

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RODRIGO DA SILVA TITO

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DESCREVENDO
SUPERFÍCIES PSEUDO-ESFÉRICAS**

SANTO ANDRÉ - SP

2022

RODRIGO DA SILVA TITO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DESCRIVENDO SUPERFÍCIES
PSEUDO-ESFÉRICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do ABC como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Igor Leite Freire

Santo André - SP

2022

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Tito, Rodrigo da Silva
Equações diferenciais descrevendo superfícies pseudo-esféricas /
Rodrigo da Silva Tito. — 2022.

128 fls.

Orientador: Igor Leite Freire

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa
de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2022.

1. Equações diferenciais do tipo pseudo-esférico. 2. Pseudo
potenciais. 3. Leis de conservação. I. Leite Freire, Igor. II. Programa
de Pós-Graduação em Matemática, 2022. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).

Santo André , **07 de Março de 2022 .**

Rodrigo da Silva Tito

Rodrigo da Silva Tito

Nome completo e Assinatura do(a) autor(a)

Igor Leite Freire

Igor Leite Freire

Nome completo e Assinatura do(a) (co)orientador(a)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Teresinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, RODRIGO DA SILVA TITO realizada em 04 de Fevereiro de 2022:

Igor Leite Freire
Pl/ Prof.(a) LUIZ ALBERTO DE OLIVEIRA SILVA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA

Igor Leite Freire
Pl/ Prof.(a) MARCIO FABIANO DA SILVA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) ICARO GONCALVES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) NAZIME SALES FILHO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

Igor Leite Freire
Prof.(a) IGOR LEITE FREIRE
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Per ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura.

FOLHA DE CITAÇÃO À CAPES

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001”

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação a Deus, pois sem Ele nada do que foi feito se fez. Dedico também a minha linda família: a minha esposa, que está sempre comigo me incentivando a ser alguém melhor, a minha filha Olívia, um presente de Deus, a minha mãe, o meu pai e a minha irmã, por toda oração e amor dados a mim ao longo do tempo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus. Em sua Palavra está escrito, “todas as coisas contribuem juntamente para o bem daqueles que amam a Deus”, e eu pude provar deste cuidado ao longo da minha caminhada. Ele em todo tempo deu-me força, disposição, perseverança e não me deixou em momento algum.

Agradeço a minha esposa Priscila Tito, pelo enorme amor e companheirismo. Aos meus pais Vanda e Tomaz, a minha irmã Raquel, a minha sogra Helmira e a toda família, pelas orações e torcida.

Agradeço ao professor Igor Leite Freire, meu orientador de mestrado, por ter me dado todo o suporte e embasamento teórico para o entendimento sistemático dos conteúdos desenvolvidos neste trabalho, pela amizade, pela dedicação e pelo seu comprometimento em me tornar um pesquisador.

Deixo meus sinceros agradecimentos a todos os professores do Programa de Pós-graduação em Matemática, pelos ensinamentos e suporte.

Aos professores e membros da banca examinadora, pelas sugestões, as quais melhoraram consideravelmente o trabalho.

Finalmente, à Capes, pelo apoio financeiro durante todo o mestrado e, a todos amigos que de alguma forma participaram dessa conquista.

“Faça as coisas o mais simples que você puder,
porém não se restrinja às mais simples.”
— **Albert Einstein**

RESUMO

Neste trabalho estudamos equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas, que são superfícies de curvatura Gaussiana constante e negativa. Também estudamos o problema linear associado a estas equações, bem como seus pseudo-potenciais e leis de conservação. Além disso, mostramos que uma outra equação descoberta por Novikov é do tipo pseudo-esférico. Mostramos seu pseudo-potencial quadrático e um número infinito de leis de conservação.

Palavras-chave: Equações descrevendo superfícies pseudo-esféricas, equações de Novikov, pseudo-potenciais, leis de conservação.

ABSTRACT

In this work we study differential equations describing pseudo-spherical surfaces, that are surfaces with negative and constant Gaussian curvature. We also study the linear associated problem to these equations, as well as its pseudo-potentials and conservation laws. Moreover, we show that another equation discovered by Novikov is of the pseudo-spherical type. We find its quadratic pseudo-potential and an infinite number of conservation laws.

Keywords: Equations describing pseudo-spherical surfaces, Novikov equations, pseudo-potentials, conservation laws.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	ASPECTOS ALGÉBRICO E GEOMÉTRICO	3
2.1	Espaço vetorial, espaço dual e produto interno	3
2.2	Espaço tangente e campos vetoriais	9
2.3	Formas e espaço cotangente	18
2.4	Métricas Riemannianas	42
2.5	Equações de Estrutura de Cartan	44
3	EQUAÇÕES GEOMETRICAMENTE INTEGRÁVEIS E LEIS DE CONSERVAÇÃO	49
3.1	Equação do tipo pseudo-esférico	49
3.2	Problemas Lineares Associados	53
3.3	Pseudo-potenciais e leis de conservação	58
4	UMA EQUAÇÃO DE NOVIKOV DO TIPO PSEUDO-ESFÉRICO	69
4.1	Resultados Preliminares	69
4.2	Resultados Principais	71
5	RESULTADOS ANALÍTICOS PARA A EQUAÇÃO DE NOVIKOV	83
5.1	Um pseudo-potencial quadrático para a equação de Novikov	83
5.2	Leis de conservação para a equação de Novikov	90
6	CONCLUSÃO	105
	Referência Bibliográfica	107

1

INTRODUÇÃO

O estudo de equações diferenciais parciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas (ou equações do tipo pseudo-esférico), é de fundamental importância em diversos problemas de matemática pura e aplicada. Tal importância se deve às mais variadas aplicações geométricas e descrições de diversos fenômenos físicos não-lineares da natureza.

Os primeiros contatos com tais equações surgem no início dos estudos da teoria clássica de superfícies no espaço euclidiano tridimensional, com destaque nos trabalhos desenvolvidos por Bäcklund e Bianchi (ver em [1], Capítulo 21), tendo como principal exemplo a célebre equação de sine-Gordon $u_{xt} = \sin(u)$ em que $u = u(x, t)$. Contudo, o estudo de forma sistemática destas equações começou em 1986 com o artigo seminal de Chern e Tenenblat [5], motivados por uma interpretação geométrica do método de espalhamento inverso de Ablowitz, Kaup, Newell e Segur (AKNS)[2] feita em 1979 por Sasaki [20]. Geometricamente, Chern e Tenenblat caracterizaram as equações do tipo pseudo-esférico pelo fato de que cada solução genérica determina uma métrica Riemanniana de curvatura Gaussiana constante e igual a -1 em subconjuntos abertos de \mathbb{R}^2 .

Em 2002, Reyes formulou a noção de integrabilidade geométrica [16], o qual consiste em uma família não-trivial a 1- parâmetro de superfícies pseudo-esféricas, mostrando que qualquer equação geometricamente integrável é a condição de integrabilidade de um problema linear. Em seus trabalhos [16, 17, 18] ele explora as ideias fundamentais de Chern e Tenenblat [5] e suas conexões com pseudo-potenciais e leis de conservação, mostrando que a partir de uma equação geometricamente integrável é possível construir uma infinidade de leis de conservação linearmente independentes a partir de pseudo-potenciais.

Em 2009, Novikov [15] fez uma classificação de equações do tipo $u_t - u_{txx} = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ em que $u = u(x, t)$ e F uma função polinomial, que potencialmente podem ser integráveis, no sentido de possuírem infinitas simetrias. Várias equações

foram encontradas por ele, dentre elas estão as conhecidas equações do tipo pseudo-esférico: equação de Camassa-Holm [4] (ver em [15], Teorema 3, Eq. (13)) e equação de Degasperis-Procesi (ver em [15], Teorema 3, Eq. (14)).

Motivados em descobrir quais das demais equações apresentadas em [15] (Teorema 3, Eqs. (15) – (20)) podem também descrever superfícies pseudo-esféricas, aplicamos os resultados apresentados em [6, 21] e, provamos que tomando os parâmetros sob determinadas condições de diferenciabilidade, apenas uma das equações [15] (Teorema 3, eq. (17)),

$$u_t - u_{txx} = -2uu_{xxx} - 6u_xu_{xx} + 2uu_{xx} + 2u_x^2 + 4uu_x,$$

é do tipo pseudo-esférico; a qual nos referiremos como *equação de Novikov*.

O fato da equação de Novikov descrever uma superfície pseudo-esférica e, em particular, ser geometricamente integrável, nos possibilita, a partir das considerações geométricas feitas por Chern-Tenenblat [5] e dos resultados de Reyes [16, 17, 18], encontrar um pseudo-potencial quadrático, por meio do qual, podemos descobrir leis de conservação.

A presente dissertação está estruturada da seguinte maneira:

- No Capítulo 2 apresentaremos a fundamentação e base geométrica necessária para o trabalho, em particular, as equações de estrutura de Cartan para o caso bidimensional.
- No Capítulo 3 abordaremos a definição de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas, trataremos de problemas lineares associados, pseudo-potenciais e leis de conservação, bem como de alguns exemplos clássicos.
- O Capítulo 4 é o cerne da dissertação, no que tange a resultados. Nele provaremos que uma das equações de Novikov é do tipo pseudo-esférico, o que nos motivou o trabalho [9].
- No Capítulo 5 apresentaremos um pseudo-potencial quadrático para uma equação de Novikov e exibiremos uma hierarquia de leis de conservação, os quais se encontram no trabalho [9].
- Por fim, no Capítulo 6 apresentaremos as conclusões desta dissertação.

2

ASPECTOS ALGÉBRICO E GEOMÉTRICO

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos básicos de Álgebra Linear, Cálculo Diferencial, Álgebra Exterior, Geometria Riemanniana, dentre outros, os quais são preliminares para a abordagem geométrica de determinados objetos nos capítulos subsequentes. As principais referências deste capítulo são [7], [13], [14], [22] e [23].

2.1 ESPAÇO VETORIAL, ESPAÇO DUAL E PRODUTO INTERNO

Um *espaço vetorial* E , definido sobre o corpo dos números reais \mathbb{R} , é um conjunto de elementos, chamados vetores, munido de duas operações: adição $+: E \times E \rightarrow E$, que associa cada par $(u, v) \in E \times E$ a um novo vetor $u + v \in E$ e a multiplicação por um escalar $\cdot: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, que associa cada escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $u \in E$ a um novo vetor $\alpha \cdot u \in E$ ou $\alpha u \in E$. A operação $+$ é comutativa, associativa, tem uma identidade 0 e um inverso $-u$ para cada vetor $u \in E$, enquanto \cdot é associativa, distributiva e $1 \cdot u = u$ para cada $u \in E$.

A seguir ilustraremos este conceito mediante um exemplo bastante comum de espaços vetoriais, o qual será o espaço vetorial base do trabalho.

Exemplo 2.1. O *espaço vetorial euclidiano n -dimensional*, é o conjunto \mathbb{R}^n definido como o conjunto de todas as n -uplas de números reais,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\},$$

munido das operações

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n),$$

em que $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Outro exemplo muito comum de espaços vetoriais são os espaços de funções.

Exemplo 2.2. Seja X um conjunto não-vazio qualquer. O conjunto $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ de todas as funções reais de X em \mathbb{R} , é um espaço vetorial quando definidos: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in X$, para quaisquer funções $f, g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ e qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

Um subconjunto $F \subset E$, tal que, para todo $u, v \in F$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que $u + v \in F$ e $\alpha u \in F$, é chamado de *subespaço vetorial* de E . Este conceito torna-se muito importante quando queremos obter uma estrutura de espaço vetorial contido em outro, uma vez que um subespaço vetorial é um espaço vetorial. A fim de ilustrar isso, segue o exemplo:

Exemplo 2.3. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções reais de várias variáveis reais $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. O conjunto $C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ das funções infinitamente diferenciáveis (suaves) é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

Para o nosso estudo estamos interessados nos espaços vetoriais de dimensão finita, os quais possuem uma estrutura algébrica extremamente simples, evidenciada pelas ideias de base e dimensão, que veremos a seguir. Antes, porém, apresentaremos os conceitos de geradores e de dependência e independência linear.

Definição 2.4. Seja E um espaço vetorial e seja $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset E$ um conjunto finito. O *subespaço vetorial* de E gerado por S , denotado por $\text{Span}(S)$, é o conjunto de todas as combinações lineares de S :

$$\text{Span}(S) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Um conjunto finito $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ é *linearmente dependente* se houver escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, nem todos zero, de modo que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. Se S não é linearmente dependente, então é *linearmente independente*.

Um critério extremamente útil para verificar a independência linear de um conjunto de vetores $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, é que S é linearmente independente se a condição de que existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ satisfazendo $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ implica que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Lema 2.5. *Seja E um espaço vetorial. Se o conjunto $\{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ é linearmente independente e o conjunto $\{v_1, \dots, v_m\} \subset E$ gera E , então $n \leq m$.*

Demonstração. Como $\{v_1, \dots, v_m\}$ gera E , então, para cada $j = 1, \dots, n$, existem escalares a_{1j}, \dots, a_{mj} tais que $u_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}v_i$.

Suponha que $n > m$. Então o seguinte sistema linear homogêneo admite uma solução não-trivial:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

uma vez que existem mais variáveis do que equações.

Seja $x_1 = r_1, \dots, x_n = r_n$ uma solução não-trivial. Então,

$$r_1u_1 + \dots + r_nu_n = r_1 \sum_{i=1}^m a_{i1}v_i + \dots + r_n \sum_{i=1}^m a_{in}v_i = \left(\sum_{j=1}^n r_j a_{1j} \right) v_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^n r_j a_{mj} \right) v_m = 0.$$

Isso contradiz a independência linear do conjunto $\{u_1, \dots, u_n\}$. Concluimos, portanto, que $n \leq m$. \square

Definição 2.6. Uma base de um espaço vetorial E é um conjunto $\mathcal{B} \subset E$ linearmente independente que gera E .

Em outras palavras todo vetor $u \in E$ se exprime, de modo único, como combinação linear $u = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i$ de elementos $u_i, 1 \leq i \leq m$, da base \mathcal{B} .

Teorema 2.7. Seja E um espaço vetorial e seja $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de n vetores para E . Então, todas as outras bases de E também devem ter n elementos.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_m\}$ uma outra base para E . Como \mathcal{B}' é linearmente independente e \mathcal{B} gera E , pelo Lema 2.5 temos que $m \leq n$.

Além disso, como \mathcal{B} é linearmente independente e \mathcal{B}' gera E , também pelo Lema 2.5 temos que $n \leq m$. Portanto, $m = n$. Concluimos, assim, que qualquer outra base de E possui também n elementos. \square

Seja E um espaço vetorial. Pelo Teorema 2.7, se E tem uma base de n vetores, então sua dimensão é finita. Chamamos n de dimensão de E e escrevemos $\dim(E) = n$. Por definição, $\dim(\{0\}) = 0$.

Apresentaremos a seguir um conceito que é utilizado como base algébrica dos objetos básicos da geometria diferencial, formas diferenciais e tensores.

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. Define-se o conjunto de todas as transformações lineares $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, que são chamadas de *funcionais lineares*, como

$$E^* = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é um funcional linear}\}.$$

A soma de dois funcionais lineares $f, g \in E^*$ e o produto de um funcional linear $f \in E^*$ por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ são os funcionais lineares $f + g \in E^*$ e $\alpha f \in E^*$, definidos, respectivamente, por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, para todo $x \in E$. O vetor zero $0 \in E^*$ é definido por $0(x) = 0$ para todo $x \in E$, e, além disso, $-f \in E^*$ é definido por $(-f)(x) = -f(x)$, para todo $x \in E$.

O conjunto E^* , equipado com as definições acima, é um espaço vetorial, o qual é chamado de espaço vetorial dual de E , cujos seus elementos também são chamados de *vetores duais*, *1-formas lineares* ou *covetores*.

A fim de determinarmos uma base para o espaço vetorial E^* , o seguinte teorema, fornece uma construção importante.

Teorema 2.8. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita, então $\dim(E) = \dim(E^*)$.*

Demonstração. Seja $n = \dim E$. Tomemos uma base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ para E . Construiremos uma base para E^* com n covetores.

De modo geral, se E e F são espaços vetoriais de dimensão finita e \mathcal{B} uma base de E , existe uma única transformação linear $f : E \rightarrow F$ tal que $f(u_i) = u'_i \in F$ para cada $u_i \in \mathcal{B}$. Por esse motivo, para cada $i = 1, \dots, n$, seja $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ o covetor determinado pelas condições $f_i(u_i) = 1$ e $f_i(u_j) = 0$ se $i \neq j$. Note que, para qualquer $x \in E$, podemos escrevê-lo como combinação linear da base \mathcal{B} , isto é, $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$, e então

$$f_i(x) = x_i.$$

Assim, mostraremos que o conjunto composto por estes n covetores, digamos $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$, é uma base de E^* . Para isto, mostraremos que \mathcal{B}^* é um conjunto linearmente independente e gera E^* .

Suponha que $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0$, em que os α_i são constantes reais; então, para todo $x \in E$ tem-se que $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) = 0$. Em particular, tomando $x = u_i$ para cada $i = 1, \dots, n$, obtemos

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(u_i) = \alpha_i,$$

ou seja, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Logo, \mathcal{B}^* é um conjunto linearmente independente.

Agora, tomemos $f \in E^*$ qualquer (isto é, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear). Definamos $c_i = f(u_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$, em que os c_i são constantes reais. Para qualquer $x \in E$, tem-se $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$, segue-se que

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(u_i) = \sum_{i=1}^n x_i c_i = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i\right)(x).$$

Logo, $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$ e, portanto, \mathcal{B}^* gera E^* . Assim, \mathcal{B}^* com n covetores é uma base para E^* , concluindo que $\dim(E) = \dim(E^*)$. \square

Definição 2.9. Seja $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base para E . A base $\mathcal{B}^* = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$ para E^* , em que $u_i^* : E \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, são funcionais lineares tais que

$$u_i^*(u_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

é chamada de base dual da base \mathcal{B} .

Exemplo 2.10. Seja $\mathcal{B}_0 = \{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de \mathbb{R}^n , em que $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ com 1 a i -ésima componente. A base $\mathcal{B}_0^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ dual a \mathcal{B}_0 , é denominada base canônica de $(\mathbb{R}^n)^*$. Observe que se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então $e_i^*(x) = x_i$. Ou seja, e_i^* é a projeção na i -ésima coordenada.

O estudo de certas propriedades geométricas do espaço vetorial E de dimensão finita como ângulos, ortogonalidade, comprimento, distâncias e entre outras, se torna possível quando introduzimos um produto interno.

Definição 2.11. Um produto interno em um espaço vetorial E de dimensão finita é uma aplicação $g : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

- i) g é uma forma bilinear, isto é, linear em cada entrada;
- ii) g é simétrica: para todo $u, v \in E$, $g(u, v) = g(v, u)$;
- iii) g é definida positiva: para todo $u \in E$, $g(u, u) \geq 0$, com $g(u, u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

O par (E, g) é chamado de *espaço vetorial com produto interno*.

Exemplo 2.12. No espaço euclidiano \mathbb{R}^n , a aplicação $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(u, v) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, em que $u = (x_1, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, \dots, y_n)$, é chamada *produto interno canônico* de \mathbb{R}^n . Basta notarmos que g é bilinear, simétrica e definida positiva, pois $g(u, u) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ é sempre não-negativo e, $g(u, u) = 0$ quando $x_1 = \dots = x_n = 0$, logo $u = 0$.

Teorema 2.13. *Cada espaço vetorial de dimensão finita carrega uma estrutura de produto interno.*

Demonstração. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita, $\dim E = n > 0$. Tomemos uma base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ de E . Definimos uma aplicação $g_{\mathcal{B}} : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ por $g_{\mathcal{B}}(u, v) = \sum_{i=1}^n x_iy_i$, em que $u = \sum_{i=1}^n x_iu_i$ e $v = \sum_{j=1}^n y_ju_j$. Observe que aplicação $g_{\mathcal{B}}$ está bem definida, pois, todo vetor de E , pode ser expresso, de modo único, como combinação linear dos elementos da base \mathcal{B} . Observe também que $g_{\mathcal{B}}$ é bilinear, ou seja, para quaisquer $u, v, u', v' \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$g_{\mathcal{B}}(u + \alpha u', v) = \sum_{i=1}^n (x_i + \alpha x'_i) y_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \alpha \sum_{i=1}^n x'_i y_i = g_{\mathcal{B}}(u, v) + \alpha g_{\mathcal{B}}(u', v),$$

analogamente,

$$g_{\mathcal{B}}(u, v + \alpha v') = g_{\mathcal{B}}(u, v) + \alpha g_{\mathcal{B}}(u, v').$$

Claramente $g_{\mathcal{B}}$ é simétrica, pois,

$$g_{\mathcal{B}}(u, v) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = g_{\mathcal{B}}(v, u).$$

Por fim, $g_{\mathcal{B}}$ é definida positiva, uma vez que $g_{\mathcal{B}}(u, u) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$, e se $g_{\mathcal{B}}(u, u) = 0$ então $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$, logo $x_1 = \dots = x_n = 0$ e $u = 0$. Portanto, $g_{\mathcal{B}}$ define um produto interno em E . \square

A partir do produto interno em E podemos induzir uma norma e uma métrica em E :

Definição 2.14. Seja E um espaço vetorial com o produto interno $g : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. A norma $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ do vetor $u \in E$ é dada por

$$\|u\| = \sqrt{g(u, u)}.$$

E , então, a métrica $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ induzida pela norma é

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{g(u - v, u - v)},$$

em que $u, v \in E$. Se $E = \mathbb{R}^n$, denota-se $g(u, v) := \langle u, v \rangle$, $u, v \in \mathbb{R}^n$.

No seguinte teorema, veremos um resultado importante no sentido de que podemos associar elementos dos espaços vetoriais E e E^* via isomorfismo sem depender da base.

Teorema 2.15. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita, com produto interno g . Para todo $v \in E$, defina $i_v \in E^*$ por $i_v(w) = g(v, w)$ para $w \in E$. Então a função*

$$\Phi : E \rightarrow E^*,$$

definida por $\Phi(v) = i_v$ é um isomorfismo linear.

Demonstração. Primeiro, vamos verificar a linearidade de Φ : sejam $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$; pelo fato que g é bilinear, temos que

$$i_{u+v}(w) = g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w) = i_u(w) + i_v(w) = (i_u + i_v)(w),$$

e

$$i_{\alpha v}(w) = g(\alpha v, w) = \alpha g(v, w) = \alpha i_v(w),$$

para todo $w \in E$. Assim, $\Phi(u + v) = \Phi(u) + \Phi(v)$ e $\Phi(\alpha v) = \alpha\Phi(v)$.

Agora, mostraremos que Φ é injetiva, para tanto, verificaremos que $\ker(\Phi) = \{0\}$. Dado $v \in \ker(\Phi)$ qualquer, então $\Phi(v) = 0$, ou seja, para todo $w \in E$ tem-se

$$g(v, w) = i_v(w) = 0.$$

Em particular, se $w = v$, $g(v, v) = 0$, logo $v = 0$, uma vez que g é definida positiva. Portanto, $\ker(\Phi) = \{0\}$ e, então Φ é injetiva. Portanto, como $\dim E = \dim E^*$ (visto no Teorema 2.8), concluimos que Φ é um isomorfismo linear. \square

2.2 ESPAÇO TANGENTE E CAMPOS VETORIAIS

Nesta seção, abordaremos o conceito de espaço tangente a \mathbb{R}^n no ponto $p \in \mathbb{R}^n$, que é o terreno no qual se desenvolvem os tensores e as formas diferenciais que veremos nas próximas seções.

Antes de definirmos este espaço precisamos entender como se comportam seus elementos. Nesse sentido, começaremos com alguns conceitos do cálculo diferencial.

Definição 2.16. Uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, com $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, é *diferenciável* em $p \in U$, se existe um funcional linear $A_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(p+h) - f(p) - A_p(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

O funcional linear A_p é chamado de derivada de f em p , e denota-se $Df(p) = A_p$. Quando f é diferenciável em todos os pontos de U , diz-se simplesmente que f é diferenciável. Além disso, f é dita *suave* ou *diferenciável de classe C^∞* quando possui derivadas parciais de todas as ordens contínuas.

Definição 2.17. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto contendo 0. Uma curva parametrizada suave é uma função $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada $t \in I$ associa $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, em que as funções $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ são suaves.

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada suave, denotemos $p := \gamma(0)$ e

$$v_p := \gamma'(0) = \left. \frac{d}{dt} (\gamma(t)) \right|_{t=0} = (x'_1(0), \dots, x'_n(0))_p.$$

Definição 2.18. Seja $p \in \mathbb{R}^n$. Um *vetor tangente* em p é uma n -upla ordenada de números reais $v_p = (v_1, \dots, v_n)_p$ tal que existe uma curva parametrizada suave $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tendo as propriedades que $\gamma(0) = p$ e que $\gamma'(0) = v_p$.

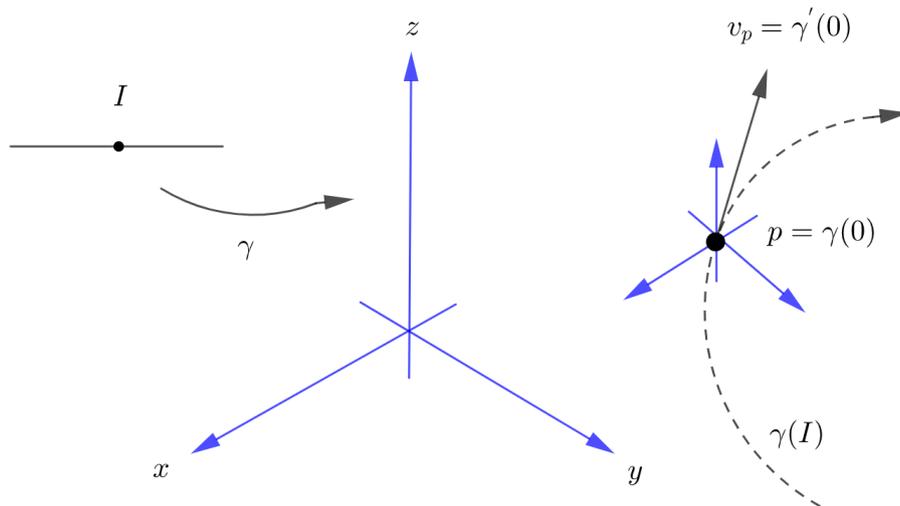


Figura 1: A definição geométrica de um vetor tangente em \mathbb{R}^3 .

Definição 2.19. Seja $p \in \mathbb{R}^n$. O conjunto de todos os vetores tangentes em p , denotado por $T_p(\mathbb{R}^n)$, é chamado de *espaço tangente* de \mathbb{R}^n em p .

O espaço tangente $T_p(\mathbb{R}^n)$ equipado com as operações de adição $v_p + w_p = (v + w)_p$ e multiplicação por um escalar $\alpha (v_p) = (\alpha v)_p$ é um espaço vetorial. Além disso, essas operações no espaço tangente $T_p(\mathbb{R}^n)$ o tornam um espaço vetorial isomorfo a \mathbb{R}^n . Podemos ver isso através do isomorfismo linear $\phi : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $v_p \mapsto v$.

Teorema 2.20. O espaço vetorial $T_p(\mathbb{R}^n)$ é isomorfo ao \mathbb{R}^n para cada $p \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Dada a função $\phi : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $v_p \mapsto v$, mostraremos que é um isomorfismo. Primeiro, notemos que ϕ é linear, pois, quaisquer $v_p, w_p \in T_p(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\phi(v_p + \alpha w_p) = \phi((v + \alpha w)_p) = v + \alpha w = \phi(v_p) + \alpha \phi(w_p).$$

Suponha que $v_p \in \ker(\phi)$. Então $0 = \phi(v_p) = v \Leftrightarrow 0_p = v_p$. Logo, $\ker(\phi) = \{0\}$ e, portanto, ϕ é injetiva. Agora, dado um vetor $w \in \mathbb{R}^n$ qualquer, note que $w = \phi(w_p)$ tal que $w_p \in T_p(\mathbb{R}^n)$. Portanto, ϕ é sobrejetiva. Concluimos assim que ϕ é um isomorfismo e que os espaços vetoriais $T_p(\mathbb{R}^n)$ e \mathbb{R}^n são isomorfos. \square

Do Teorema 2.20, se $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$ é a base canônica para \mathbb{R}^n , então $\{(e_i)_p; 1 \leq i \leq n\}$ forma uma base para $T_p(\mathbb{R}^n)$.

Na tentativa de deixar a notação menos carregada para as definições que se seguem, denotaremos um vetor tangente em p como sendo v , ao invés de v_p . Note que podemos fazer isso devido ao isomorfismo ϕ do Teorema 2.20. Mais adiante, voltaremos a usar a notação v_p .

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v \in \mathbb{R}^n$. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo $p \in \mathbb{R}^n$, a *derivada direcional* de f na direção de v em p é definida por

$$D_v f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \gamma(t)) \right|_{t=0}.$$

Pela regra da cadeia, obtemos que

$$D_v f = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \gamma(t)) \right|_{t=0} = Df(\gamma(0)) \gamma'(0) = \langle \nabla f(p), v \rangle,$$

em que ∇f é a notação usual do *gradiente* de f .

Observação 2.21. O gradiente de f no ponto p é dado por

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right).$$

Observação 2.22. A derivada direcional D_v em p é um operador no espaço de funções suaves em p . Uma vez que, dado um $v = (v_1, \dots, v_n) \in T_p(\mathbb{R}^n)$, tem-se

$$(D_v f)(p) = \langle \nabla f(p), v \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p). \quad (2.2.1)$$

Como $(D_v f)(p)$ é um número real, não uma função, e v é um vetor em p , as derivadas parciais são consideradas em p , ou seja, $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$, $1 \leq i \leq n$. Portanto,

$$D_v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

é um operador, cujo domínio consiste em funções suaves definidas em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo p , tal que $f \mapsto (D_v f)(p) \in \mathbb{R}$.

A fim de descrever os vetores tangentes de uma maneira a utilizar as propriedades essenciais de derivada direcional, apresentaremos alguns conceitos a seguir. Primeiro, consideremos $C_p^\infty(U)$ o conjunto de funções suaves a valores reais definidas no aberto U de \mathbb{R}^n contendo p .

Definição 2.23. Seja $p \in U \subset \mathbb{R}^n$, U aberto. Uma *derivação linear* em p é um operador $D : C_p^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades: para quaisquer $f, g \in C_p^\infty(U)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. D é linear: $D(f + \alpha g) = Df + \alpha Dg$.
2. D satisfaz a regra de Leibniz: $D(fg) = (Df)g(p) + f(p)(Dg)$.

Denota-se o conjunto de todas as derivações lineares em p por $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. Este conjunto é um espaço vetorial real, uma vez que a soma de duas derivações em p e um múltiplo escalar por uma derivação em p são ainda derivações em p .

Proposição 2.24. Se $D \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ então $D(c) = 0$ para qualquer constante c .

Demonstração. Seja $c \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função constante. Note que $c = c(x) \in \mathbb{R}$ é constante para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como D é linear, tem-se que $D(c) = cD(1)$. Pela regra de Leibniz:

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1) = 2D(1).$$

Somando $-D(1)$ de ambos os lados temos que $D(1) = 0$. Assim, $D(c) = 0$. \square

Vimos na Observação 2.22 que a derivada direcional em p , D_v , é um operador no espaço de funções suaves em p . Agora, veremos que D_v é uma derivação linear em p .

Proposição 2.25. *Seja $p \in \mathbb{R}^n$. Para cada vetor $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$ no ponto p , o operador $D_v : C_p^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$D_v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

é uma derivação em p .

Demonstração. Mostraremos que D_v é linear e satisfaz a regra de Leibniz. Note que, as derivadas parciais $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$, $1 \leq i \leq n$, são lineares e satisfazem a regra de Leibniz. Sendo assim, para quaisquer $f, g \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} D_v(f + \alpha g) &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} (f + \alpha g) \Big|_p = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p + \alpha \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_p \\ &= D_v f(p) + \alpha D_v g(p), \end{aligned}$$

logo D_v é linear. Além disso, a regra de Leibniz é satisfeita

$$\begin{aligned} D_v(fg) &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} (fg) \Big|_p = \sum_{i=1}^n v_i \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p g(p) + f(p) \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_p \right] \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p g(p) + f(p) \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_p = (D_v f) g(p) + f(p) (D_v g). \end{aligned}$$

Portanto, D_v é uma derivação linear em p , isto é, $D_v \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. □

Do resultado acima, temos que as derivadas direcionais em p são todas derivações em p , sendo assim, definindo a aplicação $\varphi : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ como $\varphi : v \mapsto D_v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$, provaremos a seguir, Teorema 2.27, que φ é um isomorfismo linear, e, a partir da qual poderemos ver cada vetor tangente $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$ como uma derivação $D_v \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. Para tanto, apresentaremos, de início, o Lema 2.26, que é uma versão do teorema de Taylor para funções de várias variáveis.

Lema 2.26. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave definida em um aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo o ponto $p = (p_1, \dots, p_n)$. Então, existem n funções suaves $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, satisfazendo $g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ e*

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) g_i(x),$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$.

Demonstração. Como $U \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto convexo, com $p \in U$, então, para todo os $x \in U$, os pontos do segmento $(1-t)p + tx$, para todo $t \in [0, 1]$, também pertencem a U . Sendo assim, $f((1-t)p + tx)$ está definida para todo $t \in [0, 1]$.

Tomando $q(t) := p + t(x - p) \in U$, pela regra da cadeia, tem-se que

$$\frac{d}{dt}f(q(t)) = Df(q(t))q'(t) = \langle \nabla f(q(t)), x - p \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(q(t)).$$

Agora, integrando a ambos os lados da igualdade acima em relação a t em $[0, 1]$, e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos que:

$$f(q(1)) - f(q(0)) = \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(q(t)) dt,$$

ou seja,

$$f(x) - f(p) = \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) g_i(x),$$

em que

$$g_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(q(t)) dt, \quad 1 \leq i \leq n,$$

são suaves, uma vez que f é suave em $q(t) \in U$, para todo $t \in [0, 1]$. Além disso, segue que

$$\begin{aligned} g_i(p) &= \lim_{x \rightarrow p} g_i(x) = \lim_{x \rightarrow p} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(q(t)) dt = \lim_{x \rightarrow p} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x - p)) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x - p)) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \right] dt + \lim_{x \rightarrow p} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) t \Big|_0^1 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq n$. □

Teorema 2.27. A aplicação $\varphi : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ definida por $v \mapsto D_v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ é um isomorfismo linear de espaços vetoriais.

Demonstração. Primeiro, notemos que φ é uma aplicação linear de espaços vetoriais, pois, D_v é linear em p . Para provar a injetividade, suponha que $\varphi(v) = 0$ para $v = (v_1, \dots, v_n) \in \ker(\varphi)$. Aplicando D_v em cada uma das n projeções $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, temos que

$$0 = D_v(x_i) = \sum_{i=1}^n v_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (x_i) = v_i,$$

em que $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (x_i) = 1$ e $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (x_j) = 0$ para $i \neq j$. Portanto, $v_1 = \dots = v_n = 0$, logo $v = 0$ e $\ker(\varphi) = \{0\}$. Portanto, φ é injetiva.

Agora, provaremos a sobrejetividade. Para isso, seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave definida em um conjunto aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo p , então existe uma pequena bola aberta B_p centrada em p , tal que $B_p \subset U$. Restringindo o domínio U a B_p , a função f é definida em uma pequena bola centrada em p , e, portanto, aplicando o Lema 2.26, existem funções suaves $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, satisfazendo $g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ e

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) g_i(x),$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Note que, $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção da i -ésima coordenada, $x_i(x) = x_i$. Aplicando a derivação $D \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ a ambos os lados da igualdade acima, temos que

$$Df(x) = Df(p) + \sum_{i=1}^n D[(x_i - p_i) g_i(x)].$$

Aplicando a regra de Leibniz, tem-se que

$$\begin{aligned} Df(x) &= Df(p) + \sum_{i=1}^n \left[D(x_i - p_i) g_i(p) + (x_i - p_i) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p Dg_i(x) \right] \\ &= Df(p) + \sum_{i=1}^n [D(x_i - p_i) g_i(p) + (p_i - p_i) Dg_i(x)] \\ &= Df(p) + \sum_{i=1}^n D(x_i - p_i) g_i(p) \\ &= Df(p) + \sum_{i=1}^n (Dx_i - Dp_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p). \end{aligned}$$

Como $f(p)$ e p_i , $1 \leq i \leq n$, são constantes, pela Proposição 2.24, temos que $D(p_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$, e $D(f(p)) = 0$. Sendo assim, a igualdade acima, torna-se

$$Df(x) = \sum_{i=1}^n (Dx_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Definindo $v_i = Dx_i$, temos, portanto,

$$D = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

provando assim que $D = D_v$ para $v = (v_1, \dots, v_n)$. Logo, φ é sobrejetiva. \square

Este teorema, mostra que podemos identificar os vetores tangentes $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$ como as derivações $D_v \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ usando o isomorfismo do espaço vetorial $T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.28. O conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p ; 1 \leq i \leq n \right\}$ de operadores de derivadas parciais é uma base para $T_p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Primeiro, notemos que, como $T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$ (são isomorfos), o conjunto de vetores $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$ é a base canônica para $T_p(\mathbb{R}^n)$, em que $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ com 1 na i -ésima coordenada. Pelo Teorema 2.27, podemos associar cada vetor tangente $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$ a uma derivação $D_v \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ através do isomorfismo $\varphi : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$, definido por $v \mapsto D_v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$. Como um isomorfismo de espaços vetoriais leva base em base, temos que $\{\varphi(e_i); 1 \leq i \leq n\}$ é uma base de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. Mas, note que $\varphi(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$, $1 \leq i \leq n$; portanto, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p ; 1 \leq i \leq n \right\}$ é uma base para $T_p(\mathbb{R}^n)$, uma vez que $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n) \simeq T_p(\mathbb{R}^n)$. \square

A partir de agora escreveremos um vetor tangente $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ como

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p.$$

O conceito de espaço tangente definido até aqui se constitui no ponto de vista local. Agora, faremos uma breve abordagem do ponto de vista global. Ou seja, abordaremos a coleção de todos os espaços tangentes, a fim de extrairmos uma estrutura geométrica geral.

Definição 2.29. O fibrado tangente de \mathbb{R}^n , denotado por $T\mathbb{R}^n$, é o conjunto de todos pares ordenados da forma (p, v) , em que $p \in \mathbb{R}^n$ e $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$.

Observação 2.30. O conjunto $T\mathbb{R}^n$ é constituído pela união disjunta dos espaços tangentes $T_p(\mathbb{R}^n)$:

$$T\mathbb{R}^n = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \{p\} \times T_p(\mathbb{R}^n).$$

A importância do fibrado tangente definido acima se deve principalmente ao papel que desenvolve para descrever campos vetoriais.

Na definição a seguir, para evitarmos uma redundância na notação, não escreveremos $(p, v) \in T\mathbb{R}^n$, embora dessa forma enfatiza a dependência do ponto p com um componente separado. Voltaremos à notação inicial escrevendo $v_p \equiv (p, v)$ com v_p o vetor tangente no ponto p , usando o fato que a dependência de p é vista nas componentes de v_p (isto é, $v_p = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ como funções de p) e que não podemos realizar operações de espaço vetorial nos vetores v_p, v_q quando $p \neq q$.

Definição 2.31. Para qualquer aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, um *campo vetorial* suave em U é uma aplicação $v : U \rightarrow T\mathbb{R}^n$ que associa cada ponto $p \in U$ um vetor tangente v_p em $T_p(\mathbb{R}^n)$.

Como $T_p(\mathbb{R}^n)$ tem base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p ; 1 \leq i \leq n \right\}$, o vetor v_p é uma combinação linear da forma

$$v_p = \sum_{i=1}^n v_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

em que $v_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, são funções suaves em p .

Exemplo 2.32. Seja $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$. A aplicação $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow T\mathbb{R}^2$ definida por

$$v_p = -x_2(p) \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + x_1(p) \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p = -p_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + p_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p,$$

é um campo vetorial rotacional, ilustrado na Figura 2. Note que, este campo vetorial tem direção igual a do vetor tangente da curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, cujo o traço é o círculo de raio r centrado na origem. O vetor tangente de $\gamma(t)$ no ponto $p = (p_1, p_2) = \gamma(t_0) = (r \cos(t_0), r \sin(t_0))$, é dado por

$$\gamma'(t_0) = -r \sin(t_0) \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + r \cos(t_0) \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p = -p_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + p_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p = v_p.$$

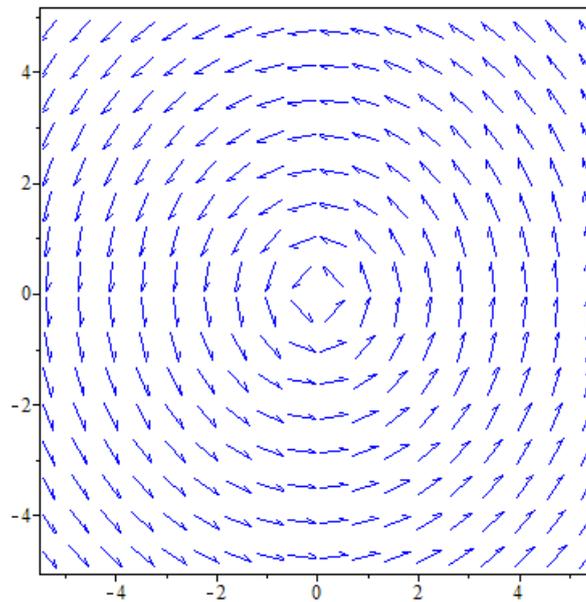


Figura 2: Campo vetorial rotacional no $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

2.3 FORMAS E ESPAÇO COTANGENTE

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos algébricos necessários para o estudo de formas diferenciais de grau k . Nossa abordagem, a princípio, será sobre um espaço vetorial E de dimensão finita sobre os reais, em que E^* é seu espaço dual, visto na seção 2.1, com $\dim(E^*) = \dim(E) = n$.

Para que tenhamos uma notação parecida com a tradicional, denotemos $\{e_j^*; 1 \leq j \leq n\}$ a base de E^* dual a $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$ base de E , ou seja,

$$e_j^*(e_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Uma aplicação

$$f : \underbrace{E \times \dots \times E}_{k \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R},$$

diz-se k - forma linear quando é linear em cada uma das variáveis $v_1, \dots, v_k \in E$. Isto é, para quaisquer que sejam $v_1, \dots, v_i, u_i, \dots, v_k \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, devemos ter

$$f(v_1, \dots, v_i + u_i, \dots, v_k) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + f(v_1, \dots, u_i, \dots, v_k),$$

e

$$f(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_k) = \alpha f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k),$$

em que $1 \leq i \leq k$.

As operações usuais de soma de duas k - formas lineares e produto de uma k - forma linear por um escalar fazem do conjunto das k - formas lineares $f : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$ um espaço vetorial, denotado por $\mathcal{L}^k(E, \mathbb{R})$, ou simplesmente, $\mathcal{L}^k(E)$. Em particular, para $k = 1$, $E^* = \mathcal{L}(E)$.

Para abordarmos alguns conceitos particulares das k - formas lineares, precisamos definir a ação da permutação nelas.

Definição 2.33. Uma *permutação* de um conjunto $X = \{1, \dots, k\} \subset \mathbb{N}$ é toda bijeção $\sigma : X \rightarrow X$. Tipicamente escrevemos

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(k) \end{bmatrix},$$

para expressar a permutação.

Denota-se por S_k o grupo de todas as permutações do conjunto $\{1, \dots, k\}$. Além disso, S_k tem $k!$ elementos.

Definição 2.34. Uma *transposição* de S_k é uma permutação τ que troca dois elementos de posição mantendo os demais elementos fixos.

Observação 2.35. O sinal de uma permutação $\sigma \in S_k$ é denotado por $\text{sgn } \sigma = (-1)^r$ quando σ é expressa como r transposições.

Diante disso, dada uma k - forma linear f sobre um espaço vetorial E e uma permutação σ , define-se uma nova k - forma linear σf por

$$\sigma f(v_1, \dots, v_n) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

para quaisquer $v_1, \dots, v_k \in E$.

Essa convenção assegura a multilinearidade de f . Uma outra importante definição é dada a seguir.

Definição 2.36. Seja $k \in \mathbb{N}$. Um multi-índice de comprimento k , é qualquer k - upla ordenada $I = (i_1, \dots, i_k)$ de inteiros positivos.

Dada $\sigma \in S_k$ e se I é um multi-índice, tem-se que $I_\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(k))$ também é um multi-índice. A concatenação dos multi-índices $I = (i_1, \dots, i_k)$ e $J = (j_1, \dots, j_l)$ é o multi-índice $IJ = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ de comprimento $k+l$.

Vistas essas convenções, abordaremos agora uma importante operação sobre as k -formas lineares, a qual é fundamental para entendermos os conceitos que virão mais adiante.

Definição 2.37. O produto tensorial de uma k - forma linear f e uma l - forma linear g é uma $(k+l)$ - forma linear dada por

$$f \otimes g(v_1, \dots, v_{k+l}) = f(v_1, \dots, v_k) g(v_{k+1}, \dots, v_l),$$

em que os $v_i \in E, 1 \leq i \leq k+l$.

Observação 2.38. O produto tensorial é uma aplicação bilinear

$$\otimes : \mathcal{L}^k(E) \times \mathcal{L}^l(E) \rightarrow \mathcal{L}^{k+l}(E)$$

e associativa

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h).$$

No entanto, em geral, não é comutativa, ou seja, $f \otimes g \neq g \otimes f$, se f e g não são proporcionais.

Exemplo 2.39. Fazendo o produto tensorial dos k funcionais lineares $f_1, \dots, f_k \in E^* = \mathcal{L}(E)$, obtemos a k - forma linear $f_1 \otimes \dots \otimes f_k \in \mathcal{L}^k(E)$, definida por

$$(f_1 \otimes \dots \otimes f_k)(v_1, \dots, v_k) = f_1(v_1) \dots f_k(v_k),$$

com $v_i \in E, 1 \leq i \leq n$.

A proposição a seguir mostra como $\mathcal{L}^k(E)$ generaliza $E^* = \mathcal{L}(E)$.

Proposição 2.40. Seja $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$ uma base de E , e seja $\{e_i^*; 1 \leq i \leq n\}$ a base dual correspondente de E^* . Então o conjunto de k - formas lineares

$$\left\{ e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*; 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \right\}$$

forma uma base para $\mathcal{L}^k(E)$. Em particular, $\dim \mathcal{L}^k(E) = n^k$.

Demonstração. Sejam $I = (i_1, \dots, i_k)$ e $J = (j_1, \dots, j_k)$ tais que $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ e $1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n$. Como no Exemplo 2.39, fazendo o produto tensorial dos funcionais da base $\{e_i^*; 1 \leq i \leq n\}$ de E^* , para cada I , temos n^k produtos tensoriais, e denotemos como

$$e_I^* = e_{i_1}^* \otimes e_{i_2}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*.$$

Agora, mostraremos que as formas e_I^* são linearmente independentes. Para tanto, tomemos uma combinação linear

$$\sum \alpha_I e_I^* = 0,$$

com $\alpha_I \in \mathbb{R}$. Observemos que, para todo J , tem-se que

$$\begin{aligned} e_I^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) &= (e_{i_1}^* \otimes e_{i_2}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*)(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \\ &= e_{i_1}^*(e_{j_1}) e_{i_2}^*(e_{j_2}) \cdots e_{i_k}^*(e_{j_k}), \end{aligned}$$

e, então

$$e_I^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 0 & \text{se } I \neq J, \\ 1 & \text{se } I = J. \end{cases}$$

Sendo assim, para todo J ,

$$0 = \sum_I \alpha_I e_I^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \alpha_J.$$

Portanto, as formas e_I^* são linearmente independentes.

Agora, mostraremos que as formas e_I^* geram $\mathcal{L}^k(E)$. Tomemos arbitrariamente $f \in \mathcal{L}^k(E)$. Façamos para cada I , $f_I = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, e consideraremos a forma

$$g = f - \sum_I f_I e_I^*.$$

Aplicando-o em $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ para qualquer J , temos o que se segue

$$g(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = f(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) - \sum_I f_I e_I^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = f_J - f_J = 0.$$

Segue-se da multilinearidade que $g \equiv 0$, isto é, para quaisquer $v_1, \dots, v_k \in E$ com $v_i = \sum_{j_i=1}^n a_{ij_i} e_{j_i}$, $1 \leq i \leq n$, e pelo fato de f ser multilinear, temos que

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_k) &= f\left(\sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_k=1}^n a_{kj_k} e_{j_k}\right) = \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n \left[\prod_{i=1}^k a_{ij_i} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \right] \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \left[\prod_{i=1}^k a_{ij_i} \right] f(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}), \end{aligned}$$

sendo assim

$$\begin{aligned} g(v_1, \dots, v_k) &= f(v_1, \dots, v_k) - \sum_I f_I e_I^*(v_1, \dots, v_k) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k} \left[\prod_{i=1}^k a_{ij_i} \right] f_J - \sum_{j_1, \dots, j_k} \left[\prod_{i=1}^k a_{ij_i} \right] f_J = 0. \end{aligned}$$

Logo, $f = \sum_I f_I e_I^*$, é uma combinação linear desses e_I^* . Portanto as formas e_I^* geram $\mathcal{L}^k(E)$. Concluimos, portanto, que o conjunto

$$\left\{ e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*; 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \right\},$$

é uma base de $\mathcal{L}^k(E)$, tal que $\dim \mathcal{L}^k(E) = n^k$. \square

O espaço $\mathcal{L}^k(E)$ é também chamado de *espaço de k -ésima potência tensorial* de E , e denotado por $\otimes^k E^*$.

Exemplo 2.41. Um elemento $f \in \mathcal{L}^k(E)$ também é denotado por k -tensor. Em particular, um 2-tensor em E nada mais é do que uma forma bilinear $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. O produto interno, em particular, é um exemplo de 2-tensor.

A partir de agora, restringiremos nossa abordagem, de modo especial, as formas alternadas (ou antissimétricas).

Definição 2.42. Uma k -forma linear $f : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *alternada* quando se tem

$$f(v_1, \dots, v_k) = 0,$$

sempre que a sequência (v_1, \dots, v_k) possuir repetições. Ou seja,

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma) f(v_1, \dots, v_k),$$

para toda $\sigma \in S_k$.

Exemplo 2.43. Uma 2-forma linear é alternada se, e somente se, $f(x, y) = -f(y, x)$ para todo $x, y \in E$.

Diante da definição de uma k -forma linear ser alternada temos o seguinte resultado:

Proposição 2.44. Uma k -forma linear $f : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$ é alternada se, e somente se, é antissimétrica, isto é, para quaisquer $v_1, \dots, v_k \in E$, tem-se

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

Demonstração. Para demonstrarmos esse resultados, tomaremos por simplicidade

$$\Phi(v_i, v_j) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k).$$

Se Φ é alternada, temos que $\Phi(v_i + v_j, v_i + v_j) = \Phi(v_i, v_i) = \Phi(v_j, v_j) = 0$. Usando a linearidade em cada uma das variáveis, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(v_i + v_j, v_i + v_j) = \Phi(v_i, v_i) + \Phi(v_i, v_j) + \Phi(v_j, v_i) + \Phi(v_j, v_j) \\ &= \Phi(v_i, v_j) + \Phi(v_j, v_i), \end{aligned}$$

então $\Phi(v_i, v_j) = -\Phi(v_j, v_i)$ e, portanto f é antissimétrica.

Reciprocamente, se Φ é antissimétrica então $\Phi(v_i, v_i) = -\Phi(v_i, v_i)$, ou seja, $\Phi(v_i, v_i) = 0$ e, portanto, $f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) = 0$ e f é alternada. \square

Para cada $k = 1, \dots, n$, denota-se o conjunto de todas as k - formas lineares alternadas $f : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$, por $\Lambda^k(E^*)$. Seus elementos são chamados de *formas alternadas de grau k* ou, simplesmente, *k - formas*.

Proposição 2.45. O conjunto $\Lambda^k(E^*)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}^k(E)$.

Demonstração. Sejam $f, g \in \Lambda^k(E^*)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ quaisquer. Observe que,

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma) f(v_1, \dots, v_k) \text{ e } g(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma) g(v_1, \dots, v_k),$$

com $v_1, \dots, v_k \in E$, e para toda permutação $\sigma \in S_k$. Segue-se que

$$\begin{aligned} (f + g)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) &= f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) + g(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &= (\text{sgn } \sigma) f(v_1, \dots, v_k) + (\text{sgn } \sigma) g(v_1, \dots, v_k) \\ &= (\text{sgn } \sigma) (f + g)(v_1, \dots, v_k), \end{aligned}$$

e,

$$\alpha f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \alpha [(\text{sgn } \sigma) f(v_1, \dots, v_k)] = (\text{sgn } \sigma) \alpha f(v_1, \dots, v_k).$$

Portanto, $f + g = (\text{sgn } \sigma) (f + g)$ e $\alpha f = (\text{sgn } \sigma) (\alpha f)$, então, $f + g \in \Lambda^k(E^*)$ e $\alpha f \in \Lambda^k(E^*)$. Concluimos, assim, que $\Lambda^k(E^*)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}^k(E)$. \square

Exemplo 2.46. Em geral, toda aplicação linear é alternada, pois não é possível violar a condição de anti-simetria. Assim, em particular, as formas alternadas de grau 1 (ou 1-formas) são os funcionais lineares:

$$\bigwedge^1(E^*) = E^*.$$

Além disso, convencionou-se que $\bigwedge^0(E^*) = \mathbb{R}$, isto é, as 0-formas são os escalares.

Proposição 2.47. *Seja $f \in \wedge^k(E)$. Se $v_1, \dots, v_k \in E$ são linearmente dependentes, então $f(v_1, \dots, v_k) = 0$.*

Demonstração. Se os vetores v_1, \dots, v_k são linearmente dependentes, então podemos assumir que

$$v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i.$$

Pelo fato de f ser multilinear (linear em cada variável), temos que

$$f(v_1, \dots, v_k) = f\left(v_1, \dots, v_{k-1}, \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f(v_1, \dots, v_{k-1}, v_i).$$

Agora, usando o fato de f ser alternada, segue-se que

$$f(v_1, \dots, v_{k-1}, v_1) = \dots = f(v_1, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}, v_{k-2}) = f(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k-1}) = 0,$$

e, portanto,

$$f(v_1, \dots, v_k) = 0.$$

□

Exemplo 2.48. Um caso importante é quando $k = \dim E = n$; na teoria de *determinantes*, tem-se que $\dim \left(\wedge^n(E^*) \right) = 1$, portanto, toda n - forma linear alternada em E é um múltiplo constante do determinante. Nesse sentido, dada $f \in \wedge^n(E^*)$ qualquer, para $v_1, \dots, v_n \in E$, com $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, para $i = 1, \dots, n$, temos que

$$f(v_1, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} f(e_1, \dots, e_n).$$

Definição 2.49. A anti-simetrização de uma k - forma linear f , denotada por $\text{Alt} : \mathcal{L}^k(E) \rightarrow \wedge^k(E^*)$, é dada por

$$\text{Alt } f = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \sigma f.$$

Mais explicitamente, isso significa que

$$(\text{Alt } f)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

em que $v_1, \dots, v_k \in E$.

Observação 2.50. Um dos motivos pelos quais o fator de $\frac{1}{k!}$ aparece na frente da soma acima, surge do fato que o grupo S_k de permutações de $\{1, \dots, k\}$ é um conjunto de cardinalidade $k!$.

Proposição 2.51. $f = \text{Alt } f$ se, e somente se, f é alternada.

Demonstração. Suponha que $f = \text{Alt } f$. Para qualquer $\tau \in S_k$, segue-se que

$$\begin{aligned} \tau(\text{Alt } f) &= \tau \left(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \sigma f \right) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \tau(\sigma f) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) (\tau\sigma) f = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \tau\sigma) (\text{sgn } \tau) (\tau\sigma) f \\ &= (\text{sgn } \tau) \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma\tau) (\tau\sigma) f \\ &= (\text{sgn } \tau) (\text{Alt } f). \end{aligned}$$

Logo, $f = \text{Alt } f$ é alternada. (Note que usamos os seguintes fatos nas igualdades acima: $\tau(\sigma f) = (\tau\sigma) f$, $(\text{sgn } \sigma\tau) = (\text{sgn } \sigma) (\text{sgn } \tau)$ e por fim que $\tau\sigma$ percorre todas as permutações em S_k , uma vez que, ocorre o mesmo com σ).

Reciprocamente, suponha que f é alternada; então $\sigma f = (\text{sgn } \sigma) f$, e $\text{sgn } \sigma = \pm 1$. Segue que

$$\text{Alt } f = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \sigma f = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma)^2 f = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} f = \frac{1}{k!} (k! f) = f.$$

□

Definição 2.52. O produto exterior de uma $f \in \bigwedge^k(E^*)$ por uma $g \in \bigwedge^l(E^*)$, é uma $(k+l)$ -forma

$$f \wedge g = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(f \otimes g).$$

Exemplo 2.53. Se $k = l = 1$, para quaisquer $f, g \in \bigwedge^1(E^*) = E^*$ tem-se

$$f \wedge g = 2! \text{Alt}(f \otimes g) = 2! \left[\frac{1}{2!} (f \otimes g - g \otimes f) \right] = f \otimes g - g \otimes f.$$

Para quaisquer $u, v \in E$:

$$(f \wedge g)(u, v) = (f \otimes g)(u, v) - (g \otimes f)(u, v) = f(u)g(v) - g(u)f(v),$$

ou seja,

$$(f \wedge g)(u, v) = \begin{vmatrix} f(u) & f(v) \\ g(u) & g(v) \end{vmatrix}.$$

Proposição 2.54. *Seja E um espaço vetorial, $\dim E = n$. Se $f \in \bigwedge^k(E^*)$, $g \in \bigwedge^l(E^*)$ e $h \in \bigwedge^m(E^*)$, então o produto exterior é:*

(1) *Bilinear: $(f, g) \mapsto f \wedge g$ é linear em f e g .*

(2) *Anticomutativo: $f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f$.*

(3) *Associativo: $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$.*

Demonstração. (1) Segue da definição, uma vez que o produto tensorial é bilinear e a aplicação Alt é linear.

(2) Consideremos $I = (i_1, \dots, i_k)$ e $J = (j_1, \dots, j_l)$. Note que $IJ = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ obtido concatenando I e J . Vamos definir a permutação $\tau \in S_{k+l}$, como

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & l & l+1 & \cdots & l+k \\ k+1 & \cdots & k+l & 1 & \cdots & k \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\tau(1) = k+1, \dots, \tau(l) = k+l, \tau(l+1) = 1, \dots, \tau(l+k) = k.$$

Então, para qualquer $\sigma \in S_{k+l}$, tem-se

$$\sigma(1) = \sigma\tau(l+1), \dots, \sigma(k) = \sigma\tau(l+k),$$

$$\sigma(k+1) = \sigma\tau(1), \dots, \sigma(k+l) = \sigma\tau(l).$$

Diante disso, para quaisquer $v_1, \dots, v_{k+l} \in E$, segue que

$$\begin{aligned} \text{Alt}(f \otimes g)(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma) f(v_{i_{\sigma(1)}}, \dots, v_{i_{\sigma(k)}}) g(v_{j_{\sigma(k+1)}}, \dots, v_{j_{\sigma(k+l)}}) \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma) f(v_{i_{\sigma\tau(l+1)}}, \dots, v_{i_{\sigma\tau(l+k)}}) g(v_{j_{\sigma\tau(1)}}, \dots, v_{j_{\sigma\tau(l)}}). \end{aligned}$$

Usando o fato que $\text{sgn } \sigma\tau = (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \tau)$, temos que $\text{Alt}(f \otimes g)(v_1, \dots, v_{k+l})$

$$= (\text{sgn } \tau) \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma\tau) g(v_{j_{\sigma\tau(1)}}, \dots, v_{j_{\sigma\tau(l)}}) f(v_{i_{\sigma\tau(l+1)}}, \dots, v_{i_{\sigma\tau(l+k)}})$$

$$= (\text{sgn } \tau) \text{Alt}(g \otimes f)(v_1, \dots, v_{k+l}),$$

uma vez que σ percorre todas as permutações em S_{k+l} então $\sigma\tau$ faz o mesmo, mostrando assim que

$$\text{Alt}(f \otimes g) = (\text{sgn } \tau) \text{Alt}(g \otimes f).$$

Multiplicando-o por $\frac{(k+l)!}{k!l!}$ e usando a definição do produto exterior, temos que

$$f \wedge g = (\text{sgn } \tau) g \wedge f,$$

em que τ é a permutação que envia IJ para JI . Como τ pode ser decomposto como uma composição de kl transposições (tanto os índices de I quanto os de J são movidos), então

$$\text{sgn } \tau = (-1)^{kl}.$$

(3) Pela definição do produto exterior, temos que

$$\begin{aligned} (f \wedge g) \wedge h &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \text{Alt}((f \wedge g) \otimes h) \\ &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\text{Alt}(f \otimes g) \otimes h) \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Alt}((f \otimes g) \otimes h). \end{aligned}$$

Por outro lado, segue que

$$\begin{aligned} f \wedge (g \wedge h) &= \frac{(k+l+m)!}{k!(l+m)!} \text{Alt}(f \otimes (g \wedge h)) \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k!(l+m)!} \frac{(l+m)!}{l!m!} \text{Alt}(f \otimes \text{Alt}(g \otimes h)) \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Alt}(f \otimes (g \otimes h)). \end{aligned}$$

Usando o fato que o produto tensorial \otimes é associativo, isto é, $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$, então

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h).$$

□

Corolário 2.55. *Se f é uma forma alternada de grau ímpar em E , então $f \wedge f = 0$.*

Demonstração. Seja k o grau de f . Como k é ímpar então k^2 também o é. Pela anticomutatividade, temos que

$$f \wedge f = (-1)^{k^2} f \wedge f = -f \wedge f.$$

Então, $2(f \wedge f) = 0$, e portanto, $f \wedge f = 0$.

□

Sob o fato que o produto exterior é associativo, visto na Proposição 2.54, faz sentido fazermos esse produto com três ou mais formas. Em particular, por definição, o produto exterior das k 1- formas $f_1, \dots, f_k \in E^*$, é dado por

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_k = \frac{\overbrace{(1+\dots+1)}^k!}{1! \dots 1!} \text{Alt}(f_1 \otimes \dots \otimes f_k) = k! \text{Alt}(f_1 \otimes \dots \otimes f_k).$$

Como consequência, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.56. Para quaisquer $f_1, \dots, f_k \in E^*$ e $v_1, \dots, v_k \in E$, o produto exterior dessas 1- formas é a k - forma alternada

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_k : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_k)(v_1, \dots, v_k) = \det [f_i(v_j)],$$

em que

$$\det [f_i(v_j)] = \begin{vmatrix} f_1(v_1) & \dots & f_1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k(v_1) & \dots & f_k(v_k) \end{vmatrix}.$$

Demonstração. Pela Definição 2.52, temos que

$$\begin{aligned} (f_1 \wedge \dots \wedge f_k)(v_1, \dots, v_k) &= k! \text{Alt}(f_1 \otimes \dots \otimes f_k)(v_1, \dots, v_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) (f_1 \otimes \dots \otimes f_k)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) f_1(v_{\sigma(1)}) \dots f_k(v_{\sigma(k)}) \\ &= \det [f_i(v_j)]. \end{aligned}$$

□

Com base na Proposição 2.56, temos a seguinte definição.

Definição 2.57. Seja $\{e_i^*; 1 \leq i \leq n\}$ a base de E^* dual a $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$ base de E . Então, para cada $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, define a k - forma em E , $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$ como

$$(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*)(v_1, \dots, v_k) = \begin{vmatrix} e_{i_1}^*(v_1) & \dots & e_{i_1}^*(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{i_k}^*(v_1) & \dots & e_{i_k}^*(v_k) \end{vmatrix},$$

para todo $v_1, \dots, v_k \in E$.

Lema 2.58. Seja $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$ a base de E e seja $\{e_i^*; 1 \leq i \leq n\}$ a base dual em E^* . Se $I = (i_1, \dots, i_k)$ e $J = (j_1, \dots, j_k)$ com $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ e $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ então

$$e_I^*(e_J) = \delta_{IJ} = \begin{cases} 1, & \text{para } I = J, \\ 0, & \text{para } I \neq J. \end{cases}$$

Demonstração. Pela Definição 2.57,

$$e_I^*(e_J) = \det [e_i^*(e_j)]_{i \in I, j \in J}.$$

Se $I = J$, então $[e_i^*(e_j)]$ é a matriz identidade e portanto $e_I^*(e_I) = \det [e_i^*(e_j)]_{i \in I} = 1$.

Se $I \neq J$, então existe $i_r \in I - J$, logo $e_{i_r}^*(e_j) = 0$ para todo $j \in J$. Assim, a r -ésima linha da matriz $[e_i^*(e_j)]$ é nula. Portanto, $\det (e_i^*(e_j))_{i \in I, j \in J} = 0$ e $e_I^*(e_J) = 0$. \square

Proposição 2.59. Seja $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$ a base de E , e seja $\{e_i^*; 1 \leq i \leq n\}$ a base dual correspondente de E^* . Então o conjunto de k -formas,

$$\left\{ e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*; 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \right\},$$

forma uma base para $\Lambda^k(E^*)$.

Demonstração. Para qualquer multi-índice de comprimento k , $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ com $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, consideremos $e_I^* = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$.

Primeiro, mostraremos que as formas e_I^* são linearmente independentes. Para isto, suponha que

$$\sum \alpha_I e_I^* = 0,$$

com $\alpha_I \in \mathbb{R}$. Aplicando $e_J = (e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ ambos os lados da relação acima, para todo $J = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ com $j_1 < j_2 < \dots < j_k$, e utilizando o Lema 2.58, temos que

$$0 = \sum_I \alpha_I e_I^*(e_J) = \sum_I \alpha_I \delta_{IJ} = \alpha_J,$$

tendo em vista que entre todos os multi-índices I estritamente crescente de comprimento k , existe apenas um igual a J , mostrando assim que os e_I^* são linearmente independentes.

Agora, mostraremos que e_I^* geram $\Lambda^k(E^*)$. Seja $f \in \Lambda^k(E^*)$ qualquer. Afirmamos que

$$f = \sum f(e_I) e_I^*,$$

em que I percorre todos os multi-índices estritamente crescentes de comprimento k . Consideremos a k -forma $g = \sum f(e_I) e_I^*$ tal que, para todos os e_J em que $J = (j_1, \dots, j_k)$ com $j_1 < \dots < j_k$, tem-se

$$g(e_J) = \sum f(e_I) e_I^*(e_J) = \sum f(e_I) \delta_{IJ} = f(e_J).$$

Pela multilinearidade e por serem alternadas, as duas k -formas concordam em todos os e_J em que $J = (j_1, \dots, j_k)$ com $j_1 < \dots < j_k$; então elas são iguais. Portanto, $f = g = \sum f(e_I) e_I^*$. \square

Corolário 2.60. *Seja E um espaço vetorial com $\dim E = n$. Então*

$$\dim \left(\bigwedge^k (E^*) \right) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Demonstração. Note que um multi-índice $I = (i_1, \dots, i_k)$ com $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, é obtido escolhendo-se um subconjunto de k elementos de $\{1, \dots, n\}$, cujos membros são numerados em ordem crescente. Como o número de maneiras de escolher k números distintos entre 1 e n , é

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

portanto, existem $\binom{n}{k}$ conjuntos de I . Sendo assim,

$$\dim \left(\bigwedge^k (E^*) \right) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

\square

Corolário 2.61. *Se $k > n = \dim E$, então $\bigwedge^k (E^*) = \{0\}$.*

Demonstração. Tomemos $f \in \bigwedge^k (E^*)$ qualquer. Podemos escrevê-lo da seguinte forma: $f = \sum f(e_I) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$. Observe que, como $k > n = \dim E$, então em $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$, pelo menos dois dos fatores devem ser iguais, digamos $e_{i_r}^* = e_{i_s}^*$. Como $e_{i_r}^*$ é uma 1-forma, isto é, grau ímpar, $e_{i_r}^* \wedge e_{i_r}^* = 0$ pelo Corolário 2.55, então $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* = 0$. Logo $f \equiv 0$ e, então $\bigwedge^k (E^*) = \{0\}$. \square

Definição 2.62. *Seja $f : E \rightarrow F$ uma transformação linear entre os espaços vetoriais E e F , e seja $\omega \in \bigwedge^k (F^*)$. O pullback de ω por f , denotado por $f^*\omega$, é a k -forma em E definida por*

$$(f^*\omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

para todo $v_1, \dots, v_k \in E$.

Proposição 2.63. *Sejam E, F, G espaços vetoriais, e sejam $f : E \rightarrow F$ e $g : F \rightarrow G$ transformações lineares.*

1. Se $\omega, \varphi \in \bigwedge^k (F^*)$, então $f^*(\omega \wedge \varphi) = (f^*\omega) \wedge (f^*\varphi)$.
2. Se $\omega \in \bigwedge^k (G^*)$, então $(f \circ g)^*\omega = f^*(g^*\omega)$.

Demonstração. (1) Sejam $\omega, \varphi \in \bigwedge^k (F^*)$. Para quaisquer $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{2k} \in E$, denotemos $Z := (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{2k})$, segue que

$$\begin{aligned}
 f^*(\omega \wedge \varphi)(Z) &= f^*(\omega \wedge \varphi)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{2k}) \\
 &= (\omega \wedge \varphi)(f(v_1), \dots, f(v_k), f(v_{k+1}), \dots, f(v_{2k})) \\
 &= \frac{(2k)!}{k!k!} \text{Alt}(\omega \otimes \varphi)(f(v_1), \dots, f(v_k), f(v_{k+1}), \dots, f(v_{2k})) \\
 &= \frac{1}{k!k!} \sum_{\sigma \in S_{2k}} (\text{sgn } \sigma) \omega(f(v_{\sigma(1)}), \dots, f(v_{\sigma(k)})) \varphi(f(v_{\sigma(k+1)}), \dots, f(v_{\sigma(2k)})) \\
 &= \frac{1}{k!k!} \sum_{\sigma \in S_{2k}} (\text{sgn } \sigma) f^*\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) f^*\varphi(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(2k)}) \\
 &= \frac{(2k)!}{k!k!} \text{Alt}(f^*\omega \otimes f^*\varphi)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{2k}) \\
 &= (f^*\omega \wedge f^*\varphi)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{2k}) \\
 &= (f^*\omega \wedge f^*\varphi)(Z).
 \end{aligned}$$

Como vale para todo $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{2k} \in E$, então $f^*(\omega \wedge \varphi) = f^*\omega \wedge f^*\varphi$.

- (2) Seja $\omega \in \bigwedge^k (G^*)$. Para quaisquer $v_1, \dots, v_k \in F$, segue que

$$\begin{aligned}
 ((f \circ g)^*\omega)(v_1, \dots, v_k) &= \omega((f \circ g)(v_1), \dots, (f \circ g)(v_k)) \\
 &= \omega(f(g(v_1)), \dots, f(g(v_k))) \\
 &= f^*\omega(g(v_1), \dots, g(v_k)) \\
 &= (f^*(g^*\omega))(v_1, \dots, v_k).
 \end{aligned}$$

Como vale para todo $v_1, \dots, v_k \in E$, então $(f \circ g)^*\omega = f^*(g^*\omega)$. □

Na primeira parte desta seção abordamos alguns conceitos da Álgebra Exterior, sobre as formas em um espaço vetorial E de dimensão finita. Agora, tomaremos o espaço

vetorial $E = T_p(\mathbb{R}^n)$, e voltaremos para a configuração do Cálculo visto na seção anterior.

A seguir abordaremos o espaço cotangente sobre o qual vamos definir as formas diferenciais.

Definição 2.64. Seja $p \in \mathbb{R}^n$. O espaço cotangente a \mathbb{R}^n no ponto p , denotado por $(T_p(\mathbb{R}^n))^*$ é o espaço dual de $T_p(\mathbb{R}^n)$.

Os elementos do espaço cotangente são chamados de *vetores cotangentes*, *covetores* ou *1-formas*.

De acordo com o que vimos na Seção 2.1, temos que o espaço cotangente $(T_p(\mathbb{R}^n))^*$ é um espaço vetorial que consiste de todas as aplicações lineares de $T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$. Além disso, dos Teoremas 2.8 e 2.20, temos que

$$\dim(T_p(\mathbb{R}^n))^* = \dim(T_p(\mathbb{R}^n)) = \dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Agora, vamos entender como os elementos do espaço cotangente $(T_p(\mathbb{R}^n))^*$ se comportam. Nesse sentido, segue uma definição fundamental.

Definição 2.65. Seja $p \in U \subset \mathbb{R}^n$, U aberto. Dada $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, o diferencial de f em p é o funcional linear (vetor cotangente) $(df)_p : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$(df)_p(v) = v(f),$$

para qualquer $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$, em que $v(f)$ é a derivação.

Exemplo 2.66. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = e^{x_1 - x_2}$. Seja $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, para todo vetor $v = (v_1, v_2) \in T_p(\mathbb{R}^2)$, isto é, $v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p$, temos, que

$$(df)_p(v) = v_1 e^{p_1 - p_2} - v_2 e^{p_1 - p_2}.$$

Proposição 2.67. O conjunto $\left\{ (dx_i)_p ; 1 \leq i \leq n \right\}$ é uma base para $(T_p(\mathbb{R}^n))^*$.

Demonstração. Primeiro, notemos que, para cada $i = 1, \dots, n$, $(dx_i)_p : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ é linear (visto que $(dx_i)_p$ é a diferencial da i -ésima projeção $x_i : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$). Agora,

tomando a base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p ; 1 \leq i \leq n \right\}$ de $T_p(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$(dx_i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p x_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Portanto, pela Definição 2.9, o conjunto $\{(dx_i)_p; 1 \leq i \leq n\}$ é uma base para $(T_p(\mathbb{R}^n))^*$, e mais ainda, é a base dual para a base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p; 1 \leq i \leq n\right\}$ de $T_p(\mathbb{R}^n)$. \square

Observação 2.68. Com a notação acima, um elemento $\omega_p \in (T_p(\mathbb{R}^n))^*$ será escrito na base $\{(dx_i)_p; 1 \leq i \leq n\}$ como

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) (dx_i)_p,$$

em que para cada $i = 1, \dots, n$, $a_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real.

Proposição 2.69. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então, usando a base canônica de 1-formas $\{(dx_i)_p; 1 \leq i \leq n\}$ de $(T_p(\mathbb{R}^n))^*$, podemos escrever*

$$(df)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p (dx_i)_p.$$

Demonstração. Pela Definição 2.65, temos que $(df)_p \in (T_p(\mathbb{R}^n))^*$ e

$$(df)_p(v) = v(f), \quad (2.3.1)$$

com $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$. Podemos escrever v em combinação linear dos elementos da base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p; 1 \leq i \leq n\right\}$:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p.$$

Como $\{(dx_j)_p; 1 \leq j \leq n\}$ é a base dual de $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p; 1 \leq i \leq n\right\}$, para cada $j = 1, \dots, n$, temos que

$$(dx_j)_p(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(p) (dx_j)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) = \alpha_j(p),$$

em que $(dx_i)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) = 1$ e $(dx_j)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) = 0$ se $i \neq j$. Então,

$$v = \sum_{i=1}^n (dx_i)_p(v) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p.$$

Assim,

$$v(f) = \sum_{i=1}^n (dx_i)_p(v) \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p (dx_i)_p(v).$$

De (2.3.1), obtemos

$$(df)_p(v) = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p (dx_i)_p(v),$$

concluindo assim que

$$(df)_p = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p (dx_i)_p.$$

□

Agora, vamos escrever uma base para o espaço vetorial $\bigwedge^k (T_p(\mathbb{R}^n))^*$. Como

$$\bigwedge^1 (T_p(\mathbb{R}^n))^* = (T_p(\mathbb{R}^n))^*,$$

tomando o produto exterior dos elementos $(dx_i)_p \in \bigwedge^1 (T_p(\mathbb{R}^n))^*$, $1 \leq i \leq n$, pela Proposição 2.59, o conjunto

$$\left\{ (dx_{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_p ; 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \right\}, \quad (2.3.2)$$

forma uma base para $\bigwedge^k (T_p(\mathbb{R}^n))^*$.

Como o produto exterior das k -formas pode ser expresso em termo do produto tensorial, por exemplo,

$$(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p = (dx_i)_p \otimes (dx_j)_p - (dx_j)_p \otimes (dx_i)_p,$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$, temos que

$$(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p = - (dx_j)_p \wedge (dx_i)_p,$$

e em particular

$$(dx_i)_p \wedge (dx_i)_p = 0.$$

Definição 2.70. Uma k -forma em \mathbb{R}^n ($k \geq 1$) é uma aplicação ω que a cada $p \in \mathbb{R}^n$ associa $\omega_p \in \bigwedge^k (T_p(\mathbb{R}^n))^*$.

Diante da base definida em (2.3.2), ω pode ser escrito como

$$\omega_p = \sum_I a_I(p) (dx_I)_p, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

em que $(dx_I)_p = (dx_{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_p$ e os coeficientes $a_I = a_{i_1 \dots i_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de valor real em p . Se as funções a_I forem suaves, ω é chamada de k -forma diferencial.

Exemplo 2.71. Para $n = 3$. As bases canônicas de

$$(T\mathbb{R}^3)^* = \bigwedge^1 (T\mathbb{R}^3)^*, \quad \bigwedge^2 (T\mathbb{R}^3)^* \quad \text{e} \quad \bigwedge^3 (T\mathbb{R}^3)^*$$

são respectivamente: $\{dx, dy, dz\}$, $\{dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz\}$ e $\{dx \wedge dy \wedge dz\}$.

Exemplo 2.72. Sejam $\omega = xdx + ydy + zdz \in \bigwedge^1 (T\mathbb{R}^3)^*$ e $\varphi = xdx \wedge dy + ydy \wedge dz + zdx \wedge dz \in \bigwedge^2 (T\mathbb{R}^3)^*$. Então, $\omega \wedge \varphi \in \bigwedge^3 (T\mathbb{R}^3)^*$ e é dado por:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \varphi &= x^2 dx \wedge dx \wedge dy + xy dx \wedge dy \wedge dz + xz dx \wedge dx \wedge dz \\ &\quad + yx dy \wedge dx \wedge dy + y^2 dy \wedge dy \wedge dz + yz dy \wedge dx \wedge dz \\ &\quad + zxdz \wedge dx \wedge dy + zydz \wedge dy \wedge dz + z^2 dz \wedge dx \wedge dz \\ &= xy dx \wedge dy \wedge dz + yz dy \wedge dx \wedge dz + zxdz \wedge dx \wedge dy \\ &= (xy - yz + zx) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

No exemplo anterior, usamos as propriedades do produto exterior: anticomutatividade $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ (Proposição 2.54) e $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$ (Corolário 2.55).

Definição 2.73. Um *campo k -tensorial* em \mathbb{R}^n é uma aplicação $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}^k(T\mathbb{R}^n)$ que associa um k -tensor $\mathcal{T}(p)$ a cada espaço tangente $T_p(\mathbb{R}^n)$ que é suave no seguinte sentido: para qualquer coleção de k campos vetoriais suaves v_1, \dots, v_k , a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(p) = \mathcal{T}(p)(v_1, \dots, v_k),$$

é uma função suave em p .

Tendo em mente a Proposição 2.40, bem como a base canônica $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p ; 1 \leq i \leq n \right\}$ para $T_p(\mathbb{R}^n)$ e a base dual $\left\{ (dx_i)_p ; 1 \leq i \leq n \right\}$ para $(T_p(\mathbb{R}^n))^*$, podemos escrever um campo k -tensorial \mathcal{T} em \mathbb{R}^n como

$$\mathcal{T}(p) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k} (dx_{i_1})_p \otimes \dots \otimes (dx_{i_k})_p, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n, \quad (2.3.3)$$

em que $\alpha_{i_1, \dots, i_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves.

Observação 2.74. Pela Definição 2.73, em particular, uma k -forma diferencial é um campo k -tensorial alternado.

Agora, abordaremos uma importante operação sobre as k -formas diferenciais. Essa operação fornecerá uma generalização da operação de diferenciação para funções reais. Vimos na Proposição 2.69 que, se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma 0-forma diferencial então a sua diferencial

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

é uma 1-forma. Nesse sentido, a seguir, definiremos uma operação que leva uma k -forma numa $(k+1)$ -forma.

Definição 2.75. Seja $\omega = \sum_I a_I dx_I$ uma k -forma com funções $a_I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ suaves. A *diferencial exterior* da k -forma ω é a $(k+1)$ -forma $d\omega$ definida como se segue:

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I,$$

em que $I = (i_1, \dots, i_k)$ com $i_1 < \dots < i_k$.

Exemplo 2.76. Seja $\omega \in \bigwedge^1 (T\mathbb{R}^2)^*$ definida por $\omega = f dx + g dy$, em que f e g são funções suaves em \mathbb{R}^2 . Para simplificar, tomemos $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, etc.

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= (f_x dx + f_y dy) \wedge dx + (g_x dx + g_y dy) \wedge dy \\ &= f_x dx \wedge dx + f_y dy \wedge dx + g_x dx \wedge dy + g_y dy \wedge dy \\ &= (g_x - f_y) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

uma vez que $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ (Proposição 2.54) e $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ (Corolário 2.55).

Na seguinte proposição veremos algumas propriedades da diferencial exterior, as quais mostram a relação entre a derivada exterior d e as operações pontuais nas formas diferenciais.

Proposição 2.77. Sejam $\omega, \varphi \in \bigwedge^k (T_p(\mathbb{R}^n))^*$ k -formas diferenciais, $\gamma \in \bigwedge^l (T_p(\mathbb{R}^n))^*$ l -forma diferencial, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então:

- (1) $d(\alpha\omega + \beta\varphi) = \alpha d\omega + \beta d\varphi$.
- (2) $d(\omega \wedge \gamma) = (d\omega) \wedge \gamma + (-1)^k \omega \wedge (d\gamma)$.
- (3) $d^2(\omega) = d(d\omega) = 0$.
- (4) $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$.

Demonstração. (1) Sejam $\omega = \sum_I a_I dx_I$ e $\varphi = \sum_I b_I dx_I$ k -formas, em que $a_I, b_I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves e, $I = (i_1, \dots, i_k)$ com $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Então,

$$\alpha\omega + \beta\varphi = \alpha \sum_I a_I dx_I + \beta \sum_I b_I dx_I,$$

e

$$d(\alpha\omega + \beta\varphi) = \alpha \sum_I da_I \wedge dx_I + \beta \sum_I db_I \wedge dx_I = \alpha d\omega + \beta d\varphi.$$

(2) Sejam $\omega = \sum_I a_I dx_I$ uma k -forma e $\gamma = \sum_J b_J dx_J$ uma l -forma, em que $a_I, b_J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves de valor real. Assumimos que os multi-índices $I = (i_1, \dots, i_k)$ e $J = (j_1, \dots, j_l)$ com $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ e $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n$ são disjuntos, caso contrário, ambos os lados de (2) são nulos. Segue que

$$\omega \wedge \gamma = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

Tomando a diferencial exterior d na equação acima e usando o fato que d satisfaz a regra de Leibniz, temos

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \gamma) &= \sum_{I,J} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} ((da_I) b_J + a_I (db_J)) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J. \end{aligned}$$

Como para cada I e J , db_J e dx_I são, respectivamente, 1 -forma e k -forma, segue pela anticomutatividade que $db_J \wedge dx_I = (-1)^k dx_I \wedge db_J$, e então

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \gamma) &= \sum_{I,J} da_I \wedge dx_I \wedge b_J dx_J + (-1)^k \sum_{I,J} a_I dx_I \wedge db_J \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \gamma + (-1)^k \omega \wedge d\gamma. \end{aligned}$$

(3) Para mostrar esse item, usaremos a indução finita sobre k . Primeiro, mostraremos que $d \circ d = 0$ vale para uma 0- forma, ou seja, para uma função suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Segue que

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j\right) \wedge dx_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{j=i}^n \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i} dx_i \wedge dx_i + \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_j \wedge dx_i \\ &= 0, \end{aligned}$$

em que usamos as propriedades de produto exterior: $dx_i \wedge dx_i = 0$ e $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$; além do fato que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, pois f é suave.

Agora, vamos supor que $d \circ d = 0$ para uma k - forma ω , $d(d\omega) = 0$, e mostraremos que o mesmo vale para uma $(k+1)$ - forma. Digamos que, a $(k+1)$ - forma seja do tipo $\omega \wedge dx_i$, uma vez que dx_i é uma 1- forma e ω é uma k - forma. Como $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma 0- forma, temos que $d(dx_i) = 0$. Usando esse fato $d(dx_i) = 0$, duas vezes o item (2) e a hipótese de indução, temos o que se segue

$$\begin{aligned} d^2(\omega \wedge dx_i) &= d(d(\omega \wedge dx_i)) = d(d\omega \wedge dx_i + (-1)^k \omega \wedge d(dx_i)) \\ &= d(d\omega \wedge dx_i) = d(d\omega) \wedge dx_i + (-1)^{k+1} d\omega \wedge d(dx_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $d \circ d = 0$ vale para uma $(k+1)$ - forma. Mostrando assim que $d^2 = d \circ d = 0$ em qualquer k - forma ω .

(4) Sejam $\omega = \sum_I a_I dx_I$ uma k - forma e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, temos que

$$f\omega = \sum_I f a_I dx_I.$$

Portanto, aplicando a diferencial exterior d , obtemos

$$d(f\omega) = \sum_I d(f a_I) \wedge dx_I. \quad (2.3.4)$$

Como fa_I é um produto de 0– formas, usando a regra de Leibniz, temos que $d(fa_I) = a_I df + f da_I$. Substituindo essa expressão em (2.3.4), e usando as propriedades do produto exterior \wedge , concluímos que

$$\begin{aligned} d(f\omega) &= \sum_I (a_I df + f da_I) \wedge dx_I = \sum_I a_I df \wedge dx_I + \sum_I f da_I \wedge dx_I \\ &= df \wedge \sum_I a_I dx_I + f \sum_I da_I \wedge dx_I = df \wedge \omega + f d\omega. \end{aligned}$$

□

O pullback de uma forma diferencial por uma função também é definido pontualmente.

Definição 2.78. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável. A aplicação linear $df_p : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_{f(p)}(\mathbb{R}^m)$ induz uma transformação linear

$$f_p^* : \bigwedge^k (T_{f(p)}(\mathbb{R}^m))^* \rightarrow \bigwedge^k (T_p(\mathbb{R}^n))^*,$$

que para cada $\omega \in (T_{f(p)}(\mathbb{R}^m))^*$ associa $f_p^*(\omega)$, definida da seguinte maneira:

$$(f_p^*(\omega))(v_1, \dots, v_k) = \omega(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)),$$

em que $v_1, \dots, v_k \in T_p(\mathbb{R}^n)$.

O pullback de uma 0– forma (função) g por f é convencionado por

$$f^*(g) = g \circ f.$$

A seguir veremos um exemplo que ilustra a natureza dos cálculos implícitos na Definição 2.78.

Exemplo 2.79. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Dada a 2–forma $dx \wedge dy$ então

$$\begin{aligned} f^*(dx \wedge dy) &= d(x \circ f) \wedge d(y \circ f) = d(r \cos(\theta)) \wedge d(r \sin(\theta)) \\ &= (\cos(\theta) dr - r \sin(\theta) d\theta) \wedge (\sin(\theta) dr + r \cos(\theta) d\theta) \\ &= \cos(\theta) \sin(\theta) dr \wedge dr + r \cos^2(\theta) dr \wedge d\theta \\ &\quad - r \sin^2(\theta) d\theta \wedge dr - r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \wedge d\theta \\ &= r (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) dr \wedge d\theta = r dr \wedge d\theta, \end{aligned}$$

pois $dr \wedge dr = d\theta \wedge d\theta = 0$ e $dr \wedge d\theta = -d\theta \wedge dr$.

Proposição 2.80. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função suave. Para uma k -forma ω em \mathbb{R}^m , $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.*

Demonstração. De início, mostraremos que o resultado vale para uma 0 -forma. Seja $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma 0 -forma, que a cada $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ associa $g(y_1, \dots, y_m)$. Note que $f^*(g) = g \circ f$; aplicando a diferencial exterior e usando a regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} d(f^*g) &= d(g \circ f) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \circ f \right) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \circ f \right) df_i = f^* \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i \right) = f^*(dg). \end{aligned}$$

Agora, mostraremos que o resultado vale para uma k -forma $\omega = \sum_I a_I dx_I$, em que $I = (i_1, \dots, i_k)$ com $i_1 < \dots < i_k$. Usando a propriedade do pullback (Proposição 2.63), e que $d(f^*a_I) = f^*(da_I)$ pois cada a_I é uma 0 -forma, segue que

$$\begin{aligned} f^*(d\omega) &= f^* \left(\sum_I da_I \wedge dx_I \right) = \sum_I (f^*da_I) \wedge (f^*dx_I) \\ &= \sum_I d(f^*a_I) \wedge (f^*dx_I) = d \left(\sum_I (f^*a_I) (f^*dx_I) \right) \\ &= d \left(\sum_I (a_I \circ f) d(x_I \circ f) \right) = d(f^*\omega). \end{aligned}$$

□

Definição 2.81. Uma forma Pfaffiana (ou expressão Pfaffiana) é, simplesmente, uma 1 -forma diferencial ω . Um sistema de equações da forma

$$\omega_1 = 0, \dots, \omega_k = 0, \quad k < n, \quad (2.3.5)$$

em que $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ e ω_i são 1 -formas:

$$\omega_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(p) (dx_j)_p, \quad i = 1, \dots, k,$$

é chamado de sistema Pfaffiano.

Observação 2.82. Vale a pena ressaltar que a equação $\omega = 0$ não quer dizer que a 1 -forma diferencial ω é identicamente nula, mas especifica as trajetórias ao longo das quais a referida 1 -forma se anula.

A seguir enunciaremos um importante resultado, o qual estabelece a condição necessária e suficiente para a integrabilidade do sistema Pfaffiano (2.3.5). Antes disso, abordaremos a seguinte definição:

Definição 2.83. ([3], Proposição 4, pg. 185) Sejam $\omega_1, \dots, \omega_k$ 1– formas diferenciais linearmente independentes em \mathbb{R}^n ($k \leq n$), o conjunto

$$E_p = \{v \in T_p\mathbb{R}^n; \omega_1(v) = \dots = \omega_k(v) = 0\}$$

é dito um *campo plano suave k– dimensional*.

Um campo plano suave k – dimensional $E \subset T\mathbb{R}^n$ é dito *integrável* (também chamado de *completamente integrável*) quando existe uma função suave $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $E = \ker dF$ em cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$. A terminologia vem da analogia de integrar uma 1– forma dF para obter a função F . Em outras palavras, a questão é diretamente análoga a integração de um campo vetorial (um campo de linha) para obter curvas integrais.

Teorema 2.84. ([3], Teorema 1, pg. 185-186) (*Teorema de Frobenius*) Seja E um campo plano suave k – dimensional definido em subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, isto é, $E = \ker \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ sendo $\omega_1, \dots, \omega_k$ 1– formas diferenciais linearmente independentes em U . Então E é integrável se, e somente se, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ temos que

$$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0.$$

O Teorema 2.84 é conhecido como a versão do teorema de Frobenius em termos de formas diferenciais, cuja demonstração foge do propósito deste trabalho, por isso, será omitida. Caso haja interesse do leitor, há uma demonstração em [3] (pg. 186 – 187). Além disso, na referência [14] (pg. 291) encontra-se uma demonstração para o caso em que $k = 2$ e $n = 3$, ou seja, o caso em que E é um campo plano bidimensional em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 2.85. Seja $\omega = dx + [\tanh(x) + \operatorname{sech}(x)] dt$. Temos que

$$d\omega = \left[\operatorname{sech}^2(x) - \operatorname{sech}(x) \tanh(x) \right] dx \wedge dt.$$

Como $d\omega \wedge \omega = 0$, segue-se do Teorema de Frobenius 2.84, que $\omega = 0$ é integrável.

Exemplo 2.86. Considere $\omega_1 = x^2 dx + x dz$ e $\omega_2 = y^2 dy + y dz$ em conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, z) . Temos que

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= dx \wedge dz & e & & d\omega_1 \wedge \omega_1 &= 0, \\ d\omega_2 &= dy \wedge dz & e & & d\omega_2 \wedge \omega_2 &= 0. \end{aligned}$$

Note que tanto $\omega_1 = 0$ como $\omega_2 = 0$ são integráveis em U . Podemos notar também que $d\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = d\omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Assim, pelo teorema de Frobenius 2.84, o sistema Pfaffiano definido por $\omega_1 = 0$ e $\omega_2 = 0$ é integrável.

2.4 MÉTRICAS RIEMANNIANAS

Nesta seção abordaremos o objeto central da geometria Riemanniana, denominado tensor métrico, que nada mais é do que um campo 2- tensorial (2.3.3) com propriedades particulares. Assim como o produto interno, que vimos na seção 2.1, o tensor métrico fornece noções de comprimento e distância bem como conceitos relacionados a ângulo, ortogonalidade, curvatura e entre outros.

Restringiremos a geometria Riemanniana em nossa abordagem como sendo o estudo de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ equipado com um tensor métrico.

Definição 2.87. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma *métrica Riemanniana* em U é um campo 2- tensorial suave g com as seguintes propriedades:

(i) g é simétrico: para todo $p \in U$ e todos vetores tangentes $u_p, v_p \in T_p U$,

$$g_p(u_p, v_p) = g_p(v_p, u_p).$$

(ii) g é positivo definido: para todo $p \in U$ e todo vetor tangente $v_p \in T_p U$,

$$g_p(v_p, v_p) \geq 0,$$

com $g_p(v_p, v_p) = 0$ se, e somente se, $v_p = 0_p$.

Em outras palavras, g associa a cada ponto $p \in U$ um produto interno (isto é, uma forma bilinear simétrica, definida positiva) em $T_p U$ e que varia suavemente,

$$g_p : T_p U \times T_p U \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \in U \mapsto g_p(u_p, v_p) \in \mathbb{R}.$$

Observação 2.88. A condição de suavidade de g surge do fato que a função $g_p(u_p, v_p)$ é suave para todos os campos vetoriais suaves definidos localmente $u_p = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ e

$v_p = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ em U , com $u_i, v_i \in U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, funções suaves em p .

Observação 2.89. Uma métrica Riemanniana, às vezes, por simplicidade, é mencionada como um tensor métrico.

Definição 2.90. Um espaço Riemanniano é um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ equipado com uma métrica Riemanniana g , e é denotado por (U, g) .

Como o conjunto de 1-formas $\{(dx_i)_p; 1 \leq i \leq n\}$ forma a base canônica para $(T_p U)^*$, e, usando a notação em (2.3.3), podemos escrever o tensor métrico em coordenadas da seguinte maneira:

$$g_p = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) (dx_i)_p \otimes (dx_j)_p,$$

em que $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves, componentes do tensor métrico g . A simetria é então expressa como $g_{ij} = g_{ji}$.

Observação 2.91. Uma outra maneira adequada de expressar o tensor métrico g é por meio da matriz $G = [g_{ij}]$. Nessa notação, para quaisquer campos vetoriais \mathcal{U} e \mathcal{V} em U ,

$$g(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = v^T G u,$$

em que v^T denota a transposta de v , e u e v representam as colunas dos campos vetoriais \mathcal{U} e \mathcal{V} na base canônica para TU . Com isso, G é uma matriz simétrica e definida positiva (e, portanto, $\det G > 0$).

Exemplo 2.92. A métrica de Poincaré

$$g = \frac{1}{y^2} dx \otimes dx + \frac{1}{y^2} dy \otimes dy$$

no semiplano superior $U = \{(x, y); y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ é uma métrica Riemanniana.

A seguir, apresentaremos algumas medidas geométricas básicas relacionadas à métrica Riemanniana.

A *norma* ou *comprimento* de um vetor $v_p \in T_p U$ é a norma $\|\cdot\|_p : T_p U \rightarrow \mathbb{R}$ induzida da métrica Riemanniana g :

$$\|v_p\|_p = \sqrt{g_p(v_p, v_p)}.$$

Definição 2.93. Seja (U, g) um espaço Riemanniano e seja $\gamma : I = [a, b] \rightarrow U$ uma curva suave, parametrizada regular (isto é, $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$). O *comprimento* de γ é definido por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt,$$

em que $\gamma'(t) \in TU$.

Exemplo 2.94. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$, com coordenada (x_1, \dots, x_n) . A métrica Riemanniana denotada como *métrica euclidiana canônica* de \mathbb{R}^n , é expressa por

$$g_0 = dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n,$$

ou simplesmente,

$$g_0 = dx_1 dx_1 + \dots + dx_n dx_n = (dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2,$$

que em outras palavras, é o produto interno canônico $g_0 := \langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbb{R}^n , quando estendido naturalmente para 1-formas dx_i com valor real.

Observação 2.95. A métrica g_0 é constante, agindo da mesma forma em todos os espaços tangentes.

Para uma curva parametrizada regular $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ descrita por

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

temos

$$\begin{aligned} (g_0)_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) &= (g_0)_{\gamma(t)}\left(\left(x'_1(t), \dots, x'_n(t)\right), \left(x'_1(t), \dots, x'_n(t)\right)\right) \\ &= \left(x'_1(t)\right)^2 + \dots + \left(x'_n(t)\right)^2, \end{aligned}$$

e, portanto, o comprimento da curva parametrizada γ , é dada por

$$\ell_0(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2} dt.$$

2.5 EQUAÇÕES DE ESTRUTURA DE CARTAN

Nesta seção abordaremos as equações de estrutura de Cartan em espaço Riemanniano bidimensional, as quais são uma ponte que conecta a teoria de superfícies bidimensionais com equações diferenciais parciais que veremos no próximo capítulo.

Seja (U, g) um espaço Riemanniano bidimensional e seja $(x_1, x_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um gráfico local tal que x_1 e x_2 são as funções coordenadas em U . Então, em qualquer $p \in U$ temos $g_p = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(p) (dx_i)_p \otimes (dx_j)_p$, ou por simplicidade,

$$g = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx_i \otimes dx_j \quad (2.5.1)$$

em que g_{ij} são os componentes (locais) da métrica definida por $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$. Aplicando em $p \in U$ o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt (algoritmo que transforma uma base qualquer em uma base ortonormal) no conjunto de dois campos vetoriais que em p formam uma base para $T_p U$, obtemos um conjunto suave de campos vetoriais ortonormais que chamaremos de $\{e_1, e_2\}$ tais que $g_{ij} = g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ — símbolo Kronecker. Pelo processo, podemos encontrar combinações lineares das 1– formas dx_i que denotemos de ω_i para $i = 1, 2$. Então (2.5.1) assume a forma

$$g = \sum_{i,j=1}^2 \delta_{ij} \omega_i \otimes \omega_j = \omega_1 \otimes \omega_1 + \omega_2 \otimes \omega_2. \quad (2.5.2)$$

Do processo anterior temos que o conjunto de 1– formas $\{\omega_1, \omega_2\}$ define um sistema ortonormal em U para a métrica g , denominado *correferencial ortonormal dual* (local), enquanto o conjunto $\{e_1, e_2\}$ de campos vetoriais em U satisfazendo $\omega_i(e_i) = 1$ e $\omega_i(e_j) = 0$, $i \neq j$, é denominado *referencial ortonormal* (local). Em vez de (2.5.2) é comum escrever

$$g = \omega_1^2 + \omega_2^2.$$

A seguir enunciaremos o teorema das equações de estrutura de Cartan para o caso bidimensional, o qual está demonstrado para o caso n – dimensional nas seguintes referências [12] (Teoremas 4.34 – 4.35, pgs. 168 – 170) e [10] (pgs. 133 – 136). Por esse motivo e por fugir do escopo do trabalho não o demonstraremos.

Teorema 2.96. ([10], Teorema 2.1, pg. 123 e Proposição 2.3, pg. 125) (*Equações de estrutura de Cartan para o caso bidimensional*) *Seja (U, g) um espaço Riemanniano bidimensional. Seja $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal local definido em U , e $\{\omega_1, \omega_2\}$ seu correferencial dual, então em U existem 1– formas únicas ω_{ij} , $i, j = 1, 2$, tais que*

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}, \quad (2.5.3)$$

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \quad (2.5.4)$$

$$d\omega_{12} = \Omega_{12}, \quad (2.5.5)$$

em que Ω_{12} é a forma de curvatura.

As 1- formas ω_{ij} são chamadas de *formas de conexão de Levi-Civita* associadas ao correferencial $\{\omega_1, \omega_2\}$.

Definição 2.97. A *curvatura de Gauss* ou *curvatura Gaussiana* no espaço Riemanniano bidimensional (U, g) , no ponto p , é a função $K = K(p)$ que satisfaz $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$.

Da equação (2.5.4) temos que $\omega_{12} = -\omega_{21}$ enquanto $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$, implicando que a forma de conexão independente ω_{12} pode ser calculada a partir das equações (2.5.3), ou seja:

Proposição 2.98. A forma de conexão ω_{12} é determinada pelas equações

$$\omega_{12}(e_i) = d\omega_i(e_1, e_2), \quad i = 1, 2.$$

Demonstração. Usando as equações (2.5.3) e o fato de $\omega_i(e_i) = 1$ e $\omega_i(e_j) = 0$, $i \neq j$, segue-se que

$$\begin{aligned} d\omega_1(e_1, e_2) &= \omega_{12} \wedge \omega_2(e_1, e_2) = \omega_{12} \otimes \omega_2(e_1, e_2) - \omega_2 \otimes \omega_{12}(e_1, e_2) \\ &= \omega_{12}(e_1) \otimes \omega_2(e_2) - \omega_2(e_1) \otimes \omega_{12}(e_2) \\ &= \omega_{12}(e_1), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d\omega_2(e_1, e_2) &= \omega_1 \wedge \omega_{12}(e_1, e_2) = \omega_1 \otimes \omega_{12}(e_1, e_2) - \omega_{12} \otimes \omega_1(e_1, e_2) \\ &= \omega_1(e_1) \otimes \omega_{12}(e_2) - \omega_{12}(e_1) \otimes \omega_1(e_2) \\ &= \omega_{12}(e_2). \end{aligned}$$

□

Em suma, escolhendo um referencial ortonormal em $U \subset \mathbb{R}^2$, ele define uma métrica Riemanniana g em U . Sejam $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal e $\{\omega_1, \omega_2\}$ seu correferencial dual satisfazendo $\omega_i(e_i) = 1$ e $\omega_i(e_j) = 0$, $i \neq j$. A métrica é escrita em termos dos correferenciais como

$$g = \omega_1^2 + \omega_2^2.$$

A conexão de Levi-Civita da métrica é dada por

$$\omega_{12}(e_i) = d\omega_i(e_1, e_2), \quad i = 1, 2,$$

em que a forma de conexão $\omega_3 := \omega_{12}$ satisfaz as equações de estrutura

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = -K\omega_1 \wedge \omega_2, \quad (2.5.6)$$

as quais são ditas *equações de estrutura* da superfície bidimensional (U, g) .

3

EQUAÇÕES GEOMETRICAMENTE INTEGRÁVEIS E LEIS DE CONSERVAÇÃO

Neste capítulo abordaremos o conceito de equações diferenciais parciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas, bem como suas propriedades geométricas. Discutiremos a abordagem geométrica introduzida por S. S. Chern e K. Tenenblat em 1986 [5], e das demais referências [8], [16], [17] e [20], as quais serão úteis para o estudo principal do trabalho nos capítulos subsequentes.

3.1 EQUAÇÃO DO TIPO PSEUDO-ESFÉRICO

Seja (U, g) um espaço Riemanniano bidimensional. Considerando $\{\omega_1, \omega_2\}$ o dual para o referencial ortonormal local $\{e_1, e_2\}$, em que e_1 e e_2 formam uma base em $T_p U$ em cada $p \in U$, temos a métrica Riemanniana $g = \omega_1^2 + \omega_2^2$, para a qual as 1-formas ω_1 e ω_2 e a forma de conexão $\omega_3(e_i) = d\omega_i(e_1, e_2)$ satisfazem as equações de estrutura

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = -K\omega_1 \wedge \omega_2,$$

sendo K a curvatura Gaussiana da superfície (U, g) .

Para o caso $K = -1$, o terno de 1-formas $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ satisfazendo as equações de estrutura

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2, \quad (3.1.1)$$

descreve uma superfície pseudo-esférica.

Definição 3.1. ([16], Definição 1, pg. 118-119) Uma equação diferencial

$$\Xi \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{m+n} u}{\partial t^m \partial x^n} \right) = 0, \quad m, n \geq 0,$$

em duas variáveis independentes x, t é do tipo pseudo-esférico se, e somente se, existirem 1-formas $\omega_i \neq 0$,

$$\omega_i = f_{i1} dx + f_{i2} dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.1.2)$$

cujos coeficientes f_{ij} são funções suaves que dependem de x, t e um número finito de derivadas de $u(x, t)$, tais que satisfazem as equações de estrutura (3.1.1) com $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$.

Eventualmente escreveremos *PSS* (do inglês, pseudo-spherical surface) para nos referir a uma equação do tipo pseudo-esférico, ou ainda, que descreve uma superfície pseudo-esférica.

Definição 3.2. ([16], Definição 2) Uma equação é geometricamente integrável se descreve uma família não-trivial a 1- parâmetro de superfícies pseudo-esféricas.

Definição 3.3. Uma solução $u : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ da equação $\Xi = 0$ que descreve uma *PSS* é dita *solução genérica* se a restrição de $\omega_1 \wedge \omega_2$ a $u = u(x, t)$ é diferente de zero em quase todo ponto de U . Denota-se a restrição de $\omega_1 \wedge \omega_2$ a u como sendo $(\omega_1 \wedge \omega_2)[u]$.

Observação 3.4. ([8], pg. 6) Do ponto de vista geométrico, para qualquer solução genérica não-trivial $u : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ da equação $\Xi = 0$ que descreve uma *PSS*, a restrição $g[u]$ do tensor métrico $g = \omega_1^2 + \omega_2^2$ a $u = u(x, t)$ e suas derivadas parciais definem em quase todo ponto uma métrica Riemanniana $g[u]$ no domínio U com curvatura gaussiana $K = -1$, e ω_3 é a forma de conexão da métrica correspondente. Ou seja, o par $(U, g[u])$ é um espaço Riemanniano bidimensional de curvatura Gaussiana $K = -1$. É nesse sentido que se diz que uma equação do tipo pseudo-esférico descreve, ou parametriza, superfícies pseudo-esféricas não-imersas.

A seguir, veremos alguns exemplos clássicos de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas.

Exemplo 3.5. A equação de sine–Gordon

$$u_{xt} = \sin(u), \quad (3.1.3)$$

descreve uma *PSS*, com as 1- formas associadas

$$\omega_1 = \frac{1}{\eta} \sin(u) dt, \quad \omega_2 = \eta dx + \frac{1}{\eta} \cos(u) dt, \quad \omega_3 = u_x dx, \quad (3.1.4)$$

em que $\eta \in \mathbb{R} - \{0\}$ é uma constante.

Observação 3.6. Sejam ω_1 e ω_2 as 1- formas em (3.1.4), segue que

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \left[\frac{1}{\eta} \sin(u) dt \right] \wedge \left[\eta dx + \frac{1}{\eta} \cos(u) dt \right] = -\sin(u) dx \wedge dt.$$

Seja $\phi = \phi(x, t)$ uma função real (suave) não-trivial com domínio $U \subset \mathbb{R}^2$, tal que $U \ni (x, t) \mapsto \sin(\phi)$ é igual a zero no máximo em um conjunto de medida nula. Se $u = \phi(x, t)$ for uma solução de (3.1.3), então,

$$\sin(u)|_{u=\phi(x,t)} = \sin(\phi) \neq 0.$$

Portanto, a função $\phi(x, t)$ é uma solução genérica de (3.1.3).

Exemplo 3.7. Consideremos a solução $u(x, t) = 4 \arctan(e^{x+t})$ da equação de sine-Gordon (3.1.3). Ao restringirmos ω_1 e ω_2 de (3.1.4) a solução $u(x, t)$, obtemos:

$$\omega_1[u] = \frac{1}{\eta} \sin(4 \arctan(e^{x+t})) dt, \quad \omega_2[u] = \eta dx + \frac{1}{\eta} \cos(4 \arctan(e^{x+t})) dt.$$

Observe que:

$$\sin(\arctan(e^{x+t})) = \frac{e^{x+t}}{\sqrt{1+e^{2x+2t}}}, \quad \cos(\arctan(e^{x+t})) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x+2t}}}.$$

Pelas as identidades trigonométricas de duplicação de ângulos, obtemos

$$\begin{aligned} \sin(4 \arctan(e^{x+t})) &= 2 \sin(2 \arctan(e^{x+t})) \cos(2 \arctan(e^{x+t})) \\ &= 2 [2 \sin(\arctan(e^{x+t})) \cos(\arctan(e^{x+t}))] [2 \cos^2(\arctan(e^{x+t})) \\ &\quad - 1] \\ &= 2 \left(\frac{2e^{x+t}}{1+e^{2x+2t}} \right) \left(\frac{2}{1+e^{2x+2t}} - 1 \right) = 2 \left(\frac{2e^{x+t}}{1+e^{2x+2t}} \right) \left(\frac{1-e^{2x+2t}}{1+e^{2x+2t}} \right) \\ &= 2 \operatorname{sech}(x+t) \tanh(x+t), \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \cos(4 \arctan(e^{x+t})) &= 2 \cos^2(2 \arctan(e^{x+t})) - 1 \\ &= 2 [2 \cos^2(\arctan(e^{x+t})) - 1]^2 - 1 \\ &= 2 \left[\frac{2}{1+e^{2x+2t}} - 1 \right]^2 - 1 = 2 \left[\frac{1-e^{2x+2t}}{1+e^{2x+2t}} \right]^2 - 1 \\ &= 2 \tanh^2(x+t) - 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\omega_1[u] = \frac{2}{\eta} \operatorname{sech}(x+t) \tanh(x+t) dt, \quad \omega_2[u] = \eta dx + \frac{1}{\eta} [2 \tanh^2(x+t) - 1] dt.$$

Notemos que a função $u(x, t) = 4 \arctan(e^{x+t})$ é uma solução genérica para a equação (3.1.3) uma vez que

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)[u] = -2 \operatorname{sech}(x+t) \tanh(x+t) dx \wedge dt \neq 0, \quad (x, t) \in U, \quad (x, t) \neq (0, 0),$$

em que U é o domínio da solução $u(x, t)$. Além disso, a restrição do tensor métrico $g = \omega_1^2 + \omega_2^2$ à solução $u(x, t)$ é dada por

$$g[u] = \eta^2 dx^2 + 2 \left[2 \tanh^2(x+t) - 1 \right] dx dt + \frac{1}{\eta^2} dt^2.$$

Portanto, o par $(U, g[u])$, em que U é o domínio da solução $u(x, t)$, consiste em uma família de superfícies pseudo-esféricas.

Exemplo 3.8. A equação de Camassa-Holm

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + 2u_x u_{xx} - 3uu_x - mu_x, \quad m \in \mathbb{R} \quad (3.1.5)$$

descreve uma PSS com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1} dx + f_{i2} dt$, $1 \leq i \leq 3$, em que

$$\begin{aligned} f_{11} &= u - u_{xx} + \frac{m+\eta^2}{2} - 1, & f_{12} &= -u(f_{11} + 1) \pm \eta u_x - \frac{m+\eta^2}{2} + 1, \\ f_{21} &= \eta, & f_{22} &= -\eta u \pm u_x - \eta, \\ f_{31} &= \pm \left(u - u_{xx} + \frac{m+\eta^2}{2} \right), & f_{32} &= \mp u \left(u - u_{xx} + \frac{m+\eta^2}{2} \right) + \eta u_x \mp u \mp \frac{m+\eta^2}{2}, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

com $\eta \in \mathbb{R} - \{0\}$ é uma constante.

Observação 3.9. Sejam ω_1 e ω_2 as 1-formas em (3.1.6), segue que

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= (f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}) dx \wedge dt \\ &= \left[\left(u - u_{xx} + \frac{m+\eta^2}{2} - 1 \right) (-\eta u \pm u_x - \eta) \right. \\ &\quad \left. - \left(-u \left(u - u_{xx} + \frac{m+\eta^2}{2} \right) \pm \eta u_x - \frac{m+\eta^2}{2} + 1 \right) \eta \right] dx \wedge dt \\ &= \left[\pm \left(u - u_{xx} + \frac{m-2-\eta^2}{2} \right) u_x + \eta u_{xx} \right] dx \wedge dt. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Seja $\phi = \phi(x, t)$ uma função real (suave) não-trivial com domínio $U \subset \mathbb{R}^2$, tal que $U \ni (x, t) \mapsto \pm \left(\phi - \phi_{xx} + \frac{m-2-\eta^2}{2} \right) \phi_x + \eta \phi_{xx}$ é igual a zero no máximo em um conjunto de medida nula. Se $u = \phi(x, t)$ for uma solução de (3.1.5), então,

$$\pm \left(u - u_{xx} + \frac{m-2-\eta^2}{2} \right) u_x + \eta u_{xx} \Big|_{u=\phi(x,t)} = \pm \left(\phi - \phi_{xx} + \frac{m-2-\eta^2}{2} \right) \phi_x + \eta \phi_{xx} \neq 0.$$

Portanto, a função $\phi(x, t)$ é uma solução genérica de (3.1.5).

Exemplo 3.10. Consideremos a solução $u(x, t) = e^{x-ct}$, $c > 0$, da equação de Camassa-Holm (3.1.5). Ao restringirmos ω_1 e ω_2 de (3.1.6) a solução $u(x, t)$, obtemos de (3.1.7), que

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)[u] = \pm \left(\frac{m - 2 \pm 2\eta - \eta^2}{2} \right) e^{x-ct} dx \wedge dt.$$

Então, a função $u(x, t) = e^{x-ct}$ é uma solução genérica para a equação (3.1.5) se $m - 2 \pm 2\eta - \eta^2 \neq 0$. Além do mais, a restrição do tensor métrico $g = \omega_1^2 + \omega_2^2$ à solução $u(x, t)$ é dada por

$$g[u] = E(x, t) dx^2 + 2F(x, t) dxdt + G(x, t) dt^2,$$

em que

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \left(\frac{m + \eta^2}{2} \right)^2 - m + 1, \\ F(x, t) &= \left[\left(\frac{m + \eta^2}{2} - 1 \right) \left(-\frac{m + \eta^2}{2} \pm \eta \right) + \eta(-\eta \pm 1) \right] e^{x-ct} - \left(\frac{m + \eta^2}{2} - 1 \right)^2 - \eta^2, \\ G(x, t) &= \left[\left(-\frac{m + \eta^2}{2} \pm \eta \right)^2 + (-\eta \pm 1)^2 \right] e^{2(x-ct)} + \left(\frac{m + \eta^2}{2} - 1 \right)^2 + \eta^2 \\ &\quad - 2 \left[\left(\frac{m + \eta^2}{2} - 1 \right) \left(-\frac{m + \eta^2}{2} \pm \eta \right) + \eta(-\eta \pm 1) \right] e^{x-ct}. \end{aligned}$$

Assim, o par $(U, g[u])$, em que U é o domínio da solução $u(x, t)$, consiste em uma família de superfícies pseudo-esféricas.

3.2 PROBLEMAS LINEARES ASSOCIADOS

Uma das observações básicas que conecta a teoria das equações que descrevem PSS com sistemas integráveis, apontada por Chern e Tenenblat [5], é o fato das equações do tipo pseudo-esférico com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i = 1, 2, 3$, serem a condição de integrabilidade de um problema linear

$$dv = \Omega v, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \tag{3.2.1}$$

em que $v_i = v_i(x, t)$, d é a diferencial exterior e

$$\Omega = Xdx + Tdt = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_2 & \omega_1 - \omega_3 \\ \omega_1 + \omega_3 & -\omega_2 \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

com

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{21} & f_{11} - f_{31} \\ f_{11} + f_{31} & -f_{21} \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{22} & f_{12} - f_{32} \\ f_{12} + f_{32} & -f_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.2.3)$$

Além disso, $X, T \in sl(2, \mathbb{R})$ – conjunto das matrizes 2×2 com entradas reais e traço nulo.

A condição de integrabilidade do problema linear (3.2.1) é dada por

$$d\Omega - \Omega \wedge \Omega = 0, \quad (3.2.4)$$

uma vez que

$$0 = d^2v = d\Omega v - \Omega \wedge dv = d\Omega v - \Omega \wedge \Omega v = (d\Omega - \Omega \wedge \Omega) v,$$

em que $v = (v_1(x, t), v_2(x, t))^T \neq (0, 0)^T$. Além disso, a relação (3.2.4) é, por construção, a equação diferencial parcial não-linear associada ao problema linear (3.2.1).

Proposição 3.11. *A condição de integrabilidade (3.2.4) para (3.2.1) é equivalente a dizer que o terno de 1-formas $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ (3.1.2) associado a uma equação que descreve PSS satisfaz as equações de estrutura (3.1.1).*

Demonstração. Substituindo $\Omega = Xdx + Tdt$ na relação (3.2.4), segue que

$$\begin{aligned} d\Omega - \Omega \wedge \Omega &= d(Xdx + Tdt) - (Xdx + Tdt) \wedge (Xdx + Tdt) \\ &= dX \wedge dx + dT \wedge dt - (XT - TX) dx \wedge dt \\ &= (D_x X dx + D_t X dt) \wedge dx + (D_x T dx + D_t T dt) \wedge dt - (XT - TX) dx \wedge dt \\ &= (D_x T - D_t X) dx \wedge dt - (XT - TX) dx \wedge dt \\ &= (D_x T - D_t X + TX - XT) dx \wedge dt \end{aligned}$$

em que D_x e D_t são os operadores de derivadas totais em relação a x e t , respectivamente.

Calculando XT e TX , respectivamente:

$$XT = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} f_{21}f_{22} + (f_{11} - f_{31})(f_{12} + f_{32}) & f_{21}(f_{12} - f_{32}) - (f_{11} - f_{31})f_{22} \\ (f_{11} + f_{31})f_{22} - f_{21}(f_{12} + f_{32}) & (f_{11} + f_{31})(f_{12} - f_{32}) - f_{21}f_{22} \end{pmatrix},$$

e,

$$TX = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} f_{21}f_{22} + (f_{12} - f_{32})(f_{11} + f_{31}) & f_{22}(f_{11} - f_{31}) - (f_{12} - f_{32})f_{21} \\ (f_{12} + f_{32})f_{21} - f_{22}(f_{11} + f_{31}) & (f_{12} + f_{32})(f_{11} - f_{31}) + f_{22}f_{21} \end{pmatrix}.$$

Assim, temos que

$$TX - XT = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31} & f_{21}f_{12} - f_{22}f_{11} + f_{22}f_{31} - f_{21}f_{32} \\ f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} + f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21} & -f_{11}f_{32} + f_{12}f_{31} \end{pmatrix}.$$

Calculando as derivadas totais $D_x T$ e $D_t X$:

$$D_x T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{22,x} & f_{12,x} - f_{32,x} \\ f_{12,x} + f_{32,x} & -f_{22,x} \end{pmatrix}, \quad D_t X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{21,t} & f_{11,t} - f_{31,t} \\ f_{11,t} + f_{31,t} & -f_{21,t} \end{pmatrix},$$

então

$$D_x T - D_t X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{22,x} - f_{21,t} & f_{12,x} - f_{11,t} - f_{32,x} + f_{31,t} \\ f_{12,x} - f_{11,t} + f_{32,x} - f_{31,t} & -f_{22,x} + f_{21,t} \end{pmatrix}.$$

Tomando $Z := (D_x T - D_t X + TX - XT) dx \wedge dt$, segue-se que

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} f_{22,x} - f_{21,t} & f_{12,x} - f_{11,t} - f_{32,x} + f_{31,t} \\ f_{12,x} - f_{11,t} + f_{32,x} - f_{31,t} & -f_{22,x} + f_{21,t} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{pmatrix} f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31} & f_{21}f_{12} - f_{22}f_{11} + f_{22}f_{31} - f_{21}f_{32} \\ f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} + f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21} & -f_{11}f_{32} + f_{12}f_{31} \end{pmatrix} \right] dx \wedge dt \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d\omega_2 & d\omega_1 - d\omega_3 \\ d\omega_1 + d\omega_3 & -d\omega_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_1 \wedge \omega_3 & \omega_3 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_2 \\ \omega_3 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_2 & -\omega_1 \wedge \omega_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e, portanto:

$$d\Omega - \Omega \wedge \Omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3 & d\omega_1 - d\omega_3 - \omega_3 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_2 \\ d\omega_1 + d\omega_3 - \omega_3 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_2 & -d\omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3 \end{pmatrix}.$$

Como $d\Omega - \Omega \wedge \Omega = 0$, podemos concluir que:

$$d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3 = 0 \quad (i)$$

$$d\omega_1 - d\omega_3 - \omega_3 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \quad (ii)$$

$$d\omega_1 + d\omega_3 - \omega_3 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_2 = 0. \quad (iii)$$

Somando (ii) com (iii) tem-se:

$$d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2 = 0.$$

Subtraindo (iii) por (ii) tem-se:

$$d\omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

Portanto, obtemos as seguintes relações:

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Ou seja, a condição (3.2.4) é equivalente a dizer que o terno $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ satisfaz as equações de estrutura (3.1.1). \square

Proposição 3.12. *Seja $v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^T$ com $v_i = v_i(x, t)$. Sejam $X, T \in sl(2, \mathbb{R})$ então (3.2.1) pode ser escrito como o seguinte problema linear*

$$\frac{\partial v}{\partial x} = Xv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = Tv. \quad (3.2.5)$$

Demonstração. Do problema linear (3.2.1) $dv = \Omega v$ com $\Omega = Xdx + Tdt$, segue-se, por um lado, que

$$dv = (Xdx + Tdt)v = (Xv)dx + (Tv)dt, \quad (3.2.6)$$

por outro lado,

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial t}dt. \quad (3.2.7)$$

Comparando (3.2.6) e (3.2.7) obtemos

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - Xv\right)dx + \left(\frac{\partial v}{\partial t} - Tv\right)dt = 0.$$

Portanto, $\frac{\partial v}{\partial x} - Xv = 0$ e $\frac{\partial v}{\partial t} - Tv = 0$, uma vez que dx e dt são linearmente independentes. Assim, obtemos (3.2.5). \square

Exemplo 3.13. A equação de Camassa-Holm (3.1.5) é geometricamente integrável, uma vez que as 1-formas (3.1.6) dão origem a uma família a 1-parâmetro de superfícies pseudo-esféricas. A equação (3.2.2) implica que as matrizes X e T são:

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta & -1 \\ 2u - 2u_{xx} + m + \eta^2 - 1 & -\eta \end{pmatrix}, \quad (3.2.8)$$

e

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\eta u + u_x - \eta & 1 + u \\ -2u \left(u - u_{xx} + \frac{m + \eta^2}{2} + \frac{1}{2} \right) + 2\eta u_x - m - \eta^2 + 1 & \eta u - u_x + \eta \end{pmatrix}. \quad (3.2.9)$$

Proposição 3.14. ([16], Proposição 1, pg. 119; [17], Proposição 2.5, pg. 245) Uma equação geometricamente integrável $\Xi = 0$ com 1– formas associadas ω_i , $i = 1, 2, 3$, é a condição de integrabilidade de uma família a 1– parâmetro de problemas lineares com valores em $sl(2, \mathbb{R})$.

Demonstração. O problema linear (3.2.1) é integrável sempre que $u(x, t)$ for uma solução de $\Xi = 0$. Portanto, $\Xi = 0$ é a condição de integrabilidade de uma família de problemas lineares a 1– parâmetro com valores em $sl(2, \mathbb{R})$. \square

Exemplo 3.15. As 1– formas (3.1.6) produzem o problema linear $v_x = Xv$ e $v_t = Tv$ com valor $sl(2, \mathbb{R})$ cuja condição de integrabilidade é a equação de Camassa-Holm. Das matrizes X (3.2.8) e T (3.2.9) associadas à equação de Camassa-Holm, temos que

$$D_t X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2u_t - 2u_{xxt} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_x T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\eta u_x + u_{xx} & u_x \\ -(m + \eta^2 + 1)u_x - 4uu_x + 2\eta u_{xx} + 2u_x u_{xx} + 2uu_{xxx} & \eta u_x - u_{xx} \end{pmatrix},$$

$$XT = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} m - 1 + mu + u + 2u^2 - \eta u_x - 2uu_{xx} & u_x \\ mu_x - u_x - \eta^2 u_x + 2uu_x + 2\eta u_{xx} - 2u_x u_{xx} & m - 1 + mu + u + 2u^2 + \eta u_x \\ -2u_{xx} - 2uu_{xx} & \end{pmatrix},$$

$$TX = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} m - 1 + mu + u + 2u^2 + \eta u_x - 2u_{xx} - 2uu_{xx} & -u_x \\ -mu_x + u_x + \eta^2 u_x - 2uu_x - 2\eta u_{xx} + 2u_x u_{xx} & m - 1 + mu + u + 2u^2 \\ -\eta u_x - 2uu_{xx} & \end{pmatrix},$$

então,

$$D_x T - D_t X + TX - XT = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -u_t + u_{xxt} + uu_{xxx} + 2u_x u_{xx} - 3uu_x - mu_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $D_x T - D_t X + TX - XT = 0$ sempre que $u(x, t)$ for solução da equação de Camassa-Holm (3.1.5). Isto é, a equação de Camassa-Holm (3.1.5) é a condição de integrabilidade do problema linear (3.2.5) com X e T dadas em (3.2.8) e (3.2.9), respectivamente.

3.3 PSEUDO-POTENCIAIS E LEIS DE CONSERVAÇÃO

Nesta seção abordaremos alguns resultados geométricos que estão em [5, 17, 18]. Veremos como as propriedades geométricas de uma PSS podem ser aplicadas para obter resultados analíticos para equações que descrevem PSS.

O seguinte resultado é a chave para a aplicação das construções anteriores à teoria da integrabilidade de equações do tipo pseudo-esférico.

Proposição 3.16. ([5], Proposição 4.1, pg. 77; [17], Proposição 3.1, pg. 246) *Dado um correferencial ortonormal $\{\omega_1, \omega_2\}$ e ω_3 a forma de conexão métrica correspondente em uma superfície Riemanniana (U, g) com métrica $g = \omega_1^2 + \omega_2^2$, existe um novo correferencial ortonormal $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2\}$ e uma nova forma de conexão métrica única $\bar{\omega}_3$ em (U, g) satisfazendo*

$$d\bar{\omega}_1 = 0, \quad d\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_2 \wedge \bar{\omega}_1, \quad \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_2 = 0, \quad (3.3.1)$$

se, e somente se, (U, g) é pseudo-esférica.

Demonstração. Seja $M = (U, g)$ uma superfície Riemanniana; sejam $\{e_1, e_2\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ dois campos de referenciais ortonormais com $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ e $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3$ as 1-formas associadas respectivamente. Suponhamos que os dois referenciais têm a mesma orientação; então

$$\bar{e}_1 = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2,$$

$$\bar{e}_2 = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2,$$

e,

$$\bar{\omega}_1 = \cos \theta \omega_1 + \sin \theta \omega_2,$$

$$\bar{\omega}_2 = -\sin \theta \omega_1 + \cos \theta \omega_2.$$

Usando as seguintes propriedades:

$$\langle d\bar{e}_i, \bar{e}_i \rangle = 0 \quad e \quad \langle d\bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = -\langle \bar{e}_j, d\bar{e}_i \rangle, \quad i \neq j,$$

em que $g := \langle , \rangle$, segue-se que:

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega}_3 &= \bar{\omega}_{12} = \langle d\bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = \langle d(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2), -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2 \rangle \\
 &= \langle -\sin \theta de_1 + \cos \theta de_1 + \cos \theta d\theta e_2 + \sin \theta de_2, -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2 \rangle \\
 &= \sin^2 \theta d\theta + \cos^2 \theta \langle de_1, e_2 \rangle + \cos^2 \theta d\theta - \sin^2 \theta \langle de_2, e_1 \rangle \\
 &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \langle de_1, e_2 \rangle \\
 &= d\theta + \langle de_1, e_2 \rangle = d\theta + \omega_{12} = d\theta + \omega_3.
 \end{aligned}$$

Em resumo, temos que

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \cos \theta + \omega_2 \sin \theta, \quad \bar{\omega}_2 = -\omega_1 \sin \theta + \omega_2 \cos \theta, \quad \bar{\omega}_3 = d\theta + \omega_3, \quad (3.3.2)$$

em que θ é o ângulo de rotação dos referenciais.

Agora, mostraremos que as 1- formas $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, e $\bar{\omega}_3$ satisfazendo (3.3.1) existem se, e somente se, o sistema Pfaffiano

$$\omega_3 + d\theta - \omega_1 \sin \theta + \omega_2 \cos \theta = 0 \quad (3.3.3)$$

no espaço de coordenadas (x, t, θ) é completamente integrável para $\theta(x, t)$.

Seja $\gamma = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3$. Diferenciando ambos os lados, segue das equações de estrutura (3.1.1), que

$$d\gamma = d\bar{\omega}_3 + d\bar{\omega}_2 = -K\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 + d\bar{\omega}_2,$$

em que K é a curvatura Gaussiana de M . Portanto, pelo o Teorema de Frobenius 2.84, o sistema Pfaffiano

$$\bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_2 = 0, \quad (3.3.4)$$

é completamente integrável para $\theta(x, t)$, com as 1- formas $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ e $\bar{\omega}_3$ satisfazendo (3.3.1) se, e somente se, $K = -1$. Em outras palavras, isso acontece se, e somente se, M for uma superfície pseudo-esférica. \square

Pelo fato da equação $\Xi = 0$ descrever superfícies pseudo-esféricas com 1- formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, as equações (3.3.1) e (3.3.3) implicam que o sistema Pfaffiano

$$\omega_3(u(x, t)) + d\theta - \omega_1(u(x, t)) \sin \theta + \omega_2(u(x, t)) \cos \theta = 0 \quad (3.3.5)$$

é completamente integrável para $\theta(x, t)$ sempre que $u(x, t)$ for uma solução local de $\Xi = 0$. Além do mais, as equações (3.3.1) e (3.3.2) implicam que a 1- forma

$$\bar{\omega}_1(u(x, t)) = \omega_1(u(x, t)) \cos \theta + \omega_2(u(x, t)) \sin \theta \quad (3.3.6)$$

é fechada, ou seja, $d\bar{\omega}_1(u(x, t)) = 0$, para cada solução $u(x, t)$ de $\Xi = 0$ e solução $\theta(x, t)$ correspondente de (3.3.5).

Definição 3.17. Uma *lei de conservação* de uma equação diferencial $\Xi = 0$ consiste em uma divergência

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \Phi$$

que se anula nas soluções da equação $\Xi = 0$, em que ρ e Φ são, em geral, funções suaves dependentes de x , t e u e suas derivadas parciais. Ou seja, se

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \Phi = 0 \quad (3.3.7)$$

para todas as soluções $u = u(x, t)$ de $\Xi = 0$ que se anulam, juntamente com suas derivadas, no infinito, então (3.3.7) é uma *lei de conservação* para a equação $\Xi = 0$. O par $F = (\rho, \Phi)$ é chamado de *corrente conservada*, ρ de *densidade conservada* e Φ de *fluxo* associado.

Observação 3.18. A integração de (3.3.7) com respeito a x , resulta que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \Phi dx = -\Phi \Big|_{-\infty}^{\infty},$$

e, portanto,

$$\mathcal{I}[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx = \text{constante},$$

desde que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi = 0$. O funcional $\mathcal{I}[u]$ é chamado de *quantidade conservada*.

Exemplo 3.19. ([19]) Considere a equação diferencial parcial

$$u_t - u_{xxt} - 32uu_x + 8u_x u_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx} u_{xxx} = 0, \quad (3.3.8)$$

e o vetor $F = (\rho, \Phi)$ tal que

$$\rho = u - u_{xx}, \quad \Phi = -16u^2 - u_{xx}^2 + 8uu_{xx}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \Phi \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (u - u_{xx}) + \frac{\partial}{\partial x} (-16u^2 - u_{xx}^2 + 8uu_{xx}) \\ &= u_t - u_{xxt} - 32uu_x + 8u_x u_{xx} + 8uu_{xxx} - 2u_{xx} u_{xxx}. \end{aligned}$$

Desse modo, se $u = u(x, t)$ for uma solução da equação (3.3.8), então $\text{div}F = 0$. A quantidade conservada é dada por

$$\mathcal{I}[u] = \int_{-\infty}^{\infty} (u - u_{xx}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u dx,$$

em que $u_x|_{-\infty}^{\infty} = 0$, e, portanto, u é uma densidade conservada para a equação (3.3.8).

Observação 3.20. Considere uma 1-forma $\omega = f dx + g dt$ associada à equação $\Xi = 0$, em que f e g são funções suaves, segue-se que $d\omega = (g_x - f_t) dx \wedge dt$. Note que $d\omega = 0$ se, e somente se, $g_x - f_t = 0$, que é a tal divergência vista na Definição 3.17, ou seja, ω é uma lei de conservação da equação $\Xi = 0$.

Definição 3.21. ([11], Capítulo 3) Uma 1-forma ω é uma lei de conservação da equação $\Xi = 0$ se for fechada para todas as soluções $u = u(x, t)$ de $\Xi = 0$, isto é, $(d\omega)[u] = 0$. Uma lei de conservação ω é chamada *trivial* se for *exata*, caso contrário ela é dita *não-trivial*.

Exemplo 3.22. Considere a equação de Burgers

$$u_t = uu_x + u_{xx} \tag{3.3.9}$$

e o vetor $F = (\rho, \Phi)$ tal que

$$\rho = u, \quad \Phi = -\frac{1}{2}u^2 - u_x.$$

Para uma solução $u = u(x, t)$ da equação (3.3.9), observe que

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}\Phi = u_t - uu_x - u_{xx} = 0,$$

em que a quantidade conservada é $\mathcal{I}[u] = \int_{-\infty}^{\infty} u dx$. Assim, notemos que a 1-forma

$$\omega = u dx + \left(\frac{1}{2}u^2 + u_x \right) dt,$$

é uma lei de conservação que não é trivial, pois, caso fosse, teríamos uma 0-forma ϕ tal que $\omega = d\phi = \phi_x dx + \phi_t dt$; desse modo, $\phi_x = u$ e $\phi_t = \frac{1}{2}u^2 + u_x$. Assim, integrando $\phi_x = u$ com respeito a x , resulta que $\phi = \int u dx + c(t)$; do qual, por definição, temos que $\int u dx$ independe de t , com isso, segue-se que $\phi_t = c'(t)$ só depende de t , mas por outro lado $\phi_t = \frac{1}{2}u^2 + u_x$ depende de x e t , logo temos um absurdo.

Como as 1– formas fechadas restritas às soluções da equação $\Xi = 0$ determinam *leis de conservação*, sucede que, se as funções f_{ij} puderem ser expandidas como séries de potências em um parâmetro η , a forma fechada (3.3.6) fornece um número infinito de leis de conservação para a equação diferencial $\Xi = 0$.

Na Proposição a seguir veremos um formalismo geométrico do sistema Pfaffiano (3.3.5) e da 1– forma (3.3.6), que fornece uma maneira adequada, do ponto de vista prático, para obtermos as leis de conservação de uma equação diferencial $\Xi = 0$ do tipo pseudo-esférico.

Proposição 3.23. ([16], Proposição 2, pg. 122) *Seja $\Xi = 0$ uma equação diferencial do tipo pseudo-esférico com 1– formas associadas ω_i . Os dois sistemas Pfaffianos a seguir são completamente integráveis sempre que $u(x, t)$ for uma solução de $\Xi = 0$:*

$$-2d\Gamma = \omega_3 + \omega_2 - 2\Gamma\omega_1 + \Gamma^2(\omega_3 - \omega_2), \quad (3.3.10)$$

e

$$2d\hat{\Gamma} = \omega_3 - \omega_2 - 2\hat{\Gamma}\omega_1 + \hat{\Gamma}^2(\omega_3 + \omega_2), \quad (3.3.11)$$

em que $\omega_i = \omega_i(u(x, t))$, $i = 1, 2, 3$.

Além disso, as 1– formas

$$\Theta = \omega_1 - \Gamma(\omega_3 - \omega_2) \quad (3.3.12)$$

e

$$\hat{\Theta} = -\omega_1 + \hat{\Gamma}(\omega_3 + \omega_2) \quad (3.3.13)$$

são fechadas sempre que $u(x, t)$ for uma solução de $\Xi = 0$ e Γ (respectivamente $\hat{\Gamma}$) for uma solução do sistema Pfaffiano (3.3.10) (respectivamente (3.3.11)).

Demonstração. De início, tomemos as mudanças de variáveis

$$\Gamma = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad e \quad \hat{\Gamma} = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Observe que, $\theta = 2 \arctan(\Gamma)$ e $\theta = 2 \operatorname{arccot}(\hat{\Gamma})$. Tomando a diferencial de ambos os lados, das duas expressões, obtemos, respectivamente, que

$$d\theta = \frac{2}{1+\Gamma^2}d\Gamma \quad e \quad d\theta = -\frac{2}{1+\hat{\Gamma}^2}d\hat{\Gamma}.$$

Além disso, para a variável Γ ,

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\arctan(\Gamma)) = \frac{\Gamma}{\sqrt{1+\Gamma^2}}, \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos(\arctan(\Gamma)) = \frac{1}{\sqrt{1+\Gamma^2}},$$

e, para a variável $\hat{\Gamma}$,

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\operatorname{arccot}(\hat{\Gamma})) = \frac{1}{\sqrt{1+\hat{\Gamma}^2}}, \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos(\operatorname{arccot}(\hat{\Gamma})) = \frac{\hat{\Gamma}}{\sqrt{1+\hat{\Gamma}^2}}.$$

Portanto, usando as identidades trigonométricas de duplicação de ângulos, temos, para a variável Γ , que

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\Gamma}{1+\Gamma^2}, \\ \cos(\theta) &= 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1+\Gamma^2} - 1 = \frac{1-\Gamma^2}{1+\Gamma^2}, \end{aligned}$$

e, similarmente, para a variável $\hat{\Gamma}$, temos

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\hat{\Gamma}}{1+\hat{\Gamma}^2}, \\ \cos(\theta) &= 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = \frac{2\hat{\Gamma}^2}{1+\hat{\Gamma}^2} - 1 = -\frac{1-\hat{\Gamma}^2}{1+\hat{\Gamma}^2}. \end{aligned}$$

Em suma, segue-se que

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \arctan(\Gamma), & \theta &= 2 \operatorname{arccot}(\hat{\Gamma}), \\ d\theta &= \frac{2}{1+\Gamma^2} d\Gamma, & d\theta &= -\frac{2}{1+\hat{\Gamma}^2} d\hat{\Gamma}, \\ \sin(\theta) &= \frac{2\Gamma}{1+\Gamma^2}, & \sin(\theta) &= \frac{2\hat{\Gamma}}{1+\hat{\Gamma}^2}, \\ \cos(\theta) &= \frac{1-\Gamma^2}{1+\Gamma^2}, & \cos(\theta) &= -\frac{1-\hat{\Gamma}^2}{1+\hat{\Gamma}^2}. \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Agora, substituindo (3.3.14) em (3.3.5), obtemos,

$$\omega_3 + \frac{2}{1+\Gamma^2} d\Gamma - \frac{2\Gamma}{1+\Gamma^2} \omega_1 + \frac{1-\Gamma^2}{1+\Gamma^2} \omega_2 = 0,$$

e

$$\omega_3 - \frac{2}{1+\hat{\Gamma}^2} d\hat{\Gamma} - \frac{2\hat{\Gamma}}{1+\hat{\Gamma}^2} \omega_1 - \frac{1-\hat{\Gamma}^2}{1+\hat{\Gamma}^2} \omega_2 = 0,$$

e, portanto, simplificando-os, obtemos (3.3.10) e (3.3.11), respectivamente.

Agora, tomemos

$$0 = \gamma \equiv 2d\Gamma + \omega_3 + \omega_2 - 2\Gamma\omega_1 + \Gamma^2(\omega_3 - \omega_2), \tag{3.3.15}$$

e,

$$0 = \hat{\gamma} \equiv -2d\hat{\Gamma} + \omega_3 - \omega_2 - 2\hat{\Gamma}\omega_1 + \hat{\Gamma}^2(\omega_3 + \omega_2). \quad (3.3.16)$$

Diferenciando (3.3.15) e (3.3.16), respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} d\gamma &= 2d^2\Gamma + d\omega_3 + d\omega_2 - 2d\Gamma \wedge \omega_1 - 2\Gamma d\omega_1 + 2\Gamma d\Gamma \wedge (\omega_3 - \omega_2) + \Gamma^2(d\omega_3 - d\omega_2) \\ &= \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3 - 2d\Gamma \wedge \omega_1 - 2\Gamma\omega_3 \wedge \omega_2 + 2\Gamma d\Gamma \wedge (\omega_3 - \omega_2) \\ &\quad + \Gamma^2(\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3) \\ &= [\omega_1 - \Gamma(\omega_3 - \omega_2)] \wedge [\omega_2 + \omega_3 + 2d\Gamma - 2\Gamma\omega_1 + \Gamma^2(\omega_3 - \omega_2)] \\ &= [\omega_1 - \Gamma(\omega_3 - \omega_2)] \wedge \gamma \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} d\hat{\gamma} &= -2d^2\hat{\Gamma} + d\omega_3 - d\omega_2 - 2d\hat{\Gamma} \wedge \omega_1 - 2\hat{\Gamma}d\omega_1 + 2\hat{\Gamma}d\hat{\Gamma}(\omega_3 + \omega_2) + \hat{\Gamma}^2d(\omega_3 + \omega_2) \\ &= \omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3 - 2d\hat{\Gamma} \wedge \omega_1 - 2\hat{\Gamma}\omega_3 \wedge \omega_2 + 2\hat{\Gamma}d\hat{\Gamma} \wedge (\omega_3 + \omega_2) \\ &\quad + \hat{\Gamma}^2(\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3) \\ &= [-\omega_1 + \hat{\Gamma}(\omega_3 + \omega_2)] \wedge [-\omega_2 + \omega_3 - 2d\hat{\Gamma} - 2\hat{\Gamma}\omega_1 + \hat{\Gamma}^2(\omega_3 + \omega_2)] \\ &= [-\omega_1 + \hat{\Gamma}(\omega_3 + \omega_2)] \wedge \hat{\gamma}. \end{aligned}$$

Em suma, obtemos

$$d\gamma = [\omega_1 - \Gamma(\omega_3 - \omega_2)] \wedge \gamma \quad e \quad d\hat{\gamma} = [-\omega_1 + \hat{\Gamma}(\omega_3 + \omega_2)] \wedge \hat{\gamma},$$

que são condições necessárias e suficientes para que γ e $\hat{\gamma}$ sejam completamente integráveis, mostrando assim que as 1- formas

$$\Theta := \omega_1 - \Gamma(\omega_3 - \omega_2), \quad \hat{\Theta} := -\omega_1 + \hat{\Gamma}(\omega_3 + \omega_2),$$

são fechadas, isto é,

$$d\Theta = 0, \quad d\hat{\Theta} = 0,$$

para as soluções das equações (3.3.15) e (3.3.16), respectivamente. E, portanto, são as leis de conservação para $\Xi = 0$. \square *Observação 3.24.* O significado geométrico das equações de (3.3.10) e (3.3.11) é que elas determinam as coordenadas geodésicas na superfície pseudo-esférica M [5].

Os pseudo-potenciais são uma generalização das leis de conservação:

Definição 3.25. ([17], Definição 3.3) Uma função de valor real Γ é um pseudo-potencial de uma equação diferencial $\Xi \left(x, t, u, \dots, \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} \right) = 0$, $m, n \geq 0$, se existem funções suaves f, g dependendo de Γ, x, t, u e um número finito de derivadas de u , de modo que a 1- forma

$$\Omega_\Gamma = d\Gamma - (fdx + gdt)$$

satisfaz

$$d\Omega_\Gamma = 0 \quad \text{mod } \Omega_\Gamma$$

sempre que $u(x, t)$ é uma solução de $\Xi = 0$.

Em outras palavras, Γ é um pseudo-potencial para $\Xi = 0$ se e somente se $f_t = g_x$ sempre que $\Gamma_x = f$, $\Gamma_t = g$ e $u(x, t)$ for uma solução para $\Xi = 0$ (ver [18], pg. 72).

Observação 3.26. ([17], pg. 247) Se as funções f e g que aparecem na Definição 3.25 não dependem de Γ , essa função Γ é um potencial para a lei de conservação original $fdx + gdt$ da equação $\Xi = 0$.

Proposição 3.27. *Uma equação diferencial $\Xi = 0$ é do tipo pseudo-esférico se, e somente se, admitir um pseudo-potencial quadrático.*

Demonstração. Suponha que a equação diferencial $\Xi = 0$ é do tipo pseudo-esférico. Pela Proposição 3.23, nas equações (3.3.10) e (3.3.11), temos que Γ e $\hat{\Gamma}$ são pseudo-potenciais quadráticos para $\Xi = 0$. Portanto, a equação $\Xi = 0$ que descreve PSS admite um pseudo-potencial quadrático.

Reciprocamente, suponha que a equação diferencial $\Xi = 0$ admite um pseudo-potencial quadrático Γ com 1- forma associada $\Omega_\Gamma = d\Gamma - (fdx + gdt)$ em que $f = a + b\Gamma + c\Gamma^2$ e $g = \bar{a} + \bar{b}\Gamma + \bar{c}\Gamma^2$. Observe que

$$d\Gamma - (fdx + gdt) = (\Gamma_x - f) dx + (\Gamma_t - g) dt.$$

Por definição, temos que,

$$d\Omega_\Gamma = 0 \quad \text{mod } \Omega_\Gamma$$

sempre que $u(x, t)$ for solução de $\Xi = 0$, e então, o sistema

$$\Gamma_x - f = 0, \quad \Gamma_t - g = 0,$$

ou seja,

$$\Gamma_x = a + b\Gamma + c\Gamma^2, \quad \Gamma_t = \bar{a} + \bar{b}\Gamma + \bar{c}\Gamma^2, \quad (3.3.17)$$

é completamente integrável em soluções de $\Xi = 0$ e, pela diferenciabilidade, temos que, $\Gamma_{xt} = \Gamma_{tx}$, portanto, desenvolvendo separadamente cada uma dessas derivadas parciais e substituindo as equações do sistema (3.3.17) adequadamente, temos, por um lado, que

$$\begin{aligned}\Gamma_{xt} &= a_t + b_t \Gamma + b \Gamma_t + c_t \Gamma^2 + 2c \Gamma \Gamma_t \\ &= a_t + b_t \Gamma + b \left(\bar{a} + \bar{b} \Gamma + \bar{c} \Gamma^2 \right) + c_t \Gamma^2 + 2c \Gamma \left(\bar{a} + \bar{b} \Gamma + \bar{c} \Gamma^2 \right) \\ &= (a_t + b \bar{a}) + \left(b_t + b \bar{b} + 2c \bar{a} \right) \Gamma + \left(b \bar{c} + c_t + 2c \bar{b} \right) \Gamma^2 + 2c \bar{c} \Gamma^3,\end{aligned}\tag{3.3.18}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}\Gamma_{tx} &= \bar{a}_x + \bar{b}_x \Gamma + \bar{b} \Gamma_x + \bar{c}_x \Gamma^2 + 2\bar{c} \Gamma \Gamma_x \\ &= \bar{a}_x + \bar{b}_x \Gamma + \bar{b} \left(a + b \Gamma + c \Gamma^2 \right) + \bar{c}_x \Gamma^2 + 2\bar{c} \Gamma \left(a + b \Gamma + c \Gamma^2 \right) \\ &= \left(\bar{a}_x + \bar{b} a \right) + \left(\bar{b}_x + \bar{b} b + 2\bar{c} a \right) \Gamma + \left(\bar{b} c + \bar{c}_x + 2\bar{c} b \right) \Gamma^2 + 2\bar{c} c \Gamma^3.\end{aligned}\tag{3.3.19}$$

Igualando (3.3.18) e (3.3.19), obtemos as equações

$$a_t + b \bar{a} = \bar{a}_x + \bar{b} a, \quad b_t + 2c \bar{a} = \bar{b}_x + 2\bar{c} a, \quad c_t + c \bar{b} = \bar{c}_x + \bar{c} b,\tag{3.3.20}$$

as quais são satisfeitas em soluções de $\Xi = 0$. As equações (3.3.20) são a condição de compatibilidade do sistema (3.3.17), que é uma condição necessária e suficiente para que o sistema (3.3.17) admita uma solução. Agora, tomando as 1- formas associadas ω_i , $i = 1, 2, 3$, como sendo

$$\begin{aligned}\omega_1 &= b dx + \bar{b} dt, \\ \omega_2 &= (-a + c) dx + (-\bar{a} + \bar{c}) dt, \\ \omega_3 &= -(a + c) dx - (\bar{a} + \bar{c}) dt,\end{aligned}\tag{3.3.21}$$

temos que,

$$\begin{aligned}d\omega_1 &= db \wedge dx + d\bar{b} \wedge dt = \left(\bar{b}_x - b_t \right) dx \wedge dt, \\ d\omega_2 &= d(-a + c) \wedge dx + d(-\bar{a} + \bar{c}) \wedge dt = \left[(-\bar{a} + \bar{c})_x - (-a + c)_t \right] dx \wedge dt, \\ d\omega_3 &= -d(a + c) \wedge dx - d(\bar{a} + \bar{c}) \wedge dt = - \left[(\bar{a} + \bar{c})_x - (a + c)_t \right] dx \wedge dt.\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
\omega_3 \wedge \omega_2 &= [-(a+c)dx - (\bar{a} + \bar{c})dt] \wedge [(-a+c)dx + (-\bar{a} + \bar{c})dt] \\
&= [-(a+c)(-\bar{a} + \bar{c}) + (\bar{a} + \bar{c})(-a+c)] dx \wedge dt \\
&= (2c\bar{a} - 2a\bar{c}) dx \wedge dt \\
\omega_1 \wedge \omega_3 &= (b dx + \bar{b} dt) \wedge [-(a+c)dx - (\bar{a} + \bar{c})dt] \\
&= [-b(\bar{a} + \bar{c}) + \bar{b}(a+c)] dx \wedge dt \\
&= (-b\bar{a} - b\bar{c} + \bar{b}a + \bar{b}c) dx \wedge dt \\
\omega_1 \wedge \omega_2 &= (b dx + \bar{b} dt) \wedge [(-a+c)dx + (-\bar{a} + \bar{c})dt] \\
&= [b(-\bar{a} + \bar{c}) - \bar{b}(-a+c)] dx \wedge dt \\
&= (-b\bar{a} + b\bar{c} + \bar{b}a - \bar{b}c) dx \wedge dt.
\end{aligned}$$

Note que $dx \wedge dt \neq 0$, pois é uma base para o espaço de 2- forma diferencial em $M = (U, g)$ espaço Riemanniano bidimensional.

Diante do exposto acima, em suma, temos que:

$$\begin{aligned}
d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2 &= (\bar{b}_x + 2a\bar{c} - b_t - 2c\bar{a}) dx \wedge dt = 0, \\
d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3 &= (a_t + b\bar{a} - \bar{a}_x - \bar{b}a + \bar{c}_x + b\bar{c} - c_t - \bar{b}c) dx \wedge dt = 0, \\
d\omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_2 &= (-\bar{a}_x - \bar{b}a + a_t + b\bar{a} - \bar{c}_x - b\bar{c} + c_t + \bar{b}c) dx \wedge dt = 0,
\end{aligned}$$

em soluções de $\Xi = 0$. Portanto, a equação $\Xi = 0$ descreve PSS. □

4

UMA EQUAÇÃO DE NOVIKOV DO TIPO PSEUDO-ESFÉRICO

Neste capítulo aplicaremos os conceitos até agora desenvolvidos para estudar a equação descoberta por Novikov (em [15], Teorema 3, eq. 17, pg. 9)

$$(1 - \epsilon^2 D_x^2) u_t = D_x (2 - \epsilon D_x) (1 + \epsilon D_x) u^2, \quad (4.0.1)$$

em que $u = u(x, t)$, $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ e $D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, do ponto de vista de superfícies pseudo-esféricas. No que segue, consideraremos $\epsilon = 1$.

Os resultados deste capítulo seguem organizados da seguinte forma: na Seção 4.1 apresentaremos alguns resultados preliminares. Na Seção 4.2 usaremos o Lema 7.2 do artigo [6] para mostrar que a equação (4.0.1) descreve superfície pseudo-esférica, a seguir o Teorema 3.4 do artigo [21] para encontrar suas 1- formas associadas e mostraremos que elas satisfazem as equações de estrutura que caracterizam uma superfície de curvatura Gaussiana -1 . Estes desenvolvimentos mencionados para a Seção 4.2 são os resultados originais do trabalho.

4.1 RESULTADOS PRELIMINARES

O primeiro resultado enunciado nesta seção será de grande valia para isolarmos, dentre as equações descobertas por Novikov em [15], aquelas do tipo pseudo-esférico satisfazendo determinadas condições descritas em [21].

Às vezes, por simplicidade, usaremos a seguinte notação:

$$z_0 := u, \quad z_{0,t} := u_t, \quad z_1 := u_x, \quad z_2 := u_{xx}, \quad z_3 := u_{xxx}.$$

Lema 4.1. ([6], Lema 7.2, pg. 5363.) *Seja λ uma constante. Suponha que uma equação do tipo*

$$z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z_0, z_1, z_2), \quad G \neq 0, \lambda \neq 0,$$

descreva superfícies pseudo-esféricas, com 1- formas associadas $\omega_i = f_{i1} dx + f_{i2} dt$, $1 \leq i \leq 3$, em que f_{ij} são funções reais diferenciáveis de z_k , da forma $f_{s1} = \mu_s f_{11} + \eta_s$, $\mu_s, \eta_s \in \mathbb{R}$, $s = 2, 3$,

se existem funções diferenciáveis $\Psi = \Psi(z_0, z_1)$ e $h = h(z_0 - z_2)$, com $h' \neq 0$ satisfazendo pelo menos uma das seguintes condições:

1. $G = (z_1 \Psi_{z_0} + z_0 \Psi_{z_1} + m \Psi) / h'$, com $0 \neq m \in \mathbb{R}$;
2. $G = -\lambda (z_1 \lambda + z_0 z_1 h' + m_1 z_1 + m_2 z_2) / h'$, com $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ e $m_2 \neq 0$;
3. $G = [z_2 \psi_{z_1} + z_1 \psi_z + m_1 \psi - \lambda z_0 z_1 h' - (\lambda z_1 + \lambda m_1 z_0 + m_2) h] / h'$, com m_1 e m_2 são constantes tais que $(m_1, m_2) \neq 0$;
4. $G = \lambda (z_1 z_2 - 2z_0 z_1 - m z_1 / \tau \mp z_2 / \tau) + \tau e^{\pm \tau z_1} (\tau z_0 z_2 \pm z_1 + m z_2) \varphi(z_0) \pm e^{\pm \tau z_1} (\tau z_0 z_1 + \tau z_1 z_2 + m z_1 \pm z_2) \varphi'(z) + z_1^2 e^{\pm \tau z_1} \varphi''(z_0)$ com $m, \tau \in \mathbb{R}$, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\tau > 0$;
5. $G = \lambda (2z_1 z_2 - 3z_0 z_1 - m_2 z_1) + m_1 \theta e^{\theta z} (\theta z_1^3 + z_1 z_2 + 2z_0 z_1 + m_2 z_1)$, com $m_1, m_2, \theta \in \mathbb{R}$, e $\theta \neq 0$.

O resultado enunciado a seguir será de fundamental importância para obtermos as 1-formas associadas à equação diferencial (4.0.1).

Teorema 4.2. ([21], Teorema 3.4, pg. 4906) *Suponha que uma equação do tipo*

$$z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z, z_1, z_2), \quad G \neq 0, \lambda \neq 0,$$

descreva superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1} dx + f_{i2} dt$, $1 \leq i \leq 3$, com f_{ij} funções reais diferenciáveis de z_k , satisfazendo $f_{s1} = \mu_s f_{11} + \eta_s$, $\mu_s, \eta_s \in \mathbb{R}$, $s = 2, 3$. Então $\ell = \pm \sqrt{1 + \mu^2} (\lambda m_1 z_0 + m_2) \neq 0$ se, e somente se,

$$G = \frac{1}{h'} [z_2 \psi_{,z_1} + z_1 \psi_{,z_0} + m_1 \psi - \lambda z_0 z_1 h' - (\lambda z_1 + \lambda m_1 z_0 + m_2) h],$$

$$f_{11} = h, \quad f_{12} = -\lambda z_0 h + \psi,$$

$$f_{21} = \mu h \pm m_1 \sqrt{1 + \mu^2}, \quad f_{22} = -\lambda \mu z_0 h + \mu \psi \pm m_2 \sqrt{1 + \mu^2},$$

$$f_{31} = \pm \sqrt{1 + \mu^2} h + m_1 \mu, \quad f_{32} = \pm \sqrt{1 + \mu^2} (\psi - \lambda z_0 h) + \mu m_2,$$

onde $\mu, \lambda, m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $(\lambda m_1)^2 + m_2^2 \neq 0$, $h(z_0 - z_2)$ e $\psi(z_0, z_1)$ são funções reais e diferenciáveis, com $h' \neq 0$.

4.2 RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção apresentaremos os nossos resultados bem como suas respectivas demonstrações.

Teorema 4.3. *A equação de Novikov (4.0.1) pertence à classe de equações do Lema 4.1 e, conseqüentemente, é do tipo pseudo-esférico.*

Demonstração. De início, notemos que

$$\begin{aligned}
 (1 - D_x^2) u_t &= D_x (2 - D_x) (1 + D_x) u^2 \\
 &= D_x (2 - D_x) (u^2 + D_x (u^2)) \\
 &= D_x [2 (u^2 + D_x (u^2)) - D_x (u^2 + D_x (u^2))] \\
 &= D_x [2u^2 + 4uu_x - (2uu_x + 2u_x^2 + 2uu_{xx})] \\
 &= D_x (2u^2 + 2uu_x - 2u_x^2 - 2uu_{xx}) \\
 &= 4uu_x + 2u_x^2 + 2uu_{xx} - 4u_x u_{xx} - 2u_x u_{xx} - 2uu_{xxx} \\
 &= -2uu_{xxx} + (4uu_x + 2u_x^2 + 2uu_{xx} - 6u_x u_{xx}).
 \end{aligned}$$

Logo

$$u_t - u_{txx} = -2uu_{xxx} + (4uu_x + 2u_x^2 + 2uu_{xx} - 6u_x u_{xx}).$$

Pela classificação do Lema 4.1, segue que:

$$z_{0,t} - z_{2,t} = \lambda z_0 z_3 + G(z_0, z_1, z_2),$$

com $\lambda = -2$ e

$$G = 4z_0 z_1 + 2z_1^2 + 2z_0 z_2 - 6z_1 z_2.$$

Agora, verificaremos se esta equação satisfaz algumas condições do Lema 4.1.

Podemos ver de imediato que não existem funções Ψ e h que satisfazem G nos itens 1, 2, 4 e 5 do Lema 4.1. Já no item 3 essas funções existem, como mostraremos a seguir, ou seja, mostraremos que existem as funções Ψ e h as quais tornam o item 3 do Lema 4.1,

$$G = \left[z_2 \Psi_{z_1} + z_1 \Psi_{z_0} + m_1 \Psi - \lambda z_0 z_1 h' - (\lambda z_1 + \lambda m_1 z_0 + m_2) h \right] / h', \quad (4.2.1)$$

com m_1 e m_2 constantes tais que $(m_1, m_2) \neq (0, 0)$, equivalente a

$$G = 4z_0z_1 + 2z_1^2 + 2z_0z_2 - 6z_1z_2.$$

Suponhamos que as funções suaves $\Psi = \Psi(z_0, z_1)$ e $h = h(z_0 - z_2)$, com $h' \neq 0$ sejam

$$\Psi = az_0z_1 + bz_1^2 + cz_0^2, \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R},$$

$$h = z_0 - z_2, \quad m_2 = 0.$$

Derivando Ψ com respeito a z_0 e z_1 , e também derivando h com respeito z_0 , obtemos

$$\Psi_{z_0} = az_1 + 2cz_0, \quad \Psi_{z_1} = az_0 + 2bz_1, \quad h' = 1. \quad (4.2.2)$$

Substituindo (4.2.2) em (4.2.1) e lembrando que $\lambda = -2$, temos

$$\begin{aligned} G &= z_2 (az_0 + 2bz_1) + z_1 (az_1 + 2cz_0) + m_1 (az_0z_1 + bz_1^2 + cz_0^2) + 2z_0z_1 \\ &\quad + (2z_1 + 2m_1z_0) (z_0 - z_2) \\ &= az_0z_2 + 2bz_1z_2 + az_1^2 + 2cz_0z_1 + m_1az_0z_1 + m_1bz_1^2 + m_1cz_0^2 + 4z_0z_1 \\ &\quad - 2z_1z_2 + 2m_1z_0^2 - 2m_1z_0z_2 \\ &= (2c + m_1a + 4) z_0z_1 + (a + m_1b) z_1^2 + (a - 2m_1) z_0z_2 + (2b - 2) z_1z_2 \\ &\quad + m_1 (c + 2) z_0^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que $G = 4z_0z_1 + 2z_1^2 + 2z_0z_2 - 6z_1z_2$. Comparando os coeficientes, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2c + m_1a + 4 = 4, \\ a + m_1b = 2, \\ a - 2m_1 = 2, \\ 2b - 2 = -6, \\ m_1(c + 2) = 0. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Uma vez que $m_1 \neq 0$, decorre das duas últimas equações de (4.2.3) que $b = c = -2$. Sendo assim o sistema (4.2.3) reduz a

$$\begin{cases} m_1a = 4, \\ a - 2m_1 = 2. \end{cases}$$

Como $m_1 \neq 0$, obtemos $a = \frac{4}{m_1}$. Dessa forma, da segunda equação obtemos $m_1^2 + m_1 - 2 = 0$, ou seja, $m_1 = -2$ ou $m_1 = 1$, o que implica que $a = -2$ ou $a = 4$, respectivamente. Portanto, encontrando os valores de a, b e c , podemos concluir que

$$\Psi = \frac{4}{m_1} z_0 z_1 - 2z_1^2 - 2z_0^2, \text{ para } m_1 = -2 \text{ ou } m_1 = 1.$$

Concluimos que a equação (4.0.1) satisfaz o Lema 4.1 tomando as funções

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{4}{m_1} z_0 z_1 - 2z_1^2 - 2z_0^2, & h &= z_0 - z_2, & h' &= 1, \\ \lambda &= -2, & m_1 &= -2 \text{ ou } m_1 = 1, & m_2 &= 0. \end{aligned}$$

□

Agora, usaremos o Teorema 4.2 para encontrar o terno $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ de 1-formas que caracteriza as superfícies associadas à equação de Novikov (4.0.1).

Teorema 4.4. *Sejam $\lambda = -2$ e $m_2 = 0$. Sejam $\Psi = \Psi(z_0, z_1)$ e $h = h(z_0 - z_2)$ funções diferenciáveis definidas por*

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{4}{m_1} z_0 z_1 - 2z_1^2 - 2z_0^2, \\ h &= z_0 - z_2, & m_1 &= -2 \text{ ou } m_1 = 1. \end{aligned}$$

Então as 1-formas associadas à equação de Novikov (4.0.1) são

$$\begin{aligned} \omega_1 &= h dx + (2z_0 h + \Psi) dt, \\ \omega_2 &= \left(\mu h \pm m_1 \sqrt{1 + \mu^2} \right) dx + \mu (2z_0 h + \Psi) dt, \\ \omega_3 &= \left(\pm \sqrt{1 + \mu^2} h + m_1 \mu \right) dx \pm \sqrt{1 + \mu^2} (2z_0 h + \Psi) dt, \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

com μ um parâmetro real.

Demonstração. Por hipótese, as funções Ψ e h com os parâmetros, em suma, são

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{4}{m_1} z_0 z_1 - 2z_1^2 - 2z_0^2, & h &= z_0 - z_2, & h' &= 1, \\ \lambda &= -2, & m_1 &= -2 \text{ ou } m_1 = 1, & m_2 &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo-os nas f_{ij} do Teorema 4.2 obtemos as funções f_{ij} para equação:

$$\begin{aligned} f_{11} &= h, & f_{12} &= 2z_0h + \Psi, \\ f_{21} &= \mu h \pm m_1 \sqrt{1 + \mu^2}, & f_{22} &= \mu f_{12}, \\ f_{31} &= \pm \sqrt{1 + \mu^2} h + m_1 \mu, & f_{32} &= \pm \sqrt{1 + \mu^2} f_{12}, \end{aligned}$$

com μ um parâmetro real. Assim, obtemos as 1– formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, para equação. \square

A seguir, mostraremos que as 1– formas encontradas no Teorema 4.4, satisfazem as equações de estrutura de superfícies cuja curvatura Gaussiana é $K = -1$.

Teorema 4.5. *As 1– formas (4.2.4) associadas à equação de Novikov (4.0.1) satisfazem a equação de estrutura de uma superfície pseudo-esférica.*

Demonstração. Vamos verificar que as 1–formas (4.2.4) satisfazem as equações de estrutura (3.1.1) sempre que $z_0(x, t)$ for uma solução da equação de Novikov (4.0.1). Para isto, notemos que o diferencial exterior de cada 1–forma ω_i é dado por: $d\omega_i = df_{i1} \wedge dx + df_{i2} \wedge dt$ em que $df_{i1} = (f_{i1})_x dx + (f_{i1})_t dt$ e $df_{i2} = (f_{i2})_x dx + (f_{i2})_t dt$, $1 \leq i \leq 3$; além disso, $dx \wedge dx = dt \wedge dt = 0$, $dx \wedge dt = -dt \wedge dx$ e $\left(\frac{2}{m_1} - m_1\right) = 1$ para $m_1 \in \{-2, 1\}$.

Verificando a primeira equação das equações de estrutura: $(d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2 = 0)$

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d[f_{11}dx + f_{12}dt] = df_{11} \wedge dx + df_{12} \wedge dt \\ &= dh \wedge dx + d(2z_0h + \Psi) \wedge dt \\ &= (h_x dx + h_t dt) \wedge dx + 2(hz_1 dx + hz_{0,t} dt + z_0 h_x dx + z_0 h_t dt) \wedge dt \\ &\quad + (\Psi_x dx + \Psi_t dt) \wedge dt \\ &= (h_t) dt \wedge dx + 2(hz_1 + z_0 h_x) dx \wedge dt + (\Psi_x) dx \wedge dt \\ &= [-h_t + 2hz_1 + 2z_0 h_x + \Psi_x] dx \wedge dt \\ &= \left[-(z_0 - z_2)_t + 2(z_0 - z_2)z_1 + 2z_0(z_0 - z_2)_x + \left(\frac{4}{m_1}z_0z_1 - 2z_1^2 - 2z_0^2\right)_x \right] dx \wedge dt \\ &= \left[-(z_0 - z_2)_t + 2(z_0 - z_2)z_1 + 2z_0(z_1 - z_3) + \frac{4}{m_1}z_1^2 + \frac{4}{m_1}z_0z_2 - 4z_1z_2 \right. \\ &\quad \left. - 4z_0z_1 \right] dx \wedge dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_3 \wedge \omega_2 &= [f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21}] dx \wedge dt \\
&= \left[\left(\pm \sqrt{1 + \mu^2 h + m_1 \mu} \right) \mu f_{12} - \left(\pm \sqrt{1 + \mu^2 f_{12}} \right) \left(\mu h \pm m_1 \sqrt{1 + \mu^2} \right) \right] dx \wedge dt \\
&= [m_1 \mu^2 - m_1 (1 + \mu^2)] f_{12} dx \wedge dt = -m_1 f_{12} dx \wedge dt = -m_1 (2z_0 h + \Psi) dx \wedge dt \\
&= -m_1 \left[2z_0 (z_0 - z_2) + \frac{4}{m_1} z_0 z_1 - 2z_1^2 - 2z_0^2 \right] dx \wedge dt \\
&= [2m_1 z_0 z_2 - 4z_0 z_1 + 2m_1 z_1^2] dx \wedge dt.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2 &= \left[-(z_0 - z_2)_t - 2z_0 z_3 + \frac{4}{m_1} z_1^2 + \frac{4}{m_1} z_0 z_2 - 6z_1 z_2 - 2m_1 z_0 z_2 \right. \\
&\quad \left. + 4z_0 z_1 - 2m_1 z_1^2 \right] dx \wedge dt \\
&= \left[-(z_0 - z_2)_t - 2z_0 z_3 + 4z_0 z_1 + 2 \left(\frac{2}{m_1} - m_1 \right) z_1^2 + 2 \left(\frac{2}{m_1} - m_1 \right) z_0 z_2 \right. \\
&\quad \left. - 6z_1 z_2 \right] dx \wedge dt \\
&= [-(z_0 - z_2)_t - 2z_0 z_3 + 4z_0 z_1 + 2z_1^2 + 2z_0 z_2 - 6z_1 z_2] dx \wedge dt \\
&= [\Xi] dx \wedge dt,
\end{aligned}$$

com $\Xi = 0$ sempre que z_0 for solução da equação de Novikov.

Verificando a segunda equação das equações de estrutura: ($d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3 = 0$)

$$\begin{aligned}
d\omega_2 &= d[f_{21}dx + f_{22}dt] = df_{21} \wedge dx + df_{22} \wedge dt \\
&= d \left(\mu h \pm m_1 \sqrt{1 + \mu^2} \right) \wedge dx + d[\mu (2z_0 h + \Psi)] \wedge dt \\
&= \mu (h_x dx + h_t dt) \wedge dx + 2\mu (hz_1 dx + hz_{0,t} dt + z_0 h_x dx + z_0 h_t dt) \wedge dt \\
&\quad + \mu (\Psi_x dx + \Psi_t dt) \wedge dt \\
&= \mu (h_t) dt \wedge dx + 2\mu (hz_1 + z_0 h_x) dx \wedge dt + \mu (\Psi_x) dx \wedge dt \\
&= \mu [-h_t + 2hz_1 + 2z_0 h_x + \Psi_x] dx \wedge dt \\
&= \mu \left[-(z_0 - z_2)_t + 2(z_0 - z_2) z_1 + 2z_0 (z_0 - z_2)_x + \left(\frac{4}{m_1} z_0 z_1 - 2z_1^2 - 2z_0^2 \right)_x \right] dx \wedge dt \\
&= \mu \left[-(z_0 - z_2)_t + 2(z_0 - z_2) z_1 + 2z_0 (z_1 - z_3) + \frac{4}{m_1} z_1^2 + \frac{4}{m_1} z_0 z_2 - 4z_1 z_2 \right. \\
&\quad \left. - 4z_0 z_1 \right] dx \wedge dt \\
&= \mu \left[-(z_0 - z_2)_t - 2z_0 z_3 + \frac{4}{m_1} z_1^2 + \frac{4}{m_1} z_0 z_2 - 6z_1 z_2 \right] dx \wedge dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge \omega_3 &= [f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12}] dx \wedge dt \\
&= \left[h \left(\pm \sqrt{1 + \mu^2} (2z_0h + \Psi) \right) - \left(\pm \sqrt{1 + \mu^2}h + m_1\mu \right) (2z_0h + \Psi) \right] dx \wedge dt \\
&= -m_1\mu (2z_0h + \Psi) dx \wedge dt \\
&= -m_1\mu \left[2z_0(z_0 - z_2) + \frac{4}{m_1}z_0z_1 - 2z_1^2 - 2z_0^2 \right] dx \wedge dt \\
&= \mu [2m_1z_0z_2 - 4z_0z_1 + 2m_1z_1^2] dx \wedge dt.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3 &= \mu \left[-(z_0 - z_2)_t - 2z_0z_3 + \frac{4}{m_1}z_1^2 + \frac{4}{m_1}z_0z_2 - 6z_1z_2 - 2m_1z_0z_2 \right. \\
&\quad \left. + 4z_0z_1 - 2m_1z_1^2 \right] dx \wedge dt \\
&= \mu \left[-(z_0 - z_2)_t - 2z_0z_3 + 4z_0z_1 + 2 \left(\frac{2}{m_1} - m_1 \right) z_1^2 + 2 \left(\frac{2}{m_1} - m_1 \right) z_0z_2 \right. \\
&\quad \left. - 6z_1z_2 \right] dx \wedge dt \\
&= \mu \left[-(z_0 - z_2)_t - 2z_0z_3 + 4z_0z_1 + 2z_1^2 + 2z_0z_2 - 6z_1z_2 \right] dx \wedge dt \\
&= \mu [\Xi] dx \wedge dt,
\end{aligned}$$

com $\Xi = 0$ sempre que z_0 for solução da equação de Novikov.

Por fim, vamos verificar a terceira equação das equações de estrutura: ($d\omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_2 = 0$)

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge \omega_2 &= [f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}] dx \wedge dt \\
&= \left[h \cdot \mu (2z_0h + \Psi) - \left(\mu h \pm m_1\sqrt{1 + \mu^2} \right) (2z_0h + \Psi) \right] dx \wedge dt \\
&= \left[\mp m_1\sqrt{1 + \mu^2} (2z_0h + \Psi) \right] dx \wedge dt \\
&= \mp m_1\sqrt{1 + \mu^2} \left[2z_0(z_0 - z_2) + \frac{4}{m_1}z_0z_1 - 2z_1^2 - 2z_0^2 \right] dx \wedge dt \\
&= \pm \sqrt{1 + \mu^2} [2m_1z_0z_2 - 4z_0z_1 + 2m_1z_1^2] dx \wedge dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_3 &= d[f_{31}dx + f_{32}dt] = df_{31} \wedge dx + df_{32} \wedge dt \\
&= d \left[\pm \sqrt{1 + \mu^2 h + m_1 \mu} \right] \wedge dx + d \left[\pm \sqrt{1 + \mu^2 (2z_0 h + \Psi)} \right] \wedge dt \\
&= \pm \sqrt{1 + \mu^2} [h_x dx + h_t dt] \wedge dx \pm 2\sqrt{1 + \mu^2} [hz_1 dx + hz_{0,t} dt + z_0 h_x dx + z_0 h_t dt] \wedge dt \\
&\quad \pm \sqrt{1 + \mu^2} [\Psi_x dx + \Psi_t dt] \wedge dt \\
&= \pm \sqrt{1 + \mu^2} [h_t] dt \wedge dx \pm 2\sqrt{1 + \mu^2} [hz_1 + z_0 h_x] dx \wedge dt \pm \sqrt{1 + \mu^2} [\Psi_x] dx \wedge dt \\
&= \pm \sqrt{1 + \mu^2} [-h_t + 2hz_1 + 2z_0 h_x + \Psi_x] dx \wedge dt \\
&= \pm \sqrt{1 + \mu^2} [-(z_0 - z_2)_t + 2(z_0 - z_2)z_1 + 2z_0(z_0 - z_2)_x \\
&\quad + \left(\frac{4}{m_1} z_0 z_1 - 2z_1^2 - 2z_0^2 \right)_x] dx \wedge dt \\
&= \pm \sqrt{1 + \mu^2} \left[-(z_0 - z_2)_t + 2(z_0 - z_2)z_1 + 2z_0(z_1 - z_3) + \frac{4}{m_1} z_1^2 + \frac{4}{m_1} z_0 z_2 \right. \\
&\quad \left. - 4z_1 z_2 - 4z_0 z_1 \right] dx \wedge dt \\
&= \pm \sqrt{1 + \mu^2} \left[-(z_0 - z_2)_t - 2z_0 z_3 + \frac{4}{m_1} z_1^2 + \frac{4}{m_1} z_0 z_2 - 6z_1 z_2 \right] dx \wedge dt.
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
d\omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_2 &= \pm \sqrt{1 + \mu^2} \left[-(z_0 - z_2)_t - 2z_0 z_3 + \frac{4}{m_1} z_1^2 + \frac{4}{m_1} z_0 z_2 - 6z_1 z_2 - 2m_1 z_0 z_2 \right. \\
&\quad \left. + 4z_0 z_1 - 2m_1 z_1^2 \right] dx \wedge dt \\
&= \pm \sqrt{1 + \mu^2} \left[-(z_0 - z_2)_t - 2z_0 z_3 + 4z_0 z_1 + 2 \left(\frac{2}{m_1} - m_1 \right) z_1^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \left(\frac{2}{m_1} - m_1 \right) z_0 z_2 - 6z_1 z_2 \right] dx \wedge dt \\
&= \pm \sqrt{1 + \mu^2} [-(z_0 - z_2)_t - 2z_0 z_3 + 4z_0 z_1 + 2z_1^2 + 2z_0 z_2 - 6z_1 z_2] dx \wedge dt \\
&= \pm \sqrt{1 + \mu^2} [\Xi] dx \wedge dt,
\end{aligned}$$

com $\Xi = 0$ sempre que z_0 for solução da equação de Novikov. \square

Observação 4.6. Sejam ω_1 e ω_2 as 1-formas em (4.2.4), segue que

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \pm \sqrt{1 + \mu^2} \left(2m_1 u u_{xx} - 4u u_x + 2m_1 u_x^2 \right) dx \wedge dt.$$

Seja $\phi = \phi(x, t)$ uma função real (suave) não-trivial com domínio $U \subset \mathbb{R}^2$, tal que $U \ni (x, t) \mapsto 2m_1\phi\phi_{xx} - 4\phi\phi_x + 2m_1\phi_x^2$ é igual a zero no máximo em um conjunto de medida nula. Se $u = \phi(x, t)$ for uma solução de (4.0.1), então,

$$2m_1uu_{xx} - 4uu_x + 2m_1u_x^2 \Big|_{u=\phi(x,t)} = 2m_1\phi\phi_{xx} - 4\phi\phi_x + 2m_1\phi_x^2 \neq 0.$$

Portanto, a função $\phi(x, t)$ é uma solução genérica de (4.0.1).

Proposição 4.7. *As soluções genéricas $u : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ da equação de Novikov (4.0.1) podem ser fornecidas explicitamente da seguinte forma:*

1. Quando $m_1 = -2$, $u(x, t)$ é dada por $u(x, t) \neq \pm \sqrt{ae^{-x} + b}$, em que a e b são escalares.
2. Quando $m_1 = 1$, $u(x, t)$ é dada por $u(x, t) \neq f(t)e^x + b$ e $u(x, t) \neq \pm \sqrt{ae^{2x} + b}$, em que $f(t)$ é uma função diferenciável de t , e a, b são escalares.

Demonstração. De início, vamos mostrar que se $u(x, t)$ é uma função tal que

$$2m_1uu_{xx} - 4uu_x + 2m_1u_x^2 = 0 \tag{4.2.5}$$

em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, então $u(x, t) = \pm \sqrt{\alpha(t) \exp\left(\frac{2x}{m_1}\right) + \beta(t)}$, em que $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ são funções diferenciáveis. Notemos que

$$\left(2m_1uu_x - 2u^2\right)_x = 2m_1uu_{xx} - 4uu_x + 2m_1u_x^2 = 0,$$

e, então,

$$2m_1uu_x - 2u^2 = c_1(t) \tag{4.2.6}$$

em que $c_1(t)$ é uma função diferenciável de t . Tomemos $y = u^2$, e, derivando ambos os lados com respeito a x , obtemos que $y_x = 2uu_x$, assim, a equação (4.2.6) torna-se

$$y_x - \frac{2}{m_1}y = \frac{1}{m_1}c_1(t). \tag{4.2.7}$$

Multiplicando (4.2.7) pela função fator de integração:

$$\mu(x, t) = \exp\left(-\int^x \frac{2}{m_1}d\bar{\xi}\right) = e^{-\frac{2x}{m_1}},$$

obtemos

$$y_x e^{-\frac{2x}{m_1}} - \frac{2}{m_1}y e^{-\frac{2x}{m_1}} = \frac{1}{m_1}c_1(t) e^{-\frac{2x}{m_1}},$$

e, daí, concluímos que

$$\left(ye^{-\frac{2x}{m_1}} \right)_x = \frac{1}{m_1} c_1(t) e^{-\frac{2x}{m_1}}.$$

Integrando com respeito a x , obtemos que

$$ye^{-\frac{2x}{m_1}} = -\frac{1}{2} c_1(t) e^{-\frac{2x}{m_1}} + c_2(t),$$

em que $c_2(t)$ é uma função diferenciável em t . Diante disso, temos

$$y = c_2(t) e^{\frac{2x}{m_1}} - \frac{1}{2} c_1(t).$$

Como $y = u^2$, e, fazendo $\alpha(t) := c_2(t)$ e $\beta(t) := -\frac{1}{2} c_1(t)$, temos que

$$u(x, t) = \pm \sqrt{\alpha(t) \exp\left(\frac{2x}{m_1}\right) + \beta(t)}, \quad (4.2.8)$$

em que $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ são funções diferenciáveis.

Se $u(x, t)$ também for uma solução de (4.0.1), então, substituindo-a na equação (4.0.1), por um lado, temos que

$$(u - u_{xx})_t = \frac{\partial}{\partial t} \left[\pm \sqrt{\alpha(t) \exp\left(\frac{2x}{m_1}\right) + \beta(t)} \mp \frac{2\alpha(t) \exp\left(\frac{2x}{m_1}\right)}{m_1^2 \sqrt{\alpha(t) \exp\left(\frac{2x}{m_1}\right) + \beta(t)}} \pm \frac{\alpha^2(t) \exp\left(\frac{4x}{m_1}\right)}{m_1^2 \sqrt{\left[\alpha(t) \exp\left(\frac{2x}{m_1}\right) + \beta(t)\right]^3}} \right],$$

por outro lado,

$$-2uu_{xxx} + 4uu_x + 2u_x^2 + 2uu_{xx} - 6u_x u_{xx} = 4 \frac{(m_1^2 + m_1 - 2)}{m_1^3} \alpha(t) \exp\left(\frac{2x}{m_1}\right).$$

Note que $m_1^2 + m_1 - 2 = 0$ para $m_1 \in \{-2, 1\}$, assim $(u - u_{xx})_t = 0$, isto é, $\alpha(t) = a$ e $\beta(t) = b$ são constantes. Se $m_1 = -2$ então $u(x, t) = \pm \sqrt{ae^{-x} + b}$ e se $m_1 = 1$ então

$u(x, t) = \pm \sqrt{ae^{2x} + b}$. Além disso, para $m_1 = 1$ temos que $u(x, t) = f(t)e^x$, em que $f(t)$ é uma função diferenciável de t , satisfaz tanto a equação (4.2.5) como (4.0.1). Portanto, essas são soluções não genéricas de (4.0.1), uma vez que satisfazem (4.2.5) em um subconjunto aberto U . Concluimos assim que as soluções genéricas são descritas como acima nos itens 1 e 2. \square

Considere a função $u(x, t) = e^{x-ct}$, $c \in \mathbb{R}$, solução da equação de Novikov (4.0.1), obtida em [19]. Ao restringirmos as 1-formas $\{\omega_1, \omega_2\}$ (4.2.4) a solução $u(x, t)$, obtemos que

$$\omega_1[u] = 4 \left(\frac{1}{m_1} - 1 \right) e^{2(x-ct)} dt, \quad \omega_2[u] = \pm m_1 \sqrt{1 + \mu^2} dx + 4\mu \left(\frac{1}{m_1} - 1 \right) e^{2(x-ct)} dt,$$

e, então,

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)[u] = \pm 4 \sqrt{1 + \mu^2} (m_1 - 1) e^{2(x-ct)} dx \wedge dt, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Para $m_1 = -2$, a função $u(x, t) = e^{x-ct}$, $c \in \mathbb{R}$, é uma solução genérica para a equação (4.0.1), uma vez que

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)[u] = \mp 12 \sqrt{1 + \mu^2} e^{2(x-ct)} dx \wedge dt \neq 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

e, portanto, a restrição do tensor métrico $g = \omega_1^2 + \omega_2^2$ à solução $u(x, t)$ é dada por

$$g[u] = 4(1 + \mu^2) dx^2 \pm 24\mu \sqrt{1 + \mu^2} e^{2(x-ct)} dx dt + 36(1 + \mu^2) e^{4(x-ct)} dt^2.$$

Desse modo, o par $(\mathbb{R}^2, g[u])$ consiste em uma família de superfícies pseudo-esféricas.

Enquanto, para $m_1 = 1$, temos que a função $u(x, t) = e^{x-ct}$, $c \in \mathbb{R}$, não é uma solução genérica para a equação (4.0.1), uma vez que

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)[u] = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

e, portanto, a restrição do tensor métrico $g = \omega_1^2 + \omega_2^2$ à solução $u(x, t)$,

$$g[u] = (1 + \mu^2) dx^2,$$

não define uma métrica Riemanniana de curvatura Gaussiana $K = -1$ no domínio da solução $u(x, t)$.

Exemplo 4.8. A equação de Novikov (4.0.1) é geometricamente integrável, uma vez que as 1-formas (4.2.4) dão origem a uma família a 1-parâmetro de superfícies pseudo-esféricas. A equação (3.2.2) implica que as matrizes X e T são:

$$X = \frac{h}{2}A + \frac{m_1}{2}B, \quad T = \frac{2uh + \Psi}{2}A,$$

em que $\Psi = \frac{4}{m_1}uu_x - 2u_x^2 - 2u^2$, $h = u - u_{xx}$, $m_1 \in \{-2, 1\}$ e

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \mp \sqrt{1 + \mu^2} \\ 1 \pm \sqrt{1 + \mu^2} & -\mu \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{1 + \mu^2} & -\mu \\ \mu & \mp \sqrt{1 + \mu^2} \end{pmatrix}.$$

Diante disso, a equação de Novikov é a condição de integrabilidade do problema linear $v_x = Xv$ e $v_t = Tv$ com valores em $sl(2, \mathbb{R})$, $v = (v_1(x, t), v_2(x, t))^T$. Notemos que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} \mu & 1 \mp \sqrt{1 + \mu^2} \\ 1 \pm \sqrt{1 + \mu^2} & -\mu \end{pmatrix} = A,$$

$$BA = -\begin{pmatrix} \mu & 1 \mp \sqrt{1 + \mu^2} \\ 1 \pm \sqrt{1 + \mu^2} & -\mu \end{pmatrix} = -A.$$

Assim, temos que

$$D_x T = \frac{(2uh + \Psi)_x}{2}A, \quad D_t X = \frac{h_t}{2}A,$$

$$XT = h \frac{2uh + \Psi}{4}A^2 + m_1 \frac{2uh + \Psi}{4}BA = -m_1 \frac{2uh + \Psi}{4}A,$$

$$TX = h \frac{2uh + \Psi}{4}A^2 + m_1 \frac{2uh + \Psi}{4}AB = m_1 \frac{2uh + \Psi}{4}A,$$

então,

$$D_x T - D_t X + TX - XT = \frac{(2uh + \Psi)_x - h_t + m_1(2uh + \Psi)}{2}A.$$

Observe que

$$2uh + \Psi = -2uu_{xx} + \frac{4}{m_1}uu_x - 2u_x^2,$$

$$(2uh + \Psi)_x = -2uu_{xxx} + \frac{4}{m_1}u_x^2 + \frac{4}{m_1}uu_{xx} - 6u_x u_{xx},$$

e, daí, temos

$$\begin{aligned}
 (2uh + \Psi)_x - h_t + m_1 (2uh + \Psi) &= -2uu_{xxx} + \frac{4}{m_1}u_x^2 + \frac{4}{m_1}uu_{xx} - 6u_xu_{xx} - (u - u_{xx})_t \\
 &\quad - 2m_1uu_{xx} + 4uu_x - 2m_1u_x^2 \\
 &= -2uu_{xxx} + 4uu_x + 2\left(\frac{2}{m_1} - m_1\right)u_x^2 \\
 &\quad + 2\left(\frac{2}{m_1} - m_1\right)uu_{xx} - 6u_xu_{xx} - (u - u_{xx})_t,
 \end{aligned}$$

em que $\left(\frac{2}{m_1} - m_1\right) = 1$ para $m_1 \in \{-2, 1\}$. Portanto,

$$D_xT - D_tX + TX - XT = \frac{-2uu_{xxx} + 4uu_x + 2u_x^2 + 2uu_{xx} - 6u_xu_{xx} - (u - u_{xx})_t}{2}A,$$

isto é, $D_xT - D_tX + TX - XT = 0$ sempre que $u(x, t)$ for solução da equação de Novikov (4.0.1). Ou seja, a equação de Novikov (4.0.1) é a condição de integrabilidade do problema linear $v_x = Xv$ e $v_t = Tv$ com valores em $sl(2, \mathbb{R})$.

Observação 4.9. Um problema linear de primeira ordem será deduzido no próximo capítulo a partir da existência de um pseudo-potencial quadrático para a equação de Novikov.

5

RESULTADOS ANALÍTICOS PARA A EQUAÇÃO DE NOVIKOV

Neste capítulo, usaremos o fato da equação de Novikov (4.0.1) ser do tipo pseudo-esférico para encontrar seu pseudo-potencial quadrático, a partir do qual encontraremos um número infinito de quantidades conservadas, locais e não-locais.

5.1 UM PSEUDO-POTENCIAL QUADRÁTICO PARA A EQUAÇÃO DE NOVIKOV

Lema 5.1. Para equação de Novikov (4.0.1) temos a seguinte relação

$$(u - u_{xx})_t = 2 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_{xx} + 2m_1 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x, \quad m_1 \in \{-2, 1\}. \quad (5.1.1)$$

Demonstração. Por um lado, temos, que

$$(u - u_{xx})_t = -2uu_{xxx} + 4uu_x + 2u_x^2 + 2uu_{xx} - 6u_x u_{xx},$$

por outro, tomando $Y := 2 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_{xx} + 2m_1 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x$, temos que

$$\begin{aligned} Y &= 2 \left(\frac{2}{m_1} uu_x - uu_{xx} - u_x^2 \right)_x + 2m_1 \left(\frac{2}{m_1} uu_x - uu_{xx} - u_x^2 \right) \\ &= 2 \left[\left(\frac{2}{m_1} u_x^2 + \frac{2}{m_1} uu_{xx} - u_x u_{xx} - uu_{xxx} - 2u_x u_{xx} \right) + m_1 \left(\frac{2}{m_1} uu_x - uu_{xx} - u_x^2 \right) \right] \\ &= -2uu_{xxx} + 4uu_x + 2 \left(\frac{2}{m_1} - m_1 \right) u_x^2 + 2 \left(\frac{2}{m_1} - m_1 \right) uu_{xx} - 6u_x u_{xx} \\ &= -2uu_{xxx} + 4uu_x + 2u_x^2 + 2uu_{xx} - 6u_x u_{xx}, \end{aligned}$$

em que $\left(\frac{2}{m_1} - m_1 \right) = 1$ para $m_1 \in \{-2, 1\}$. □

Agora aplicaremos a Proposição 3.23 à equação de Novikov com as 1- formas determinadas por (4.2.4):

Teorema 5.2. *Sejam $\omega_i = f_{i2}dx + f_{i2}dt$, $i = 1, 2, 3$, determinadas por (4.2.4). O sistema Pfaffiano (3.3.11) torna-se então*

$$2\gamma_x = \left(\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \right) (u - u_{xx} + m_1) \gamma^2 - 2(u - u_{xx}) \gamma + \left(\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right) (u - u_{xx} - m_1), \quad (5.1.2)$$

e,

$$\gamma_t = \left[\left(\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \right) \gamma^2 - 2\gamma + \left(\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right) \right] \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x. \quad (5.1.3)$$

Além disso, obtemos a lei de conservação

$$\left[(u - u_{xx} + m_1) \gamma \right]_t = \left[2 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \gamma + 2m_1 \left(\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right) \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \right]_x, \quad (5.1.4)$$

em que $m_1 \in \{-2, 1\}$.

Demonstração. Explicitando o sistema Pfaffiano (3.3.11), temos que

$$\begin{aligned} 2\gamma_x dx + 2\gamma_t dt &= 2d\gamma = \omega_3 - \omega_2 - 2\gamma\omega_1 + \gamma^2(\omega_3 + \omega_2) \\ &= (f_{31}dx + f_{32}dt) - (f_{21}dx + f_{22}dt) - 2\gamma(f_{11}dx + f_{12}dt) \\ &\quad + \gamma^2(f_{31}dx + f_{32}dt + f_{21}dx + f_{22}dt) \\ &= [(f_{31} + f_{21})\gamma^2 - 2\gamma f_{11} + f_{31} - f_{21}] dx \\ &\quad + [(f_{32} + f_{22})\gamma^2 - 2\gamma f_{12} + f_{32} - f_{22}] dt, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} 2\gamma_x &= (f_{31} + f_{21}) \gamma^2 - 2\gamma f_{11} + f_{31} - f_{21}, \\ 2\gamma_t &= (f_{32} + f_{22}) \gamma^2 - 2\gamma f_{12} + f_{32} - f_{22}. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Substituindo as funções f_{ij} (4.2.4) no sistema (5.1.5), obtemos (5.1.2) e (5.1.3), respectivamente, ou seja:

$$\begin{aligned} 2\gamma_x &= \left(\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \right) (u - u_{xx} + m_1) \gamma^2 - 2(u - u_{xx}) \gamma \\ &\quad + \left(\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right) (u - u_{xx} - m_1), \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

e,

$$\gamma_t = \left[\left(\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \right) \gamma^2 - 2\gamma + \left(\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right) \right] \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x. \quad (5.1.7)$$

Multiplicando a equação (5.1.7) por $(u - u_{xx} + m_1)$, segue que

$$\begin{aligned} (u - u_{xx} + m_1) \gamma_t = & \left[\left(\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \right) (u - u_{xx} + m_1) \gamma^2 - 2(u - u_{xx} + m_1) \gamma \right. \\ & \left. + \left(\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right) (u - u_{xx} + m_1) \right] \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x. \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

De (5.1.6) temos a seguinte relação

$$\left(\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \right) (u - u_{xx} + m_1) \gamma^2 = 2\gamma_x + 2(u - u_{xx}) \gamma - \left(\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right) (u - u_{xx} - m_1).$$

Adicionando-a em (5.1.8), obtemos que

$$\begin{aligned} (u - u_{xx} + m_1) \gamma_t = & \left[2\gamma_x + 2(u - u_{xx}) \gamma - \left(\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right) (u - u_{xx} - m_1) \right. \\ & \left. - 2(u - u_{xx} + m_1) \gamma \right. \\ & \left. + \left(\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right) (u - u_{xx} + m_1) \right] \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \\ = & \left[2\gamma_x - 2m_1 \gamma + 2m_1 \left(\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right) \right] \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Pela relação (5.1.1) do Lema 5.1:

$$(u - u_{xx})_t = 2 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_{xx} + 2m_1 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x, \quad m_1 \in \{-2, 1\},$$

temos que (5.1.9) resulta em

$$\begin{aligned} (u - u_{xx} + m_1) \gamma_t = & \left[2 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \gamma + 2m_1 \left(\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu \right) \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \right]_x \\ & - (u - u_{xx})_t \gamma. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Notemos que

$$[(u - u_{xx} + m_1) \gamma]_t = (u - u_{xx} + m_1) \gamma_t + (u - u_{xx})_t \gamma,$$

e, portanto, a equação (5.1.10) resulta em (5.1.4). \square

Introduzindo

$$\eta = \sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \quad e \quad \frac{1}{\eta} = \sqrt{\mu^2 + 1} - \mu,$$

e, aplicando a transformação

$$\gamma \mapsto \gamma + \frac{1}{\eta},$$

em (5.1.2-5.1.4) obtemos o seguinte resultado.

Teorema 5.3. *A equação de Novikov (4.0.1) admite um pseudo-potencial quadrático γ determinado pelas equações*

$$\gamma_x = \frac{\eta}{2} (u - u_{xx} + m_1) \gamma^2 + m_1 \gamma, \quad (5.1.11)$$

$$\gamma_t = \eta \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \gamma^2, \quad (5.1.12)$$

em que η é um parâmetro não-nulo e, $m_1 = -2$ ou $m_1 = 1$. Além disso, a equação (4.0.1) possui a lei de conservação dependente de parâmetro

$$[(u - u_{xx} + m_1) \gamma]_t = \left[2 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \gamma + \frac{2}{\eta} (uu_x - uu_{xx} - u_x^2 + u^2) \right]_x. \quad (5.1.13)$$

Demonstração. Introduzindo

$$\eta = \sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \quad e \quad \frac{1}{\eta} = \sqrt{\mu^2 + 1} - \mu,$$

e, aplicando a transformação $\gamma \mapsto \gamma + \frac{1}{\eta}$ nas equações (5.1.2) e (5.1.3), obtemos, respectivamente, que

$$\begin{aligned} 2\gamma_x &= \eta (u - u_{xx} + m_1) \left(\gamma + \frac{1}{\eta} \right)^2 - 2(u - u_{xx}) \left(\gamma + \frac{1}{\eta} \right) + \frac{1}{\eta} (u - u_{xx} - m_1) \\ &= \eta (u - u_{xx} + m_1) \gamma^2 + 2m_1 \gamma, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \left[\eta \left(\gamma + \frac{1}{\eta} \right)^2 - 2 \left(\gamma + \frac{1}{\eta} \right) + \frac{1}{\eta} \right] \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \\ &= \eta \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \gamma^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\gamma_x = \frac{\eta}{2} (u - u_{xx} + m_1) \gamma^2 + m_1 \gamma \quad e \quad \gamma_t = \eta \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \gamma^2.$$

Seguindo de forma análoga, agora para a equação (5.1.4), obtemos:

$$\begin{aligned} [(u - u_{xx} + m_1) \gamma]_t &= \left[2 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \left(\gamma + \frac{1}{\eta} \right) + 2m_1 \left(\frac{1}{\eta} \right) \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right) \right]_x \\ &= \left[2 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \gamma + \frac{2}{\eta} \left(\frac{2}{m_1} uu_x - uu_{xx} - u_x^2 + u^2 - m_1 uu_x \right) \right]_x \\ &= \left\{ 2 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \gamma + \frac{2}{\eta} \left[\left(\frac{2}{m_1} - m_1 \right) uu_x - uu_{xx} - u_x^2 + u^2 \right] \right\}_x, \end{aligned}$$

em que $\left(\frac{2}{m_1} - m_1 \right) = 1$ para $m_1 \in \{-2, 1\}$. \square

Veremos que as equações (5.1.11) e (5.1.12) determinam um problema linear de primeira ordem para a equação de Novikov de uma forma padrão:

Teorema 5.4. *Considerando as equações (5.1.11) e (5.1.12) tem-se um problema linear de primeira ordem para a equação de Novikov:*

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2m_1 & 0 \\ -\eta(u - u_{xx} + m_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (5.1.14)$$

e,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\eta \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (5.1.15)$$

Demonstração. De início, introduziremos $\gamma = \frac{v_1}{v_2}$, com $v_i = v_i(x, t)$. Assim, a equação (5.1.11) torna-se:

$$\left(\frac{v_1}{v_2} \right)_x = \frac{\eta}{2} (u - u_{xx} + m_1) \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 + m_1 \left(\frac{v_1}{v_2} \right),$$

ou seja,

$$\frac{v_{1,x}v_2 - v_1v_{2,x}}{v_2^2} = \frac{\eta}{2} (u - u_{xx} + m_1) \frac{v_1^2}{v_2^2} + m_1 \left(\frac{v_1}{v_2} \right).$$

Em vista disso, temos que

$$v_{1,x}v_2 - v_{2,x}v_1 = \frac{\eta}{2} (u - u_{xx} + m_1) v_1^2 + m_1 v_1 v_2,$$

e, daí, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} v_{1,x}v_2 = (m_1 v_1) v_2, \\ v_{2,x}v_1 = - \left[\frac{\eta}{2} (u - u_{xx} + m_1) v_1 \right] v_1, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} v_{1,x} = m_1 v_1, \\ v_{2,x} = -\frac{\eta}{2} (u - u_{xx} + m_1) v_1. \end{cases} \quad (5.1.16)$$

Portanto, obtemos (5.1.14):

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2m_1 & 0 \\ -\eta(u - u_{xx} + m_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

De forma análoga, obteremos (5.1.15). Substituindo $\gamma = \frac{v_1}{v_2}$ em (5.1.12):

$$\left(\frac{v_1}{v_2} \right)_t = \eta \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2,$$

segue-se que

$$\frac{v_{1,t}v_2 - v_{2,t}v_1}{v_2^2} = \eta \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \frac{v_1^2}{v_2^2}.$$

Notemos que

$$\begin{cases} v_{1,t} = 0, \\ v_{2,t} = -\eta \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x v_1. \end{cases} \quad (5.1.17)$$

Concluimos assim que

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\eta \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

□

Corolário 5.5. A condição de compatibilidade do problema linear (5.1.14)-(5.1.15) é precisamente a equação de Novikov (4.0.1).

Demonstração. Derivando (5.1.16) com respeito a t e (5.1.17) com respeito a x , temos, respectivamente, que:

$$\begin{cases} v_{1,xt} = m_1 v_{1,t}, \\ v_{2,xt} = -\frac{\eta}{2} (u - u_{xx})_t v_1 - \frac{\eta}{2} (u - u_{xx} + m_1) v_{1,t}, \end{cases} \quad (5.1.18)$$

e,

$$\begin{cases} v_{1,tx} = 0, \\ v_{2,tx} = -\eta \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_{xx} v_1 - \eta \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x v_{1,x}. \end{cases} \quad (5.1.19)$$

Adicionando as equações em (5.1.16) e (5.1.17) nos sistemas (5.1.18) e (5.1.19), obtemos, respectivamente, que

$$\begin{cases} v_{1,xt} = 0, \\ v_{2,xt} = -\frac{\eta}{2} (u - u_{xx})_t v_1, \end{cases}$$

e,

$$\begin{cases} v_{1,tx} = 0, \\ v_{2,tx} = -\eta \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_{xx} v_1 - \eta m_1 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x v_1. \end{cases}$$

Fazendo a compatibilidade, isto é, $v_{1,xt} = v_{1,tx}$ e $v_{2,xt} = v_{2,tx}$, concluímos que $v_{1,xt} = v_{1,tx} = 0$ e,

$$0 = v_{2,xt} - v_{2,tx} = \eta \left[-\frac{1}{2} (u - u_{xx})_t + \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_{xx} + m_1 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \right] v_1,$$

e, pelo Lema 5.1, temos que

$$\left[- (u - u_{xx})_t - 2uu_{xxx} + 4uu_x + 2u_x^2 + 2uu_{xx} - 6u_x u_{xx} \right] v_1 = 0.$$

Portanto, concluímos que a condição de compatibilidade do problema linear (5.1.14)-(5.1.15) é precisamente a equação de Novikov (4.0.1). \square

Corolário 5.6. *Do problema linear (5.1.14)-(5.1.15), temos que*

$$\begin{aligned} v_1 &= e^{m_1 x}, \\ v_2 &= -\frac{\eta}{2} \left[(1 - m_1^2) \int^x u e^{m_1 \xi} d\xi - (u_x - m_1 u - 1) e^{m_1 x} \right], \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

e,

$$(1 - m_1^2) \left(\int_t^x u e^{m_1 \xi} d\xi \right) = \left[(u_x - m_1 u)_t + 2 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x \right] e^{m_1 x}, \quad (5.1.21)$$

em que $m_1 \in \{-2, 1\}$ e η é um parâmetro real não-nulo. Para $m_1 = 1$, a equação (5.1.21) resulta em

$$(u_x - u)_t + 2 \left(u^2 - uu_x \right)_x = 0.$$

Demonstração. Dos sistemas (5.1.16) e (5.1.17): notemos que a solução da equação $v_{1,x} = m_1 v_1$ é dada por $v_1 = e^{m_1 x} + c_1$ tal que $c_1 = c_1(t)$. Como $v_{1,t} = 0$, então $c_1 = 0$, e, portanto, $v_1 = e^{m_1 x}$. Com isso, segue que

$$\begin{cases} v_{2,x} = -\frac{\eta}{2} (u - u_{xx} + m_1) e^{m_1 x}, \\ v_{2,t} = -\eta \left(\frac{1}{m_1} u^2 - uu_x \right)_x e^{m_1 x}. \end{cases} \quad (5.1.22)$$

Usando integração por partes na primeira equação de (5.1.22), segue que

$$\begin{aligned}
v_2 &= -\frac{\eta}{2} \int (u - u_{xx} + m_1) e^{m_1 x} dx \\
&= -\frac{\eta}{2} [\int u e^{m_1 x} dx - \int u_{xx} e^{m_1 x} dx + m_1 \int e^{m_1 x} dx] \\
&= -\frac{\eta}{2} [\int u e^{m_1 x} dx - (u_x e^{m_1 x} - m_1 \int u_x e^{m_1 x} dx) + e^{m_1 x}] \\
&= -\frac{\eta}{2} \{ \int u e^{m_1 x} dx - [u_x e^{m_1 x} - m_1 (u e^{m_1 x} - m_1 \int u e^{m_1 x} dx)] + e^{m_1 x} \} \\
&= -\frac{\eta}{2} [(1 - m_1^2) \int u e^{m_1 x} dx - (u_x - m_1 u - 1) e^{m_1 x}].
\end{aligned} \tag{5.1.23}$$

Derivando (5.1.23) com respeito a t , obtemos

$$v_{2,t} = -\frac{\eta}{2} \left[(1 - m_1^2) \left(\int u e^{m_1 x} dx \right)_t - (u_x - m_1 u)_t e^{m_1 x} \right]. \tag{5.1.24}$$

Comparando (5.1.24) com a segunda equação de (5.1.22), concluímos que

$$(1 - m_1^2) \left(\int u e^{m_1 x} dx \right)_t = \left[(u_x - m_1 u)_t + 2 \left(\frac{1}{m_1} u^2 - u u_x \right)_x \right] e^{m_1 x}.$$

□

5.2 LEIS DE CONSERVAÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE NOVIKOV

As leis de conservação para a equação de Novikov (4.0.1) são obtidas expandindo as equações (5.1.11)-(5.1.13) em potências de η . Uma expansão consistente de γ poder ser

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \eta^{-k}. \tag{5.2.1}$$

Teorema 5.7. *A expansão (5.2.1) na equação (5.1.11) produz um número infinito de equações*

$$\gamma_{k,x} - m_1 \gamma_k - (u - u_{xx} + m_1) \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i \gamma_{k+1-i}}{2} = 0, \quad k \geq 1, \tag{5.2.2}$$

em que $m_1 \in \{-2, 1\}$.

Demonstração. De início, notemos da expansão (5.2.1), que

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \eta^{-k} = \gamma_1 \eta^{-1} + \gamma_2 \eta^{-2} + \gamma_3 \eta^{-3} + \dots$$

Derivando-o com respeito a x , obtemos

$$\gamma_x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k,x} \eta^{-k} = \gamma_{1,x} \eta^{-1} + \gamma_{2,x} \eta^{-2} + \gamma_{3,x} \eta^{-3} + \dots$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= (\gamma_1 \eta^{-1} + \gamma_2 \eta^{-2} + \gamma_3 \eta^{-3} + \dots) (\gamma_1 \eta^{-1} + \gamma_2 \eta^{-2} + \gamma_3 \eta^{-3} + \dots) \\ &= \gamma_1 \eta^{-1} (\gamma_1 \eta^{-1} + \gamma_2 \eta^{-2} + \gamma_3 \eta^{-3} + \dots) \\ &\quad + \gamma_2 \eta^{-2} (\gamma_1 \eta^{-1} + \gamma_2 \eta^{-2} + \gamma_3 \eta^{-3} + \dots) + \dots \\ &= \gamma_1^2 \eta^{-2} + \gamma_1 \gamma_2 \eta^{-3} + \gamma_1 \gamma_3 \eta^{-4} + \dots \\ &\quad + \gamma_2 \gamma_1 \eta^{-3} + \gamma_2^2 \eta^{-4} + \gamma_2 \gamma_3 \eta^{-5} + \dots \\ &= \gamma_1^2 \eta^{-2} + 2\gamma_1 \gamma_2 \eta^{-3} + 2\gamma_1 \gamma_3 \eta^{-4} + 2\gamma_1 \gamma_4 \eta^{-5} + \dots \\ &\quad + \gamma_2^2 \eta^{-4} + 2\gamma_2 \gamma_3 \eta^{-5} + \dots \\ &\quad + \gamma_3^2 \eta^{-6} + 2\gamma_3 \gamma_4 \eta^{-7} + \dots \end{aligned}$$

Substituindo-os na equação (5.1.11), $\gamma_x = m_1 \gamma + \frac{\eta}{2} (u - u_{xx} + m_1) \gamma^2$, segue-se que

$$\begin{aligned} \gamma_{1,x} \eta^{-1} + \gamma_{2,x} \eta^{-2} + \gamma_{3,x} \eta^{-3} + \dots &= m_1 [\gamma_1 \eta^{-1} + \gamma_2 \eta^{-2} + \gamma_3 \eta^{-3} + \gamma_4 \eta^{-4} + \dots] \\ &\quad + (u - u_{xx} + m_1) \frac{\eta}{2} [\gamma_1^2 \eta^{-2} + 2\gamma_1 \gamma_2 \eta^{-3} + 2\gamma_1 \gamma_3 \eta^{-4} + \dots \\ &\quad + \gamma_2^2 \eta^{-4} + 2\gamma_2 \gamma_3 \eta^{-5} + \dots \\ &\quad + \gamma_3^2 \eta^{-6} + 2\gamma_3 \gamma_4 \eta^{-7} + \dots] \\ &= m_1 \gamma_1 \eta^{-1} + m_1 \gamma_2 \eta^{-2} + m_1 \gamma_3 \eta^{-3} + \dots \\ &\quad + (u - u_{xx} + m_1) \left[\frac{\gamma_1^2}{2} \eta^{-1} + \gamma_1 \gamma_2 \eta^{-2} + \gamma_1 \gamma_3 \eta^{-3} + \dots \right. \\ &\quad + \frac{\gamma_2^2}{2} \eta^{-3} + \gamma_2 \gamma_3 \eta^{-4} + \dots \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_3^2}{2} \eta^{-5} + \gamma_3 \gamma_4 \eta^{-6} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[m_1 \gamma_1 + (u - u_{xx} + m_1) \frac{\gamma_1^2}{2} \right] \eta^{-1} \\
&\quad + [m_1 \gamma_2 + (u - u_{xx} + m_1) \gamma_1 \gamma_2] \eta^{-2} \\
&\quad + \left[m_1 \gamma_3 + (u - u_{xx} + m_1) \left(\gamma_1 \gamma_3 + \frac{\gamma_2^2}{2} \right) \right] \eta^{-3} \\
&\quad + [m_1 \gamma_4 + (u - u_{xx} + m_1) (\gamma_1 \gamma_4 + \gamma_2 \gamma_3)] \eta^{-4} + \dots
\end{aligned}$$

Diante disso, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\left[\gamma_{1,x} - m_1 \gamma_1 - (u - u_{xx} + m_1) \frac{\gamma_1^2}{2} \right] \eta^{-1} \\
&+ [\gamma_{2,x} - m_1 \gamma_2 - (u - u_{xx} + m_1) \gamma_1 \gamma_2] \eta^{-2} \\
&+ \left[\gamma_{3,x} - m_1 \gamma_3 - (u - u_{xx} + m_1) \left(\gamma_1 \gamma_3 + \frac{\gamma_2^2}{2} \right) \right] \eta^{-3} \\
&+ [\gamma_{4,x} - m_1 \gamma_4 - (u - u_{xx} + m_1) (\gamma_1 \gamma_4 + \gamma_2 \gamma_3)] \eta^{-4} + \dots = 0,
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

em que o coeficiente do k -ésimo grau de (5.2.3), denotemos por β_k (isto é, $\beta_k \eta^{-k}$), é dado por

$$\beta_k = \left(\gamma_{k,x} - m_1 \gamma_k - (u - u_{xx} + m_1) \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i \gamma_{k+1-i}}{2} \right).$$

Usando o fato dos η^{-k} serem linearmente independentes, de (5.2.3), obtemos, que

$$\gamma_{k,x} - m_1 \gamma_k - (u - u_{xx} + m_1) \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i \gamma_{k+1-i}}{2} = 0, \quad k \geq 1.$$

□

Teorema 5.8. *As soluções para as equações (5.2.2) são*

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{2e^{m_1 x}}{(u_x - m_1 u - 1) e^{m_1 x} + (m_1^2 - 1) \int^x u(\xi, t) e^{m_1 \xi} d\xi'} \\
\gamma_2 &= \exp \left[m_1 x + \int^x (u - u_{xx} + m_1)(\xi, t) \gamma_1(\xi, t) d\xi \right], \\
\gamma_k &= \gamma_2(x, t) \int^x \gamma_2^{-1}(\xi, t) g_k(\xi, t) d\xi, \quad k \geq 3,
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

em que

$$g_k = (u - u_{xx} + m_1) \sum_{i=2}^{k-1} \frac{\gamma_i \gamma_{k+1-i}}{2}, \quad m_1 \in \{-2, 1\}.$$

Demonstração. De início, notemos que as equações (5.2.2) são dadas por

$$\gamma_{1,x} - \left[m_1 + (u - u_{xx} + m_1) \frac{\gamma_1}{2} \right] \gamma_1 = 0, \quad \gamma_{2,x} - [m_1 + (u - u_{xx} + m_1) \gamma_1] \gamma_2 = 0,$$

e,

$$\gamma_{k,x} - [m_1 + (u - u_{xx} + m_1) \gamma_1] \gamma_k - g_k = 0, \quad k \geq 3,$$

em que

$$g_k = (u - u_{xx} + m_1) \sum_{i=2}^{k-1} \frac{\gamma_i \gamma_{k+1-i}}{2}.$$

Resolvendo a equação quando $k = 1$:

$$\gamma_{1,x} - m_1 \gamma_1 - (u - u_{xx} + m_1) \frac{\gamma_1^2}{2} = 0. \quad (5.2.5)$$

Tomemos $y = \gamma_1^{-1}$, temos

$$y \gamma_1^2 = \gamma_1. \quad (5.2.6)$$

Derivando ambos os lados de $y = \gamma_1^{-1}$ com respeito a x , obtemos $y_x = -\gamma_1^{-2} \gamma_{1,x}$, e então

$$-\gamma_{1,x} = \gamma_1^2 y_x. \quad (5.2.7)$$

Multiplicando ambos os lados de (5.2.5) por -1 e usando (5.2.6-5.2.7), obtemos

$$\gamma_1^2 y_x + m_1 y \gamma_1^2 + (u - u_{xx} + m_1) \frac{\gamma_1^2}{2} = 0,$$

e, então

$$y_x + m_1 y + \frac{1}{2} (u - u_{xx} + m_1) = 0. \quad (5.2.8)$$

Multiplicando (5.2.8) pela função fator de integração:

$$\mu(x, t) = \exp \left(\int^x m_1 d\xi \right) = e^{m_1 x},$$

obtemos

$$y_x e^{m_1 x} + m_1 y e^{m_1 x} + \frac{1}{2} (u - u_{xx} + m_1) e^{m_1 x} = 0,$$

e daí, simplificando, resulta que

$$(y e^{m_1 x})_x = -\frac{1}{2} (u - u_{xx} + m_1) e^{m_1 x}.$$

Integrando com respeito a x , obtemos

$$y = \frac{1}{e^{m_1 x}} \left[-\frac{1}{2} \int (u - u_{xx} + m_1) e^{m_1 x} dx + f_1 \right],$$

em que $f_1 = f_1(t)$. Como $y = \gamma_1^{-1}$ e, considerando $f_1 = 0$, temos que:

$$\gamma_1 = \frac{e^{m_1 x}}{-\frac{1}{2} \int (u - u_{xx} + m_1) e^{m_1 x} dx}.$$

Usando integração por partes, segue-se

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int (u - u_{xx} + m_1) e^{m_1 x} dx &= -\frac{1}{2} \int u e^{m_1 x} dx + \frac{1}{2} \int u_{xx} e^{m_1 x} dx - \frac{m_1}{2} \int e^{m_1 x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int u e^{m_1 x} dx + \frac{1}{2} [u_x e^{m_1 x} - m_1 \int u_x e^{m_1 x} dx] - \frac{1}{2} e^{m_1 x} \\ &= -\frac{1}{2} \int u e^{m_1 x} dx + \frac{1}{2} [u_x e^{m_1 x} - m_1 (u e^{m_1 x} - m_1 \int u e^{m_1 x} dx)] \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{m_1 x} \\ &= -\frac{1}{2} \int u e^{m_1 x} dx + \frac{1}{2} u_x e^{m_1 x} - \frac{m_1}{2} u e^{m_1 x} + \frac{m_1^2}{2} \int u e^{m_1 x} dx - \frac{1}{2} e^{m_1 x} \\ &= \frac{1}{2} (m_1^2 - 1) \int u e^{m_1 x} dx + \frac{1}{2} (u_x - m_1 u - 1) e^{m_1 x}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\gamma_1 = \frac{2e^{m_1 x}}{(u_x - m_1 u - 1) e^{m_1 x} + (m_1^2 - 1) \int^x u e^{m_1 \xi} d\xi}. \quad (5.2.9)$$

Agora, vamos resolver a equação quando $k = 2$:

$$\gamma_{2,x} - m_1 \gamma_2 - (u - u_{xx} + m_1) \gamma_1 \gamma_2 = 0.$$

Segue que

$$\frac{\gamma_{2,x}}{\gamma_2} = m_1 + (u - u_{xx} + m_1) \gamma_1,$$

ou seja,

$$(\ln \gamma_2)_x = m_1 + (u - u_{xx} + m_1) \gamma_1.$$

Integrando com respeito a x , obtemos

$$\gamma_2 = \exp \left\{ \int [m_1 + (u - u_{xx} + m_1) \gamma_1] dx + f_2 \right\},$$

em que $f_2 = f_2(t)$. Considerando $f_2 = 0$, temos, que

$$\gamma_2 = \exp \left[m_1 x + \int^x (u - u_{xx} + m_1) (\xi, t) \gamma_1 (\xi, t) d\xi \right].$$

Agora, vamos resolver a equação quando $k \geq 3$,

$$\gamma_{k,x} - [m_1 + (u - u_{xx} + m_1) \gamma_1] \gamma_k - g_k = 0, \quad g_k = (u - u_{xx} + m_1) \sum_{i=2}^{k-1} \frac{\gamma_i \gamma_{k+1-i}}{2}.$$

Usando o fator de integração, ou seja,

$$\mu(x, t) = \exp \left\{ - \int^x [m_1 + (u - u_{xx} + m_1) \gamma_1] dx \right\} = \gamma_2^{-1}.$$

Segue-se que

$$\gamma_{k,x} \gamma_2^{-1} - \gamma_2^{-1} [m_1 + (u - u_{xx} + m_1) \gamma_1] \gamma_k - \gamma_2^{-1} g_k = 0,$$

e, simplificando, temos

$$\left(\gamma_k \gamma_2^{-1} \right)_x = \gamma_2^{-1} g_k.$$

Integrando com respeito a x , obtemos

$$\gamma_k = \gamma_2 \left[\int \gamma_2^{-1} g_k dx + f_k \right],$$

em que $f_k = f_k(t)$. Considerando $f_k = 0$, obtemos

$$\gamma_k = \gamma_2(x, t) \int^x \gamma_2^{-1}(\xi, t) g_k(\xi, t) dx.$$

□

Observamos que para $m_1 = -2$, temos a presença de um termo não-local nas funções em (5.2.4) vindo da primitiva da função $x \mapsto e^{m_1 x} u(x, t)$, o que nos fornece as leis de conservação não-locais para a equação de Novikov (4.0.1). Por outro lado, tomando $m_1 = 1$, podemos eliminar os termos não-locais em (5.2.4) e obtemos o seguinte resultado.

Corolário 5.9. Para $m_1 = 1$, as funções em (5.2.4) obtidas no Teorema 5.8 se reduzem a

$$\gamma_k = \frac{1}{2^{k-2} (u_x - u - 1)^k e^{(k-1)x}}, \quad k \geq 1. \quad (5.2.10)$$

Demonstração. Sejam γ_k , $k \geq 1$, as funções em (5.2.4) e considere $m_1 = 1$. Segue, para $k = 1$, que

$$\gamma_1 = \frac{2}{u_x - u - 1}.$$

Para $k = 2$, temos

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \exp \left\{ \int^x [1 + (u - u_{xx} + 1) (\xi, t) \gamma_1 (\xi, t)] d\xi \right\} \\
&= \exp \left[\int^x \left(1 + 2 \frac{u - u_{xx} + 1}{u_x - u - 1} \right) (\xi, t) d\xi \right] \\
&= \exp \left[\int^x \left(\frac{u_x - u - 1 + 2(u - u_{xx} + 1)}{u_x - u - 1} \right) (\xi, t) d\xi \right] \\
&= \exp \left[\int^x \left(\frac{-u_x + u + 1}{u_x - u - 1} - 2 \frac{u_{xx} - u_x}{u_x - u - 1} \right) (\xi, t) d\xi \right] \\
&= \exp \left[\int^x \left(-1 - 2 \frac{u_{xx} - u_x}{u_x - u - 1} \right) (\xi, t) d\xi \right] \\
&= \exp \left\{ - \int^x d\xi - 2 \int^x [\ln(u_x - u - 1)]_x (\xi, t) d\xi \right\} \\
&= \exp [-x - 2 \ln(u_x - u - 1)] \\
&= \exp [\ln(u_x - u - 1)^{-2} - x] \\
&= \exp [\ln(u_x - u - 1)^{-2}] \exp(-x) \\
&= (u_x - u - 1)^{-2} \exp(-x),
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\gamma_2 = \frac{1}{(u_x - u - 1)^2 e^x}.$$

Para $k = 3$, segue-se que

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= \gamma_2(x, t) \int^x \gamma_2^{-1}(\xi, t) \left[(u - u_{xx} + 1) \frac{\gamma_2^2}{2} \right] (\xi, t) d\xi \\
&= \gamma_2(x, t) \int^x \left[(u - u_{xx} + 1) \frac{\gamma_2^2}{2} \right] (\xi, t) d\xi,
\end{aligned}$$

assim,

$$\gamma_3 = \frac{1}{(u_x - u - 1)^2 e^x} \int^x \left[\frac{u - u_{xx} + 1}{2(u_x - u - 1)^2 e^x} \right] (\xi, t) d\xi.$$

Usando integração por partes

$$\begin{aligned} \int \frac{u - u_{xx} + 1}{(u_x - u - 1)^2 e^x} dx &= - \int \frac{u_{xx} - u_x}{(u_x - u - 1)^2 e^x} dx - \int \frac{u_x - u - 1}{(u_x - u - 1)^2 e^x} dx \\ &= - \left[- \frac{1}{(u_x - u - 1) e^x} - \int \frac{1}{(u_x - u - 1) e^x} dx \right] \\ &\quad - \int \frac{1}{(u_x - u - 1) e^x} dx \\ &= \frac{1}{(u_x - u - 1) e^x}, \end{aligned}$$

e, assim, concluímos que

$$\gamma_3 = \frac{1}{2(u_x - u - 1)^3 e^{2x}}.$$

Para $k = 4$, segue-se que

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= \gamma_2(x, t) \int^x \gamma_2^{-1}(\xi, t) [(u - u_{xx} + 1) \gamma_2 \gamma_3](\xi, t) d\xi \\ &= \gamma_2(x, t) \int^x [(u - u_{xx} + 1) \gamma_3](\xi, t) d\xi, \end{aligned}$$

logo,

$$\gamma_4 = \frac{1}{(u_x - u - 1)^2 e^x} \int^x \left[\frac{u - u_{xx} + 1}{2(u_x - u - 1)^3 e^{2x}} \right](\xi, t) d\xi.$$

Usando integração por partes

$$\begin{aligned} \int \frac{u - u_{xx} + 1}{(u_x - u - 1)^3 e^{2x}} dx &= - \int \frac{u_{xx} - u_x}{(u_x - u - 1)^3 e^{2x}} dx - \int \frac{u_x - u - 1}{(u_x - u - 1)^3 e^{2x}} dx \\ &= - \left[- \frac{1}{2(u_x - u - 1)^2 e^{2x}} - 2 \int \frac{1}{2(u_x - u - 1)^2 e^{2x}} dx \right] \\ &\quad - \int \frac{1}{(u_x - u - 1)^2 e^{2x}} dx \\ &= \frac{1}{2(u_x - u - 1)^2 e^{2x}}, \end{aligned}$$

e, daí, obtemos:

$$\gamma_4 = \frac{1}{4(u_x - u - 1)^4 e^{3x}}.$$

Diante do exposto acima, podemos observar que γ_k , é obtido da seguinte forma:

$$\gamma_k = \frac{1}{2^{k-2} (u_x - u - 1)^k e^{(k-1)x}}, \quad k \geq 1.$$

□

A seguir exibiremos a identidade que aparece no Corolário 5.6 para o caso quando $m_1 = 1$.

Corolário 5.10. Para $m_1 = 1$, temos a seguinte identidade

$$(u_x - u)_t = -2 \left(u^2 - uu_x \right)_x. \quad (5.2.11)$$

Demonstração. Para $m_1 = 1$ a equação (5.1.12) é dada por

$$\gamma_t = \eta \left(u^2 - uu_x \right)_x \gamma^2. \quad (5.2.12)$$

Substituindo a equação (5.2.1) em (5.2.12):

$$\begin{aligned} \gamma_{1,t} \eta^{-1} + \gamma_{2,t} \eta^{-2} + \gamma_{3,t} \eta^{-3} + \dots &= \eta \left(u^2 - uu_x \right)_x \left(\gamma_1^2 \eta^{-2} + 2\gamma_1 \gamma_2 \eta^{-3} + 2\gamma_1 \gamma_3 \eta^{-4} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \gamma_2^2 \eta^{-4} + 2\gamma_2 \gamma_3 \eta^{-5} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \gamma_3^2 \eta^{-6} + 2\gamma_3 \gamma_4 \eta^{-7} + \dots \right), \end{aligned}$$

e, então,

$$\begin{aligned} &[\gamma_{1,t} - (u^2 - uu_x)_x \gamma_1^2] \eta^{-1} + [\gamma_{2,t} - 2(u^2 - uu_x)_x \gamma_1 \gamma_2] \eta^{-2} \\ &+ [\gamma_{3,t} - 2(u^2 - uu_x)_x \left(\gamma_1 \gamma_3 + \frac{\gamma_2^2}{2} \right)] \eta^{-3} \\ &+ [\gamma_{4,t} - 2(u^2 - uu_x)_x (\gamma_1 \gamma_4 + \gamma_2 \gamma_3)] \eta^{-4} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Note que o coeficiente do k -ésimo grau de (5.2.13) (i.e., $\alpha_k \eta^{-k}$) é dado por

$$\alpha_k = \left(\gamma_{k,t} - 2(u^2 - uu_x)_x \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i \gamma_{k+1-i}}{2} \right).$$

Então,

$$\gamma_{k,t} = (u^2 - uu_x)_x \sum_{i=1}^k \gamma_i \gamma_{k+1-i}, \quad k \geq 1. \quad (5.2.14)$$

Para $k = 1$: temos que $\gamma_{1,t} = (u^2 - uu_x)_x \gamma_1^2$; usando $\gamma_1 = \frac{2}{u_x - u - 1}$ obtido no Corolário 5.9, por um lado, temos

$$\gamma_{1,t} = \left(\frac{2}{u_x - u - 1} \right)_t = -2 \frac{(u_x - u)_t}{(u_x - u - 1)^2},$$

por outro lado,

$$\left(u^2 - uu_x \right)_x \gamma_1^2 = \left(u^2 - uu_x \right)_x \left(\frac{2}{u_x - u - 1} \right)^2 = 4 \frac{(u^2 - uu_x)_x}{(u_x - u - 1)^2},$$

e, portanto, concluímos que

$$(u_x - u)_t = -2 \left(u^2 - uu_x \right)_x.$$

Seguindo de mesma forma, para $k = 2$, isto é, $\gamma_{2,t} = 2 \left(u^2 - uu_x \right)_x \gamma_1 \gamma_2$, substituindo γ_2 obtido no Corolário 5.9, por um lado, temos

$$\gamma_{2,t} = \left[\frac{1}{(u_x - u - 1)^2 e^x} \right]_t = -\frac{2(u_x - u - 1)(u_x - u)_t}{(u_x - u - 1)^4 e^x} = -2 \frac{(u_x - u)_t}{(u_x - u - 1)^3 e^x},$$

por outro lado,

$$2 \left(u^2 - uu_x \right)_x \gamma_1 \gamma_2 = 4 \frac{(u^2 - uu_x)_x}{(u_x - u - 1)^3 e^x},$$

e, portanto,

$$(u_x - u)_t = -2 \left(u^2 - uu_x \right)_x.$$

Agora mostraremos que a identidade (5.2.11) aparece para todo k . Seja k qualquer, isto é,

$$\gamma_{k,t} = \left(u^2 - uu_x \right)_x \sum_{i=1}^k \gamma_i \gamma_{k+1-i}, \quad k \geq 1,$$

usando que

$$\gamma_k = \frac{1}{2^{k-2} (u_x - u - 1)^k e^{(k-1)x}}, \quad k \geq 1,$$

temos, por um lado, que,

$$\gamma_{k,t} = -k \frac{(u_x - u)_t}{2^{k-2} (u_x - u - 1)^{k+1} e^{(k-1)x}},$$

por outro lado,

$$\left(u^2 - uu_x \right)_x \sum_{i=1}^k \gamma_i \gamma_{k+1-i} = k \frac{2 \left(u^2 - uu_x \right)_x}{2^{k-2} (u_x - u - 1)^{k+1} e^{(k-1)x}}.$$

Portanto, para qualquer $k \geq 1$, temos que

$$(u_x - u)_t = -2 \left(u^2 - uu_x \right)_x.$$

□

Teorema 5.11. *A expansão de (5.1.13) em potências de η produz um número infinito de leis de conservação para a equação de Novikov (4.0.1):*

$$\begin{aligned} \left\{ [\ln(u_x - u - 1)]_x + \frac{1}{2} (u - u_{xx}) \right\}_t &= - \left[2 \frac{(u^2 - uu_x)_x}{u_x - u - 1} \right]_x, \quad k = 1, \\ \left[\frac{u - u_{xx} + 1}{2^{(k-2)} (u_x - u - 1)^k e^{(k-1)x}} \right]_t &= \left[\frac{(u^2 - uu_x)_x}{2^{(k-3)} (u_x - u - 1)^k e^{(k-1)x}} \right]_x, \quad k \geq 2. \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Demonstração. Para encontrarmos as leis de conservação (5.2.15), vamos substituir as equações (5.2.1) e (5.2.10) em (5.1.13). Primeiro, notemos que a equação (5.1.13) é dada por

$$(\rho)_t = (\Phi)_x \quad (5.2.16)$$

em que

$$\rho = (u - u_{xx} + 1) \gamma, \quad \Phi = 2 \left(u^2 - uu_x \right)_x \gamma + \frac{2}{\eta} \left(uu_x - uu_{xx} - u_x^2 + u^2 \right).$$

Substituindo (5.2.1) em ρ :

$$\begin{aligned} \rho &= (u - u_{xx} + 1) [\gamma_1 \eta^{-1} + \gamma_2 \eta^{-2} + \gamma_3 \eta^{-3} + \dots] \\ &= (u - u_{xx} + 1) \gamma_1 \eta^{-1} + (u - u_{xx} + 1) \gamma_2 \eta^{-2} + (u - u_{xx} + 1) \gamma_3 \eta^{-3} + \dots, \end{aligned}$$

então

$$\rho = (u - u_{xx} + 1) \gamma_1 \eta^{-1} + (u - u_{xx} + 1) \gamma_2 \eta^{-2} + (u - u_{xx} + 1) \gamma_3 \eta^{-3} + \dots \quad (5.2.17)$$

Substituindo (5.2.1) em Φ :

$$\begin{aligned} \Phi &= 2 \left(u^2 - uu_x \right)_x [\gamma_1 \eta^{-1} + \gamma_2 \eta^{-2} + \gamma_3 \eta^{-3} + \dots] + \frac{2}{\eta} \left(uu_x - uu_{xx} - u_x^2 + u^2 \right) \\ &= 2 [\gamma_1 (u^2 - uu_x)_x + uu_x - uu_{xx} - u_x^2 + u^2] \eta^{-1} \\ &\quad + [2 (u^2 - uu_x)_x \gamma_2] \eta^{-2} \\ &\quad + [2 (u^2 - uu_x)_x \gamma_3] \eta^{-3} + \dots, \end{aligned}$$

e, então

$$\begin{aligned} \Phi &= 2 [\gamma_1 (u^2 - uu_x)_x + uu_x - uu_{xx} - u_x^2 + u^2] \eta^{-1} \\ &\quad + [2 (u^2 - uu_x)_x \gamma_2] \eta^{-2} \\ &\quad + [2 (u^2 - uu_x)_x \gamma_3] \eta^{-3} + \dots, \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

em que o coeficiente do k -ésimo grau é da seguinte forma:

$$a_k = 2 \left(u^2 - uu_x \right)_x \gamma_k.$$

Agora, usando as expansões obtidas para ρ e Φ (isto é, (5.2.17) e (5.2.18), respectivamente) em (5.2.16), temos que

$$[(u - u_{xx} + 1) \gamma_1]_t = 2 [\gamma_1 (u^2 - uu_x)_x + uu_x - uu_{xx} - u_x^2 + u^2]_x, \quad (k = 1)$$

$$[(u - u_{xx} + 1) \gamma_2]_t = [2 (u^2 - uu_x)_x \gamma_2]_x, \quad (k = 2)$$

$$[(u - u_{xx} + 1) \gamma_3]_t = [2 (u^2 - uu_x)_x \gamma_3]_x, \quad (k = 3)$$

$$[(u - u_{xx} + 1) \gamma_4]_t = [2 (u^2 - uu_x)_x \gamma_4]_x, \quad (k = 4)$$

$$[(u - u_{xx} + 1) \gamma_5]_t = [2 (u^2 - uu_x)_x \gamma_5]_x, \quad (k = 5)$$

em que a lei de conservação para o k -ésimo grau é

$$[(u - u_{xx} + 1) \gamma_k]_t = \left[2 \left(u^2 - uu_x \right)_x \gamma_k \right]_x, \quad k \geq 2.$$

Agora, vamos substituir as funções (5.2.10) nas equações acima. Para $k = 1$: segue que

$$\left[\frac{u - u_{xx} + 1}{u_x - u - 1} \right]_t = \left[2 \frac{(u^2 - uu_x)_x}{u_x - u - 1} + uu_x - uu_{xx} - u_x^2 + u^2 \right]_x.$$

Observemos que

$$\frac{u - u_{xx} + 1}{u_x - u - 1} = -\frac{u_{xx} - u_x}{u_x - u - 1} - 1 = -[\ln(u_x - u - 1)]_x - 1,$$

e, além disso, como a equação (4.0.1) é uma lei de conservação

$$(u - u_{xx})_t = 2 \left(uu_x - uu_{xx} - u_x^2 + u^2 \right)_x,$$

e, então,

$$\begin{aligned} -\{[\ln(u_x - u - 1)]_x\}_t &= \left[2 \frac{(u^2 - uu_x)_x}{u_x - u - 1} + uu_x - uu_{xx} - u_x^2 + u^2 \right]_x \\ &= \left[2 \frac{(u^2 - uu_x)_x}{u_x - u - 1} \right]_x + (uu_x - uu_{xx} - u_x^2 + u^2)_x \\ &= \left[2 \frac{(u^2 - uu_x)_x}{u_x - u - 1} \right]_x + u_x^2 + uu_{xx} - uu_{xxx} - 3u_x u_{xx} + 2uu_x \\ &= \left[2 \frac{(u^2 - uu_x)_x}{u_x - u - 1} \right]_x + \frac{1}{2} (u - u_{xx})_t, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\{ [\ln(u_x - u - 1)]_x + \frac{1}{2}(u - u_{xx}) \right\}_t = - \left[2 \frac{(u^2 - uu_x)_x}{u_x - u - 1} \right]_x.$$

Para $k \geq 2$, temos que

$$[(u - u_{xx} + 1) \gamma_k]_t = \left[2 \left(2uu_x - uu_{xx} - u_x^2 \right) \gamma_k \right]_x.$$

Assim,

$$\left[\frac{u - u_{xx} + 1}{2^{(k-2)} (u_x - u - 1)^k e^{(k-1)x}} \right]_t = \left[\frac{(u^2 - uu_x)_x}{2^{(k-3)} (u_x - u - 1)^k e^{(k-1)x}} \right]_x.$$

□

As densidades conservadas correspondentes a γ_k , $k \geq 1$, que encontramos em (5.2.10) para $m_1 = 1$, são locais. Por outro lado, aquelas encontradas em (5.2.4), para $m_1 = -2$, são não-locais, uma vez que, as funções γ_k , $k \geq 1$, dependem de integrações de funções.

Observação 5.12. A densidade conservada local também pode ser expressa na forma integral. Assim, a quantidade conservada correspondente a γ_1 é:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left\{ [\ln(u_x - u - 1)]_x + \frac{1}{2}(u - u_{xx}) \right\} dx &= \int_{\mathbb{R}} [\ln(u_x - u - 1)]_x dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (u - u_{xx}) dx \\ &= \ln(u_x - u - 1)|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u dx - \frac{1}{2} u_x|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u dx, \end{aligned}$$

em que $\ln(u_x - u - 1)|_{-\infty}^{\infty} = 0 = u_x|_{-\infty}^{\infty}$, e, portanto, a densidade conservada é u .

Teorema 5.13. *Seja $u = u(x, t)$ uma solução de (4.0.1). Então, para cada $k \geq 2$, a 1-forma*

$$\omega_k = \frac{u - u_{xx} + 1}{2^{(k-2)} (u_x - u - 1)^k e^{(k-1)x}} dx + \frac{2uu_x - uu_{xx} - u_x^2}{2^{(k-3)} (u_x - u - 1)^k e^{(k-1)x}} dt \quad (5.2.19)$$

é exata. Em particular, as leis de conservação (5.2.15) são triviais.

Demonstração. Mostraremos que existe uma 0-forma ϕ_k tal que $\omega_k = d\phi_k = \frac{\partial}{\partial x} \phi_k dx + \frac{\partial}{\partial t} \phi_k dt$ para cada $k \geq 2$. Para isto, usaremos as seguintes identidades:

$$2uu_x - uu_{xx} - u_x^2 = \left(u^2 - uu_x \right)_x \quad e \quad (u_x - u)_t = -2 \left(u^2 - uu_x \right)_x,$$

em que a última advém do Corolário 5.10. Suponhamos que

$$\phi_k := \frac{1}{2^{(k-2)} (u_x - u - 1)^{k-1} e^{(k-1)x} (k-1)}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \phi_k &= \frac{1}{2^{(k-2)} (k-1)} \left[(u_x - u - 1)^{-(k-1)} e^{-(k-1)x} \right]_x \\ &= \frac{1}{2^{(k-2)}} \left[- (u_x - u)_x (u_x - u - 1)^{-k} e^{-(k-1)x} - e^{(k-1)x} (u_x - u - 1)^{-(k-1)} \right] \\ &= \frac{1}{2^{(k-2)}} \left[\frac{- (u_{xx} - u_x) - (u_x - u - 1)}{(u_x - u - 1)^k e^{(k-1)x}} \right] \\ &= \frac{u - u_{xx} + 1}{2^{(k-2)} (u_x - u - 1)^k e^{(k-1)x}}, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_k &= \frac{1}{2^{(k-2)} (k-1) e^{(k-1)x}} \left[(u_x - u - 1)^{-(k-1)} \right]_t \\ &= \frac{1}{2^{(k-2)} (k-1) e^{(k-1)x}} \left[- (k-1) (u_x - u)_t (u_x - u - 1)^{-k} \right] \\ &= \frac{1}{2^{(k-2)} e^{(k-1)x}} \left[\frac{- (u_x - u)_t}{(u_x - u - 1)^k} \right] = \frac{2 (u^2 - uu_x)_x}{2^{(k-2)} e^{(k-1)x} (u_x - u - 1)^k} \\ &= \frac{(u^2 - uu_x)_x}{2^{(k-3)} e^{(k-1)x} (u_x - u - 1)^k}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que existe uma 0-forma ϕ_k tal que $\omega_k = d\phi_k$ para cada $k \geq 2$. Note que o fato de ω ser exata implica de imediato que ω também é fechada, uma vez que $d\omega = d^2\phi_k = 0$. \square

6

CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos equações diferenciais do tipo pseudo-esférico, com particular ênfase em equações do tipo $u_t - u_{txx} = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$. Aplicamos as técnicas desenvolvidas ao longo dos capítulos 2 e 3 às equações de Novikov [15], a partir da qual conseguimos demonstrar que uma delas é do tipo pseudo-esférico e geometricamente integrável, capítulo 4. Por conseguinte, a partir desse fato, no capítulo 5 mostramos que a tal equação possui um pseudo-potencial quadrático, do qual obtemos um número infinito de quantidades conservadas, locais e não-locais. Estes resultados apresentados nos capítulos 4 e 5 acerca da equação de Novikov (4.0.1) são da nossa autoria tendo como fruto um artigo publicado [9].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] E. Abbena, S. Salamon and A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, 3rd edition, Chapman and Hall/CRC, (2017). [1](#)
- [2] M. Ablowitz, D. J. Kaup, A. Newell and H. Segur, The inverse scattering transform—Fourier analysis for nonlinear problems, *Stud. Appl. Math.* vol. 53, 249–315, (1974). [1](#)
- [3] C. Camacho and A. Lins Neto, *Geometric Theory of Foliations*, Birkhäuser, Boston, (1985). [2.83](#), [2.84](#), [2.3](#)
- [4] R. Camassa and D.D. Holm, An integrable shallow water equation with peaked solitons, *Lett. R. Phys.*, 71, 1661-1664, (1993). [1](#)
- [5] S. S. Chern and K. Tenenblat, Pseudospherical surfaces and evolution equations, *Stud. Appl. Math.*, vol. 74, 55–83, (1986). [1](#), [3](#), [3.2](#), [3.3](#), [3.16](#), [3.24](#)
- [6] P. L. da Silva and I. L. Freire, Well-posedness, travelling waves and geometrical aspects of generalizations of the Camassa-Holm equation, *J. Diff. Equ.*, vol. 267, 5318–5369, (2019). [1](#), [4](#), [4.1](#)
- [7] M. do Carmo, *Formas diferenciais e aplicações*, 8º Colóquio Brasileiro de Matemática, (1971). [2](#)
- [8] D.C. Ferraioli and L.A. De Oliveira, Local isometric immersions of pseudospherical surfaces described by evolution equations in conservation law form. *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 446, 1606-1631, (2016). [3](#), [3.4](#)
- [9] I. L. Freire and R. S. Tito, A Novikov equation describing pseudo-spherical surfaces, its pseudo-potentials, and local isometric immersions, *Stud. Appl. Math.*, 1-15, (2021). [1](#), [6](#)
- [10] L. Godinho and J. Natário, *An Introduction to Riemannian Geometry: With Applications to Mechanics and Relativity*, Springer, (2014). [2.5](#), [2.96](#)

- [11] I.S. Krasil'shchik, A.M. Verbovetsky and R. Vitolo, The symbolic computation of integrability structures for partial differential equations, Springer, (2017). [3.21](#)
- [12] W. Kühnel, Differential geometry, 3th edition AMS, (2015). [2.5](#)
- [13] J. Lafontaine, An introduction to differential manifolds, Springer, (2015). [2](#)
- [14] A. McInerney, First steps in differential geometry, Springer, (2013). [2](#), [2.3](#)
- [15] V. Novikov, Generalizations of the Camassa–Holm equation, J. Phys. A, Math. Theor. 42, (2009). [1](#), [4](#), [4.1](#), [6](#)
- [16] E. G. Reyes, Geometric integrability of the Camassa-Holm equation, Lett. Math. Phys., vol. 59, 117–131, (2002). [1](#), [3](#), [3.1](#), [3.2](#), [3.14](#), [3.23](#)
- [17] E. G. Reyes, Pseudo-potentials, nonlocal symmetries and integrability of some shallow water equations, Sel. Math., vol. 12, 241, (2006). [1](#), [3](#), [3.14](#), [3.3](#), [3.16](#), [3.25](#), [3.26](#)
- [18] E. G. Reyes, Equations of pseudo-spherical type (After S. S. Chern and K. Tenenblat), Results. Math., vol 60, 53–101, (2011). [1](#), [3.3](#), [3.3](#)
- [19] N. Sales Filho, Simetrias e leis de conservação de equações de Novikov, Tese de doutorado em matemática, UFABC, (2021). [3.19](#), [4.2](#)
- [20] R. Sasaki, Soliton equations and pseudospherical surfaces, Nucl. Phys. vol. 154, 343-357, (1979). [1](#), [3](#)
- [21] T. C. Silva and K. Tenenblat, Third order differential equations describing pseudospherical surfaces, vol. 259, 4897–4923, (2015). [1](#), [4](#), [4.1](#), [4.2](#)
- [22] K. Tenenblat, Introdução à geometria diferencial, Editora Blucher, 2ª Ed., (2008). [2](#)
- [23] L.W. Tu, An Introduction to Manifolds, 2nd edition, Springer, (2011). [2](#)