplesmente pelo fato da aplicação de estrutura ser uma G-aplicação que comuta com o operador $\Delta_g^{V^K}$ (relembre a Proposição 1.1.5).

Para os lemas e proposições a seguir, precisaremos argumentar um pouco a respeito das propriedades destacadas. No que segue V_λ^K e $\mathrm{Isot}_L(V_1,\ldots,V_\ell)_\lambda$ denotam os λ-autoespaços de $\Delta_g^{V^K}$ e da restrição de Δ_g a $\mathrm{Isot}_L(V_1,\ldots,V_\ell)$, respectivamente.

Lema 2.1.5. *Seja $V \in Rep(G,\mathbb{C})$ de tipo quaterniônico e considere V_λ^K o λ-autoespaço de $\Delta_g^{V^K}$. Então existe um subespaço $U(K,\lambda)$, com metade da dimensão de V_λ^K, tal que*

$$V_\lambda^K = U(K,\lambda) \oplus j\,U(K,\lambda) \quad .$$

Defina agora $U(K) := \sum_{\lambda \in spec\Delta_g^{V^K}} U(K,\lambda)$. Então $\Delta_g^{U(K)} : U(K) \to U(K)$ está bem definido e

$$V^K = U(K) \oplus j\,U(K) \quad .$$

Em particular, cada autovalor de $\Delta_g^{V^K}$ tem multiplicidade 2 se, e somente se, $\Delta_g^{U(K)}$ tem espectro simples.

Demonstração. Notemos que $v \in V_\lambda^K$ se, e somente se, $jv \in V_\lambda^K$. Consideremos U como no Lema 2.1.4 e tomemos $v = u + jw \sim (u,w) \in V = U \oplus \overline{U}$. Temos que $j(u,w) = (-w,u)$. Logo, construindo um produto interno real em U, digamos $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle_U$, podemos construir um produto interno em V tal que

$$\langle (u,w),(u',w') \rangle := \langle u,u' \rangle_U + \langle w,w' \rangle_U$$

Assim, temos que v e jv são sempre ortogonais e a parte "quaterniônica pura" $jU = \overline{U}$ é o complemento ortogonal da parte "complexa pura" U.

Desta forma, dado $0 \neq v_1 \in V_\lambda^K$, consideremos U_1 o subespaço gerado por v_1, de modo que $jv_1 \in U_1^\perp$. Tomemos então U_2 o gerado por v_1 e jv_1 e escolhamos $0 \neq v_2 \in V_\lambda^K$ ortogonal a U_2. Se $(jv_2)_{U_1} = av_1 + bjv_1$, então $(-v_2)_{U_1} = -bv_1 + ajv_1$, contradizendo a escolha de v_2. Logo v_2 e jv_2 são linearmente independentes ortogonais a U_2. Podemos tomar U_3 como o espaço gerado por v_1, jv_1, v_2, jv_2 e repetir o procedimento indutivamente k vezes com $2k := \dim V_\lambda^K$, obtendo vetores da forma $v_1, jv_1, v_2, jv_2, \ldots, v_k, jv_k$. Por construção, basta tomarmos $U(K,\lambda)$ como o subespaço gerado por $v_1,\ldots,v_k$ e, daí, ganhamos todas as propriedades enunciadas. ∎

Corolário 2.1.6. *Sejam $V \in Rep(G, \mathbb{C})$ de tipo quaterniônico e $U(K)$ como no Lema 2.1.5. Então*

$$V^K \simeq \mathbb{H} \otimes U(K) \simeq U(K) \oplus j\,U(K)$$

e, nestas identificações,

$$\Delta_g^{V^K} \sim id \otimes \Delta_g^{U(K)} \sim (\Delta_g^{U(K)}, \Delta_g^{U(K)})\,.$$

Corolário 2.1.7. *Sejam $V \in Rep(G, \mathbb{C})$ de tipo complexo. Então*

$$V^K \oplus \overline{V}^K \simeq \mathbb{H} \otimes V^K \simeq V^K \oplus \overline{V}^K$$

e, nestas identificações,

$$\Delta_g^{V^K \oplus \overline{V}^K} \sim id \otimes \Delta_g^{V^K} \sim (\Delta_g^{V^K}, \Delta_g^{V^K})\,.$$

Demonstração. Basta aplicar o Corolário 2.1.6 para a representação de tipo quaterniônico $V \oplus \overline{V}$ e notar que, neste caso, podemos tomar $U(K) = V^K$. ∎

Seja $V \in \widehat{G}_K$. Podemos fazer as seguintes identificações:

(J1) Se V é de tipo real, podemos considerar a aplicação de estrutura $J_V : V \to \overline{V}$ tal que $j^2 = \mathrm{id}_V$, induzindo uma aplicação $j \otimes \mathrm{id} : V^K \otimes \overline{V} \to V^K \otimes \overline{V}$.

(J2) Se V é de tipo complexo, temos $(V \oplus \overline{V})$ de tipo quaterniônico com aplicação de estrutura restrita $j : (V \oplus \overline{V})^K \to (V \oplus \overline{V})^K$, induzindo uma aplicação

$$j \otimes \mathrm{id} : (V^K \otimes \overline{V}) \oplus (\overline{V}^K \otimes V) \to (V^K \otimes \overline{V}) \oplus (\overline{V}^K \otimes V)\,.$$

(J3) Se V é de tipo quaterniônico, temos uma aplicação de estrutura restrita $j := J_V : V^K \to \overline{V}^K$, induzindo uma aplicação $j \otimes \mathrm{id} : V^K \otimes \overline{V} \to V^K \otimes \overline{V}$.

As regras (J1), (J2) e (J3) induzem uma aplicação $J := j \otimes \mathrm{id} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, comutando com Δ_g (pois em todos os casos, $j \otimes \mathrm{id}$ comuta ou com $\Delta_g^{V^K} \otimes \mathrm{id}$ ou $\Delta_g^{V^K \oplus \overline{V}^K} \otimes \mathrm{id}$, dependendo do tipo de representação).

Assim, quando $\widehat{G}_K$ contém alguma representação de tipo complexo ou quaterniônico, então Q_8 age efetivamente em $\mathcal{A}$ como o grupo de operadores $\{\pm\,\mathrm{id}, \pm i\,\mathrm{id}, \pm J, \pm iJ\} \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$. Como J é uma G-aplicação (isto é, a ação em $\mathcal{A}$ satisfaz $JG = GJ$), então o produto semi-direto $\tilde{G} := Q_8 \rtimes G$ dos operadores obtidos como composição de um elemento de Q_8 por um elemento de G (visto como aplicações agindo em $\mathcal{A}$) é, na verdade, um produto direto $\tilde{G} = Q_8 \times G$, agindo em $\mathcal{A}$. As representações irredutíveis deste grupo produto são dadas por

$$\mathrm{Irr}(\tilde{G}, \mathbb{C}) = \{U \otimes V;\ U \in \widehat{Q}_8,\ V \in \widehat{G}\}\ ,$$

com a propriedade de que as representações irredutíveis de Q_8 são unidimensionais, com exceção da representação fiel $\mathbb{H}$ (de grau 2).

O corolário seguinte responde ao questionamento inicial da seção, englobando inclusive o conteúdo do Teorema 2.1.2, o qual desejávamos provar.

Corolário 2.1.8. *Considere $M = G/K$, $V \in \widehat{G}_K$ e as construções/notações precedentes.*

1. *Se V é de tipo real, então $\mathit{Isot}_L(V^*)_\lambda \simeq V_\lambda^K \otimes \overline{V}$. Em particular, λ é um autovalor simples para $\Delta_g^{V^K}$ se, e somente se, $\mathit{Isot}_L(V^*)_\lambda \simeq \mathbb{C} \otimes \overline{V} \simeq \overline{V}$. Logo, o operador $\Delta_g^{V^K}$ tem espectro simples se, e somente se, $\Delta_g|_{\mathit{Isot}_L(V^*)}$ é G-simples (neste caso, $\Delta_g|_{\mathit{Isot}_L(V^*)}$ é também $(Q_8 \times G)$-simples).*

2. *Se V é de tipo quaterniônico, então $\mathit{Isot}_L(V^*)_\lambda \simeq (U(K,\lambda) \oplus j\,U(K,\lambda)) \otimes V$. Em particular, λ é um autovalor simples para $\Delta_g^{U(K)}$ se, e somente se, $\mathit{Isot}_L(V^*)_\lambda \simeq \mathbb{H} \otimes V$. Logo, o operador $\Delta_g^{U(K)}$ tem espectro simples se, e somente se, cada autovalor de $\Delta_g^{V^K}$ possui multiplicidade 2, o que por sua vez ocorre se, e somente se, $\Delta_g|_{\mathit{Isot}_L(V^*)}$ é $(Q_8 \times G)$-simples.*

3. *Se V é de tipo complexo, então $\mathit{Isot}_L(V, V^*)_\lambda \simeq (V_\lambda^K \oplus \overline{V}_\lambda^K) \otimes V$. Em particular, λ é um autovalor simples para $\Delta_g^{V^K}$ se, e somente se, $\mathit{Isot}_L(V, V^*)_\lambda \simeq \mathbb{H} \otimes V$. Logo, o operador $\Delta_g^{V^K}$ tem espectro simples se, e somente se, $\Delta_g|_{\mathit{Isot}_L(V,V^*)}$ é $(Q_8 \times G)$-simples.*

4. *Se $\widehat{G}_K$ só contém representações de tipo real, então uma métrica G-invariante g, sobre M, satisfaz que Δ_g tem espectro G-simples real se, e somente se, a versão complexa de Δ_g tem espectro G-simples complexo.*

5. *Se $\widehat{G}_K$ contém alguma representação de tipo complexo ou quaterniônico, então uma métrica G-invariante g, sobre M, satisfaz que Δ_g tem espectro G-simples real se, e somente se, a versão complexa de Δ_g tem espectro $(Q_8 \times G)$-simples complexo.*

Demonstração. Os três primeiros itens são imediatos de tudo o que já discutimos nos resultados precedentes. O quarto item é consequência do item 1 junto aos resultados da Seção 1.1. Similarmente, o quinto item é consequência dos três itens inicias junto aos resultados da Seção 1.1. ■

Antes de finalizarmos esta seção, cabe ressaltar que há uma maneira menos detalhada, porém mais direta de se verificar o Teorema 2.1.2, aproveitando o desenvolvimento de [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1] (esta abordagem será útil na Seção 2.3).

Considere $\mathrm{Isot}_L(V, \overline{V})_\lambda$ o λ-autoespaço de Δ_g, e $m(\lambda)$ a multiplicidade de λ para o operador $\Delta_g^{V^K}$. Seguindo o mesmo processo de [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1], obtemos que

$$\mathrm{Isot}_L(V, \overline{V})_\lambda \simeq \begin{cases} V^{\oplus m(\lambda)} \simeq \mathbb{C} \otimes V^{\oplus m(\lambda)}, \text{ se } V \text{ é de tipo real} \\ (\mathbb{H} \otimes V)^{\oplus m(\lambda)}, \text{ se } V \text{ é de tipo complexo} \\ (\mathbb{H} \otimes V)^{\oplus m(\lambda)/2}, \text{ se } V \text{ é de tipo quaterniônico} \end{cases}.$$

(relembramos que para V de tipo quaterniônico, temos $\mathbb{H} \otimes V \simeq V \oplus \overline{V} \simeq V^{\oplus 2}$, permitindo-nos escrever, por convenção, $(\mathbb{H} \otimes V)^{\oplus 1/2} = V$, por exemplo).

Desta maneira, $\mathrm{Isot}_L(V, \overline{V})_\lambda$ é $(Q_8 \times G)$-irredutível, para V de tipo real ou complexo, se, e somente se, $\Delta_g^{V^K}$ tem espectro simples. Similarmente, $\mathrm{Isot}_L(V, \overline{V})_\lambda$ é $(Q_8 \times G)$-irredutível, para V de tipo quaterniônico se, e somente se, cada autovalor de $\Delta_g^{V^K}$ tem multiplicidade 2. Combinando esta análise com a Proposição 1.1.11, obtemos o resultado desejado.

2.2 Relacionando representações com mesmo autovalor de Casimir em espaços simétricos de rank maior que 1

Antes de prosseguir, recomendamos fortemente uma revisão nas construções apresentadas entre a Definição A.1.23 e a Proposição A.1.29, além da Seção A.2 (focando nos sistemas de raízes e elementos de Casimir). Reveja ainda o conteúdo apresentado na

Seção 1.1 (focando especialmente no essencial para compreender o Teorema 1.1.20). A seguir, relembraremos alguns dos conceitos.

Nesta seção, $M = G/K$ é um espaço simétrico compacto, conexo, irredutível e com G um grupo de Lie simples. O sistema de raízes (restrito) real associado é denotado por $\mathfrak{a}$, com conjunto de raízes (restritas) $R_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}}$, grupo de Weyl W, produto interno $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ (único, a menos de escalar positivo, e induzido por cada métrica G-invariante do espaço simétrico) e meia soma de raízes positivas δ. Fixamos uma câmara de Weyl C com ordem lexicográfica $\leq$ definida sobre $\mathfrak{a}$.

Fazendo pequenas adaptações na teoria dos sistemas de raízes de grupos e álgebras de Lie, à luz do Teorema de Cartan-Helgason (para sistemas de restritos associados a espaços simétricos), podemos definir o conjunto Γ_G^*, dos elementos analiticamente integrais, como o reticulado dual de

$$\Gamma_G := \{H \in \mathfrak{a}\,;\ \exp_G(2\pi H) = e\}$$

e o conjunto $\mathcal{I}^*$, dos elementos algebricamente integrais, pelo dual de

$$\mathcal{I} := \sum_{\alpha \in R_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}}} \mathbb{Z} \cdot \alpha^\vee \ ,$$

onde $\alpha^\vee := \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$. Relembramos que, no caso simplesmente conexo, $\Gamma_G^* = \mathcal{I}^*$. Assumiremos pelo menos que $\delta \in \Gamma_G^*$ (isto é, δ é analiticamente integral), como uma hipótese técnica.

Assim, cada representação irredutível esférica do par algébrico (G, K) é da forma V^μ, caracterizada completamente pelo seu maior peso restrito $\mu \in C \cap \Gamma_G^*$. Nela, seu autovalor de Casimir c_μ é dado por

$$c_\mu := a_\mu^2 - \langle \delta, \delta \rangle \ ,$$
$$\text{com } a_\mu := \langle \mu + \delta, \mu + \delta \rangle^{1/2} \ .$$

Deste modo, duas representações $V^\mu, V^\eta \in \widehat{G}_K$ possuem mesmo autovalor de Casimir se, e somente se, $a_\mu = a_\eta$. Dito de outra forma, duas representações irredutíveis esféricas possuem mesmo autovalor de Casimir se, e somente se, estão numa mesma esfera (contida em $\mathfrak{a}$) centrada em $-\delta$:

Proposição 2.2.1. *Duas representações $V^\mu, V^\eta \in \widehat{G}_K$ possuem mesmo autovalor de Casimir se, e somente se, $\mu, \eta \in \mathbb{S}_a(-\delta)$, algum $a \geq 0$. Neste caso, $a = a_\mu = a_\eta$.*

Assim, as representações esféricas com um mesmo autovalor de Casimir $a^2 - ||\delta||^2$ (com $a \geq 0$) são completamente caracterizadas pelo conjunto

$$S(a) := \{\mu \in \Gamma_G^* \mid V^\mu \in \widehat{G}_K \text{ e } a_\mu = a\} = \mathbb{S}_a(-\delta) \cap \Gamma_G^* \,.$$

Note que até eventuais elementos $\mu \in S(a) - C$ (isto é, eventualmente fora da câmara de Weyl C) possuem uma única representação $V^\eta \in \widehat{G}_K$ associada: basta tomar $\eta := w_\mu \cdot \mu$, onde w_μ é o único elemento do grupo de Weyl W tal que $w_\mu \cdot \mu \in C$.

Nesta seção, trabalharemos na seguinte questão:

Questão 2.2.2. *Caso pelo menos duas representações distintas integrem um mesmo autoespaço do laplaciano, com mesmo autovalor de Casimir, elas se relacionam de alguma forma por simetrias algébricas inerentes à estrutura trabalhada?*

Antes de prosseguir, vale relembrar algumas propriedades de δ: (a) por construção, δ forma uma espécie de "direção diagonal média" na câmara de Weyl C; (b) se C^0 denota o interior da câmara de Weyl C e $\mu \in C^0 \cap \mathcal{I}^*$, então $\delta \leq \mu$. Juntando (a) e (b), podemos interpretar δ como uma espécie de "menor elemento que determina a direção diagonal média de C" (é como se C "começasse a se formar a partir de δ").

O que faremos agora passa essencialmente por dois **estágios principais**:

1. Deslocaremos a estrutura vetorial de $\mathfrak{a}$, bem como a noção de isometria, em $-\delta$. Isto tem um sentido à luz do que vimos há pouco: como C "começa a se formar, numa direção média, a partir de δ", faz sentido efetuarmos $-\delta$ para "compensarmos a estrutura", dando origem de onde ela "começa a se moldar", em certo sentido. Para fazer isso, faremos como se fosse uma técnica de geometria diferencial, "colocando uma cópia de $\mathfrak{a}$ sobre o ponto $-\delta$" na mesma ideia de "colocar o espaço tangente sobre $-\delta$".

2. Na nova estrutura deslocada, veremos que há um subgrupo finito de ”isometrias deslocadas” do sistema de raízes que age transitivamente em $S(a)$ e, sendo assim, relaciona representações com mesmo autovalor de Casimir $a^2 - ||\delta||^2$. Isto vai permitir refinarmos a análise e interpretação do critério para o laplaciano em espaços simétricos de rank ≥ 2 (reveja o Teorema 1.1.20).

Deslocamento da estrutura linear de $\mathfrak{a}$ por $-\delta$

Deslocaremos a estrutura vetorial do sistema de raízes $\mathfrak{a}$ para que tenha origem $-\delta$, por intermédio da definição das seguintes operações:

$$\forall H, H' \in \mathfrak{a},\ \forall c \in \mathbb{R},\ \begin{cases} (H-\delta) \oplus (H'-\delta) = (H-H') - \delta \\ c \odot (H-\delta) = (cH) - \delta \\ \langle\langle\, H-\delta, H'-\delta \,\rangle\rangle := \langle H, H' \rangle \end{cases}$$

O espaço vetorial $\mathfrak{a}$, porém com operações e produto interno enunciados acima, será denotado por $\widetilde{\mathfrak{a}}$ (note que $\mathfrak{a}$ e $\widetilde{\mathfrak{a}}$ coincidem como conjuntos, mas não como espaços vetoriais com produto interno). Denotemos ainda por T_H a aplicação de translação por H dada por $H' \mapsto H' + H$. Nestas condições, temos que

Lema 2.2.3. *$T_{-\delta} : \mathfrak{a} \to \widetilde{\mathfrak{a}}$ é uma isometria linear com inversa $T_\delta : \widetilde{\mathfrak{a}} \to \mathfrak{a}$.*

Todo endomorfismo $\varphi \in \mathrm{End}(\mathfrak{a})$ induz uma aplicação

$$\widetilde{\varphi} : \widetilde{\mathfrak{a}} \ni (H-\delta) \mapsto (\varphi(H) - \delta) \in \widetilde{\mathfrak{a}}$$

Escrevamos $\widetilde{\mathrm{End}(\mathfrak{a})} := \{\widetilde{\varphi};\ \varphi \in \mathrm{End}(\mathfrak{a})\}$.

Lema 2.2.4. *$End(\widetilde{\mathfrak{a}}) = \widetilde{End(\mathfrak{a})}$. Além disso, para todos $\varphi, \psi \in End(\mathfrak{a})$ e $c \in \mathbb{R}$, vale que*

$$\begin{array}{c} \widetilde{\varphi \circ \psi} = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi} \\ c \cdot \widetilde{\varphi + \psi} = c \odot \widetilde{\varphi} \oplus \widetilde{\psi} \end{array},$$

ou seja, $End(\widetilde{\mathfrak{a}})$ e $End(\mathfrak{a})$ são isomorfos como aneis. Mais ainda, à luz deste isomorfismo, temos que $O(\widetilde{\mathfrak{a}}) = \widetilde{O(\mathfrak{a})}$.

Relacionando representações com mesmo autovalor de Casimir, por meio de isometrias deslocadas

Primeiramente, fixemos algumas terminologias. Dado um G-espaço X e $A, B \subset X$, definimos:

$$\begin{array}{rcl} G_{A,B} & := & \{g \in G \mid g(A) \subset B\} \\ G_A & := & \{g \in G \mid g(A) = A\} \end{array}$$

Mais ainda, temos que

Lema 2.2.5. *Seja X um G-espaço e A um subconjunto finito de X. Então $G_{A,A} = G_A$.*

Demonstração. É claro que $G_A \subset G_{A,A}$. Considere $g \in G_{A,A}$, o qual determina uma aplicação de ação $g : X \to X$. Sabemos que $g(A) \subset A$ e, pelo fato de $g : X \to X$ ser bijetiva, temos que $g(A)$ e A têm a mesma cardinalidade finita. Logo, $g(A) = A$. ■

Como consequência, temos que $O(\widetilde{\mathfrak{a}})_{S(a)} = O(\widetilde{\mathfrak{a}})_{S(a),S(a)}$. O objetivo principal desta seção será verificar que

Teorema 2.2.6. *Assuma que $a^2 - ||\delta||^2$, para algum $a > 0$, é um autovalor de Casimir de alguma representação em $\widehat{G}_K$. Então $O(\widetilde{\mathfrak{a}})_{S(a)}$ é um grupo finito e age transitivamente em $S(a) = \mathbb{S}_a(-\delta) \cap \Gamma^*_G$.*

Vejamos alguns desdobramentos do teorema precedente, antes de proceder à sua verificação.

Caso $\lambda(a) := a^2 - ||\delta||^2$ seja um autovalor de Δ_g, agindo sobre $L^2(G, K; \mathbb{C})$, temos o $\lambda(a)$-autoespaço caracterizado por

$$L^2(G, K; \mathbb{C})_{\lambda(a)} = \bigoplus_{\mu \in S(a) \cap C} (V^\mu)^K \otimes V^{\mu^*} \quad .$$

Em rank ≥ 2, em geral, existirão autovalores da forma $\lambda(a)$ satisfazendo $|S(a) \cap C| \geq 2$, o que, por si só, impede a irredutibilidade do autoespaço associado (inclusive, para valores altos de a, o a cardinalidade $|S(a) \cap C|$ pode assumir valores gigantescos por conta de propriedades do próprio reticulado de elementos integrais e da região delimitada pela câmara de Weyl C).

Contudo, felizmente, agora sabemos que os elementos de $S(a)$ (e, em particular, elementos de $S(a) \cap C$) estão relacionados por isometrias do grupo $O(\widetilde{a})_{S(a)}$, o qual, pelo Teorema 2.2.6, é finito. Como toda métrica G-invariante do espaço simétrico M apenas altera a configuração do sistema de raízes por um mesmo escalar positivo constante, então a configuração dos autoespaços enunciada há pouco é também a configuração genérica para o problema.

Se o subgrupo K é esférico com respeito a G, isto é, se V^K tem dimensão 1 para toda $V \in \widehat{G}_K$, então

$$L^2(G, K; \mathbb{C})_{\lambda(a)} \simeq \bigoplus_{\mu \in S(a) \cap C} V^{\mu^*} \quad .$$

Lembramos ainda que todo par de pesos maiores μ e μ^* das representações V^μ e V^{μ^*}, respectivamente, está relacionado por um único elemento do grupo de Weyl, denotado por w_0 e responsável por mapear a câmara de Weyl C na câmara de Weyl $-C$. O elemento $w_0 \in O(\mathfrak{a})$ é por si só uma simetria algébrica do sistema de raízes.

O Teorema 2.2.6 tem como consequência ainda um aprimoramento do item 1 do critério estabelecido pelo Teorema 1.1.17. Isso porque, para representações V^μ e V^η tais que $c_\mu \neq c_\eta$, não precisamos mais verificar que a identidade polinomial $a_{\mu,\eta} := a_{V^\mu, V^\eta}$ não é identicamente nula. Como todo espaço homogêneo M admite uma métrica de natureza $G \times G$-invariante, então automaticamente representações com autovalores de Casimir distintos, satisfazem tal propriedade. Assim o critério é melhor relido, quando substituimos o item 1 do Teorema 1.1.17 por

1. para todo $\lambda(a)$ e todos $\mu, \eta \in S(a) \cap C$ com $\mu \neq \eta, \eta^*$, o polinômio $a_{\mu,\eta}$ não é identicamente nulo.

Lembramos ainda que este item diz respeito a separar autovalores provenientes de representações distintas (salvo representações duais não isomorfas) e, com isso, respondemos mais uma pergunta/problemática:

Q: Existe uma situação genérica em que, organizadas simetrias geométricas e estruturais de M, os autovalores de representações distintas (salvo representações duais) se separam, contribuindo com autoespaços também distintos?

R: Sim, na situação genérica, cada autoespaço é da forma

$$L^2(G, K; \mathbb{C})_{\lambda(a)} \simeq \bigoplus_{\mu \in S(a) \cap C} (V^\mu)^K \otimes V^{\mu^*} \quad ,$$

englobando dentro si apenas representações cujos pesos maiores estão relacionados por algum tipo de simetria algébrica estrutural, dadas por um grupo finito $O(\widetilde{\mathfrak{a}})_{S(a)}$. Salvo estas simetrias estruturais, na situação genérica, componentes isotípicas de representações distintas estão associadas a autoespaços distintos do laplaciano. Essa análise vale para *rank*(M) arbitrário.

Verificação do Teorema 2.2.6

Lembramos que, nas nossas hipóteses, estamos considerando $M = G/K$ como um espaço simétrico compacto, conexo, irredutível, com G um grupo de Lie simples, sistema de raízes irredutível $\mathfrak{a}$ e com meia soma de raízes positivas δ sendo um elemento analiticamente integral (o que acontece no caso simplesmente conexo $\mathcal{I} = \Gamma_G$ por exemplo).

Lema 2.2.7. *Seja* $\widetilde{W} := \{\widetilde{w} \in O(\widetilde{\mathfrak{a}})\,;\ w \in W\}$. *Então* $\widetilde{W} \subset O(\widetilde{\mathfrak{a}})_{S(a)}$.

Demonstração. Seja $\mu \in S(a) = \mathbb{S}_a(-\delta) \cap \Gamma_G^*$. Então para cada $w \in W$, temos

$$\begin{aligned} \widetilde{w}(\mu) &= \widetilde{w}(\mu + \delta - \delta) \\ &= w(\mu + \delta) - \delta \\ &= w(\mu) + w(\delta) - \delta \end{aligned}$$

Como $W(\Gamma_G^*) \subset \Gamma_G^*$ e Γ_G^* é um reticulado, então $w(\mu) + w(\delta) - \delta \in \Gamma_G^*$. Note também que, como $\widetilde{w} \in O(\widetilde{\mathfrak{a}})$, então vale que $\widetilde{w}(\mu) \in \mathbb{S}_a(-\delta)$. Concluímos então que $\widetilde{w}(S(a)) \subset S(a)$, provando o lema. ■

Observação 2.2.8. [a] Sabe-se que, quando $\mathfrak{a}$ é um sistema de raízes irredutível, a ação de W em $\mathfrak{a}$ é irredutível. Assim, a ação de $\widetilde{W}$ em $\widetilde{\mathfrak{a}}$ também é irredutível.

[a] Reveja Seções A.1 e A.2.

Demonstração do Teorema 2.2.6. Escolha $\mu \in S(a) = \mathbb{S}_a(-\delta) \cap \Gamma_G^*$. Como $a > 0$, temos que $\mu + \delta \neq 0$. Pela Observação 2.2.8, o conjunto $\widetilde{W} \cdot \mu$ gera o espaço vetorial $\widetilde{\mathfrak{a}}$. Assim, podemos escolher $w_1, \ldots, w_r \in W$, $w_1 = \mathrm{id}$ tais que $\beta := \{\widetilde{w}_1 \cdot \mu, \ldots, \widetilde{w}_r \cdot \mu\}$ é uma base de $\widetilde{\mathfrak{a}}$. Pelo Lema 2.2.7, $\beta \subset S(a)$.

Considere $\widetilde{\varphi} \in O(\widetilde{\mathfrak{a}})_{S(a)}$. Como $\widetilde{\varphi}$ é completamente descrita por seus valores na base β e, além disso, $S(a)$ é um conjunto finito, então temos apenas finitas possibilidades para se construir $\widetilde{\varphi}$. Logo, $O(\widetilde{\mathfrak{a}})_{S(a)}$ deve ser um conjunto finito.

Agora, considere $\eta \in S(a)$. Pelo mesmo argumento do último parágrafo, podemos construir $\widetilde{\varphi} \in O(\widetilde{\mathfrak{a}})_{S(a)}$ tal que $\widetilde{\varphi}(\widetilde{w_1} \cdot \mu) = \widetilde{\varphi}(\mu) = \eta$, provando a transitividade da ação. ■

2.3 Propriedades sobre operadores e espaços mais gerais

Seja $(\tau, U) \in \text{Rep}(K)$ com dual $(\tau^*, U^*) \in \text{Rep}(K)$. Lembramos que

$$\begin{aligned} C^\infty(G, K; U^*) &= \{f \in C^\infty(G, U^*) \mid \forall x \in G,\ k \in K,\ (\,R(k)f\,)(x) = \tau^*(k^{-1})f(x)\} \\ &= \{f \in C^\infty(G, U^*) \mid \forall x \in G,\ k \in K,\ f(xk) = \tau^*(k^{-1})f(x)\} \\ &= \{f \in C^\infty(G, U^*) \mid \forall x \in G,\ k \in K,\ u \in U,\ f(xk)(u) = f(x)(\tau(k)u)\} \end{aligned}$$

Queremos estudar algum tipo de operador laplaciano, sobre espaços de funções mais gerais, $\Delta_g : C^\infty(G, K; U^*) \to C^\infty(G, K; U^*)$, indexado por certas métricas invariantes g, de modo que ele comute com as isometrias que correspondem à invariância de g.

A fim de que Δ_g, enunciado há pouco, esteja bem definido, é preciso que, para cada $f \in C^\infty(G, K; U^*)$, tenhamos que $\Delta_g f \in C^\infty(G, K; U^*)$, ou seja, para todo $k \in K$

$$\begin{aligned} & (\,\Delta_g f(xk)\,)(u) &&= (\,\tau^*(k^{-1})\Delta_g f(x)\,)(u),\ \forall x \in G,\ u \in U \\ \text{i.e.} \quad & (\,\Delta_g f(xk)\,)(u) &&= (\,\tau^*(k^{-1})\Delta_g f(x)\,)(u),\ \forall x \in G,\ u \in U \\ \text{i.e.} \quad & (\,R(k)\Delta_g f(x)\,)(u) &&= (\,\tau^*(k^{-1})\Delta_g f(x)\,)(u),\ \forall x \in G,\ u \in U \\ \text{i.e.} \quad & (\,\Delta_g(R(k)f)(x)\,)(u) &&= (\,\tau^*(k^{-1})\Delta_g f(x)\,)(u),\ \forall x \in G,\ u \in U \\ \text{i.e.} \quad & (\,\Delta_g(\,\tau^*(k^{-1})f(\cdot)\,)\,)(u) &&= (\,\tau^*(k^{-1})\Delta_g f(\cdot)\,)(u),\ \ \forall u \in U \\ \text{i.e.} \quad & \Delta_g(\,\tau^*(k^{-1})f(\cdot)\,) &&= \tau^*(k^{-1})\Delta_g f(\cdot)\ , \end{aligned} \tag{$\star$}$$

o que configura uma espécie de comutatividade entre Δ_g e $\tau^*(K)$.

Assim, necessariamente o estudo deste tipo de operador possui pelo menos os seguintes grupos de simetrias que comutam com ele:

(i) as isometrias que comutam com o operador correspondentes à invariância da métrica considerada;

(ii) $\tau^*(K)$, agindo sobre uma representação U^*, provendo a comutatividade que explicitamos há pouco em ($\star$), de modo que o tamanho da representação U^* também deve influir na análise;

(iii) uma possível ação de Q_8, análoga ao desenvolvimento da Seção 2.1, agindo sobre representações de tipo complexo e/ou de tipo quaterniônico, quando for o caso.

O item (ii) é praticamente imperceptível quando tomamos $U^* = \mathbb{C}$, pois esse caso recai em $\tau^*(K) = \{e\}$. Similarmente, quando $U^* = \wedge^p(m^{\mathbb{C}})^*$, o efeito do item (ii) também é bem sútil, relacionando-se com *pullbacks* por isometrias já consideradas a partir da natureza invariante da métrica g (contudo, isto não elimina o fato que esses *pullbacks* existem e comutam com o operador, devendo serem considerados na análise).

Nas nossas construções, consideramos versões reais e complexas para o operador estudado. Assim, assumimos que U^* é uma representação com escalares complexos obtida a partir da complexificação de uma representação com escalares reais $U^*_{\mathbb{R}}$. Por conveniência da teoria de representações, primeiro estudamos o operador em sua versão complexa $\Delta_g : C^\infty(G,K;U^*) \to C^\infty(G,K;U^*)$ e depois vemos como as propriedades se transpõem para a versão real, digamos, $\Delta_g : C^\infty(G,K;U^*_{\mathbb{R}}) \to C^\infty(G,K;U^*_{\mathbb{R}})$.

Relembramos ainda que a decomposição de Peter-Weyl para $L^2(G,K,U^*)$ é dada por

$$\bigoplus_{V^* \in \widehat{G}_{K,U^*}} (V \otimes U^*)^K \otimes V^* \simeq \bigoplus_{V \in \widehat{G}_{K,U^*}} \mathrm{Isot}_L(V^*) \ ,$$

onde

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{K,U^*} &= \{(\Pi, V) \in \widehat{G};\ \dim \mathrm{Hom}_K(V, U^*) > 0\} \\ &= \{(\Pi, V) \in \widehat{G};\ \dim(V^* \otimes U^*)^K > 0\} \\ &= \{(\Pi^*, V^*) \in \widehat{G};\ \dim(V \otimes U^*)^K > 0\} \end{aligned}$$

Para cada (Π, V) tal que $(\Pi^*, V^*) \in \widehat{G}_{K,U^*}$, o isomorfismo $(V \otimes U^*)^K \otimes V^* \simeq \mathrm{Isot}_L(V^*)$ é dado por:

$$\varphi_{V^*} : (V \otimes U^*)^K \otimes V^* \ni (v \otimes \omega) \otimes \xi \mapsto \phi_{v,\omega,\xi} \in \mathrm{Isot}_L(V^*) \ ,$$
$$\text{onde } \phi_{v,\omega,\xi} := [(\Pi^*(\cdot)^{-1}\xi)(v)]\omega \ ,$$

definido por extensão linear.

A questão central desta seção é verificar se

Questão 2.3.1. *Para operadores mais gerais, com versão complexa da forma*

$$\Delta_g : C^\infty(G, K; U^*) \to C^\infty(G, K; U^*)$$

(o qual também denotaremos por Δ_{g,U^*}) e versão real da forma

$$\Delta_g : C^\infty(G, K; U^*_{\mathbb{R}}) \to C^\infty(G, K; U^*_{\mathbb{R}})$$

(o qual também denotaremos por $\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}}$), indexados por conjuntos de métricas G-invariantes, existem critérios de irredutibilidade, para seus autoespaços, análogos aos desenvolvimentos das Seções 1.1 e 2.1?

Operadores mais gerais para o caso dos grupos de Lie, munidos de métricas invariantes à esquerda

Conforme Seção 1.1 (ou se preferir, [Schueth, 2017, Sec.2]), o laplaciano em um dado grupo de Lie G com métrica invariante à esquerda g é dado por

$$\Delta_g = -\sum_j R_*(Y_j)^2 : C^\infty(G, \mathbb{C}) \to C^\infty(G, \mathbb{C}) \ ,$$

onde $\{Y_j\}$ é uma base g-ortonormal de $\mathfrak{g}$.

Partamos de uma K-representação com escalares reais $U^*_{\mathbb{R}}$, cuja complexificação é U^*, e do operador real

$$\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}} := -\sum_j R_*(Y_j)^2 : C^\infty(G, U^*_{\mathbb{R}}) \to C^\infty(G, U^*_{\mathbb{R}})$$

Assim, visando obter generalizações e fazer o uso do maquinário da teoria de representações, convém considerarmos operadores complexos da forma:

$$\Delta_{g,U^*} := -\sum_j R_*(Y_j)^2 : C^\infty(G, U^*) \to C^\infty(G, U^*)$$

e analisar como estes agem em cada componente V^*-isotípica da forma $(V \otimes U^*) \otimes V^*$.

Neste caso, para cada $(\Pi^*, V^*) \in \widehat{G}$, o isomorfismo $(V \otimes U^*) \otimes V^* \simeq \mathrm{Isot}_L(V^*)$ é dado por:

$$\varphi_{V^*} : (V \otimes U^*) \otimes V^* \ni (v \otimes \omega) \otimes \xi \mapsto \phi_{v,\omega,\xi} \in \mathrm{Isot}_L(V^*) \ ,$$
$$\text{onde } \phi_{v,\omega,\xi} := [(\Pi^*(\cdot)^{-1}\xi)(v)]\omega \ ,$$

definido por extensão linear.

Lema 2.3.2. *Nas construções precedentes, temos que*

$$\Delta_{g,U^*}\, \phi_{v,\omega,\xi} = \phi_{\Delta_g^V v,\omega,\xi} \ ,$$

onde $\Delta_g^V v = -\sum\limits_j \Pi_*(Y_j)^2 : V \to V$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\Delta_{g,U^*}\, \phi_{v,\omega,\xi}\,(x) &= -\sum_j \frac{d^2}{dtds}\bigg|_{s,t=0} \phi_{v,\omega,\xi}(\, x\exp((t+s)Y_j)\,) \\
&= -\sum_j \frac{d^2}{dtds}\bigg|_{s,t=0} [\,\xi(\,\Pi(x)\Pi(\exp((t+s)Y_j))v\,)\,]\omega \\
&= [\,\xi(\,\Pi(x)\Delta_g^V v\,)\,]\omega \\
&= [\,(\Pi^*(x)^{-1}\xi)(\Delta_g^V v)\,]\omega \\
&= \phi_{\Delta_g^V v,\omega,\xi}\,(x)
\end{aligned}$$

■

Assim, em cada componente isotípica de $L^2(G, K; U^*)$, o operador Δ_{g,U^*} se identifica como

$$(\Delta_g^V \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id} : (V \otimes U^*) \otimes V^* \to (V \otimes U^*) \otimes V^* \ .$$

Note ainda que Δ_{g,U^*} comuta com as G-isometrias provenientes da métrica invariante g, considerada.

Assim, em linhas gerais, dizer que Δ_g^V tem espectro simples é o mesmo que dizer que cada autoespaço de Δ_{g,U^*}, restrito à componente isotípica $\mathrm{Isot}_L(V^*)$, é isomorfo à G-representação $U^* \otimes V^* \simeq (V^*)^{\oplus \dim_{\mathbb{C}} U^*}$, considerando U^* munido da G-ação trivial. Logo, neste caso, cada representação irredutível contida num dado autoespaço contém $\dim_{\mathbb{C}} U^* = \dim_{\mathbb{R}} U^*_{\mathbb{R}}$ cópias de si mesma, neste mesmo autoespaço. Essa situação generaliza [Schueth, 2017] e para ver isto basta tomarmos $U^*_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ e $U^* = \mathbb{C}$, de modo que $\dim_{\mathbb{C}} U^* = \dim_{\mathbb{R}} U^*_{\mathbb{R}} = 1$. Portanto, todos os exemplos de [Schueth, 2017] se adaptam bem para esse contexto, com a ressalva de considerar $\dim_{\mathbb{R}} U^*_{\mathbb{R}}$ cópias para cada representação irredutível de cada autoespaço, ao invés de uma única cópia somente.

Assuma que U^* está munido de um produto interno real. Nestas condições, o grupo de isometrias lineares $O(U^*)$ age irredutivelmente em U^* como a representação padrão. O mesmo vale para a ação de $O(U^*_{\mathbb{R}})$ sobre $U^*_{\mathbb{R}}$.

Considere a seguinte notação

$$\widetilde{G} := \begin{cases} G, & \text{se } \widehat{G} \text{ só tem representações de tipo real} \\ \\ Q_8 \times G, & \text{se } \widehat{G} \text{ admite alguma representação de tipo complexo} \\ & \text{ou quaterniônico.} \end{cases}$$

Sintetizando o que comentamos há pouco, podemos estabelecer um novo critério. Antes de enunciá-lo, recomendamos ao leitor relembrar a Definição 1.1.15 e suas construções adjacentes. Feito este lembrete, obtemos:

Teorema 2.3.3. *Uma métrica invariante à esquerda g satisfaz que o operador real $\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}}$ tem espectro $O(U^*_{\mathbb{R}}) \times G)$-simples real se, e somente se, Δ_{g,U^*} tem espectro $(O(U^*) \times \widetilde{G})$-simples complexo. Além disso, a existência de tal métrica é equivalente aos seguintes itens satisfeitos simultaneamente:*

1. *Para todas $V', V \in \widehat{G}$, com $V' \ncong V, V^*$, vale que $a_{V',V}$ não é identicamente nulo.*

2. *Para toda $V \in \widehat{G}$, de tipo real ou complexo, vale que b_V não é identicamente nulo..*

3. *Para toda $V \in \widehat{G}$, de tipo quaterniônico, vale que c_V não é identicamente nulo.*

Mais ainda, tal métrica, quando verificada a sua existência, é genérica no espaço das métricas invariantes à esquerda.

Demonstração. Esta demonstração seguirá construções totalmente análogas às observações desenvolvidas na etapa final da Seção 2.1, junto aos resultados da Seção 1.1.

Seja g uma métrica invariante à esquerda de G e considere λ um autovalor de Δ_g^V com multiplicidade $m(\lambda)$. Então o λ-autoespaço da restrição de Δ_{g,U^*} a $\mathrm{Isot}_L(V,\overline{V})$ é dado por:

$$\mathrm{Isot}_L(V,\overline{V})_\lambda \simeq \begin{cases} U^* \otimes V^{\oplus m(\lambda)} \simeq U^* \otimes (\mathbb{C} \otimes V^{\oplus m(\lambda)}), \text{ se } V \text{ é de tipo real} \\ U^* \otimes (\mathbb{H} \otimes V)^{\oplus m(\lambda)}, \text{ se } V \text{ é de tipo complexo} \\ U^* \otimes (\mathbb{H} \otimes V)^{\oplus\, m(\lambda)/2}, \text{ se } V \text{ é de tipo quaterniônico} \end{cases} \tag{I}$$

(aqui, temos a identificação $(\mathbb{H} \otimes V)^{\oplus\, m(\lambda)/2} = V^{\oplus m(\lambda)}$ para V de tipo quaterniônico).

Além disso, pelo item (4) da Proposição A.1.18, podemos tomar uma representação irredutível $V_\mathbb{R} \in \mathrm{Irr}(G,\mathbb{R})$ satisfazendo

$$\mathbb{C} \otimes V_\mathbb{R} \simeq \begin{cases} V, \text{ se } V \text{ é de tipo real} \\ (\mathbb{H} \otimes V), \text{ se } V \text{ é de tipo complexo ou quaterniônico} \end{cases},$$

de modo que

$$\mathrm{Isot}_L(V,\overline{V})_\lambda \simeq \begin{cases} U^* \otimes (\mathbb{C} \otimes V_\mathbb{R})^{\oplus m(\lambda)}, \text{ se } V \text{ é de tipo real} \\ U^* \otimes (\mathbb{C} \otimes V_\mathbb{R})^{\oplus m(\lambda)}, \text{ se } V \text{ é de tipo complexo} \\ U^* \otimes (\mathbb{C} \otimes V_\mathbb{R})^{\oplus\, m(\lambda)/2}, \text{ se } V \text{ é de tipo quaterniônico} \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\mathrm{Isot}_L(V,\overline{V})_\lambda \simeq \begin{cases} (\mathbb{C} \otimes V_\mathbb{R})^{\oplus m(\lambda) \dim_\mathbb{C} U^*}, \text{ se } V \text{ é de tipo real} \\ (\mathbb{C} \otimes V_\mathbb{R})^{\oplus m(\lambda) \dim_\mathbb{C} U^*}, \text{ se } V \text{ é de tipo complexo} \\ (\mathbb{C} \otimes V_\mathbb{R})^{\oplus\, (m(\lambda)/2) \dim_\mathbb{C} U^*}, \text{ se } V \text{ é de tipo quaterniônico} \end{cases}.$$

Sabemos que $U^* = \mathbb{C} \otimes U^*_\mathbb{R}$ (isto é, U^* é a complexificação de $U^*_\mathbb{R}$). Deste modo, como $\dim_\mathbb{C} U^* = \dim_\mathbb{R} U^*_\mathbb{R}$, então o λ-autoespaço de $\Delta_{g,U^*_\mathbb{R}}$, restrito a $\mathrm{Isot}_L(V,\overline{V}) \cap C^\infty(G;U^*_\mathbb{R})$ (cuja complexificação é $\mathrm{Isot}_L(V,\overline{V})$), é dado por

$$(\,\mathrm{Isot}_L(V,\overline{V})\cap C^{\infty}(G;U^*_{\mathbb{R}})\,)_\lambda \simeq \begin{cases} V_{\mathbb{R}}^{\oplus m(\lambda)\dim_{\mathbb{R}} U^*_{\mathbb{R}}}, \text{ se } V \text{ é de tipo real} \\ V_{\mathbb{R}}^{\oplus m(\lambda)\dim_{\mathbb{R}} U^*_{\mathbb{R}}}, \text{ se } V \text{ é de tipo complexo} \\ V_{\mathbb{R}}^{\oplus\,(m(\lambda)/2)\dim_{\mathbb{R}} U^*_{\mathbb{R}}}, \text{ se } V \text{ é de tipo quaterniônico} \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$(\,\mathrm{Isot}_L(V,\overline{V})\cap C^{\infty}(G;U^*_{\mathbb{R}})\,)_\lambda \simeq \begin{cases} U^*_{\mathbb{R}}\otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}^{\oplus m(\lambda)}, \text{ se } V \text{ é de tipo real} \\ U^*_{\mathbb{R}}\otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}^{\oplus m(\lambda)}, \text{ se } V \text{ é de tipo complexo} \\ U^*_{\mathbb{R}}\otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}^{\oplus\, m(\lambda)/2}, \text{ se } V \text{ é de tipo quaterniônico} \end{cases}. \tag{II}$$

Por (I), temos que, se V é de tipo real ou complexo, então o operador obtido como a restrição de Δ_{g,U^*} a $\mathrm{Isot}_L(V,\overline{V})$ é $(\,O(U^*)\times\widetilde{G}\,)$-simples se, e somente se, Δ_g^V tem espectro simples. Caso V seja de tipo quaterniônico, a restrição de Δ_{g,U^*} a $\mathrm{Isot}_L(V,\overline{V})$ forma um operador $(\,O(U^*)\times\widetilde{G}\,)$-simples se, e somente se, cada autovalor de Δ_g^V tem multiplicidade 2.

Similarmente, por (II), se V é de tipo real ou complexo, temos que a restrição de $\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}}$ a $\mathrm{Isot}_L(V,\overline{V})\cap C^{\infty}(G;U^*_{\mathbb{R}})$ forma um operador $(O(U^*_{\mathbb{R}})\times G)$-simples se, e somente se, Δ_g^V tem espectro simples. Caso V seja de tipo quaterniônico, o operador obtido como a restrição de $\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}}$ a $\mathrm{Isot}_L(V,\overline{V})\cap C^{\infty}(G;U^*_{\mathbb{R}})$ é $(O(U^*_{\mathbb{R}})\times G)$-simples se, e somente se, cada autovalor de Δ_g^V tem multiplicidade 2.

Combinando as afirmações nos dois parágrafos precedentes com os critérios da Seção 1.1, os quais só dependiam das mesmas condições sobre os operadores da forma Δ_g^V, concluímos a demonstração. ■

O teorema precedente responde à Questão 2.3.1 para o contexto dos grupos de Lie com métricas invariantes à esquerda e está em conformidade com os comentários feitos no início da seção, isto é, a organização dos autoespaços dos operadores estudados se dá por certos espaços irredutíveis que englobam:

(i) as isometrias correspondentes à invariância à esquerda da métrica (translações à esquerda), dispostas em G-representações irredutíveis;

(ii) o tamanho da representação U^* (ou $U^*_{\mathbb{R}}$), a qual aparece no contradomínio dos espaços de funções considerados e é irredutível com respeito à ação padrão de $O(U^*)$ (ou de $O(U^*_{\mathbb{R}})$);

(iii) a ação de Q_8, especialmente nas componentes isotípicas de representações de tipo complexo e/ou de tipo quaterniônico.

Exemplo 2.3.4.

1. Se $U^*_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ (com $U^* = \mathbb{C}$), então o teorema acima, combinado com o Lema 1.1.18, recupera o Teorema 1.1.19.

2. Para $U^*_{\mathbb{R}}$ qualquer com complexificação U^* e $G = (SU(2) \times \cdots \times SU(2) \times T^n)/\Gamma$, com Γ subgrupo discreto central, vale que $\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}}$, indexado por métricas invariantes à esquerda, é genericamente $(O(U^*) \times G)$-simples e, similarmente, Δ_{g,U^*} é genericamente $(O(U^*) \times \widetilde{G})$-simples. Para ver isto, basta combinar o teorema atual com os Teoremas 1.1.17 e 1.1.19, junto ao Lema 1.1.18.

3. O item precedente se aplica, em particular, para $U^*_{\mathbb{R}} = \wedge^p \mathfrak{g}^*$ e $U^* = \wedge^p (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$, caso este em que os operadores $\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}}$ e Δ_{g,U^*}, indexados por uma métrica invariante à esquerda, generalizam o hodge-laplaciano associado a métricas bi-invariantes.

Questão 2.3.5. *Considere $M = G/K$ munido de métricas invariantes à esquerda. É possível obter um resultado análogo ao Teorema 2.3.3 para operadores em $C^\infty(G, K; U^*_{\mathbb{R}})$ e $C^\infty(G, K; U^*)$?*

A grande dificuldade da questão acima, na configuração enunciada, não necessariamente conseguimos construir nossos operadores de interesse em termos da representação regular à direita. Isto se deve ao fato de que $C^\infty(G, K; U^*)$ (e o mesmo para $C^\infty(G, K; U^*_{\mathbb{R}})$) é apenas um G-módulo à partir da ação induzida pelas translações à esquerda e, em geral, não é um G-módulo à partir da ação induzida pelas translações à direita. Os grupos de Lie não enfrentam este problema, visto que os espaços da forma $C^\infty(G, U^*)$ são G-módulos a partir de ambas as ações. Sintetizando, não há como garantir que as aplicações $R_*(Y_j)^2 : C^\infty(G, K; U^*) \to C^\infty(G, K; U^*)$ estejam bem definidas, por exemplo.

Poderíamos pensar, alternativamente, em definir então os operadores a partir da representação regular à esquerda, mas aí entramos em outro problema: não necessariamente tais operadores comutarão com as isometrias advindas das translações à esquerda (correspondentes à invariância à esquerda das métricas consideradas). Esta alternativa só é promissora para métricas bi-invariantes de modo que os operadores se manifestam como elementos de Casimir, conforme veremos à seguir, sobre os espaços homogêneos normais.

Operadores mais gerais a partir da representação à esquerda, em certos espaços homogêneos normais

Para espaços homogêneos normais $M = G/K$, cujas métricas g são de natureza bi-invariante e o caso em que tomamos $U^* = \wedge^p(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^*$, sabemos que elementos de Casimir $\mathcal{C}$ associados a bases g-ortonormais $\{Y_j\}$ se identificam simultaneamente como o operador $L_*(\mathcal{C}) = \sum_j L_*(Y_j)^2 : C^\infty(G, K; U^*) \to C^\infty(G, K; U^*)$ e também como o hodge-laplaciano das p-formas complexas, conforme Seção 1.2.[1]

Assim, nesta etapa do nosso trabalho, devemos nos ater a operadores quadráticos construídos a partir da representação à esquerda, seguindo a mesma natureza de $L_*(\mathcal{C})$ e considerando qualquer K-representação U^* obtida como complexificação de uma K-representação com escalares reais $U^*_{\mathbb{R}}$.

Lema 2.3.6. *Dado $Y \in \mathfrak{g}$, então $L_*(Y^2) = (L_*(Y))^2$ se restringe ao operador*

$$L_*(Y^2) : C^\infty(G, K; U^*) \to C^\infty(G, K; U^*)$$

Demonstração. Lembramos que

$$C^\infty(G, K; U^*) = \{f \in C^\infty(G, U^*);\ \text{para todos } x \in G \text{ e } k \in K,\ f(xk) = k^{-1} \cdot f(x)\}.$$

Dados $f \in C^\infty(G, K; U^*)$, $x \in G$ e $k \in K$ arbitrários, temos que:

[1]Note ainda que, para $p = 0$ (ou seja, $U^* = \mathbb{C}$) e considerando a restrição do problema aos espaços simétricos, recuperamos a abordagem desenvolvida por [Petrecca and Röser, 2018]. Lá, os autores construíam o laplaciano em termos da representação regular à direita antes de explicitar a identificação com o Casimir. Aqui, vemos que esta identificação também é possível à partir da representação regular à esquerda.

$$
\begin{aligned}
[L_*(Y^2)f](xk) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [L(\exp(tY))(L_*Y)f]\ (xk) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [(L_*Y)f]\ (\exp(-tY)xk) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left[\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L(\exp(sY))f\right] (\exp(-tY)xk) \\
&= \left.\frac{d^2}{dtds}\right|_{t,s=0} f\ (\exp(-(t+s)Y)xk) \\
&= \left.\frac{d^2}{dtds}\right|_{t,s=0} k^{-1}\cdot f\ (\exp(-(t+s)Y)x) \\
&= k^{-1}\cdot [L_*(Y^2)f](x) \quad ,
\end{aligned}
$$

ou seja, $L_*(Y^2)f \in C^\infty(G,K;U^*)$. ■

Dada uma base g-ortonormal $\{Y_j\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\{Y_j\}_{j>\dim K}$ é base de $\mathfrak{m}$, então definimos o operador real

$$\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}} := -\sum_j L_*(Y_j^2) : C^\infty(G,K;U^*_{\mathbb{R}}) \to C^\infty(G,K;U^*_{\mathbb{R}})\ ,$$

e sua versão complexificada

$$\Delta_{g,U} := -\sum_j L_*(Y_j^2) : C^\infty(G,K;U^*) \to C^\infty(G,K;U^*)\ ,$$

(ambos, claramente, estendem-se aos seus fechos L^2 correspondentes).

Como é de praxe da construção envolvendo representações, primeiro estudamos as versões complexas dos objetos, por conveniência da teoria, e depois vemos como estes transitam para suas respectivas versões reais. Assim, voltaremos nossa atenção primeiramente a Δ_{g,U^*}.

A fim de obter um critério algébrico para os autoespaços de Δ_{g,U^*}, no viés da decomposição de Peter-Weyl, precisamos entender como a ação de Δ_{g,U^*} se identifica sobre $(V\otimes U^*)^K\otimes V^*$, para $V^*\in\widehat{G}_{K,U^*}$. Isto é, precisamos analisar $\Delta_{g,U^*}\phi_{v,\omega,\xi}$ para elementos $(v\otimes\omega)\otimes\xi\in(V\otimes U^*)^K\otimes V^*$ arbitrários.

Lema 2.3.7. *Nas construções precedentes, temos que*

$$\Delta_{g,U^*}\, \phi_{v,\omega,\xi} = \phi_{v,\omega,\Delta_g^{V^*}\xi}\ ,$$

onde $\Delta_g^{V^*}\xi = -\sum_j (\Pi^*)_*(Y_j)^2 : V^* \to V^*$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\Delta_{g,U^*}\, \phi_{v,\omega,\xi}\,(x) &= -\sum_j \frac{d^2}{dtds}\Big|_{s,t=0} \phi_{v,\omega,\xi}(\,\exp(-(t+s)Y_j)x\,) \\
&= -\sum_j \frac{d^2}{dtds}\Big|_{s,t=0} [\,\xi(\,\Pi(\exp(-(t+s)Y_j))\Pi(x)v\,)\,]\omega \\
&= [\,\xi(\,\Delta_g^V(\Pi(x)v)\,)\,]\omega \\
&= [\,\xi\circ\Delta_g^V(\,\Pi(x)v\,)\,]\omega \\
&= [\,(\Delta_g^{V^*}\xi)(\,\Pi(x)v\,)\,]\omega \\
&= [\,\Pi^*(x)^{-1}\,(\Delta_g^{V^*}\xi)\,(v)\,]\omega \\
&= \phi_{v,\omega,\Delta_g^{V^*}\xi}\,(x)
\end{aligned}$$

■

Lema 2.3.8. *Seja* $(\Pi^*,V)\in\widehat{G}_{K,U}$ *e suponha que* Δ_g^V *comuta com* $\Pi(x)$*, para todo* $x\in G$*. Então*

$$\phi_{\Delta_g^V v,\omega,\xi} = \phi_{v,\omega,\Delta_g^{V^*}\xi}\ .$$

Em particular, neste caso vale que

$$\Delta_{g,U^*}\, \phi_{v,\omega,\xi} = \phi_{\Delta_g^V v,\omega,\xi}\ ,$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\phi_{\Delta_g^V v,\omega,\xi}(x) &= [\,\xi(\Pi(x)\Delta_g^V v)\,]\omega \\
&= [\,\xi(\Delta_g^V\Pi(x)v)\,]\omega \\
&= [\,\xi\circ\Delta_g^V(\Pi(x)v)\,]\omega \\
&= [\,\Delta_g^{V^*}\xi(\Pi(x)v)\,]\omega \\
&= \phi_{v,\omega,\Delta_g^{V^*}\xi}(x)
\end{aligned}$$

■

O lema anterior, nos diz que, caso g tenha uma natureza bi-invariante, como é o nosso caso dos espaços homogêneos normais, tal que cada Δ_g^V é um elemento de Casimir (único em cada V a menos de constante), então o operador Δ_{g,U^*} se identifica como o operador

$$(\Delta_g^V \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id} : (V \otimes U^*)^K \otimes V^* \to (V \otimes U^*)^K \otimes V^* ,$$

em cada componente isotípica de $L^2(G, K; U^*)$. Note ainda que, neste caso, os operadores Δ_{g,U^*} comutam com as $(G \times G)$-isometrias provenientes da métrica bi-invariante g.

Lembramos que se E é um espaço vetorial com produto interno real, então podemos definir $O(E)$ como o grupo de isometrias lineares de E. Suponha que cada espaço da forma $(V \otimes U^*)^K$, bem como cada uma de suas formas reais, está munido de um produto interno real. Sabemos que $O((V \otimes U^*)^K)$ age irredutivelmente em $(V \otimes U^*)^K$ como a representação padrão. Pela teoria de representações, temos que, se V_i é um G_i-módulo irredutível, $i = 1, 2$, então $V_1 \otimes V_2$ é um $(G_1 \times G_2)$-módulo irredutível. Assim o grupo produto $O((V \otimes U^*)^K) \times G$ age irredutivelmente sobre a componente isotípica $(V \otimes U^*)^K \otimes V^*$, via ação tensorial. Com isso, se definimos

$$\mathbb{O}_{\mathbb{C}} := \prod_{V^* \in \widehat{G}_{K,U^*}} O((V \otimes U^*)^K) ,$$

então podemos definir uma única ação de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G$ sobre $L^2(G, K; U^*)$ estendendo cada ação irredutível de $O((V \otimes U^*)^K) \times G$, sobre cada componente isotípica, simultaneamente. Mais ainda,

Lema 2.3.9. *Cada componente isotípica de $L^2(G, K, U^*)$ é um $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-submódulo irredutível do $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-módulo $L^2(G, K, U^*)$.*

Demonstração. Sabemos que $\mathrm{Isot}(V^*) \simeq (V \otimes U^*)^K \otimes V^*$, para $V^* \in \widehat{G}_{K,U^*}$ (em particular, V^* é um G-módulo irredutível). Por construção, $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G$ age efetivamente em $\mathrm{Isot}(V^*)$ como o grupo $O((V \otimes U^*)^K) \times G$, o qual por sinal age irredutivelmente em $(V \otimes U^*)^K \otimes V^*$. ∎

Como Δ_{g,U^*} se identifica como o operador

$$\bigoplus_{V^*\in\widehat{G}_{K,U^*}} (\Delta_g^V \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id} : \bigoplus_{V^*\in\widehat{G}_{K,U^*}} (V\otimes U^*)^K \otimes V^* \to \bigoplus_{V^*\in\widehat{G}_{K,U^*}} (V\otimes U^*)^K \otimes V^* ,$$

então, a restrição de Δ_{g,U^*} a cada componente isotípica $\mathrm{Isot}(V^*) \simeq (V\otimes U^*)^K \otimes V^*$ possui um único autovalor – o autovalor de Δ_g^V, o qual é o elemento de Casimir da representação V com respeito à métrica bi-invariante g. Assim, a ideia para estabelecer o critério de irredutibilidade para os autoespaços de Δ_{g,U^*} é estabelecer se autovalores de Casimir de componentes isotípicas distintas coincidem ou não. Além disso, no caso em que coincidam, devemos analisar se as representações correspondentes estão relacionadas ou não por alguma simetria estrutural.

A partir daqui, fará-se necessário considerar uma análise análoga ao desenvolvimento da Seção 2.2.

Fixemos C uma câmara de Weyl para $\mathfrak{g}$ e tomemos $\delta \in C$ a meia soma de raízes positivas correspondente. Notamos que a fórmula de Freudenthal ainda vale aqui no contexto dos espaços homogêneos normais, isto é, o autovalor de Casimir da componente isotípica $\mathrm{Isot}(V^{\mu^*}) \simeq (V^\mu \otimes U^*)^K \otimes V^{\mu^*}$ é dado por

$$\begin{aligned} &c_\mu := a_\mu^2 - \langle \delta, \delta \rangle \ , \\ &\text{com } a_\mu := \langle \mu+\delta, \mu+\delta \rangle^{1/2} \ . \end{aligned}$$

Assim, se $\lambda(a) := a^2 - ||\delta||^2$, com $a \geq 0$, é um autovalor de Δ_{g,U^*} e se tomamos

$$S(a, U^*) := \{\mu \in C \cap \Gamma_G^* ; \ V^{\mu^*} \in \widehat{G}_{K,U^*} \text{ e } a_\mu = a\} \ ,$$

então o $\lambda(a)$-autoespaço de Δ_{g,U^*} é dado por

$$L^2(G,K;U^*)_{\lambda(a)} \simeq \bigoplus_{\mu\in S(a,U^*)} (V^\mu \otimes U^*)^K \otimes V^{\mu^*} \ .$$

Note que, com isso, a Proposição 2.2.1 ainda se aplica a este cenário e, portanto, os pesos maiores μ que indexam a decomposição $L^2(G,K;U^*)_{\lambda(a)}$, acima, possuem a propriedade de pertencerem à mesma esfera $\mathbb{S}_a(-\delta)$.

O seguinte teorema generaliza o desenvolvimento da Seção 2.2 (lá, estávamos dentro do caso $U^* = \mathbb{C}$):

Teorema 2.3.10. *Seja $M = G/K$ um espaço homogêneo normal, compacto e com métrica g. Dado um autovalor de Δ_{g,U^*} da forma $\lambda(a) = a^2 - ||\delta||^2$, com $a \geq 0$, então vale que*

$$L^2(G,K;U^*)_{\lambda(a)} \simeq \bigoplus_{\mu \in S(a,U^*)} (V^\mu \otimes U^*)^K \otimes V^{\mu^*}$$

e os pesos maiores em $S(a,U^*)$ estão relacionados por uma ação transitiva de um grupo finito de isometrias da esfera $\mathbb{S}_a(-\delta)$, no sistema de raízes de $\mathfrak{g}$. Assim, cada autoespaço de Δ_{g,U^*} é um $(\mathbb{O}_\mathbb{C} \times G)$-módulo irredutível ou é a soma de $(\mathbb{O}_\mathbb{C} \times G)$-módulos irredutíveis relacionados por finitas isometrias $(-\delta)$-deslocadas, no sistema de raízes de $\mathfrak{g}$.

Em particular, se $S(a,U^*)$ está contido num sistema de raízes de $rank$ 1, para cada autovalor $\lambda(a)$, então $S(a,U^*)$ é unitário e Δ_{g,U^*} é $(\mathbb{O}_\mathbb{C} \times G)$-simples complexo.

Demonstração. Acabamos de ver, logo antes de enunciar o teorema, que o $\lambda(a)$-autoespaço de Δ_{g,U^*} é dado por

$$L^2(G,K;U^*)_{\lambda(a)} \simeq \bigoplus_{\mu \in S(a,U^*)} (V^\mu \otimes U^*)^K \otimes V^{\mu^*} .$$

Pelo Teorema 2.2.6, aplicado ao sistema de raízes de $\mathfrak{g}$, existe um grupo finito de isometrias da esfera $\mathbb{S}_a(-\delta)$ agindo transitivamente em $S(a,U^*) \subset S(a) := \{\mu \in C \cap \Gamma_G^*;\ V^{\mu^*} \in \widehat{G} \text{ e } a_\mu = a\}$. Assim, a primeira parte do teorema segue do Lema 2.3.9.

Por fim, para ver que o conjunto $S(a,U^*)$ é unitário, sempre que ele estiver contido num sistema de raízes de rank 1, basta notar que, em cada um destes sistemas, existe uma única representação irredutível V^μ tal que μ e $-\delta$ possuem distância a. Portanto, só pode existir uma representação irredutível associada ao autovalor de Casimir $\lambda(a)$. ∎

Note ainda que, em geral, para rank $M > 1$, não podemos esperar que o espectro de Δ_{g,U^*} seja $(\mathbb{O}_\mathbb{C} \times G)$-simples complexo, visto que a estrutura envolvida pode comportar conjuntos da forma $S(a, U^*)$ não unitários (mais ainda, estes conjuntos podem ser arbitrariamente grandes, conforme aumentamos o valor de $\lambda(a)$, ou seja, conforme aumentamos o valor de a).

O leitor pode se perguntar neste ponto: por que, diferentemente de alguns teoremas anteriores, não há no Teorema 2.3.10 uma ação de Q_8 considerada em seu enunciado? Para responder isso, lembramos que a ação de Q_8 essencialmente transforma as componentes G-isotípicas Isot(V^*) e Isot(V) em uma só, para V de tipo complexo, e lida com certas duplicidades de Isot(V^*) para V de tipo quaterniônico. Esse efeito, na prática, é imperceptível para espaços simétricos M, com rank$(M) = 1$ — primeiro pelo fato de que estamos lidando com uma ação de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ sobre $(V^\mu \otimes U^*)^K$ (independentemente do tipo da G-representação V^μ) e, segundo, porque não existem representações de tipo complexo em rank 1. Para rank$(M) \geq 2$, poderíamos de fato considerar a ação de Q_8, porém isto seria irrelevante, uma vez que há conjuntos de representações não-isomorfas e não-duais com mesmo autovalor de Casimir — daí, o grupo Q_8 é pequeno demais para organizá-las, enquanto que a ação de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G$ e as isometrias $-\delta$-deslocadas o sistema de raízes parecem ser mais adequadas para este tipo de descrição.

Vamos agora adaptar o Teorema 2.3.10 para o operador real $\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}}$. A versão real é bastante análoga à versão complexa. Para ver isso, precisamos apenas adaptar os espaços complexos envolvidos para suas respectivas formas reais:

- Primeiro, considere $\mathcal{R}[(V \otimes U^*)^K]$ uma forma real para $(V \otimes U^*)^K$, isto é, o espaço vetorial real tal que $(V \otimes U^*)^K = \mathbb{C} \otimes \mathcal{R}[(V \otimes U^*)^K]$.

- Segundo, defina $[V] := \{V, V^*\}$ e

$$\widehat{\mathcal{G}} := \{\ [V]\ , V \in \widehat{G}_{K,U^*}\}\ .$$

- Terceiro, relembramos que, pela Proposição A.1.18, podemos tomar uma representação irredutível $V_{\mathbb{R}} \in \mathrm{Irr}(G, \mathbb{R})$ satisfazendo

$$\mathbb{C} \otimes V_{\mathbb{R}} \simeq \begin{cases} V, \text{ se } V \text{ é de tipo real} \\ (\mathbb{H} \otimes V), \text{ se } V \text{ é de tipo complexo ou quaterniônico} \end{cases} .$$

- Quarto, note que $C^{\infty}(G, K; U^*_{\mathbb{R}}) = C^{\infty}(G, U^*) \cap C^{\infty}(G, K; U^*_{\mathbb{R}})$ e, nas notações precedentes,

$$L^2(G, K; U^*_{\mathbb{R}}) \simeq \bigoplus_{[V] \in \widehat{\mathcal{G}}} \mathcal{R}[(V \otimes U^*)^K] \otimes V^*_{\mathbb{R}} .$$

Considere agora $\mathcal{V} := \mathcal{R}[(V \otimes U^*)^K]$ e a ação padrão de $O(\mathcal{V})$ sobre $\mathcal{V}$. Assim, para cada $[V] \in \widehat{\mathcal{G}}$, o grupo $O(\mathcal{V}) \times G$ age irredutivelmente em $\mathcal{V} \otimes V^*_{\mathbb{R}}$ e, esta ação, estende-se pela identidade à decomposição total do espaço $L^2(G, K; U^*_{\mathbb{R}})$.

Assim, se tomamos

$$\mathbb{O}_{\mathbb{R}} := \prod_{[V] \in \widehat{\mathcal{G}}} O(\mathcal{R}[(V \otimes U^*)^K]) ,$$

então temos que $\mathbb{GL}_{\mathbb{R}} \times G$ induz uma ação em

$$L^2(G, K; U^*_{\mathbb{R}}) \simeq \bigoplus_{[V] \in \widehat{\mathcal{G}}} \mathcal{R}[(V \otimes U^*)^K] \otimes V^*_{\mathbb{R}} ,$$

estendendo simultaneamente as ações da cada grupo $O(\mathcal{V}) \times G$, construídas há pouco.

Defina $[\mu] := \{\mu, \mu^*\}$ e $[S(a, U^*)] := \{[\mu] ;\ \mu \in S(a, U^*)\}$. Então:

Teorema 2.3.11. *Seja $M = G/K$ um espaço homogêneo normal, compacto e com métrica bi-invariante g. Dado um autovalor da forma $\lambda(a) = a^2 - ||\delta||^2$, com $a \geq 0$, então vale que*

$$L^2(G, K; U^*_{\mathbb{R}})_{\lambda(a)} \simeq \bigoplus_{[\mu]\in[S(a,U^*)]} \mathcal{R}[(V^\mu \otimes U^*)^K] \otimes V^{\mu^*}_{\mathbb{R}}$$

e os pesos maiores em $[S(a, U^*)]$ estão relacionados por uma ação transitiva de um grupo finito de isometrias da esfera $\mathbb{S}_a(-\delta)$, no sistema de raízes de $\mathfrak{g}$. Assim, cada autoespaço de $\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}}$ é um $(\mathbb{O}_{\mathbb{R}} \times G)$-módulo irredutível ou é a soma de $(\mathbb{O}_{\mathbb{R}} \times G)$-módulos irredutíveis relacionados por finitas isometrias $(-\delta)$-deslocadas, no sistema de raízes de $\mathfrak{g}$.

Em particular, se $S(a, U^*)$ está contido num sistema de raízes de $rank$ 1, para cada autovalor $\lambda(a)$, então $S(a, U^*)$ é unitário e $\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}}$ é $(\mathbb{O}_{\mathbb{R}} \times G)$-simples real.

Voltando aos grupos de Lie com métricas invariantes à esquerda

A partir dos Teoremas 2.3.10 e 2.3.11, podemos aprimorar ainda mais o Teorema 2.3.3, da seguinte forma:

Teorema 2.3.12. *Uma métrica invariante à esquerda g, de um grupo de Lie compacto simples G, satisfaz que o operador real $\Delta_{g,U^*_{\mathbb{R}}}$ é $(O(U^*_{\mathbb{R}}) \times G)$-simples se, e somente se, o operador complexo Δ_{g,U^*} é $(O(U^*) \times Q_8 \times G)$-simples. Além disso, a existência de tal métrica é equivalente aos seguintes itens satisfeitos simultaneamente:*

1. *Fixe uma métrica bi-invariante g_0 e considere o sistema de raízes correspondente, com câmara de Weyl escolhida C e meia soma de raízes positivas δ. Então para cada autovalor da forma $\lambda(a) = a^2 - g_0(\delta, \delta)$, associado à métrica g_0, e para todos $\mu, \eta \in S(a; U^*)$, com $\mu \neq \eta, \eta^*$, vale que a_{V^μ, V^η} não é identicamente nulo.*

2. *Para toda $V \in \widehat{G}$, de tipo real ou complexo, vale que b_V não é identicamente nulo..*

3. *Para toda $V \in \widehat{G}$, de tipo quaterniônico, vale que vale que c_V não é identicamente nulo.*

Mais ainda, tal métrica, quando verificada a sua existência, é genérica no espaço das métricas invariantes à esquerda.

Demonstração. Em relação ao Teorema 2.3.3, precisamos apenas garantir que dadas duas representações irredutíveis V^μ e $V^{\mu'}$ tais que $\mu \in S(a; U^*)$ e $\mu' \in S(a'; U^*)$, com $a \neq a'$, vale que $a_{V^\mu, V^{\mu'}}(g_0) \neq 0$. De fato, como $a \neq a'$, então $\Delta_{g_0}^{V^\mu}$ e $\Delta_{g_0}^{V^{\mu'}}$ possuem autovalores de Casimir distintos $\lambda(a)$ e $\lambda(a')$, respectivamente e, portanto, $a_{V^\mu, V^{\mu'}}(g_0) \neq 0$. ∎

Corolário 2.3.13. *Fixe uma métrica bi-invariante g_0 de um grupo de Lie compacto simples G e considere o sistema de raízes correspondente, com câmara de Weyl C e meia soma de raízes positivas δ. Seja $E(\lambda, g)$ o λ-autoespaço de Δ_{g,U^*} contendo algum G-submódulo V^{μ_λ}. Defina o escalar $a_\lambda := g_0(\mu_\lambda + \delta, \mu_\lambda + \delta)^{1/2}$. Então uma métrica invariante à esquerda genérica g satisfaz*

$$E(\lambda, g) \quad \leq \bigoplus_{\mu \in S(a_\lambda; U^*)} (V^{\mu^*})^{\oplus \dim_{\mathbb{C}}(V^\mu \otimes U^*)^K}$$

Similarmente, nas mesmas notações do Teorema 2.3.11, vale o seguinte: se $E_{\mathbb{R}}(\lambda, g)$ é o autoespaço real de $\Delta_{g, U^*_{\mathbb{R}}}$ correspondente ao autovalor λ, então para uma métrica invariante à esquerda genérica g, vale que

$$E_{\mathbb{R}}(\lambda, g) \quad \leq \bigoplus_{[\mu] \in [S(a_\lambda; U^*)]} (V_{\mathbb{R}}^{\mu^*})^{\oplus \dim_{\mathbb{C}}(V^\mu \otimes U^*)^K}$$ [a]

[a] Lembrete: $\dim_{\mathbb{C}}(V^\mu \otimes U^*)^K = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{R}[(V^\mu \otimes U^*)^K]$.

Demonstração. Basta combinar os Teoremas 2.3.10, 2.3.11 e 2.3.12. ∎

Não sabemos se os grupos de Lie considerados satisfazem o critério dado pelo Teorema 2.3.3, mas sabemos que eles satisfazem, ao menos, o Corolário 2.3.13. Este corolário pode ser visto como um avanço ou uma espécie de primeiros passos para conseguirmos aplicar o Teorema 2.3.3 para uma grande gama de exemplos de grupos arbitrários. Deixamos então como investigação para pesquisas futuras:

Questão 2.3.14. *Visando demonstrar o Teorema 2.3.3 para classes mais arbitrárias de grupos de Lie, é possível aprimorar ainda mais a estimativa para os autoespaços dada pelo Corolário 2.3.13, para uma métrica invariante à esquerda genérica? Ao menos, é possível construir outros exemplos pontuais, fora do Exemplo 2.3.4, que satisfaçam o critério do Teorema 2.3.3?*

2.4 Operadores sobre o espaço total de formas diferenciais

Conforme vimos nas seções anteriores, para cada resultado enunciado para as versões complexas dos operadores estudados, há um resultado análogo para suas versões reais correspondentes, por mera adaptação técnica de espaços complexos e de seus duais para formas reais. Com isso em mente, por mera conveniência, daqui por diante voltaremos nossa atenção para as versões complexas dos operadores, tendo em mente que as construções se adaptam também para seus correspondentes reais.

Um novo conceito de representação para discutir novos problemas

Em linhas gerais, o estudo de G-representações (ou, se preferir, G-módulos), para um dado grupo G, pode ser entendido como a descrição dos espaços vetoriais que são G-invariantes. Nesta concepção, uma G-representação é irredutível se não admitir nenhum G-subespaço invariante não trivial.

Acontece que, quando lidamos com operadores laplacianos (e similares) sobre espaços totais de formas, a noção de espaço vetorial invariante pela ação de um grupo passará a se tornar insuficiente. Isto se deve ao fato de que, sobre o espaço total de formas, num dado espaço homogêneo, há a presença de uma álgebra adicional de aplicações que comutam com os operadores em questão e esta se relaciona com as propriedades algébricas inerentes às formas diferenciais. Dessa forma, deveremos considerar um novo conceito de representação que leva em conta simultaneamente a ação de um grupo e de uma álgebra, dados.[2]

A demanda por esse tipo de análise não é novidade. De fato, em alguns casos, ações por grupos de isometrias da variedade em questão não são suficientes para organizar os autoespaços dos operadores laplacianos considerados, em representações irredutíveis. [Jakobson et al., 2008] perceberam que, no contexto das variedades de Kähler, existe também uma ação de uma super-álgebra de Lie impactando na organização dos autoespaços do hodge-laplaciano. Similarmente, [Steiner, 2020] nota que há a presença de uma álgebra formada pelos chamados "*Hecke operators*" comutando com um certo laplaciano e, portanto, interferindo na configuração de seus autoespaços.

Com isto em mente, nossa noção de representação passará a ser entendida como o estudo de G-módulos invariantes pela ação de uma dada álgebra A. Ou seja, os espaços invariantes pela ação de A considerados não são simplesmente espaços vetoriais quaisquer invariantes por A, mas sim devem ser adicionalmente G-módulos invariantes por A. Mais geralmente e precisamente,

Definição 2.4.1. Sejam V um G-módulo e $\Omega \subset \mathrm{End}(V)$ um subconjunto qualquer de endomorfismos agindo sobre V. Dizemos que um subespaço vetorial $V' \leq V$ é um *subespaço* (Ω, G)*-invariante* (ou, se preferir, um G*-submódulo* Ω*-invariante*) se: (i) V' é um G-submódulo de V; (ii) $\Omega(V') \subset V'$ (isto é, V' é Ω-invariante).

Dizemos que V é um *espaço* (Ω, G)*-invariante irredutível* (ou, se preferir, um G*-módulo* Ω*-invariante irredutível*) se os únicos G-submódulos Ω-invariantes de V são V e $\{0\}$.

É claro que a definição acima se aplica para o caso em que $\Omega := A$ é uma subálgebra de $\mathrm{End}(V)$.

[2]Embora existam diversas generalizações do conceito de representação (até a nível categorial), a mesclagem de representações de naturezas distintas — como, por exemplo, quando uma parte das ações consideradas vem de uma álgebra e outra parte de um grupo — não se trata de algo muito bem difundido no meio matemático. Ainda assim, cabe mencionarmos o conceito de *representação covariante*, presente em [Williams, 2007]. Embora, de fato, este tipo de representação considere ações simultâneas de álgebras e de grupos, esta construção é voltada especificamente para o estudo de certas G-ações de C^*-álgebras A da forma $G \times A \to A$, com condições específicas que aparecem no contexto de sistema dinâmicos e que não necessariamente possam se aplicar aos nossos propósitos. Esta discussão segue na Seção 2.5.

Definição 2.4.2. Sejam $T : V \to V$ um operador definido sobre um G-módulo V e $\Omega \subset \text{End}(V)$ um subconjunto qualquer de endomorfismos agindo sobre V. Dizemos que T é (Ω, G)-*simples complexo (resp. real)* se cada autoespaço de T é um G-módulo Ω-invariante irredutível com escalares complexos (resp. reais).

Definição 2.4.3. Sejam $f_1, \ldots, f_\ell \in \text{End}(\Omega(M, \mathbb{C}))$. Definimos $A[f_1, \ldots, f_\ell]$ como a subálgebra de $\text{End}(\Omega(M, \mathbb{C}))$ gerada pelas aplicações $f_1, \ldots, f_\ell$.

A álgebra agindo sobre o espaço total de formas diferenciais em espaços homogêneos normais

Considere $\Omega(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p=0}^{m} \Omega^p(M, \mathbb{C})$ o espaço graduado total de formas diferenciais, sobre um espaço homogêneo m-dimensional $M = G/K$, munido de uma métrica normal g, com câmara de Weyl C e meia soma de raízes positivas δ. Lembramos que $\Omega^p(M, \mathbb{C}) \simeq C^\infty(G, K; \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})$ e, com esta identificação, podemos considerar que

$$\Omega(M, \mathbb{C}) = C^\infty \left(G, K; \bigoplus_{p=0}^{m} \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}} \right) = \bigoplus_{p=0}^{m} C^\infty(G, K; \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}) \,.$$

A diferencial exterior d, a co-diferencial d^* e a estrela de Hodge $\star$ são aplicações em $\text{End}(\Omega(M, \mathbb{C}))$ que comutam com o Hodge-Laplaciano

$$\Delta_g^H := \bigoplus_{p=0}^{m} \Delta_{g, \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}} \;:\; \bigoplus_{p=0}^{m} C^\infty(G, K; \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}) \to \bigoplus_{p=0}^{m} C^\infty(G, K; \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}) \,.$$

Assim, tais aplicações devem influir nos autoespaços de Δ_g^H. Mais geralmente, as aplicações da álgebra $A[d, d^*, \star]$ comutam com Δ_g^H e, portanto, a ação de $A[d, d^*, \star]$ sobre $\Omega(M, \mathbb{C})$ deve influir nos autoespaços. Para ver isso, podemos considerar uma situação parcial dada pela subálgebra $A[\star]$ e pela restrição de sua ação ao espaço $\Omega^p(M, \mathbb{C}) \oplus \Omega^{m-p}(M, \mathbb{C})$, para um dado grau p fixado.

Sejam $E^p := \Omega^p(M,\mathbb{C})$ e E^p_λ o λ-autoespaço do operador $\Delta^H_g|_{E^p}$. Definimos ainda $E^{p,m-p}_\lambda := E^p_\lambda \oplus E^{m-p}_\lambda$, isto é, o λ-autoespaço de

$$\Delta^H_g|_{E^p\oplus E^{m-p}} \ : \ E^p \oplus E^{m-p} \to E^p \oplus E^{m-p}$$

Tomemos $a_\lambda \geq 0$ tal que $\lambda = a_\lambda^2 - ||\delta||^2$ e definamos

$$S^p(a_\lambda) = \{\mu \, ; \ V^{\mu^*} \in \widehat{G}_{K,\wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}} \text{ e } g(\mu+\delta,\mu+\delta) = a_\lambda\} \ .$$

Pelo Teorema 2.3.10 temos que

$$E^p_\lambda \ \simeq \bigoplus_{\mu\in S^p(a_\lambda)\cap C} (V^\mu \otimes \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})^K \otimes V^{\mu^*} \ ,$$

o qual é uma soma direta de $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-módulos irredutíveis, relacionados por isometrias $(-\delta)$-deslocadas no sistema de raízes de $\mathfrak{g}$. A princípio, as representações irredutíveis que aparecem em E^p_λ não estão relacionadas por simetrias do sistema de raízes às representações irredutíveis que aparecem em E^{m-p}_λ, porém elas estão relacionadas pela simetria algébrica do espaço de formas dada pela estrela de Hodge $\star$, uma vez que esta fornece exatamente o isomorfismo $E^p \simeq E^{m-p}$ e, portanto, o isomorfismo $E^p_\lambda \simeq E^{m-p}_\lambda$. Logo, concluímos os seguintes lemas:

Lema 2.4.4. *Seja $U^* := \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}$. Valem as seguintes identidades:*

$$E^{m-p}_\lambda \ \simeq \ \star\left(E^p_\lambda\right) \ ,$$

$$E^p_\lambda \ \simeq \bigoplus_{\mu\in S^p(a_\lambda)\cap C} (V^\mu \otimes \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})^K \otimes V^{\mu^*} \ ,$$

$$E^{p,m-p}_\lambda \ \simeq \bigoplus_{\mu\in S^p(a_\lambda)\cap C} [\ (V^\mu \otimes \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})^K \otimes V^{\mu^*} \ \oplus \ \star(\ (V^\mu \otimes \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})^K \otimes V^{\mu^*}\ )\ ] \ .$$

Demonstração. As duas primeiras identidades já foram discutidas nos parágrafos precedentes. A terceira e última propriedade é consequência imediata das duas primeiras identidades aplicadas à decomposição $E_\lambda^{p,m-p} = E_\lambda^p \oplus E_\lambda^{m-p}$. ∎

Lema 2.4.5. *Seja $U^* := \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}$. Então cada espaço da forma*

$$(V^\mu \otimes U^*)^K \otimes V^{\mu^*} \;\oplus\; \star(\,(V^\mu \otimes U^*)^K \otimes V^{\mu^*}\,)$$

é um $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-módulo $A[\star]$-invariante irredutível.

Demonstração. Sejam $\mathcal{I}^p(\mu^*) := (V^\mu \otimes U^*)^K \otimes V^{\mu^*}$ e $\mathcal{I}^{m-p}(\mu^*) := \star(\mathcal{I}^p(\mu^*)\,)$. Então os únicos $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-submódulos de $\mathcal{I}^p(\mu^*) \oplus \mathcal{I}^{m-p}(\mu^*) = (V^\mu \otimes U^*)^K \otimes V^{\mu^*} \;\oplus\; \star(\,(V^\mu \otimes U^*)^K \otimes V^{\mu^*}\,)$ são:

$$\{0\}\,, \quad \mathcal{I}^p(\mu^*) \oplus \mathcal{I}^{m-p}(\mu^*)\,, \quad \mathcal{I}^p(\mu^*) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}^{m-p}(\mu^*)$$

Destes, os dois primeiros claramente são $A[\star]$-invariantes, mas os dois últimos não, uma vez que $\star(\mathcal{I}^p(\mu^*)\,) = \mathcal{I}^{m-p}(\mu^*)$ e $\star(\mathcal{I}^{m-p}(\mu^*)\,) = \mathcal{I}^p(\mu^*)$. Logo, $\mathcal{I}^p(\mu^*) \oplus \mathcal{I}^{m-p}(\mu^*)$ é um $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-módulo $A[\star]$-invariante irredutível. ∎

Com estes dois lemas, enunciados há pouco, podemos então concluir a seguinte adaptação do Teorema 2.3.10 para o operador $\Delta_g^H|_{E^p \oplus E^{m-p}}$:

Teorema 2.4.6. *Seja $M = G/K$ um espaço homogêneo normal m-dimensional, compacto e com métrica bi-invariante g. Considere o operador $\Delta_g^H|_{E^p \oplus E^{m-p}} = \Delta_{g,U^*}^H$, onde $U^* = \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}} \oplus \wedge^{m-p}(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}$, e um autovalor λ. Então vale que*

$$L^2(G,K;U^*)_\lambda \;\simeq \bigoplus_{\mu \in S^p(a_\lambda) \cap C} [\,(V^\mu \otimes U^*)^K \otimes V^{\mu^*} \;\oplus\; \star(\,(V^\mu \otimes U^*)^K \otimes V^{\mu^*}\,)\,]$$

e os pesos maiores em $S^p(a_\lambda) \cap C$ estão relacionados por uma ação transitiva de um grupo finito de isometrias da esfera $\mathbb{S}_{a_\lambda}(-\delta)$, no sistema de raízes de $\mathfrak{g}$. Assim, cada autoespaço de Δ_{g,U^*} é um $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-módulo $A[\star]$-invariante irredutível ou é a soma de $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-módulos $A[\star]$-invariantes irredutíveis relacionados por um conjunto finito de isometrias $(-\delta)$-deslocadas, no sistema de raízes de $\mathfrak{g}$.

Em particular, se cada conjunto $S^p(a_\lambda) \cap C$ está contido num sistema de raízes de rank 1, para cada autovalor λ, então $S^p(a_\lambda) \cap C$ é unitário e o operador Δ_{g,U^*} é $(\,A[\star]\,,\,\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G\,)$-simples complexo.

A moral da história do teorema enunciado há pouco é que, com ele, concluímos explicitamente que os elementos da álgebra $A[d, d^*, \star]$ (a qual contém a subálgebra $A[\star]$) devem influir na forma como os autoespaços de Δ_g^H, agindo sobre o espaço total de formas, organizam-se em estruturas de representações ou módulos generalizados irredutíveis. Estes eventuais módulos generalizados carregam noções que levem em conta ações de grupos e de álgebras, simultaneamente.

Para o operador total Δ_g^H, temos:

Teorema 2.4.7. *Seja $M = G/K$ um espaço homogêneo normal m-dimensional, compacto e com métrica normal g. Considere E_λ o λ-autoespaço de Δ_g^H. Então vale que*

$$E_\lambda \;\simeq\; \bigoplus_{p=0}^{m} \left(\bigoplus_{\mu \in S^p(a_\lambda) \cap C} (V^\mu \otimes \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})^K \otimes V^{\mu^*} \right)$$

e os pesos maiores em $\bigcup_{p=0}^{m} S^p(a_\lambda) \cap C$ estão relacionados por uma ação transitiva de um grupo finito de isometrias da esfera $\mathbb{S}_{a_\lambda}(-\delta)$, no sistema de raízes de $\mathfrak{g}$. Além disso, cada autoespaço de Δ_g^H é um $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-módulo $A[d,\star]$-invariante irredutível ou é a soma de $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-módulos $A[d,\star]$-invariantes irredutíveis relacionados por finitas isometrias $(-\delta)$-deslocadas, no sistema de raízes de $\mathfrak{g}$.

Se $M = G = (G \times G)/\Delta G$, com $\operatorname{rank} G = 1$, então o conjunto $\bigcup_{p=0}^{m} S^p(a_\lambda) \cap C$ é unitário e o operador Δ_g^H é ($A[d,\star]$, $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G$)-simples complexo.

Observe que $A[d,\star] = A[d, d^*, \star]$, pois $d^* = \pm \star d \star$. Observe ainda que, para

$$U^* := \bigoplus_{p=0}^{m} \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}} \;,$$

temos que $\Delta_g^H \;=\; \Delta_{g,U^*}$ é o hodge-laplaciano agindo sobre o espaço total de formas diferenciais. A prova do teorema reside essencialmente nos seguintes lemas:

Lema 2.4.8. *Seja E_λ^p o λ-autoespaço de Δ_g^H restrito às p-formas do espaço homogêneo normal $M = G/K$ com métrica g. Defina*

$$E_\lambda^{p,f} := \{\omega \in E_\lambda^p \mid \omega \text{ é fechada}\}\ , \quad E_\lambda^{p,cf} := \{\omega \in E_\lambda^p \mid \omega \text{ é co-fechada}\}\ .$$

Então

$$E_\lambda^p = \begin{cases} E_\lambda^{p,f} \oplus E_\lambda^{p,cf}, \text{ se } \lambda > 0 \\ E_\lambda^{p,f} = E_\lambda^{p,cf}, \text{ se } \lambda = 0 \end{cases} .$$

Mais ainda, as seguintes aplicações definem G-isomorfismos, para $\lambda > 0$:

$$d : E_\lambda^{p,cf} \to E_\lambda^{p+1,f}\ , \quad d^* : E_\lambda^{p+1,f} \to E_\lambda^{p,cf} \quad e \quad \star : E_\lambda^{p,f} \to E_\lambda^{m-p,cf}\ .$$

As propriedades do lema acima são bem conhecidas e podem ser encontradas, por exemplo, em [Ikeda and Taniguchi, 1978, Sec.1].

Lema 2.4.9. *Para um espaço homogêneo normal $M = G/K$ m-dimensional, com métrica g, vale que os pesos maiores em*

$$\bigcup_{p=0}^{m} S^p(a) \cap C$$

estão relacionados por isometrias da esfera $\mathbb{S}_a(-\delta)$, onde $a = a_\lambda$ para algum autovalor λ de Δ_g^H.

Demonstração. Sabemos que, para cada grau p fixado, os elementos de $S^p(a) \cap C$ estão relacionados por isometrias da esfera $\mathbb{S}_a(-\delta)$. Assim, resta provar que para cada $p = 0, 1 \ldots, m-1$, existe uma isometria de $\mathbb{S}_a(-\delta)$ que mapeia algum peso maior de $S^p(a) \cap C$ em algum peso de $S^{p+1}(a) \cap C$. Pelo Lema 2.4.8, qualquer G-submódulo irredutível V^μ de $E_\lambda^{p,cf}$ é mapeado, pela diferencial exterior d, em um submódulo $V^{\mu'} \simeq V^\mu$ em $E_\lambda^{p+1,f}$. Logo, os pesos maiores $\mu \in S^p(a) \cap C$ e $\mu' \in S^{p+1}(a) \cap C$ estão relacionados pela identidade da esfera $\mathbb{S}_a(-\delta)$. ∎

Lema 2.4.10. *Para um espaço simétrico compacto da forma $M = G' = (G' \times G')/\Delta G'$, com rank$(M) = 1$, $G = (G' \times G')$ e $K = \Delta G'$, vale que*

$$\widehat{G}_{K,\wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}} = \widehat{G}_K \ , \quad p = 0, 1, \ldots, m$$

Em particular, o conjunto $\bigcup_{p=0}^m S^p(a) \cap C$ é unitário e igual a $S(a) \cap C = S^0(a) \cap C$, onde $a = a_\lambda$, para algum autovalor λ de Δ_g^H.

Demonstração. Seja $V^{\mu^*} \in \widehat{G}_{K,\wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}}$ um G-submódulo de algum autoespaço E_λ^p. Como rank$(M) = 1$, então o Teorema 2.3.10 garante que

$$E_\lambda^p \simeq (V^\mu \otimes \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})^K \otimes V^{\mu^*} \ ,$$

o qual, visto G-módulo, contém apenas submódulos irredutíveis isomorfos a V^{μ^*}. Em particular, cada G-submódulo irredutível de $E_\lambda^{p,cf}$ deve ser isomorfo a V^{μ^*}. Assim, pelo Lema 2.4.8, o espaço $E_\lambda^{p+1,f}$ admite um G-submódulo isomorfo a V^{μ^*}. Isso implica necessariamente que $V^{\mu^*} \in \widehat{G}_{K,\wedge^{p+1}(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}}$. Concluímos então que

$$\widehat{G}_K = \widehat{G}_{K,\wedge^0(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}} \subset \widehat{G}_{K,\wedge^1(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}} \subset \cdots \subset \widehat{G}_{K,\wedge^m(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}} = \widehat{G}_K \ .$$

■

Demonstração do Teorema 2.4.7.

Primeiramente, considere o espaço

$$\widetilde{E_\lambda} := \bigoplus_{p=0}^{m} \left(\bigoplus_{\mu \in S^p(a_\lambda) \cap C} (V^\mu \otimes \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})^K \otimes V^{\mu^*} \right) .$$

Em seguida, defina $\mathcal{I}^p(\mu^*) := (V^\mu \otimes \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})^K \otimes V^{\mu^*}$ e defina o seguinte submódulo de $\widetilde{E_\lambda}$:

$$\mathcal{I}(\mu^*) := \sum_{p=0}^{m} \mathcal{I}^p(\mu^*) \ .$$

Note que $\mathcal{I}(\mu^*)$ é a soma dos $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-módulos irredutíveis $\mathcal{I}^p(\mu^*)$. Além disso, $\mathcal{I}(\mu^*)$ é claramente $A[d,\star]$-invariante. [3] Vejamos que $\mathcal{I}(\mu^*)$ é um $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-módulo $A[d,\star]$-invariante irredutível.

Vistos como G-módulos, cada espaço $\mathcal{I}^p(\mu^*)$ só contém cópias equivalentes a V^{μ^*} como seus G-submódulos irredutíveis. Pelo Lema 2.4.8, uma dada cópia equivalente do G-submódulo V^{μ^*} dentro das p-formas co-fechadas em $\mathcal{I}^p(\mu^*)$ é mapeada pela diferencial exterior e pela estrela de hodge num G-submódulo irredutível, equivalente a V^{μ^*}, contido em $\mathcal{I}^{p+1}(\mu^*)$ e $\mathcal{I}^{m-p}(\mu^*)$, respectivamente. Com isso, $\mathcal{I}(\mu^*)$ é o menor $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-módulo $A[d,\star]$-invariante que contém simultaneamente todas as cópias do G-módulo V^{μ^*} nos espaços $\mathcal{I}^p(\mu^*)$, $p = 0, 1, \ldots, m$.

Como,

$$\widetilde{E_\lambda} = \sum_{p=0}^{m} \sum_{\mu \in S^p(a_\lambda) \cap C} \mathcal{I}^p(\mu^*) \ ,$$

então vale a primeira parte do teorema.

A segunda parte, referente aos espaços simétricos dados por grupos de Lie $M = G = (G \times G)/\Delta G$, com $\mathrm{rank}(G) = 1$, segue do Lema 2.4.10, pois a partir dele conclui-se que $\widetilde{E}_\lambda = \mathcal{I}(\mu^*)$.

■

Corolário 2.4.11. *Seja $M = G = (G \times G)/\Delta G$ um grupo de Lie m-dimensional, compacto, de rank 1 e com métrica bi-invariante g. Considere E_λ o λ-autoespaço de Δ_g^H, contendo um G-submódulo irredutível V^{μ^*}. Então vale que*

$$E_\lambda \ \simeq \ (\ V^\mu \otimes (\bigoplus_{p=0}^{m} \wedge^p(\mathfrak{g}^*)^{\mathbb{C}})\ ) \otimes V^{\mu^*}$$

e, neste caso, se fazemos $U_p^* := \wedge^p(\mathfrak{g}^*)^{\mathbb{C}}$, então o operador Δ_g^H é $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-simples complexo. Mais ainda, usando a identificação

$$E_\lambda \ \simeq \ \bigoplus_{p=0}^{m} \wedge^p(\mathfrak{g}^*)^{\mathbb{C}} \ \otimes (V^\mu \otimes V^{\mu^*})$$

então concluímos que Δ_g^H é $(\ O\big(\bigoplus_{p=0}^{m} \wedge^p(\mathfrak{g}^*)^{\mathbb{C}}\big) \times (G \times G)\ )$-simples complexo.

[3] Mais detalhadamente, lembre que cada elemento de $\mathcal{I}^p(\mu^*)$ pode ter eventualmente uma componente de formas fechadas, a qual se mapeia em 0 pela diferencial exterior d, e eventualmente uma componente de formas co-fechadas, mapeada G-isomorficamente por d sobre sua imagem — vide Lema 2.4.8. Portanto, deve valer que $d(\mathcal{I}^p(\mu^*)) \subset \mathcal{I}^{p+1}(\mu^*)$. Além disso, claramente o operador estrela de Hodge $\star$ determina o G-isomorfismo $\mathcal{I}^p(\mu^*) \simeq \mathcal{I}^{m-p}(\mu^*)$. Conclusão: $\mathcal{I}(\mu^*)$ é, de fato, $A[d,\star]$-invariante.

Exemplo 2.4.12. Considere a ação de Δ_g^H sobre o espaço total de formas em $M = SU(2)$, com métrica bi-invariante g. Então, pelo Teorema 2.4.7, temos que Δ_g^H é $(\, A[d,\star], \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times SU(2)\,)$-simples complexo.

Mais ainda, se E_λ é o λ-autoespaço de Δ_g^H, contendo um G-submódulo irredutível V^{μ^*}, então

$$E_\lambda \;\simeq\; (\, V^\mu \otimes \bigoplus_{p=0}^{m} \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}\,) \otimes V^{\mu^*} \simeq (\bigoplus_{p=0}^{m} \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}) \otimes (V^\mu \otimes V^{\mu^*})$$

e, neste caso, o operador Δ_g^H é $O(\,\bigoplus_{p=0}^m \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}) \times (SU(2) \times SU(2)\,)$-simples complexo.

Note também que a decomposição de Peter-weyl para $L^2(G, K; \bigoplus_{p=0}^m \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})$, com $G = SU(2) \times SU(2)$ e $K = \Delta SU(2)$ (subgrupo diagonal) é dada por

$$L^2(G, K; \bigoplus_{p=0}^{m} \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}) \simeq \bigoplus_{V^* \in \widehat{G}_K} (\bigoplus_{p=0}^{m} \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}) \otimes (V \otimes V^*)\ .$$

Podemos ainda trazer um análogo do Exemplo 2.3.4 para o espaço total de formas:

Exemplo 2.4.13. Seja $G = (SU(2) \times \cdots \times SU(2) \times T^n)/\Gamma$, com Γ subgrupo discreto central, munido de uma métrica invariante à esquerda genérica. Tome $U_{\mathbb{R}}^* = \bigoplus_{p=0}^m \wedge^p \mathfrak{g}^*$ e $U^* = \bigoplus_{p=0}^m \wedge^p(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$. Seguindo o exemplo Exemplo 2.3.4, podemos construir Δ_{g,U^*}, a partir da representação regular à direita, por

$$\Delta_{g,U^*} \simeq \bigoplus_{V^* \in \widehat{G}} \Delta_g^V \otimes U^* \otimes V^* \to \bigoplus_{V^* \in \widehat{G}} \Delta_g^V \otimes U^* \otimes V^*\ ,$$

generalizando o hodge-laplaciano Δ_g^H associado a métricas bi-invariantes e com versão real correspondente dada por $\Delta_{g,U_{\mathbb{R}}^*}$. Note ainda que cada λ-autoespaço E_λ de Δ_{g,U^*} é dado por

$$E_\lambda \simeq V_\lambda \otimes U^* \otimes V^*\ ,$$

onde V_λ é o λ-autoespaço de Δ_g^V com $\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda = 1$. Logo, concluímos que uma métrica invariante à esquerda genérica, sobre G, satisfaz que $\Delta_{g,U_{\mathbb{R}}^*}$ é $(O(U_{\mathbb{R}}^*) \times G)$-simples real e, similarmente, Δ_{g,U^*} é genericamente $(O(U^*) \times Q_8 \times G)$-simples complexo.

2.5 Generalizações da noção de representação para o problema espectral

A Seção 2.4 nos dá um indício de que é necessário abranger a noção de representação para discutir certos problemas, ao lidar com ações de álgebras e grupos simultaneamente.

É bem sabido o que significa as definições de representação de grupos, representação de álgebras, representações de aneis (dentre outras). Mas não temos uma noção bem posta e amplamente bem aceita do que seria uma ”representação mista” que mescle simultaneamente ações de naturezas distintas. Já exploramos um pouco desta ideia na Seção 2.4 e agora pretendemos dar continuidade. Cabe mencionar que, sim, existem avanços neste sentido como a noção de *representação covariante* encontrada em [Williams, 2007]. Esta, embora tenha um propósito e um contexto específico de construir certas ações de grupos em C^*-álgebras no contexto dos sistemas dinâmicos, já demonstra uma consideração conjunta de representações de álgebras e de grupos numa mesma estrutura.

Nossa abordagem será uma, dentre muitas outras possíveis, que visem generalizar o conceito de representação, abrangendo estruturas que considerem ações simultâneas de naturezas distintas. Em nossa construção, buscaremos mesclar objetos e morfismos oriundos de categorias (possivelmente) distintas.

Para o leitor que não está familiarizado com a teoria de categorias, usaremos apenas as definições básicas de categoria, morfismo e objeto, bem como usaremos exemplos corriqueiros de categorias no meio matemático. Um material de apoio para quem quiser se aprofundar é o livro [Mac Lane, 2013].

No que segue, $\mathcal{C}$ denota uma categoria com objetos $\mathcal{C}_0$ e morfismos $\mathcal{C}_1$. Similarmente, $\mathcal{V}$ é uma categoria com objetos $\mathcal{V}_0$ e morfismos $\mathcal{V}_1$. Por simplicidade, assumiremos que $\mathcal{V}$ é uma subcategoria de Set. Em particular, os morfismos em $\mathcal{V}_1$ são funções conjuntistas, no sentido usual. Denote ainda $\mathcal{C}^{inv}$ a categoria tal que $\mathcal{C}_0^{inv} := \mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}_1^{inv} := \{f \in \mathcal{C}_1 \ ; \quad f \text{ é inversível}\}$.

Definição 2.5.1. Seja O um objeto em $\mathcal{V}_0$. Uma *$\mathcal{C}$-representação $\mathcal{V}$-enriquecida de O* é um par $(\rho, C) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{C}_0$ tal que $\mathrm{dom}(\rho) = O$ e $\mathrm{codom}(\rho) \subset \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)$. Tal representação é, por vezes, denotada simplesmente por ρ ou C ou ainda $\rho : O \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)$.

Se, adicionalmente, $\mathcal{V} = Set$, então (ρ, C) é dita simplesmente uma *$\mathcal{C}$-representação de O*.

Exemplo 2.5.2.

(a) Representações de álgebras são exatamente Vet-representações Alg-enriquecidas. Similarmente, representações de álgebras de Lie são exatamente Vet-representações $LieAlg$-enriquecidas.

(b) Representações de anéis são exatamente Vet-representações *Ring*-enriquecidas. Representações de anéis com unidade são exatamente Vet-representações $Ring1$-enriquecidas.

(c) Seja $\mathcal{C} := Set^{inv}$ (em particular, $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) = \mathrm{Bij}(X)$ e vale também que $\hom_{\mathcal{C}}(A, B) = \emptyset$ sempre que A e B não possuem a mesma cardinalidade). Então uma G-ação sobre um conjunto X, dada por um homomorfismo de grupos $\mu : G \to \mathrm{Bij}(X)$, é exatamente uma Set^{inv}-representação $Group$-enriquecida.

(d) Representações de grupos são exatamente Vet^{inv}-representações $Group$-enriquecidas. Similarmente, representações de grupos de Lie são exatamente Vet^{inv}-representações $LieGroup$-enriquecidas.

(e) Representações de semigrupos são exatamente Vet-representações $SemiGroup$-enriquecidas. Similarmente, representações de monoides são exatamente Vet-representações Mon-enriquecidas.

(f) Uma ação de um conjunto Ω por endomorfismo sobre um espaço vetorial (ou um grupo abeliano) V, descrita por uma aplicação $\mu : \Omega \to \mathrm{End}(V)$ é precisamente uma Vet-representação (ou uma $AbGroup$-representação) de Ω.

As próximas definições nos darão uma boa noção do que pode vir a ser entendido como a ideia de ”representação mista”.

Definição 2.5.3. Sejam O um conjunto e $\mathcal{P}(O,\mathcal{F}) := \{(O_j,\mathcal{V}_j)\}_{j\in I}$ uma família tal que:

(i) $O = \bigcup_{j\in I} O_j$,

(ii) $\mathcal{F} := \{\mathcal{V}_j\}_{j\in I}$ é uma família de subcategorias de Set tal que , para cada $j \in I$, o subconjunto O_j é um objeto de $\mathcal{V}_j$.

Então $\mathcal{P}(O,\mathcal{F})$ é dito uma *partição $\mathcal{F}$-enriquecida de O*.

Definição 2.5.4. Seja $\mathcal{P}(O,\mathcal{F}) := \{(O_j,\mathcal{V}_j)\}_{j\in I}$ uma partição $\mathcal{F}$-enriquecida de O. Uma *$\mathcal{C}$-representação para $\mathcal{P}(O,\mathcal{F})$* é uma $\mathcal{C}$-representação $\rho : O \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)$ do conjunto O, munida de aplicações $\{\rho_j : O_j \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}_j}(C)\}_{j\in I}$ tais que, para todo $j \in I$,

(i) a aplicação ρ_j define uma $\mathcal{C}_j$-representação $\mathcal{V}_j$-enriquecida do objeto O_j,

(ii) $\mathrm{Im}(\rho_j) \subset \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)$ e $\rho_j(o) = \rho(o)$, para todo $o \in O_j$.

Uma $\mathcal{C}$-representação para $\mathcal{P}(O,\mathcal{F})$ é denotada simplesmente por C, ou ρ, ou ainda $\{\rho_j\}_{j\in I}$.

Eis alguns exemplos:

Exemplo 2.5.5.

(a) Uma $\mathcal{C}$-representação $\mathcal{V}$-enriquecida de O é precisamente uma $\mathcal{C}$-representação de uma partição unitária $\{(O,\mathcal{V})\}$.

(b) Sejam V um G-módulo com ação Π e $\Omega \subset \mathrm{End}(V)$. Suponha que $V' \leq V$ é um subespaço (Ω, G)-invariante (reveja a Definição 2.4.1). Podemos expressar V' precisamente como uma representação de uma partição enriquecida. Primeiro, defina $O := G \coprod \Omega$. Na sequência, defina $(O_1,\mathcal{V}_1) := (G, Group)$ e $(O_2,\mathcal{V}_2) := (\Omega, Set)$. Então V' é precisamente uma Vet-representação de $\{(O_j,\mathcal{V}_j)\}_{j=1}^{2}$ dada por duas aplicações

$$\{\ \rho_1 := \Pi : G \to \mathrm{End}_{Vec^{inv}}(V')\ \ ,\ \ \rho_2 := i : \Omega \to \mathrm{End}(V')\ \}\ ,$$

onde Π define a G-ação sobre V' e a aplicação de inclusão i define a Ω-ação em V'.

(c) Seja V um G-módulo com ação Π, munido simultaneamente de uma ação μ de uma álgebra A. Então Π e μ induzem uma aplicação $\rho : G \coprod A \to \mathrm{End}(V)$, a qual tem a estrutura de uma Vet-representação de uma partição enriquecida. Mais precisamente, fazemos $O := O_1 \coprod O_2$, com $(O_1, \mathcal{V}_1) := (G, Group)$ e $(O_2, \mathcal{V}_2) := (A, Alg)$, e consideramos as aplicações $\{\rho_1, \rho_2\}$ dadas por $\rho_1 := \Pi : G \to \mathrm{End}_{Vec^{inv}}(V)$ e $\rho_2 := \mu : A \to \mathrm{End}(V)$.

(d) Seja V simultaneamente um G_j-módulo com ação Π_j, $j = 1, 2$. Defina $(O_i, \mathcal{V}_j) = (G_j, Group)$ para $j = 1, 2$ e $(O_3, \mathcal{V}_3) = (G_1 * G_2, Group)$. Seja $O := G_1 * G_2 = O_1 \cup O_2 \cup O_3$. Podemos construir uma única representação de grupos Π, para O, estendendo simultaneamente Π_1 e Π_2. Assim, podemos considerar a Vet^{inv}-representação V, de $\{(O_j, \mathcal{V}_j)\}_{j=1}^{3}$, dada por $\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi\}$.

Agora queremos definir, dentro deste novo conceito de representação, o que seria uma sub-representação e como decidir sobre sua irredutibilidade. Por simplicidade, assumiremos, daqui em diante, que $\mathcal{C}$ é uma categoria mergulhada em $Poset$, com ordem parcial $\leq$ e elemento minimal $0_{\mathcal{C}}$. Assuma ainda que $0_{\mathcal{C}}$ é terminal em $\mathcal{C}$.

Definição 2.5.6. Seja ρ uma $\mathcal{C}$-representação de $\mathcal{P}(O, \mathcal{F}) := \{(O_j, \mathcal{V}_j)\}_{j \in I}$ dada pelas aplicações $\{\rho_j : O_j \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}_j}(C)\}_{j \in I}$. Uma *sub-representação* de ρ é um objeto $S \leq C$ tal que a família de aplicações $\{\rho_j : O_j \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}_j}(S)\}_{j \in I}$ está bem definida, formando por si só uma $\mathcal{C}$-representação de $\mathcal{P}(O, \mathcal{F})$.

Definição 2.5.7. Seja (ρ, C) uma $\mathcal{C}$-representação de uma partição enriquecida $\mathcal{P}(O, \mathcal{F})$ e suponha que $C \neq 0_{\mathcal{C}}$. Dizemos que (ρ, C) é *redutível* se ela admite alguma sub-representação S tal que $0_{\mathcal{C}} \neq S \neq C$. Dizemos que (ρ, C) é *irredutível* se ela não for redutível.

Relembremos o Teorema 2.4.7. Um caso particular dele era que, se $M = G = (G \times G)/\Delta G$, com $\mathrm{rank}\, G = 1$, então cada autoespaço do hodge-laplaciano Δ_g^H é da forma

$$E_\lambda \simeq \bigoplus_{p=0}^{m} (V \otimes \wedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}) \otimes V^*$$

para algum G-módulo irredutível V e algum autovalor λ. Nesta configuração, o operador Δ_g^H é $(\, A[d, \star]\, , \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G\,)$-simples complexo. Há uma outra forma de dizer isso. Tome

$O := O_1 \coprod O_2$, com $O_1 := \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G$ na categoria dos grupos de Lie, e $O_2 := A[d, \star]$, na categoria das álgebras. Sabemos que O_1 e O_2 agem em E_λ como um $(\, A[d, \star]\, , \, \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G\,)$-módulo e, neste caso, denotamos as respectivas ações por

$$\rho_1 : O_1 \to \text{End}_{Vec^{inv}}(E_\lambda) \quad ; \quad \rho_2 : O_2 \to \text{End}_{Vec}(E_\lambda) \ .$$

Assim, o fato de E_λ ser um $(\, A[d, \star]\, , \, \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G\,)$-módulo irredutível equivale precisamente a ele formar uma Vec-representação irredutível (ρ, O) da partição $\{O_1, O_2\}$, onde ρ é dada por $\{\rho_1, \rho_2\}$.

Veremos que as noções de irredutibilidade para os autoespaços dos operadores que aparecem nos Teoremas 2.3.10 e 2.4.7 podem ser ainda mais aperfeiçoadas.

Aperfeiçoando a descrição da irredutibilidade para os autoespaços no Teorema 2.3.10

Relembremos a Seção 2.3. Vimos que, num espaço homogêneo normal $M = G/K$, conexo, compacto e com métrica bi-invariante g, o operador Δ_{g,U^*} pode ser identificado como

$$\bigoplus_{V^* \in \widehat{G}_{K,U^*}} (\Delta_g^V \otimes \text{id}) \otimes \text{id} : \bigoplus_{V^* \in \widehat{G}_{K,U^*}} (V \otimes U^*)^K \otimes V^* \to \bigoplus_{V^* \in \widehat{G}_{K,U^*}} (V \otimes U^*)^K \otimes V^* \ ,$$

onde Δ_g^V é o Casimir de V, múltiplo da identidade.

Assuma que cada $V^{\mu^*} \in \widehat{G}_{K,U^*}$ está munido de um produto interno G-invariante.

Nessas condições, existe um único vetor $v_{\mu^*} \in V^{\mu^*}$, unitário, tal que v_{μ^*} pertence ao espaço de peso associado a μ^* (pois o espaço de peso de uma G-representação irredutível associado ao seu peso maior é sempre unidimensional).

Dados $\mu, \eta \in S(a, U^*)$, fixe

$$\flat^{\mu,\eta} : (V^\mu \otimes U^*)^K \to (V^\eta \otimes U^*)^K \ ,$$

qualquer aplicação linear de posto máximo.

Relembre a Seção 2.2 e suponha que $\mathfrak{t}$ é o sistema de raízes de $\mathfrak{g}$. Tome uma isometria $(-\delta)$-deslocada $\widetilde{\varphi} \in O(\tilde{\mathfrak{t}})$ e defina, para cada $(v \otimes \omega) \otimes \xi \in (V \otimes U^*)^K \otimes V^*$, com $V^* \in \widehat{G}_{K,U^*}$,

$$(T\widetilde{\varphi})(v \otimes \omega \otimes \xi) := \begin{cases} c \ \cdot \ \flat^{\mu,\widetilde{\varphi}(\mu)}(v \otimes \omega) \otimes v_{\widetilde{\varphi}(\mu)^*} \ , & \text{se existem } c \in \mathbb{C},\ a \geq 0 \text{ e } \mu^* \text{ tais que} \\ & \mu, \widetilde{\varphi}(\mu) \in S(a, U^*) \text{ e } \xi = c \cdot v_{\mu^*} \\ & \\ v \otimes \omega \otimes \xi \ , \ \text{caso contrário.} & \end{cases}$$

Assim, a menos de identificações, $T\widetilde{\varphi}$ se estende linearmente para um operador linear sobre o espaço $L^2(G, K; U^*)$. Mais geralmente, o semi-grupo de endomorfismos de $L^2(G, K; U^*)$ gerado pela composição de tais operadores, digamos

$$Q_{G,K,U^*} := \langle T\widetilde{\varphi} \mid \quad \widetilde{\varphi} \in O(\tilde{t}) \rangle \ ,$$

age linearmente e efetivamente em $L^2(G, K; U^*)$. Denote tal ação por

$$q : Q_{G,K,U^*} \to \mathrm{End}_{Vec}\left(L^2(G, K; U^*)\right) \ .$$

Agora temos duas ações principais no Teorema 2.3.10: a de Q_{G,K,U^*} e a de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G$. Denotemos esta última ação por

$$S \otimes L : \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G \to \mathrm{End}_{Vec^{inv}}\left(L^2(G, K; U^*)\right) \ ,$$

onde S se refere a representação padrão (”S” para *standard*) dos grupos lineares gerais que constroem $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ e L se refere à representação regular à esquerda de G. Queremos considerar

$S \otimes L$ e q numa mesma estrutura. Para isso usaremos a estrutura de produto livre. Primeiro, considere o seguinte lema:

Lema 2.5.8. *Suponha que tenhamos homomorfismos de semi-grupos $\Pi_j : G_j \to End(V)$ que definam ações efetivas, para $j = 1, 2$. Considere $\Pi : G_1 * G_2 \to End(V)$ o único homomorfismo que estende Π_1 e Π_2, simultaneamente (denotado também por $ext(\Pi_1, \Pi_2)$). Considere $\sim$ a relação dada por $p \sim q \leftrightarrow \Pi(p) = \Pi(q)$. Então a ação quociente efetiva resultante dada por*

$$\widetilde{\Pi} : (G_1 * G_2)/\sim \;\to\; End(V)$$

ainda estende Π_1 e Π_2 simultaneamente.

Demonstração. Fixe $j = 1, 2$. Para cada $x \in G_j$, denote por $[x]$ a classe de x em $(G_1 * G_2)/\sim$. É suficiente mostrarmos que a aplicação $i_j : G_j \ni x \mapsto [x] \in (G_1 * G_2)/\sim$ é um homomorfismo injetivo. Suponha que $i_j(x) = i_j(y)$, ou seja, $[x] = [y]$. Notando que Π estende Π_j, então $[x]$ e $[y]$ agem efetivamente em V como os elementos $\Pi_j(x)$ e $\Pi_j(y)$, respectivamente. Como $[x] = [y]$, então $\Pi_j(x) = \Pi_j(y)$. Como Π_j é efetiva, então $x = y$, mostrando que i_j é injetiva. Por um argumento similar, e usando o fato de que $\widetilde{\Pi}$ também define uma ação efetiva, temos que $i_j(xy)$ e $i_j(x)i_j(y)$ agem efetivamente em V como o mesmo elemento $\Pi_j(xy) = \Pi_j(x)\Pi_j(y)$, de modo que $i_j(xy) = i_j(x)i_j(y)$, para todos $x, y \in G$. ∎

Agora considere o único homomorfismo

$$\text{ext}(S \otimes L, q) : (\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G) * Q_{G,K,U^*} \to \text{End}_{Vec}\left(L^2(G, K; U^*)\right)$$

estendendo $S \otimes L$ e q simultaneamente. Pelo lema anterior, esta ação leva à ação quociente efetiva

$$\widetilde{\text{ext}}(S \otimes L, q) : \left((\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G\right) * Q_{G,K,U^*})/\sim \;\to\; \text{End}_{Vec}\left(L^2(G, K; U^*)\right) ,$$

a qual ainda estende $S \otimes L$ e q simultaneamente.

Vamos trazer as construções para nossa nova teoria de representações. Definamos

$$(O_1, \mathcal{V}_1) := (\ \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G\ ,\ Group) \quad ; \quad \rho_1 := S \otimes L$$
$$(O_2, \mathcal{V}_2) := (\ Q_{G,K,U^*}\ ,\ SemiGroup) \quad ; \quad \rho_2 := q$$
$$(O_3, \mathcal{V}_3) := \Big(\ \big((\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G\big) * Q_{G,K,U^*})/\sim\ ,\ SemiGroup\ \Big) \quad ; \quad \rho_3 := \widetilde{\text{ext}}(S \otimes L, q)$$

e também, assumindo que O_1 e O_2 estão mergulhados em O_3,

$$O := O_1 \cup O_2 \cup O_3 = O_3 \quad ; \quad \rho := \rho_3 \quad ; \quad \mathcal{F} := \{\mathcal{V}_j\}_{j=1}^{3} \quad ; \quad C := L^2(G, K; U^*)\ .$$

Com isto, acabamos de estabelecer uma Vec-representação (ρ, C) para a partição enriquecida $\mathcal{P}(O, \mathcal{F}) := \{O_j, \mathcal{V}_j\}_{j=1}^{3}$, definida pelas aplicações $\{\rho_j\}_{j=1}^{3}$. A conclusão interessante é que, seguindo as construções do Teorema 2.3.10, temos que os autoespaços de Δ_{g,U^*} são sub-representações irredutíveis de (ρ, C).

Essencialmente, comparando com o teorema, a única ação nova que estamos considerando é aquela dada pelo semi-grupo Q_{G,K,U^*}. Note que cada $(\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G)$-módulo irredutível da forma $(V^\mu \otimes U^*)^K \otimes V^{\mu^*}$, com $\mu \in S(a, U^*)$, não é um Q_{G,K,U^*}-módulo invariante, mas gera exatamente o Q_{G,K,U^*}-módulo invariante $L^2(G, K; U^*)_{\lambda(a)}$.

Exemplo 2.5.9. Seja $M = \big(SU(3) \times SU(3)\big)/\Delta SU(3) \simeq SU(3)$ munido de uma métrica riemanniana normal g e considere $\Delta_g = \Delta_{g,\mathbb{C}}$ o operador de Laplace-Beltrami. O conjunto $S(a) = S(a, \mathbb{C})$, que indexa os pesos maiores das representações com mesmo autovalor de Casimir $\lambda(a)$, é construído no sistema de raízes de $\mathfrak{su}(3)$. Assim, pelo Teorema 2.3.10, o $\lambda(a)$-autoespaço de Δ_g, agindo em $SU(3)$, é dado por

$$L^2(SU(3); \mathbb{C})_{\lambda(a)} \simeq \bigoplus_{\mu \in S(a)} V^\mu \otimes V^{\mu^*}$$

A ação de grupos, sobre $L^2(SU(3); \mathbb{C})$, restrita a cada submódulo da forma $V^\mu \otimes V^{\mu^*}$, é dada por $\rho_1 := L \otimes R$, onde L é a ação induzida pelas translações à esquerda e R é a ação induzida pelas translações à direita de $SU(3)$.

Para cada isometria $(-\delta)$-deslocada $\widetilde{\varphi}$, $V^* \in \widehat{SU(3)}$ e $v \otimes \xi \in V \otimes V^*$, defina

$$(T\widetilde{\varphi})(v \otimes \xi) := \begin{cases} c \cdot v_{\widetilde{\varphi}(\mu)} \otimes v_{\widetilde{\varphi}(\mu)^*}\,, & \text{se existem } c \in \mathbb{C},\ a \geq 0 \text{ e } \mu^* \text{ tais que } \mu, \widetilde{\varphi}(\mu) \in S(a) \\ & \text{e vale que } v \otimes \xi = c \cdot v_\mu \otimes v_{\mu^*} \\ & \\ v \otimes \xi\,, \text{caso contrário} & \end{cases}$$

de modo $T\widetilde{\varphi}$ se estende linearmente para um operador linear sobre $L^2(SU(3);\mathbb{C})$. Com isto, temos uma ação $\rho_2 := q$ de um grupo $Q_{SU(3)}$ de endomorfismos inversíveis de $L^2(SU(3);\mathbb{C})$ gerado pela composição de tais operadores.

Logo, as ações ρ_1, ρ_2 e $\rho_3 := \widetilde{\text{ext}}(L \otimes R, q)$ definem uma representação generalizada $\big(\rho\,,\, L^2(SU(3);\mathbb{C})\big)$ do grupo $\big((SU(3) \times SU(3)) * Q_{SU(3)}\big)/\sim$, com $\rho := \rho_3$, de modo que os autoespaços de Δ_g são sub-representações irredutíveis desta.

Exemplo 2.5.10. O Exemplo 2.5.9 vale na verdade para qualquer grupo de Lie compacto simples $M = (G \times G)/\Delta G \simeq G$, com métrica normal g, ou seja, podemos construir uma representação generalizada $\big(\rho\,,\, L^2(G;\mathbb{C})\big)$ de um grupo da forma $\big((G \times G) * Q_G\big)/\sim$, de modo que os autoespaços de Δ_g sejam sub-representações irredutíveis desta.

Mais geralmente, a partir de poucas adaptações elementares, podemos ver que um argumento totalmente análogo vale para um espaço homogêneo normal $M = G/K$ dado por um par esférico (G, K), com G compacto simples. Ou seja, neste caso, os autoespaços de Δ_g são sub-representações irredutíveis de uma representação generalizada $\big(\rho\,,\, L^2(G, K;\mathbb{C})\big)$ de um grupo da forma $(G * Q_{G,K})/\sim$. Em particular, temos o mesmo resultado para espaços simétricos compactos irredutíveis de *rank* arbitrário.

Aperfeiçoando a descrição da irredutibilidade dos autoespaços no Teorema 2.4.7

A adaptação do Teorema 2.4.7 é completamente análoga à adaptação que fizemos há pouco para o Teorema 2.3.10. Defina

$$Q_p := Q_{G,K,\wedge^p \mathfrak{m}^{*\mathbb{C}}} \quad ; \quad U^* := \bigoplus_{p=0}^{m} \wedge^p \mathfrak{m}^{*\mathbb{C}} \ ,$$

de modo que Δ_{g,U^*} se identifica como o hodge-laplaciano Δ_g^H, com métrico normal g. Assim, Q_p age efetivamente em $L^2(G, K; \wedge^p \mathfrak{m}^{*\mathbb{C}})$ e esta ação pode ser estendida pela identidade ao espaço total $L^2(G, K; U^*)$. Deste modo, se definimos

$$Q := \prod_{p=0}^{m} Q_p$$

então o produto Q age em $L^2(G, K; U^*)$ de modo que, sobre a restrição a $L^2(G, K; \wedge^p \mathfrak{m}^{*\mathbb{C}})$, ele age efetivamente como Q_p. A ação de Q em $L^2(G, K; U^*)$ será identificada pela aplicação

$$q : Q \to \mathrm{End}_{Vet}\left(L^2(G, K; U^*)\right) .$$

Lembramos ainda que, $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ age efetivamente em cada espaço da forma $(V \otimes \wedge^p \mathfrak{m}^{*\mathbb{C}})^K$ efetivamente como o grupo $O\big((V \otimes \wedge^p \mathfrak{m}^{*\mathbb{C}})^K\big)$, através da representação padrão. Tal ação é denotada por S. Temos então uma ação da forma

$$S \otimes L : \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G \to \mathrm{End}_{Vet^{inv}}\left(L^2(G, K; U^*)\right) .$$

Com isto, temos também a aplicação

$$\mathrm{ext}(S \otimes L, q) : (\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G) * Q \to \mathrm{End}_{Vet}\left(L^2(G, K; U^*)\right)$$

a qual pode ser transformada numa ação efetiva

$$\widetilde{\text{ext}}(S \otimes L, q) : \big((\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G\big) * Q)/\sim \;\to\; \text{End}_{Vet}\left(L^2(G,K;U^*)\right) .$$

Por fim, temos ainda a ação da álgebra $A[d,\star]$, a qual será identificada pela aplicação

$$a : A[d,\star] \to \text{End}_{Vet}\left(L^2(G,K;U^*)\right) .$$

Consideremos então

$$\begin{aligned}
&(O_1,\mathcal{V}_1) := (\ \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G\ ,\ Group) \quad ; \quad \rho_1 := S \otimes L \\
&(O_2,\mathcal{V}_2) := (\ Q\ ,\ SemiGroup) \quad ; \quad \rho_2 := q \\
&(O_3,\mathcal{V}_3) := \Big(\ \big((\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G\big) * Q)/\sim\ ,\ SemiGroup\ \Big) \quad ; \quad \rho_3 := \widetilde{\text{ext}}(S \otimes L, q) \\
&(O_4,\mathcal{V}_4) := (\ A[d,\star]\ ,\ Alg\ ) \quad ; \quad \rho_4 := a\ .
\end{aligned}$$

Agora, assumindo que O_1 e O_2 estão mergulhados em O_3, definimos

$$\begin{gathered}
O := (O_1 \cup O_2 \cup O_3) \coprod O_4 = O_3 \coprod O_4 \quad ; \quad \rho := \rho_3 \coprod \rho_4 \quad ; \\
\mathcal{F} := \{\mathcal{V}_j\}_{j=1}^4 \quad ; \quad C := L^2(G,K;U^*)\ .
\end{gathered}$$

Com isto, acabamos de estabelecer uma Vet-representação (ρ, C) para a partição enriquecida $\mathcal{P}(O,\mathcal{F}) := \{O_j,\mathcal{V}_j\}_{j=1}^4$, definida pelas aplicações $\{\rho_j\}_{j=1}^4$. Seguindo as construções do Teorema 2.4.7, temos que os autoespaços de Δ_g^H são sub-representações irredutíveis de (ρ, C).

É claro os Teoremas 2.3.10 e 2.4.7 podem ser adaptados de diversas outras formas. Nesta amplitude de possibilidades, cabe aqui uma investigação interessante:

Questão 2.5.11. *É possível aprimorar o objeto O e sua representação (ρ, C) de modo que O seja a menor estrutura possível contendo G, satisfazendo ainda que os autoespaços de Δ_{g,U^*} sejam sub-representações irredutíveis de (ρ, C)?*

Na direção da questão acima podemos considerar $\widetilde{Q}$ como o semi-grupo de endomorfismos de $L^2(G,K;U^*)$ gerado por $Q \cup \{d,\star\}$. Isso nos permite substituir as ações de Q e $A[d,\star]$ por uma única ação de $\widetilde{Q}$ cujos endomorfismos de sua imagem formam um subconjunto dos endomorfismos das imagens de a e q. Denote a ação de $\widetilde{Q}$ por

$$\widetilde{q} : \widetilde{Q} \to \mathrm{End}_{Vec}\left(L^2(G,K;U^*)\right) .$$

Podemos considerar então

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{O}_1, \mathcal{V}_1) := (\ \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G\ ,\ Group) \quad ; \quad \widetilde{\rho}_1 := S \otimes L \\
&(\widetilde{O}_2, \mathcal{V}_2) := \Big(\ \widetilde{Q}\ ,\ SemiGroup\Big) \quad ; \quad \widetilde{\rho}_2 := \widetilde{q} \\
&(\widetilde{O}_3, \mathcal{V}_3) := \Big(\ \big((\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \times G\big) * \widetilde{Q})/\sim\ ,\ SemiGroup\ \Big) \quad ; \quad \widetilde{\rho}_3 := \widetilde{\mathrm{ext}}(S \otimes L, \widetilde{q})
\end{aligned}$$

e também, assumindo que $\widetilde{O}_1$ e $\widetilde{O}_2$ estão mergulhados em $\widetilde{O}_3$,

$$\widetilde{O} := \widetilde{O}_1 \cup \widetilde{O}_2 \cup \widetilde{O}_3 = \widetilde{O}_3 \quad ; \quad \widetilde{\rho} := \widetilde{\rho}_3 \quad ; \quad \mathcal{F} := \{\mathcal{V}_j\}_{j=1}^3 \quad ; \quad C := L^2(G,K;U^*) .$$

Com isso, o objeto $\widetilde{O}$ age em C com menos endomorfismos do que o objeto O considerado anteriormente e a representação $(\widetilde{\rho}, C)$ ainda mantém as mesmas propriedades de irredutibilidade para os autoespaços de Δ_g^H.

2.6 Propriedades sobre operadores em espaços discretos

Nesta seção, exploraremos aspectos da teoria espectral de grafos, especialmente aquelas envolvendo representações de grupos. Em nossa abordagem, construiremos os objetos fazendo sempre um paralelo com a teoria de variedades. Antes de discutir o espectro dos operadores de interesse, estabeleceremos alguns análogos de elementos básicos da geometria diferencial.

Paralelos do cálculo diferencial para grafos

Existem inúmeros trabalhos relacionados a discretizações de conceitos em geometria diferencial. As diversas possíveis abordagens não são únicas e suas adaptações dependem dos propósitos e propriedades que se deseja manter durante o processo de discretização. Nossa análise seguirá, proximamente, as ideias de trabalhos como [Dimakis and Müller-Hoissen, 1999, Dimakis and Müller-Hoissen, 2003, Lim, 2020].

Seja $\mathcal{G} := (M, A)$ um grafo com conjunto de vértices M e conjunto de arestas A.[4] Dados $x, y \in M$, a aresta que conecta x a y, sempre que esta existir, é denotada por $A(x, y)$. Consideramos o conjunto $\text{OutNeigh}(x) := \{y \in M;\ A(x, y) \in A\}$ e, se $\mathcal{G}$ é não-direcionado, escrevemos simplesmente $\text{Neigh}(x) := \text{OutNeigh}(x)$. Assumimos que $\mathcal{G}$ é finito, isto é, o conjunto de vértice M é finito.

Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, o espaço L^2 de $\mathbb{K}$-funções do grafo $\mathcal{G}$ é denotado por $L^2(M, \mathbb{K})$ (como estamos assumindo que $\mathcal{G}$ é finito, então $L^2(M, \mathbb{K})$ é simplesmente o espaço de todas as funções $f : M \to \mathbb{K}$).

Para cada $A(x, y) \in A$ e $f \in L^2(M, \mathbb{K})$, definimos

$$\begin{aligned} \partial_{xy} : L^2(M, \mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ f &\mapsto \partial_{xy} f := f(y) - f(x) \end{aligned}$$

Convencionamos $\partial_{xy} \equiv 0$ sempre que não houver uma aresta que conecte x a y em A.

Definição 2.6.1. Seja $x \in M$. Definimos $T_x M$ como o $\mathbb{R}$-espaço vetorial livre gerado pelo conjunto $\{\partial_{xy}\ ;\ \ y \in \text{OutNeigh}(x)\}$. Escrevemos ainda $TM := \bigsqcup_{x \in M} T_x M$.

[4] Geralmente o conjunto de vértices é denotado por V, mas para nossas pretensões em fazer um paralelo com variedades diferencias, M se torna uma ótima opção.

Definição 2.6.2. Sejam $x \in M$ e $f \in L^2(M, \mathbb{K})$. Dizemos que a aplicação $df(x)$, definida por extensão linear a partir da regra

$$\begin{aligned} df(x) : T_xM &\to \mathbb{K} \\ \partial_{xy} &\mapsto \partial_{xy} f \end{aligned} ,$$

é dita a *diferencial de f em x*. Se $F : M \to M$ é um automorfismo do grafo (M, A), então definimos

$$\begin{aligned} dF(x) : T_xM &\to T_{F(x)}M \\ \partial_{xy} &\mapsto \partial_{F(x)F(y)} \end{aligned} ,$$

também por extensão linear.

Definição 2.6.3. Um campo vetorial em (M, A) é uma aplicação $X : M \to TM$ tal que, para cada $x \in M$, temos $X(x) \in T_xM$. O espaço dos campos vetoriais é denotado por $\mathfrak{X}(M)$ e está munido das operações

$$\begin{aligned} (X + Y)(x) &:= X(x) + Y(x) \\ (aX)(x) &:= aX(x) \\ (fX)(x) &:= f(x)X(x) , \end{aligned}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $x \in M$, $a \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(M, \mathbb{K})$. Definimos ainda a ação

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) \times L^2(M, \mathbb{K}) &\to L^2(M, \mathbb{K}) \\ (X, f) &\mapsto X(f) := df(X) \end{aligned}$$

dada por $X(f)(x) := df(x).X(x)$, para todo $x \in M$.

As definições enunciadas há pouco nos permitem fazer um "cálculo de ordem 1" em grafos, onde a noção de derivada é dada pela "derivada discreta", ou seja, aquela em que a aresta $A(x, y)$ induz uma operação ∂_{xy}, agindo numa dada função $f \in L^2(M, \mathbb{K})$ essencialmente como a diferença $f(y) - f(x)$.

Usando a convenção de Einstein, temos que todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ obedece ao formato

$$X = X^y \partial_{(\cdot)y} : M \ni x \mapsto X^y(x)\partial_{xy} \in TM ,$$

onde o somatório omitido é tomado sobre os vértices $y \in M$ e cada $X^y \in L^2(M, \mathbb{R})$ define uma função real satisfazendo $X^y(x) = 0$, sempre que não houver uma aresta que parta de x e chegue em y, em A.

Tensor métrico

Queremos agora introduzir uma noção de tensor métrico sobre o grafo $\mathcal{G} = (M, A)$ que desempenhe o análogo da noção de métrica riemanniana em variedades. Para isto, muniremos $\mathcal{G}$ de um peso $\omega : A \to \mathbb{R}_{>0}$. O par $(\mathcal{G}, \omega)$ é, por vezes, referido como um *grafo pesado*. Defina $\omega_{xy} := \omega(A(x, y))$ para cada aresta $A(x, y) \in A$.

O peso ω induz, para cada $x \in M$, um produto interno real

$$g_x^\omega : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$

definido pela regra

$$g_x^\omega(\omega_{xy}\partial_{xy}, \omega_{xz}\partial_{xz}) := \delta_{yz} \ .$$

Definição 2.6.4. Sejam $(\mathcal{G}, \omega)$ um grafo pesado com $\mathcal{G} = (M, A)$. Para cada $x \in M$, definimos $\bigotimes^{0,2} T_xM$ como o $\mathbb{R}$-espaço vetorial das formas bilineares $B : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$. Escrevemos ainda $\bigotimes^{0,2} TM := \bigsqcup\limits_{x \in M} (\bigotimes^{0,2} T_xM)$. A aplicação

$$\begin{aligned} g^\omega : M &\to \textstyle\bigotimes^{0,2} TM \\ x &\mapsto g_x^\omega \end{aligned}$$

é chamada de *ω-tensor métrico*.

O ω-tensor métrico g^ω pode ser identificado como a aplicação

$$\begin{aligned} g^\omega : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to L^2(M, \mathbb{K}) \\ (X, Y) &\mapsto g^\omega(X, Y) \end{aligned} ,$$

onde $(\, g^\omega(X, Y)\,)(x) := g_x^\omega(X(x), Y(x))$.

Gradiente e laplaciano

Seja $(\mathcal{G}, \omega)$ um grafo pesado, finito, com $\mathcal{G} = (M, A)$.

Definição 2.6.5. Dada $f \in L^2(M, \mathbb{K})$, definimos o *gradiente de* f como o único campo $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$df(X) = g^\omega(X, \nabla f)\ , \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Seja $x \in M$. Note que, $\beta_x := \{E_{xy}\}_{y \in \text{OutNeigh}(x)}$, dado por

$$Y_{xy} := \omega_{xy} \partial_{xy}\ ,$$

é uma base g^ω_x-ortonormal de $T_x M$, para cada $x \in M$. Dado $v \in T_x M$, usemos a notação $v(f) := df(x).v$. Assim, é fácil ver que

$$\nabla f(x) = \sum_{y \in \text{OutNeigh}(x)} Y_{xy}(f) Y_{xy}\ .$$

Definição 2.6.6. Definimos o *laplaciano* de $(\mathcal{G}, \omega)$, com $\mathcal{G} = (M, A)$, como sendo o operador

$$\Delta_\omega : L^2(M, \mathbb{K}) \ni f \to \Delta_\omega f \in L^2(M, \mathbb{K})$$

definido por

$$\Delta_\omega f(x) = -\sum_{y \in \text{OutNeigh}(x)} \omega_{xy}(f(y) - f(x))$$

Note que para todos $x \in M$ e $f \in L^2(M, \mathbb{K})$,

$$\Delta_\omega f(x) = -\sum_{y \in \text{OutNeigh}(x)} Y_{xy}(f) = -\sum_{y \in \text{OutNeigh}(x)} g^\omega_x(\, Y_{xy}, \nabla f(x)\,)\ .$$

Laplaciano em grafos homogêneos não-direcionados

Antes de prosseguirmos, recomendamos fortemente uma lida no Apêndice A.6. Consideramos $\mathcal{G} = (\mathcal{G}(G/K; S), \omega)$ um grafo homogêneo finito, conexo, com conjunto de vértices dado pela G-espaço G/K (munido da G-ação induzida pelas translações à esquerda) e conjunto gerador S. O conjunto A, das arestas de $\mathcal{G}$, é dado por elementos da forma $A(xK, xsK)$, para $xK \in G/K$ e $s \in S$. Assumimos que S não contém nenhum elemento de K (ou seja, $\mathcal{G}$ não contém *loops*) e que S é simétrico, isto é, $S = S^{-1}$ (neste caso, portanto, $\mathcal{G}$ se identifica como um grafo não direcionado). O conjunto dos pesos G-invariantes de $\mathcal{G}$ é denotado por $\mathcal{M}^G$. Assumimos ainda que $\omega \in \mathcal{M}^G$. Defina

$$\omega_s := \omega_{eK\,sK} \ .$$

Como ω é G-invariante, então para todo $x \in G$ temos que

$$\omega_{xK\,xsK} = \omega_s \ .$$

Lema 2.6.7. *o grafo homogêneo $\mathcal{G}(G/K; S)$, munido de um peso G-invariante $\omega \in \mathcal{M}^G$ satisfaz*

$$\omega_s = \omega_{s^{-1}}$$

para todo $s \in S$.

Demonstração. Como $\mathcal{G}(G/K; S)$ é não-direcionado e $\omega \in \mathcal{M}^G$, então para todo $s \in S$

$$\omega_{s^{-1}} = \omega_{eK\,s^{-1}K} = \omega_{s^{-1}K\,eK} = \omega_{ss^{-1}K\,seK} = \omega_{eK\,sK} = \omega_s$$

■

Aut($\mathcal{G}$) é o conjunto de automorfismos de $\mathcal{G}$. Dada $F \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$, construímos o peso $F^*\omega$ pela regra

$$(F^*\omega)(A(xK, xsK)) := \omega(A(F(xK), F(xsK))) \ ,$$

para todos $x \in G$ e $s \in S$. Escrevemos ainda

$$\mathrm{Isom}(\mathcal{G}, \omega) := \{F \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \ ; \quad F^*\omega = \omega\} \ .$$

Lembramos que $L^2(G/K;\mathbb{K})$ possui ações $L^K, R^K : G \to GL(L^2(G/K;\mathbb{K}))$ dadas por

$$(L^K(x)f)(yK) := f(x^{-1}yK) \quad ; \quad (R^K(x)f)(yK) := f(yxK)$$

para todos $x, y \in G$ e $f \in L^2(G/K, \mathbb{K})$.

Agora, para cada $s \in S$, definimos os campos

$$\partial_s : G/K \ni xK \mapsto \partial_{xK\,xsK} \in T(G/K)$$
$$Y_s : G/K \ni xK \mapsto \omega_s \partial_s(xK) \in T(G/K)$$

de modo que $Y_s = \omega_s \partial_s$.

Definição 2.6.8. Denotamos por $\mathfrak{g}$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial gerado pelo conjunto de campos $\{\partial_s\}_{s\in S}$.

Como a noção de derivada de uma função f num grafo (M, A), na direção da aresta $A(x, y)$, é dada por $\partial_{xy} f = f(y) - f(x)$, isto nos motiva à seguinte definição de uma espécie de "derivação no elemento neutro" a nível de representações de grupos:

Definição 2.6.9. Seja $\Pi : G \to GL(V)$ uma representação de G. Definimos

$$\Pi_* : \mathfrak{g} \ni \partial_s \mapsto \Pi(s) - \Pi(e) \in \mathrm{End}(V)\ ,$$

estendida linearmente, e o operador

$$\Delta^V_\omega := -\sum_{s\in S} \Pi_*(Y_s) = -\sum_{s\in S} \omega_s(\,\Pi(s) - \Pi(e)\,) : V \to V$$

Em particular, note que para todos $x \in G$, $s \in S$ e $f \in L^2(G/K, \mathbb{K})$,

$$(R^K_*(\partial_s)f)(xK) = f(xsK) - f(x)$$
$$(R^K_*(Y_s)f)(xK) = \omega_s(\,f(xsK) - f(x)\,)$$

e, consequentemente,

$$\Delta_\omega f = -\sum_{s\in S} R_*^K(Y_s)f$$

Assim, sobre o grafo $\mathcal{G}(G/K;S)$ munido de um peso G-invariante ω, o laplaciano é expresso em termos da representação regular à direita, via

$$\Delta_\omega = -\sum_{s\in S} R_*^K(Y_s) : L^2(G/K,\mathbb{K}) \to L^2(G/K,\mathbb{K})$$

Esta expressão pode ser vista como um análogo da Proposição 1.1.1. Veremos que, para grafos de Cayley (onde podemos assumir, sem perda de generalidade, $K = \{e\}$), conseguimos reproduzir ainda mais análogos dos resultados constantes na Seção 1.1.

Análogo das Seções 1.1 e 2.1 para grafos de Cayley não-direcionados

Assuma $K := \{e\}$, ou seja $\mathcal{G}(G;S)$ um grafo de Cayley finito, conexo, não direcionado e com peso G-invariante ω (neste caso ω é dito um *peso invariante à esquerda*). S é um conjunto gerador de G satisfazendo $S = S^{-1}$ e $e \notin S$. Lembramos que $\widehat{G}$ é um conjunto completo de G-módulos irredutíveis não equivalentes (com escalares em $\mathbb{C}$). Pelo o que vimos há pouco, o laplaciano Δ_ω é dado por

$$\Delta_\omega = -\sum_{s\in S} R_*(Y_s) : L^2(G,\mathbb{K}) \to L^2(G,\mathbb{K})$$

onde $Y_s := \omega_s\partial_s$, com $\partial_s : G \ni x \mapsto \partial_{x\,xs} \in TG$.

Para cada G-módulo irredutível $(\Pi^*, V^*) \in \widehat{G}$, a componente V^*-isotípica de $L^2(G,\mathbb{C})$ é denotada por $\mathrm{Isot}_L(V^*)$ e temos o G-isomorfismo $V \otimes V^* \simeq \mathrm{Isot}_L(V^*)$ dado por:

$$\varphi_{V^*} : V \otimes V^* \ni v \otimes \xi \mapsto \phi_{v,\xi} \in \mathrm{Isot}_L(V^*) \ ,$$
$$\text{onde } \phi_{v,\xi} := (\Pi^*(\cdot)^{-1}\xi)(v) = \xi(\Pi(\cdot)v) \ ,$$

definido por extensão linear. Em particular, em vista destes isomorfismo, Δ_g se identifica como um operador da forma

$$\Delta_\omega : \bigoplus_{V^* \in \widehat{G}} V \otimes V^* \to \bigoplus_{V^* \in \widehat{G}} V \otimes V^* \ .$$

Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.6.10. *A menos de identificações, o laplaciano Δ_ω, sobre o grafo de Cayley $\mathcal{G}(G; S)$ com peso invariante à esquerda ω, é dado por*

$$\bigoplus_{V^* \in \widehat{G}} \Delta_\omega^V \otimes id : \bigoplus_{V^* \in \widehat{G}} V \otimes V^* \to \bigoplus_{V^* \in \widehat{G}} V \otimes V^* \ .$$

Demonstração. Sejam $(\Pi, V) \in \widehat{G}$ e $v \otimes \xi \in V \otimes V^*$. Basta provarmos que $\Delta_\omega \phi_{v,\xi} = \phi_{\Delta_\omega^V v, \xi}$. De fato, temos que para todo $x \in G$,

$$\begin{aligned}
\Delta_\omega \, \phi_{v,\xi} \, (x) &= -\sum_{s \in S} \omega_s(\, \xi(\Pi(xs)v) - \xi(\Pi(x)v) \,) \\
&= \xi \left(\, \Pi(x) \left(-\sum_{s \in S} \omega_s(\, \Pi(s) - \Pi(e) \,)v \right) \, \right) \\
&= \xi(\, \Pi(x) \Delta_\omega^V v \,) \\
&= \phi_{\Delta_\omega^V v, \xi}(x)
\end{aligned}$$

■

Lema 2.6.11. *Sejam $\mathcal{G}(G; S)$ um grafo de com peso invariante à esquerda ω e $(\Pi, V) \in Rep(G, \mathbb{C})$. Então para todos $\xi \in V^*$, temos que*

$$\Delta_\omega^{V^*} \xi = \xi \circ \Delta_\omega^V \ .$$

Em particular, se β é uma base de autovetores para Δ_ω^V com base dual β^*, então β^* é uma base de autovetores de $\Delta_\omega^{V^*}$ com mesmos autovalores correspondentes.

Demonstração. Sabemos que $S = S^{-1}$ e, para cada $s \in S$, temos $\omega_s = \omega_{s^{-1}}$ (reveja o Lema 2.6.7). Assim, para todo $v \in V$,

$$\begin{aligned}
(\Delta_\omega^{V^*}\xi)v &= -\left(\sum_{s\in S}\omega_s(\,\Pi^*(s) - \Pi^*(e)\,)\xi\right)v \\
&= -\sum_{s\in S}\omega_s\xi(\,\Pi(s^{-1})v - \Pi(e)v\,) \\
&= \xi\left(-\sum_{s\in S}\omega_s(\,\Pi(s^{-1}) - \Pi(e)\,)v\right) \\
&= \xi\left(-\sum_{s\in S}\omega_{s^{-1}}(\,\Pi(s^{-1}) - \Pi(e)\,)v\right) \\
&= \xi(\,\Delta_\omega^V v\,)\,.
\end{aligned}$$

■

Lema 2.6.12. *Sejam $\mathcal{G}(G;S)$ um grafo de com peso invariante à esquerda ω e $(\Pi, V) \in Rep(G,\mathbb{C})$. uma representação de tipo quaterniônico, com aplicação de estrutura dada pelo G-isomorfismo $j : V \to \overline{V}$. Então, os autoespaços de Δ_ω^V são j-invariantes e, portanto, devem ter dimensão par. Em particular, enxergando j como uma aplicação anti-linear de V em V, vale que Δ_ω^V comuta com j.*

Demonstração. Sabemos que Δ_ω é um operador simétrico com autovalores reais maiores ou iguais a 0. Pelo Teorema 2.6.10, o operador Δ_ω^V também deve ser simétrico com autovalores reais maiores ou iguais a 0.

Sabemos ainda que $j : V \to \overline{V}$ é um G-isomorfismo com inverso $-j : \overline{V} \to V$ (pois j^2 se identifica como $-\mathrm{id}$). Assim, todo endomorfismo $T \in \mathrm{End}(\overline{V})$ se identifica como o operador $(-j) \circ T \circ j \in \mathrm{End}(V)$. Em particular, dado V_λ o λ-autoespaço de Δ_ω^V, então $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e, para todo $v \in V_\lambda$, temos $(-j) \circ \Delta_\omega^V(jv) = \lambda v$. Compondo a equação anterior com j à esquerda, temos $\Delta_\omega(jv) = \lambda(jv)$. Portanto, $jv \in V_\lambda$. Mais ainda, vale que $\Delta_\omega(jv) = j\lambda v = j(\Delta_\omega^V v)$. Como esta propriedade vale para cada autoespaço do operador simétrico Δ_ω^V, então j comuta Δ_ω^V. ■

Note que, a partir daqui, o Lema 2.1.5, o Corolário 2.1.6 e o Corolário 2.1.7, aplicados a $K = \{e\}$ e ao operador Δ_ω^V (ao invés de Δ_g^V), são completamente adaptáveis para valerem neste contexto.

Seja $V \in \widehat{G}$. Podemos fazer as seguintes identificações:

(J1) Se V é de tipo real, podemos identificar aplicação de estrutura $J_V : V \to \overline{V}$ como $j \simeq \mathrm{id}_V$, induzindo uma aplicação $j \otimes \mathrm{id} : V \otimes \overline{V} \to V \otimes \overline{V}$.

(J2) Se V é de tipo complexo, temos $(V \oplus \overline{V})$ de tipo quaterniônico com aplicação de estrutura restrita $j : V \oplus \overline{V} \to V \oplus \overline{V}$, induzindo uma aplicação

$$j \otimes \mathrm{id} : (V \otimes \overline{V}) \oplus (\overline{V} \otimes V) \to (V \otimes \overline{V}) \oplus (\overline{V} \otimes V) \ .$$

(J3) Se V é de tipo quaterniônico, temos uma aplicação de estrutura restrita $j := J_V : V \to \overline{V}$, induzindo uma aplicação $j \otimes \mathrm{id} : V \otimes \overline{V} \to V \otimes \overline{V}$.

As regras (J1), (J2) e (J3) induzem uma aplicação

$$J := j \otimes \mathrm{id} : \bigoplus_{V^* \in \widehat{G}} V \otimes V^* \to \bigoplus_{V^* \in \widehat{G}} V \otimes V^* \ ,$$

comutando com Δ_g (pois em todos os casos, $j \otimes \mathrm{id}$ comuta ou com $\Delta_g^V \otimes \mathrm{id}$ ou $\Delta_g^{V \oplus \overline{V}} \otimes \mathrm{id}$, dependendo do tipo de representação).

Assim, quando G admite qualquer representação de tipo complexo ou quaterniônico, temos que

$$Q_8 \simeq \{\pm \mathrm{id}, \pm i \, \mathrm{id}, \pm J, \pm iJ\} \subset GL(L^2(G, \mathbb{C})) \ .$$

Nessas condições o Corolário 2.1.8 também é completamente adaptável para esse contexto. Logo, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.6.13. *Considere o grafo $\mathcal{G}(G; S)$, munido de um peso invariante à esquerda ω. Para cada $V \in \widehat{G}$. Denote por V_λ, $Isot_L(V^*)_\lambda$ e $Isot_L(V, V^*)_\lambda$ os λ-autoespaços de Δ_ω^V, $\Delta_\omega|_{Isot_L(V^*)}$ e de $\Delta_\omega|_{Isot_L(V,V^*)}$, respectivamente. Então:*

1. *Se V é de tipo real, então $Isot_L(V^*)_\lambda \simeq V_\lambda \otimes \overline{V}$. Em particular, λ é um autovalor simples para Δ_ω^V se, e somente se, $Isot_L(V^*)_\lambda \simeq \mathbb{C} \otimes \overline{V} \simeq \overline{V}$. Logo, o operador Δ_ω^V possui espectro simples se, e somente se, $\Delta_\omega|_{Isot_L(V^*)}$ é G-simples (neste caso, $\Delta_\omega|_{Isot_L(V^*)}$ é também $(Q_8 \times G)$-simples).*

2. *Se V é de tipo quaterniônico, então $Isot_L(V^*)_\lambda \simeq (\mathbb{H} \otimes V_\lambda)^{\oplus \dim_{\mathbb{C}} V_\lambda/2} \otimes V$. Em particular, cada autovalor λ de Δ_ω^V tem multiplicidade 2 se, e somente se, $Isot_L(V^*)_\lambda \simeq \mathbb{H} \otimes V$. Logo, o operador Δ_ω^V possui todos os autovalores com multiplicidade 2 se, e somente se, $\Delta_\omega|_{Isot_L(V^*)}$ é $(Q_8 \times G)$-simples.*

3. *Se V é de tipo complexo, então $Isot_L(V, V^*)_\lambda \simeq (V_\lambda \oplus \overline{V}_\lambda) \otimes V$. Em particular, λ é um autovalor simples para Δ_ω^V se, e somente se, $Isot_L(V, V^*)_\lambda \simeq \mathbb{H} \otimes V$. Logo, o operador Δ_ω^V tem espectro simples se, e somente se, $\Delta_\omega|_{Isot_L(V,V^*)}$ é $(Q_8 \times G)$-simples.*

4. *Se $\widehat{G}$ só contém representações de tipo real, então um peso G-invariante ω satisfaz que o operador real Δ_ω tem espectro G-simples real se, e somente se, a versão complexa de Δ_ω tem espectro G-simples complexo.*

5. *Se $\widehat{G}$ contém alguma representação de tipo complexo ou quaterniônico, então então um peso G-invariante ω, satisfaz que o operador real Δ_ω tem espectro G-simples real se, e somente se, a versão complexa de Δ_ω tem espectro $(Q_8 \times G)$-simples complexo.*

Agora, queremos desenvolver um critério de generecidade para o espectro do laplaciano do grafo $\mathcal{G}(G; S)$, dentro do espaço dos pesos invariantes à esquerda, dado pelo conjunto $\mathcal{M}^G$. Para isso, procederemos a algumas identificações desse espaço.

Primeiro, defina

$$S' := \left\{ s' := \{s, s^{-1}\} \; ; \quad s \in S \right\}$$

e, para todos $\omega \in \mathcal{M}^G$ e $s' \in S'$, escreva $\omega_{s'} := \omega_s = \omega_{s^{-1}}$. Em seguida, identifique o conjunto $\mathbb{R}_{>0}^{S'}$ como

$$\mathbb{R}_{>0}^{S'} := \{\alpha = (\alpha_{s'})_{s' \in S'} \; ; \quad \forall s' \in S', \; \alpha_{s'} \in \mathbb{R}_{>0}\} \; ,$$

o qual é um aberto de

$$\mathbb{R}^{S'} := \{\alpha = (\alpha_{s'})_{s' \in S'} \; ; \quad \forall s' \in S', \; \alpha_{s'} \in \mathbb{R}\}$$

(note que $\mathbb{R}^{S'} \simeq \mathbb{R}^{|S'|}$). Para cada $\alpha = (\alpha_{s'})_{s' \in S'} \in \mathbb{R}^{S'}$, escrevemos ainda $\alpha_s := \alpha_{s'}$ e

$\alpha_{s^{-1}} := \alpha_{s'}$, para todo $s \in S$. Assim, é fácil ver que a aplicação

$$\mathcal{M}^G \ni \omega \mapsto (\omega_{s'})_{s' \in S'} \in \mathbb{R}^{S'}_{>0}$$

define uma correspondência biunívoca $\mathcal{M}^G \simeq \mathbb{R}^{S'}_{>0}$. Deste modo, o espaço de pesos invariantes à esquerda $\mathcal{M}^G$ pode ser visto como um espaço topológico munido da topologia euclidiana. Neste panorama, uma propriedade é dita genérica em $\mathcal{M}^G$, se ela for válida num subconjunto residual de $\mathcal{M}^G$, considerando esta tal topologia euclidiana proveniente de $\mathbb{R}^{S'}_{>0} \subset \mathbb{R}^{S'}$. Doravante, não faremos distinção entre $\mathcal{M}^G$ e $\mathbb{R}^{S'}_{>0}$.

Definição 2.6.14. Considere o grafo $\mathcal{G}(G;S)$. Para cada $(\Pi, V) \in \widehat{G}$, definimos

$$D_V : \mathbb{R}^{S'} \ni \alpha \mapsto D_V(\alpha) := -\sum_{s \in S} \alpha_s(\, \Pi(s) - \Pi(e)\,) \in \mathrm{End}(V)$$

e, também, $p_V(\alpha)$ como o polinômio característico de $D_V(\alpha)$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}^{S'}$.

É claro que, para todo $\omega \in \mathbb{R}^{S'}_{>0}$, temos $D_V(\omega) = \Delta^V_\omega$.

Definição 2.6.15. Considere o grafo $\mathcal{G}(G;S)$ e tome $\mathrm{res} : \mathbb{C}[t] \times \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$ uma aplicação como no Lema 1.1.14. Dadas $U, V \in \widehat{G}$, construímos as aplicações $a_{U,V}, b_V, c_V : \mathbb{R}^{S'} \to \mathbb{C}$, definidas para cada $\alpha \in \mathbb{R}^{S'}$ por:

$$\begin{aligned} a_{U,V}(\alpha) &:= \mathrm{res}\,(p_U(\alpha), p_V(\alpha)) \\ b_V(\alpha) &:= \mathrm{res}\,\left(p_V(\alpha), \tfrac{d}{dt} p_V(\alpha)\right) \\ c_V(\alpha) &:= \mathrm{res}\,\left(p_V(\alpha), \tfrac{d^2}{dt^2} p_V(\alpha)\right) \end{aligned}$$

e $a^+_{U,V}, b^+_V, c^+_V : \mathbb{R}^{S'}_{>0} \to \mathbb{C}$ são as restrições de $a_{U,V}$, b_V e c_V ao conjunto $\mathbb{R}^{S'}_{>0}$, respectivamente.

Lembramos que res é uma aplicação polinomial e, portanto, as aplicações $a_{U,V}, b_V$ e c_V também são polinomiais.

Agora, estamos prontos pra enunciar um análogo dos Teoremas 1.1.17 e 2.1.2 para o grafo de Cayley $\mathcal{G}(G;S)$.

Teorema 2.6.16. *Considere o grafo de Cayley $\mathcal{G}(G;S)$. Existe um peso invariante à esquerda ω tal que Δ_ω tem espectro G-simples real se, e somente se, os seguintes itens são simultaneamente satisfeitos:*

1. *Para todas $U, V \in \widehat{G}$, com $U \ncong V, V^*$, vale que $a_{U,V}$ não é identicamente nulo.*

2. *Para toda $V \in \widehat{G}$, de tipo real ou complexo, vale que b_V não é identicamente nulo..*

3. *Para toda $V \in \widehat{G}$, de tipo quaterniônico, vale que vale que c_V não é identicamente nulo.*

Mais ainda, a existência de tal peso equivale a dizer qualquer uma das seguintes afirmações:

(i) genericamente em $\mathcal{M}^G$, o laplaciano do grafo $\mathcal{G}(G;S)$ tem espectro G-simples real.

(ii) Se $\widehat{G}$ só contém representações de tipo real, então genericamente em $\mathcal{M}^G$, o laplaciano complexo do grafo $\mathcal{G}(G;S)$ tem espectro G-simples complexo ou, senão, caso $\widehat{G}$ contenha alguma representação de tipo complexo ou quaterniônico, então genericamente em $\mathcal{M}^G$, o laplaciano complexo do grafo $\mathcal{G}(G;S)$ tem espectro $(Q_8 \times G)$-simples complexo.

Demonstração. Note que, pelo Corolário 2.6.13, temos que (i) e (ii) são equivalentes. Assim, é suficiente provar duas afirmações:

($\Rightarrow$) *o item (ii) implica nos itens (1), (2) e (3);*

($\Leftarrow$) *os itens (1), (2) e (3) implicam no item (ii).*

($\Rightarrow$) Assumindo (ii), deve existir um peso $\omega \in \mathcal{M}^G$ tal que Δ_ω tem espectro G-simples complexo ou $(Q_8 \times G)$-simples complexo. Pelo Corolário 2.6.13, podemos inferir:

(A) Dados $U, V \in \widehat{G}$, com $U \ncong V, V^*$, temos que $\Delta_\omega|_{\mathrm{Isot}_L(U^*)}$ e $\Delta_\omega|_{\mathrm{Isot}_L(V^*)}$ não podem compartilhar nenhum autovalor em comum. Logo, Δ_ω^U e Δ_ω^V não possuem autovalor em comum, de modo que $a_{U,V}(\omega) \neq 0$.

(B) Para $V \in \widehat{G}$ de tipo real, $\Delta_\omega|_{\mathrm{Isot}_L(V^*)}$ deve ter espectro G-simples e, portanto, Δ_ω^V tem espectro simples, de modo que $b_V(\omega) \neq 0$. Para $V \in \widehat{G}$ de tipo complexo, $\Delta_\omega|_{\mathrm{Isot}_L(V,V^*)}$deve ter espectro $(Q_8 \times G)$-simples e, neste caso, também vale que Δ_ω^V tem espectro simples, de modo que $b_V(\omega) \neq 0$.

(C) Para $V \in \widehat{G}$ de tipo quaterniônico, $\Delta_\omega|_{\mathrm{Isot}_L(V^*)}$ deve ter espectro $(Q_8 \times G)$-simples e, portanto, cada autovalor de Δ_ω^V tem multiplicidade 2, de modo que $c_V(\omega) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Assuma (1), (2) e (3). Sejam $U, V \in \widehat{G}$ tais que $U \ncong V, V^*$. Como a aplicação polinomial $a_{U,V}$ não é identicamente nula em $\mathbb{R}^{S'}$, então sua restrição ao aberto $\mathbb{R}^{S'}_{>0}$ também não é identicamente nula. Tome Z_1 como a união dos zeros de todas as aplicações $a^+_{U,V} = a_{U,V}|_{\mathbb{R}^{S'}_{>0}}$, com G-módulos irredutíveis $U \ncong V, V^*$. Como Z_1 é uma família de enumeráveis zeros de polinômios sobre o aberto $\mathbb{R}^{S'}_{>0}$, então Z_1 é magro em $\mathbb{R}^{S'}_{>0}$. Similarmente, podemos construir um conjunto magro $Z_2 \subset \mathbb{R}^{S'}_{>0}$ como a união enumerável de zeros das aplicações $b^+_V = b_V|_{\mathbb{R}^{S'}_{>0}}$, com $V \in \widehat{G}$ de tipo real ou complexo. Finalmente, podemos tomar $Z_3 \subset \mathbb{R}^{S'}_{>0}$ como sendo o conjunto magro formado pela união enumerável dos zeros das aplicações $c^+_V = c_V|_{\mathbb{R}^{S'}_{>0}}$, com $V \in \widehat{G}$ de tipo quaterniônico. Assim, $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$ é ainda subconjunto magro de $\mathbb{R}^{S'}_{>0}$, ou seja, $\mathbb{R}^{S'}_{>0} - (Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3)$ é um subconjunto residual de $\mathbb{R}^{S'}_{>0}$. Daí, um peso invariante à esquerda genérico $\omega \in \mathbb{R}^{S'}_{>0} - (Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3)$ satisfaz:

(I) $a_{U,V}(\omega) \neq 0$ para todos $U, V \in \widehat{G}$ tais que $U \ncong V, V^*$ e, neste caso, Δ_g^U e Δ_g^V não possuem nenhum autovalor em comum;

(II) $b_V(\omega) \neq 0$, para todo $V \in \widehat{G}$ de tipo real ou complexo e, neste caso, Δ_g^V tem espectro simples;

(III) $c_V(\omega) \neq 0$, para todo $V \in \widehat{G}$ de tipo quaterniônico e, neste caso, cada autovalor de Δ_g^V tem multiplicidade 2.

Pelo Corolário 2.6.13, os três itens precedentes devem implicar que Δ_ω tem espectro G-simples complexo, caso $\widehat{G}$ só tenha representações de tipo real, ou então Δ_ω tem espectro $(Q_8 \times G)$-simples complexo, caso contrário. Conclusão: vale (ii). ■

Exemplificando o Teorema 2.6.16

O critério dado pelo Teorema 2.6.16 nos permite analisar alguns exemplos envolvendo grupos finitos G, desde que tenhamos informações suficientes sobre suas representações. Para a sequência do material, recomendamos uma leitura paralela com o Apêndice A.7.

Começamos com o caso em que o grafo de Cayley $\mathcal{G}(G; S)$ satisfaz que G é abeliano e, portanto, $\widehat{G}$ é um conjunto finito em que cada elemento é uma representação irredutível unidimensional.

Exemplo 2.6.17. Seja $\mathcal{G}(G;S)$ com G é abeliano e considere $\widehat{G} := \{(\Pi_j, V_j)\ ;\quad j = 1,\ldots,N\}$. Como cada $(\Pi, V_j) \in \widehat{G}$ é unidimensional, então para todo $\alpha \in \mathbb{R}^{S'}$, vale que

$$\lambda_j(\alpha) := D_{V_j}(\alpha) = -\sum_{s\in S} \alpha_s(\,\Pi(s) - \Pi(e)\,)$$

é um escalar. Denote por j^* o índice tal que $V_{j^*} = V_j^*$. Assim a propriedade genérica do Teorema 2.6.16 está condicionada a encontrar algum $\alpha \in \mathbb{R}^{S'}$ tal que para quaisquer $k, j \in \{1,\ldots,N\}$, com $k \neq j, j^*$, vale que $\lambda_k(\alpha) \neq \lambda_j(\alpha)$.

Veremos agora três exemplos particulares do Exemplo 2.6.17, envolvendo grupos cíclicos da forma $\mathbb{Z}_n$, para $n \geq 2$, ou produtos de grupos cíclicos.

Exemplo 2.6.18. Considere $\mathcal{G}(G;S)$, com $G = \mathbb{Z}_n$. Então $\widehat{G} = \{\Pi_0, \Pi_1 \ldots, \Pi_{n-1}\}$, onde

$$\Pi_j(k) = e^{\frac{2\pi\, i}{n} jk}.$$

para todo $k \in \mathbb{Z}_n$ e todo $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Se $j \neq 0$, vale ainda que $j^* = n - j$, ou seja, $\Pi_j^* \simeq \Pi_{n-j}$. Lembramos que S é um conjunto de geradores, simétrico e que não contém o elemento neutro $e = 0$. Assuma que existe $r \in S$ tal que $\langle r \rangle = \mathbb{Z}_n$. Construímos $\alpha = (\alpha_{s'})_{s'\in S'} \in \mathbb{R}^{S'}$ da seguinte forma: (i) tome $\alpha_{r'} = 1$, ou seja, $\alpha_{\pm r} = 1$; (ii) para $\pm r \neq s \in S$, tome $\alpha_{s'} = \alpha_{\pm s} = 0$. Então

$$\lambda_j(\alpha) = 2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{n} jr\right) = \lambda_{n-j}(\alpha) = \lambda_{j^*}(\alpha)$$

É fácil checar que para $j_2 \neq j_1, j_1^*$, vale que $\lambda_{j_1}(\alpha) \neq \lambda_{j_2}(\alpha)$. Pelo Exemplo 2.6.17, para um peso invariante à esquerda genérico em $\mathcal{M}^G$, o laplaciano de $\mathcal{G}(G;S)$ tem espectro G-simples real (e sua versão complexa tem espectro $(Q_8 \times G)$-simples complexo).

Exemplo 2.6.19. Seja $K := \{e, a, b, ab\}$ o grupo de Klein, abeliano, de ordem 4 com geradores $a, b \in K$ satisfazendo as relações $a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$. Temos $\widehat{K} = \{\Pi_e, \Pi_a, \Pi_b, \Pi_{ab}\}$, definido pela tabela

	e	a	b	ab
Π_e	1	1	1	1
Π_a	1	1	-1	-1
Π_b	1	-1	1	-1
Π_{ab}	1	-1	-1	1

.

Seja S um conjunto de geradores de K, simétrico e tal que $e \notin S$. Podemos tomar, sem perda de generalidade, $r, t \in S$ tais que $r^{\pm 1} \neq t^{\pm 1}$. Defina $\alpha_{r'} = 1$, $\alpha_{t'} = 2$ e $\alpha_s = 0$ para $s \in S - \{r, t\}$. Assim, pode-se verificar que a condição do Exemplo 2.6.17 é satisfeita para todo S e, portanto, vale a propriedade genérica do Teorema 2.6.16, ou seja, o laplaciano em $\mathcal{G}(K, S)$ tem espectro G-simples real para um peso invariante à esquerda genérico em $\mathcal{M}^G$. Note ainda que todas as representações de K devem ser de tipo real e, portanto, a versão complexa do laplaciano tem espectro G-simples complexo para um peso invariante à esquerda genérico em $\mathcal{M}^G$.

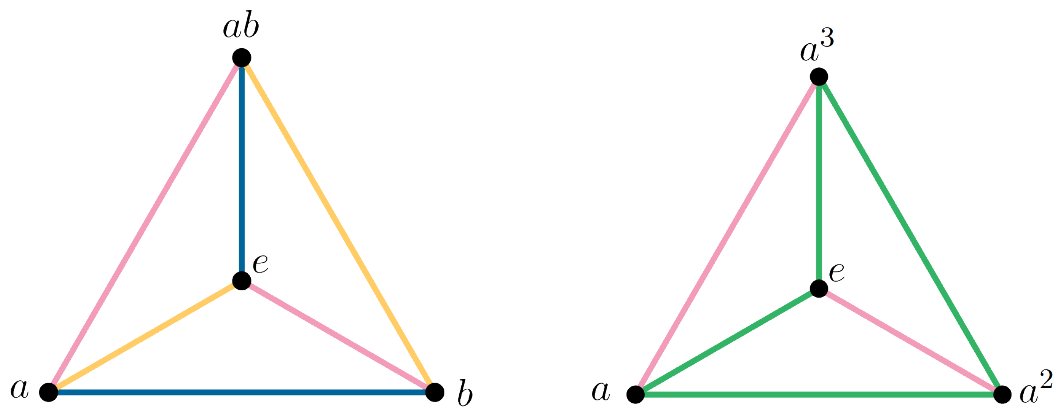

Figura 2.1: À esquerda, temos o tetraedro associado com o grafos de Cayley $\mathcal{G}(K, \{a, b, ab\})$, construído a partir do grupo de Klein. À direita, temos o grafo $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_4, \{a, a^2, a^3\})$, construído a partir do grupo cíclico $\mathbb{Z}_4$, identificado como um grupo multiplicativo gerado por a.

Exemplo 2.6.20. Seja $G := \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Temos que

$$\widehat{G} = \{\Pi_{j_1,j_2}\ ; \quad j_1, j_2 \in \{0,1,2\}\}\ ,$$

onde

$$\Pi_{j_1,j_2}(k_1,k_2) = e^{\frac{2\pi\, i}{3}(j_1k_1+j_2k_2)}\ ,$$

para todos $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_3$ e $j_1, j_2 \in \{0,1,2\}$. Assuma $S = \{r := (1,0), t := (0,1)\} \subset G$. Pode-se verificar que

$$\lambda_{j_1,j_2}(\alpha) = 2\alpha_r\big(1 - \cos(2\pi j_1/3)\big) + 2\alpha_t\big(1 - \cos(2\pi j_2/3)\big)\ ,$$

de modo que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^{S'}$,

$$\lambda_{1,1}(\alpha) = \lambda_{1,2}(\alpha) = 3\alpha_r + 3\alpha_t = \lambda_{2,1}(\alpha) = \lambda_{2,2}(\alpha)\ .$$

Neste caso, a condição do Exemplo 2.6.17 não é satisfeita e, assim, o Teorema 2.6.16 nos diz que o laplaciano em $\mathcal{G}(K,S)$ não tem espectro G-simples real para nenhum peso invariante à esquerda em $\mathcal{M}^G$.

O exemplo anterior é um caso onde a genericidade do Teorema 2.6.16 para o espectro do laplaciano não ocorre. Uma maneira de intuir isso é mostrar que a genericidade ocorre quando consideramos a restrição do laplaciano a um subespaço estrito de $L^2(G,\mathbb{K})$, ou seja, deve existir uma espécie de "excedente" de funções fazendo com que a propriedade de genericidade do espectro não ocorra. Vejamos isso de maneira mais precisa na observação seguinte.

Observação 2.6.21. Considere $\mathcal{G}(G;S)$ com G abeliano. Se $\omega \in \mathcal{M}^G$ então vale que, para cada $s \in S$, $\omega_s = \omega_{s^{-1}}$. Esta condição pode ser muito forte, ao considerar o laplaciano Δ_ω agindo em $L^2(G;\mathbb{K})$ e pode induzir um efeito que leve à não G-simplicidade (ou $(Q_8 \times G)$-simplicidade) do espectro. Para eliminar esse eventual efeito, definimos $\mathcal{A}_S$ como o subespaço das funções $f \in L^2(G,\mathbb{K})$ tais que

$$\omega_s(\, f(xs) - f(x)\,) = \omega_{s^{-1}}(\, f(xs^{-1}) - f(x)\,)\ , \quad \forall x \in G\,,\ \forall s \in S\,.$$

Defina ainda, para cada G-representação (Π, V),

$$\mathcal{A}_S^\Pi := \bigcap_{s\in S} \ker(\,\Pi(s) - \Pi(s^{-1})\,)\ .$$

Assim, se consideramos a representação regular à direita $(R, L^2(G,\mathbb{K}))$, então vale que

$$\mathcal{A}_S = \mathcal{A}_S^R \simeq \bigoplus_{(\Pi,V)\in\widehat{G}} A_S^\Pi$$

Com isso, numa versão mais fraca do nosso problema de genericidade, podemos trocar Δ_ω por $\Delta_\omega|_{\mathcal{A}^S} : \mathcal{A}_S \to \mathcal{A}_S$ para verificar se o espectro deste último operador satisfaz a propriedade genérica. Em caso positivo, podemos atribuir esse comportamento à presença natural da propriedade $\omega_s = \omega_{s^{-1}}$, podendo interpretá-la como uma espécie de "simetria oculta" para a decomposição espectral.

Vimos, recentemente, três exemplos de grafos de Cayley construídos a partir de grupos abelianos. Em dois deles, a propriedade genérica para o espectro é satisfeita, enquanto que no terceiro, não. Uma investigação a ser feita neste terceiro exemplo é tentar encontrar aplicações naturais que comutem com o laplaciano tais que, quando adicionamo-nas como simetrias do problema, consigamos uma nova noção de simplicidade genérica para o espectro.

Passemos agora a alguns exemplos em que G não é abeliano.

Exemplo 2.6.22. Considere $\mathcal{G}(G;S)$, com $G := D_n$ o grupo diedral de ordem $2n$, com $n \geq 3$. Podemos considerar $\mathbb{Z}_n \simeq \langle r \rangle$ como o grupo multiplicativo em um gerador r, com $r^n = e$, e $t \in D_n$ uma reflexão tal que

$$D_n = \langle r \rangle \cup t\langle r \rangle \ .$$

Assuma que S contém r e t.

Existem no máximo quatro representações unidimensionais em $\widehat{G}$ (duas, se n é ímpar; quatro, se n é par) e as demais representações em $\widehat{G}$ são de graus 2.

As representações irredutíveis de grau 1 são dadas por $\{\Pi_{1,1}, \Pi_{1,-1}\}$, se n é ímpar, e por $\{\Pi_{1,1}, \Pi_{1,-1}, \Pi_{-1,1}, \Pi_{-1,-1}\}$, em ambos os casos satisfazendo

$$\Pi_{j,k}(r) = j \quad \text{e} \quad \Pi_{j,k}(t) = k \ .$$

Denotaremos essas representações por $(\Pi_{j,k}, V_{j,k})$.

As representações irredutíveis restantes, de grau 2, são dadas da seguinte maneira: para cada inteiro m tal que $0 < m < n/2$, consideramos (Π_m, V_m), com $V_m = \mathbb{C}^2$ e

$$\Pi_m(r^k) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{n}mk} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{n}mk} \end{pmatrix}, \quad \Pi_m(tr^k) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{2\pi i}{n}mk} \\ e^{\frac{2\pi i}{n}mk} & 0 \end{pmatrix}.$$

Fixemos $\alpha \in \mathbb{R}^{S'}$ com $\alpha_{r'} = 1/2$, $\alpha_{t'} = 3$, e $\alpha_{s'} = 0$ for $s' \in S' - \{r', t'\}$. Assim,

$$D_{V_{jk}}(\alpha) = 4 - \frac{1}{2}(j + j^{n-1}) - 3k.$$

Logo,

- $(j,k) = (1,1)$ implica que $D_{V_{j,k}}(\alpha) = 0$.
- $(j,k) = (1,-1)$ implica que $D_{V_{j,k}}(\alpha) = 6$.
- n par e $(j,k) = (-1,1)$ implicam que $D_{V_{j,k}}(\alpha) = 2$.
- n par e $(j,k) = (-1,-1)$ implicam que $D_{V_{j,k}}(\alpha) = 8$.

Observe ainda que

$$D_{V_m}(\alpha) = \begin{pmatrix} 4 - \cos(2\pi m/n) & -3 \\ -3 & 4 - \cos(2\pi m/n) \end{pmatrix}$$

tem autovalores distintos $\lambda_1^{(m)} = \cos(2\pi m/n) + 1$ e $\lambda_2^{(m)} = \cos(2\pi m/n) + 4$. Como o cosseno é estritamente decrescente em $(0, \pi)$, então $\lambda_1^{(m)} \neq \lambda_1^{(m')}$ e $\lambda_2^{(m)} \neq \lambda_2^{(m')}$ para $m \neq m'$.

Suponha agora, por contradição, que existam $m \in \mathbb{Z}$ com $0 < m < \pi/2$ tais que

$$\lambda_1^{(m)} = \lambda_2^{(m')}.$$

Então $\cos(2\pi m/n) - \cos(2\pi m'/n) = 3$, o que é impossível. Portanto, $\lambda_1^{(m)} \neq \lambda_2^{(m')}$ para todos $m, m' \in \mathbb{Z}$ com $0 < m, m' < \pi/2$.

Seja $\lambda_1^{(m)} \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda_2^{(m)} \in \mathbb{Z}$. Então $m = n/4 \in \mathbb{Z}$ e, portanto, $\lambda_1^{(m)} = 1$ e $\lambda_2^{(m)} = 4$.

Assim, para todos $V, V' \in \widehat{G}$, vale que $a_{V,V'} \not\equiv 0$, ou seja, vale o item (1) do Teorema 2.6.16. Os itens (2) e (3) do teorema são imediatamente satisfeitos, já que todos os $D_V(\alpha)$ considerados têm autovalores simples.

Exemplo 2.6.23. Considere $\mathcal{G}(G; S)$, com $G = A_4$ o grupo alternado, gerado pelo subgrupo de permutações $\{t = (123), x = (12)(34)\} \subset S_4$, onde S_4 é grupo de permutações de 4 elementos. Assuma que $t, x \in S$. Temos $\widehat{G} = \{(\Pi_j, V_j)\ ; \quad j = 0, 1, 2, 3\}$, onde as representações irredutíveis unidimensionais são dadas por

$$\Pi_j(t) = e^{\frac{2\pi i}{3} j} \quad \text{e} \quad \Pi_j(x) = 1, \quad \text{para } j \in \{0, 1, 2\}.$$

A representação restante (Π_3, V_3) é de grau 3 e pode ser descrita por

$$\Pi_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Pi_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Seja $\alpha_{t'} = \alpha_{x'} := 1$ e $\alpha_{s'} := 0$ for $s' \in S' - \{t', x'\}$. Temos então que os polinômios característicos dos operadores $D_{V_j}(\alpha)$ são dados por

$$p_{V_0}(\alpha)(\lambda) = \lambda, \quad p_{V_1}(\alpha)(\lambda) = p_{V_2}(\alpha)(\lambda) = \lambda - 2\big(1 - \cos(2\pi/3)\big),$$
$$\text{e} \quad p_{V_3}(\alpha)(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 5).$$

Como $V_1^* \simeq V_2$, pode-se verificar facilmente os itens (1), (2) and (3) do Teorema 2.6.16. Assim, Δ_ω tem espectro G-simples real (e sua versão complexa tem espectro $(Q_8 \times G)$-simples complexo) para um peso invariante à esquerda genérico $\omega \in \mathcal{M}^G$, em $\mathcal{G}(G; S)$.

Um operador análogo ao laplaciano

Considere $\mathcal{G}(G; S)$ e $\omega \in \mathcal{M}^G$. Defina

$$\widetilde{\Delta_\omega} : L^2(G, \mathbb{K}) \to L^2(G, \mathbb{K}) \ ,$$

de modo que para todos $f \in L^2(G, \mathbb{K})$ e $x \in G$ tenhamos

$$\widetilde{\Delta_\omega} f\,(x) := \sum_{s \in S} \omega_s(\, f(xs^2) - 2f(xs) + f(x)\,) \ .$$

Se definimos $\widetilde{Y_s} := \omega_s^{1/2} \partial_s$, então vale que

$$\widetilde{\Delta_\omega} = \sum_{s \in S} R_*(Y_s)^2$$

É fácil checar que $\widetilde{\Delta_\omega}$ é um operador simétrico.

Agora, definamos para todos $(\Pi, V) \in \widehat{G}$ e $\alpha \in \mathbb{R}^{S'}$

$$\widetilde{D_V}(\alpha) := \sum_{s \in S} \alpha_s(\, \Pi(s) - \Pi(e)\,)^2$$

e considere $\widetilde{p_V}(\alpha)$ seu polinômio característico. Por fim, seja

$$\begin{array}{lcl} \widetilde{a_{U,V}}(\alpha) & := & \text{res}\left(\widetilde{p_U}(\alpha), \widetilde{p_V}(\alpha)\right) \\ \widetilde{b_V}(\alpha) & := & \text{res}\left(\widetilde{p_V}(\alpha), \frac{d}{dt}\widetilde{p_V}(\alpha)\right) \\ \widetilde{c_V}(\alpha) & := & \text{res}\left(\widetilde{p_V}(\alpha), \frac{d^2}{dt^2}\widetilde{p_V}(\alpha)\right) \ , \end{array}$$

para todos $U, V \in \widehat{G}$ e $\alpha \in \mathbb{R}^{S'}$.

Assim, considerando as construções precedentes, temos que o Teorema 2.6.16 e os exemplos decorrentes são completamente adaptáveis para o operador $\widetilde{\Delta_\omega}$, o qual é análogo ao laplaciano em variedades, no sentido de podermos expressá-lo como quadrado de campos a partir da representação regular à direita.

3 Considerações Finais

Os avanços e abordagens conquistados no Capítulo 2 têm margem para evoluir e receber releituras com novos pontos-de-vista. Além disso, eles podem, num futuro breve, ser aplicados a diversos sistemas físicos com suas respectivas aplicações. Por exemplo, cabe mencionar que simetrias ocultas ou não, em suas mais diversas naturezas distintas, podem significar a existência de degenerescências do sistema físico em questão com importantes interpretações e implicações para a compreensão da teoria e relação com a prática.

Mais ainda, a coletânea de análises e resultados pesquisados neste material podem servir como ensejo para uma releitura no próprio ponto de vista abstrato presente na geometria diferencial. Por exemplo, o fato de esperarmos um espectro G-simples na situação genérica de determinados operadores e G-variedades M dados e, ao invés disso, obtermos uma $\widetilde{G}$-simplicidade para uma estrutura maior de simetrias $\widetilde{G}$, pode significar que existe um conjunto altamente não trivial de transformações em M que se comportam como isometrias numa outra estrutura oculta, como o que acontece com a situação do átomo de hidrogênio e do problema de Kepler, onde certos movimentos no espaço tridimensional, quando vistos sob a correspondência da projeção estereográfica da esfera $\mathbb{S}^3$ (sem o polo norte), correspondem a isometrias da esfera $\mathbb{S}^3$. Podemos nos perguntar, se nestes casos de $\widetilde{G}$-simplicidade do espectro existe alguma projeção geométrica generalizada $\mathbb{P} : \widetilde{M} \to M$, análoga à projeção estereográfica, que torne cada elemento de $\widetilde{G}$ numa isometria de fato em $\widetilde{M}$, explicando este efeito de simetria oculta.

A – Apêndice

Este capítulo reúne, primeiramente, uma coletânea de resultados e construções clássicas acerca de grupos e álgebras de Lie, especialmente numa perspectiva mais algébrica. Na mesma linha, fazemos o análogo destas construções para espaços homogêneos e espaços simétricos. Finalmente, enunciamos algumas construções básicas no que diz respeito aos grafos de Cayley e possíveis outras classes de grafos homogêneos, com o intuito de discutir discretizações de problemas envolvendo variedades.

Assumiremos, a menos de menção contrária, que os grupos trabalhados no decorrer do texto são compactos e, sempre que for conveniente, que são subgrupos de matrizes inversíveis, a fim de poder referenciar as construções em [Hall, 2015]. Não há qualquer perda de generalidade nesta última hipótese, uma vez que todo grupo de Lie compacto é isomorfo a um destes subgrupos matriciais. Em linguagem de representações, isto é o mesmo que afirmar que *todo grupo de Lie compacto admite uma representação fiel*.[1]

Introdução

Um *grupo de Lie* pode ser entendido simplesmente como um grupo com estrutura de variedade diferenciável e operação suave, englobando exemplos como o espaço euclidiano ou então os grupos matriciais clássicos.[2] Este tipo de estrutura é datada do final do século XIX, tendo seu marco inicial principalmente com os trabalhos de S. Lie e F. Klein.

Lie estava interessado na identificação de simetrias e soluções de certos sistemas de equações diferenciais. Sua intenção tinha por finalidade estabelecer um paralelo da relação

[1] Este resultado pode ser consultado em [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.III.4].

[2] Exemplos corriqueiros: $GL_n(\mathbb{K})$, $SL_n(\mathbb{K})$, $O(n)$,$U(n)$, $SO(n)$,$SU(n)$ (ver mais em [Hall, 2015, Sec.1.2]).

entre grupos e raízes de polinômios apresentada pela teoria de Galois.

Klein, por sua vez, buscava abstrair o cerne da questão *"O que é geometria?"*. Para ele, a noção de geometria deveria ser entendida como um objeto que se molda a partir de um grupo de transformações agindo sobre ele. Neste contexto, as propriedades geométricas seriam descrições matemáticas invariantes pela ação deste tipo de grupo. Por exemplo, a geometria euclidiana seria então o estudo de propriedades invariantes pela ação do grupo euclidiano, o qual engloba todos os possíveis movimentos rígidos em $\mathbb{R}^n$.[3]

Seguindo um pouco mais adiante no desenvolvimento da teoria, logo se percebeu que um grupo de Lie G poderia ser descrito em termos de um objeto algébrico, classicamente denominado como *grupo infinitesimal* ou *álgebra de Lie*, denotado por $\mathfrak{g}$. A ideia é que podemos estudar as propriedades de G fixando um ponto base e seu espaço tangente e, a partir daí, percorremos toda sua estrutura via translações. Convenientemente, podemos escolher tal ponto base como o elemento identidade $e \in G$ e, nesta perspectiva, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é identificada como o espaço tangente deste elemento, isto é, como o espaço T_eG. Os vetores de $\mathfrak{g}$ são, então, estendidos unicamente pelas diferenciais das translações à esquerda para campos suaves no grupo – os chamados *campos invariantes à esquerda*.[4] Podemos, então, enxergar $\mathfrak{g}$ como uma álgebra de campos invariantes à esquerda com produto dado pelo colchete de campos em variedades. Relações envolvendo as álgebras de Lie foram alavancadas por trabalhos como os de W.Killing, H.Weyl e E. Cartan (dentre outros autores), entre o final do século XIX e início do século XX.

As construções mencionadas no parágrafo precedente generalizam-se aos chamados *espaços homogêneos*, os quais são obtidos por quocientes entre grupos de Lie da forma $M = G/K$. Aqui, G age transitivamente em M com ação induzida pelas translações à esquerda. Neste contexto, há um subespaço $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ desempenhando o papel do espaço tangente num ponto base de M, similar ao que acontecia com a álgebra de lie $\mathfrak{g}$ em relação ao grupo G.

Cartan estudou e classificou uma importante subclasse de espaços homogêneos – os

[3]Tais movimentos são sempre composições entre translações e transformações ortogonais.
[4]Todas essas construções possuem análogo à direita, variando de autor para autor.

espaços simétricos. Estes possuem a propriedade de admitir, em cada ponto p, uma isometria que reverte as geodésicas passando por p – propriedade esta que os tornam objetos "altamente simétricos". A classe dos espaços simétricos generaliza os grupos de Lie com métricas bi-invariantes, as formas espaciais de curvatura constante, entre outros exemplos importantes. Além disso, o estudo dos espaços simétricos é intimamente próximo ao da abordagem feita para grupos e álgebras de Lie – inclusive para suas respectivas *teorias de representação*, parte integrante essencial deste trabalho.

Denotemos por $GL(V)$ o grupo de automorfismos de um espaço vetorial V e por $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de endomorfismos de V, munida do comutador. Uma *representação* de $\mathfrak{g}$ (resp. de G) é um espaço vetorial V munido de um homomorfismo $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ (resp. homomorfismo $\Pi : G \to GL(V)$ contínuo[5]). Ou seja, fixada uma base de V, considerar representações sobre o espaço dado nada mais é do que mapear sua estrutura abstrata e convertê-la numa estrutura matricial, a qual tem operações mais concretas. Quando G é simplesmente conexo, há uma equivalência entre o estudo de representações sobre G e representações sobre $\mathfrak{g}$.

A classificação das representações pode ser convertida num problema de matemática discreta. Mais especificamente, no estudo de certos reticulados dentro de uma construção conhecida como *sistema de raízes*.

Sistemas de raízes são construídos sobre certas subestruturas abelianas de $\mathfrak{g}$. Os espaços homogêneos de interesse, da forma $M = G/K$, induzem uma decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}\,,$$

em que $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ são as álgebras de Lie de G e K, respectivamente, e $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ se identifica como o espaço tangente em um ponto base de M. Daí, as descrições envolvendo as representações e sistemas de raízes em M são provenientes de construções em $\mathfrak{g}$ (ou G) que podem ser "replicadas de maneira bem comportada" em $\mathfrak{m}$ (ou M) e que "aniquilam" (em algum sentido) o efeito da ação de $\mathfrak{k}$ (ou K).

Merece destaque ainda um importante *link* da teoria de representações com a análise

[5]Pode-se mostrar que exigir continuidade ou suavidade, neste contexto, é equivalente.

funcional – o *Teorema de Peter-Weyl*. Há uma série de versões (e variações) deste resultado, responsáveis por fornecerem certas decomposições de espaços funcionais, construídos sobre $M = G/K$, numa soma direta indexada pelas *representações irredutíveis*[6] de G. Atendo-se aos interesses específicos desta tese, estas decomposições são extremamente relevantes, uma vez que desejamos estabelecer um comparativo entre elas e as decomposições fornecidas pelos autoespaços de operadores laplacianos.

A.1 Grupos e álgebras de Lie

O objetivo principal desta seção é enunciar a descrição da *teoria de representações para grupos de Lie compactos e álgebras de Lie semi-simples* em termos dos chamados *sistemas de raízes*, à luz do *Teorema do Peso Maior*. Propriedades envolvendo o *grupo de Weyl* também são destacadas aqui. As principais referências de apoio para esta parte são [Arvanitoyeorgos, 2003, Bröcker and tom Dieck, 1985, Hall, 2015] (eventualmente alguns tópicos pontuais fora deste escopo serão referenciados também).

Noções básicas

Definição A.1.1. Um grupo G é dito um *grupo de Lie* se estiver munido de uma estrutura de variedade diferenciável tal que $G \times G \ni (x, y) \mapsto xy^{-1} \in G$ é suave.[a] A aplicação $\ell_x : G \ni y \mapsto xy \in G$ (resp. $r_x : G \ni y \mapsto yx \in G$) é dita *translação à esquerda* (resp. *à direita*) por $x \in G$. O elemento identidade de G é denotado por e.

Seja G um grupo de Lie. Diremos que K é um *subgrupo de Lie* de G se satisfizer duas propriedades: (i) K é um subgrupo de G; (ii) K é uma subvariedade imersa em G.

Seja $\Phi : G_1 \to G_2$ um homomorfismo de grupos. Se G_1 e G_2 são grupos de Lie e Φ é suave, então Φ é dito um *homomorfismo de Lie*.

[a] Aqui $G \times G$ está munido da estrutura de variedade produto.

[6] Uma representação é dita *irredutível* se não admite sub-representações não triviais.

Teorema A.1.2. [a] *Sejam G e H dois grupos de Lie. Valem:*

1. *Se $\Phi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos contínuo, então Φ é um homomorfismo de Lie.*

2. *Se H é um subgrupo de G, então H é fechado em G se, e somente se, H é uma subvariedade mergulhada de G.*

[a] Ver [Bröcker and tom Dieck, 1985, Cap.I, Th. 3.11 e Prop. 3.12], atendo-se à seguinte ressalva: em [Bröcker and tom Dieck, 1985], o termo *"submanifold"* significa "subvariedade mergulhada".

Daqui por diante os grupos mencionados serão sempre grupos de Lie, caso não façamos menção contrária. Eis uma coletânea de exemplos usuais:

Exemplo A.1.3. [a] Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ e V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial n-dimensional, munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ real, hermitiano ou simplético (respectivamente). São grupos de Lie:

1. V munido da operação/estrutura aditiva.

2. $GL(V) := \mathrm{Aut}(V) \sim GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in M_n(\mathbb{K});\ \det A \neq 0\}$, munido da composição/produto matricial.

3. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, os seguintes subgrupos de $GL(V) \sim GL(n; \mathbb{R})$:

   a) $SL(V) \sim SL(n; \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R});\ \det A = 1\}$.

   b) $O(n) \sim O(V) := \{A \in GL(V);\ A \text{ preserva } \langle \cdot, \cdot \rangle\}$.

   c) $SO(n) \sim SO(V) := SL(V) \cap O(V)$.

4. Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, os seguintes subgrupos de $GL(V) \sim GL(n, \mathbb{C})$:

   a) $SL(V) \sim SL(n, \mathbb{C}) := \{A \in GL(n, \mathbb{C});\ \det A = 1\}$.

   b) $U(n) \sim U(V) := \{A \in GL(V);\ A \text{ preserva } \langle \cdot, \cdot \rangle\}$.

   c) $SU(n) \sim SU(V) := SL(V) \cap U(V)$.

5. Para $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, o seguinte subgrupo de $GL(n, \mathbb{H}) \sim GL(V)$:

$$Sp(n) \sim Sp(V) := \{A \in GL(V);\ A \text{ preserva } \langle \cdot, \cdot \rangle\}$$ [b]

6. Qualquer produto entre dois grupos de Lie dados, munido da operação produto e da estrutura produto de variedades.

7. O toro $T^n := S^1 \times \cdots \times S^1 \sim \mathbb{R}^n/Z^n$. [c]

[a] Tais exemplos podem ser consultados em qualquer uma das seguintes referências de preferência: [Arvanitoyeorgos, 2003, Sec.1.3], [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.I.1] ou [Hall, 2015, Sec.1.2].
[b] Todas as identificações desta proposição são óbvias para o caso em que $V = \mathbb{K}^n$.
[c] Note que $S^1 \sim U(1)$.

As definições básicas de álgebras de Lie abstratas são dadas por:

Definição A.1.4. Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Uma *álgebra de Lie* é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial A (de dimensão finita) munido de um produto $\mathbb{K}$-bilinear $[\cdot,\cdot] : A \times A \to A$ satisfazendo para todos $X, Y, Z \in A$:

- (anti-simetria) $[X, Y] = -[Y, X]$.
- (id. Jacobi) $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$

O produto $[\cdot,\cdot]$ recebe o nome de *colchete de Lie*. Uma *subálgebra* de uma álgebra de Lie A é um subespaço linear S fechado pelo colchete de Lie, isto é, satisfazendo $[S, S] \subset S$. Se, adicionalmente, S satisfaz a propriedade $[A, S] \subset S$, então S é dito um *ideal* de A.

Um *homomorfismo* entre álgebras de Lie A_1 e A_2 é uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $\phi : A_1 \to A_2$ tal que, para todos $X, Y \in A_1$, vale que $\phi[X, Y] = [\phi X, \phi Y]$.

Denotemos por T_xG o espaço tangente em $x \in G$, TG o fibrado tangente de G e $\mathfrak{X}(G)$ a álgebra de campos vetoriais suaves de G, onde o produto algébrico é dado pelo colchete de campos em variedades.

Definição A.1.5. Seja $X_e \in T_eG$ arbitrário. A aplicação $X : G \ni x \mapsto X(x) := (d\ell_x)_e(X_e) \in TG$ é dita o *campo invariante à esquerda* de G induzido por X_e. O conjunto dos campos invariantes à esquerda é denotado por $\mathfrak{g}$.

Proposição A.1.6. [a]

1. *$\mathfrak{g}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{X}(G)$. Nesta estrutura $\mathfrak{g}$ é, por si só, uma álgebra de Lie, ou seja, o colchete de Lie de $\mathfrak{g}$ é o colchete de campos.*

2. *Dados $X_e, Y_e \in T_eG$, considere X e Y os campos invariantes à esquerda induzidos por X_e e Y_e, respectivamente, e defina $[X_e, Y_e] := [X, Y](e)$. Então, a aplicação*

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto X(e) \in T_eG$$

é um isomorfismo canônico de álgebras de Lie e escrevemos $\mathfrak{g} \sim T_eG$.

3. *Seja $\Phi : G \to H$ um homomorfismo de Lie. Então $\phi := d\Phi_e : T_eG \to T_eH$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.*

4. *Seja H um subgrupo de Lie de G. Então $\mathfrak{h} \sim T_eH$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g} \sim T_eG$. Se H é normal em G, então $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.*

5. *O fibrado tangente TG é canonicamente difeomorfo a $G \times \mathfrak{g}$.*

[a] Ver [Arvanitoyeorgos, 2003, Cap.1] e [Bröcker and tom Dieck, 1985, Secs. I.2 e I.3].

Definição A.1.7. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é a *álgebra de Lie de G* e esta também é comumente denotada por Lie(G). Dado um homomorfismo de Lie $\Phi : G \to H$, dizemos que $\phi := d\Phi_e$ é o *homomorfismo de álgebras de Lie induzido por Φ.*

Em virtude da Proposição A.1.6, item 2, faremos um abuso de notação, usando $\mathfrak{g}$ para se referir não somente à álgebra de Lie de campos invariantes à esquerda de G, mas também à T_eG. Por exemplo, o homomorfismo de álgebras de Lie induzido por um homomorfismo de Lie $\Phi : G \to H$, no item 3, passará a ser identificado como $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$.

Proposição A.1.8. [a]

1. *Dados $X \in \mathfrak{g}$ e $x \in G$, denote por $\phi_x^X(t)$ a curva integral de X (ou seja, $\frac{d}{dt}\phi_x^X = X \circ \phi_x^X$) com condição inicial $\phi_x^X(0) = x$. Então ϕ_x^X tem domínio maximal $\mathbb{R}$.*[b] *Em particular, a* exponencial de Lie, *dada por* $\exp : \mathfrak{g} \ni X \mapsto \phi_e^X(1) \in G$, *está bem definida.*

2. $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *é suave.*

3. *Seja $\Phi : G \to H$ homomorfismo de Lie com homomorfismo induzido $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ nas álgebras de Lie.*

Então, $\Phi \circ \exp_G = \exp_H \circ \phi$.

4. *Para todos* $X \in \mathfrak{g}$, $x \in G$ *e* $t \in \mathbb{R}$, $\phi_x^X(t) = x\exp(tX)$.

[a]Ver [Arvanitoyeorgos, 2003, Cap.1] e [Bröcker and tom Dieck, 1985, Secs. I.2 e I.3].
[b]Em outras palavras, estamos dizendo que os campos invariantes à esquerda são completos.

As álgebras de Lie induzidas pelos grupos do Exemplo A.1.3 são dadas por:

Exemplo A.1.9. [a] Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ e V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial n-dimensional, munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ real, hermitiano ou simplético (respectivamente). Então, a menos de identificações, temos:

1. $Lie(V) = V$ munido do colchete nulo, dita uma *álgebra de Lie abeliana*.

2. $\mathfrak{gl}(V) := \text{Lie}(GL(V)) = \text{End}(V)$, onde o colchete é dado pelo comutador de operadores. Em linguagem matricial, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) := \text{Lie}(GL(n,\mathbb{K})) = M_n(\mathbb{K})$ munido do comutador de matrizes.

3. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, são subálgebras de $\mathfrak{gl}(V) \sim \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$:

   a) $\mathfrak{sl}(V) := \text{Lie}(SL(V)) \sim \mathfrak{sl}(n;\mathbb{R}) := \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R});\ \text{tr}\, A = 0\}$.

   b) $\mathfrak{so}(n) \sim \mathfrak{so}(V) := \text{Lie}(SO(V)) = \text{Lie}(O(V)) = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ A \text{ é } \langle\cdot,\cdot\rangle\text{-anti-simétrica}\}$.

4. Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, são subálgebras de $\mathfrak{gl}(V) \sim \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$:

   a) $\mathfrak{sl}(V) := \text{Lie}(SL(V)) \sim \mathfrak{sl}(n;\mathbb{C}) := \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ \text{tr}\, A = 0\}$.

   b) $\mathfrak{u}(n) \sim \mathfrak{u}(V) := \text{Lie}(U(V)) = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ A \text{ é } \langle\cdot,\cdot\rangle\text{-anti-hermitiana}\}$.

   c) $\mathfrak{su}(n) \sim \mathfrak{su}(V) := \text{Lie}(SU(V)) = \mathfrak{u}(V) \cap \mathfrak{sl}(V)$.

5. Para $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, temos a seguinte subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{H}) \sim \mathfrak{gl}(V)$:

$$\mathfrak{sp}(n) \sim \mathfrak{sp}(V) := \text{Lie}(Sp(V)) = \{A \in \mathfrak{gl}(V);\ A \text{ é } \langle\cdot,\cdot\rangle\text{-anti-simplética}\}.$$

6. $\text{Lie}(G_1 \times G_2) = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, com colchete na restrição ao i-ésimo fator igual ao colchete de $\mathfrak{g}_i$, para $i = 1, 2$, e satisfazendo $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = \{0\}$. Nestas condições, $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ é dita uma *soma direta de álgebras de Lie*.[b]

7. $\text{Lie}(T^n) = \mathbb{R}^n$, munido do colchete nulo.

[a] Tais exemplos podem ser consultados em: [Arvanitoyeorgos, 2003, Sec.1.5], [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.I.2] ou [Hall, 2015, Cap.3].

[b] Note que esta não é simplesmente uma soma direta vetorial, uma vez que estamos impondo hipóteses sobre o colchete de Lie de $g_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.

Há pouco vimos, essencialmente, que grupos de Lie, homomorfismos de Lie e subgrupos de Lie induzem, naturalmente, álgebras de Lie, homomorfismos de álgebras de Lie e subálgebras, respectivamente. Além disso homomorfismos de Lie se relacionam aos seus respectivos homomorfismos induzidos nas álgebras de Lie, por intermédio das exponenciais de Lie. O resultado seguinte nos mostra quão próximo de serem equivalentes são as construções envolvendo grupos e álgebras de Lie.

Teorema A.1.10. [a] *A passagem dos grupos de Lie para as álgebras de Lie é dada por:*

(I) Todo grupo de Lie G induz uma álgebra de Lie $\mathfrak{g} = Lie(G)$, formada pelos campos invariantes à esquerda de G.

(II) Todo homomorfismo de Lie $\Phi : G \to H$ induz um homomorfismo nas álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$.

(III) Seja H um subgrupo de Lie de G. Então $\mathfrak{h} = Lie(H)$ é subálgebra de $\mathfrak{g} = Lie(G)$. Se, adicionalmente, H é normal em G, então $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.

A passagem das álgebras de Lie para os grupos de Lie é dada por:

(i) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Então existe um único grupo de Lie simplesmente conexo G tal que $Lie(G) = \mathfrak{g}$.

(ii) Seja $\mathfrak{g} = Lie(G)$. Então para cada subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, existe um único subgrupo de Lie conexo $H \subset G$ tal que $Lie(H) = \mathfrak{h}$. Se, adicionalmente, $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, então H é um normal em G.

(iii) Sejam $\mathfrak{g} = Lie(G)$, com G simplesmente conexo, e $\mathfrak{h} = Lie(H)$. Então cada homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é induzido por um único homomorfismo de Lie $\Phi : G \to H$.

Vale ainda as seguintes regras sobre fatorações e centros, respectivamente:

(Fat) *Suponha* $\mathfrak{g} = Lie(G)$, *com* G *simplesmente conexo, e que* $\mathfrak{g}$ *se decompõe como soma direta de álgebras de Lie da forma* $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. *Então* $G \simeq G_1 \times G_2$ *para únicos subgrupos fechados simplesmente conexos* $G_1, G_2 \subset G$ *tais que* $Lie(G_i) = \mathfrak{g}_i$, $i = 1, 2$.

(Cen) *O centro* $Z(G)$ *de um grupo de Lie* G, *com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, *é um grupo de Lie abeliano e satisfaz* $Lie(Z(G)) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, *onde* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{X \in \mathfrak{g};\ [X, \mathfrak{g}] = 0\}$ *é o centro de* $\mathfrak{g}$.

[a] Já vimos os três primeiros itens. Os itens (i), (ii) e (iii) podem ser consultados em [Alexandrino and Bettiol, 2015, Cap.1] e [Arvanitoyeorgos, 2003, Sec.1.7]. O item (Fat) é encontrado em [Hall, 2015, Th.5.11], enquanto que o item (Cen) está presente em [Arvanitoyeorgos, 2003, Sec.2.2].

Em linguagem categorial, o teorema acima tem por consequência afirmar que existe uma correspondência biunívoca entre a categoria de álgebras de Lie, munida dos homomorfismos de álgebras de Lie, e a categoria de grupos de Lie simplesmente conexos, munida dos homomorfismos de Lie.

Generalidades sobre representações

Passemos a um importantíssimo conceito – o de *representação*. Para a definição a seguir, fixemos $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

Definição A.1.11. Uma *representação* de G, sobre $\mathbb{K}$, é um homomorfismo de Lie da forma $\Pi : G \to GL(V)$. Notações: (Π, V) ou Π ou simplesmente V, desde que fique subentendido que V está acompanhado do homomorfismo Π.

Uma *representação* de $\mathfrak{g}$, sobre $\mathbb{K}$, é um homomorfismo de álgebras de Lie, obedecendo ao formato $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Notações: (π, V) ou π ou simplesmente V, desde que fique subentendido que V está acompanhado do homomorfismo π.

A quantidade $\dim_{\mathbb{K}} V$, em ambos os casos, é dita *grau/dimensão da representação*.

Sejam (Σ, U) e (Π, V) duas representações do grupo de Lie G. Dizemos que $f : U \to V$ é dita uma *G-aplicação* se para todos $x \in G$, $u \in U$, vale que $f(\Sigma(x)u) = \Pi(x)(f(u))$.

Sejam (σ, U) e (π, V) duas representações de $\mathfrak{g}$. Dizemos que $f : U \to V$ é uma $\mathfrak{g}$-*aplicação* se para todos $X \in \mathfrak{g}$, $u \in U$, vale que $f(\sigma(X)u) = \pi(X)(f(u))$.

Em ambos os casos, se a aplicação f for um isomorfismo linear, dizemos que as representações envolvidas são *equivalentes* ou *isomorfas*.

Definição A.1.12. Um *G-módulo* é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V munido de uma ação linear contínua da forma $G \times V \to V$.

Um *$\mathfrak{g}$-módulo* é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V munido de uma ação linear da forma $\mathfrak{g} \times V \to V$, satisfazendo $[X, Y] \cdot v = X \cdot (Y \cdot v) - Y \cdot (X \cdot v)$, para todos $X, Y \in V$ e $v \in V$.

Sejam U e V dois G-módulos. Dizemos que $f : U \to V$ é *G-equivariante* se para todos $x \in G$, $u \in U$, vale que $f(x \cdot u) = x \cdot f(u)$.

Sejam (σ, U) e (π, V) dois $\mathfrak{g}$-módulos. Dizemos que $f : U \to V$ é *$\mathfrak{g}$-equivariante* se para todos $X \in \mathfrak{g}$, $u \in U$, vale que $f(X \cdot u) = X \cdot f(u)$.

Em ambos os casos, se a aplicação f for um isomorfismo linear, dizemos que U e V são *equivalentes* ou *isomorfos*.

Observação A.1.13. As definições acima são equivalentes no seguinte sentido:

(i) G (resp. $\mathfrak{g}$)-representações correspondem a G (resp. $\mathfrak{g}$)-módulos;

(ii) G (resp. $\mathfrak{g}$)-aplicações lineares correspondem a aplicações lineares G (resp. $\mathfrak{g}$)-equivariantes.[a]

Assim, migraremos entre estas noções equivalentes conforme conveniência.

[a] Ver [Bröcker and tom Dieck, 1985, Cap.II].

Definição A.1.14. Seja V um G (resp. $\mathfrak{g}$)-módulo. Um *submódulo* de V é um subespaço vetorial U tal que U é, por si só, um G (resp. $\mathfrak{g}$)-módulo, quando munido da ação induzida por V. Dizemos que V é *irredutível* se não admite submódulos não triviais, isto é, $\{0\}$ e V são seus únicos submódulos.[a]

[a] Pela Obs. A.1.13, definem-se naturalmente as noções de *sub-representação* e de *representação irredutível*.

Vejamos noções elementares envolvendo representações:

Exemplo A.1.15. [a] Temos as seguintes construções com representações de grupos de Lie:

1. O $\mathbb{K}$-módulo $V = \mathbb{K}$ é dito *$\mathbb{K}$-representação trivial*.

2. Sejam U e V dois G-módulos, e considere $u \in U$, $v \in V$ e $x \in G$ arbitrários. Então a ação $x \cdot (u, v) := (x \cdot u, x \cdot v)$ confere a $U \oplus V$ uma estrutura de G-módulo. Uma representação que se decompõe numa soma direta de representações irredutíveis é dita

completamente redutível. Se G é compacto, então toda representação de dimensão finita de G é completamente redutível.

3. Sejam U e V dois G-módulos, e considere $u \in U$, $v \in V$ e $x \in G$ arbitrários. Então a ação estendida linearmente a partir da regra $x \cdot (u \otimes v) := (x \cdot u) \otimes (x \cdot v)$ define uma estrutura de G-módulo para $U \otimes V$. Obs.: $U \otimes (V_1 \oplus V_2)$ é canonicamente equivalente a $(U \otimes V_1) \oplus (U \otimes V_2)$.

4. Sejam U um G-módulo e V um H-módulo. Dados $u \in U$, $v \in V$, $x \in G$ e $y \in H$ arbitrários, considere a ação de estendida linearmente a partir da regra $(x, y) \cdot (u \otimes v) := (x \cdot u) \otimes (y \cdot v)$. Tal ação confere a $U \otimes V$ uma estrutura de $(G \times H)$-módulo.

5. Seja V um G-módulo. A regra $(x \cdot \eta)(v) := \eta(x^{-1} \cdot v)$, para todos $x \in G$, $\eta \in V^*$ e $v \in V$, define uma estrutura de G-módulo para V^*, o qual recebe o nome de *representação dual de V*. Se uma representação V é equivalente a V^* então ela é dita *auto-dual*. Obs.: $(V^*)^*$ é canonicamente equivalente a V, assim como $(V_1 \otimes V_2)^*$ é canonicamente equivalente a $V_1^* \otimes V_2^*$. Além disso, se definimos $\overline{V}$ como sendo igual V em todas as suas estruturas EXCETO a multiplicação escalar, onde cada escalar $a + bi$ de V age como $a - bi$ em $\overline{V}$, então $\overline{V}$ define uma representação isomorfa a V^*, dita *representação conjugada*.

6. Sejam U e V dois G-módulos. Então $\bigwedge^k V^*$ e $\mathrm{Sym}^k V^*$ são G-submódulos de $(V^*)^{\otimes k}$ e valem as seguintes equivalências canônicas:
   a) $\bigwedge^k (U \oplus V)^* \simeq \bigoplus_{l=0}^{k} \bigwedge^l U^* \otimes \bigwedge^{k-l} V^*$
   b) $\mathrm{Sym}^k (U \oplus V)^* \simeq \bigoplus_{l=0}^{k} \mathrm{Sym}^l U^* \otimes \mathrm{Sym}^{k-l} V^*$
   c) $V^* \otimes V^* \simeq \mathrm{Sym}^2 V^* \oplus \bigwedge^2 V^*$.

7. Sejam U e V dois G-módulos. A regra $(x \cdot T)(u) := x \cdot T(x^{-1} \cdot u)$, para todos $x \in G$, $T \in \mathrm{Hom}(U, V)$ e $u \in U$, define uma estrutura de G-módulo para $\mathrm{Hom}(U, V)$. Além disso, $\mathrm{Hom}(U, V)$ é canonicamente equivalente ao G-módulo $U^* \otimes V$.

As seguintes construções fornecem exemplos de representações para álgebras de Lie:

8. Se $\Pi : G \to GL(V)$ é uma G-representação, então $\pi := d\Pi_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é uma $\mathfrak{g}$-representação, dita *representação induzida por* Π.

9. $\mathrm{Ad} : G \ni x \mapsto \mathrm{Ad}_x := d(\ell_x \circ r_{x^{-1}})_e \in GL(\mathfrak{g})$ é uma G-representação, com $\mathfrak{g}$-representação induzida dada por $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \ni X \mapsto \mathrm{ad}_X := [X, \cdot] \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Estas aplicações são conhecidas como as *representações adjuntas* de G e de $\mathfrak{g}$, respectivamente.

10. Seja $\Pi : G \to GL(V)$ uma representação com escalares complexos, com G compacto. Então V admite um produto interno hermitiano tal que $\Pi(G) \subset U(V)$ e sua representação induzida π satisfaz $\pi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{u}(V)$. Neste caso, Π (e também π) é dita *unitária* e o produto interno associado é dito $\Pi(\mathfrak{g})$-*invariante* (e também $\pi(\mathfrak{g})$-*invariante*).

[a] Ver [Arvanitoyeorgos, 2003, Cap.2], [Bröcker and tom Dieck, 1985, Cap.2] e [Hall, 2015, Cap.4].

Pelo Exemplo A.1.15, item 2, temos que o estudo de representações de grupos de Lie compactos se reduz ao estudo de suas representações irredutíveis.

Seja $A \in \{\mathfrak{g}, G\}$. Denotemos $\mathrm{Hom}_A(V, W) := \{f : V \to W;\ f \text{ é linear } A\text{-equivariante}\}$.

Teorema A.1.16 (Lema de Schür). [a] *Fixe $A \in \{\mathfrak{g}, G\}$ e considere V e W dois A-módulos irredutíveis, com escalares em $\mathbb{C}$.*

1. *Se $f \in Hom_A(V, W)$, então $f = 0$ ou f é um isomorfismo.*

2. *Se $f \in Hom_A(V, V)$, então f é um múltiplo da identidade.*

3. *$Hom_A(V, W)$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão 1, caso V e W sejam equivalentes, e é o espaço nulo, caso contrário.*

[a] Ver [Hall, 2015, Th.4.29].

Muito em razão do resultado acima, a teoria de representações é melhor aproveitada quando descrita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Além disso, pode-se mostrar que representações sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}$ podem ser relidas em termos de representações sobre $\mathbb{C}$, conforme [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.II.6]. Veremos a seguir um conjunto de definições e uma proposição que nos permitem transportar os conceitos da teoria de representações com escalares arbitrários para representações com escalares em $\mathbb{C}$.

Definição A.1.17. Fixemos $A \in \{\mathfrak{g}, G\}$. Seja V um A-módulo, com escalares sobre $\mathbb{C}$. Uma *aplicação de estrutura de V com índice $\varepsilon \in \mathbb{R}$* é uma A-aplicação anti-linear $J : V \to V$ tal que $J^2 = \varepsilon\,\mathrm{id}$. Dizemos que V é de *tipo real* (resp. *tipo quaterniônico*) se V admite uma aplicação de estrutura de índice $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$). Se a única aplicação de estrutura de V é a de índice nulo, então dizemos que V é de *tipo complexo*.

Denote por $\mathrm{Rep}(A, \mathbb{K})$ o conjunto de classes de equivalências de A-módulos, de grau finito e com escalares em $\mathbb{K}$. $\mathrm{Irr}(A, \mathbb{K})$ denotará o subconjunto de $\mathrm{Rep}(A, \mathbb{K})$ das classes de A-módulos irredutíveis. Sempre que for conveniente, podemos enxergar os conjuntos $\mathrm{Rep}(A, \mathbb{K})$ e $\mathrm{Irr}(A, \mathbb{K})$ como um conjunto completo de representantes das classes de A-módulos que os compõem. O conjunto $\mathrm{Irr}(G, \mathbb{C})$ também costuma ser receber a notação $\widehat{G}$.

Defina ainda $\widehat{G}^+$, $\widehat{G}^-$ e $\widehat{G}^0$ como os subconjuntos de $\widehat{G}$ de representações de tipos real, quaterniônico e complexo, respectivamente.

Proposição A.1.18. [a]

1. *A complexificação de uma álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$, denotada por $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, possui estrutura de álgebra de Lie complexa com colchete de Lie construído a partir da seguinte regra:*

$$[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2] = [X_1, Y_1] - [X_2, Y_2] + i(\,[X_1, Y_2] + [Y_1, X_2]\,),\ \forall X_i, Y_i \in \mathfrak{g}\,.$$

2. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real e $\mathfrak{h}$ uma álgebra de Lie complexa (podendo ser vista também como álgebra de Lie real). Então, todo homomorfismo $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ se estende unicamente a um homomorfismo $\phi^{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{h}$, o qual, convenientemente, usamos a mesma notação ϕ. Em particular, toda $\pi \in Rep(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ se estende unicamente a uma $\pi \in Rep(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$. Note ainda que a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ possui uma única extensão da forma $ad : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$.*

3. *Se G é simplesmente conexo, então $Rep(G, \mathbb{C})$ está em bijeção com $Rep(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$. Mais ainda, $\Pi \in Irr(G, \mathbb{C})$ se, e somente se, $\pi := d\Pi_e \in Irr(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ ou, equivalentemente, se $\pi \in Irr(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$.*

4. *$\widehat{G}$ é a união disjunta de $\widehat{G}^+$, $\widehat{G}^-$ e $\widehat{G}^0$. Mais ainda, valem:*

a) $V \in \widehat{G}^+$ *se, e somente se,* V *é auto-dual e* $V \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$, *para alguma* $U \in Irr(G, \mathbb{R})$.

b) $V \in \widehat{G}^-$ *se, e somente se,* V *é auto-dual e* $V \oplus V^* \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$, *para alguma* $U \in Irr(G, \mathbb{R})$.

c) $V \in \widehat{G}^0$ *se, e somente se,* V *não é auto-dual e* $V \oplus V^* \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$, *para alguma* $U \in Irr(G, \mathbb{R})$.

5. $Irr(G_1 \times G_2, \mathbb{C}) = \{V_1 \otimes V_2;\ \ V_i \in \widehat{G}_i,\ i = 1, 2\}$.

[a] Para o item 1, veja [Hall, 2015, Sec.3.6]. Os itens 2 e 3 são consequências de [Hall, 2015, Prop.4.6] e do Teorema A.1.10. O item 4 é encontrado em [Schueth, 2017, Lem.2.2] e, por fim, o item 5 é encontrado em [Schueth, 2017, Remark.4.2].

Já mencionamos que nosso interesse está voltado para os grupos de Lie compactos, cujas álgebras de Lie complexificadas possuem diversas caracterizações relevantes. Por esta razão, voltaremos nossa atenção principalmente para elas, o que motiva o conceito de *semi-simplicidade*.

Definição A.1.19. $\mathfrak{g}$ é dita *compacta* se $\mathfrak{g} \simeq \mathrm{Lie}(G)$, algum G compacto.

Dizemos que $\mathfrak{g}$ tem *fator abeliano* se $\mathfrak{g}$ se decompõe como soma direta de álgebras de Lie da forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_1$ com $\{0\} \neq \mathfrak{z} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Dizemos que $\mathfrak{g}$ é *irredutível* se não admitir ideais não triviais. Uma álgebra de Lie irredutível que não admite fator abeliano é dita *simples*.

Definição A.1.20. Seja A uma álgebra de Lie complexa. Dizemos que uma álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ é uma *forma real para* A se $A \simeq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Uma álgebra de Lie complexa A é dita *redutível* se admite alguma forma real compacta. Se A é redutível e sem fator abeliano, então A é denominada *semi-simples*.

Um grupo de Lie é dito *semi-simples* (resp. *redutível*) se sua álgebra de Lie complexificada for semi-simples (resp. redutível).

Proposição A.1.21. [a] *Considere* A *uma álgebra de Lie complexa com forma real* $\mathfrak{g}$ *e centro* $\mathfrak{z} := \mathfrak{z}(A)$.

1. $\mathfrak{g}$ *é simples se, e somente se,* A *é simples. Além disso, toda álgebra de Lie complexa simples é semi-simples.*

2. *Se* A *é redutível, então* A *admite um produto interno hermitiano* $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-invariante[b], *o qual é real em* $\mathfrak{g}$ *e induz uma soma direta de álgebras de Lie, ortogonal,* $A = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$, *com* $\mathfrak{g}_1$ *compacta e*

$A_1 := \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$ *semi-simples. Mais ainda:*

a) *A é semi-simples se, e somente se, $\mathfrak{z} = 0$.*

b) *A_1 é semi-simples se, e somente se, A_1 se decompõe numa soma direta de álgebras de Lie simples (única a menos de permutações nos somandos).*

c) *$\mathfrak{g}_1$ admite uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{t}_1$, única a menos de automorfismos em $\mathfrak{g}_1$. Neste caso, $\mathfrak{h}_1 := \mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}}$ é dita uma* subálgebra de Cartan de A_1 *e escrevemos rank $\mathfrak{g}_1 := \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}_1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{t}_1$. Além disso,*

   i. *Se $\mathfrak{t}$ é uma subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{g}$ então $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}_1$.*

   ii. *Se G_1 é um grupo compacto tal que Lie$(G_1) = \mathfrak{g}_1$ e T_1 é um toro maximal em G_1 então Lie$(T_1) \simeq \mathfrak{t}_1$. Neste caso, escrevemos rank $G_1 := \dim T_1$.*

3. *Seja G compacto. Então G é redutível e, se G é simplesmente conexo, G é também semi-simples.*

4. *Se G é semi-simples, então $Z(G)$ é discreto.*

5. *Se A é semi-simples e sua forma real $\mathfrak{g}$ é compacta, então existe um grupo de Lie compacto simplesmente conexo G tal que Lie$(G) = \mathfrak{g}$. Além disso,* forma de Killing negativa *dada por $-B(X,Y) := -tr(ad_X \circ ad_Y)$, para $X, Y \in A$ arbitrários, define um produto interno ad$(\mathfrak{g})$-invariante, real em $\mathfrak{g}$.*

[a] Para os três itens iniciais, veja [Hall, 2015, Caps.7 e 11]. O item 4 é consequência do Teorema A.1.10. O item 5 está mencionado em [Hall, 2015, Sec.10.3].

[b] Isto é, $\forall X \in \mathfrak{g}$, ad_X é unitário: $\forall Y, Z \in A$, $\langle \mathrm{ad}_X\, Y, Z\rangle = \langle Y, -\mathrm{ad}_X\, Z\rangle$.

Observação A.1.22. Seja $\mathfrak{z}$ uma álgebra de Lie abeliana. Então todo grupo de Lie conexo Z tal que Lie$(Z) = \mathfrak{z}$ é isomorfo ao produto direto de um toro por um espaço euclidiano. Se, adicionalmente, Z é compacto, então Z é um toro.[a] Sabemos ainda que as representações irredutíveis complexas de estruturas abelianas são unidimensionais.[b] Além disso, no caso compacto, temos uma listagem explícita para as representações irredutíveis do toro.[c]

Grupos de Lie compactos são redutíveis. A diferença entre os casos redutível e semi-simples é essencialmente uma estrutura abeliana central que, em geral, se manifesta a partir de algum toro, podendo ser estudada à parte.

Tais considerações nos motivam a voltar a atenção para o caso semi-simples.

[a] Ver [Arvanitoyeorgos, 2003, Sec.1.6] e [Hall, 2015, Sec.3.8].
[b] Ver [Hall, 2015, Cor.4.31].
[c] Ver [Schueth, 2017, Ex.3.8].

Representações e Sistemas de Raízes

Definição A.1.23. Considere R um subconjunto finito, de elementos não nulos, em um espaço vetorial real r-dimensional E com produto interno (também denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

1. Dado $0 \neq \alpha \in E$, denotamos $\alpha^\vee := \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$; $R^\vee := \{\alpha^\vee;\ \alpha \in R\}$; consideramos a reflexão no hiperplano $\alpha^\perp$ definida por $s_\alpha : E \ni H \mapsto H - \langle H, \alpha^\vee \rangle \alpha \in E$; e W o subgrupo de $O(E)$ gerado por $\{s_\alpha \mid \alpha \in R\}$. Os elementos de R (resp. $R^\vee$) são ditos *raízes* (resp. *co-raízes*) de (E, R).

2. Dizemos que (E, R) (ou simplesmente R) é um *sistema de raízes*, com *grupo de Weyl* W, se: (i) $\text{span}_{\mathbb{R}} R = E$; (ii) $\langle R, R^\vee \rangle \subset \mathbb{Z}$; (iii) $W(R) \subset R$, isto é, R é W-invariante. (E, R) é dito *reduzido*[a] se satisfizer a seguinte condição adicional: (iv) para todos $\alpha \in R$ e $c \in \mathbb{R}$, $c\alpha \in R$ se, e somente se, $c = \pm 1$.

3. Sejam (E_i, R_i), $i = 1, 2$, sistemas de raízes. Então:

   a) $(E_1 \oplus E_2, R_1 \cup R_2)$ é dito *soma direta de sistemas de raízes*.

   b) Se existe um isomorfismo linear $L : E_1 \to E_2$ tal que $L(E_1) = E_2$ e para todos $\alpha \in R$ e $H \in E_1$, $L(s_\alpha H) = s_{L\alpha}(LH)$, então L é dito um *isomorfismo de sistemas de raízes*.

4. Seja (E, R) um sistema de raízes. Então:

   a) (E, R) é dito *irredutível* se não puder ser decomposto em somas diretas (não-triviais) de sistemas de raízes.

   b) Se existe um isomorfismo linear $L : E_1 \to E_2$ tal que $L(E_1) = E_2$ e para todos $\alpha \in R$ e $H \in E_1$, $L(s_\alpha H) = s_{L\alpha}(LH)$, então L é dita uma *equivalência de sistemas de raízes* (não exigimos que L preserve os produtos internos).

c) Seja C qualquer componente conexa do conjunto $E - \bigcup_{\alpha\in R}\alpha^{\perp}$. Então C é dita uma *câmara de Weyl*. Os elementos de C (resp. do interior de C) são ditos *C-dominantes* (resp. *C-estritamente dominantes*).

d) O fecho convexo de um subconjunto finito $A \subset E$ é denotado por Convex(A).

e) Dizemos que β é uma *base* para (E, R) se: (i) $\text{span}_{\mathbb{R}}\beta = E$; (ii) β é linearmente independente; (iii) para todo $\alpha \in R$, α é uma combinação linear de inteiros não-positivos (e neste caso α é dita uma *raiz negativa*) ou é uma combinação linear de inteiros não-negativos (e neste caso α é dita uma *raiz positiva*). O conjunto das raízes positivas (resp. negativas), com respeito à base β, é denotado por R^+ (resp. R^-). Escrevemos $\delta := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R^+} m_\alpha\alpha$, a *meia soma de raízes positivas*, onde m_α é a multiplicidade da raiz α. Para todos $\mu, \lambda \in E$, a notação $\lambda \leq \mu$ significa que $\mu - \lambda$ é uma combinação linear de escalares não negativos de β, induzindo uma ordem parcial em E denominada como *ordem lexográfica relativa à β*.

f) $\Lambda := \sum_{\alpha\in R}\mathbb{Z}\cdot\alpha$ é dito *reticulado de raízes* e Λ^* denota seu reticulado dual.[b]

g) $\mathcal{I} := \sum_{\alpha\in R}\mathbb{Z}\cdot\alpha^\vee$ é dito *reticulado de co-raízes* e $\mathcal{I}^*$ denota seu reticulado dual. Os elementos de $\mathcal{I}^*$ são ditos *algebricamente integrais*.

h) Assuma (E, R) reduzido com base $\beta := \{\alpha_k\}_{k=1}^r$. Os elementos de $\beta^{\vee *} := \{\mu_j\}_{j=1}^r$, dados pela propriedade $\langle\mu_j, \alpha_k^\vee\rangle = \delta_{jk}$, são ditos *pesos fundamentais relativos à β*.

[a] Não confundir com o termo *redutível*, o qual é a negação da noção de irredutibilidade!

[b] Se Γ é um reticulado de E então $\Gamma^* := \{H \in E;\ \langle H, \Gamma\rangle \subset \mathbb{Z}\}$ é o reticulado dual de Γ.

Definição A.1.24. Seja $\mathfrak{h} := \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ com $\mathfrak{t}$ subálgebra abeliana maximal em $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, com G compacto, e $(\pi, V) \in \text{Rep}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$. Fixe qualquer produto interno como na Proposição A.1.21, item 2.

1. Para cada $\mu \in \mathfrak{h}$, defina $V_\mu := \{v \in V;\ \ \forall H \in \mathfrak{h},\ \pi(H)v = i\langle H, \mu\rangle v\}$.

2. Dizemos que $\mu \in \mathfrak{h}$ é um *peso de π* se $V_\mu \neq \{0\}$; $\dim_{\mathbb{C}} V_\mu$ é dita a *multiplicidade de μ*. Se π é induzida por alguma $\Pi \in \text{Rep}(G, \mathbb{C})$, então dizemos que tais pesos são também pesos de Π. Em ambos os casos, os pesos também são denominados por *pesos de V*.

3. Os pesos não nulos da representação adjunta são chamados de *raízes de* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

4. O *núcleo da exponencial de Lie de* G é definido por $\Gamma_G := \{H \in \mathfrak{t};\ \exp(2\pi H) = e\}$ e os elementos do conjunto $\Gamma_G^* := \{H \in \mathfrak{t};\ \langle H, \Gamma_G\rangle \subset \mathbb{Z}\}$ são ditos *analiticamente integrais*.

Proposição A.1.25. *Seja* $\mathfrak{h} := \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ *subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ *semi-simples (com forma real compacta* $\mathfrak{g}$ *contendo* $\mathfrak{t}$ *como um subálgebra abeliana maximal), e fixe um produto interno como na Proposição A.1.21, item 2. Se* $(\pi, V) \in Rep(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ *e* $\mu \in \mathfrak{h}$ *é um peso de* V*, então* $\mu \in \mathfrak{t}$ *e* $V_\mu = \{v \in V;\ \forall H \in \mathfrak{t},\ \pi(H)v = i\langle H, \mu\rangle v\}$.

Demonstração. Seja $\tilde{V}_\mu := \{v \in V;\ \forall H \in \mathfrak{t},\ \pi(H)v = i\langle H, \mu\rangle v\}$. Claramente $V_\mu \subset \tilde{V}_\mu$. Considere então $v \in \tilde{V}_\mu$. Sabemos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\mathfrak{t}$. Assim, para todos $H, H' \in \mathfrak{t}$, vale

$$\pi(H + iH')v = \pi(H)v + i\pi(H')v = i\langle H + iH', \mu\rangle v\ ,$$

de modo que $\mu \in V_\mu$.

A fim de mostrarmos que $\mu \in \mathfrak{t}$, faremos uma adaptação da demonstração de [Hall, 2015, Prop.7.14]. Pela Proposição A.1.21, existe um grupo compacto simplesmente conexo G tal que $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$, de modo que π é induzida por alguma $\Pi \in \mathrm{Rep}(G; \mathbb{C})$. Assim, pelo Exemplo A.1.15, existe um produto interno hermitiano em V tal que $\pi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{u}(V)$. Logo, para todo $H \in \mathfrak{t}$, o operador $\pi(H)$ é anti-hermitiano e contém apenas autovalores imaginários puros. Portanto, para todo $H \in \mathfrak{t}$, $\langle H, \mu\rangle$ é um escalar real e isso só pode acontecer se $\mu \in \mathfrak{t}$, uma vez que nosso produto interno hermitiano em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \supset \mathfrak{h}$ é real em $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{t}$. ■

O seguinte resultado diz que o estudo de álgebras de Lie complexas semi-simples é equivalente ao estudo de sistemas de raízes reduzidos. Mais ainda, a classificação destas se resume em conhecer a classificação das álgebras de Lie complexas simples, as quais são completamente caracterizadas pelos sistema de raízes reduzidos irredutíveis.

Teorema A.1.26. [a]

1. *Seja* A *uma álgebra de Lie complexa semi-simples com forma real compacta* $\mathfrak{g}$. *Fixemos* $\mathfrak{t}$ *uma*

subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{g}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ um produto interno ad$(\mathfrak{g})$-invariante. Defina $E := \mathfrak{t}$ e R é o conjunto de raízes reais de $\mathfrak{g}$. Então $R \subset E$ e (E, R) define um sistema de raízes reduzido, independente das escolhas de $\mathfrak{t}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$, a menos de equivalências. Tal sistema de raízes é dito o sistema de raízes induzido por $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. *Mais ainda, se $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_j \mathfrak{g}_j^{\mathbb{C}}$ é uma decomposição em álgebras simples, e (E_j, R_j) é o sistema de raízes induzido por $\mathfrak{g}_j^{\mathbb{C}}$ então $(E, R) = \bigoplus_j (E_j, R_j)$.*

2. *Se (E, R) é um sistema de raízes reduzido, então existe uma única álgebra complexa semi-simples A (a menos de isomorfismos) tal que (E, R) é o sistema de raízes induzido por A. Mais ainda, se $(E, R) = \bigoplus_j (E_j, R_j)$ então A se decompõe em álgebras de Lie simples $A = \bigoplus_j A_j$, onde cada A_j é a álgebra de Lie construída a partir de (E_j, R_j).*

3. *Sistemas de raízes reduzidos equivalentes induzem álgebras de Lie isomorfas e vice-versa. Além disso, sistemas de raízes reduzidos irredutíveis induzem álgebras de Lie simples e vice-versa.*

[a] Ver [Hall, 2015, Caps.7 e 8].

Motivados pela Proposição A.1.21, Observação A.1.22, Proposição A.1.25 e Teorema A.1.26, consideraremos, daqui por diante, G compacto semi-simples, com Lie$(G) = \mathfrak{g}$, fixando $\langle\cdot,\cdot\rangle$ um produto interno ad$(\mathfrak{g})$-invariante e $\mathfrak{t} = $ Lie(T) uma subálgebra abeliana maximal em $\mathfrak{g}$, proveniente de um toro maximal $T \subset G$, e ainda $(\mathfrak{t}, R)$ o sistema de raízes induzido por $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Teorema A.1.27. [a] *O sistema de raízes reduzido $(\mathfrak{t}, R)$, com grupo de Weyl $W \subset O(\mathfrak{t})$, satisfaz:*

1. *W é finito e $\mathfrak{t}$ é um W-módulo irredutível. Se $(\mathfrak{t}, R)$ é irredutível então seu produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é W-invariante e qualquer outro produto interno W-invariante é da forma de $c\langle\cdot,\cdot\rangle$, para alguma constante $c \geq 0$.* [b]

2. *O conjunto das câmaras de Weyl de $(\mathfrak{t}, R)$ está em bijeção com o conjunto das possíveis bases para $(\mathfrak{t}, R)$. W age livremente e transitivamente no conjunto das câmaras de Weyl e, consequentemente, no conjunto das bases para $(\mathfrak{t}, R)$.*

3. *$\Lambda \subset \Gamma_G^* \subset \mathcal{I}^*$ e $\mathcal{I} \subset \Gamma_G \subset \Lambda^*$.*

4. *$W(\mathcal{I}^*) = \mathcal{I}^*$ e $W(\Gamma_G^*) = \Gamma_G^*$.*

5. *Seja* $(\pi, V) \in$ *Rep*$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$*, então os pesos e as multiplicidades de* V *são* W*-invariantes. Suponha, adicionalmente, que* V *é irredutível e fixemos uma ordem lexográfica relativa a uma dada base* β*, com câmara de Weyl correspondente* C*. Então* V *admite um peso que é estritamente maior que todos os outros e é denotado por* μ^V*. Mais ainda,* $\mu^V \in C$ *e Pesos*$(V) =$ *Convex*$(W \cdot \mu^V) \cap \mathcal{I}^* \cap (\mu^V + \Lambda)$*.*

6. *Se* $(\Pi, V) \in$ *Irr*$(G, \mathbb{C})$*, então Pesos*$(V) \subset$ *Convex*$(W \cdot \mu^V) \cap \Gamma_G^*$*.*

Fixemos uma base $\beta = \{\alpha_k\}_{k=1}^r$ *para* $(\mathfrak{t}, R)$ *com câmara de Weyl correspondente* C *e ordem lexicográfica* $\leq$*. Denote o interior de* C *por* C^o *e considere os pesos fundamentais dados por* $\beta^{\vee *} = \{\mu_k\}_{k=1}^r$*. Então:*

7. *O reticulado de pesos fundamentais span*$_{\mathbb{Z}}\beta^{\vee *} = \sum_j \mathbb{Z}\, \mu_j$ *coincide com* $\mathcal{I}^*$*.*

8. *Para todo* $H \in \mathfrak{t}$*,* $(W \cdot H) \cap C$ *é um conjunto unitário.*

9. *A meia soma de raízes positivas* δ *satisfaz:*

   a) $\delta \in C^o \cap \mathcal{I}^*$*. Mais ainda, se* $\mu \in C^o \cap \mathcal{I}^*$*, então* $\mu \geq \delta$*.*

   b) *para todo* $w \in W$*,* $w \cdot \delta$ *é a meia soma de raízes positivas associada à base* $w \cdot \beta$*.*

   c) $\forall \alpha_i \in \beta$*,* $\langle \delta, \alpha_i^\vee \rangle = \frac{1}{2}\langle \alpha_i, \alpha_i^\vee \rangle = 1$*.*

10. *Para todos* $\mu, \lambda \in C$*,* $\mu \leq \lambda$ *se, e somente se, Convex*$(W \cdot \mu) \subset$ *Convex*$(W \cdot \lambda)$*.*

11. *(Teorema do peso maior) Seja* G *compacto semi-simples. Então*

    a) *Irr*$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ *está em bijeção com o conjunto* $C \cap \mathcal{I}^*$*;*

    b) *Irr*$(G, \mathbb{C})$ *está em bijeção com o conjunto* $C \cap \Gamma_G^*$*;*

    e, além disso, tais bijeções são obtidas a partir da correspondência $V \mapsto \mu^V$*. A correspondência inversa é denotada por* $\mu \mapsto V^\mu$*. Mais ainda, se* $V = V^\mu$*, então* μ *é dito o* peso maior de V *e o espaço de peso* V_μ*, associado a este peso maior, é unidimensional.*

12. *Dados* $\mu, \lambda \in C \cap \mathcal{I}^*$*, então* $V^{\mu+\lambda}$ *é uma sub-representação de* $V^\mu \otimes V^\lambda$*, também denotada por* $V^\mu * V^\lambda$*. A relação* $(\mu, \lambda) \mapsto V^\mu * V^\lambda$ *é dita* composta de Cartan*. Em particular, toda representação irredutível com peso maior* $\mu = \sum_k m_k \mu_k$ *é a composta de Cartan formada a partir*

de m_1 fatores V^{μ_1}, m_2 fatores V^{μ_2}, ..., e m_r fatores V^{μ_r}. Mais ainda, se V^μ e V^λ possuem aplicação de estrutura com índices $\varepsilon_\mu, \varepsilon_\lambda \in \{\pm 1\}$, então $V^\mu * V^\lambda$ admite aplicação de estrutura com índice $\varepsilon_\mu \varepsilon_\lambda$. Dada V irredutível arbitrária, $V * V^*$ sempre admite aplicação de estrutura de índice 1.

13. *Existe um único $w_0 \in W$ tal que $w_0(C) = -C$. Dado $\mu = \sum_k m_k \mu_k \in C \cap \mathcal{I}^*$, então*

    a) *$(V^\mu)^* = V^{-w_0 \cdot \mu}$. O peso μ é dito* auto-dual *se $\mu = -w_0 \cdot \mu$ ou, equivalentemente, se V^μ é auto-dual.*

    b) *para todo peso fundamental μ_k, temos que $\mu_{k^*} := -w_0 \cdot \mu_k$ é um peso fundamental, com o índice k^* unicamente definido. Além disso, V^μ é auto-dual se, e somente se, $m_k = m_{k^*}$ para todo $k \in \{1, \cdots, r\}$.*

    c) *Seja $Q := \{k\,;\quad k = k^* \text{ e } V^{\mu_k} \text{ é de tipo quaterniônico}\}$ e suponha μ auto-dual. Então V^μ é de tipo real (resp. quaterniônico) se $\prod_{k \in Q} (-1)^{m_k}$ é igual a 1 (resp. -1).*

14. *Seja G compacto. Então:*

    a) *o grupo fundamental de G é isomorfo ao quociente $\Gamma_G / \mathcal{I}$.*

    b) *$Z(G)$ é isomorfo ao quociente Λ^* / Γ_G.*

[a] Com exceção dos itens 12 e 13, os resultados acima podem ser consultados em [Hall, 2015, Parts.II e III]. Para os itens 12 e 13, veja [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.VI.4].

[b] Esta afirmação sobre produtos internos nos diz, em um certo sentido, que cada sistema de raízes irredutível possui um único produto interno essencialmente.

Elemento/Operador de Casimir

Seja G compacto semi-simples com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e produto interno hermitiano para $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, real em $\mathfrak{g}$ e $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-invariante. Suponha ainda $(\mathfrak{t}, R)$ o sistema de raízes associado a $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, fixando uma câmara de Weyl C e com meia soma de raízes positivas $\delta \in C$. Defina $(X \cdot Y)(f) := X(Y(f))$ e $X^0 := \mathrm{id}_{C^\infty(G, \mathbb{C})}$, para todos $X, Y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ e $f \in C^\infty(G, \mathbb{C})$.

Definição A.1.28. [a] Seja $\{X_k\}_{k=1}^m$ uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$. Então as aplicações diferenciais $X_{i_1} \cdots X_{i_N}$, para $i_j \in \{1, \cdots, m\}$ e $N \in \mathbb{N}$, formam uma base de uma álgebra complexa com unidade, denominada *álgebra universal envelopante* e denotada por $U(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$.[b] O elemento

$\mathcal{C} := -\sum_k X_k^2$ independe da base ortonormal escolhida e é dito *elemento* (ou *operador*) *de Casimir*. Dado $\mu \in C \cap \mathcal{I}^*$, defina $a_\mu := \langle \mu + \delta, \mu + \delta \rangle^{1/2}$. O escalar $c_\mu := a_\mu^2 - \langle \delta, \delta \rangle$ é dito *autovalor de Casimir* de μ ou *fórmula de Freudenthal para* V^μ.

[a] Para mais detalhes a respeito das construções nesta definição, veja [Hall, 2015, Secs.9.3 e 10.2].

[b] A soma e multiplicação escalar de $U(\mathfrak{g})$ é induzida pelas operações em $C^\infty(G, \mathbb{C})$, definidas pontualmente. Note que $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ está naturalmente mergulhada em $U(\mathfrak{g}^\mathbb{C})$.

Proposição A.1.29. [a] *Seja $(\pi, V) \in Rep(\mathfrak{g}^\mathbb{C}, \mathbb{C})$ com peso maior $\mu := \mu^V$ e considere as notações descritas acima.*

1. *O homomorfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g}^\mathbb{C} \to \mathfrak{gl}(V)$ se estende unicamente a um homomorfismo de álgebras com unidade $\pi : U(\mathfrak{g}^\mathbb{C}) \to End(V)$. O operador $\pi(\mathcal{C}) \in End(V)$ é dito* Casimir em V.

2. *Se V é irredutível, então $\pi(\mathcal{C}) = -\sum_k \pi(X_k)^2 = c_\mu \, id_V$.*

[a] Ver [Hall, 2015, Secs.9.3 e 10.2].

Representações laterais regulares e decomposições de Peter-Weyl

Por simplicidade desenvolveremos as construções a seguir sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mas todas elas possuem adaptação natural para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Por [Arvanitoyeorgos, 2003, Sec.2.1], todo grupo de Lie compacto G admite uma noção de integração natural $\int_G (\cdot) dg$, dita *integral de Haar*, a qual satisfaz para todos $x \in G$ e $f \in C^\infty(G)$: (i) Se $f \equiv 1$, então $\int_G f(g)dg = 1$; (ii) Se $f \geq 0$, então $\int_G f(g)dg \geq 0$; (iii) (bi-invariância) $\int_G f(g)dg = \int_G f \circ \ell_x(g)dg = \int_G f \circ r_x(g)dg$.

A integral de Haar induz um produto interno $\langle f_1, f_2 \rangle_{L^2} := \int_G f_1 \bar{f}_2$ em $C^0(G, \mathbb{C})$, cujo completamento é denotado por $L^2(G, \mathbb{C})$.

Definição A.1.30. Fixe $A \in \{\mathfrak{g}, G\}$. Considere (ρ, U) e (ξ, V) duas representações de A com V irredutível. A *componente V-isotípica de U* é definida como a soma direta de todas as sub-representações de U isomorfas a V e é denotada por $\mathrm{Isot}_\rho(V)$.

Dado $K \subset A$, definimos $U^K := \{u \in U;\ \forall a \in K,\ a \cdot u = u\}$.

As *representações regulares à esquerda (L) e à direita (R)* são os homomorfismos de grupos

$L, R : G \to GL(L^2(G,\mathbb{C}))$ dados por: $L(x)f := f \circ \ell_{x^{-1}}$ e $R(x)f := f \circ r_x$, para todos $x \in G$ e $f \in L^2(G,\mathbb{C})$. Definimos ainda a $(G \times G)$-*representação bilateral* $LR : G \times G \to GL(L^2(G,\mathbb{C}))$ por $(LR)(x,y)f := L(x)R(y)f$.

Obs.: Note que $\mathrm{Hom}_G(V,U) = (\mathrm{Hom}(V,U))^G$.[7]

Teorema A.1.31. [a] *Seja $V \in Irr(G,\mathbb{C})$. Valem:*

1. *$Isot_L(V^*) = Isot_R(V)$ é uma $(G\times G)$-sub-representação da representação bilateral $L^2(G,\mathbb{C})$. Mais ainda, a decomposição*

$$\bigoplus_{V\in\widehat{G}} Isot_L(V^*) = \bigoplus_{V\in\widehat{G}} Isot_R(V)$$

está contida em $C^\infty(G,\mathbb{C})$ e forma um subespaço denso de $L^2(G,\mathbb{C})$. Tal soma direta é denominada decomposição de Peter-Weyl *para $L^2(G,\mathbb{C})$.*

2. *Dados $v \in V$ e $\eta \in V^*$ defina $f_{\eta,v}(x) := \eta(x \cdot v)$, para todo $x \in G$. Então a aplicação definida por extensão linear a partir da regra $\varphi_V : V^* \otimes V \ni \eta \otimes v \mapsto f_{\eta,v} \in Isot_R(V)$ é um isomorfismo de $(G \times G)$-representações. Os isomorfismos $\{\varphi_V\}_{V\in\widehat{G}}$ induzem um $(G \times G)$-isomorfismo:*

$$\varphi : \bigoplus_{V\in\widehat{G}} V^* \otimes V \to \bigoplus_{V\in\widehat{G}} Isot_R(V)$$

3. *$\mathcal{J}_V : Hom_G(V, L^2(G,\mathbb{C})) \otimes V \ni F \otimes v \mapsto F(v) \in Isot_L(V)$, definida por extensão linear, é um isomorfismo de G-representações. Os isomorfismos $\{\mathcal{J}_V\}_{V\in\widehat{G}}$ induzem um G-isomorfismo:*

$$\mathcal{J} : \bigoplus_{V\in\widehat{G}} Hom_G(V, L^2(G,\mathbb{C})) \otimes V \to \bigoplus_{V\in\widehat{G}} Isot_L(V)$$

[a] Ver [Bröcker and tom Dieck, 1985, Cap.III].

A.2 Espaços homogêneos e espaços simétricos

Os grupos de Lie formam uma subclasse de uma importante classe de variedades diferenciáveis – os *espaços homogêneos*. Um espaço homogêneo pode ser enxergado como

[7] Ver [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.II.4].

uma variedade munida de uma G-ação transitiva ou, equivalentemente, um quociente entre grupos de Lie G/K, munido da ação induzida pelas translações à esquerda de G. Este último formato é o que é mais conveniente para nós. Há ainda uma construção intermediária – *os espaços simétricos* – os quais, por sua vez, generalizam as formas espaciais de curvatura constante e possuem caracterizações algébricas muito similares às da Seção A.1. Exploraremos estas e contamos com as seguintes referências auxiliares: [Arvanitoyeorgos, 2003, Bröcker and tom Dieck, 1985, Caselle and Magnea, 2004, Eschenburg, 2016, Gilmore, 2008, Gorodski, 2021, Helgason, 2001, Helgason, 2022, Petrecca and Röser, 2018].

Nesta seção, estudaremos variedades compactas da forma $M = G/K$, com K um subgrupo de Lie fechado de G.

Espaços homogêneos e representações esféricas

Definição A.2.1. Seja K um subgrupo de Lie fechado em G, agindo à direita por translações via $G \times K \ni (x, k) \mapsto xk \in G$. Considere o espaço de classes laterais $M := G/K$ munido da única estrutura de variedade tal que a aplicação quociente $G \to G/K$ é uma submersão. Então M é dito um *espaço homogêneo* com G-ação $G \times M \ni (x, yK) \mapsto x \cdot yK := (xy)K \in M$. O elemento $eK \in M$ também é denotado por o. Se $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ admite uma decomposição da forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, onde $\mathfrak{k} := \mathrm{Lie}(K)$ e $\mathfrak{m}$ é canonicamente isomorfo a T_oM satisfazendo $\mathrm{Ad}(K)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ (i.e. $\mathfrak{m}$ é $\mathrm{Ad}(K)$-invariante), então dizemos que M *se reduz a* $\mathfrak{m}$.[a] Todos os pares (G', K') com K' fechado em G' e $G'/K' \simeq M$ são ditos *pares algébricos para* M.

Suponha $M = G/K$ um espaço homogêneo que se reduz a $\mathfrak{m}$. Então a restrição da aplicação adjunta de G dada por $\mathrm{Ad} : K \to GL(\mathfrak{m})$ (ou $\mathfrak{m}$ munida da ação $\mathrm{Ad}\,|_K$) é dita *representação de isotropia* de K e é denotada por Ad^M. Se Ad^M é uma representação irredutível, dizemos que M é *isotropicamente irredutível*. A K-ação em $\mathfrak{m}$ induzida por Ad^M se estende unicamente para uma K-ação em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ (por argumento simples de complexificação) de modo que, munida desta, $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ recebe o nome de *K-representação de isotropia complexificada*.

[a] Aqui, Ad denota a representação adjunta de G.

Seja M uma variedade munida de uma G-ação μ. Uma métrica é dita *G-invariante* se para cada $x \in G$, a ação de x dada pelo difeomorfismo μ_x é uma isometria e, neste caso, tal ação é dita *isométrica*.

Sejam $\{X_i\}_{i\in I}$ espaços topológicos, cada um deles munido de uma G-ação. Uma aplicação $f : \prod_{i\in I} X_i \to Y$ é dita *G-invariante* se $f(g \cdot x_i)_{i\in I} = f(x)$ para todos $g \in G$, $x_i \in X_i$ e $i \in I$.

Teorema A.2.2. [a] *Seja $M = G/K$ um espaço homogêneo, com Lie$(G) = \mathfrak{g}$ e Lie$(K) = \mathfrak{k}$. Denote por Ad^A a representação adjunta de $A \in \{G, K\}$.*

1. $\dim M = \dim G - \dim K$ *e, para todo $p \in M$, a G-órbita $G \cdot p := \{x \cdot p\,;\ x \in G\}$ é igual a M. Em outras palavras, a G-ação de M é transitiva.*
2. *Seja X uma variedade riemanniana e suponha que Isom(X) age transitivamente em X. Então X é um espaço homogêneo difeomorfo a Isom$(X)/$ Isom$(X)_x$, para qualquer ponto $x \in X$ fixado. Neste caso, X é dito um* espaço homogêneo riemanniano. *Mais ainda, Isom$(X)_x$ é compacto e vale que X é compacto se, e somente se, Isom(X) é compacto.*
3. *Se G é compacto então M se reduz a $\mathfrak{m}$ e K é o subgrupo de isotropia $G_p := \{k \in G;\ k \cdot p = p\}$ de algum ponto $p \in M$. Além disso, toda $(\Sigma, U) \in$ Irr$(K, \mathbb{C})$ é a restrição a K de alguma $(\Pi, V) \in$ Irr$(G, \mathbb{C})$.*
4. *Se M admite uma métrica riemanniana G-invariante, então M se reduz a $\mathfrak{m}$.*
5. *Suponha que M se reduz a $\mathfrak{m}$, com K-representação de isotropia $\mathfrak{m}$ (K-ação dada por Ad^M). Então:*
   a) Ad$^G|_K =$ Ad$^K \oplus$ Ad$^M : K \to GL(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m})$.
   b) *As métricas G-invariantes sobre M estão em bijeção com os produtos internos reais Ad^M-invariantes sobre $\mathfrak{m}$. Mais geralmente, há uma bijeção entre os (p, q)-campos tensoriais G-invariantes em M e os (p, q)-tensores Ad^M-invariantes em $\mathfrak{m}$.*
   c) *Suponha G conexo e compacto. Então as métricas G-invariantes sobre M estão em bijeção com as métricas $(G \times K)$-invariantes sobre G, onde G age por translações à esquerda e K age por translações à direita. Além disso, as métricas $(G \times K)$-invariantes sobre G estão*

em bijeção com produtos internos reais Ad_K-invariantes em $\mathfrak{g}$, cada um deles se estendendo unicamente a um produto interno hermitiano em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

d) *Suponha G compacto semi-simples. Então M admite uma métrica G-invariante proveniente de um produto interno G-invariante em $\mathfrak{g}$ com respeito a ação adjunta Ad^G. Neste caso, $\mathfrak{m}$ se identifica como $\mathfrak{k}^{\perp}$ e tal métrica é dita* normal. *M, munido de uma métrica normal, é dito um* espaço homogêneo normal.

e) *Suponha K compacto e considere g_0 um produto interno Ad_G-invariante de $\mathfrak{g}$. Suponha $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^{\perp}$ com respeito a g_0. Então as métricas G-invariantes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre M estão em bijeção com os operadores $F \in Hom_K(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ (K-equivariantes com respeito à ação de Ad^K) que são g_0-simétricos com autovalores positivos. A correspondência se dá pela identidade $\langle X, Y \rangle = g_0(F^{-1}X, Y)$ para todos $X, Y \in \mathfrak{m}$.*

[a] Ver [Arvanitoyeorgos, 2003, Caps. 4 e 5], [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.III.4] e [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1].

Assuma M um espaço homogêneo compacto expresso por um par algébrico (G, K) com G compacto. Lembremos a notação $V^K := \{v \in V;\ K \cdot v = \{v\}\}$. De modo similar ao caso de grupos, é possível construir o espaço $L^2(G/K, \mathbb{C})$ como L^2-completamento do espaço de funções complexas contínuas (ou suaves) sobre $M = G/K$.

Definição A.2.3. Seja $V \in \widehat{G}$. Se $\dim V^K > 0$, então V é dita *esférica com respeito ao par* (G, K). $\widehat{G}_K$ denotará o subconjunto de $\widehat{G}$ formado a partir das representações irredutíveis de G, esféricas com respeito a (G, K).

Dizemos que K é um subgrupo esférico com respeito a G se cada $V \in \widehat{G}_K$ satisfaz $\dim V^K = 1$ e, neste caso, dizemos que (G, K) é um *par esférico*.

A regra $(L^K(x)f)(yK) := f(x^{-1}yK)$ e $(R^K(y)f)(xK) := f(xyK)$, para $x, y \in G$, $f \in L^2(G/K, \mathbb{C})$ definem ações L^K e R^K induzidas pelas translações à esquerda e à direita de G, respectivamente, sobre $L^2(G/K, \mathbb{C})$.

As construções do Teorema A.1.31 referentes à decomposição de Peter-Weyl possuem um análogo para o espaço $L^2(G/K, \mathbb{C})$, mediante uma construção conhecida como *reciprocidade de Frobenius*. Note que todo G-módulo pode ser visto como um K-módulo, restringindo a ação de G ao subgrupo K.

Teorema A.2.4. [a] *Seja $V \in Irr(G, \mathbb{C})$. Valem:*

1. *(reciprocidade de Frobenius) Considere $L^2(G,\mathbb{C})^K = \{f \in L^2(G,\mathbb{C});\ \forall k \in K,\ R(k)f = f\}$. Então $L^2(G,\mathbb{C})^K$ é um G-submódulo de $L^2(G,\mathbb{C})$, munido da ação L induzida pelas translações à esquerda, canonicamente isomorfo a $L^2(G/K,\mathbb{C})$, com ação L^K. Vale o isomorfismo canônico de espaços vetoriais $Hom_G(\,V\,,\,L^2(G/K,\mathbb{C})\,) \simeq Hom_K(V,\mathbb{C}) = (V^*)^K$. Por fim, temos a identificação $Hom_G(\,V\,,\,L^2(G,\mathbb{C})^K\,) \simeq (V^*)^K$.*

2. *$\mathcal{J}_V : Hom_G(V, L^2(G/K,\mathbb{C})) \otimes V \ni F \otimes v \mapsto F(v) \in Isot_{L^K}(V)$, definida por extensão linear, é um G-isomorfismo. Os isomorfismos $\{\mathcal{J}_V\}_{V\in\widehat{G}}$ induzem um G-isomorfismo:*

$$\mathcal{J} : \bigoplus_{V^*\in\widehat{G}_K} Hom_G(V, L^2(G/K,\mathbb{C})) \otimes V \to \bigoplus_{V^*\in\widehat{G}_K} Isot_{L^K}(V) \subset C^\infty(G/K,\mathbb{C})$$

   com imagem densa em $L^2(G/K,\mathbb{C})$, dita decomposição de Peter-Weyl para $L^2(G/K,\mathbb{C})$.

3. *Consideremos a ação trivial de G em V^K, isto é, cada elemento de G age como id_{V^K}. Então $Isot_{L^K}(V^*)$ é canonicamente isomorfo ao G-módulo $V^K \otimes V^*$.*

[a] Ver [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.III.6] e [Petrecca and Röser, 2018, Sec.1].

Espaços homogêneos normais

Seja $M = G/K$ um espaço homogêneo, com G compacto semi-simples, munido de uma métrica G-invariante g. Pelo Teorema A.2.2, sabemos que g corresponde a uma métrica $(G \times K)$-invariante $\tilde{g}$, sobre G. Se supomos que a métrica $\tilde{g}$ é, adicionalmente, $(G \times G)$-invariante (isto é, bi-invariante sobre G), então (M, g) é dito um *espaço homogêneo normal*.

A métrica associada a $-B$, isto é, ao negativo da forma de Killing, é dita *métrica riemanniana homogênea padrão*.

Espaços simétricos e sistemas de raízes não-reduzidos

Eis uma das possíveis formas equivalentes de se definir um espaço simétrico[8]:

[8] Ver, por exemplo, [Arvanitoyeorgos, 2003].

Definição A.2.5. Dada $\sigma : G \to G$, denote por G_o a componente conexa de G e $G^\sigma := \{x \in G;\ \sigma(x) = x\}$. Um espaço homogêneo M que se reduz a $\mathfrak{m}$, munido de uma métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$, é dito um *espaço simétrico* se admite um par algébrico (G, K), com G conexo, e um automorfismo suave $\sigma : G \to G$ satisfazendo as seguintes condições:

1. $M = G/K$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica G-invariante.
2. $\sigma^2 = \mathrm{id}_G$, isto é, σ é um automorfismo involutivo.
3. $\sigma_* := d\sigma_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma involução satisfazendo $\sigma_*|_{\mathfrak{k}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{k}}$ e $\sigma_*|_{\mathfrak{m}} = -\,\mathrm{id}_{\mathfrak{m}}$.
4. G^σ e K são subgrupos fechados de G satisfazendo $G^\sigma_o \subset K \subset G^\sigma$.

Neste caso, (G, K) é dito um *par simétrico* para M. Dizemos que M é *irredutível* (como espaço simétrico) se M não pode ser expresso como produto cartesiano não trivial de outros espaços simétricos.

Observação A.2.6. Conforme mencionado em [Petrecca and Röser, 2018, Sec. 3], todo par simétrico é também um par esférico, ou seja, pares esféricos generalizam pares simétricos (é possível exibir exemplos de um pares esféricos que não são pares simétricos). Existem ainda espaços homogêneos que não são pares esféricos (inclusive, espaços homogêneos normais que não são pares esféricos).

Outra observação relevante é que os espaços homogêneos normais podem ser entendidos como uma classe intermediária entre os espaços homogêneos gerais e os espaços simétricos, visto que as métricas de espaços simétricos também têm natureza bi-invariante.

Antes de prosseguirmos, relembremos as construções entre a Definição A.1.23 e o Teorema A.1.27 e assumamos $M = G/K$ um espaço simétrico, com G compacto semi-simples, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ e $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$. Suponha que $\mathfrak{m}$ é tomado como complemento ortogonal $\mathfrak{k}^\perp$ com respeito a um produto interno $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-invariante g_0 (como a forma de Killing negativa $-B$ de $\mathfrak{g}$, por exemplo). Fixemos ainda uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ para $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ com sistema de raízes $(\mathfrak{t}, R_{\mathfrak{g}})$ associado. Denote por $((\cdot, \cdot))$ o produto interno real de $(\mathfrak{t}, R_{\mathfrak{g}})$ proveniente de g_0.

A decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ induz uma decomposição ortogonal $\mathfrak{t} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a}$ onde $\mathfrak{a}$ é um subespaço de $\mathfrak{m}$ abeliano maximal, isto é, nenhum outro subespaço abeliano de $\mathfrak{m}$ contém $\mathfrak{a}$ propriamente.

A ideia agora é construir um sistema de raízes sobre $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ (o qual em geral não será reduzido mas possui propriedades bastantes similares aos sistemas de raízes reduzidos) e ver como este novo sistema de raízes se relaciona com o sistema de raízes $(\mathfrak{t}, R_{\mathfrak{g}})$ advindo de $\mathfrak{g}$. As raízes desse novo sistema serão, no fim das contas, certas restrições das raízes de $(\mathfrak{t}, R_{\mathfrak{g}})$. Além disso, veremos pelo chamado *Teorema de Cartan-Helgason* que esta é a construção propícia para entender as representações esféricas do par (G, K) em termos da linguagem de pesos.

Definição A.2.7. Dados $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ e $\tilde{\mu} \in \mathfrak{a}$, e considerando as notações acima para o par simétrico (G, K), definimos $\widetilde{V}_{\tilde{\mu}} := \{v \in V;\ \ \forall H \in \mathfrak{a},\ \pi(H)v = i\,((H, \tilde{\mu}))\,v\}$. Se $\widetilde{V}_{\tilde{\mu}} \neq \{0\}$ então $\tilde{\mu}$ é dito um *peso restrito* para V. Os pesos restritos não-nulos da representação adjunta de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ são ditos *raízes restritas*. O conjunto das raízes restritas é denotado por $R_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}}$. Dado $\mu \in \mathfrak{t}$, denotamos ainda por $\mu_{\mathfrak{a}}$ a projeção ortogonal de μ em $\mathfrak{a}$. A dimensão (real) de $\mathfrak{a}$ é denominada *rank* de M e $\mathfrak{a}$ é dito um subespaço de Cartan para M.

Teorema A.2.8. [a] *Seja (G, K) um par simétrico para M compacto, com G compacto semi-simples.*

1. *$(\mathfrak{a}, R_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}})$, com produto interno $((\cdot,\cdot))$, é um sistema de raízes.*[b]

2. *$R_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}} = \{\alpha_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a} - \{0\};\ \alpha \in R_{\mathfrak{g}}\}$. Além disso, se β é uma base para $(\mathfrak{t}, R_{\mathfrak{g}})$, então o conjunto $\tilde{\beta} := \{\alpha_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a} - \{0\};\ \alpha \in \beta\}$ forma uma base para $(\mathfrak{a}, R_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}})$.*

3. *A multiplicidade de uma raiz restrita $\tilde{\alpha}$ é igual a cardinalidade do conjunto $\{\mu \in R_{\mathfrak{g}}\,;\ \mu_{\mathfrak{a}} = \tilde{\alpha}\}$.*

4. *(Cartan-Helgason) Seja $V^{\mu} \in \widehat{G}$ a representação com peso maior μ. Então V^{μ} é esférica com respeito a (G, K) se, e somente se, valem: (i) $\mu = \mu_{\mathfrak{a}}$; e (ii) para toda raiz restrita positiva $\tilde{\alpha}$, o escalar $((\mu, \tilde{\alpha}^{\vee}))$ é um inteiro não negativo.*

5. *Suponha que G e G/K são simplesmente conexos. Fixemos $\tilde{\beta} = \{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{\ell}\}$ uma base para*

$(\mathfrak{a}, R_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}})$. *Então existem* $\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_\ell \in \mathfrak{a}$ *linearmente independentes tais que: (i) o conjunto de combinações lineares de* $\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_\ell$ *por inteiros não negativos está em correspondência biunívoca com* $\widehat{G}_K$*; (ii) para todos* $j, k \in \{1, \ldots, \ell\}$*, vale que* $((\tilde{\mu}_j, \epsilon_k \tilde{\alpha}_k^\vee)) = \delta_{jk}$*, onde* ϵ_k *vale* 2 *ou* 1 *a depender de* $2\tilde{\alpha}_k$ *ser ou não uma raiz restrita, respectivamente. Os vetores* $\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_\ell$ *são ditos* pesos restritos fundamentais.

6. *Todo grupo de Lie compacto* H *com métrica bi-invariante*[c] *é um espaço simétrico que pode ser expresso como* $(H \times H)/\Delta H$ *onde* ΔH *é o subgrupo diagonal difeomorfo a* H *e a involução é dada por* $\sigma(x, y) = (x, y^{-1})$*, para* $x, y \in H$*. A ação de* $H \times H$ *em* $(H \times H)/\Delta H$ *é dada por* $(x, y) \cdot z\Delta H = (x^{-1}zy)\Delta H$.

[a] Ver [Petrecca and Röser, 2018, Sec.2].

[b] Em geral este sistema de raízes não é reduzido uma vez que dada uma raiz restrita $\tilde{\alpha}$, também podem ocorrer como raízes restritas os múltiplos da forma $\pm 2\tilde{\alpha}, \pm \frac{1}{2}\tilde{\alpha}$.

[c] Uma métrica g de H é bi-invariante se todas as translações a esquerda e à direita de H são g-isometrias. Ou seja g é $(H \times H)$-invariante, onde $H \times H$ age em H por translações à esquerda no primeiro fator e por translações à direita no segundo.

A.3 Decomposições de Peter-Weyl mais gerais

As construções presentes nos Teoremas A.1.31 e A.2.4 possuem outras situações análogas para espaços funcionais mais gerais e abstratos. Exploremos um pouco.

Assuma H um espaço vetorial de Hausdorff complexo, localmente convexo, completo e com topologia induzida por uma família de seminormas.[9] Suponha que H está munido de uma G-ação linear contínua, $C^0(G, H)$ com a *compact-open topology* e $C^0(G, \mathbb{C})$ com a norma do supremo e integral de Haar.

Lembramos que a *convolução* em $C^0(G, \mathbb{C})$, dada por $(f_1 * f_2)(x) := \int_G f_1(xg^{-1}) f_2(x) dg$, torna $C^0(G, \mathbb{C})$ uma álgebra de Banach, isto é, a convolução é um produto bilinear associativo tal que $|f_1 * f_2| \leq |f_1| \cdot |f_2|$ para todas funções $f_1, f_2 \in C^0(G, \mathbb{C})$.

Veremos a seguir que é possível construir uma noção de integração sobre o G-módulo H e uma $C^0(G, \mathbb{C})$-ação sobre H, as quais se assemelham muito à integração de Haar e ao produto de convolução.

[9] Todo espaço de Banach ou de Hilbert, por exemplo, satisfaz essas hipóteses.

Lema A.3.1. [a] *Existe uma função* $\int_G : C^0(G,H) \to H$ *tal que para toda seminorma contínua* $p : H \to \mathbb{R}$*, para todo operador linear contínuo* $\phi : H \to H$ *e todos* $f, f_i \in C^0(G,\mathbb{C})$*,* $F \in C^0(G,H)$*,* $h \in H$ *e* $x \in G$ *valem*

1. $\int_G : C^0(G,H) \to H$ *é linear contínua.*
2. *(bi-invariância)* $\int_G F \circ \ell_x = \int_G F \circ r_x = \int_G F$*. Além disso,* $\int_G F(g)dg = \int_G F(g^{-1})dg$*.*
3. $\int_G h = h$ *(identificando* h *como uma função constante).*
4. $p(\int_G F) \leq \int_G p(F(g))dg$ *e* $\phi(\int_G F) = \int_G \phi(F(g))dg$*.*
5. $f * h := \int_G f(g)(g \cdot h)dg$ *define uma aplicação bilinear contínua* $C^0(G,\mathbb{C}) \times H \to H$*, satisfazendo* $x \cdot (f * h) = (L_x f) * h$ *e* $(f_1 * f_2) * h = f_1 * (f_2 * h)$*.*

[a] Ver [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.III.5].

Teorema A.3.2. [a] *Denotemos* H_{fin} *o* G*-submódulo de* H *gerado por todos os submódulos de dimensão finita em* H *e considere as construções do lema anterior. O* caractere de um G-módulo (Σ, U), *de dimensão finita, é definido por* $\chi_U : G \ni x \mapsto tr(\Sigma(x)) \in \mathbb{C}$*. Considere ainda* $(\Pi, V) \in \widehat{G}$*,* $e_V := \dim_{\mathbb{C}} V \cdot \overline{\chi_V}$ *e* $P_{\chi_V} : H \ni h \mapsto e_V * h \in H$*.*

1. H_{fin} *é denso em* H*. Além disso, se* H *é irredutível, então* H *é de dimensão finita.*
2. *Se* H *é um espaço de Hilbert, então* P_{χ_V} *é a projeção ortogonal sobre um subespaço fechado de* H*, o qual aqui denotamos por Isot*(χ_V)*, tendo a propriedade de ser o menor subespaço fechado de* H *contendo todos os* G*-submódulos irredutíveis com mesmo caractere* χ_V*. Além disso, se* χ_1 *e* χ_2 *são caracteres distintos provenientes de representações irredutíveis de* G*, então Isot*(χ_1) *e Isot*(χ_2) *são ortogonais. Por fim,* $\bigoplus_{V \in \widehat{G}}$ *Isot*(χ_V) *forma uma soma de Hilbert densa em* H*.*

[a] Ver [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.III.5].

Podemos combinar o teorema precedente com uma versão mais geral da reciprocidade de Frobenius. Consideremos então K um subgrupo fechado de G. Assuma agora que U é um K-módulo com escalares complexos e com ação linear contínua.

Definição A.3.3. O G-submódulo de $C^0(G,U)$,

$$\mathrm{Ind}_K^G\, U := \{f \in C^0(G,U);\ \forall k \in K,\ x \in G,\ f(xk) = k^{-1} f(x)\},$$

munido da G-ação definida por $L_x \cdot f := f \circ \ell_{x^{-1}}$ para todos $x \in G$ e $f \in C^0(G,U)$, é conhecido como o *G-módulo induzido pelo K-módulo U*, também denotado por $C^0(G,K;U)$.

Defina $G \times_K U := \{[y,u]\,;\ y \in G,\ u \in U\}$, onde $[y,u] := \{(yk, k^{-1}u)\,;\ k \in K\}$, com G-ação dada por $x \cdot [y,u] := [xy,u]$, para todos $x \in G$ e $[y,u] \in G \times_K U$. Considere ainda a aplicação pr : $G \times_K U \ni [x,u] \mapsto xK \in G/K$ e, para cada $f \in \mathrm{Ind}_K^G\, U$, defina

$$s_f : G/K \ni xK \mapsto [x, f(x)] \in G \times_k U\ .$$

Por fim, a regra $(L_x \cdot s_f)(yK) := x \cdot s_f(x^{-1}yK)$ define uma G-ação no espaço gerado pelas aplicações s_f, com $f \in \mathrm{Ind}_K^G\, U$.

Escrevemos $\widehat{G}_{K,U} := \{V \in \widehat{G}\,;\ \dim \mathrm{Hom}_K(V,U) > 0\}$.

Denotemos por $\Gamma^\ell(E)$ o espaço das seções de classe C^ℓ de um dado fibrado vetorial E e fixemos p um inteiro não negativo.

Teorema A.3.4. [a] *Nas notações da definição anterior, valem:*

1. *Se U tem estrutura de variedade de classe C^ℓ, então pr : $G \times_K U \to G/K$ define a projeção de um fibrado vetorial, onde cada fibra $pr^{-1}\{xK\}$, $x \in G$, é isomorfa a U. Além disso, a aplicação $Ind_K^G\, U \ni f \mapsto s_f \in \Gamma^0(G \times_K U)$ é, na verdade, um G-isomorfismo.*

2. *Considere a K-ação $\mu_K : K \times C^0(G,U) \ni (k,f) \mapsto \mu_k \cdot f \in C^0(G,U)$, definindo-se, para cada $x \in G$, $(\mu_k \cdot f)(x) := k^{-1} \cdot f(xk)$. Então uma função $f \in C^0(G,U)$ pertence a $Ind_K^G\, U$ se, e somente se, $\mu_k \cdot f = f$ para todo $k \in K$. Por esta razão, escrevemos $C^0(G,U)^{\mu_K} = Ind_K^G\, U$.*

3. *(reciprocidade de Frobenius) Seja $V \in \widehat{G}$. Denote por $res_K^G V$ o K-módulo V obtido por restrição da G-ação de V ao subgrupo K. Então há um isomorfismo canônico*

$$Hom_G(\ V\ ,\ Ind_K^G\, U\ ) \simeq Hom_K(res_K^G V, U) \quad {}^{b}$$

4. *Se* $U = \mathbb{C}$ *é a representação trivial de* K*, então* $C^0(G/K, \mathbb{C}) \simeq \mathit{Ind}_K^G U = C^0(G, K; \mathbb{C})$*. Além disso,* $C^\infty(G/K, \mathbb{C}) \simeq C^\infty(G, K; \mathbb{C})$*.*

5. *Suponha* $M = G/K$ *espaço homogêneo redutível com* K*-representação de isotropia complexificada* $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$*. Então, tomando duais e tensores de* $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$*, construímos o* K*-módulo* $\Lambda^p(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^*$ *denominado* K*-*representação p-exterior de $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. *Além disso,*

$$\Gamma^0\Lambda^p(TM^{\mathbb{C}})^* \simeq \Gamma^0(G \times_K \Lambda^p(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^*) \simeq \mathit{Ind}_K^G \Lambda^p(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^* = C^0(G, K; \Lambda^p(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^*),$$

onde $\Lambda^p(TM^{\mathbb{C}})^*$ *é o fibrado das* p*-formas contínuas complexas contínuas de* M*. Segue ainda que* $\Gamma^\infty\Lambda^p(TM^{\mathbb{C}})^* \simeq \Gamma^\infty(G \times_K \Lambda^p(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^*) \simeq C^\infty(G, K; \Lambda^p(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})^*)$*.*

6. *Sejam* $(\Pi, V) \in \widehat{G}$ *e* $U \in \mathit{Rep}(K, \mathbb{C})$*. Considere* $\mathit{Hom}_K(V, U)$ *munida da* G*-ação trivial e* $C^0(G, K; U)$ *munido da ação* L *induzida pelas translações à esquerda. Temos* G*-aplicações injetivas (definidas por extensão linear)*

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{J}_V &: \mathit{Hom}_G(V\,,\, C^0(G, K; U)) \otimes V \ni F \otimes v \mapsto F(v) \in C^0(G, K; U) \\ \widetilde{\mathcal{J}}_V &: \mathit{Hom}_K(V, U) \otimes V \ni \phi \otimes v \mapsto \phi(\Pi(\cdot)^{-1} v) \in C^0(G, K; U) \end{aligned}\right.\;{}^{c},$$

cujas imagens coincidem com a componente V*-isotípica* $\mathit{Isot}_L(V)$ *de* $C^0(G, K; U)$*.*

7. *As aplicações* $\{\mathcal{J}_V\}_{V \in \widehat{G}}$ *e* $\{\widetilde{\mathcal{J}}_V\}_{V \in \widehat{G}}$ *induzem* G*-isomorfismos*

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &: \bigoplus_{V \in \widehat{G}_{K,U}} \mathit{Hom}_G(V\,,\, C^0(G, K; U)) \otimes V \to \bigoplus_{V \in \widehat{G}_{K,U}} \mathit{Isot}_L(V) \\ \widetilde{\mathcal{J}} &: \bigoplus_{V \in \widehat{G}_{K,U}} \mathit{Hom}_K(V, U) \otimes V \to \bigoplus_{V \in \widehat{G}_{K,U}} \mathit{Isot}_L(V) \end{aligned}\;,$$

com imagens densas em $C^0(G, K; U)$*.*

---

[a] Ver [Bröcker and tom Dieck, 1985, Sec.III.6] e [Ikeda and Taniguchi, 1978, Sec.1].
[b] Em linguagem categorial, estamos dizendo que o funtor Ind_K^G é adjunto à direita do funtor res_K^G.
[c] Note que $\mathcal{J}_V$ e $\widetilde{\mathcal{J}}_V$ são essencialmente a mesma aplicação a menos da identificação canônica entre os espaços $\mathrm{Hom}_G(V\,,\, C^0(G, K; U))$ e $\mathrm{Hom}_K(V, U)$.

Observação A.3.5. Todas as construções desta subseção foram feitas considerando a continuidade das funções e seções de fibrados. Pode-se, alternativamente, considerar suavidade ao invés de continuidade. Mais ainda, com adaptações apropriadas, pode-se considerar ações sobre espaços de funções e seções L^2, sem alterar os resultados na sua essência. Neste último caso, a menos de completamentos, os espaços são de Hilbert e o Teorema A.3.2 se aplica. Logo, se $U \in \mathrm{Rep}(K, \mathbb{C})$ possui um produto interno $((\cdot,\cdot))$, induzindo um produto interno em $C^0(G,K;U)$ dado por $\langle f_1, f_2\rangle_{L^2} := \int_G ((f_1,f_2))\,dg$, então $\bigoplus_{V\in\widehat{G}_{K,U}} \mathrm{Isot}_L(V)$ é denso no completamento $L^2(G,K;U)$.

A.4 Classificações de grupos de Lie e espaços simétricos

Embora não iremos entrar nos detalhes técnicos, vale mencionar que existe uma listagem classificatória para grupos de Lie e espaço simétricos.

Um fato importante é que o recobrimento universal de um espaço simétrico (resp. de um grupo de Lie) é ainda um espaço simétrico (resp. um grupo de Lie). Daí, a ideia é primeiramente listar os espaços simplesmente conexos e lidar caso a caso com os espaços que não são simplesmente conexos a partir das teorias de recobrimentos e grupos fundamentais, via correspondências de Galois.

Vimos na Seção A.1 que há uma ótima correspondência entre grupos de Lie simplesmente conexos e álgebras de Lie (induzindo correspondências ainda nos morfismos e subestruturas). A classificação destes está intimamente ligada ao caso semi-simples, o qual se resume à classificação dos sistemas de raízes (reduzidos) irredutíveis. Esta classificação existe e pode ser caracterizada pelos chamados *diagramas de Dynkin*, conforme [Hall, 2015, Cap.8].

De maneira bastante análoga, cada espaço simétrico simplesmente conexo corresponde a um objeto denominado *álgebra de Lie ortogonal involutiva* que, nada mais é do que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que admite uma certa decomposição ortogonal da forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ onde $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{m}$ são, respectivamente, os autoespaços associados aos autovalores $+1$ e -1 de um dado automorfismo involutivo $\sigma_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Além disso, há uma espécie de dualidade interessante entre espaços simétricos compactos e não-compactos: se consideramos a multiplicação do espaço $\mathfrak{m}$ pela constante imaginária i, na decomposição de $\mathfrak{g}$, então migramos de uma álgebra ortogonal involutiva associada a um espaço simétrico compacto para uma álgebra ortogonal involutiva associada a um espaço simétrico não-compacto (e vice-versa).[10]

Para as caracterizações dos espaços simétricos via álgebras de Lie ortogonais involutivas e as classificações mencionadas no parágrafo precedente, referimos a [Gorodski, 2021, Sec.2] e [Caselle and Magnea, 2004, Sec.5].

A.5 Métricas G-invariantes

Antes de abordarmos o conceito de *métrica invariante pela ação de um grupo*, façamos uma breve revisão sobre *pullbacks de campos tensoriais*. No que se segue, considere N e M uma variedades diferenciáveis compactas e conexas. $\mathfrak{X}(M)$ denota o espaço de campos suaves e $\Omega^1(M)$ o espaço das 1-formas diferenciáveis sobre M.

Sejam $F : N \to M$ suave e ϕ um $(0, q)$-campo tensorial em M. Dado $X \in \mathfrak{X}(N)$, escrevemos $F_*X := dF(X)$, ou pontualmente $F_{*_x}X := dF_x(X(x))$ para todo $x \in N$. O *pullback* de ϕ por F é a aplicação $F^*\phi$ definida por

$$(F^*\phi)(X_1, \ldots, X_q) := \phi(F_*X_1, \ldots, F_*X_2),$$

para todos $X_1, \ldots, X_q \in \mathfrak{X}(N)$. Note que se g é uma métrica riemanniana sobre M e F é uma imersão, então F^*g define uma métrica riemanniana sobre N.

Note que se $\mathcal{M}$ é o espaço das métricas riemannianas sobre M, então o grupo $\mathrm{Diff}(M)$ age, de forma contravariante, sobre $\mathcal{M}$, via *pullbacks*. Isto é, a aplicação

$$\mathrm{Diff}(M) \times \mathcal{M} \ni (F, g) \mapsto F^*g \in \mathcal{M}$$

[10] Tal procedimento é conhecido como *truque de Weyl*.

satisfaz, para todas $F_1, F_2 \in \mathrm{Diff}(M)$ e $g \in \mathcal{M}$: (i) $\mathrm{id}_M^* \, g = g$; (ii) $(F_1 \circ F_2)^* g = F_2^*(F_1^* g)$.

A ação contravariante acima nos motiva a definir alguns subconjuntos. Dados $g \in \mathcal{M}$, $D \subset \mathrm{Diff}(M)$ e subconjuntos $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, escrevemos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Diff}(M)^* g := \{F^* g;\ F \in \mathrm{Diff}(M)\} \\
&\mathrm{Diff}(M)_{\mathcal{A},\mathcal{B}} := \{F \in \mathrm{Diff}(M);\ F^*\mathcal{A} \subset \mathcal{B}\} \\
&\mathrm{Diff}(M)_{\mathcal{A}} := \{F \in \mathrm{Diff}(M);\ F^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\} \\
&\mathcal{M}^D := \{g \in \mathcal{M};\ \forall F \in D,\ F^* g = g\}
\end{aligned}$$

(note que $\mathcal{M}^D = \mathcal{M}^{\langle D \rangle}$, onde $\langle D \rangle \subset \mathrm{Diff}(M)$ é o subgrupo gerado por D).

Assuma agora que (M, g) é uma variedade riemanniana. Uma *g-isometria* de M é simplesmente uma aplicação $F \in \mathrm{Diff}(M)_g := \mathrm{Diff}(M)_{\{g\}}$, isto é, $\mathrm{Isom}(M, g) = \mathrm{Diff}(M)_g$. Agora estamos prontos para definir métricas invariantes por uma dada ação de um grupos.

Definição A.5.1. Suponha que a variedade M é um G-espaço, isto é, M está munida de uma G-ação suave $\mu : G \times M \ni (x, m) \to \mu_x(m) \in M$ e considere $\mathcal{M}$ o espaço de métricas riemannianas sobre M. Dado um subconjunto $K \subset G$, denotemos $\mu_K := \{\mu_x\}_{x \in K} \subset \mathrm{Diff}(M)$. Uma métrica $g \in \mathcal{M}$ é dita μ_K-invariante se $g \in \mathcal{M}^{\mu_K}$. Se $M = G/K$ é um espaço homogêneo e μ é a ação induzida pelas translações à esquerda (à direita), então cada métrica μ_G-invariante é dita *invariante à esquerda* (*à direita*). Uma métrica simultaneamente invariante à esquerda e à direita é dita *bi-invariante*.

A.6 Discretizações: grafos homogêneos

Grafos de Cayley e de Schreier formam uma classe de estruturas discretas transitivas que possibilitam definir construções, operadores e parâmetros invariantes por uma dado grupo G bastante similares às das variedades da teoria de Lie. Enunciaremos as definições básicas e operadores laplacianos sobre os quais trabalharemos nos capítulos seguintes. Referências básicas: [Cannizzo, 2014, Chung, 1997, Conder, 1992, Li, 2002] (especialmente os capítulos 1 e 7 de [Chung, 1997]).

Comecemos com noções básicas sobre grafos gerais.

Definição A.6.1. Um *grafo direcionado* é um par de conjuntos (V, A), onde $A \subset V \times V$. Similarmente, um *grafo não direcionado* é um par de conjuntos (V, A), onde $A \subset (V \times V)/\sim$, em que $\sim$ é a associação $(x, y) \sim (y, x)$ para todos $x, y \in V$. Neste último caso, a notação $\{x, y\} \in A$ representa a classe $\{(x, y), (y, x)\} \in A$. Os elementos de V são ditos *vértices*, enquanto que os elementos de A são denominados *arestas*. Dados $x, y \in V$, defina

$$A(x,y) = \begin{cases} (x,y), \text{ se } (V,A) \text{ é um grafo direcionado} \\ \{x,y\}, \text{ se } (V,A) \text{ é um grafo não direcionado} \end{cases}$$

Escrevemos $\mathrm{OutNeigh}(x) := \{y \in V;\ A(x, y) \in A\}$. Quando (V, A) é não direcionado, escrevemos ainda $\mathrm{Neigh}(x) := \mathrm{OutNeigh}(x)$. Um grafo é dito *finito* se seu conjunto de vértices for finito e é dito *conexo* se todo par de vértices pode ser conectado por um caminho de arestas (no sentido óbvio).

Uma aplicação $F : V \to V$ é dita um *automorfismo* do grafo $\mathcal{G} := (V, A)$ se F é uma bijeção e $A(x, y) \in A$ se, e somente se, $A(Fx, Fy) \in A$. O conjunto $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ denota o grupo de automorfismo de $\mathcal{G}$.

Um *peso para uma aresta* $A(x, y)$ é simplesmente um escalar real positivo $\omega(A(x, y))$. Um *peso para o grafo* (V, A) é uma função $\omega : A \ni A(x, y) \mapsto \omega(A(x, y)) \in \mathbb{R}_{>0}$. $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})_\omega$ denota o subgrupo dos automorfismos F tais que $F^*\omega = \omega$, onde $F^*\omega$ é o peso definido pela regra $(F^*\omega)(A(x, y)) = \omega(A(Fx, Fy))$, para todos $x, y \in V$. Convenientemente, escreveremos $\mathrm{Isom}(\mathcal{G}, \omega) := \mathrm{Aut}(\mathcal{G})_\omega$, cujos elementos são denominados *ω-isometrias de $\mathcal{G}$*, e também $\mathcal{M}$ como o conjunto de pesos de $\mathcal{G}$.

Fixemos $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e consideremos $L^2(V, \mathbb{K})$ a $\mathbb{K}$-álgebra de funções L^2 da forma $f : V \to \mathbb{K}$.[a] O *laplaciano* de um grafo finito não-direcionado (V, A), com peso ω, é o operador denotado por $\Delta_\omega : L^2(V, \mathbb{K}) \to L^2(V, \mathbb{K})$ e definido pela regra

$$(\Delta_\omega f)(x) := -\sum_{y \in \mathrm{Neigh}(x)} \omega(A(x,y))(f(y) - f(x))$$

para $f \in L^2(V, \mathbb{K})$ e $x \in V$ arbitrários.

[a]Note que se V é finito, então $L^2(V, \mathbb{K})$ é simplesmente o conjunto de funções de V em $\mathbb{K}$. Relembramos que o produto interno L^2 é dado por $\langle f_1, f_2 \rangle_{L^2} = \sum_{x \in G} f_1(x)\overline{f_2(x)}$.

Assumiremos que todos os grafos trabalhados são finitos e conexos. Para nossos propósitos é conveniente eliminar a existência de *loops*, isto é, consideraremos grafos que não contém arestas da forma $A(x, x)$. Esta conveniência se deve ao fato de que uma aresta $A(x, x)$ geraria parcelas nulas da forma $\omega(A(x, x))(f(x) - f(x))$ na expressão do laplaciano. Tais parcelas não mudam a essência das construções, mas traz uma tecnicalidade de ter que isolá-las em cada etapa do processo, o que consideramos um trabalho excessivo diante de um ganho praticamente insignificante na teoria.

Passemos então a algumas construções discretas obtidas a partir de grupos. Consideraremos *grafos homogêneos*, isto é, onde os vértices são dados por um G-espaço finito com ação transitiva. As arestas são construídas a partir de um subconjunto de geradores de G. Similar aos espaços homogêneos da Seção A.2, pode-se mostrar que todo grafo homogêneo pode ser representado a partir de um conjunto de vértices da forma G/K, munido da ação induzida pelas translações à esquerda. Novamente, esta será a versão mais conveniente para nossos propósitos.

Definição A.6.2. Seja G um grupo finito com subgrupo K. Assumamos que S é um subconjunto de geradores de G que não contém nenhum elemento de K.[a] Denote por $o = eK$ a projeção de $e \in G$ pela aplicação quociente $G \to G/K$. Consideremos então um grafo (V, A) satisfazendo duas propriedades: (i) $V = G/K$ está munido de uma G-ação transitiva efetiva $\mu : G \times G/K \to G/K$; (ii) $\mathrm{OutNeigh}(\mu_x(o)) = \{A(\mu_x(o), \mu_{xs}(o));\ s \in S\}$, para cada $x \in G$. Nestas condições, (V, A) recebe o nome de *grafo homogêneo* ou *grafo de Schreier* e é denotado por $\mathcal{G}(G/K; S)$. Se, adicionalmente, exigimos que K seja um subgrupo normal de G, então (V, A) é denominado um *grafo de Cayley*.[b]

Um peso ω para $\mathcal{G}(G/K; S)$ é dito *G-invariante* ou *μ-invariante* se para todos $s \in S$ e $x \in G$, vale que $\omega(A(\mu_x(o), \mu_{xs}(o))) = \omega(A(o, \mu_s(o))) =: \omega_s$. Neste caso, escrevemos $\omega \in \mathcal{M}^{\mu_G}$. Se μ é a G-ação induzida pelas translações à esquerda (à direita), sobre G/K, então um peso μ-invariante é dito também um *peso invariante à esquerda (à direita)*. [c]

[a] A hipótese sobre S não conter elementos de K é simplesmente para eliminar possíveis *loops* no grafo.
[b] Em particular, um grafo de Schreier $\mathcal{G}(G/K, S)$ com $K = \{e\}$ é um grafo de Cayley.
[c] Na grande maioria dos casos, μ é a ação pelas translações à esquerda de G, sobre $V = G/K$.

Teorema A.6.3. *Seja $\mathcal{G} := \mathcal{G}(G/K; S)$ um grafo de Schreier com G-ação transitiva efetiva μ sobre o conjunto de vértices. Considere ω um peso μ-invariante, $x \in G$, $s \in S$ e $f \in L^2(G/K, \mathbb{K})$ arbitrários. Valem:*

1. *Para um grafo finito conexo e não direcionado (V, A) arbitrário (não somente os de Schreier), com peso ω (também arbitrário), temos que*

   (A) Δ_ω é um operador L^2-auto-adjunto satisfazendo: (i) kerΔ_w é o subespaço das funções constantes; (ii) Δ_ω, restrito ao complemento L^2-ortogonal de kerΔ_w, tem autovalores positivos; (iii) a soma direta dos auto-espaços de Δ_ω é o espaço $L^2(V, \mathbb{K})$. [a]

   (B) Δ_ω comuta com a ação por pullback *de cada elemento $F \in$ Isom$(\mathcal{G}, \omega)$, isto é, se usamos a notação $F^*f := f \circ F$, então $F^*(\Delta_\omega f) = \Delta_\omega(F^*f)$, para toda $f \in L^2(V, \mathbb{K})$.*

2. *μ_x é um automorfismo. Mais ainda, $\mu_x \in$ Isom$(\mathcal{G}, \omega)$.*

3. *Se S é* simétrico, *isto é $S = S^{-1}$, então $\omega_s = \omega_{s^{-1}}$ para todo $s \in S$ e, neste caso, $\mathcal{G}$ se identifica como um grafo não-direcionado. Reciprocamente, se $\mathcal{G}$ é não direcionado, então suas arestas podem ser construídas a partir de um conjunto gerador simétrico S.*

4. *Se μ é a ação induzida pelas translações à esquerda, então*

$$\Delta_\omega f = -\sum_{s \in S} \omega_s (R^K(s) f - f) ,$$

   onde $(R^K(s)f)(xK) = f(xsK)$ (note que R^K é a representação induzida pelas translações à direita).

[a] O caso direcionado possui operadores laplacianos com propriedades análogas, conforme [Chung, 2005].

Demonstração. (1A) Ver [Chung, 1997, Cap.1].

(1B) Para todo $x \in G$, temos

$$\begin{aligned}
\big(F^*(\Delta_\omega f)\big)(\mu_x(o)) &= \Delta_\omega f(F(\mu_x(o))) \\
&= -\sum_{s\in S}\omega(A(F(\mu_x(o)),F(\mu_{xs}(o)))).\big(\,f(F(\mu_{xs}(o)))-f(F(\mu_x(o)))\,\big) \\
&= -\sum_{s\in S}(F^*\omega)(A(\mu_x(o),\mu_{xs}(o))).\big(\,f\circ F(\mu_{xs}(o))-f\circ F(\mu_x(o))\,\big) \\
&= -\sum_{s\in S}\omega(A(\mu_x(o),\mu_{xs}(o))).\big(\,F^*f(\mu_{xs}(o))-F^*f(\mu_x(o))\,\big) \\
&= \big(\Delta_\omega(F^*f)\big)(\mu_x(o))\ .
\end{aligned}$$

(2) Seja $A(\mu_y(o),\mu_{ys}(o))$ uma aresta arbitrária. Então os vértices $\mu_x(\mu_y(o))$ e $\mu_x(\mu_{ys}(o))$ definem a aresta $A(\mu_{xy}(o),\mu_{xys}(o))$, de modo que μ_x é um automorfismo. Como ω é μ-invariante, então $\mu_x\in \text{Isom}(\mathcal{G},\omega)$.

(3) Como $\mu_s\in\text{Isom}(\mathcal{G},\omega)$ e vale que $\mu_e=\mu_{ss^{-1}}=\mu_{s^{-1}s}$, então a aresta $A(o,\mu_{s^{-1}}(o))$ tem o mesmo peso que a aresta $A(\mu_s(o),\mu_{s^{-1}s}(o))$, de modo que $\omega_{s^{-1}}=\omega_s$, provando a primeira parte. Suponha agora que $S=S^{-1}$. Antes de prosseguirmos, consideremos a seguinte observação importante:

Observação . Todo grafo não direcionado pode ser identificado como um grafo bi-direcionado, onde $A(u,v)$ define uma aresta entre dois vértices u e v se, e somente se, $A(v,u)$ também é uma aresta (e neste caso estas duas arestas se identificam como uma única).

$A(\mu_x(o),\mu_{xs}(o))$ é uma aresta se, e só se, $A(\mu_{xs}(o),\mu_x(o)) = A(\mu_{xs}(o),\mu_{xss^{-1}}(o))$ é uma aresta (pois S é simétrico), de modo que $\mathcal{G}$ é um grafo bi-direcionado. Pela observação acima, $\mathcal{G}$ pode ser visto como um grafo não direcionado. Reciprocamente, se $\mathcal{G}$ é não direcionado, então para todos $x\in G$ e $s\in S$, $A(\mu_x(o),\mu_{xs^{-1}}(o)) = A(\mu_{xs^{-1}}(o),\mu_{xs^{-1}s}(o))$ é uma aresta de $\mathcal{G}$. Esta propriedade implica que $\mathcal{G}(G/K;S^{-1})=\mathcal{G}(G/K;S)=\mathcal{G}$. Logo, o grafo não direcionado dado por $\mathcal{G}(G/K;S\cup S^{-1})$ coincide com $\mathcal{G}$.

(4) Aplicando as hipóteses, temos que:

$$\begin{aligned}
(\Delta_\omega f)(xK) &= -\sum_{s\in S}\omega(A(xK,xsK))(f(xsK)-f(xK)) \\
&= -\sum_{s\in S}\omega_s(\ f(xsK)-f(xK)\ ) \\
&= -\sum_{s\in S}\omega_s(\ (R^K(s)f)(xK)-f(xK)\ )
\end{aligned}$$

■

Observação A.6.4. Os operadores laplacianos para grafos de Schreier da forma $\mathcal{G}(G/K, S)$ podem ser entendidos como operadores de Laplace-Beltrami sobre variedades 0-dimensionais descritas por um par algébrico (G, K).

De maneira similar, os conceitos envolvendo representações que não dependem da existência de álgebras de Lie se transportam de maneira imediata para uma variedade 0-dimensional dada por um par algébrico (G, K).

Com isso em mente, não é difícil de se convencer que boa parte das seções precedentes, neste capítulo, se replica muito bem para o caso discreto abordado nesta seção.

Existe ainda uma teoria de Hodge-De-Rham para grafos, a qual engloba um operador de Hodge-Laplace. Este, quando restringido às chamadas 0-formas discretas, coincide com o laplaciano Δ_ω, definido há pouco. Além disso, ele pode ser visto como o hodge-laplaciano diferencial de uma 0-variedade. Para maior aprofundamento, ver [Lim, 2020].

A.7 Representações de grupos finitos

Grupos Abelianos

Seja G um grupo abeliano finito. Por [Serre, 1977, Ch.3], G possui finitas representações irredutíveis sobre $\mathbb{C}$, todas unidimensionais.

Grupos Cíclicos

Seja $G = \mathbb{Z}_n$ (o grupo cíclico de ordem n). Por [Serre, 1977, Ch.5], temos que

$$\widehat{G} = \{\Pi_0, \Pi_1 \ldots, \Pi_{n-1}\} ,$$

onde

$$\Pi_j(k) = e^{\frac{2\pi i}{n} jk} ,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}_n$ e todo $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Vale ainda que $\Pi_j^* \simeq \Pi_{n-j}$.

O Grupo de Klein

Seja K o grupo de Klein, de ordem 4. Então K é um grupo abeliano que pode ser identificado como $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ou então como o grupo abeliano em 2 geradores $a, b \in K$ tais que $a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$. Por [Subwiki, 2011], temos $\widehat{K} = \{\Pi_e, \Pi_a, \Pi_b, \Pi_{ab}\}$, definido pela tabela

	e	a	b	ab
Π_e	1	1	1	1
Π_a	1	1	-1	-1
Π_b	1	-1	1	-1
Π_{ab}	1	-1	-1	1

Outra forma de enxergar $\widehat{K}$ é através de

$$\widehat{K} = \widehat{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2} = \{V \otimes V' \ ; \quad V, V' \in \widehat{\mathbb{Z}_2}\} \ .$$

Nesta configuração, podemos identificar

$$\widehat{K} = \{\Pi_{j_1,j_2} \ ; \quad j_1, j_2 \in \{0,1\}\} \ ,$$

onde

$$\Pi_{j_1,j_2}(k_1,k_2) = e^{\pi\, i\, j_1 k_1}\ e^{\pi\, i\, j_2 k_2} = e^{\pi\, i\,(j_1 k_1 + j_2 k_2)} \ ,$$

para todos $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_2$ e $j_1, j_2 \in \{0,1\}$.

O Grupo $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

Seja $G := \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Similarmente ao grupo de Klein, as representações em $\widehat{G}$ são dadas por

$$\widehat{G} = \widehat{\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3} = \{V \otimes V' \ ; \quad V, V' \in \widehat{\mathbb{Z}_3}\} \ ,$$

totalizando nove representações irredutíveis não-equivalentes entre si. Mais explicitamente, temos que

$$\widehat{G} = \{\Pi_{j_1,j_2} \; ; \quad j_1, j_2 \in \{0,1,2\}\} \ ,$$

onde

$$\Pi_{j_1,j_2}(k_1,k_2) = e^{\frac{2\pi\, i}{3} j_1 k_1} \, e^{\frac{2\pi\, i}{3} j_2 k_2} = e^{\frac{2\pi\, i}{3}(j_1 k_1 + j_2 k_2)} \ ,$$

para todos $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_3$ e $j_1, j_2 \in \{0,1,2\}$.

O Grupo Diedral

Considere D_n o grupo diedral de ordem $2n$, com $n \geq 3$. Podemos considerar $\mathbb{Z}_n \simeq \langle r \rangle$ como o grupo multiplicativo em um gerador r, com $r^n = e$, e $t \in D_n$ uma reflexão tal que

$$D_n = \langle r \rangle \cup t \langle r \rangle \ .$$

Por [Serre, 1977, Ch.5], existem no máximo quatro representações unidimensionais em $\widehat{G}$ (duas, se n é ímpar; quatro, se n é par) e as demais representações em $\widehat{G}$ são de grau 2.

As representações irredutíveis de grau 1 são dadas por $\{\Pi_{1,1}, \Pi_{1,-1}\}$, se n é ímpar, e por $\{\Pi_{1,1}, \Pi_{1,-1}, \Pi_{-1,1}, \Pi_{-1,-1}\}$, caso n seja par. Em ambos os casos, estas satisfazem

$$\Pi_{j,k}(r) = j \quad \text{e} \quad \Pi_{j,k}(t) = k \ .$$

Denotaremos essas representações por $(\Pi_{j,k}, V_{j,k})$.

As representações irredutíveis restantes, de grau 2, são dadas da seguinte maneira: para cada inteiro m tal que $0 < m < n/2$, consideramos (Π_m, V_m), com $V_m = \mathbb{C}^2$ e

$$\Pi_m(r^k) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{n} mk} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{n} mk} \end{pmatrix} , \quad \Pi_m(tr^k) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{2\pi i}{n} mk} \\ e^{\frac{2\pi i}{n} mk} & 0 \end{pmatrix} .$$

O Grupo Alternado A_4

Considere A_4 o grupo alternado, gerado pelo subgrupo de permutações dado pelo conjunto $\{t = (123), x = (12)(34)\} \subset S_4$, onde S_4 é o grupo de permutações de 4 elementos. Seguindo [Serre, 1977, Ch.5], temos $\widehat{A_4} = \{(\Pi_j, V_j)\ ; \quad j = 0, 1, 2, 3\}$, onde as representações irredutíveis unidimensionais são dadas por

$$\Pi_j(t) = e^{\frac{2\pi i}{3} j} \quad \text{e} \quad \Pi_j(x) = 1, \quad \text{para } j \in \{0, 1, 2\}.$$

A representação restante (Π_3, V_3) é de grau 3 e pode ser descrita por

$$\Pi_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Pi_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vale ainda que $V_1^* \simeq V_2$.

A.8 Propriedades genéricas, conjuntos residuais e magros

Existem algumas noções do que significa uma determinada propriedade ser *genérica*, permeando conceitos em medida, topologia, geometria algébrica, computação, dentre outros. No nosso caso, pela natureza dos problemas desta tese, envolvendo variedades diferenciais, usaremos a noção topológica através dos chamados conjuntos *residuais*, que são conjuntos de segunda categoria de Baire, conceito dual ao dos chamados conjuntos *magros*, de primeira categoria de Baire. Para mais detalhes sobre as definições e resultados dessa seção, referimos a [Narici and Beckenstein, 2010, Cap.11] e [Oxtoby, 2013, Caps. 9 e 16].

Definição A.8.1. Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $A \subset X$ é dito *residual* se puder ser expresso como intersecção enumerável de subconjuntos em que cada um deles tenha interior denso em X. Um subconjunto $B \subset X$ cujo complementar é residual em X é dito *magro*, ou seja,

B pode ser expresso como união enumerável de subconjuntos cujo fecho tem interior vazio. X é dito um *espaço de Baire* se cada um de seus subconjuntos residuais for denso em X.

Suponha que $\mathcal{P}$ é uma determinada propriedade abstrata sobre os elementos do conjunto X e escreva $X(\mathcal{P}) := \{x \in X;\ x \text{ satisfaz } \mathcal{P}\}$. Se $X(\mathcal{P})$ é residual em X, então dizemos que a propriedade $\mathcal{P}$ é *genérica* em X ou que os elementos de $X(\mathcal{P})$ são *genéricos* em X.

Eis uma coletânea de propriedades básicas envolvendo estas definições:

Proposição A.8.2. *Seja X um espaço topológico contendo um subespaço $Y \neq \emptyset$. Valem:*

1. *Se X é Hausdorff localmente compacto ou é um espaço (pseudo-)métrico completo, então X é um espaço de Baire.*
2. *Todo subconjunto $A \subset Y$ que é magro em Y é também magro em X.*
3. *Suponha que Y é aberto ou denso em X. Então um subconjunto $A \subset Y$ é magro em Y se, e somente se, A é magro em X.*
4. *(Teorema da categoria de Banach) A união de uma família arbitrária de subconjuntos magros em X forma um subconjunto magro em X.*

Intuitivamente, podemos entender o conceito de conjunto magro (resp. residual) como uma versão topológica abstrata do conceito de conjunto de medida nula (resp. medida total) em espaços de medida. Assim, o termo "propriedade genérica", em espaços topológicos, pode ser entendido como um análogo para a expressão "evento quase certo", no contexto de medida e probabilidade.

Referências Bibliográficas

[Afrouzi and Rasouli, 2007] Afrouzi, G. and Rasouli, S. (2007). Population models involving the p-laplacian with indefinite weight and constant yield harvesting. *Chaos, Solitons & Fractals*, 31(2):404–408.

[Alexandrino and Bettiol, 2015] Alexandrino, M. M. and Bettiol, R. G. (2015). *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions*. Springer International Publishing, Cham.

[Arvanitoyeorgos, 2003] Arvanitoyeorgos, A. (2003). *An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces*, volume 22. AMS.

[Babai, 1979] Babai, L. (1979). Spectra of Cayley graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 27(2):180–189.

[Baklouti and Nomura, 2018] Baklouti, A. and Nomura, T. (2018). *Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications: TJC 2015, Monastir, Tunisia, December 18-23*, volume 207. Springer.

[Bröcker and tom Dieck, 1985] Bröcker, T. and tom Dieck, T. (1985). *Representations of Compact Lie Groups*, volume 98 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

[Cahen, 1972] Cahen, M. (1972). Lorentzian symmetric spaces. *General Relativity and Gravitation*, 3(1):115–117.

[Caminha, 2014] Caminha, A. (2014). *Tópicos de Geometria Diferencial*. SBM, 1 edition.

[Cannizzo, 2014] Cannizzo, J. (2014). On invariant Schreier structures. *L'Enseignement Mathématique*, 60(3):397–415.

[Cariglia, 2014] Cariglia, M. (2014). Hidden symmetries of dynamics in classical and quantum physics. *Reviews of Modern Physics*, 86(4):1283.

[Casarino et al., 2022] Casarino, V., Ciatti, P., and Martini, A. (2022). Weighted spectral cluster bounds and a sharp multiplier theorem for ultraspherical grushin operators. *International Mathematics Research Notices*, 2022(12):9209–9274.

[Caselle and Magnea, 2004] Caselle, M. and Magnea, U. (2004). Random matrix theory and symmetric spaces. *Phys. Rep.*, 394(2-3):41–156.

[Chung, 1997] Chung, F. (1997). *Spectral Graph Theory*, volume 92 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[Chung, 2005] Chung, F. (2005). Laplacians and the Cheeger inequality for directed graphs. *Ann. Comb.*, 9(1):1–19.

[Chung and Sternberg, 1992] Chung, F. R. K. and Sternberg, S. (1992). Laplacian and vibrational spectra for homogeneous graphs. *J. Graph Theory*, 16(6):605–627.

[Cianci et al., 2024] Cianci, D., Judge, C., Lin, S., and Sutton, C. (2024). Spectral multiplicity and nodal domains of torus-invariant metrics. *International Mathematics Research Notices*, 2024(3):2192–2218.

[Conder, 1992] Conder, M. (1992). Schreier coset graphs and their applications (groups and combinatorics). *RIMS Kôkyûroku*, 794:169–175.

[de Lange et al., 2014] de Lange, S. C., de Reus, M. A., and van den Heuvel, M. P. (2014). The laplacian spectrum of neural networks. *Frontiers in computational neuroscience*, 7:189.

[Dimakis and Müller-Hoissen, 1999] Dimakis, A. and Müller-Hoissen, F. (1999). Discrete Riemannian geometry. *Journal of Mathematical Physics*, 40(3):1518–1548.

[Dimakis and Müller-Hoissen, 2003] Dimakis, A. and Müller-Hoissen, F. (2003). Differential geometry of group lattices. *Journal of Mathematical Physics*, 44(4):1781–1821.

[Do Carmo, 1992] Do Carmo, M. (1992). *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Basel.

[Do Carmo, 1994] Do Carmo, M. (1994). *Differential Forms and Applications*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

[Enciso and Peralta-Salas, 2012] Enciso, A. and Peralta-Salas, D. (2012). Nondegeneracy of the eigenvalues of the hodge laplacian for generic metrics on 3-manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364(8):4207–4224.

[Eschenburg, 2016] Eschenburg, J.-H. (2016). Lecture notes on symmetric spaces. online document, impa.br, https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/jost_eschenburg_nota_minicurso.pdf.

[Fegan, 1980] Fegan, H. D. (1980). The spectrum of the Laplacian on forms over a Lie group. *Pacific Journal of Mathematics*, 90(2):373–388.

[Fitzgerald, 2020] Fitzgerald, C. (2020). Cayley graphs and representation theory. *accessed in June*.

[Gier, 2014] Gier, M. E. (2014). *Eigenvalue multiplicites of the Hodge Laplacian on coexact 2-forms for generic metrics on 5-manifolds*. University of Kentucky.

[Gilmore, 2008] Gilmore, R. (2008). *Lie groups, physics, and geometry*. Cambridge University Press, Cambridge. An introduction for physicists, engineers and chemists.

[Gorodski, 2021] Gorodski, C. (2021). An introduction to riemannian symmetric spaces. lectures in the 7th School and Workshop on Lie Theory, at Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, Brazil (online event), in September 8-15, 2021.

[Hall, 2015] Hall, B. C. (2015). *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, volume 222 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer International Publishing, Cham.

[Helffer, 2013] Helffer, B. (2013). *Spectral theory and its applications*. Number 139. Cambridge University Press.

[Helgason, 2001] Helgason, S. (2001). *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. AMS.

[Helgason, 2022] Helgason, S. (2022). *Groups and geometric analysis: integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions*, volume 83. American Mathematical Society.

[Ikeda and Taniguchi, 1978] Ikeda, A. and Taniguchi, Y. (1978). Spectra and eigenforms of the laplacian on snand pn(c). *Osaka Journal of Mathematics*, 15(3):515–546.

[Jakobson et al., 2008] Jakobson, D., Strohmaier, A., and Zelditch, S. (2008). On the spectrum of geometric operators on kähler manifolds. *Journal of Modern Dynamics*, 2(4):701–718.

[Kaski, 2002] Kaski, P. (2002). Eigenvectors and spectra of cayley graphs. In *Manuscript for a seminar given at Helsinki University of Technology*.

[Kobayashi and Nomizu, 1963] Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1963). *Foundations of Differential Geometry Vol1*. Wiley.

[Lauret et al., 2015] Lauret, E. A., Miatello, R. J., and Rossetti, J. P. (2015). Representation Equivalence and p-Spectrum of Constant Curvature Space Forms. *Journal of Geometric Analysis*, 25(1):564–591.

[Lee, 1997] Lee, J. M. (1997). *Riemannian Manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, New York, NY.

[Lee, 2012] Lee, J. M. (2012). *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, New York, NY.

[Li, 2002] Li, C. H. (2002). On isomorphisms of finite Cayley graphs—a survey. *Discrete Mathematics*, 256(1-2):301–334.

[Lim, 2020] Lim, L.-H. (2020). Hodge laplacians on graphs. *SIAM Review*, 62(3):685–715.

[Mac Lane, 2013] Mac Lane, S. (2013). *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer Science & Business Media.

[Mantoiu et al., 2016] Mantoiu, M., Raikov, G., and de Aldecoa, R. T. (2016). *Spectral theory and mathematical physics*, volume 254. Springer.

[Marrocos and Gomes, 2019] Marrocos, M. A. M. and Gomes, J. N. V. (2019). Generic Spectrum of Warped Products and G-Manifolds. *The Journal of Geometric Analysis*, 29(4):3124–3134.

[Moretti, 2017] Moretti, V. (2017). Spectral theory and quantum mechanics. *UNITEXT, Italy: Springer International Publishing AG*.

[Munthe-Kaas et al., 2001] Munthe-Kaas, H., Quispel, G., and Zanna, A. (2001). *Application of symmetric spaces and Lie triple systems in numerical analysis*. Number 217. Department of Informatics, University of Bergen.

[Narici and Beckenstein, 2010] Narici, L. and Beckenstein, E. (2010). *Topological vector spaces*. Chapman and Hall/CRC.

[Oxtoby, 2013] Oxtoby, J. C. (2013). *Measure and category: A survey of the analogies between topological and measure spaces*, volume 2. Springer Science & Business Media.

[Petrecca and Röser, 2018] Petrecca, D. and Röser, M. (2018). Irreducibility of the Laplacian eigenspaces of some homogeneous spaces. *Mathematische Zeitschrift*, 291(1-2):395–419.

[Ranjan, 2012] Ranjan, P. (2012). *Discrete laplace operator: theory and applications*. The Ohio State University.

[Röntgen et al., 2021] Röntgen, M., Pyzh, M., Morfonios, C., Palaiodimopoulos, N., Diakonos, F., and Schmelcher, P. (2021). Latent symmetry induced degeneracies. *Physical Review Letters*, 126(18):180601.

[Rosenberg, 1997] Rosenberg, S. (1997). *The Laplacian on a Riemannian Manifold*. Cambridge University Press.

[Schueth, 2017] Schueth, D. (2017). Generic irreducibilty of Laplace eigenspaces on certain compact Lie groups. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 52(2):187–200.

[Semmelmann and Weingart, 2019] Semmelmann, U. and Weingart, G. (2019). The standard laplace operator. *manuscripta mathematica*, 158(1-2):273–293.

[Serre, 1977] Serre, J.-P. (1977). *Linear Representations of Finite Groups*, volume 42 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, New York, NY.

[Simon, 2007] Simon, B. (2007). *Spectral theory and mathematical physics: A festschrift in honor of Barry Simon's 60th birthday*. American Mathematical Soc.

[Singer, 2006] Singer, S. F. (2006). *Linearity, symmetry, and prediction in the hydrogen atom*. Springer Science & Business Media.

[Steiner, 2020] Steiner, R. S. (2020). Sup-norm of hecke–laplace eigenforms on s 3. *Mathematische Annalen*, 377(1-2):543–553.

[Subwiki, 2011] Subwiki, G. P. (2011). Linear representation theory of klein four-group.

[Subwiki, 2012] Subwiki, G. P. (2012). Faithful irreducible representation of quaternion group.

[Subwiki, 2016] Subwiki, G. P. (2016). Linear representation theory of quaternion group.

[Uhlenbeck, 1976] Uhlenbeck, K. (1976). Generic Properties of Eigenfunctions. *American Journal of Mathematics*, 98(4):1059.

[Watson, 1973] Watson, B. (1973). Manifold maps commuting with the laplacian. *Journal of Differential Geometry*, 8(1):85–94.

[Wigner, 2012] Wigner, E. (2012). *Group theory: and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*, volume 5. Elsevier.

[Williams, 2007] Williams, D. P. (2007). *Crossed products of C*-algebras*. Number 134. American Mathematical Soc.

[Yau, 1993] Yau, S.-T. (1993). Open problems in geometry. In *Proc. Symp. Pure Math*, volume 54, pages 1–28.

[Zachmanoglou and Thoe, 1986] Zachmanoglou, E. C. and Thoe, D. W. (1986). *Introduction to partial differential equations with applications*. Courier Corporation.

[Zelditch, 1990] Zelditch, S. (1990). On the generic spectrum of a riemannian cover. *Annales de l'institut Fourier*, 40(2):407–442.