



Universidade Federal do ABC

**Universidade Federal do ABC**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**ALFREDO MANUEL JARA GRADOS**

# **Dinâmica de partículas autopropelidas em escoamentos**

**Santo André, 2019**





Universidade Federal do ABC

**Universidade Federal do ABC**

**Centro de Matemática, Computação e Cognição**

**Alfredo Manuel Jara Grados**

# **Dinâmica de partículas autopropelidas em escoamentos**

**Orientador: Prof. Dr. Roldão da Rocha Junior**

**Coorientador: Prof. Dr. Rafael Ribeiro Dias Vilela de Oliveira**

Tese de doutorado apresentada ao Centro de  
Matemática, Computação e Cognição para  
obtenção do título de Doutorado em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE  
DEFENDIDA PELO ALUNO ALFREDO MANUEL JARA GRADOS,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. ROLDÃO DA ROCHA JUNIOR.

**Santo André, 2019**

**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC**  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Jara Grados, Alfredo Manuel  
Dinâmica de partículas autopropelidas em escoamentos / Alfredo Manuel  
Jara Grados. — 2019.

118 fls. : il.

Orientador: Roldão da Rocha Junior  
Coorientador: Rafael Ribeiro Dias Vilela de Oliveira

Tese (Doutorado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós  
Graduação em Matemática, Santo André, 2019.

1. Sistemas Dinâmicos Descontínuos. 2. Natação de Partículas. 3. Equações  
de Jeffery. I. Rocha Junior, Roldão da. II. Oliveira, Rafael Ribeiro Dias  
Vilela de. III. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019. IV. Título.

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) orientador(a).**

**Santo André/SP**

**19 de Dezembro de 2019**

**Assinatura do(a) autor(a):**

*Alfredo da*

**Assinatura do(a) orientador(a):**

*Ally da M. Pinheiro*





## MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

### Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

#### FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato, ALFREDO MANUEL JARA GRADOS realizada em 19 de Setembro 2019:

Prof.(a) Dr.(a) **CLODOALDO GROTTA RAGAZZO**  
- Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **DANIEL MIRANDA MACHADO**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **DOUGLAS DUARTE NOVAES**  
- Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **IBERÊ LUIZ CALDAS**  
- Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **BRUNO DOMICIANO LOPES**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **CHRISTIAN DA SILVA RODRIGUES**  
- Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **RAFAEL RIBEIRO DIAS VILELA DE OLIVEIRA**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

\* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura



*Para Jimena e Gustavo,  
pelos sorrisos de cada manhã...*



## AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiro à minha mãe, Elsa, pela eterna compreensão e paciência que sempre teve comigo quando decidi fazer realidade meus sonhos. Pelas ligações a cada semana para perguntar se eu estava bem, pelos aniversários que não estivemos juntos e, como sempre, por muitas coisas que não cabem aqui. Agradeço também ao meu irmão Alberto, "*Lucky*", por ter cuidado da nossa mãe todos estes anos, também pela paciência que teve para me ajudar a resolver meus problemas. São inúmeras as vezes que você me ajudou, meu agradecimento eterno.

A todos meus professores da UFABC, pelas aulas recebidas. Cada uma dessas aulas me ajudou de uma ou outra forma para chegar aqui. Em particular quero agradecer aos professores Jeferson Cassiano e Maurício Lima pela ajuda e sugestões de cada semana, este trabalho não estaria terminado sem essa ajuda. Agradeço também a meu orientador, Roldão da Rocha, pela disponibilidade que teve sempre comigo, lembrarei sempre isso. Para finalizar, quero agradecer ao professor Rafael Vilela, meu coorientador, a quem considerei um amigo desde o primeiro dia que cheguei no Brasil, lembrarei sempre dos almoços, e dos sucos com salgados que compartilhamos juntos enquanto conversávamos de muitas coisas. As palavras não são suficientes para agradecer tudo. Obrigado Rafael!

Aos amigos que fiz aqui, alguns inclusive de outros continentes, cada um deles me ensinou a viajar sem sair do Brasil, conheci muito. Agradeço pelos bons momentos que tornaram minha vida mais divertida. Foram momentos inesquecíveis. Obrigado a todos.

Finalmente agradeço à UFABC e à CAPES pelo apoio financeiro que fez possível o desenvolvimento deste trabalho.



O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



*Everything should be made as simple as possible,  
but not simpler*  
Albert Einstein (1879-1955)



## RESUMO

Neste trabalho, estudamos dois problemas em dinâmica de partículas autopropelidas em um escoamento bidimensional estacionário com barreiras de transporte. No primeiro problema, consideramos partículas pontuais. Dois protocolos de natação, ambos com direção da velocidade de autopropulsão fixada *a priori*, foram considerados e comparados nesse contexto: no primeiro, a velocidade de autopropulsão é constante e, no segundo, há modulação temporal periódica da velocidade de autopropulsão. Como resultado de trabalho anterior, restrito a uma única escolha dos parâmetros envolvidos e ao caso em que as velocidades médias de autopropulsão são idênticas, era conhecido que autopropulsão com modulação periódica leva a um transporte mais efetivo, no sentido de uma maior medida do conjunto de condições iniciais de soluções não confinadas. Nesta tese, primeiramente fazemos uma exploração exaustiva do ganho de eficiência em função dos parâmetros da dinâmica, usando técnicas analíticas e numéricas. A seguir, estudamos o caso em que a velocidade de autopropulsão com modulação periódica é, em todo instante, menor ou igual à velocidade constante do primeiro protocolo. Mostramos que, ainda assim, há regiões do espaço de parâmetros em que a modulação periódica é vantajosa. O segundo problema que estudamos é o da natação de partículas esféricas cuja orientação é determinada dinamicamente pelo escoamento. Consideramos que essas partículas só experimentam autopropulsão quando sua orientação se encontra numa vizinhança da direção fixada *a priori*. Como consequência, as partículas estão sob um campo descontínuo de velocidades. Damos inicialmente uma descrição geométrica do campo de velocidades usando como ferramenta principal a derivada de Lie. Finalmente, definimos um mapa de Poincaré em primeira ordem no parâmetro de descontinuidade e estudamos algumas das suas propriedades.

**Palavras-chave:** Sistemas dinâmicos descontínuos, mapa da separatriz, teorema de Melnikov, derivada de Lie, mapa de Poincaré.



# ABSTRACT

We study two problems in the context of self-propelled particles swimming on a steady two-dimensional flow with transport barriers. In the first problem, we consider point particles. We compare the transport efficiency of two different self-propulsion protocols. In both, self-propulsion takes place along a predetermined direction. The first protocol corresponds to constant self-propulsion speed and the second one corresponds to a periodic temporal modulation of that speed. Based on previous results valid for the case of same mean speed and for a specific choice of parameters, we know that the second protocol is more efficient to promote the transport of particles in the following sense: it leads to a larger set of initial conditions of solutions which escape. Here, we first measure both numerically and analytically the relative efficiency of the two protocols for a broad range of the parameters. Next, we consider the case where the speed in the first protocol is always greater than or equal to the speed in the second protocol. We show that even in this situation there are certain parameter regions where the second protocol is more efficient. The second problem we study corresponds to the dynamics of spheroidal particles whose orientation is determined by the fluid flow. We are interested in the situation where the particles only experience self-propulsion when their orientation is close to a given direction. As a consequence, their velocity field is discontinuous. We give a geometric description of the velocity field by using the Lie derivative as our main tool. At last, we define a Poincaré map which describes quantitatively the dynamics to first order in the discontinuity parameter and we study some of its properties.

**Keywords:** Discontinuous dynamical systems, separatrix map, Melnikov theorem, Lie derivative, Poincaré map.



# CONTEÚDO

1	INTRODUÇÃO	1
2	ELEMENTOS DE SISTEMAS DINÂMICOS	5
2.1	Aspectos Gerais	5
2.1.1	Dinâmica de Fluxos	7
2.1.2	Dinâmica de Difeomorfismos ou Mapas	10
2.1.3	Conjugação de Fluxos e Difeomorfismos	11
2.1.4	Propriedades Locais de Fluxos e Difeomorfismos	12
2.1.5	Mapas de Poincaré	14
2.2	Sistemas Hamiltonianos	16
2.2.1	Fundamentos	16
2.2.2	Caos de Separatriz	18
2.2.3	O Mapa da Separatriz	23
2.3	Sistemas Dinâmicos Descontínuos	27
3	ELEMENTOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS	33
3.1	Definições Básicas	34
3.2	Leis de Conservação	37
3.2.1	Conservação da Massa	37
3.2.2	Conservação do Momentum	38
3.3	A Equação de Navier-Stokes	41
3.4	As Equações de Jeffery	43
4	NATAÇÃO DE PARTÍCULAS PONTUAIS	53
4.1	Primeira Comparação	54
4.1.1	Primeiro Protocolo	57
4.1.2	Segundo Protocolo	59
4.1.3	Comparação de Resultados	64
4.2	Segunda Comparação	66
5	SWIMMERS DE JEFFERY	69
5.1	Natação de uma Partícula Esférica: $\lambda = 0$	69

5.1.1	Caso Particular: $\beta = 0$	76
5.2	Mapa de Poincaré: $\theta = -\varepsilon$	78
5.2.1	Natação sobre $\Omega_1 = (0, \pi) \times (0, \pi)$	79
5.2.2	Natação sobre $\Omega_2 = (\pi, 2\pi) \times (0, \pi)$	83
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	89
	Anexos	91
	Anexo A: Artigo 'Swimming along a fixed direction in steady flows'	93
	Anexo B: Parametrização das trajetórias sem natação	111
	Referência Bibliográfica	114

# 1

## INTRODUÇÃO

Sistemas Dinâmicos e Mecânica dos Fluidos são duas áreas da Matemática Aplicada historicamente muito próximas. Sua relação é tão íntima que mesmo o conceito fundamental de *fluxo* definido por um sistema dinâmico a tempo contínuo herda a sua terminologia do contexto de fluidos. O tema de que trata esta tese está na interface dessas duas áreas. Estudamos aqui a dinâmica de partículas autopropelidas em escoamentos. Nossa motivação vem do grande interesse recente<sup>1</sup> por parte de físicos, biólogos e engenheiros no transporte tanto de pequenos organismos e células em natação como de microdispositivos autopropelidos em escoamentos.

Este trabalho abrange o estudo de dois problemas no contexto de partículas autopropelidas. Em ambos, as partículas estão em um escoamento que apresenta barreiras de transporte para os elementos de fluido e nossa motivação, em linhas gerais, é investigar as consequências da autopropulsão para a dinâmica e o transporte. Consideramos o regime de número de Reynolds baixo mas, para fins de simplificação da análise, negligenciamos os efeitos do movimento Browniano.

O primeiro problema consiste na caracterização da dinâmica de partículas *pontuais* cuja velocidade é, em cada instante, igual à velocidade do fluido em sua posição somada à velocidade de autopropulsão. Estudamos o caso em que essa última se dá ao longo de uma direção fixada *a priori*, que encontra motivação por exemplo em problemas de fototaxia [1, 2]. São comparadas as eficiências de dois protocolos de natação: no primeiro, a velocidade de autopropulsão tem valor absoluto constante enquanto que, no segundo, seu valor absoluto apresenta uma dependência temporal sinusoidal. A investigação desse primeiro problema se iniciou no trabalho de mestrado do autor [3], quando se concluiu que, na situação em que as médias das velocidades nos dois proto-

---

<sup>1</sup> Ver por exemplo o artigo de revisão [4] e trabalhos ali citados.

colos coincidem, e para uma escolha específica dos parâmetros envolvidos, o segundo protocolo leva a um conjunto maior (no sentido de medida) de condições iniciais de soluções que não ficam confinadas pelas barreiras de transporte do escoamento. Nesta tese, usamos métodos analíticos e numéricos para aprofundar e estender as investigações desse problema. Primeiramente, fazemos uma comparação exaustiva no espaço dos parâmetros das eficiências dos dois protocolos, e mostramos que a superioridade do segundo protocolo sobre o primeiro exibe uma relevante dependência dos parâmetros. Um resultado notável nesse sentido é que é possível obter aumentos de mais de 80% na área do conjunto de condições iniciais de trajetórias que escapam ao se substituir o primeiro pelo segundo protocolo. Em segundo lugar, investigamos a situação em que a velocidade de natação para as partículas que adotam o primeiro protocolo é, em todo instante, maior ou igual à velocidade das partículas que adotam o segundo protocolo. Mostramos que, ainda assim, existem regiões do espaço dos parâmetros em que o segundo protocolo é mais eficiente como promotor de transporte.

O segundo problema tratado aqui corresponde à caracterização da dinâmica de partículas *esferoidais* cuja orientação tem uma dinâmica própria influenciada pelo escoamento e regida pela equação de Jeffery [5]. Como em situações realísticas a autopropulsão se dá ao longo de um eixo de orientação, e ainda motivados pelo contexto de partículas em fototaxia, consideramos que as partículas nadam com velocidade constante ao longo da direção (variável) de seu eixo de orientação sempre que o ângulo entre tal eixo e uma direção fixada *a priori* for suficientemente pequeno, e que são simplesmente *adveccionadas* (i.e., transportadas como partículas de fluido) quando essa condição não é satisfeita. Como consequência, o campo de velocidade das partículas autopropelidas é uma função descontínua da variável que descreve sua orientação. Usamos a derivada de Lie para estudar o tipo de descontinuidade e apresentamos uma descrição do campo de velocidades. Além disso, parametrizamos as trajetórias das partículas tanto sob advecção quanto em natação. No último caso, a parametrização é calculada até a primeira ordem. Finalmente, definimos sobre os planos de descontinuidade um mapa de Poincaré também em primeira ordem e investigamos algumas de suas propriedades.

Os capítulos 2 e 3 desta tese contêm os conceitos fundamentais, respectivamente, de Sistemas Dinâmicos e Mecânica dos Fluidos necessários à formulação apropriada e estudo dos dois problemas descritos acima. O leitor notará uma diferença de estilo na

apresentação desses capítulos dedicados ao conteúdo preliminar. O caráter de sistema formal do capítulo 2, em que teoremas se seguem às definições pertinentes, dá lugar, no capítulo 3, a uma forma de apresentação que privilegia a compreensão intuitiva das equações físicas que descrevem os movimentos das partículas de fluido. Nesse sentido, acreditamos ter optado pela troca da coerência de estilo pela clareza da introdução dos conceitos.

Os nossos resultados sobre a dinâmica de partículas pontuais se encontram apresentados de modo sucinto no capítulo 4 e de modo detalhado no anexo A, na forma de artigo científico (à data de defesa desta tese, submetido a publicação). Destacamos nesse capítulo a comparação entre os dois protocolos de natação no caso em que a velocidade no segundo protocolo nunca excede a velocidade adotada no primeiro protocolo, resultado que não foi incluído naquele artigo. O capítulo 5 traz nossos resultados acerca da dinâmica de partículas esferoidais. Tanto o capítulo 5 como o Anexo A fazem uso de integrais elípticas envolvidas na dinâmica puramente advectiva. Essas integrais são tratadas no Anexo B. Finalmente, no capítulo 6 apresentamos as conclusões e perspectivas desta pesquisa.



# 2

## ELEMENTOS DE SISTEMAS DINÂMICOS

Neste capítulo definimos os principais conceitos relacionados com os sistemas dinâmicos contínuos e descontínuos. Iniciamos com a definição de um sistema dinâmico. Também estudamos a dinâmica de um difeomorfismo e a de um fluxo e a relação entre as duas usando o mapa de Poincaré. A seguir estudamos sistemas hamiltonianos e o caos resultante da perturbação temporal periódica desses sistemas. As ferramentas necessárias para o estudo do caos são o teorema de Smale-Birkhoff, o teorema de Melnikov e o mapa da separatriz. Finalmente, na terceira parte estudamos sistemas dinâmicos descontínuos, damos a classificação de acordo com o formalismo de Filippov e discutimos brevemente a existência e unicidade da solução da respectiva equação diferencial. Em particular, o caso do nosso interesse é chamado de *costura*.

### 2.1 ASPECTOS GERAIS

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Um *sistema dinâmico* pode ser definido como uma descrição matemática determinística da evolução temporal de um sistema. A variável temporal pode ser uma variável contínua, um sistema dinâmico desse tipo é representado por uma equação diferencial da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}(\mathbf{x}(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

sendo  $\mathcal{F}$  um campo vetorial definido sobre  $\mathcal{M}$ .

Note que na equação 2.1 não está incluída a possibilidade que o campo vetorial  $\mathcal{F}$  dependa explicitamente do tempo  $t$ . Porém os sistemas desse tipo podem ser estudados da mesma forma definindo um estado dinâmico adicional  $x_{n+1} = t$  o que implica que  $\dot{x}_{n+1} = 1$ . Logo, a componente  $n + 1$  de  $\mathcal{F}$  é a unidade. Em muitos exemplos, a dependência temporal é periódica, então podemos considerar o espaço de fases como

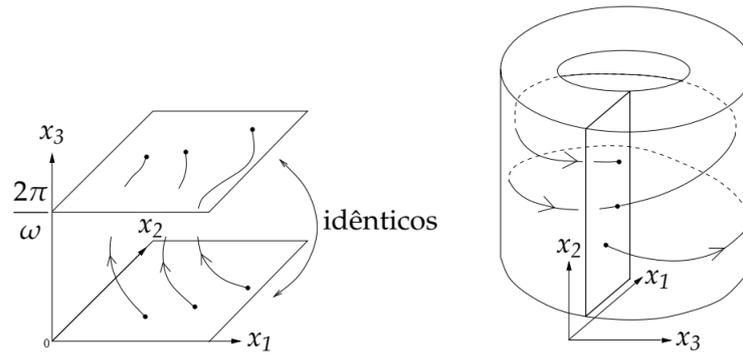


Figura 1: Descrição esquemática de um espaço de fases cilíndrico. Figura reproduzida da referência [6].

cilíndrico (um exemplo pode ser encontrado no artigo do anexo A).

Às vezes o campo  $\mathcal{F}$  pode depender de parâmetros, então escrevemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}),$$

onde  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ . Quando a dependência é óbvia, simplesmente escrevemos da forma usual.

A variável temporal pode ser também uma variável discreta. Um sistema dinâmico desse tipo é representado por uma iteração do tipo

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad n \in \mathbb{N} \text{ ou } n \in \mathbb{Z}, \quad (2.2)$$

sendo  $\mathbf{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  um difeomorfismo (ou chamado também de *mapa*).

Da mesma forma que para as equações diferenciais escrevemos  $\mathbf{f}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu})$  só quando for necessário.

Nas equações 2.1 e 2.2, a variedade  $\mathcal{M}$  onde a variável  $\mathbf{x}$  toma valores é chamada de *estado de fases* ou *espaço de fases*. Geralmente o espaço de fases é um espaço euclidiano ou um subconjunto dele, porém pode ser também qualquer outra variedade diferenciável [7].

Os fluxos conduzem a mapas através do processo de tomar uma seção transversal ao fluxo e considerando o mapa dessa seção sobre si mesma induzida pelo fluxo. Isso será estudado na seção 2.1.5.

2.1.1 Dinâmica de Fluxos

**Definição 2.1.** Um **fluxo** sobre uma variedade  $\mathcal{M}$  é uma aplicação continuamente diferenciável  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  tal que,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , a função  $\varphi^t(\cdot) = \varphi(t, \cdot)$  satisfaz

$$\begin{aligned} \varphi^0 &= \text{Id}_{\mathcal{M}}, & \text{com } \text{Id}_{\mathcal{M}} \text{ a função identidade sobre } \mathcal{M}. \\ \varphi^t \circ \varphi^s &= \varphi^{t+s}, & t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Definição 2.2.** Seja  $x_0 \in \mathcal{M}$  e  $\varphi$  um fluxo sobre  $\mathcal{M}$ . A **órbita** ou **trajetória** de  $x_0$  sob  $\varphi$  é o conjunto  $\gamma_{x_0} = \{\varphi^t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$  que é orientado no sentido do aumento de  $t$ .

O conjunto das trajetórias de um fluxo é chamado de **retrato de fase**. Uma importante representação pictórica do fluxo é obtida desenhando trajetórias típicas. Na figura 2 podemos ver retratos de fase de fluxos bidimensionais.

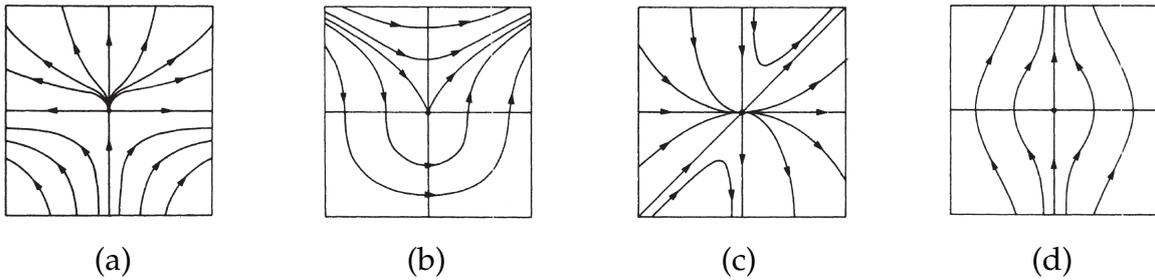


Figura 2: Exemplos de retrato de fase para fluxos bidimensionais: (a)  $\dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = x_2^2$ . (b)  $\dot{x}_1 = x_2^2, \dot{x}_2 = x_1$ . (c)  $\dot{x}_1 = x_1^2, \dot{x}_2 = x_2(2x_1 - x_2)$ . (d)  $\dot{x}_1 = -x_1x_2, \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2$ . Figura reproduzida da referência [8].

Note que se  $\varphi^t$  for inversível (i.e. definido de forma única para  $x_0$ ) então sua inversa será dada por  $\varphi^{-t}$  e assim, de acordo com a definição de fluxo tem-se

$$\varphi^t \circ \varphi^{-t} = \text{Id}_{\mathcal{M}}.$$

Para estudar a relação que existe entre os fluxos e as equações diferenciais definimos a **velocidade** ou **campo vetorial**,  $\mathcal{F}$ , do fluxo  $\varphi$  através da equação

$$\mathcal{F}(x) = \left. \frac{d\varphi^t(x)}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h, x) - \varphi(0, x)}{h}, \tag{2.3}$$

para  $x \in \mathcal{M}$ .

**Proposição 2.1.** O fluxo  $\varphi^t(\mathbf{x}_0)$  é a solução de

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathcal{F}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0.\end{aligned}$$

*Demonstração:*

Vide [7].

■

Algumas vezes podemos estar interessados em dinâmica recorrente. Podemos obter uma melhor compreensão da estrutura do espaço de fases especificando conjuntos que permanecem invariantes sob a dinâmica do sistema.

**Definição 2.3.** Um conjunto invariante é um subconjunto  $\Lambda \subset \mathcal{M}$  tal que se  $\mathbf{x} \in \Lambda$  então  $\varphi^t(\mathbf{x}) \in \Lambda$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.4.** Um conjunto invariante que é fechado e limitado é chamado de **atrator** se

1. Para qualquer vizinhança suficientemente pequena  $\mathcal{U}$  de  $\Lambda$ , existe uma vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $\Lambda$  tal que  $\varphi^t(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  e todo  $t > 0$ .
2. Para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$  tem-se  $\varphi^t(\mathbf{x}) \rightarrow \Lambda$  se  $t \rightarrow \infty$ .

O conjunto de todos os atratores de um sistema dado descreve tipicamente a dinâmica no longo prazo. Um sistema dinâmico pode ter vários atratores, a importância de cada atrator é indicada pela medida do conjunto de condições iniciais que eles atraem, i.e. do seu *domínio de atração*.

**Definição 2.5.** O domínio de atração (ou bacia de atração) de um atrator  $\Lambda$  é um conjunto maximal,  $\mathcal{U}$ , de forma que  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$  implica  $\varphi^t(\mathbf{x}) \rightarrow \Lambda$  se  $t \rightarrow \infty$ .

Os sistemas de equações diferenciais ordinárias podem apresentar diferentes tipos de conjuntos invariantes. A seguir apresentamos alguns exemplos.

Seja  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{M}$  tal que  $\varphi^t(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , então  $\mathbf{x}^*$  é chamado de *ponto estacionário* do fluxo  $\varphi$ .

Não é difícil demonstrar que se  $\mathcal{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , então  $\boldsymbol{\varphi}^t(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$  é a solução de 2.1 com condição inicial  $\mathbf{x}^*$  em  $t = 0$ . Também, se  $\boldsymbol{\varphi}^t(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$  para todo  $t$ , a equação 2.3 implica que  $\mathcal{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ . Assim,  $\mathbf{x}^*$  é o ponto estacionário de  $\boldsymbol{\varphi}^t$  se e somente se  $\mathcal{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ . Esse ponto também é chamado de *solução de equilíbrio* da equação 2.1 ou *ponto singular* do campo  $\mathcal{F}$ .

**Definição 2.6.** Um ponto estacionário  $\mathbf{x}^*$  é dito **estável** se para cada vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $\mathbf{x}^*$  existe uma vizinhança  $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$  de  $\mathbf{x}^*$  tal que se  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}'$  então  $\boldsymbol{\varphi}^t(\mathbf{x}) \in \mathcal{N}$ , para todo  $t > 0$ .

**Definição 2.7.** Um ponto estacionário é dito **assintoticamente estável** se  $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varphi}^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$ , para todo  $\mathbf{x}$  numa vizinhança de  $\mathbf{x}^*$ .

Se  $\mathbf{x}$  não for um ponto estacionário, então dizemos que é *ordinário* ou *regular*. Os pontos estacionários que são estáveis mas não assintoticamente estáveis são ditos *neutros* ou *marginalmente estáveis* e os que não são estáveis de acordo com a definição 2.6 são ditos *instáveis*.

Outro tipo de conjunto invariante é uma *órbita periódica* que é uma trajetória  $\gamma$  que não é ponto fixo, tal que  $\boldsymbol{\varphi}^\tau(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  para algum  $\mathbf{x} \in \gamma$  e  $\tau \neq 0$ . Seja  $T$  o menor tempo positivo tal que  $\boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ , então  $\mathbf{x}$  é um *ponto periódico* com *período*  $T$ . Pode-se demonstrar que  $T$  independe da escolha de  $\mathbf{x}$ . Por isso  $T$  é dito o período de  $\gamma$ . As órbitas periódicas são curvas fechadas no espaço de fases (topologicamente são círculos). Quando uma órbita periódica  $\gamma$  é isolada, i.e. não existe nenhuma outra órbita periódica numa vizinhança de  $\gamma$ , então essa órbita periódica é dita *ciclo limite*.

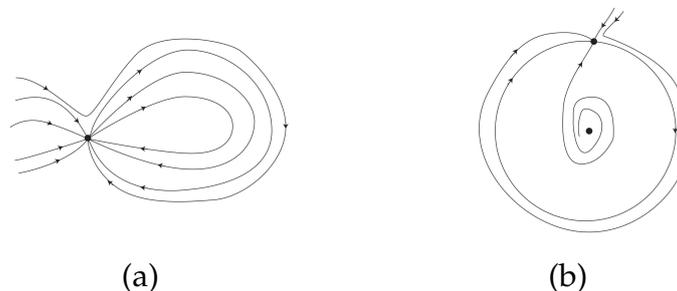


Figura 3: Exemplos de pontos fixos que são instáveis porém são assintoticamente estáveis. Figura reproduzida da referência [9].

Finalmente, temos as órbitas que conectam pontos de equilíbrio. Uma *órbita homoclínica* é uma trajetória  $\gamma$  que conecta um ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}^*$  a si mesmo, i.e.  $\gamma(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$  quando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Uma *órbita heteroclínica* conecta dois diferentes pontos de equilíbrio  $\mathbf{x}_1^*$  e  $\mathbf{x}_2^*$ , i.e.  $\gamma(t) \rightarrow \mathbf{x}_1^*$  quando  $t \rightarrow +\infty$  e  $\gamma(t) \rightarrow \mathbf{x}_2^*$  quando  $t \rightarrow -\infty$ .

As órbitas homoclínicas e heteroclínicas desempenham um papel importante na separação das bacias de atração de outros conjuntos invariantes.

### 2.1.2 Dinâmica de Difeomorfismos ou Mapas

**Definição 2.8.** Seja  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ . Defina-se a *órbita* ou *trajetória* de  $\mathbf{x}$  sob  $\mathbf{f}$  como o conjunto  $\gamma_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{f}^m(\mathbf{x}) : m \in \mathbb{Z}\}$ . Para  $m \in \mathbb{Z}^+$  define-se

$$\mathbf{f}^m(\mathbf{x}) = \overbrace{\mathbf{f} \circ \mathbf{f} \circ \dots \circ \mathbf{f}}^{m \text{ vezes}}(\mathbf{x}).$$

No caso de  $\mathbf{f}$  ser inversível define-se  $\mathbf{f}^{-m} = (\mathbf{f}^{-1})^m$ . Também  $\mathbf{f}^0 = \text{Id}_{\mathcal{M}}$ , o mapa identidade sobre  $\mathcal{M}$ .

De mesma forma que para fluxos, podemos definir conjunto invariante e conjunto atrator. Para mapas, o mais simples conjunto invariante é um *ponto fixo*, i.e. um ponto  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{M}$  tal que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ . Os pontos fixos de mapas estão relacionados com as órbitas periódicas de fluxos através do *mapa de Poincaré*.

Os pontos fixos de mapas podem ser também estáveis, assintoticamente estáveis, neutros ou instáveis de forma semelhante às definições da seção anterior.

Podemos mencionar também os pontos periódicos, i.e. pontos que satisfazem  $\mathbf{f}^m(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  para algum (valor mínimo)  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Esse ponto também será chamado de *ponto m-periódico* do mapa  $\mathbf{f}$ . O número  $m$  é o período da órbita de  $\mathbf{x}$ . Claramente, cada ponto  $\mathbf{f}^i(\mathbf{x}^*)$ , com  $i \leq m - 1$ , de uma órbita de período  $m$  é também um ponto de período  $m$ . Esses pontos são os análogos de órbitas periódicas de fluxos, o que implica mais interseções com uma seção de Poincaré.

### 2.1.3 Conjugação de Fluxos e Difeomorfismos

Um dos objetivos da teoria de sistemas dinâmicos é classificar a dinâmica qualitativamente. Muitas vezes estudamos sistemas para os quais todos os sistemas próximos possuem uma dinâmica qualitativamente equivalente. Assim, se precisa de uma noção de *proximidade* e de *equivalência*.

A ideia de *proximidade* está relacionada com as possíveis perturbações dos parâmetros do sistema. Dois sistemas são ditos *equivalentes* se seus espaços de fase têm a mesma dimensão e os respectivos retratos de fase possuem o mesmo número e tipo de conjuntos invariantes na mesma posição em relação um ao outro. Para entender essa definição usamos conceitos topológicos, em particular o de *homeomorfismo* que é uma função contínua definida sobre o espaço de fase e cuja inversa também é contínua.

**Definição 2.9.** *Sejam os fluxos  $\varphi, \psi : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ . Dizemos que  $\varphi$  e  $\psi$  são  $C^k$ -conjugados, se existir um difeomorfismo de classe  $C^k$ ,  $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , tal que  $h \circ \varphi^t = \psi^t \circ h$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

A conjugação de dois difeomorfismos  $f, g$  é definida de maneira semelhante.

Note que  $h$  pode não estar definida sobre toda a variedade  $\mathcal{M}$ , mas sim numa vizinhança de algum ponto de  $\mathcal{M}$ , então,  $\varphi$  e  $\psi$  (respectivamente  $f$  e  $g$ ) são ditos *localmente  $C^k$ -conjugados*.

A definição anterior significa que  $h$  leva cada órbita de  $\varphi$  (respectivamente de  $f$ ) para uma órbita de  $\psi$  (respectivamente de  $g$ ) preservando o parâmetro  $t$  (respectivamente  $m$ ), i.e.

$$h(\varphi^t(x)) = \psi^t(h(x)), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

ou também

$$h(f^m(x)) = g^m(h(x)), \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Suponha que  $\varphi$  e  $\psi$  são dois fluxos correspondendo às EDOs  $\dot{x} = \mathcal{F}(x)$  e  $\dot{y} = \mathcal{G}(y)$ . Então diferenciando a equação 2.4 com respeito a  $t$  e avaliando em  $t = 0$  obtém-se

$$\left[ Dh(\varphi^t(x)) \frac{d\varphi^t(x)}{dt} \right] \Big|_{t=0} = \frac{d\psi^t(h(x))}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Por outro lado, usando o fato que  $\varphi^0 = \text{Id}_{\mathcal{M}}$ , tem-se

$$Dh(x)\mathcal{F}(x) = \mathcal{G}(h(x)).$$

Considerando agora a mudança  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$  para  $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}(\mathbf{x})$  dá como resultado

$$\dot{\mathbf{y}} = Dh(x)\dot{\mathbf{x}} = Dh(x)\mathcal{F}(x) = \mathcal{G}(h(x)) = \mathcal{G}(\mathbf{y}).$$

Então,  $h$  transforma a equação diferencial  $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}(\mathbf{x})$  com fluxo  $\varphi$ , na equação  $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{G}(\mathbf{y})$  com fluxo  $\psi$ .

#### 2.1.4 Propriedades Locais de Fluxos e Difeomorfismos

Seja  $\mathbf{x}^*$  um ponto estacionário do fluxo  $\varphi$  da equação  $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}(\mathbf{x})$ . A linearização de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}(\mathbf{x})$  em  $\mathbf{x}^*$  é a equação diferencial linear

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathcal{F}(\mathbf{x}^*)\mathbf{y},$$

onde

$$D\mathcal{F}(\mathbf{x}^*) = \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \right]_{i,j=1}^n$$

e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  são coordenadas locais em  $\mathbf{x}^*$ .

**Definição 2.10.** O ponto estacionário  $\mathbf{x}^*$  é dito **hiperbólico** se todos os autovalores de  $D\mathcal{F}(\mathbf{x}^*)$  têm parte real diferente de zero.

**Teorema 2.2** (Hartman-Grobman). Para o ponto estacionário hiperbólico  $\mathbf{x}^*$  existe uma vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $\mathbf{x}^*$  onde  $\varphi$  é topologicamente conjugado ao fluxo linear  $\exp(D\mathcal{F}(\mathbf{x}^*)t)$ .<sup>1</sup>

Um ponto estacionário com  $n_s > 0$  autovalores de parte real negativa e  $n_u > 0$  autovalores de parte real positiva é chamado de **ponto sela**. Sobre uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\mathbf{x}^*$  podemos definir as variedades estável e instável,  $\mathcal{W}^s(\mathbf{x}^*)$  e  $\mathcal{W}^u(\mathbf{x}^*)$  como os conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^s(\mathbf{x}^*) &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} : \varphi^t(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}^*, t \rightarrow +\infty\}, \\ \mathcal{W}^u(\mathbf{x}^*) &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} : \varphi^t(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}^*, t \rightarrow -\infty\}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Lembre-se que, dada uma transformação linear  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , o correspondente fluxo linear da equação diferencial  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  é dado por  $\exp(\mathbf{A}t)$ .

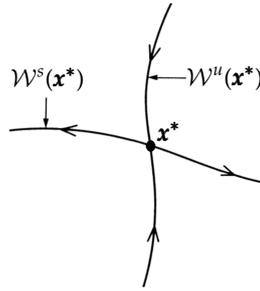


Figura 4: Variedades estável e instável para um sistema bidimensional com ponto fixo hiperbólico de tipo sela,  $\mathbf{x}^*$ . Figura reproduzida da referência [9].

A variedade estável  $\mathcal{W}^s(\mathbf{x}^*)$  é de dimensão  $n_s$  e é tangente ao espaço estável de  $D\mathcal{F}(\mathbf{x}^*)$  no ponto  $\mathbf{x}^*$ . Similarmente  $\mathcal{W}^u(\mathbf{x}^*)$  é de dimensão  $n_u$  e é tangente em  $\mathbf{x}^*$  ao espaço instável de  $D\mathcal{F}(\mathbf{x}^*)$ . Claramente, tanto  $\mathcal{W}^s(\mathbf{x}^*)$  como  $\mathcal{W}^u(\mathbf{x}^*)$  são conjuntos invariantes. Além disso, não podem ter autointerseções por causa do teorema de existência e unicidade.

Para o caso de difeomorfismos as definições anteriores são similares.

**Definição 2.11.** Um ponto fixo  $\mathbf{x}^*$  do difeomorfismo  $f$  é dito **hiperbólico** se todos os autovalores de sua linearização,  $Df(\mathbf{x}^*)$ , têm módulo diferente da unidade.

**Teorema 2.3** (Hartman-Grobman). Seja  $\mathbf{x}^*$  um ponto fixo hiperbólico do difeomorfismo  $f$ . Então, existe uma vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $\mathbf{x}^*$  e uma vizinhança  $\mathcal{N}'$  contendo a origem tal que  $f/\mathcal{N}$  é topologicamente conjugado a  $Df(\mathbf{x}^*)/\mathcal{N}'$ .

Similarmente com os fluxos, se a linearização tem  $n_s > 0$  autovalores de parte real negativa e  $n_u > 0$  autovalores de parte real positiva então sobre uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\mathbf{x}^*$  podem-se definir as variedades estável e instável de  $f$  como

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^s(\mathbf{x}^*) &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} : f^m(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}^*, m \rightarrow +\infty\}, \\ \mathcal{W}^u(\mathbf{x}^*) &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} : f^m(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}^*, m \rightarrow -\infty\}.\end{aligned}$$

Note que no caso de mapas, a diferença de fluxos onde uma variedade unidimensional é composta de uma única trajetória, uma variedade unidimensional contém muitas órbitas. Assim as variedades estáveis e instáveis em mapas podem se cruzar transversalmente. No caso de fluxos, se as duas variedades se cruzarem, devem fazê-lo ao longo

de uma linha, i.e. devem ter uma trajetória comum.

O comportamento de  $\mathcal{W}^{s,u}(\mathbf{x}^*)$  tem um profundo efeito na dinâmica de  $f$  já que se  $\mathcal{W}^s(\mathbf{x}^*)$  e  $\mathcal{W}^u(\mathbf{x}^*)$  se cruzarem transversalmente num ponto, isso vai acontecer infinitas vezes resultando assim um *emaranhado homoclínico*. Para fluxos, no caso  $\mathcal{W}^u(\mathbf{x}^*) = \mathcal{W}^s(\mathbf{x}^*)$ , temos uma *conexão homoclínica*.

Da mesma forma, se  $\mathbf{x}_1^*$  e  $\mathbf{x}_2^*$  são dois pontos fixos hiperbólicos de  $f$  de forma que  $\mathcal{W}^u(\mathbf{x}_1^*) \cap \mathcal{W}^s(\mathbf{x}_2^*) \neq \emptyset$  resulta um *emaranhado heteroclínico*. No caso de serem pontos estacionários do fluxo  $\varphi$ , se  $\mathcal{W}^u(\mathbf{x}_1^*) = \mathcal{W}^s(\mathbf{x}_2^*)$  temos uma *conexão heteroclínica*.

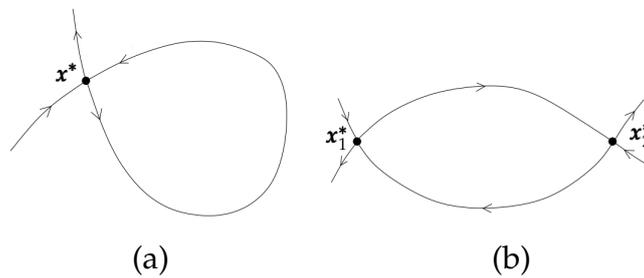


Figura 5: Conexões: (a) Homoclínica. (b) Heteroclínica.

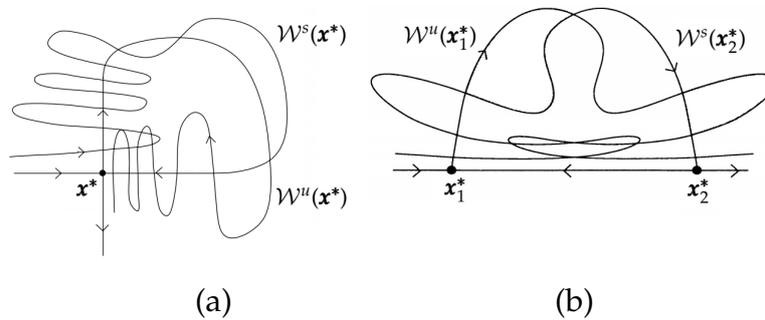


Figura 6: Emaranhados: (a) Homoclínico. (b) Heteroclínico.

### 2.1.5 Mapas de Poincaré

Já vimos que existe uma importante conexão entre fluxos e mapas. Essa conexão vai ser agora colocada em forma mais precisa. Um conceito importante da dinâmica de um conjunto de EDOs é o de solução periódica. Esse conceito fornece uma maneira natural de definir mapas através de fluxos. Seja  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$  e considere um ciclo limite de período

$T$ , i.e.  $\boldsymbol{\varphi}(t + T, \mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}_0)$ . Para estudar a dinâmica próxima dessa órbita podemos construir uma *seção de Poincaré* que é uma subvariedade  $\Pi$  de dimensão  $n - 1$  e que é transversal ao fluxo em  $\mathbf{x}_0$ . Podemos supor que  $\Pi$  pode ser escrita na forma

$$\Pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \pi(\mathbf{x}) = 0\}, \quad (2.5)$$

para alguma função escalar  $\pi$ . A condição de transversalidade significa que o vetor normal a  $\Pi$  em  $\mathbf{x}_0$  tem componente diferente de zero na direção do campo de velocidades, então

$$\nabla \pi(\mathbf{x}_0) \cdot \mathcal{F}(\mathbf{x}_0) \neq 0. \quad (2.6)$$

Agora podemos usar o fluxo  $\boldsymbol{\varphi}$  para definir um mapa  $\mathcal{P} : \mathcal{V} \subseteq \Pi \rightarrow \Pi$ , onde  $\mathcal{V}$  é uma vizinhança de  $\mathbf{x}_0$ . Esse mapa é chamado de *mapa de Poincaré* e é definido como

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(\tau, \mathbf{x}),$$

onde  $\tau = \tau(\mathbf{x})$  é definido como o tempo mais próximo a  $T$  tal que  $\pi(\boldsymbol{\varphi}(\tau, \mathbf{x})) = 0$ .

Pelo teorema da função implícita, a transversalidade garante que há localmente uma única solução para  $\tau(\mathbf{x})$ . Note também que pela construção feita  $\tau(\mathbf{x}_0) = T$  e  $\mathcal{P}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ .

Os mapas de Poincaré nem sempre precisam de uma órbita periódica para ser definidos. Uma seção de Poincaré  $\Pi$  pode ser escolhida em qualquer parte do espaço de fase sempre que for transversa ao fluxo.

Novamente, se  $\Pi$  é dada como em 2.5, então os pontos sobre os quais definimos o mapa de Poincaré são os que satisfazem 2.6. O mapa é definido pela primeira interseção com  $\Pi$  do mesmo sentido que no caso anterior, i.e.  $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(\tau, \mathbf{x})$  onde  $\tau = \tau(\mathbf{x})$  é o primeiro tempo tal que  $\pi(\boldsymbol{\varphi}(\tau, \mathbf{x})) = 0$ . Note que o mapa  $\mathcal{P}$  pode não estar definido sobre toda a seção de Poincaré já que nem todos os pontos necessariamente retornam a essa seção.

Uma das vantagens que fornece estudar mapas de Poincaré é que a dimensão das variedades que estamos considerando é diminuída em um. Assim, os ciclos limites dos fluxos correspondem a pontos fixos isolados do mapa de Poincaré e os conjuntos invariantes caóticos diminuem em um sua dimensão fractal (estudaremos conjuntos caóticos no seção 2.2.2).

Pode-se demonstrar que, se escolhermos duas subvariedades transversais  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$ , então os respectivos mapas de Poincaré  $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$  e  $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$  são localmente  $C^k$ -conjugados [9] e assim como consequência da análise feita na seção 2.1.3, temos que uma mudança da seção transversal não tem nenhum efeito na dinâmica das soluções nem sobre o tipo de estabilidade dos pontos fixos.

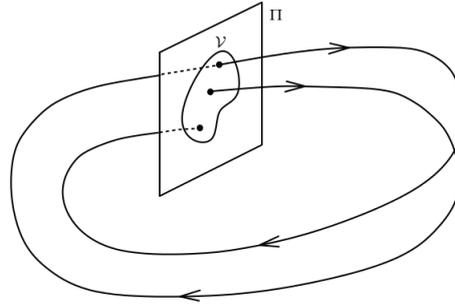


Figura 7: Mapa de Poincaré próximo a uma órbita periódica. Figura reproduzida da referência [9].

## 2.2 SISTEMAS HAMILTONIANOS

Nesta seção serão estudadas as propriedades dos campos vetoriais hamiltonianos e sua dinâmica. Também estudamos o caos que resulta da perturbação periódica de um sistema hamiltoniano que apresenta conexões heteroclínicas. A existência de caos é demonstrada usando o método de Melnikov e o comportamento das trajetórias próximas da conexão heteroclínica é estudado pelo mapa da separatriz.

### 2.2.1 Fundamentos

**Definição 2.12.** *Seja  $\mathcal{U}$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{2n}$  e  $\mathcal{H} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. O sistema de equações diferenciais dadas por*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.7)$$

é chamado de **sistema conservativo hamiltoniano com  $n$  graus de liberdade.**

Para o sistema anterior, a função  $\mathcal{H}$  é chamada de *hamiltoniano*. As equações dadas por 2.7 também são chamadas de *equações de Hamilton*. O estado do sistema no tempo  $t$  é dado por

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix},$$

com  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  e  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ . A configuração,  $\mathbf{q}$ , do sistema é dada pelas  $n$  *coordenadas generalizadas*  $q_i$ . O vetor  $\mathbf{p}$  consiste dos  $n$  *momentos conjugados generalizados*  $p_i$ .

Em geral,  $q_i$  e  $p_i$  mudam com o tempo  $t$  mas  $\mathcal{H}$  não muda já que

$$\dot{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0. \quad (2.8)$$

Então, pode dizer-se que  $\mathcal{H}$  é uma quantidade conservada ou uma constante de movimento. A equação 2.8 significa que  $\mathcal{H}$  é constante sobre as trajetórias do fluxo hamiltoniano  $\varphi_{\mathcal{H}} : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , solução das equações dadas em 2.7. Por isso  $\mathcal{H}$  é chamado de *primeira integral* para 2.7.

O hamiltoniano pode depender explicitamente do tempo. Logo, o sistema 2.7 pode ser considerado sobre um espaço estendido de  $2(N+1)$  variáveis  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}; p_0, q_0)$  com  $p_0 = -\mathcal{H}$  e  $q_0 = t$ , com o novo hamiltoniano dado por

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, q_0) + p_0.$$

A definição anterior fornece as mesmas equações de 2.7 mas agora o hamiltoniano é  $\mathcal{H}_0$ . Note que as igualdades  $\mathcal{H}_0 \equiv 0$  e  $p_0 = -\mathcal{H}$  não fornecem informação nenhuma e por esse motivo dizemos que o sistema com o hamiltoniano  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$  possui  $n + 1/2$  graus de liberdade.

Sejam  $f = f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  e  $g = g(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  duas funções arbitrárias. Definimos os *colchetes de Poisson* de  $f$  e  $g$  através da igualdade

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right), \quad (2.9)$$

assim as equações

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= [q_i, \mathcal{H}], \\ \dot{p}_i &= [p_i, \mathcal{H}], \end{aligned}$$

coincidem com as equações de Hamilton dadas em 2.7.

Uma propriedade importante para fluxos hamiltonianos é que preservam volumes do espaço de fases como enunciado no seguinte teorema.

**Teorema 2.4** (De Liouville). *Seja  $\boldsymbol{\varphi}$  o fluxo de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}(\mathbf{x})$ , seja também  $\Omega(t)$  o volume da imagem de qualquer região  $D$  do espaço de fases no tempo  $t$ , i.e. de  $\boldsymbol{\varphi}^t(D)$ . Se  $\nabla \cdot \mathcal{F} \equiv 0$ , então  $\boldsymbol{\varphi}$  preserva volume, i.e.  $\Omega(t) = \Omega(0)$  para todo  $t$  real.*

*Demonstração:*

Vide [7].

■

Para o campo vetorial  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n}, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} \right)$  tem-se

$$\nabla \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \right] \equiv 0.$$

Então, usando o teorema anterior temos que os fluxos hamiltonianos preservam volumes do espaço de fases.

### 2.2.2 Caos de Separatriz

Consideremos um sistema hamiltoniano integrável possuindo uma conexão do tipo sela homoclínica (ou duas conexões do tipo sela heteroclínica). Essas conexões separam trajetórias que têm diferentes topologias no espaço de fase e por isso são chamadas de *separatrizes*. Se adicionarmos uma pequena perturbação periódica essas separatrizes são quebradas e são substituídas por uma faixa caótica.

Em sistemas hamiltonianos de baixa dimensão, as regiões próximas de uma separatriz são muito importantes pois permitem estudar o comportamento caótico, já que a dinâmica perto de um ponto sela é sensível a pequenas perturbações. O problema da mudança da dinâmica perto a uma separatriz sob uma perturbação periódica pode ser estudado de forma semelhante.

**Definição 2.13.** Um conjunto invariante fechado e limitado  $\Lambda$  é dito **caótico** se satisfaz as seguintes condições:

1. Apresenta **dependência sensível sobre as condições iniciais**, i.e. existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para qualquer  $\mathbf{x} \in \Lambda$  e qualquer vizinhança  $\mathcal{U} \subset \Lambda$  de  $\mathbf{x}$ , existe  $\mathbf{y} \in \mathcal{U}$  e  $t > 0$  tal que  $|\varphi^t(\mathbf{x}) - \varphi^t(\mathbf{y})| > \varepsilon$ .
2. Apresenta uma trajetória **densa**, i.e. existe um elemento  $\mathbf{x} \in \Lambda$  tal que para cada ponto  $\mathbf{y} \in \Lambda$  e cada  $\varepsilon > 0$  existe um instante  $t$  tal que  $|\varphi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{y}| < \varepsilon$ .

A primeira propriedade diz que as condições iniciais no conjunto invariante divergem entre elas localmente. A segunda propriedade diz que existe pelo menos uma trajetória no conjunto invariante tal que retornará arbitrariamente perto de si, assim como também de todos os pontos do conjunto invariante.

A definição anterior de conjunto invariante caótico também é válida em mapas. A diferença dos fluxos onde o espaço de fase deve ser pelo menos tridimensional, no caso não invertível, os mapas de dimensão um podem apresentar caos. Para mapas invertíveis, precisa-se de pelo menos dimensão dois para a existência de conjuntos invariantes caóticos. Aqui estudamos dois mapas de dimensão dois, os resultados sobre o primeiro mapa são parte do capítulo 4 e do Anexo A e os do segundo mapa estão na seção 5.2.

No caso de mapas bidimensionais pode se demonstrar que a existência de um ponto homoclínico ou heteroclínico implica que em uma vizinhança suficientemente pequena desse ponto existe um conjunto invariante caótico. Em particular estamos interessados nos pontos heteroclínicos. O teorema que afirma o anterior é o teorema de Smale-Birkhoff que é enunciado a seguir.

**Teorema 2.5** (Smale-Birkhoff). *Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo com dois pontos fixos hiperbólicos do tipo sela,  $\mathbf{x}_1^*$  e  $\mathbf{x}_2^*$ , e com um ponto heteroclínico transversal  $\mathbf{q}$ . Então,  $f$  possui um conjunto invariante sobre o que, para alguma iteração  $f^k$ , a dinâmica é caótica.*

*Demonstração:*

Vide [9].



Um método conhecido para provar a existência de pontos heteroclínicos transversais do mapa de Poincaré de alguns tipos de campos bidimensionais foi desenvolvido por Melnikov em 1963 [10]. Usando o teorema de Smale-Birkhoff, podemos garantir que o sistema estudado possui dinâmica caótica.

O caso particular que consideramos é quando o campo vetorial é da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(x, y) + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial y}(x, y, t), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x, y) - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x}(x, y, t),\end{aligned}\tag{2.10}$$

onde  $\mathcal{H}_1$  é periódico no tempo com período  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Note que podemos escrever o sistema anterior de forma autônoma considerando o produto em  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$  definido por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(x, y) + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial y}(x, y, \theta), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x, y) - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x}(x, y, \theta), \\ \dot{\theta} &= \omega.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Suponha que o sistema sem perturbação, i.e. quando  $\varepsilon = 0$ , possui dois pontos fixos hiperbólicos do tipo sela,  $\mathbf{x}_1^*$  e  $\mathbf{x}_2^*$ . Suponha também que existe uma conexão sela  $\Gamma = \mathcal{W}^u(\mathbf{x}_1^*) = \mathcal{W}^s(\mathbf{x}_2^*)$ , unindo esses dois pontos. Considerando novamente o caso  $\varepsilon = 0$ , os pontos sela de 2.10 agora são duas órbitas periódicas,  $\gamma_{1,2} = \{\mathbf{x}_{1,2}^*\} \times \mathcal{S}^1$ , as quais são de tipo sela e com variedades instável e estável  $\mathcal{W}^u(\gamma_1) = \mathcal{W}^u(\mathbf{x}_1^*) \times \mathcal{S}^1$  e  $\mathcal{W}^s(\gamma_2) = \mathcal{W}^s(\mathbf{x}_2^*) \times \mathcal{S}^1$  respectivamente. Essas variedades coincidem sobre o cilindro  $\Gamma \times \mathcal{S}^1$  que deve ser quebrado sob a perturbação.

Para  $\varepsilon > 0$  e suficientemente pequeno é ainda possível encontrar duas órbitas periódicas hiperbólicas  $\gamma_1^\varepsilon$  e  $\gamma_2^\varepsilon$  próximas das órbitas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . No entanto, a variedade  $\mathcal{W}^u(\gamma_1^\varepsilon)$  nem sempre intersecta a variedade  $\mathcal{W}^s(\gamma_2^\varepsilon)$  para formar um cilindro. A função de Melnikov mede a distância entre essas variedades.

Consideremos o plano  $\Sigma_{\theta_0} = \{(\mathbf{x}, \theta) : \theta = \theta_0 \in [0, 2\pi)\}$  com a relação de equivalên-

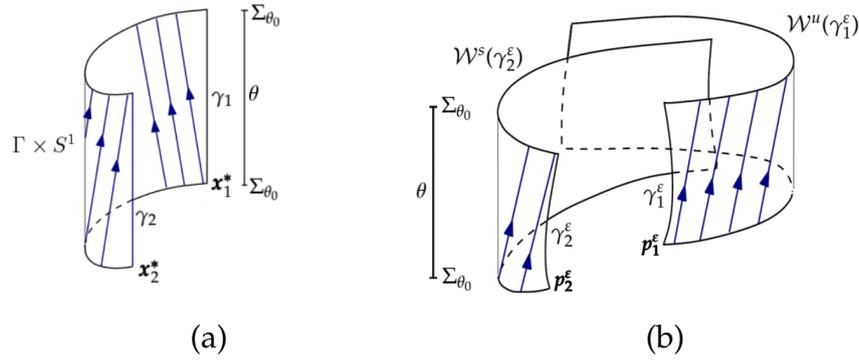


Figura 8: (a) Quando  $\varepsilon = 0$  os pontos fixos de tipo sela de 2.10 são transformados em órbitas periódicas de tipo sela quando se considera o sistema autônomo. A conexão heteroclínica é agora a superfície cilíndrica  $\Gamma \times S^1$ . (b) Quando  $\varepsilon \neq 0$  a superfície cilíndrica é quebrada por causa da perturbação.

cia  $\theta_0 + 2\pi \equiv \theta_0$ . Sobre  $\Sigma_{\theta_0}$  definimos o mapa de Poincaré como o mapa do primeiro retorno na superfície  $\Sigma_{\theta_0}$ , i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\theta_0} : \Sigma_{\theta_0} &\rightarrow \Sigma_{\theta_0} \\ (\mathbf{x}, \theta) &\mapsto \boldsymbol{\varphi}^{\frac{2\pi}{\omega}}(\mathbf{x}, \theta; \varepsilon), \end{aligned}$$

onde  $\boldsymbol{\varphi}^t(\mathbf{x}, \theta; \varepsilon)$  é o fluxo gerado por 2.11. Para  $\mathcal{P}_{\theta_0}$  é possível encontrar dois pontos fixos hiperbólicos do tipo sela  $\mathbf{p}_{1,2}^\varepsilon = \gamma_{1,2}^\varepsilon \cap \Sigma_{\theta_0}$ . Esses pontos estão próximos de  $\mathbf{x}_{1,2}^*$  respectivamente, e suas variedades instável e estável são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^u(\mathbf{p}_1^\varepsilon) &= \mathcal{W}^u(\gamma_1^\varepsilon) \cap \Sigma_{\theta_0}, \\ \mathcal{W}^s(\mathbf{p}_2^\varepsilon) &= \mathcal{W}^s(\gamma_2^\varepsilon) \cap \Sigma_{\theta_0}. \end{aligned}$$

As variedades anteriores estão muito próximas a  $\Gamma \times \{\theta_0\}$ . A distância entre elas, em geral, mudará se  $\theta_0$  muda pois quando  $\varepsilon > 0$  as variedades  $\mathcal{W}^u(\mathbf{p}_1^\varepsilon)$  e  $\mathcal{W}^s(\mathbf{p}_2^\varepsilon)$  dependem de  $\theta_0$ . Obviamente, se  $\varepsilon = 0$ , a distância será zero para todo  $\theta_0$ .

Definimos a função de Melnikov através da integral

$$\mathcal{M}(\theta_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathcal{H}(\lambda(t - \theta_0)), \mathcal{H}_1(\lambda(t - \theta_0), t)] dt,$$

com  $[\mathcal{H}, \mathcal{H}_1]$  os colchetes de Poisson definidos na equação 2.9 e  $\lambda(t)$  a parametrização da conexão heteroclínica  $\Gamma$ .

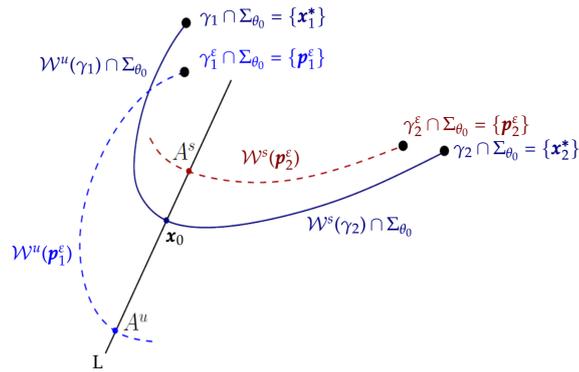


Figura 9: A função de Melnikov mede a distância entre as variedades  $\mathcal{W}^u(\gamma_1^\varepsilon)$  e  $\mathcal{W}^s(\gamma_2^\varepsilon)$  sobre o plano  $\Sigma_{\theta_0}$ , i.e. entre as variedades  $\mathcal{W}^u(\mathbf{p}_1^\varepsilon)$  e  $\mathcal{W}^s(\mathbf{p}_2^\varepsilon)$ .

Note que com a mudança de variável  $t \mapsto t + \theta_0$  a integral anterior pode ser escrita na forma

$$\mathcal{M}(\theta_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathcal{H}(\lambda(t)), \mathcal{H}_1(\lambda(t), t + \theta_0)] dt. \tag{2.12}$$

Para a função anterior temos o seguinte teorema.

**Teorema 2.6.** *Se a função de Melnikov,  $\mathcal{M}(\theta_0)$ , possui zeros simples, então, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno,  $\mathcal{W}^u(\mathbf{p}_1^\varepsilon)$  e  $\mathcal{W}^s(\mathbf{p}_2^\varepsilon)$  se intersectam transversalmente. Se os zeros anteriores não são simples então as variedades anteriores são tangentes. Finalmente, se  $\mathcal{M}(\theta_0)$  é diferente de zero então  $\mathcal{W}^u(\mathbf{p}_1^\varepsilon) \cap \mathcal{W}^s(\mathbf{p}_2^\varepsilon) \equiv \emptyset$ .*

*Demonstração:*

Vide [7] e [9].



É evidente que podemos definir o mapa sobre outra seção transversal pois, por causa da conjugação topológica, as propriedades são mantidas. No caso de existir zeros simples, podemos usar o teorema de Smale-Birkhoff (teorema 2.5) e concluir que o sistema estudado possui comportamento caótico.

### 2.2.3 O Mapa da Separatriz

O mapa da separatriz foi desenvolvido para estudar o comportamento sobre superfícies assintóticas de um sistema dinâmico. Foi inventado por Zaslavsky e Filonenko [11]

para sistemas hamiltonianos quase integráveis de um grau e meio de liberdade. Eles investigaram o movimento unidimensional de uma partícula carregada no campo de uma onda viajando sob perturbação.

Independentemente, Shilnikov [12] inventou o mesmo mapa com a intenção de estudar bifurcações em sistemas genéricos. A principal diferença entre as duas abordagens é que o primeiro mapa determina a dinâmica global perto das separatrizes não perturbadas, mas precisa que o sistema seja integrável. Por outro lado, o mapa da separatriz de Shilnikov não precisa de proximidade à integrabilidade porém trata da dinâmica numa vizinhança de uma órbita homoclínica [13].

Como já é conhecido [14], um sistema hamiltoniano de um grau de liberdade geralmente apresenta dinâmica caótica perto da separatriz quando sofre uma perturbação temporal periódica. Um dos mais simples exemplos ocorre quando o hamiltoniano do sistema perturbado pode ser escrito na forma

$$\mathcal{H}(x, y, t) = \mathcal{H}_0(x, y) + \varepsilon \mathcal{H}_1(x, y, t), \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

com  $\mathcal{H}_1$  periódico na variável temporal. Nesse caso o movimento resultante das partículas está próximo de ser integrável e as órbitas homoclínicas ou heteroclínicas são quebradas.

É possível usar ideias de dinâmica hamiltoniana para estudar a estrutura de regiões regulares e caóticas em um fluxo e mostrar como o fluxo é responsável por aumentar o transporte das partículas. Assim uma apropriada descrição do movimento perto da separatriz é muito importante para uma melhor compreensão do transporte e difusão dentro da faixa estocástica formada pela perturbação.

Em 1979 Chirikov [15] usou o mapa da separatriz para estudar a dinâmica do pêndulo. Posteriormente Chernikov [16] usou essas ideias para obter expressões analíticas para os coeficientes de difusão no regime adiabático de fluxos bidimensionais não estacionários. Outros artigos interessantes são os de Rom-Kedar [17, 18]. Ele classificou fluxos bidimensionais periódicos no tempo usando o mapa da separatriz. Temos que mencionar também o artigo de Trueba [19] onde o mapa da separatriz é usado para estimar a largura da faixa estocástica para um modelo de dinâmica de rastreamento. De forma semelhante ao trabalho de Trueba, usamos o mapa da separatriz para obter a maior

curva regular<sup>2</sup> do mapa de Poincaré de um sistema hamiltoniano com perturbação temporal periódica.

Então, consideremos novamente um sistema hamiltoniano de um grau e meio de liberdade com uma pequena perturbação temporal periódica, i.e. consideremos o sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= J\nabla\mathcal{H}(\mathbf{x}, \theta), \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde  $(\mathbf{x}, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$ . A função  $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \theta) = \mathcal{H}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon\mathcal{H}_1(\mathbf{x}, \theta)$  é o hamiltoniano,  $\mathcal{H}_0$  é o hamiltoniano sem perturbar,  $\varepsilon\mathcal{H}_1$  é a perturbação temporal periódica com período  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  e  $0 < \varepsilon \ll 1$ . A matriz  $J$  é dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para o sistema anterior assumimos que, quando  $\varepsilon = 0$ , a variável espacial apresenta uma conexão heteroclínica  $\Gamma$  com dois pontos fixos hiperbólicos. Então, quando  $\varepsilon = 0$ , consideremos uma seção  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$  intersectando transversalmente à separatriz  $\Gamma$ . Logo, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, o conjunto  $\Sigma \times \mathcal{S}^1$  é ainda transversal às soluções do sistema 2.13. Seja  $\boldsymbol{\varphi}^t(\mathbf{x}_0, \theta_0)$  o fluxo de 2.13 com condição inicial  $(\mathbf{x}_0, \theta_0) \in \Sigma \times \mathcal{S}^1$ . Definimos o mapa de retorno  $S : D \rightarrow \Sigma \times \mathcal{S}^1$  com o conjunto  $D$  dado por

$$D = \{(\mathbf{x}_0, \theta_0) \in \Sigma \times \mathcal{S}^1 : \exists \tau > 0, \boldsymbol{\varphi}^\tau(\mathbf{x}_0, \theta_0) \in \Sigma \times \mathcal{S}^1\}.$$

Note que  $D$  está mais próximo de um dos ramos da curva  $\Gamma$  que foi quebrada com a perturbação  $\varepsilon > 0$  e que  $\tau$  é o primeiro tempo de retorno da curva na superfície  $\Sigma \times \mathcal{S}^1$ . Para cada interseção com a superfície dada calculamos o valor do hamiltoniano sem perturbação, i.e. temos uma sequência de valores da forma

$$\mathcal{H}_0^n = \mathcal{H}_0(x_n, y_n),$$

onde  $(x_n, y_n)$  é a posição sobre a superfície na enésima interseção. Por outro lado, o valor do hamiltoniano na seguinte interseção é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^{n+1} &= \mathcal{H}_0^n + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \frac{d\mathcal{H}_0}{d\tau}(x(\tau), y(\tau))d\tau \\ &= \mathcal{H}_0^n + \varepsilon \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} [\mathcal{H}_0(x(\tau), y(\tau)), \mathcal{H}_1(x(\tau), y(\tau), \tau)]d\tau, \end{aligned}$$

2 Maior no sentido de medida de seu interior.

onde  $(x(\tau), y(\tau))$  representa a parametrização da trajetória que passa por  $(x_n, y_n)$ . Seguindo os resultados de Chirikov [15], a variação da função  $\mathcal{H}_0$  pode ser aproximada avaliando a integral anterior sobre a separatriz  $\Gamma$ , e mudando os limites de integração de  $-\infty$  até  $+\infty$ . Então, fazendo um ajuste na fase de  $\mathcal{H}_1$  resulta a expressão aproximada

$$\mathcal{H}_0^{n+1} \approx \mathcal{H}_0^n + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathcal{H}_0(x_\Gamma(\tau), y_\Gamma(\tau)), \mathcal{H}_1(x_\Gamma(\tau), y_\Gamma(\tau), \tau + \tau^n)] d\tau.$$

Onde  $(x_\Gamma(\tau), y_\Gamma(\tau))$  representa a parametrização de  $\Gamma$ . Note que a integral na equação anterior é precisamente a função de Melnikov,  $\mathcal{M}(\tau^n)$ , definida na equação 2.12. Assim, temos que o valor  $\mathcal{H}_0^{n+1}$  é aproximado por

$$\mathcal{H}_0^{n+1} \approx \mathcal{H}_0^n + \varepsilon \mathcal{M}(\tau^n).$$

Por outro lado, o tempo entre  $\tau^n$  e  $\tau^{n+1}$  é aproximado pelo período da órbita sem perturbação com hamiltoniano  $\mathcal{H}_0^{n+1}$ , o que denotaremos por  $T(\mathcal{H}_0^{n+1})$ . Finalmente, o mapa da separatriz é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^{n+1} &= \mathcal{H}_0^n + \varepsilon \mathcal{M}(\tau^n), \\ \tau^{n+1} &= \tau^n + T(\mathcal{H}_0^{n+1}). \end{aligned}$$

Note que, quando as trajetórias escolhidas estão mais próximas da separatriz não perturbada, muito melhores serão as aproximações fornecidas pelo mapa da separatriz. Por isso, esperamos que a melhor aproximação seja no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , i.e. quando a faixa caótica é muito fina.

É importante ressaltar a simplicidade do mapa da separatriz. O mapa depende apenas da função de Melnikov e do período da órbita sem perturbação. Portanto, esse mapa pode ser usado para estudar a dinâmica toda vez que uma órbita heteroclínica é quebrada por perturbação. Além disso, já que essas funções podem ser armazenadas e calculadas com antecedência, a iteração numérica do mapa da separatriz é bastante rápida.

Como dissemos antes, usamos o mapa da separatriz para poder obter a maior curva regular do mapa de Poincaré do sistema de equações dado em 2.13. De acordo com [20] se definimos a quantidade

$$K = \max_{\tau_n} \left| \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \tau_n} - 1 \right|,$$

temos que uma instabilidade local acontece quando a condição heurística  $K \geq 1$  é satisfeita. Isso fornece uma aproximação para obter a maior curva regular confinada

$$\max_{\tau_n} \left| \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \tau_n} - 1 \right| = 1.$$

O critério anterior é usado no artigo incluído no Anexo A e também no capítulo 4.

## 2.3 SISTEMAS DINÂMICOS DESCONTÍNUOS

Muitos problemas de teoria de controle, economia, oscilações não lineares, além de problemas de engenharia, biologia e medicina, geralmente conduzem ao estudo de equações diferenciais definidas por campos vetoriais descontínuos. Em [21] e no primeiro capítulo de [6] há vários exemplos sobre esse tipo de problemas. Geralmente obtemos modelos desse tipo quando definimos dois ou mais campos vetoriais em diferentes regiões do espaço fase e separados por conjuntos de descontinuidade que, em particular, podem ser definidos como subvariedades de codimensão 1.

**Definição 2.14** (di Bernardo, [6]). *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade de dimensão  $n$ . Um mapa suave por partes é descrito por um conjunto finito de mapas suaves*

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}_i,$$

onde  $\cup_i \mathcal{M}_i = \mathcal{M}$  e cada  $\mathcal{M}_i$  tem interior não vazio. A interseção,  $\Sigma_{ij}$ , entre o fecho dos conjuntos  $\mathcal{M}_i$  e  $\mathcal{M}_j$ , i.e.  $\Sigma_{ij} = \overline{\mathcal{M}_i} \cap \overline{\mathcal{M}_j}$ , é ou uma subvariedade de co-dimensão 1 incluída nas fronteiras  $\partial \mathcal{M}_i$  e  $\partial \mathcal{M}_j$  ou é o conjunto vazio. Cada função  $\mathbf{f}_i$  é suave tanto no estado  $\mathbf{x}$  quanto no parâmetro  $\boldsymbol{\mu}$  sobre qualquer subconjunto aberto  $U \subset \mathcal{M}_i$ .

O conjunto  $\Sigma_{ij}$  da definição anterior é chamado de *fronteira de descontinuidade*. Por outro lado, note que existe a possibilidade que, sobre  $\Sigma_{ij}$ , algum dos mapas  $\mathbf{f}_i$  não seja suave ou que  $\mathbf{f}_i \neq \mathbf{f}_j$ . No último caso existe um salto no estado e assim o mapa é um mapa descontínuo. Esse problema pode ser resolvido definindo algum valor para o mapa sobre  $\Sigma_{ij}$ , esse valor é escolhido do conjunto das combinações convexas  $\{\mathbf{f}_i + \lambda(\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_i) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ . Obviamente essa escolha produz uma pequena diferença na dinâmica do mapa porém não é importante porque acontece sobre um conjunto de medida zero.

**Definição 2.15** (di Bernardo, [6]). *Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade de dimensão  $n$ . Um **fluxo suave por partes** é dado por um conjunto finito de equações diferenciais*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}_i, \tag{2.14}$$

onde  $\cup_i \mathcal{M}_i = \mathcal{M}$  e cada  $\mathcal{M}_i$  tem interior não vazio. A interseção,  $\Sigma_{ij}$ , entre o fecho dos conjuntos  $\mathcal{M}_i$  e  $\mathcal{M}_j$ , i.e.  $\Sigma_{ij} = \overline{\mathcal{M}_i} \cap \overline{\mathcal{M}_j}$ , é ou uma subvariedade de co-dimensão 1 incluída nas fronteiras  $\partial \mathcal{M}_i$  e  $\partial \mathcal{M}_j$  ou é o conjunto vazio. Cada campo vetorial  $\mathcal{F}_i$  é suave tanto no estado  $\mathbf{x}$  quanto no parâmetro  $\boldsymbol{\mu}$  e define um fluxo suave  $\boldsymbol{\varphi}_i^t(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu})$  sobre qualquer subconjunto aberto  $U \supset \mathcal{M}_i$ . Em particular, cada fluxo  $\boldsymbol{\varphi}_i$  está bem definido sobre ambos os lados da fronteira  $\mathcal{M}_i$ .

De forma semelhante aos mapas, o conjunto  $\Sigma_{ij}$  será chamado de **fronteira de descontinuidade**.

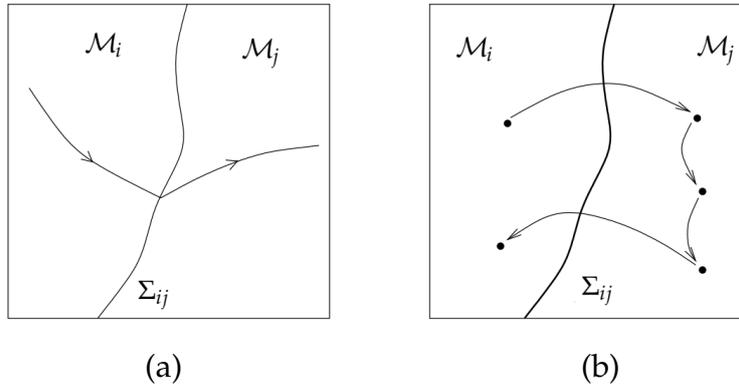


Figura 10: Representação esquemática das trajetórias de um sistema dinâmico contínuo por partes: (a) Campo vetorial. (b) Mapa. Figura reproduzida da referência [6].

**Definição 2.16** (di Bernardo, [6]). *O **grau de suavidade** no ponto  $\mathbf{x}_0 \in \Sigma_{ij}$  do sistema de equações diferenciais dado em 2.14 é o maior ordem  $r$  tal que as expansões em séries de Taylor com respeito a  $t$  e avaliadas em  $t = 0$  de  $\boldsymbol{\varphi}_i^t(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\mu})$  e  $\boldsymbol{\varphi}_j^t(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\mu})$  coincidem até os termos de ordem  $\mathcal{O}(t^{r-1})$ .*

Note que a definição anterior significa que o grau de suavidade em  $\mathbf{x}_0 \in \Sigma_{ij}$  é  $r$  se a primeira derivada parcial diferente de zero com respeito a  $t$  e avaliada em  $t = 0$  de  $\boldsymbol{\varphi}_i^t(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\varphi}_j^t(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\mu})$  é de ordem  $r$ .

**Definição 2.17.** *A fronteira de descontinuidade  $\Sigma_{ij}$  é chamada de **uniformemente descontínua com grau  $r$**  se o grau de suavidade do sistema é  $r$  para todos os pontos  $\mathbf{x} \in \Sigma_{ij}$ .*

Da definição anterior temos que o grau de suavidade é 1 se  $\mathcal{F}_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}) - \mathcal{F}_j(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}) \neq \mathbf{0}$  para todo  $\mathbf{x} \in \Sigma_{ij}$ . Os sistemas com grau de suavidade 1 são chamados de *sistemas de Filippov*. No capítulo 1 de [6] podemos ver alguns exemplos desse tipo de sistemas.

Consideremos em particular só um conjunto de descontinuidade  $\Sigma$  e assumamos que pode ser escrito na forma  $\Sigma = h^{-1}(0)$ , onde  $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  é suficientemente diferenciável e 0 é um valor regular<sup>3</sup>. Então  $\Sigma$  divide  $\mathcal{M}$  em duas regiões

$$\begin{aligned}\Sigma^+ &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{M} : h(\mathbf{x}) > 0\}, \\ \Sigma^- &= \{\mathbf{x} \in \mathcal{M} : h(\mathbf{x}) < 0\}.\end{aligned}$$

Sobre  $\mathcal{M}$  definimos a equação diferencial  $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu})$  de forma que  $\mathcal{F}$  está dado por

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}) = \begin{cases} \mathcal{X}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma^+, \\ \mathcal{Y}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma^-. \end{cases} \quad (2.15)$$

Note que para definir o fluxo  $\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{F}}(t, \mathbf{x}; \boldsymbol{\mu})$ , i.e. para calcular a solução de 2.15 que passa pelo ponto  $\mathbf{x}$ , precisamos que o campo de velocidades se aproxime do conjunto  $\Sigma$  por um dos lados e que o deixe pelo outro. Nesse caso a solução não satisfaz a EDO sobre  $\Sigma$ . No entanto, se o campo de velocidades se aproximar de  $\Sigma$  (ou se afastar) por ambos os lados, então já não é possível definir uma solução depois do campo atingir (ou antes de deixar) a superfície  $\Sigma$ .

Para formalizar o dito anteriormente, usamos a derivada de Lie da função  $h$  no ponto  $\mathbf{x}$  e ao longo do campo  $\mathcal{F}$ , que é definida como  $\mathcal{F}h(\mathbf{x}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) \cdot \nabla h(\mathbf{x})$ . Então, seguindo o estabelecido por Filippov [22] temos os seguintes casos:

- I) **Região de Costura:**  $\Sigma^c = \{\mathbf{x} \in \Sigma : \mathcal{X}h(\mathbf{x})\mathcal{Y}h(\mathbf{x}) > 0\}$ . Nesse caso um ponto no espaço de fase atravessa  $\Sigma$  na região  $\Sigma^c$ .
- II) **Região de Deslize:**  $\Sigma^d = \{\mathbf{x} \in \Sigma : \mathcal{X}h(\mathbf{x}) < 0, \mathcal{Y}h(\mathbf{x}) > 0\}$ . Nesse caso um ponto do espaço de fase que atravessa  $\Sigma^d$  permanece tangente a  $\Sigma$  para  $t > 0$ . Nessa região, tanto  $\mathcal{X}$  quanto  $\mathcal{Y}$  apontam para dentro de  $\Sigma$ .
- III) **Região de Escape:**  $\Sigma^e = \{\mathbf{x} \in \Sigma : \mathcal{X}h(\mathbf{x}) > 0, \mathcal{Y}h(\mathbf{x}) < 0\}$ . Nesse caso um ponto do espaço de fase que escapa de  $\Sigma^e$  permanece tangente a  $\Sigma$  para  $t < 0$ . Nessa região, tanto  $\mathcal{X}$  quanto  $\mathcal{Y}$  apontam para fora de  $\Sigma$ .

<sup>3</sup> Seja  $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , um valor regular é um ponto na imagem de  $h$  tal que sua pré-imagem consiste de pontos regulares, i.e. pontos onde  $\nabla h \neq \mathbf{0}$ .

As três regiões anteriores são relativamente abertas em  $\Sigma$  e podem ter várias componentes conexas. Portanto sua definição exclui o caso dos *pontos de tangência* que são os pontos onde um dos campos vetoriais é tangente a  $\Sigma$ . Esses pontos são caracterizados por  $\mathbf{x} \in \Sigma$  tais que  $\mathcal{X}h(\mathbf{x})\mathcal{Y}h(\mathbf{x}) = 0$ . Os pontos de tangência estão localizados sobre as fronteiras das regiões  $\Sigma^c$ ,  $\Sigma^d$  e  $\Sigma^e$ , denotamos essas fronteiras por  $\partial\Sigma^c$ ,  $\partial\Sigma^d$  e  $\partial\Sigma^e$  respectivamente. Os pontos de tangência também incluem os casos  $\mathcal{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  ou  $\mathcal{Y}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , i.e. quando um dos campos vetoriais tem um ponto singular sobre  $\Sigma$ .

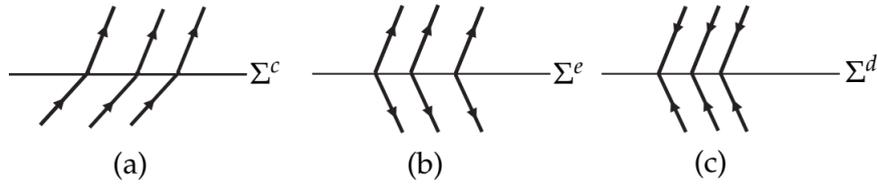


Figura 11: Representação esquemática das regiões que podem existir sobre a variedade de descontinuidade: (a) Costura. (b) Escape. (c) Deslize.

Com as definições anteriores é possível generalizar, para sistemas de Filippov, o conceito de órbita dado na seção 2.1.1.

**Definição 2.18.** Seja  $\mathbf{x} \in \Sigma^+$  tal que  $\mathcal{X}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ , a órbita local é dada por  $\varphi_{\mathcal{F}}(t, \mathbf{x}) = \varphi_{\mathcal{X}}(t, \mathbf{x})$ . No caso  $\mathbf{x} \in \Sigma^-$  tal que  $\mathcal{Y}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  é dada por  $\varphi_{\mathcal{F}}(t, \mathbf{x}) = \varphi_{\mathcal{Y}}(t, \mathbf{x})$ .

**Definição 2.19.** Seja  $\mathbf{x} \in \Sigma^c$  tal que  $\mathcal{X}h(\mathbf{x}) > 0$  e  $\mathcal{Y}h(\mathbf{x}) > 0$ . Defina-se a órbita local como  $\varphi_{\mathcal{F}}(t, \mathbf{x}) = \varphi_{\mathcal{Y}}(t, \mathbf{x})$  para  $t \leq 0$  e  $\varphi_{\mathcal{F}}(t, \mathbf{x}) = \varphi_{\mathcal{X}}(t, \mathbf{x})$  para  $t \geq 0$ . No caso  $\mathcal{X}h(\mathbf{x}) < 0$  e  $\mathcal{Y}h(\mathbf{x}) < 0$  a definição é a mesma com o tempo invertido.

No caso que  $\mathbf{x} \in \Sigma^d \cup \Sigma^e$  podemos usar a convenção de Filippov para definir uma órbita local. Assim, consideramos o *campo vetorial deslizante*,  $\mathcal{F}^s$ , que é dado pela combinação linear de  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  e tangente a  $\Sigma$ , i.e.

$$\mathcal{F}^s(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{Y}h(\mathbf{x})\mathcal{X}(\mathbf{x}) - \mathcal{X}h(\mathbf{x})\mathcal{Y}(\mathbf{x})}{\mathcal{Y}h(\mathbf{x}) - \mathcal{X}h(\mathbf{x})}. \quad (2.16)$$

**Definição 2.20.** Seja  $\mathbf{x} \in \Sigma^d \cup \Sigma^e$  tal que  $\mathcal{F}^s(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ . Defina-se a órbita local como  $\varphi_{\mathcal{F}}(t, \mathbf{x}) = \varphi_{\mathcal{F}^s}(t, \mathbf{x})$  onde  $\varphi_{\mathcal{F}^s}$  é o fluxo associado ao campo deslizante definido em 2.16.

**Definição 2.21.** Seja  $\mathbf{x} \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^d \cup \partial\Sigma^e$  tal que a definição de órbita sobre ambos os lados da respectiva fronteira pode ser estendida até  $\mathbf{x}$  e coincidir. Então a órbita através de  $\mathbf{x}$  é essa órbita. Esses pontos são chamados de **pontos de tangência regular**.

Para qualquer outro ponto define-se  $\varphi_{\mathcal{F}}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ . Esse caso corresponde aos pontos de tangência que não satisfazem a definição anterior, os quais são chamados de **pontos de tangência singular**. Também corresponde aos pontos singulares de  $\mathcal{X}$  sobre  $\Sigma^+$ , de  $\mathcal{Y}$  sobre  $\Sigma^-$  e de  $\mathcal{F}^s$  sobre  $\Sigma^d \cup \Sigma^e$ .

Concluimos que a solução de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}(\mathbf{x})$  com  $\mathcal{F}$  dado na equação 2.15 compreende todas as soluções da inclusão diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{Y} + \lambda(\mathcal{X} - \mathcal{Y}), \tag{2.17}$$

onde  $\lambda = 0$  se  $h(\mathbf{x}) < 0$ ,  $\lambda = 1$  se  $h(\mathbf{x}) > 0$  e  $\lambda \in (0, 1)$  se  $h(\mathbf{x}) = 0$ . Então, a dinâmica de um sistema suave por partes é uma composição das dinâmicas de  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  e de  $\mathcal{F}^s$ , definido na equação 2.16.

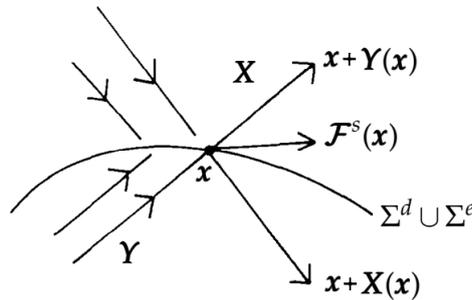


Figura 12: O campo deslizante associado às regiões de escape e deslize.

Finalmente podemos definir a **órbita** ou **trajetória** como o caminho suave por partes que satisfaz a inclusão diferencial 2.17 e formado pela concatenação de órbitas locais, i.e. como o conjunto

$$\gamma_{\mathbf{x}} = \{\varphi_{\mathcal{F}}(t, \mathbf{x}) : t \in \mathbb{R}\}.$$

**Definição 2.22.** Os pontos  $\mathbf{x} \in \Sigma^d \cup \Sigma^e$  que satisfazem  $\mathcal{F}^s(\mathbf{x}) = 0$ , i.e. os pontos singulares do campo deslizante definido em 2.16 são chamados de **pontos de pseudo equilíbrio de  $\mathcal{F}$**  ou de **equilíbrio singular**.

A seguinte definição é uma generalização da definição de singularidade para campos de Filippov.

**Definição 2.23.** Dizemos que  $\mathbf{x}$  é uma singularidade de um campo vetorial de Filippov se

- i)  $\mathbf{x} \in \Sigma^\pm$  tal que  $\mathbf{x}$  é um ponto de equilíbrio de  $\mathcal{X}$  ou de  $\mathcal{Y}$ .
- ii)  $\mathbf{x} \in \Sigma^d \cup \Sigma^e$  tal que  $\mathbf{x}$  é um ponto de pseudo equilíbrio de  $\mathcal{F}$ .
- iii)  $\mathbf{x} \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^d \cup \partial\Sigma^e$ , i.e.  $\mathbf{x}$  é um ponto de tangência regular o singular.

Qualquer outro ponto será chamado de *ponto regular*.

Definimos dois tipos de tangências entre um campo vetorial e uma variedade.

**Definição 2.24.** Dizemos que o ponto  $\mathbf{x} \in \Sigma$  é uma **dobra** do campo  $\mathcal{X}$  (ou que  $\mathcal{X}$  tem **tangência quadrática** sobre  $\Sigma$ ) se  $\mathcal{X}h(\mathbf{x}) = 0$  e  $\mathcal{X}^2h(\mathbf{x}) \neq 0$ .

**Definição 2.25.** Dizemos que o ponto  $\mathbf{x} \in \Sigma$  é uma **cúspide** do campo  $\mathcal{X}$  (ou que  $\mathcal{X}$  tem **tangência cúbica** sobre  $\Sigma$ ) se  $\mathcal{X}h(\mathbf{x}) = \mathcal{X}^2h(\mathbf{x}) = 0$  e  $\mathcal{X}^3h(\mathbf{x}) \neq 0$  e  $\{\nabla h(\mathbf{x}), \nabla(\mathcal{X}h)(\mathbf{x}), \nabla(\mathcal{X}^2h)(\mathbf{x})\}$  é linearmente independente.

Para o campo  $\mathcal{Y}$  definimos de maneira semelhante um ponto de dobra e um ponto cúspide.

**Definição 2.26.** Dizemos que o ponto  $\mathbf{x} \in \Sigma$  é uma singularidade do tipo **dobra-dobra** do campo  $\mathcal{F}$  se  $\mathbf{x}$  é uma dobra para ambos os campos  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  i.e.

$$\mathcal{X}h(\mathbf{x}) = \mathcal{Y}h(\mathbf{x}) = 0 \quad e \quad \mathcal{X}^2h(\mathbf{x})\mathcal{Y}^2h(\mathbf{x}) \neq 0.$$

Os conceitos abordados nesta seção serão fundamentais para a análise do capítulo 3.

# 3

## ELEMENTOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

Um *fluido* é definido como uma substância que é deformada continuamente sob a ação de uma força tangencial a sua área. Essa força é chamada de *esforço cortante*. Em geral, a propriedade definitiva de um fluido, que envolve líquidos e gases, reside na facilidade com que podem ser deformados. Uma peça de matéria sólida possui uma forma definida e essa forma muda somente quando existe uma mudança nas condições externas. Por outro lado, uma porção de fluido não possui uma forma determinada e assim, diferentes porções de um mesmo fluido podem ser reordenados de forma diferente sem mudar suas propriedades macroscópicas.

No entanto, devemos destacar que existem casos em que a distinção entre sólidos e fluidos não é acentuada, uma vez que existem materiais que, em alguns aspectos, se comportam como sólidos e, em outros aspectos, como fluidos. Podemos mencionar, por exemplo os materiais *tixotrópicos* os quais possuem um comportamento dual. Dois exemplos desse tipo de materiais são a pintura e a geleia, os quais se comportam como sólidos elásticos após ter sido deixadas em repouso por um tempo. Porém perdem sua elasticidade ou se comportam como líquidos quando são submetidos a distorções severas. Ainda mais complicado é o comportamento de materiais tais como soluções de polímero concentrado as quais podem exibir simultaneamente um comportamento semelhante a um sólido e um fluido.

Felizmente, os fluidos mais comuns (por exemplo ar e água) são bastantes simples no sentido de não ter o comportamento descrito acima. Isso justifica o fato de ter mais atenção neste tipo de fluidos.

Uma análise completa do comportamento de um fluido deveria levar em conta a ação de cada molécula individual. Em aplicações é mais importante usar as condições médias das propriedades do fluido. Então, em lugar de estudar moléculas separadas,

consideramos o fluido como um contínuo, i.e. uma distribuição contínua de matéria sem espaço vazio. Esta suposição é justificável porque o número de moléculas envolvidas é muito grande e as distâncias entre elas são muito pequenas, assim podemos considerar um fluido como um contínuo. E quando for necessário tomar um pequeno elemento ou uma partícula de fluido, esse elemento é suposto com o tamanho suficiente para conter muitas moléculas.

Podem-se consultar as referências [23], [24] e [25] para aprofundar o conhecimento de fluidos.

### 3.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Nesta seção são dadas algumas definições que interessam no estudo do movimento de um fluido. Definimos como *fluxo* a um fluido em movimento. Geralmente, o fluxo é descrito em função de variáveis físicas como pressão, densidade e velocidade, em todos os pontos do fluido. Essa descrição também está centrada no tempo. Assim, a pressão, a densidade e a velocidade de um fluxo serão dadas por  $p(t, \mathbf{x})$ ,  $\rho(t, \mathbf{x})$  e  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ , respectivamente.

A seguir vamos ver uma breve classificação dos fluxos:

- I) Um *fluxo bidimensional* é aquele que num apropriado sistema de coordenadas possui componentes de velocidade  $v_x$  e  $v_y$  as quais independem de  $z$ , além disso  $v_z = 0$ . Outras variáveis tais como a densidade e temperatura também independem de  $z$ .<sup>1</sup>
- II) Um *fluxo estacionário* é aquele fluxo com velocidade que independe do tempo. Em outras palavras, todas as partículas que passam por um ponto determinado do fluido terão a mesma velocidade. Quando a velocidade depende do tempo, o fluxo é dito *não estacionário*.
- III) Um *fluxo incompressível* é aquele com densidade constante.

<sup>1</sup> Na realidade os fluxos bidimensionais não existem, porém muitas vezes é possível fazer uma aproximação deles. O estudo matemático é muito mais fácil na maioria dos casos. Existem fluidos que têm velocidades quase paralelas à superfície da Terra, e não variam muito num razoável intervalo de altitude [26].

- IV) Um *fluxo viscoso* é o que oferece uma resistência grande a mudanças muito rápidas de forma. No caso contrário dizemos que é *não viscoso*.<sup>2</sup>
- V) Um *fluxo laminar* se caracteriza porque o movimento das partículas do fluido segue trajetórias bastante regulares, separadas e perfeitamente definidas dando a impressão que está formado por um conjunto de lâminas mais ou menos paralelas entre elas.
- VI) Um *fluxo turbulento* é aquele cujas partículas descrevem trajetórias erráticas, i.e. trajetórias muito irregulares sem seguir uma ordem estabelecida.

Como já sabemos, existem basicamente duas maneiras de descrever o movimento de um fluido. A primeira maneira chamada de *descrição lagrangeana* consiste em fixar uma partícula para estudar o que acontece no seu movimento. Assim, se no instante  $t = 0$  a partícula ocupa a posição  $\mathbf{x}_0$ , a ideia é seguir a trajetória da partícula e conhecer a posição dela em qualquer instante de tempo. Evidentemente o vector posição depende das condições iniciais da partícula, i.e.  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ . Se obtemos o valor de  $\mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x}_0$  e todo  $t$  podemos conseguir uma descrição completa do fluxo.

A outra maneira de descrever o movimento de um fluido é chamada de *descrição euleriana*. Neste caso fixamos um ponto  $\mathbf{x}$  no espaço e desejamos conhecer, em função do tempo, as variáveis físicas das partículas que passam nesse ponto. Note que não estamos seguindo uma partícula como na descrição lagrangiana. Se conseguimos fazer o mesmo para todos os pontos do espaço podemos obter também uma descrição completa do fluxo.

Outro conceito muito usado é o de *linha de corrente* que é definida como uma linha contínua no fluido, cuja tangente segue a direção do vector velocidade em cada ponto. O fluxo não atravessa uma linha de corrente, o fluxo é ao longo dela e indica em cada ponto a direção que tem o fluido no seu movimento. Se consideramos várias linhas de corrente num instante particular é possível obter uma boa representação pictórica do fluxo, especialmente para fluxos bidimensionais. Essas curvas, em geral, não são as mesmas que as trajetórias das partículas porém coincidem quando o fluxo é estacionário.

---

<sup>2</sup> Os efeitos da viscosidade serão considerados insignificantes, a menos que o contrário seja estabelecido.

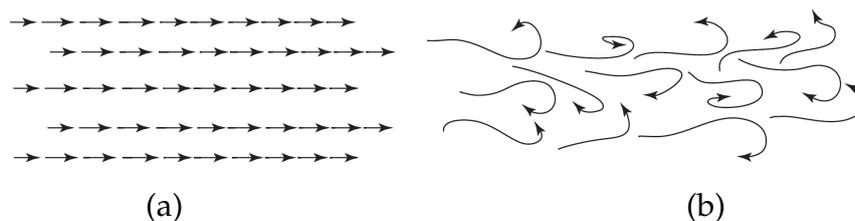


Figura 13: (a) Fluxo laminar. (b) Fluxo turbulento. Figura reproduzida da referência [27].

Considere agora uma descrição euleriana do movimento do fluido com velocidade  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ . A expressão para a aceleração pode ser calculada notando que uma partícula que está na posição  $\mathbf{x}$  no tempo  $t$  se desloca para a posição  $\mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta t$  no tempo  $t + \Delta t$  e que a variação na velocidade é dada por

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta t, t + \Delta t) - \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \Delta t \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] + \mathcal{O}((\Delta t)^2).$$

Então, dividindo os dois lados por  $\Delta t$  e fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$  obtemos que a aceleração é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}.$$

Cálculos semelhantes podem ser feitos para qualquer outra variável física  $\Phi$  que esteja especificada como função de  $\mathbf{x}$  e  $t$  da mesma forma anterior. Essa variável física pode ser tanto escalar quanto vetorial. Note que  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  representa a taxa local de variação devida a variações temporais na posição  $\mathbf{x}$ . Para calcular a taxa total de variação de  $\Phi$  devemos adicionar a taxa convectiva de variação,  $\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi$ , devida ao transporte do elemento para uma posição diferente.

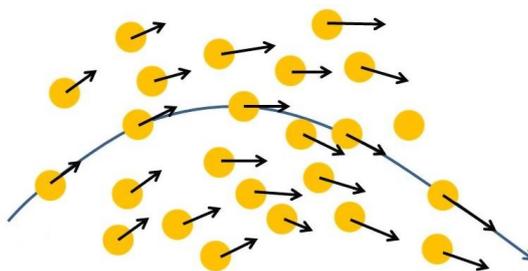


Figura 14: A velocidade é tangente às linhas de corrente.

É conveniente introduzir a notação

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla,$$

e assim, por exemplo, a aceleração de uma partícula no fluxo pode ser escrita como  $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ .

O operador  $\frac{D}{Dt}$  é conhecido como *derivada convectiva* e possui significado somente quando aplicado a uma variável física do fluido. Além disso esse operador dá uma derivada temporal seguindo o fluido em termos de medições eulerianas.

## 3.2 LEIS DE CONSERVAÇÃO

Em termos gerais, a mecânica dos fluidos está baseada em *leis de conservação* para massa, momentum e energia (aqui estudamos brevemente as duas primeiras). Essas leis podem ser estabelecidas na forma diferencial, aplicáveis num ponto, ou podem ser também estabelecidas em forma integral, aplicáveis numa região do fluido. Dois teoremas são importantes no desenvolvimento dessas leis, o *teorema da divergência* e o *teorema de transporte de Reynolds* [28].

### 3.2.1 Conservação da Massa

O princípio de conservação da massa expressa o fato que a matéria não pode ser criada nem destruída. A *equação de continuidade* ou *equação de conservação da massa* é a afirmação matemática desse princípio. Para obtê-la considere uma superfície fechada e arbitrária  $S$  com volume  $\Omega$ , cuja posição é fixa relativa às coordenadas eulerianas e ocupada totalmente por fluido com densidade  $\rho$ . A equação de conservação da massa diz que os fluxos fisicamente existentes satisfazem

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Note também que a equação anterior pode ser escrita na seguinte forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

substituindo a definição de derivada convectiva obtemos

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

No caso de um fluido estacionário e incompressível obtem-se

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{3.1}$$

Também, no caso de fluidos incompressíveis, se impomos a restrição adicional que o fluxo é bidimensional, i.e.  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , obtemos que o vetor divergência dado na equação 3.1 é

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0,$$

isso significa que a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_2}{v_1}$$

é exata. Então existe uma função  $\psi$  tal que

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v_2 &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Assim, o sistema de equações 3.2 é um sistema hamiltoniano cujo hamiltoniano é dado pela função  $\psi$ . No caso de fluidos, essa função é chamada de *função corrente*.

### 3.2.2 Conservação do Momentum

O princípio de conservação de momentum é uma aplicação da segunda lei de Newton ao movimento de um elemento de fluido. Em outras palavras, quando uma massa de fluido é considerada num marco de referência lagrangeano é possível estabelecer que a taxa de variação do momentum da massa do fluido é igual à força total externa atuando sobre a massa.

Duas classes de forças são as que podem atuar sobre uma massa de fluido. A primeira classe está formada pelas *forças de corpo*, i.e. aquelas forças que surgem independentemente de qualquer contato com o fluido tais como as forças gravitacionais ou eletromagnéticas. Essas forças são distribuídas através da massa do fluido e são proporcionais à massa. São expressas por unidade de massa ou por unidade de volume.

A segunda classe está formada pelas *forças de superfície*. Essas forças são exercidas sobre um elemento de área do fluido através de contato direto com o ambiente. São proporcionais à extensão da área e são expressas por unidade de área. A pressão e a tensão de viscosidade são exemplos desse tipo de forças.

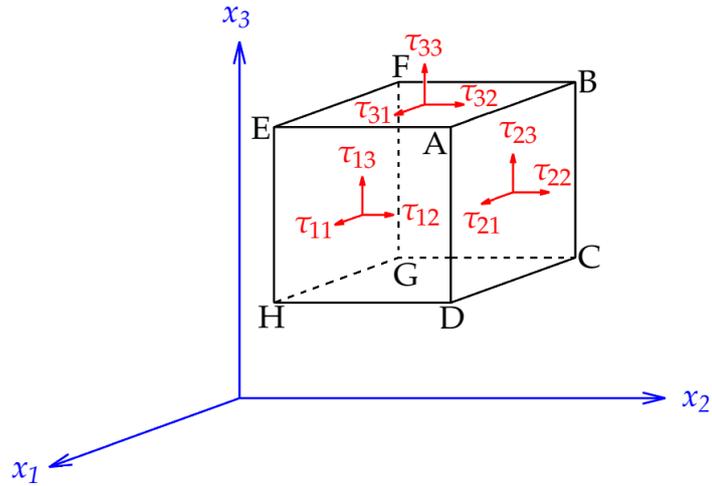


Figura 15: Campo de tensões num elemento cúbico infinitesimal mostrando as tensões normal e de corte. Por claridade são mostradas as tensões em 3 das 6 faces do cubo.

Assim, se  $\mathbf{f}$  representa ao vetor resultante das forças de corpo por unidade de massa e  $\rho$  representa a densidade do fluido, temos que a força de corpo total externa atuando sobre uma massa dada por uma superfície  $S$  e com volume  $\Omega$  será  $\int_{\Omega} \rho \mathbf{f} dV$ . Também se  $\mathcal{F}$  é um vetor de superfície que representa a força de superfície total por unidade de área, temos que a força de superfície total externa atuando sobre a superfície  $S$  será  $\int_S \mathcal{F} dA$ .

De acordo à segunda lei de Newton, a soma das duas forças resultantes anteriores é igual à taxa de variação do momentum, que é dada em coordenadas lagrangeanas por  $\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} dV$ . Então, a equação que resulta de aplicar a lei física de conservação do momentum é

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} dV = \int_S \mathcal{F} dA + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} dV.$$

A equação anterior significa que a igualdade

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho v_j dV = \int_S F_j dA + \int_{\Omega} \rho f_j dV$$

é satisfeita para cada  $j = 1, 2, 3$ .

O lado esquerdo da equação anterior pode ser transformado numa integral de vo-

lume com o integrando contendo somente integrais eulerianas. Para isso podemos usar o teorema de transporte de Reynolds. Dessa maneira a equação anterior é agora

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + \nabla \cdot (\rho v_j \mathbf{v}) \right] dV = \int_S F_j dA + \int_{\Omega} \rho f_j dV. \quad (3.3)$$

Por outro lado, sabemos que a tensão sobre um elemento de fluido cúbico infinitesimal é especificada pelo tensor de tensão  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma]_{ij}$  tal que cada componente  $\sigma_{ij}$  representa a tensão na direção  $x_i$  sobre a superfície cujo vetor normal exterior aponta na direção  $x_j$ .<sup>3</sup> Assim, para uma superfície orientada arbitrariamente com vetor normal dado por  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , o vetor  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  pode ser relacionado a  $\boldsymbol{\sigma}$  pela equação  $F_j = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij} n_i$ . Então, substituindo a igualdade anterior na equação 3.3 obtemos

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + \nabla \cdot (\rho v_j \mathbf{v}) \right] dV = \int_S \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij} n_i dA + \int_{\Omega} \rho f_j dV.$$

Usando o teorema da divergência transformamos a integral de superfície do lado direito da equação anterior numa integral de volume. Dessa maneira, a equação de conservação do momentum pode ser escrita como

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + \nabla \cdot (\rho v_j \mathbf{v}) \right] dV = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dV + \int_{\Omega} \rho f_j dV,$$

e logo

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + \nabla \cdot (\rho v_j \mathbf{v}) - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - \rho f_j \right] dV = 0.$$

Ao usar o fato que o volume  $\Omega$  é arbitrário obtemos a equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + \nabla \cdot (\rho v_j \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j,$$

que pode ser simplificada desenvolvendo os termos do lado direito e usando o teorema de conservação da massa. Finalmente obtem-se

$$\rho \frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j.$$

Note que o lado esquerdo da equação anterior é a multiplicação da densidade  $\rho$  com a derivada convectiva de  $v_j$ . Assim obtem-se

$$\rho \frac{Dv_j}{Dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.4)$$

<sup>3</sup> Para melhor entender,  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  denotam as direções coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente.

A equação anterior é conhecida como a *equação de conservação do momentum*.

Um estudo detalhado do equilíbrio do momentum resulta na simetria do tensor de tensão, i.e.  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Para um fluido newtoniano as componentes de tensão estão relacionadas ao campo de velocidade e de pressão pela equação

$$\sigma_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \mathbf{v}\right)\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad (3.5)$$

sendo  $\mu$  o coeficiente de viscosidade,  $p$  a pressão, e  $\delta_{ij}$  a função delta de Kronecker.

### 3.3 A EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES

A equação de movimento para um fluido newtoniano é obtida substituindo a equação 3.5 na equação 3.4. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_j}{Dt} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ -\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \mathbf{v}\right)\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \right] + \rho f_j \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu\nabla \cdot \mathbf{v} \right] + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \right] + \rho f_j, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

A equação anterior é conhecida como a *equação geral de Navier-Stokes*. Em muitas situações podemos omitir alguns termos para obter equações mais simples. Por exemplo se o coeficiente de viscosidade  $\mu$  for constante, a equação anterior seria simplificada na forma

$$\rho \frac{Dv_j}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\mu}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} + \rho f_j.$$

Em forma vetorial, a equação anterior pode ser expressa como

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

E no caso de um fluido incompressível, i.e.  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , a equação anterior fica reduzida em

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (3.6)$$

Definindo a viscosidade cinemática como  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  temos que 3.6 pode ser escrita como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}.$$

A mudança anterior faz com que a equação possa ser escrita de uma maneira mais conveniente, especialmente se  $\rho$  for constante.

Finalmente, para um fluido não viscoso e incompressível temos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho}.$$

A equação anterior é conhecida como a *equação de Euler*.

Como é conhecido, as equações diferenciais precisam de condições de fronteira que são dadas de acordo com a situação física. Numa fronteira rígida, a velocidade do fluido e a velocidade da fronteira coincidem, em outras palavras as componentes normais são as mesmas porque o fluido não penetra no sólido nem deixa espaços livres. As componentes tangenciais da velocidade no fluido e no sólido também são idênticas. Essa condição é chamada de *condição de não-deslizamento* e pode ser visualizada em termos moleculares para fluidos e sólidos que apresentam algum emaranhado na fronteira. Porém essa visão é demasiado simples como para ser real e essa escala molecular não aparece no modelo contínuo, cujas escalas são maiores. Contudo, todas as predições que usam a condição de não deslizamento tem resultado ser precisas, assim essa condição é universalmente aceita como a apropriada condição de fronteira.

Também podem acontecer condições assintóticas na fronteira. Isso significa que não existe movimento para distâncias grandes ou que existe uma corrente uniforme. Outro tipo de condições na fronteira acontecem quando são conhecidos dados sobre a pressão. A principal força na maioria de fluidos é a gravidade. Essa é a principal causa do fluxo, porém usualmente as forças gravitacionais são equilibradas por um campo de pressão hidrostática. É útil subtrair essas duas influências antes de discutir o movimento.

Suponha que o fluido é incompressível. Tome o campo de pressão quando não existe movimento como  $p_0$  e a pressão quando existe movimento como  $p_0 + p$ . Então temos

$$\rho \mathbf{f} = \nabla p_0, \quad (3.7)$$

e também

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla(p_0 + p) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (3.8)$$

De 3.7 e 3.8 obtemos

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (3.9)$$

onde somente a pressão dinâmica aparece na equação anterior. Em muitos casos podemos resolver essa equação e depois adicionar a pressão hidrostática no caso de precisarmos da pressão total.

A equação anterior pode ser adimensional definindo uma escala de comprimento  $L$  e uma escala de velocidade  $V$ . A escolha dessas escalas é feita principalmente pela aparência das condições de fronteira. A correspondente escala no tempo pode ser dada por  $\tau = \frac{L}{V}$ . A escala para a pressão, depende da natureza do fluxo, no caso de tensão viscosa podemos escolher  $\Sigma = \frac{\rho \nu V}{L}$ . Então introduzindo as novas variáveis

$$\mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{v} \mapsto \frac{\mathbf{v}}{V}, \quad t \mapsto \frac{t}{\tau}, \quad p \mapsto \frac{p}{\Sigma}$$

e usando a regra da cadeia, a equação 3.9 fica expressa na forma

$$Re \left[ \frac{\partial v_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Para a equação anterior, em forma vetorial, tem-se

$$Re \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{v}.$$

O número  $Re = \frac{VL}{\nu}$  é um número adimensional, chamado de *número de Reynolds* e representa a relação entre a força inercial e a força viscosa. Seu valor indica se o fluxo é laminar ou turbulento.

### 3.4 AS EQUAÇÕES DE JEFFERY

Em muitas situações, naturais ou não, os fluidos transportam matéria em forma de partículas. Em algumas dessas situações as partículas apresentam um comportamento passivo, i.e. não possuem dinâmica interna e seu movimento está completamente descrito pelo escoamento [29]. Porém, nem todas as partículas “sofrem passivamente” o fenômeno de advecção, algumas obedecem equações de movimento de acordo ao

tipo de atividade da partícula (vide [30], [31] e [32]). Em todos esses casos a dinâmica da partícula é diferente e sua interação com o escoamento produz comportamentos complexos.

A natação de organismos é um exemplo de comportamento com dinâmica interna. Isso pode acontecer em escoamentos naturais e varia desde pequenos organismos até animais macroscópicos tais como peixes. O assunto principal aqui é que a geometria da partícula possui sua própria forma de natação o que traz efeitos no sistema dinâmico e assim essas partículas podem quebrar as barreiras de transporte presentes no escoamento (vide [33] e [34]).

O primeiro estudo matemático desse tipo de problemas foi dado por Einstein na sua dissertação de doutorado [35]. Ele considerou o caso de partículas esféricas e deu uma fórmula para o aumento da viscosidade. Em 1923 Jeffery deu uma solução aproximada para a equação do movimento de um corpo elipsoidal rígido imerso num fluxo linear circundante [5]. Mais recentemente, Junk e Illner [36] apresentaram uma nova derivação das equações de Jeffery para o movimento de um pequeno corpo rígido imerso num fluxo que satisfaz as equações de Navier-Stokes, usando métodos de análises assintóticas. A diferença com o artigo original de Jeffery é que as equações que eles obtiveram são válidas para corpos de forma geral. Assim, qualquer caso particular é consequência da ordem da expansão assintótica.

As equações de Jeffery são usadas na teoria de suspensões onde é estudada a interação entre a partícula suspensa e o fluido. A dinâmica da partícula é um ingrediente básico para abordagens estatísticas as quais modelam o comportamento de conjuntos de partículas suspensas. Outros trabalhos semelhantes ao trabalho de Jeffery mas com geometrias mais gerais podem ser encontradas nas referências [37], [38] e [39].

Essas equações resultam das condições de resolubilidade de um problema de Stokes que descreve o fluxo local de primeira ordem ao redor da partícula. Esses problemas de Stokes são geralmente conhecidos como *problemas de mobilidade* e têm sido cuidadosamente estudados em [40]. Na abordagem de Junk e Illner, os resultados anteriores são estendidos obtendo também as equações para os coeficientes de segunda ordem e se mostra quantitativamente quão bem a solução aproximada (obtida da expansão

assintótica truncada) satisfaz as equações de Navier-Stokes e as equações de corpo rígido. Esse resultado é um primeiro passo para uma prova matemática de que as equações de Jeffery são a correta descrição assintótica da dinâmica do corpo estudado.

Em termos gerais, a ideia é descrever o movimento de um pequeno corpo rígido  $E_\varepsilon$ , com densidade constante  $\rho_b$ , dentro de um líquido em movimento. Como sabemos, o movimento de um corpo rígido consiste de translações e rotações. Para  $E_\varepsilon$  a posição e orientação estão completamente caracterizadas por seu centro de massa  $\mathbf{c}(t) \in \mathbb{R}^3$  e uma matriz de rotação  $R(t) \in SO(3)$ <sup>4</sup> tal que

$$E_\varepsilon(t) = \varepsilon R(t)E + \mathbf{c}(t) \quad t \geq 0, \quad (3.10)$$

onde o conjunto  $E$  é um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave  $\partial E$  que, em particular, é dado por

$$E = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \frac{y_1^2}{l^2} + \frac{y_2^2 + y_3^2}{d^2} < 1 \right\},$$

com  $l > 0$  e  $d > 0$ , cuja orientação no espaço é dada pelo vetor  $\mathbf{p}$  que aponta na direção do eixo de rotação.

Note que já que o corpo está em movimento teremos um problema de Navier-Stokes com fronteira móvel para as variáveis do fluxo. Para descrever a localização e a velocidade dessa fronteira consideramos primeiro a cinemática do corpo rígido.

Na equação 3.10 se  $\mathbf{x} \in E_\varepsilon(t)$  e  $\mathbf{y} \in E$  tem-se

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) = \varepsilon R(t)\mathbf{y} + \mathbf{c}(t), \quad t \geq 0, \quad (3.11)$$

e assim

$$\dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{y}) = \varepsilon \dot{R}(t)\mathbf{y} + \dot{\mathbf{c}}(t), \quad t \geq 0. \quad (3.12)$$

Por outro lado pode-se demonstrar [41] que para  $\dot{R}$  existe um vetor  $\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  dependendo de  $t$  tal que

$$\dot{R}(t) = B(\boldsymbol{\omega}(t))R(t), \quad (3.13)$$

<sup>4</sup> O conjunto  $SO(3)$  está formado pelas matrizes de tamanho  $3 \times 3$  que possuem uma inversa que coincide com sua transposta e cujo determinante é a unidade.

com a matriz  $B(\boldsymbol{\omega}(t))$  dada por

$$B(\boldsymbol{\omega}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo em 3.12 obtemos a equação da velocidade para  $\mathbf{x} \in E_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{y}) &= \varepsilon B(\boldsymbol{\omega}(t))R(t)\mathbf{y} + \dot{\mathbf{c}}(t) \\ &= B(\boldsymbol{\omega}(t))(\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{c}(t)) + \dot{\mathbf{c}}(t), \end{aligned}$$

e no caso de um vetor  $\mathbf{r}(t)$  apontando desde o centro de massa  $\mathbf{c}(t)$  a algum ponto  $\mathbf{x} \in \partial E_\varepsilon$  temos

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{r}(t),$$

onde, para  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ , usamos a relação  $B(\boldsymbol{\omega}(t))\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$ .

Por outro lado, supomos que tanto o líquido quanto o corpo rígido  $E_\varepsilon$  estão dentro de um domínio regular  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . O líquido é incompressível com densidade constante  $\rho_f$  e viscosidade cinemática  $\nu$ . Assim, os campos de pressão (dinâmica) e velocidade,  $p$  e  $\mathbf{v}$ , satisfazem as equações de Navier-Stokes em  $\Omega \setminus E_\varepsilon(t)$ , i.e. tem-se

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ Re \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde as variáveis  $\mathbf{v}$  e  $p$  são adimensionais com as mesmas escalas dadas na seção 3.3. O problema de Navier-Stokes anterior é assumido com adequadas condições iniciais e de fronteira de forma que o problema do fluxo sem perturbação está bem definido. Além disso a condição de não-deslizamento sobre a fronteira diz que

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge (\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{c}(t)) + \dot{\mathbf{c}}(t), \quad \mathbf{x} \in \partial E_\varepsilon(t).$$

Também, como consequência de aplicar a segunda lei de Newton e a lei de conservação do momentum angular, as duas equações seguintes são satisfeitas

$$\varepsilon \rho Re \dot{\mathbf{c}}(t) = \frac{1}{\text{vol}(E)} \int_{\partial E} \sigma(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{y})) R(t) \mathbf{n} dS, \tag{3.15}$$

$$\varepsilon^2 \rho Re \frac{d}{dt} (T(t) \boldsymbol{\omega}(t)) = \frac{R(t)}{\text{vol}(E)} \int_{\partial E} \mathbf{y} \wedge R^T(t) \sigma(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{y})) R(t) \mathbf{n} dS, \tag{3.16}$$

onde  $\sigma = -pI + 2S[\mathbf{v}]$ ,<sup>5</sup>  $\rho = \frac{\rho_b}{\rho_f}$  e  $T(t)$  é o tensor de inercia que é dado por

$$T(t) = R(t)TR^T(t), \quad T = \frac{1}{\text{vol}(E)} \int_E [|\mathbf{y}|^2 I - \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}] d\mathbf{y}.$$
<sup>6</sup>

As equações 3.13, 3.15 e 3.16 constituem um sistema de equações diferenciais não lineares de segunda ordem que é complementado com adequadas condições iniciais para se obter as equações de Jeffery.

Duas hipóteses são feitas para se obter as equações de Jeffery:

- 1) O movimento do fluido não é perturbado pela partícula.
- 2) O movimento do fluido induz uma rotação no corpo rígido com velocidade angular  $\boldsymbol{\omega} = \mathcal{O}(1)$ .

Para descrever os campos locais de velocidade e pressão para o corpo rígido  $E_\varepsilon$  é conveniente trabalhar usando as coordenadas do corpo fixo  $E$ , isso significa usar o vetor  $\mathbf{y}$  da equação 3.11 que pode ser escrito como

$$\mathbf{y}(t, \mathbf{x}) = R^T(t) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}(t)}{\varepsilon}.$$

Em geral, pode-se demonstrar que esses campos locais de velocidade e pressão podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{loc}(t, \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i R(t) \mathbf{u}_i(t, \mathbf{y}), \\ p_{loc}(t, \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i-1} p_i(t, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

E já que a ideia é usar aproximações até a segunda ordem como máximo, podemos omitir os termos de ordens maiores. Generalizando a ideia para as outras variáveis obtemos expansões da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{u}_0(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}_{loc}(t, \mathbf{x}) \\ p(t, \mathbf{x}) &= p_0(t, \mathbf{x}) + p_{loc}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{c}(t) &= \mathbf{c}_0(t) + \varepsilon \mathbf{c}_1(t) + \varepsilon^2 \mathbf{c}_2(t) + \dots \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= \boldsymbol{\omega}_0(t) + \varepsilon \boldsymbol{\omega}_1(t) + \dots \\ R(t) &= R_0(t) + \varepsilon R_1(t) + \dots \end{aligned}$$

5 A expressão  $S[\mathbf{v}]$  é chamada parte simétrica de  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e é dada por  $S[\mathbf{v}]_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$

6 O produto tensorial de dois vetores,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , é dado por  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$ .

Com  $\mathbf{u}_{loc}$  e  $p_{loc}$  truncadas até a segunda e primeira ordem respectivamente. As expressões anteriores são substituídas nas equações 3.13, 3.15 e 3.16 para obter as equações que devem satisfazer as funções  $\mathbf{u}_i$ ,  $p_i$ ,  $\mathbf{c}_i$ ,  $\boldsymbol{\omega}_i$  e  $R_i$ . Por outro lado, pode-se demonstrar que a correspondente expansão truncada satisfaz o problema original ao menos até a ordem  $\varepsilon$  o que garante sua validade. Também, pode-se garantir que essa expansão é somente válida enquanto o corpo rígido está longe da fronteira  $\partial\Omega$ , já que a suposição não inclui os efeitos físicos quando a distância é de ordem  $\varepsilon$ .

Seguindo os resultados de Junk e Illner, o campo de velocidades de ordem principal, i.e.  $\mathbf{u}_0$ , coincide com o campo de velocidade do fluido sem perturbação, i.e. com  $\mathbf{v}$  da equação 3.14. O centro de massa do corpo também como ordem principal, i.e.  $\mathbf{c}_0$ , satisfaz a equação diferencial

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{c}}_0 &= \mathbf{u}_0(t, \mathbf{c}_0(t)), \\ \mathbf{c}_0(0) &= \mathbf{c}(0).\end{aligned}$$

Por outro lado, os três vetores apontando na direção dos eixos principais satisfazem a equação diferencial

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \frac{1}{2}(\nabla \wedge \mathbf{u}_0) \wedge \mathbf{p}_i + \sum_{k,m=1}^3 \varepsilon_{ikm} \lambda_m \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_k S[\mathbf{u}_0] \mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

com as condições iniciais dadas por  $\mathbf{p}_i(0) = R(0)\mathbf{e}_i$  e com os parâmetros  $\lambda_m$  dados por

$$\lambda_1 = \frac{d_2^2 - d_3^2}{d_3^2 + d_2^2}, \quad \lambda_2 = \frac{d_3^2 - d_1^2}{d_1^2 + d_3^2}, \quad \lambda_3 = \frac{d_1^2 - d_2^2}{d_2^2 + d_1^2},$$

com  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  representando o comprimento dos semi-eixos do elipsoide. No caso particular de um elipsoide de rotação temos  $d_1 = l$  e  $d_2 = d_3 = d$  e assim os vetores  $\mathbf{p}_2$  e  $\mathbf{p}_3$  não fornecem a orientação espacial do corpo porque esses vetores somente descrevem quanto está rotacionando o corpo ao redor do eixo  $\mathbf{p}_1$ . Como consequência disso temos que

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_3 = -\lambda_2 = \lambda = \frac{l^2 - d^2}{l^2 + d^2},$$

e a equação para o vetor  $\mathbf{p}_1$  possui a forma

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \frac{1}{2}(\nabla \wedge \mathbf{u}_0) \wedge \mathbf{p}_1 + \lambda \sum_{k=2}^3 \mathbf{p}_k \otimes \mathbf{p}_k S[\mathbf{u}_0] \mathbf{p}_1.$$

<sup>7</sup>  $\varepsilon_{ijk} = +1$  se  $i, j$  e  $k$  formam uma permutação par de 1, 2 e 3,  $\varepsilon_{ijk} = -1$  no caso de uma permutação ímpar e  $\varepsilon_{ijk} = 0$  se dois índices são iguais.

Renomeando  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$  e ordenando os termos da soma, a expressão anterior pode ser reescrita como

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}(\nabla \wedge \mathbf{u}_0) \wedge \mathbf{p} + \lambda(S[\mathbf{u}_0] - (\mathbf{p}^T S[\mathbf{u}_0] \mathbf{p}) I_d) \mathbf{p}.$$

A equação anterior é conhecida como a *equação de Jeffery* e é a condição de resolubilidade de ordem principal no caso de um corpo elipsoidal alongado e rotacionalmente simétrico.

Em nosso caso de estudo, a partícula terá forma de esferoide prolato<sup>8</sup> e a velocidade de natação,  $v$ , dependerá da direção que está representada pelo vetor unitário  $\mathbf{p}$ . Seja  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(t, \mathbf{x})$  a velocidade do escoamento. Quando a partícula é deixada no escoamento a velocidade dela satisfaz a equação diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}_0(t, \mathbf{x}) + v\mathbf{p}.$$

Por outro lado, já sabemos que a orientação de uma partícula elipsoidal está dada pela equação de Jeffery

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}(\nabla \wedge \mathbf{u}_0) \wedge \mathbf{p} + \lambda(S[\mathbf{u}_0] - (\mathbf{p}^T S[\mathbf{u}_0] \mathbf{p}) I_d) \mathbf{p}. \quad (3.17)$$

Para a equação anterior, o parâmetro  $\lambda$  é dado por

$$\lambda = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1}, \quad (3.18)$$

sendo  $\gamma$  a razão dos comprimentos do eixo maior e do eixo menor do elipsoide.

Assumindo um caso bidimensional onde a velocidade do escoamento é dada por uma função corrente, i.e.

$$\mathbf{u}_0 = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right),$$

temos que o vetor  $\mathbf{p}$  pode ser representado por  $(\cos(\theta), \sin(\theta))^T$  e logo

$$\dot{\mathbf{p}} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))^T \dot{\theta}. \quad (3.19)$$

Por outro lado, o primeiro termo da direita da equação 3.17 é dado por

$$\frac{1}{2}(\nabla \wedge \mathbf{u}_0) \wedge \mathbf{p} = -\frac{\Delta \psi}{2} (-\sin(\theta), \cos(\theta))^T. \quad (3.20)$$

<sup>8</sup> Um esferoide prolato é aquele cujo comprimento do eixo polar é maior do que do eixo equatorial. Pode ser formado rotacionando uma elipse em torno de seu eixo maior.

Ao calcular a matriz  $S[\mathbf{u}_0]$  obtem-se

$$S[\mathbf{u}_0] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) & -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}.$$

A expressão entre parênteses do lado direito de 3.17 é

$$S[\mathbf{u}_0] - (\mathbf{p}^T S[\mathbf{u}_0] \mathbf{p}) I_d = 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & -\cos^2(\theta) \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \begin{pmatrix} \sin(2\theta) & -1 \\ -1 & \sin(2\theta) \end{pmatrix},$$

e quando aplicada ao vetor  $\mathbf{p} = (\cos(\theta), \sin(\theta))^T$  obtemos

$$(S[\mathbf{u}_0] - (\mathbf{p}^T S[\mathbf{u}_0] \mathbf{p}) I_d) \mathbf{p} = \left[ -\sin(2\theta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\cos(2\theta)}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Substituindo as equações 3.20 e 3.21 na equação 3.17 e igualando o resultado com 3.19 obtemos a equação diferencial para a direção

$$\dot{\theta} = -\frac{\Delta \psi}{2} + \lambda \left[ -\sin(2\theta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\cos(2\theta)}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right].$$

Usando a equação anterior obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} + v \cos(\theta), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} + v \sin(\theta), \\ \dot{\theta} &= -\frac{\Delta \psi}{2} + \lambda \left[ -\sin(2\theta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\cos(2\theta)}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Em particular, a escolha da velocidade de autopropulsão está baseada em modelos de fototaxia [1, 2] onde as partículas buscam maximizar o movimento ao longo de uma dada direção. Seja  $\beta$  o valor dessa direção. Então, assumiremos que a partícula não possui velocidade quando sua direção está longe da direção pretendida, i.e. quando a diferença  $|\theta - \beta|$  é maior que um certo ângulo crítico,  $\varepsilon$ . Caso contrário, o módulo da velocidade da partícula será  $\frac{v}{2\varepsilon}$ .

Temos assim que o módulo da velocidade depende da orientação instantânea  $\theta$  e dos parâmetros  $v$ ,  $\beta$  e  $\varepsilon$ . Então, podemos escrever  $v$  como

$$v = v_\beta(\theta; \varepsilon, v) = \begin{cases} \frac{v}{2\varepsilon}, & \text{se } |\theta - \beta| \leq \varepsilon \\ 0, & \text{se } |\theta - \beta| > \varepsilon \end{cases}$$

Logo, a partícula possui dois tipos de comportamento: autopropulsão quando  $\theta$  está dentro do intervalo  $[\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon]$  e de advecção quando  $\theta$  está fora dele.

Os resultados de estudar as equações diferenciais anteriores estão no capítulo 5.



# 4

## NATAÇÃO DE PARTÍCULAS PONTUAIS

Neste capítulo enumeramos nossos resultados do estudo sobre natação de partículas pontuais em um escoamento bidimensional estacionário. Na seção 4.1 aprofundamos e estendemos as investigações, sobre um espaço de parâmetros, do problema de comparar dois protocolos distintos de autopropulsão quando os valores absolutos das velocidades médias<sup>1</sup> dos dois coincidem (vide figura 19). Como já foi mencionado na introdução, uma primeira investigação desses dois protocolos iniciou no trabalho do mestrado do autor [3] com uma escolha particular dos parâmetros envolvidos.

A partir dessa pesquisa, surgiu a motivação de fazermos as mesmas comparações, mas agora explorando exaustivamente o espaço de parâmetros. Assim, fixando um dos parâmetros e deixando os outros dois variarem numa região do plano, obtemos uma comparação abrangente entre os dois protocolos. O resultado mais notável é que é possível obter aumentos de mais de 100% da área de condições iniciais de trajetórias não confinadas quando se troca o primeiro pelo segundo protocolo. Os resultados desse estudo estão detalhados no artigo apresentado no Anexo A.

Na seção 4.2, reportamos a comparação entre os dois protocolos no caso em que a velocidade temporalmente modulada do segundo protocolo é, em todo instante, menor ou igual à velocidade constante usada no primeiro protocolo (vide figura 24). Da mesma forma que na seção 4.1 os resultados são obtidos sobre um espaço de parâmetros.

---

<sup>1</sup> Definimos a velocidade média como  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^t |\dot{\mathbf{x}}(\tau)| d\tau}{t}$ .

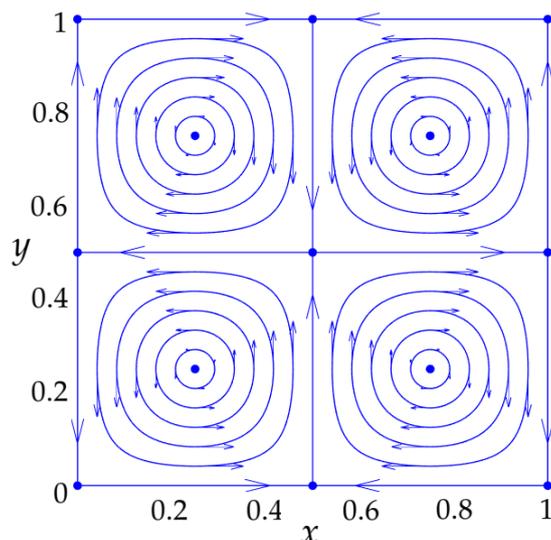


Figura 16: Retrato de fases do sistema 4.1.

Definimos o escoamento convectivo dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\pi\text{sen}(2\pi x)\cos(2\pi y), \\ \dot{y} &= -2\pi\cos(2\pi x)\text{sen}(2\pi y).\end{aligned}\tag{4.1}$$

O sistema de equações anterior apresenta somente trajetórias confinadas (vide figura 16). Isso significa que uma partícula adveccionada pelo escoamento permanece em alguma região compacta do espaço de fases.

Como já dissemos, estamos interessados em comparar dois protocolos para a velocidade de autopropulsão ao longo do semieixo  $x$  positivo. O objetivo é determinar a melhor forma de se fomentar o transporte, i.e. queremos saber qual dos dois protocolos leva a um maior conjunto de condições iniciais de trajetórias não confinadas. Assumimos que, em cada instante, a velocidade da partícula corresponde à soma de sua velocidade de autopropulsão com a velocidade do fluido em sua posição.

## 4.1 PRIMEIRA COMPARAÇÃO

Nesta seção estudamos o problema de comparar os dois protocolos de natação quando coincidem os valores absolutos das velocidades médias de cada um. Assim, o *primeiro*

*protocolo* corresponde a autopropulsão com velocidade constante igual a  $\alpha$ . Nesse caso, a velocidade total da partícula é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\pi\text{sen}(2\pi x)\cos(2\pi y) + \alpha, \\ \dot{y} &= -2\pi\cos(2\pi x)\text{sen}(2\pi y).\end{aligned}\quad (4.2)$$

Note que o sistema anterior é um sistema hamiltoniano cuja função corrente é

$$\psi_\alpha(x, y) = \text{sen}(2\pi x)\text{sen}(2\pi y) + \alpha y. \quad (4.3)$$

Na figura 17 vemos o retrato fase de 4.2. Esse protocolo apresenta conexões heteroclínicas que separam o movimento confinado do não confinado.

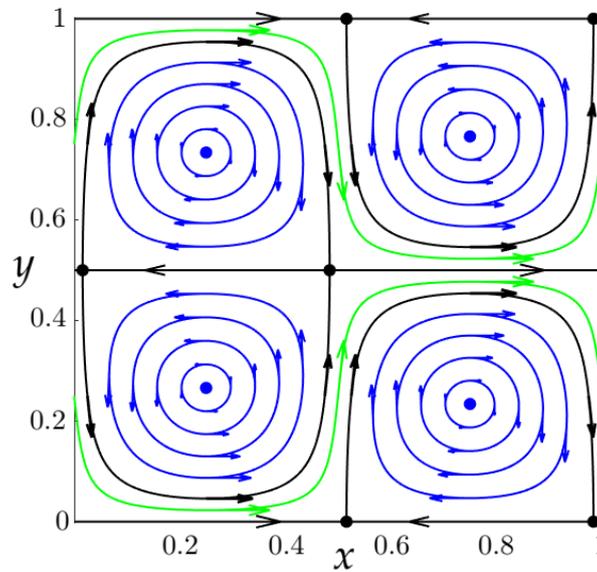


Figura 17: Retrato de fases do sistema 4.2 com  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ .

O *segundo protocolo* é uma pequena perturbação temporal periódica de tipo sinusoidal do primeiro protocolo. Agora temos o sistema não autônomo de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\pi\text{sen}(2\pi x)\cos(2\pi y) + \alpha + \varepsilon\text{sen}(\omega t), \\ \dot{y} &= -2\pi\cos(2\pi x)\text{sen}(2\pi y),\end{aligned}\quad (4.4)$$

com  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

A ideia de se considerar a modulação temporal vem de que esperamos caos na região

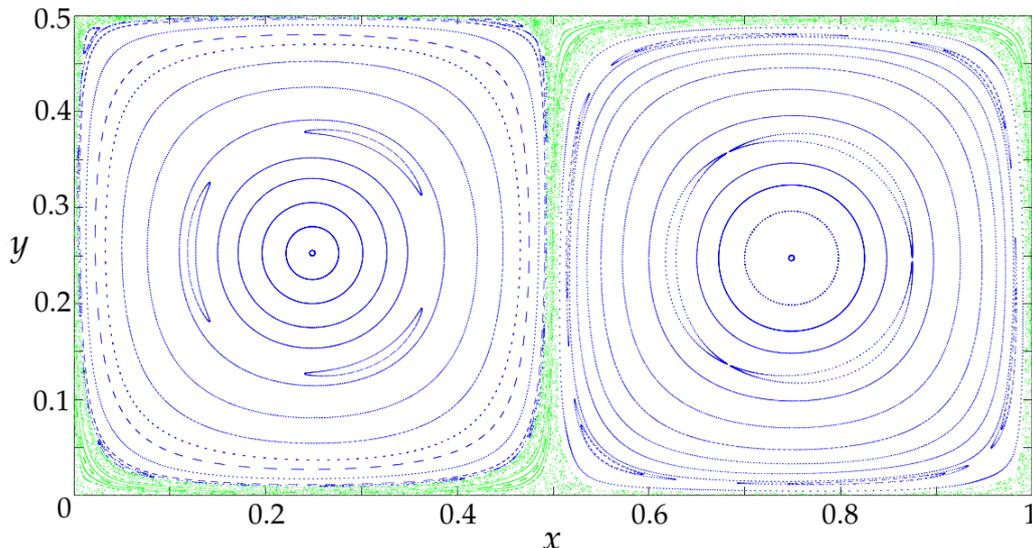


Figura 18: Mapa de Poincaré do sistema 4.4 com  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ,  $\varepsilon = 0.3$  e  $\omega = 75$ .

das separatrizes quando se perturba um sistema hamiltoniano de 1 grau de liberdade. O caos resulta em transporte entre regiões confinadas e não confinadas.

Transformamos o sistema anterior num sistema autônomo definindo a nova variável  $\theta = \omega t$  com a equivalência  $\theta + 2\pi \equiv \theta$ . O novo sistema é tridimensional e é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\pi \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) + \alpha + \varepsilon \sin(\theta), \\ \dot{y} &= -2\pi \cos(2\pi x) \sin(2\pi y), \\ \dot{\theta} &= \omega.\end{aligned}$$

Para estudar o sistema anterior escolhemos a superfície

$$\Sigma^{\theta_0} = \{(\mathbf{x}, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 : \theta = \theta_0 \in [0, 2\pi)\}.$$

Sobre  $\Sigma^{\theta_0}$  definimos o mapa de Poincaré  $\mathcal{P}_{\theta_0} : \Sigma^{\theta_0} \rightarrow \Sigma^{\theta_0}$ , dado por

$$\left(\mathbf{x}\left(\frac{\theta_0}{\omega}\right), \theta_0\right) \mapsto \left(\mathbf{x}\left(\frac{\theta_0 + 2\pi}{\omega}\right), \theta_0 + 2\pi \equiv \theta_0\right).$$

O mapa anterior também apresenta tanto trajetórias confinadas quanto trajetórias que escapam (vide figura 18). Note também a ocorrência de trajetórias regulares e caóticas. Usamos o método de Melnikov para demonstrar a existência das trajetórias caóticas.

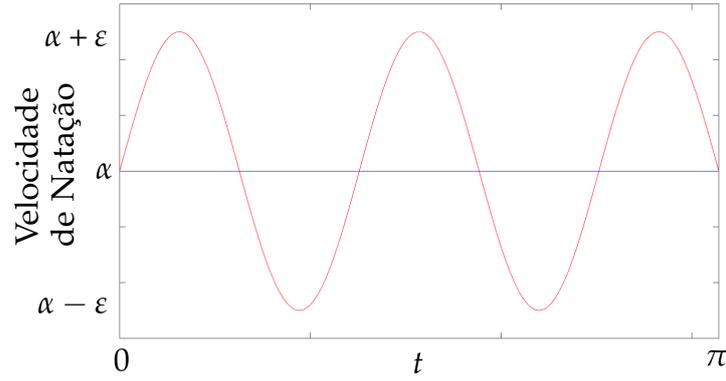


Figura 19: Comparação das duas velocidades de autopropulsão de uma partícula. Em azul a velocidade do primeiro protocolo,  $\alpha$ . Em vermelho, a do segundo protocolo,  $\alpha + \epsilon \sin(\omega t)$ . A autopropulsão com velocidade constante é menor que a autopropulsão com modulação temporal quando  $t$  está nos intervalos da forma  $\left(\frac{(2n-2)\pi}{\omega}, \frac{(2n-1)\pi}{\omega}\right)$ , o contrário acontece nos intervalos da forma  $\left(\frac{(2n-1)\pi}{\omega}, \frac{2n\pi}{\omega}\right)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

#### 4.1.1 Primeiro Protocolo

Como já vimos, o primeiro protocolo é um sistema hamiltoniano, isso significa que podemos fazer um estudo analítico para obter a medida do conjunto de condições iniciais de trajetórias não confinadas. Note que esse protocolo apresenta conexões heteroclínicas e pontos fixos elípticos e hiperbólicos. Os pontos fixos são os pontos singulares do campo vetorial

$$\mathcal{X}(x, y) = \left( \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y}, -\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \right)$$

e podem ser calculados analiticamente. Devido à periodicidade das soluções da equação 4.2 é suficiente fazer nosso estudo no quadrado  $Q := [0, 1) \times [0, 1)$ . Assim, os pontos fixos hiperbólicos em  $Q$  são dados por

$$(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h) = \left( \frac{1}{4} + (-1)^j \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsen \left[ -\frac{\alpha(-1)^m}{2\pi} \right] \right\} \text{ modulo } 1, \frac{m}{2} \right), \quad (4.5)$$

com  $m = 0$  ou  $1$  e  $j = 1$  ou  $2$ . Os pontos fixos hiperbólicos podem ser vistos na figura 20.

Por outro lado, as conexões heteroclínicas satisfazem a equação

$$\psi_\alpha(x, y) = \psi_\alpha(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h).$$

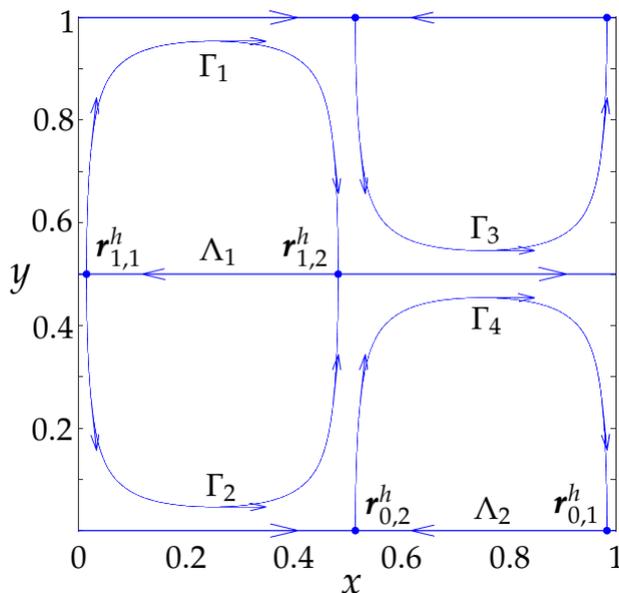


Figura 20: Conexões heteroclínicas do sistema 4.2 com  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ . As separatrizes  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  e  $\Lambda_1$  correspondem a  $m = 1$ . As separatrizes  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_4$  e  $\Lambda_2$  correspondem a  $m = 0$ .

Temos assim que essas conexões são dadas por

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2\pi x)\operatorname{sen}(2\pi y) + \alpha y &= \operatorname{sen}(2\pi x_{m,j}^h)\operatorname{sen}(2\pi y_{m,j}^h) + \alpha y_{m,j}^h \\ &= \frac{\alpha m}{2}. \end{aligned}$$

Em particular, as separatrizes  $\Gamma_1$  e  $\Lambda_1$  são dadas por

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \operatorname{sen}(2\pi x)\operatorname{sen}(2\pi y) + \alpha y &= \frac{\alpha}{2}, & 0.5 < y < 1, \\ \Lambda_1 : y &= 0.5, & x_{1,1}^h < x < x_{1,2}^h. \end{aligned}$$

Usando a equação para  $\Gamma_1$  isolamos  $x$  e assim definem-se duas funções

$$\begin{aligned} x_1(y) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right) \operatorname{arcsen}\left(\frac{0.5\alpha - \alpha y}{\operatorname{sen}(2\pi y)}\right), \\ x_2(y) &= 0.5 - x_1(y), \end{aligned}$$

com  $0.5 < y \leq y_{\max}$ . O valor  $y_{\max}$  é a coordenada  $y$  da interseção de  $\Gamma_1$  com a reta  $x = 0.25$ . Em outras palavras,  $y_{\max}$  satisfaz a desigualdade  $0.5 < y_{\max} < 1$  e a equação transcendental

$$\operatorname{sen}(2\pi y_{\max}) + \alpha y_{\max} = \frac{\alpha}{2}.$$

Note que  $y_{\max}$ ,  $x_1(y)$  e  $x_2(y)$  dependem do parâmetro  $\alpha$ , assim, podemos escrever a área da região limitada por  $\Gamma_1$  e  $\Lambda_1$  como

$$A_{\Gamma_1\Lambda_1}(\alpha) = \int_{0.5}^{y_{\max}} [x_2(y) - x_1(y)] dy.$$

Devido à existência de 4 curvas separatrizes, a área do conjunto de condições iniciais de trajetórias confinadas para o primeiro protocolo é dada por

$$A_1^c(\alpha) = 4A_{\Gamma_1\Lambda_1}(\alpha).$$

Finalmente, a área do conjunto de condições iniciais de trajetórias não confinadas é a área do quadrado  $Q$  menos a área anterior, então

$$A_1^e(\alpha) = 1 - A_1^c(\alpha). \quad (4.6)$$

#### 4.1.2 Segundo Protocolo

##### Caos

Para o segundo protocolo, dado na equação 4.4, demonstramos a existência de trajetórias caóticas usando o método de Melnikov [10]. Note que o segundo protocolo também pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x}, \end{aligned}$$

onde  $\psi_\alpha$  é a função corrente definida em 4.3 e

$$\hat{\psi}(x, y, t) = \text{sen}(\omega t)y. \quad (4.7)$$

Em geral, se  $\gamma_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$  é uma parametrização da separatriz  $\Gamma_i$ , a correspondente função de Melnikov é definida como

$$\mathcal{M}_i(\theta_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\psi_\alpha(\gamma_i(t - \theta_0)), \hat{\psi}(\gamma_i(t - \theta_0), t)] dt, \quad (4.8)$$

onde

$$[\psi_\alpha, \hat{\psi}] = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \quad (4.9)$$

é o colchete de Poisson, definido na equação 2.9, de  $\psi_\alpha$  com  $\hat{\psi}$ .

**Teorema 4.1.** *A função de Melnikov para a separatriz  $\Gamma_i$  do segundo protocolo, dada na equação 4.8, pode ser escrita como*

$$\mathcal{M}_i(\theta_0) = 4\pi \cos(\omega\theta_0) \int_0^{+\infty} \cos(2\pi x_i(t)) \text{sen}(2\pi y_i(t)) \text{sen}(\omega t) dt. \quad (4.10)$$

*Demonstração:*

Substituindo 4.3, 4.7, e 4.9 na integral da equação 4.8 obtemos

$$\mathcal{M}_i(\theta_0) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi x_i(t - \theta_0)) \text{sen}(2\pi y_i(t - \theta_0)) \text{sen}(\omega t) dt.$$

Note na igualdade anterior que  $\mathcal{M}_i$  além de depender de  $\omega$  também depende do parâmetro  $\alpha$ , porém, por simplicidade, a dependência não foi escrita de forma explícita. Fazendo a substituição  $t \mapsto t - \theta_0$  temos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i(\theta_0) &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi x_i(t)) \text{sen}(2\pi y_i(t)) \text{sen}(\omega(t + \theta_0)) dt \\ &= 2\pi [\mathcal{I}_i(\alpha, \omega) \cos(\omega\theta_0) + \mathcal{J}_i(\alpha, \omega) \text{sen}(\omega\theta_0)], \end{aligned} \quad (4.11)$$

com

$$\mathcal{I}_i(\alpha, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi x_i(t)) \text{sen}(2\pi y_i(t)) \text{sen}(\omega t) dt$$

e

$$\mathcal{J}_i(\alpha, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi x_i(t)) \text{sen}(2\pi y_i(t)) \cos(\omega t) dt.$$

Com uma adequada escolha das condições iniciais  $\gamma_i(0)$  para cada  $\Gamma_i$ , é possível simplificar as integrais anteriores. Em particular, escolhemos  $\gamma_1(0)$  e  $\gamma_2(0)$  como as interseções da reta  $x = 0.25$  com  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  respectivamente. Também escolhemos  $\gamma_3(0)$  e  $\gamma_4(0)$  como as interseções das retas  $x = 0.75$  com  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  respectivamente. Com a escolha anterior não é difícil demonstrar que

$$\mathcal{I}_i(\alpha, \omega) = 2 \int_0^{+\infty} \cos(2\pi x_i(t)) \text{sen}(2\pi y_i(t)) \text{sen}(\omega t) dt. \quad (4.12)$$

Da mesma forma, obtem-se

$$\mathcal{J}_i(\alpha, \omega) = 0, \quad (4.13)$$

para todo valor positivo de  $\alpha$  e  $\omega$ . Além disso, as relações  $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_4 = -\mathcal{I}_2 = -\mathcal{I}_3$ , são válidas.

Substituindo 4.12 e 4.13 na igualdade 4.11 obtemos o afirmado. ■

Para os valores de  $\alpha$  e  $\omega$  tais que a integral  $\mathcal{I}_i(\alpha, \omega)$  é diferente de zero notamos que  $\mathcal{M}_i(\theta_0)$  possui zeros simples. Para esses valores, usando o teorema 2.6, concluímos que o mapa de Poincaré do segundo protocolo apresenta uma dinâmica caótica nas vizinhanças das separatrizes  $\Gamma_i$ .

De forma semelhante é possível calcular a função de Melnikov para as separatrizes  $\Lambda_i$ . Porém, devido à sua parametrização, a correspondente função de Melnikov é identicamente zero. A última afirmação é consistente ao comparar as figuras 17 e 18 onde vemos a sobrevivência dessas curvas ao passar da equação 4.2 à 4.4.

### O mapa da separatriz

Generalizamos agora os resultados dados em [3] onde foi usado o mapa da separatriz para se obter uma aproximação analítica da maior curva confinada. Os resultados obtidos nessa pesquisa foram confirmados por resultados advindos de simulação numérica, com margem de erro bastante pequena ( $\simeq 1\%$ ). Concluiu-se ali que o segundo protocolo fornecia uma aumento substancial da área do conjunto de condições iniciais não confinadas. É importante ressaltar novamente que, em [3], o problema foi estudado apenas para um caso particular de escolha dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  e  $\omega$ .

Retomando as definições dadas na seção 2.2.3 temos que o mapa da separatriz para o segundo protocolo é dado por

$$\begin{aligned}\psi_\alpha^{n+1} &= \psi_\alpha^n + \varepsilon \mathcal{M}(t_n), \\ t_{n+1} &= t_n + T(\psi_\alpha^{n+1}),\end{aligned}$$

onde  $\mathcal{M}$  é a função de Melnikov definida como na equação 4.10 e  $T(\psi_\alpha^{n+1})$  representa o período da trajetória que satisfaz  $\psi_\alpha(x, y) = \psi_\alpha^{n+1}$ .

Como já foi mencionado em [3], o principal problema é que não existe uma representação analítica para  $T(\psi_\alpha^{n+1})$ . Por outro lado, já que a dinâmica sobre uma vizinhança de um ponto fixo é muito lenta, é possível usar uma representação polinomial de Taylor para  $\psi_\alpha(x, y)$  e assim aproximar  $T(\psi_\alpha^{n+1})$  como a soma dos tempos que uma partícula permanece numa vizinhança dos pontos fixos.

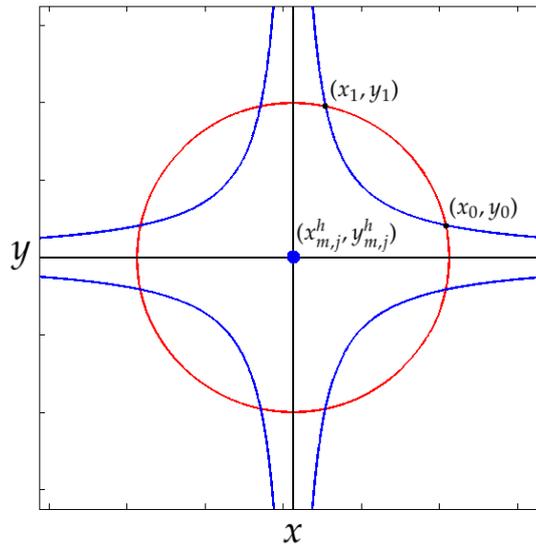


Figura 21: O semiperíodo de uma trajetória do primeiro protocolo é aproximado pelo tempo que sua respectiva linearização permanece em uma vizinhança do ponto hiperbólico  $(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h)$ .

Sejam  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  os pontos de interseção de uma trajetória do primeiro protocolo com uma vizinhança de um ponto fixo hiperbólico. Seja também  $H = \psi_\alpha(x_0, y_0)$  (ou  $H = \psi_\alpha(x_1, y_1)$ ). Seguindo os resultados dados em [3] pode-se demonstrar que o período da trajetória que satisfaz  $\psi_\alpha(x, y) = H$  é, aproximadamente, dado por

$$T(H) = (-1)^j \frac{2}{k} \ln \left| \frac{2H - \alpha m}{2k(x_0 - x_{m,j}^h)(y_1 - y_{m,j}^h)} \right|,$$

onde  $k = 2\pi\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$  e  $(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h)$  são as coordenadas do ponto fixo hiperbólico dadas pela equação 4.5.

Então, o mapa da separatriz é aproximado por

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{n+1} &= \psi_\alpha^n + \varepsilon \mathcal{M}(t_n), \\ t_{n+1} &= t_n + (-1)^j \left( \frac{2}{k} \right) \ln \left| \frac{2\psi_\alpha^{n+1} - \alpha m}{2k(x_0 - x_{m,j}^h)(y_1 - y_{m,j}^h)} \right|. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para se obter a curva que separa as trajetórias confinadas das que escapam, usamos o critério dado em [18, 20]. Esse critério calcula as fronteiras da faixa estocástica com a igualdade

$$\max_{t_n} \left| \frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} - 1 \right| = 1. \quad (4.15)$$

Da equação 4.14, obtemos

$$\max_{t_n} \left| \frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} - 1 \right| = \left| \frac{4\varepsilon}{k(2\psi_\alpha^{n+1} - \alpha m)} \right| \max_{t_n} \left| \frac{d\mathcal{M}}{dt_n} \right|. \quad (4.16)$$

Usando a expressão para a função de Melnikov dada em 4.10 obtemos

$$\begin{aligned} \max_{t_n} \left| \frac{d\mathcal{M}}{dt_n} \right| &= \max_{t_n} |2\pi\omega \text{sen}(\omega t_n) \mathcal{I}_i(\alpha, \omega)| \\ &= 2\pi\omega |\mathcal{I}_i(\alpha, \omega)|. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Substituindo 4.17 em 4.16 temos que a igualdade 4.15 é agora

$$\left| \frac{8\varepsilon\pi\omega \mathcal{I}_i(\alpha, \omega)}{k(2\psi_\alpha^{n+1} - \alpha m)} \right| = 1.$$

Usando a igualdade anterior obtemos as duas curvas que limitam a faixa caótica

$$\text{sen}(2\pi x)\text{sen}(2\pi y) + \alpha y = \psi_\alpha^s = \begin{cases} \frac{\alpha m}{2} + \frac{2\varepsilon\omega \mathcal{I}_i(\alpha, \omega)}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}, \\ \frac{\alpha m}{2} - \frac{2\varepsilon\omega \mathcal{I}_i(\alpha, \omega)}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}. \end{cases} \quad (4.18)$$

Note que, para cada separatriz  $\Gamma_i$ , uma das duas curvas anteriores está localizada na região das trajetórias que escapam do primeiro protocolo enquanto a outra está localizada na região das curvas confinadas. Essa última curva é a que, no mapa de Poincaré do sistema perturbado, separa as trajetórias que escapam das confinadas. Seja  $\zeta = \psi_\alpha^{-1}(\psi_\alpha^s)$  a curva escolhida (vide figura 22). Para calcular a área da região contida por  $\zeta$  seguimos os mesmos passos da seção anterior. Assim, obtemos

$$A_\zeta = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} [x_2(y) - x_1(y)] dy,$$

onde  $x_1$  e  $x_2$  são as funções de  $y$  definidas implicitamente na equação 4.18 e  $y_{\min}$  e  $y_{\max}$  são as duas soluções de

$$\text{sen}(2\pi y) + \alpha y = \psi_\alpha^s,$$

ou de

$$-\text{sen}(2\pi y) + \alpha y = \psi_\alpha^s,$$

o que depende da escolha de  $\Gamma_i$ .

Então, a área do conjunto de condições iniciais de trajetórias confinadas dentro do quadrado unitário,  $Q$ , é dada por

$$A_2^c = 4A_\zeta$$

e a área do conjunto de condições iniciais de trajetórias não confinadas dentro de  $Q$  é

$$A_2^e = 1 - A_2^c. \quad (4.19)$$

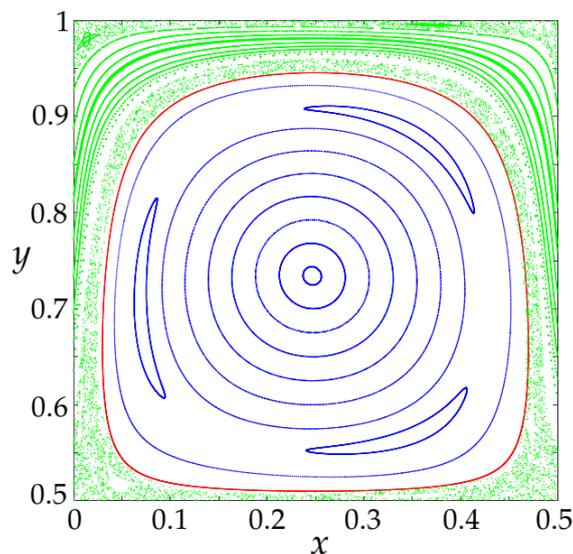


Figura 22: Separatriz teórica (vermelho), dada pela equação 4.18, entre as regiões de trajetórias confinadas (azul) e as que escapam (verde). Os parâmetros são  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ,  $\varepsilon = 0.2$  e  $\omega = 80$ .

#### 4.1.3 Comparação de Resultados

Os resultados teóricos obtidos pelas equações 4.6 e 4.19 são usados para comparar os dois protocolos para diferentes valores dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  e  $\omega$ . Na figura 23 vemos a percentagem de variação da área do conjunto de condições iniciais de trajetórias não confinadas, como função dos parâmetros  $\varepsilon$  e  $\omega$  para um valor fixo de  $\alpha$ . Note que existem valores dos parâmetros que fornecem aumentos percentuais superiores a 80%.

Um fato importante a ter em conta da figura 23 é que os resultados teóricos obtidos

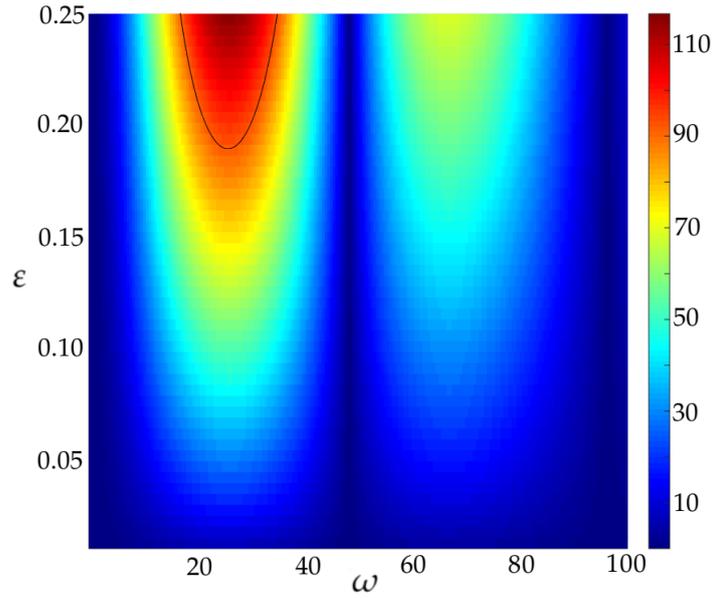


Figura 23: Variação percentual da área do conjunto de condições iniciais de trajetórias não confinadas do segundo protocolo (equação 4.4) em comparação com a correspondente área do primeiro protocolo (equação 4.2). Neste caso temos  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ . A região abaixo a curva preta é a região onde os resultados são válidos, i.e. onde a desigualdade 4.20 é satisfeita.

a partir da igualdade 4.15 são válidos somente se, para cada  $\alpha$  e  $\omega$  fixo, o parâmetro perturbativo  $\varepsilon$  satisfaz a desigualdade

$$\varepsilon \leq \varepsilon_{\max} = \frac{\alpha \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{8\omega |\mathcal{I}_i(\alpha, \omega)|}, \quad (4.20)$$

no caso contrário, a fronteira exterior da região caótica próxima de  $\Gamma_1$  (respectivamente  $\Gamma_2$ ) colide com a fronteira exterior da região caótica próxima de  $\Gamma_3$  (respectivamente  $\Gamma_4$ ). A afirmação anterior é enunciada no seguinte teorema.

**Teorema 4.2.** *Sejam  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  e  $\omega$  os parâmetros definidos nas equações 4.2 e 4.4. Seja também  $\mathcal{I}_i(\alpha, \omega)$ , com  $i = 1$  e  $i = 2$ , a integral definida na equação 4.12. Então, se a desigualdade 4.20 for satisfeita, as fronteiras exteriores das regiões caóticas de  $\Gamma_i$  e  $\Gamma_{i+2}$ , fornecidas pelo mapa da separatriz, não colidem entre elas.*

Por outro lado, para validar nossos resultados analíticos, calculamos numericamente e para valores específicos dos parâmetros, as mesmas quantidades das equações 4.6 e 4.19. Para isso, escolhemos condições iniciais próximas das separatrizes  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$

e  $\Gamma_4$  até obter as 4 curvas que separam os dois tipos de movimento. O anterior foi desenvolvido com um erro menor que  $10^{-6}$ . Para indexar cada ponto dessas curvas usamos um algoritmo de ordenação, então obtemos a área da região contida por cada curva usando integração numérica. Finalmente, adicionamos as áreas das 4 regiões e assim obtemos a área do conjunto de condições iniciais de trajetórias confinadas no quadrado  $Q$ . Os resultados numéricos são próximos dos teóricos.

## 4.2 SEGUNDA COMPARAÇÃO

Um fato importante a ter em conta dos resultados da seção anterior é que não existe uma desigualdade definida ao compararmos as velocidades de autopropulsão das partículas dos dois protocolos, ou seja existem intervalos de tempo onde a primeira velocidade,  $\alpha$ , é menor que a segunda,  $\alpha + \varepsilon \sin(\omega t)$ , e vice-versa. De fato, a velocidade média do segundo protocolo é, nesse caso, igual à velocidade constante do primeiro protocolo, como ilustra a figura 19.

Motivados pelos resultados anteriores, definimos agora uma outra velocidade de natação dada por  $\alpha + \varepsilon$  com  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Dessa forma obtemos um “*novo*” primeiro protocolo dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\pi \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) + \alpha + \varepsilon, \\ \dot{y} &= -2\pi \cos(2\pi x) \sin(2\pi y).\end{aligned}\tag{4.21}$$

O sistema de equações anterior apresenta um retrato de fases semelhante ao do “*antigo*” primeiro protocolo (da equação 4.2) e seu estudo também é analítico. Agora a função corrente é dada por

$$\psi_{\alpha+\varepsilon}(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + (\alpha + \varepsilon)y.$$

Por outro lado, o segundo protocolo não sofre mudança alguma, i.e. mantemos o sistema de equações dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\pi \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) + \alpha + \varepsilon \sin(\omega t), \\ \dot{y} &= -2\pi \cos(2\pi x) \sin(2\pi y).\end{aligned}\tag{4.22}$$

Note que agora existe uma desigualdade definida quando comparamos as velocidades de autopropulsão das partículas nos dois protocolos, como mostra a figura 24.

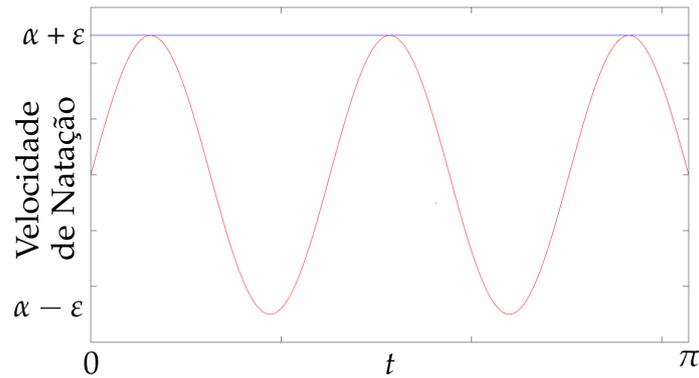


Figura 24: Comparação das duas velocidades de autopropulsão da partícula. Em azul a velocidade do “*novo*” primeiro protocolo,  $\alpha + \epsilon$ . Em vermelho, a do segundo protocolo,  $\alpha + \epsilon \sin(\omega t)$ . Agora a primeira é maior que a segunda para todo  $t$  e para qualquer conjunto de parâmetros positivos  $\alpha$ ,  $\epsilon$ , e  $\omega$ .

Note-se também que, nessa nova situação, o sistema de equações dado em 4.22 não é uma perturbação do sistema dado em 4.21 porque, como já sabemos, a perturbação foi dada em relação ao “*antigo*” primeiro protocolo. Isso significa que, ao usar o mapa da separatriz para calcular a curva que separa o movimento confinado do não confinado, utilizamos esse “*antigo*” primeiro protocolo como referência. Em outras palavras, os resultados obtidos para o segundo protocolo são os mesmos que os fornecidos pelo resultados da seção anterior. Da mesma maneira é possível comparar as equações 4.21 e 4.22 usando também um espaço de parâmetros. Na figura 25 vemos a percentagem de variação da área do conjunto de condições iniciais de trajetórias que escapam como função dos parâmetros  $\epsilon$  e  $\omega$  para um valor fixo de  $\alpha$ . De modo surpreendente, em certas regiões do espaço de parâmetros, o segundo protocolo é ainda vantajoso, podendo levar em certos casos a um aumento de aproximadamente 60% da área referida. Também, nessa figura os resultados são válidos somente se o parâmetro perturbativo  $\epsilon$  satisfaz a desigualdade 4.20.

Como na seção anterior, os resultados foram validados numericamente e também houve proximidade com os teóricos.

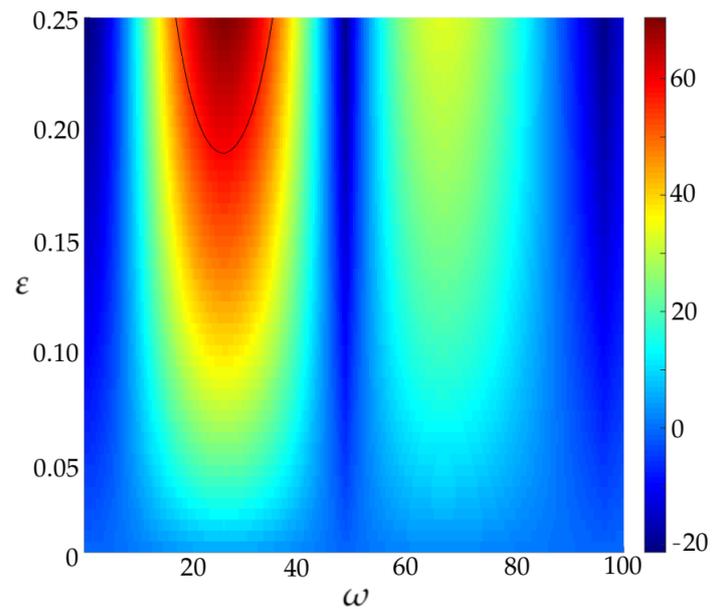


Figura 25: Variação percentual da área do conjunto de condições iniciais de trajetórias não confinadas do “antigo” segundo protocolo (equação 4.22) em comparação com a correspondente área do “novo” primeiro protocolo (equação 4.21). Neste caso temos  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ . A região abaixo a curva preta é a região onde os resultados são válidos, i.e. onde a desigualdade 4.20 é satisfeita.

# 5

## SWIMMERS DE JEFFERY

Neste capítulo estudamos qualitativamente, para uma função corrente particular e para uma partícula esférica, o campo de velocidades dado na equação 3.22. Usando a derivada de Lie damos uma descrição do campo de velocidades caracterizando o tipo de descontinuidade (costura, escape e deslize), assim obtemos as regiões do espaço de fase onde é possível definir uma solução. Em geral, a abordagem será realizada usando o formalismo de Filippov [22]. Por outro lado, definimos um mapa de Poincaré sobre uma das variedades de descontinuidade do campo (pode-se definir da mesma maneira sobre qualquer uma outra variedade de descontinuidade) e descrevemos sua ação sobre todo seu domínio. Para obter uma expressão analítica do mapa precisamos do fluxo associado ao sistema de equações 3.22 tanto quando a partícula tem natação como quando sofre advecção. O primeiro caso é resolvido analiticamente, os resultados estão no Anexo B. Para o segundo caso, devido à escolha da velocidade de autopropulsão, usamos teoria de perturbação singular.

### 5.1 NATAÇÃO DE UMA PARTÍCULA ESFÉRICA: $\lambda = 0$

Uma partícula esférica é um caso particular de um elipsoide com eixo maior e eixo menor do mesmo comprimento, i.e.  $\gamma = 1$  na equação 3.18 e logo  $\lambda = 0$ . Então depois de substituir esse último valor na equação 3.22 obtemos o campo de velocidades

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} + v_{\beta}(\theta; \varepsilon, v) \cos(\theta), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} + v_{\beta}(\theta; \varepsilon, v) \sin(\theta), \\ \dot{\theta} &= -\frac{\Delta \psi}{2}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

**Lema 5.1.** *O campo de velocidades dado em 5.1 pode ser escrito como o sistema de equações diferenciais dado por*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x} + \tilde{v}_\beta(\theta; \varepsilon, v) \cos(\theta), \\ \dot{y} &= -2\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial y} + \tilde{v}_\beta(\theta; \varepsilon, v) \sin(\theta), \\ \dot{\theta} &= -\varepsilon \Delta \psi,\end{aligned}$$

com a velocidade de natação dada por

$$\tilde{v}_\beta(\theta; \varepsilon, v) = \begin{cases} v, & \text{se } |\theta - \beta| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{se } |\theta - \beta| > \varepsilon. \end{cases} \quad (5.2)$$

*Demonstração:*

Fazendo a mudança de variável  $\tau = (2\varepsilon)^{-1}t$ , derivando com relação a  $\tau$ , aplicando a regra da cadeia e usando a equação 5.1, obtemos

$$\begin{aligned}x_\tau &= \dot{x} \frac{dt}{d\tau} = 2\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial y} + 2\varepsilon v_\beta(\theta; \varepsilon, v) \cos(\theta), \\ y_\tau &= \dot{y} \frac{dt}{d\tau} = -2\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2\varepsilon v_\beta(\theta; \varepsilon, v) \sin(\theta), \\ \theta_\tau &= \dot{\theta} \frac{dt}{d\tau} = -\varepsilon \Delta \psi.\end{aligned} \quad (5.3)$$

Definindo  $\tilde{v}_\beta = 2\varepsilon v_\beta$  e renomeando novamente  $\tau$  como  $t$  se demonstra o afirmado. ■

Por motivos de simplicidade a função corrente agora será  $\psi(x, y) = \sin(x)\sin(y)$ . Sobre o espaço de fases definimos a relação de equivalência  $x + 2\pi \equiv x$ ,  $y + 2\pi \equiv y$ ,  $\theta + 2\pi \equiv \theta$ . Como consequência do anterior, o conjunto onde estudaremos o campo de velocidades dado em 5.3 será em particular  $\mathcal{M} = \Omega \times [-\pi, \pi)$  onde  $\Omega = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ .

Seja  $\mathbf{x} = (x, y)$ . De acordo com a definição de  $\tilde{v}_\beta$  existem duas superfícies de descontinuidade que estão dadas por  $\Sigma_\beta^\pm = \{(\mathbf{x}, \theta) \in \mathcal{M} : \theta = \beta \pm \varepsilon\}$ . Note que a natação pode iniciar ou terminar sobre qualquer uma das superfícies anteriores, isso depende do sinal de  $\dot{\theta}$ . Além disso  $\Sigma_\beta^\pm$  pode ser definida como o nível 0 da função  $h_\beta^\pm(\mathbf{x}, \theta; \varepsilon) = \theta - \beta \mp \varepsilon$ .

Por outro lado, note que devido à escolha da função corrente, o campo de velocidades é dado por

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, \theta) = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \theta; \varepsilon, v, \beta) = \begin{cases} \mathcal{X}(\mathbf{x}, \theta), & \text{se } (\mathbf{x}, \theta) \in \Omega \times [-\pi, \beta - \varepsilon) \cup (\beta + \varepsilon, \pi), \\ \mathcal{Y}(\mathbf{x}, \theta), & \text{se } (\mathbf{x}, \theta) \in \Omega \times [\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon], \end{cases} \quad (5.4)$$

onde

$$\mathcal{X}(\mathbf{x}, \theta) = \mathcal{X}(\mathbf{x}, \theta; \varepsilon) = 2\varepsilon \begin{pmatrix} \text{sen}(x)\cos(y) \\ -\cos(x)\text{sen}(y) \\ \text{sen}(x)\text{sen}(y) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{Y}(\mathbf{x}, \theta) = \mathcal{Y}(\mathbf{x}, \theta; \varepsilon, v) = \mathcal{X}(\mathbf{x}, \theta) + v \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para o campo anterior não é difícil demonstrar que o sistema estudado tem grau de suavidade 1, i.e. é um sistema de Filippov.

Note que  $\mathcal{X}(\mathbf{x}, \theta) = \mathbf{0}$  somente se  $\mathbf{x} \in \{0, \pi\} \times \{0, \pi\}$  para todo  $\theta \in [-\pi, \beta - \varepsilon) \cup (\beta + \varepsilon, \pi)$ , i.e. o campo  $\mathcal{X}$  possui órbitas hiperbólicas do tipo sela. Por outro lado, o campo  $\mathcal{Y}$  não tem pontos singulares.

Para saber o tipo de descontinuidade do campo  $\mathcal{F}$  sobre  $\Sigma_\beta^\pm$  usamos a derivada de Lie, então

$$\begin{aligned} \mathcal{X}h_\beta^\pm(\mathbf{x}, \theta) &= \mathcal{X}(\mathbf{x}, \theta) \cdot \nabla h^\pm(\mathbf{x}, \theta) \\ &= 2\varepsilon\psi(\mathbf{x}) \\ &= 2\varepsilon\text{sen}(x)\text{sen}(y). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Também

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}h_\beta^\pm(\mathbf{x}, \theta) &= \mathcal{Y}(\mathbf{x}, \theta) \cdot \nabla h^\pm(\mathbf{x}, \theta) \\ &= 2\varepsilon\psi(\mathbf{x}) \\ &= 2\varepsilon\text{sen}(x)\text{sen}(y). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Assim, de 5.5 e 5.6 obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{X}h_\beta^\pm(\mathbf{x}, \theta)\mathcal{Y}h_\beta^\pm(\mathbf{x}, \theta) &= 4\varepsilon^2\psi^2(\mathbf{x}) \\ &= 4\varepsilon^2\text{sen}^2(x)\text{sen}^2(y) \geq 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Em particular, o resultado anterior é válido para  $(\mathbf{x}, \beta \pm \varepsilon) \in \Sigma_\beta^\pm$ .

Definimos  $\mathcal{S}_\beta^\pm = \{(x, y) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) : x = n\pi \text{ ou } y = n\pi, n = 0, 1\} \times \{\beta \pm \varepsilon\}$ , note que o conjunto anterior está formado pelas separatrizes e os pontos fixos do campo  $\mathcal{X}$  sobre os planos  $\Sigma_\beta^\pm$ . Assim, usando o resultado 5.7, temos que a região de costura é  $\Sigma^c = \Sigma_\beta^\pm - \mathcal{S}_\beta^\pm$ . Sobre  $\Sigma^c$  é possível garantir a existência e unicidade da solução. Essa solução é não diferenciável sobre cada plano  $\Sigma_\beta^\pm$ . Temos também que, pelo resultado anterior, o conjunto de pontos de tangência tanto para  $\mathcal{X}$  quanto para  $\mathcal{Y}$  está formado pelo conjunto  $\mathcal{S}_\beta^\pm$ .

Continuando com a descrição geométrica do campo de velocidades temos

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^2 h_\beta^\pm(\mathbf{x}, \theta) &= \mathcal{X}(\mathcal{X} h_\beta^\pm)(\mathbf{x}, \theta) \\ &= \mathcal{X}(\mathbf{x}, \theta) \cdot \nabla(\mathcal{X} h_\beta^\pm)(\mathbf{x}, \theta) \\ &= 2\varepsilon \mathcal{X}(\mathbf{x}, \theta) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}) \\ &= 4\varepsilon^2 (\psi_y, -\psi_x, \psi) \cdot (\psi_x, \psi_y, 0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

assim, concluímos que para o campo  $\mathcal{X}$  não existem pontos de dobra.

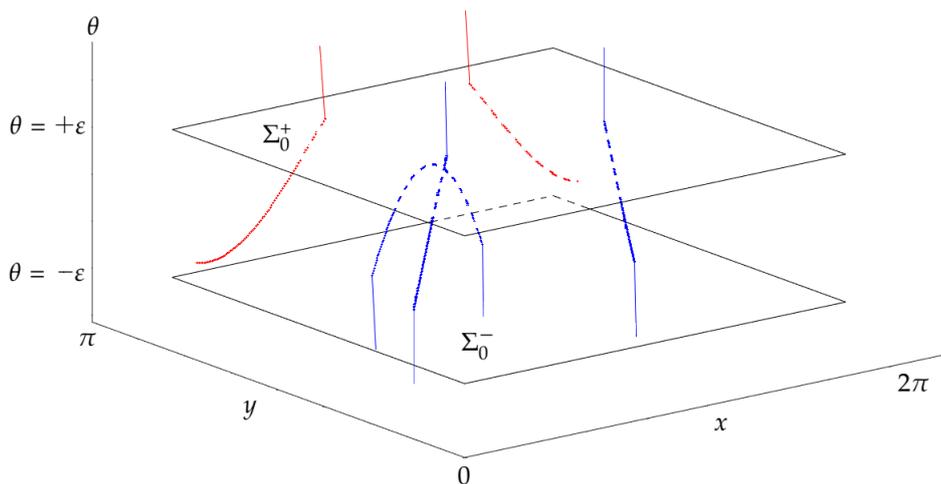


Figura 26: Soluções do sistema de equações diferenciais dado por  $(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\theta}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \theta)$  com  $\mathcal{F}$  dado por 5.4 com  $\beta = 0$ , entre os planos  $\theta = \pm\varepsilon$ . Note que sobre esses dois planos existe costura.

Fazendo contas semelhantes para  $\mathcal{Y}$  temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}^2 h_\beta^\pm(\mathbf{x}, \theta) &= \mathcal{Y}(\mathcal{Y}h_\beta^\pm)(\mathbf{x}, \theta) \\
&= \mathcal{Y}(\mathbf{x}, \theta) \cdot \nabla(Yh_\beta^\pm)(\mathbf{x}, \theta) \\
&= 2\varepsilon \mathcal{Y}(\mathbf{x}, \theta) \cdot \nabla\psi(\mathbf{x}) \\
&= 2\varepsilon \left( \mathcal{X}(\mathbf{x}, \theta) + v(\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \right) \cdot \nabla\psi(\mathbf{x}) \\
&= 2\varepsilon v(\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \cdot (\psi_x, \psi_y, 0) \\
&= 2\varepsilon v[\cos(\theta)\cos(x)\sin(y) + \sin(\theta)\sin(x)\cos(y)],
\end{aligned}$$

para calcular os pontos de dobra do campo  $\mathcal{Y}$  avaliamos sobre  $\Sigma_\beta^\pm$ . Assim temos

$$\mathcal{Y}^2 h_\beta^\pm(\mathbf{x}, \beta \pm \varepsilon) = 2\varepsilon v[\cos(\beta \pm \varepsilon)\cos(x)\sin(y) + \sin(\beta \pm \varepsilon)\sin(x)\cos(y)].$$

Em particular, avaliando a igualdade anterior sobre o conjunto  $S_\beta^\pm$  obtemos

$$\mathcal{Y}^2 h_\beta^\pm(\mathbf{x}, \beta \pm \varepsilon) = \begin{cases} 2(-1)^n \varepsilon v \cos(\beta \pm \varepsilon) \sin(y), & \text{se } x = n\pi, \quad y \in [0, 2\pi), \\ 2(-1)^n \varepsilon v \sin(\beta \pm \varepsilon) \sin(x), & \text{se } y = n\pi, \quad x \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Concluimos que os pontos de dobra pertencem ao conjunto  $S_\beta^\pm - \{0, \pi\} \times \{0, \pi\}$ , i.e. as conexões heteroclínicas do campo  $\mathcal{X}$  sobre o plano  $\Sigma_\beta^\pm$ .

Como já dissemos antes, no caso de natação, por causa da escolha da velocidade, usamos teoria da perturbação para aproximar a trajetória de uma partícula como uma série de potências do parâmetro perturbativo  $\varepsilon$ . Em geral podemos fazer isso até qualquer ordem  $n$ . Porém, para  $\varepsilon$  pequeno, é suficiente usar uma aproximação até a primeira já que os resultados obtidos coincidem com os numéricos e são, analiticamente, menos complicados de usar.

Durante a natação, i.e. quando  $\theta \in [\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon]$ , a velocidade é dada por

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 2\varepsilon \sin(x)\cos(y) + v\cos(\theta), \\
\dot{y} &= -2\varepsilon \cos(x)\sin(y) + v\sin(\theta), \\
\dot{\theta} &= 2\varepsilon \sin(x)\sin(y),
\end{aligned} \tag{5.8}$$

A seguir, escrevemos as coordenadas  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $\theta(t)$  na forma

$$\begin{aligned}
x(t) &= X^0(t) + \varepsilon X^1(t), \\
y(t) &= Y^0(t) + \varepsilon Y^1(t), \\
\theta(t) &= \vartheta^0(t) + \varepsilon \vartheta^1(t),
\end{aligned}$$

as quais, depois de derivar, são substituídas em 5.8 para assim obter

$$\begin{aligned}\dot{X}^0 + \varepsilon\dot{X}^1 &= 2\varepsilon\text{sen}(X^0 + \varepsilon X^1)\cos(Y^0 + \varepsilon Y^1) + v\cos(\vartheta^0 + \varepsilon\vartheta^1), \\ \dot{Y}^0 + \varepsilon\dot{Y}^1 &= -2\varepsilon\cos(X^0 + \varepsilon X^1)\text{sen}(Y^0 + \varepsilon Y^1) + v\text{sen}(\vartheta^0 + \varepsilon\vartheta^1), \\ \dot{\vartheta}^0 + \varepsilon\dot{\vartheta}^1 &= 2\varepsilon\text{sen}(X^0 + \varepsilon X^1)\text{sen}(Y^0 + \varepsilon Y^1).\end{aligned}\tag{5.9}$$

As condições iniciais são

$$\begin{aligned}X^0(0) + \varepsilon X^1(0) &= x_0, \\ Y^0(0) + \varepsilon Y^1(0) &= y_0, \\ \vartheta^0(0) + \varepsilon\vartheta^1(0) &= \beta \pm \varepsilon,\end{aligned}$$

o que dá como resultado

$$\begin{aligned}X^0(0) &= x_0, \quad X^1(0) = 0, \\ Y^0(0) &= y_0, \quad Y^1(0) = 0, \\ \vartheta^0(0) &= \beta, \quad \vartheta^1(0) = \pm 1.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Na equação 5.9, desenvolvemos os termos do lado direito e omitimos os termos de segunda ordem pois o lado esquerdo é de ordem 1, obtemos assim

$$\begin{aligned}\dot{X}^0 + \varepsilon\dot{X}^1 &= 2\varepsilon[\text{sen}(X^0) + \varepsilon X^1\cos(X^0)][\cos(Y^0) - \varepsilon Y^1\text{sen}(Y^0)] + v[\cos(\vartheta^0) - \varepsilon\vartheta^1\text{sen}(\vartheta^0)] \\ &= 2\varepsilon\text{sen}(X^0)\cos(Y^0) + v[\cos(\vartheta^0) - \varepsilon\vartheta^1\text{sen}(\vartheta^0)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \dot{Y}^0 + \varepsilon\dot{Y}^1 &= -2\varepsilon[\cos(X^0) - \varepsilon X^1\text{sen}(X^0)][\text{sen}(Y^0) + \varepsilon Y^1\cos(Y^0)] + v[\text{sen}(\vartheta^0) + \varepsilon\vartheta^1\cos(\vartheta^0)] \\ &= -2\varepsilon\cos(X^0)\text{sen}(Y^0) + v[\text{sen}(\vartheta^0) + \varepsilon\vartheta^1\cos(\vartheta^0)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \dot{\vartheta}^0 + \varepsilon\dot{\vartheta}^1 &= 2\varepsilon[\text{sen}(X^0) + \varepsilon X^1\cos(X^0)][\text{sen}(Y^0) + \varepsilon Y^1\cos(Y^0)], \\ &= 2\varepsilon\text{sen}(X^0)\text{sen}(Y^0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Ao comparar termos semelhantes obtemos as seis equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}^0 &= 0, \\ \dot{X}^0 &= v\cos(\vartheta^0), \\ \dot{Y}^0 &= v\text{sen}(\vartheta^0), \\ \dot{\vartheta}^1 &= 2\text{sen}(X^0)\text{sen}(Y^0), \\ \dot{X}^1 &= 2\text{sen}(X^0)\cos(Y^0) - v\vartheta^1\text{sen}(\vartheta^0), \\ \dot{Y}^1 &= -2\cos(X^0)\text{sen}(Y^0) + v\vartheta^1\cos(\vartheta^0).\end{aligned}$$

Usando as condições iniciais dadas em 5.10 podemos resolver as três primeiras equações facilmente obtendo-se

$$\begin{aligned}\vartheta^0(t) &= \beta, \\ X^0(t) &= x_0 + v\cos(\beta)t, \\ Y^0(t) &= y_0 + v\sen(\beta)t.\end{aligned}$$

O resultado anterior é usado para calcular as aproximações de primeira ordem, as respectivas equações são

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}^1 &= 2\sen(x_0 + v\cos(\beta)t)\sen(y_0 + v\sen(\beta)t), \\ \dot{X}^1 &= 2\sen(x_0 + v\cos(\beta)t)\cos(y_0 + v\sen(\beta)t) - v\vartheta^1\sen(\beta), \\ \dot{Y}^1 &= -2\cos(x_0 + v\cos(\beta)t)\sen(y_0 + v\sen(\beta)t) + v\vartheta^1\cos(\beta).\end{aligned}\tag{5.11}$$

Para simplificar as contas, a partir de agora define-se

$$\begin{aligned}p_0 &= x_0 + y_0, \\ q_0 &= x_0 - y_0, \\ A_\beta &= v(\cos(\beta) + \sen(\beta)), \\ B_\beta &= v(\cos(\beta) - \sen(\beta)).\end{aligned}\tag{5.12}$$

Usando a notação anterior, da primeira equação 5.11 obtemos

$$\begin{aligned}\vartheta^1(t) &= \vartheta^1(0) + 2 \int_0^t \sen(x_0 + v\cos(\beta)\tau)\sen(y_0 + v\sen(\beta)\tau)d\tau \\ &= \pm 1 + \Theta(t; \beta),\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\Theta(t; \beta) &= 2 \int_0^t \sen(x_0 + v\cos(\beta)\tau)\sen(y_0 + v\sen(\beta)\tau)d\tau \\ &= \int_0^t [\cos(q_0 + B_\beta\tau) - \cos(p_0 + A_\beta\tau)]d\tau \\ &= \frac{\sen(q_0 + B_\beta t) - \sen(q_0)}{B_\beta} - \frac{\sen(p_0 + A_\beta t) - \sen(p_0)}{A_\beta}.\end{aligned}$$

Para a segunda equação 5.11 temos

$$\begin{aligned}X^1(t) &= 2 \int_0^t \sen(x_0 + v\cos(\beta)\tau)\cos(y_0 + v\sen(\beta)\tau)d\tau - v\sen(\beta) \int_0^t \vartheta^1(\tau)d\tau \\ &= \chi(t; \beta) - v\sen(\beta)\Lambda(t; \beta),\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\chi(t; \beta) &= 2 \int_0^t \text{sen}(x_0 + v\cos(\beta)\tau)\cos(y_0 + v\text{sen}(\beta)\tau)d\tau \\ &= \int_0^t [\text{sen}(p_0 + A_\beta\tau) + \text{sen}(q_0 + B_\beta\tau)]d\tau \\ &= \frac{\cos(p_0) - \cos(p_0 + A_\beta t)}{A_\beta} + \frac{\cos(q_0) - \cos(q_0 + B_\beta t)}{B_\beta}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Lambda(t; \beta) &= \int_0^t \vartheta^1(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \left\{ \pm 1 + \left[ \frac{\text{sen}(q_0 + B_\beta\tau) - \text{sen}(q_0)}{B_\beta} - \frac{\text{sen}(p_0 + A_\beta\tau) - \text{sen}(p_0)}{A_\beta} \right] \right\} d\tau \\ &= \pm t + \left[ \frac{\cos(q_0) - \cos(q_0 + B_\beta t)}{B_\beta^2} - \frac{\text{sen}(q_0)t}{B_\beta} - \frac{\cos(p_0) - \cos(p_0 + A_\beta t)}{A_\beta^2} + \frac{\text{sen}(p_0)t}{A_\beta} \right].\end{aligned}$$

Finalmente, para a terceira equação 5.11 temos

$$\begin{aligned}Y^1(t) &= -2 \int_0^t \cos(x_0 + v\cos(\beta)\tau)\text{sen}(y_0 + v\text{sen}(\beta)\tau)d\tau + v\cos(\beta) \int_0^t \vartheta^1(\tau)d\tau \\ &= -\Gamma(t; \beta) + v\cos(\beta)\Lambda(t; \beta).\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\Gamma(t; \beta) &= 2 \int_0^t \cos(x_0 + v\cos(\beta)\tau)\text{sen}(y_0 + v\text{sen}(\beta)\tau)d\tau \\ &= \int_0^t [\text{sen}(p_0 + A_\beta\tau) - \text{sen}(q_0 + B_\beta\tau)]d\tau \\ &= \frac{\cos(p_0) - \cos(p_0 + A_\beta t)}{A_\beta} - \frac{\cos(q_0) - \cos(q_0 + B_\beta t)}{B_\beta}\end{aligned}$$

e  $\Lambda(t; \beta)$  calculada anteriormente.

### 5.1.1 Caso Particular: $\beta = 0$

Estudamos agora o caso  $\beta = 0$ , em outras palavras, o caso em que a partícula pretende nadar aproximadamente de forma horizontal. Isso acontecerá quando  $\theta \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$ .

Começamos com as coordenadas espaciais calculando os valores de  $\chi(t; \beta)$ ,  $\Lambda(t; \beta)$  e  $\Gamma(t; \beta)$  quando  $\beta = 0$ . Note primeiro que de acordo com 5.12 temos  $A_0 = B_0 = v$ . Logo

$$\begin{aligned}\chi(t; 0) &= \frac{1}{v} \left[ \cos(p_0) + \cos(q_0) - \cos(p_0 + vt) - \cos(q_0 + vt) \right] \\ &= \frac{1}{v} \left[ 2\cos(x_0)\cos(y_0) - 2\cos(x_0 + vt)\cos(y_0) \right] \\ &= \frac{2\cos(y_0)}{v} \left[ \cos(x_0) - \cos(x_0 + vt) \right].\end{aligned}$$

De forma análoga

$$\begin{aligned}\Lambda(t; 0) &= \pm t + \left[ \frac{\cos(q_0) - \cos(q_0 + vt)}{v^2} - \frac{\text{sen}(q_0)t}{v} - \frac{\cos(p_0) - \cos(p_0 + vt)}{v^2} + \frac{\text{sen}(p_0)t}{v} \right] \\ &= \pm t + \frac{1}{v^2} \left[ \cos(q_0) - \cos(p_0) - \cos(q_0 + vt) + \cos(p_0 + vt) \right] + \frac{1}{v} \left[ \text{sen}(p_0) - \text{sen}(q_0) \right] t \\ &= \pm t + \frac{2}{v^2} \left[ \text{sen}(x_0)\text{sen}(y_0) - \text{sen}(x_0 + vt)\text{sen}(y_0) \right] + \frac{2\cos(x_0)\text{sen}(y_0)}{v} t \\ &= \pm t + \frac{2\text{sen}(y_0)}{v^2} \left[ \text{sen}(x_0) - \text{sen}(x_0 + vt) \right] + \frac{2\cos(x_0)\text{sen}(y_0)}{v} t.\end{aligned}$$

Agora calculamos  $\Gamma(t; 0)$  e obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma(t; 0) &= \frac{1}{v} \left[ \cos(p_0) - \cos(p_0 + vt) - \cos(q_0) + \cos(q_0 + vt) \right] \\ &= \frac{1}{v} \left[ \cos(p_0) - \cos(q_0) - \cos(p_0 + vt) + \cos(q_0 + vt) \right] \\ &= \frac{1}{v} \left[ -2\text{sen}(x_0)\text{sen}(y_0) + 2\text{sen}(x_0 + vt)\text{sen}(y_0) \right] \\ &= \frac{2\text{sen}(y_0)}{v} \left[ \text{sen}(x_0 + vt) - \text{sen}(x_0) \right].\end{aligned}$$

Finalmente, para a coordenada angular temos que calcular  $\Theta(t; 0)$ . Então

$$\begin{aligned}\Theta(t; 0) &= \frac{1}{v} \left[ \text{sen}(q_0 + vt) - \text{sen}(q_0) - \text{sen}(p_0 + vt) + \text{sen}(p_0) \right] \\ &= \frac{2\text{sen}(y_0)}{v} \left[ \cos(x_0) - \cos(x_0 + vt) \right].\end{aligned}$$

Com os resultados anteriores obtemos, em primeira ordem, as equações que descrevem as trajetórias durante a autopropulsão quando o ângulo pretendido,  $\beta$ , é nulo, i.e. quando se pretende autopropulsão horizontal. Essas equações são

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + vt + \frac{2\varepsilon\cos(y_0)}{v} \left[ \cos(x_0) - \cos(x_0 + vt) \right], \\ y(t) &= y_0 \pm v\varepsilon t + \frac{4\varepsilon\text{sen}(y_0)}{v} \left[ \text{sen}(x_0) - \text{sen}(x_0 + vt) \right] + 2\varepsilon\cos(x_0)\text{sen}(y_0)t, \\ \theta(t) &= \pm\varepsilon + \frac{2\varepsilon\text{sen}(y_0)}{v} \left[ \cos(x_0) - \cos(x_0 + vt) \right].\end{aligned}\tag{5.13}$$

Assim, durante a natação, definimos o fluxo

$$\varphi_{\mathbf{y}}^{\pm}(t, \mathbf{x}, \theta) = \varphi_{\mathbf{y}}^{\pm}(t, \mathbf{x}, \theta; \varepsilon, v) = (x(t), y(t), \theta(t)),$$

com  $(x(t), y(t), \theta(t))$  dado por 5.13. Obviamente, a escolha do sinal depende do plano onde a partícula inicia a natação.

A parametrização sem autopropulsão é calculada analiticamente no Anexo B e será representada por  $\varphi_{\mathcal{X}}(t, \mathbf{x}, \theta)$ .

Por causa da descontinuidade do campo de velocidades nos planos  $\Sigma_0^{\pm}$  é natural definirmos um mapa de Poincaré sobre alguma dessas superfícies.

## 5.2 MAPA DE POINCARÉ: $\theta = -\varepsilon$

Nesta seção definimos um mapa de Poincaré para o sistema 5.8 com a velocidade de natação dada pela equação 5.2. O caso estudado é quando a direção pretendida é horizontal, i.e.  $\beta = 0$ . Note que o mapa é válido em primeira ordem por causa da parametrização das trajetórias durante a natação.

Lembre que temos duas superfícies de descontinuidade,  $\Sigma_0^{\pm} = \{(\mathbf{x}, \theta) \in \mathcal{M} : \theta = \pm\varepsilon\}$ , em particular escolhemos o plano  $\Sigma_0^-$ . Porém a escolha é irrelevante pois os mesmos resultados são obtidos com o plano  $\Sigma_0^+$ . Inclusive, sem perda de generalidade, podemos estudar o comportamento das trajetórias nas regiões  $\Omega_1 = (0, \pi) \times (0, \pi)$  e  $\Omega_2 = (\pi, 2\pi) \times (0, \pi)$ , onde, por causa da costura, já garantimos a existência e unicidade da solução.

Seja  $(\mathbf{x}_0, -\varepsilon) \in \Sigma_0^-$ . Definimos o mapa de Poincaré como o primeiro retorno da trajetória com condição inicial  $(\mathbf{x}_0, -\varepsilon) \in \Sigma_0^-$  no plano  $\Sigma_0^-$ , i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \Sigma_0^- &\rightarrow \Sigma_0^- \\ (\mathbf{x}_0, -\varepsilon) &\mapsto \varphi_{\mathcal{F}}(\tau, \mathbf{x}_0, -\varepsilon), \end{aligned}$$

onde  $\tau$  é o tempo do primeiro retorno em  $\Sigma_0^-$ . Note que o mapa anterior representa as posições da partícula no plano  $\Sigma_0^-$  nos instantes em que ou inicia ou termina sua

natação. Na definição anterior,  $\varphi_{\mathcal{F}}$  representa o fluxo associado ao campo dado por 5.4 e está definido pelas concatenações dos fluxos  $\varphi_{\mathcal{X}}$  e  $\varphi_{\mathcal{Y}}^{\pm}$  de acordo com as convenções de Filippov estabelecidas na seção 2.3.

Para simplificar as contas, para  $\mathbf{x} = (x, y)$ , definimos

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \cos(x) - \frac{v}{\text{sen}(y)}, & \text{se } (x, y) \in \Omega_1, \\ \cos(x) + \frac{v}{\text{sen}(y)}, & \text{se } (x, y) \in \Omega_2. \end{cases}$$

### 5.2.1 Natação sobre $\Omega_1 = (0, \pi) \times (0, \pi)$

Seja  $(\mathbf{x}_0, -\varepsilon)$  uma condição inicial tal que  $\mathbf{x}_0 \in \Omega_1$ . Então, já que  $\dot{\theta}(t) > 0$  sobre essa região, temos que  $\theta(t)$  aumenta à medida que o tempo passa. Assim, a partícula possuirá natação desde o tempo inicial e existem duas possibilidades: i) a partícula acaba sua natação na mesma região  $\Omega_1$ , i.e. quando  $\theta = +\varepsilon$ , ou ii) a partícula acaba sua natação na região  $\Omega_2$ , i.e. quando  $\theta = -\varepsilon$ , novamente.

Por outro lado, seja  $\theta(t)$  definida como na equação 5.13. Não é difícil demonstrar que sua derivada é dada por

$$\dot{\theta}(t) = 2\varepsilon \text{sen}(x_0 + vt) \text{sen}(y_0),$$

Seja  $t^*$  tal que  $\dot{\theta}(t^*) = 0$ . Note que isso só pode ocorrer quando  $\text{sen}(x_0 + vt^*) = 0$  e assim  $t^* = t_n^* = \frac{n\pi - x_0}{v}$ , com  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Também pelo critério da segunda derivada temos

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t_n^*) &= 2v\varepsilon \cos(x_0 + vt_n^*) \text{sen}(y_0) \\ &= 2v\varepsilon \cos(n\pi) \text{sen}(y_0) \\ &= 2v\varepsilon (-1)^n \text{sen}(y_0). \end{aligned}$$

Concluimos que  $\theta(t_n^*)$  é um valor máximo se  $n$  é ímpar e mínimo se  $n$  é par. O valor extremo é dado por

$$\theta(t_n^*) = -\varepsilon + \frac{2\varepsilon \text{sen}(y_0)}{v} \left[ \cos(x_0) - (-1)^n \right]. \quad (5.14)$$

Suponha inicialmente que  $\theta(t_1^*) \notin [-\varepsilon, +\varepsilon]$ , i.e.  $\theta(t_1^*) > \varepsilon$ . O caso anterior significa que, no intervalo  $[0, t_1^*]$ , o comportamento de  $\theta(t)$  será sempre crescente e a natação

acabará na região  $\Omega_1$ , pois  $\theta(t)$  atingirá primeiro o valor  $+\varepsilon$ . Depois de atingir esse valor a trajetória da partícula será descrita por uma curva de nível da função corrente  $\psi(x, y) = \text{sen}(x)\text{sen}(y)$ , o que significa que a partícula estará sob advecção. Note que essa curva de nível de  $\psi$  depende da posição da partícula quando acaba sua natação. Por outro lado, o comportamento de  $\theta$  continuará sendo crescente e a natação aparecerá novamente só quando  $\theta = 2\pi - \varepsilon \equiv -\varepsilon$ , i.e. ao atravessar novamente o plano  $\theta = -\varepsilon$ .

Suponha agora que  $\theta(t_1^*) \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$ . Isso significa que a função  $\theta(t)$  atingirá seu valor máximo quando ainda está em natação (isso acontece ao atravessar o eixo  $x = \pi$ , i.e. na região  $\Omega_2$ ). A função  $\theta(t)$  será decrescente depois de atingir esse valor máximo e a partícula, que agora está nadando sobre  $\Omega_2$ , deixará de fazê-lo quando atravessar novamente o plano  $\theta = -\varepsilon$ .

Os comentários anteriores podem ser resumidos no seguinte teorema.

**Teorema 5.2.** *Seja  $(\mathbf{x}_0, -\varepsilon)$ , com  $\mathbf{x}_0 \in \Omega_1$ , a condição inicial de uma partícula. Então temos duas possibilidades:*

- i) *Se  $-1 < \mathcal{G}(\mathbf{x}_0)$ , a partícula acaba sua natação quando  $\theta = +\varepsilon$ . O tempo necessário para isso é*

$$t_s = \frac{\alpha - x_0}{v},$$

*e as coordenadas ao finalizar a natação pertencem também à região  $\Omega_1$  e são dadas por*

$$\begin{aligned} x_s &= \alpha + 2\varepsilon \cotg(y_0), \\ y_s &= y_0 + \varepsilon \left( \alpha - x_0 \right) \left( \frac{2\text{sen}(y_0)\cos(x_0)}{v} - 1 \right) - \frac{4\varepsilon\text{sen}(y_0)}{v} \left( \text{sen}(\alpha) - \text{sen}(x_0) \right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

*com  $\alpha = \arccos(\mathcal{G}(\mathbf{x}_0))$ .*

- ii) *Se  $\mathcal{G}(\mathbf{x}_0) \leq -1$ , a partícula acaba sua natação quando  $\theta = -\varepsilon$ . O tempo necessário para isso é*

$$t_1 = \frac{2(\pi - x_0)}{v},$$

*e as coordenadas ao finalizar a natação pertencem à região  $\Omega_2$  e são dadas por*

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\pi - x_0, \\ y_1 &= y_0 - 2\varepsilon(\pi - x_0) + \frac{4\varepsilon\text{sen}(y_0)}{v} \left( (\pi - x_0)\cos(x_0) + 2\text{sen}(x_0) \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

*Demonstração:*

i) Partindo da desigualdade  $-1 < \mathcal{G}(\mathbf{x}_0)$  obtemos

$$1 < \frac{\text{sen}(y_0)}{v} \left[ \cos(x_0) + 1 \right]$$

e logo, multiplicando por  $2\varepsilon$  e subtraindo  $\varepsilon$  em ambos os lados da desigualdade obtemos

$$\varepsilon < -\varepsilon + \frac{2\varepsilon \text{sen}(y_0)}{v} \left[ \cos(x_0) + 1 \right].$$

A desigualdade anterior significa que  $\theta(t_1^*) > \varepsilon$ , com  $\theta(t_1^*)$  calculado na equação 5.14. Isso significa que  $\theta(t)$  é crescente no intervalo  $[-\varepsilon, +\varepsilon]$  ou, equivalentemente, a natação terminará em  $\Omega_1$ . Então existe  $t_s$  tal que  $\theta(t_s) = +\varepsilon$ .

Para calcular o tempo de natação devemos resolver  $\theta(t_s) = +\varepsilon$ , i.e.

$$-\varepsilon + \frac{2\varepsilon \text{sen}(y_0)}{v} \left[ \cos(x_0) - \cos(x_0 + vt_s) \right] = +\varepsilon,$$

ou, equivalentemente

$$\begin{aligned} \cos(x_0 + vt_s) &= \cos(x_0) - \frac{v}{\text{sen}(y_0)} \\ &= \mathcal{G}(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

E já que  $-1 < \mathcal{G}(\mathbf{x}_0) < 1$  é possível isolar  $t_s$  na equação anterior e assim

$$t_s = \frac{\arccos(\mathcal{G}(\mathbf{x}_0)) - x_0}{v}.$$

Finalmente, a posição da partícula quando a natação acaba é obtida substituindo o tempo  $t_s$  na equação 5.13, i.e.

$$(\mathbf{x}_s, +\varepsilon) = \varphi_{\mathbf{y}}^-(t_s, \mathbf{x}_0, -\varepsilon).$$

Assim obtemos o resultado da equação 5.15.

ii) Fazendo contas semelhantes ao caso anterior temos

$$-\varepsilon + \frac{2\varepsilon \text{sen}(y_0)}{v} \left[ \cos(x_0) + 1 \right] \leq \varepsilon.$$

Então agora temos que  $\theta(t_1^*) \leq \varepsilon$ . Assim  $\theta(t)$  atinge seu máximo dentro da faixa de natação. Então, depois de atingir esse máximo, seu comportamento será decrescente. Isso significa que a natação continuará na região  $\Omega_2$  pois a derivada de  $\theta(t)$  mudou de sinal. Falta demonstrar que a natação acaba nessa região, i.e. que o comportamento de  $\theta(t)$  será decrescente até atravessar o plano  $\theta = -\varepsilon$ , novamente.

Para demonstrar que a natação acaba em  $\Omega_2$ , fazemos a suposição oposta, i.e. supomos que a natação acaba na região  $(2\pi, 3\pi) \times (0, \pi) \equiv \Omega_1$ . E já que sobre  $\Omega_1$  a função  $\theta(t)$  é crescente concluímos que  $\theta(t)$  também atingiu seu mínimo no intervalo  $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ , o que acontece no tempo

$$t_2^* = \frac{2\pi - x_0}{v}.$$

Nesse instante a desigualdade

$$\theta(t_2^*) = -\varepsilon + \frac{2\varepsilon \operatorname{sen}(y_0)}{v} \left[ \cos(x_0) - 1 \right] \geq -\varepsilon,$$

deveria ser satisfeita. Isso implicaria que  $\cos(x_0) \geq 1$  o que é válido se e somente se  $x_0 = 2\pi m$ , com  $m \in \mathbb{Z}$ . Porém, pela definição de  $x_0$  (lembre que  $x_0 \in (0, \pi)$ ), essa conclusão é absurda. Assim a natação da partícula acaba na região  $\Omega_2$ , i.e. existe  $t_1$  tal que  $\theta(t_1) = -\varepsilon$ .

Para calcular o tempo de natação resolvemos  $\theta(t_1) = -\varepsilon$  e então tem-se

$$-\varepsilon + \frac{2\varepsilon \operatorname{sen}(y_0)}{v} \left[ \cos(x_0) - \cos(x_0 + vt_1) \right] = -\varepsilon.$$

A igualdade anterior é válida somente se

$$\cos(x_0) = \cos(x_0 + vt_1),$$

ou, equivalentemente, se

$$2x_0 + vt_1 = 2\pi.$$

Então, podemos isolar  $t_1$  para obter

$$t_1 = \frac{2(\pi - x_0)}{v}.$$

Finalmente, as coordenadas onde a natação acaba são obtidas substituindo  $t_1$  na equação 5.13, i.e.

$$(\mathbf{x}_1, -\varepsilon) = \varphi_{\mathbf{y}}^-(t_1, \mathbf{x}_0, -\varepsilon).$$

A igualdade anterior dá como resultado a equação 5.16.



Note que no segundo dos casos anteriores, a partícula já retornou ao plano  $\Sigma_0^-$  quando acabou sua autopropulsão, i.e. no instante  $t_1$ . No entanto, no primeiro caso, ela continuará sua viagem sem autopropulsão sobre uma linha de corrente a partir do instante  $t_s$ . Essa linha de corrente está na região  $\Omega_1$ . A partir do instante  $t_s$  o ângulo  $\theta(t)$  terá crescimento linear e proporcional a  $\psi(\mathbf{x}_s)$ . Então,  $\theta(t)$  satisfaz o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= 2\varepsilon\psi(\mathbf{x}_s), \\ \theta(t_s) &= \varepsilon.\end{aligned}$$

O problema anterior pode ser resolvido facilmente e assim

$$\theta(t) = 2\varepsilon\psi(\mathbf{x}_s)(t - t_s) + \varepsilon.$$

Usando a equação anterior podemos calcular o instante quando  $\theta = 2\pi - \varepsilon \equiv -\varepsilon$ , i.e. quando a partícula atravessa novamente o plano  $\Sigma_0^-$ . Esse instante é dado por

$$t_1 = \frac{\pi - \varepsilon}{\varepsilon\psi(\mathbf{x}_s)} + t_s.$$

Finalmente, a posição da partícula no instante  $t_1$  é

$$(\mathbf{x}_1, -\varepsilon) = \varphi_{\mathcal{X}}(t_1 - t_s, \mathbf{x}_s, +\varepsilon).$$

Assim, obtemos o primeiro retorno da partícula ao plano  $\Sigma_0^-$ .

Como consequência do teorema anterior, a região  $\Omega_1$  foi dividida em duas subregiões. Uma delas corresponde a condições iniciais cujas imagens sob o mapa de Poincaré estão dentro de  $\Omega_1$ . A outra corresponde a condições iniciais com imagens sob o mapa de Poincaré dentro da região  $\Omega_2$ . Na figura 27 pode-se ver essas duas regiões. Na figura 29 podem-se ver iterações dessas regiões sob o mapa de Poincaré.

### 5.2.2 Natação sobre $\Omega_2 = (\pi, 2\pi) \times (0, \pi)$

Seja agora  $(\mathbf{x}_0, -\varepsilon)$  uma condição inicial tal que  $\mathbf{x}_0 \in \Omega_2$ . Agora  $\dot{\theta}(t) < 0$ . Então a partícula inicialmente não possuirá natação pois  $\theta(t)$  está se afastando do intervalo

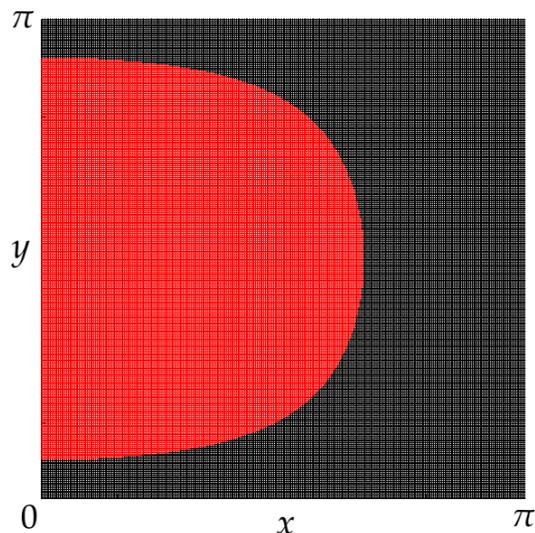


Figura 27: As partículas dentro da região vermelha permanecem em  $\Omega_1$  depois de uma iteração do mapa. As partículas da região preta escapam a  $\Omega_2$  depois de ser iteradas.

$[-\varepsilon, +\varepsilon]$ . A partir desse instante o ângulo  $\theta$  terá decréscimo linear e proporcional a  $\psi(\mathbf{x}_0)$  e satisfaz

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= 2\varepsilon\psi(\mathbf{x}_0), \\ \theta(0) &= -\varepsilon,\end{aligned}$$

com solução dada por

$$\theta(t) = -\varepsilon + 2\varepsilon\psi(\mathbf{x}_0)t.$$

Já que  $\theta(t)$  é uma função decrescente, a natação começará quando  $\theta = -2\pi + \varepsilon \equiv +\varepsilon$ . Usando a equação anterior obtemos que isso acontece no instante

$$\bar{t} = \frac{-\pi + \varepsilon}{\varepsilon\psi(\mathbf{x}_0)},$$

e a posição onde a partícula iniciará sua natação é

$$(\bar{\mathbf{x}}, +\varepsilon) = \varphi_{\mathcal{X}}(\bar{t}, \mathbf{x}_0, -\varepsilon).$$

Depois de começar a natação existem duas possibilidades: i) a natação acaba na região  $\Omega_2$ , i.e. quando  $\theta = -2\pi - \varepsilon \equiv -\varepsilon$  ou ii) a natação acaba na região  $(2\pi, 3\pi) \times (0, \pi) \equiv \Omega_1$ , i.e., quando  $\theta = -2\pi + \varepsilon \equiv +\varepsilon$  novamente.

Por outro lado, já que  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_2$ , a derivada da função  $\theta(t)$  é nula nos instantes  $t_n^{**} = \frac{(n+1) - \bar{x}}{v}$ , com  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Usando o critério da segunda derivada temos que  $\theta(t_n^{**})$  é um valor mínimo se  $n$  é ímpar e é um máximo se  $n$  é par. O valor extremo é

$$\theta(t_n^{**}) = +\varepsilon + \frac{2\varepsilon \operatorname{sen}(\bar{y})}{v} \left[ \cos(\bar{x}) - (-1)^{n+1} \right].$$

Então, de forma semelhante ao teorema anterior podemos concluir que se  $\theta(t_1^{**}) \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$  a partícula acabará sua natação na região  $(2\pi, 3\pi) \times (0, \pi) \equiv \Omega_1$ . Caso contrário, a natação acabará em  $\Omega_2$ .

**Teorema 5.3.** *Suponha que uma partícula inicia sua natação no instante  $\bar{t}$  e com coordenadas  $(\bar{\mathbf{x}}, +\varepsilon)$  onde  $\bar{\mathbf{x}} \in \Omega_2$ . Então, temos duas possibilidades*

i) *Se  $\mathcal{G}(\bar{\mathbf{x}}) < 1$ , a partícula acaba sua natação quando  $\theta = -\varepsilon$ . O tempo necessário para isso é*

$$t_1 = \frac{\alpha - \bar{x}}{v} + \bar{t},$$

*e as coordenadas onde a partícula acaba a natação pertencem também à região  $\Omega_2$  e são dadas por*

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha - 2\varepsilon \operatorname{cotg}(\bar{y}), \\ y_1 &= \bar{y} + \varepsilon \left( \alpha - \bar{x} \right) \left( \frac{2\operatorname{sen}(\bar{y})\cos(\bar{x})}{v} + 1 \right) - \frac{4\varepsilon \operatorname{sen}(\bar{y})}{v} \left( \operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\bar{x}) \right), \end{aligned}$$

*com  $\alpha = 2\pi - \arccos(\mathcal{G}(\bar{\mathbf{x}}))$ .*

ii) *Se  $1 \leq \mathcal{G}(\bar{\mathbf{x}})$ , a partícula acaba sua natação quando  $\theta = +\varepsilon$ . O tempo necessário para isso é dado por*

$$t_s = \frac{4\pi - 2\bar{x}}{v} + \bar{t},$$

*e as coordenadas onde a partícula acaba a natação pertencem à região  $(2\pi, 3\pi) \times (0, \pi) \equiv \Omega_1$  e são dadas por*

$$\begin{aligned} x_s &= 4\pi - \bar{x}, \\ y_s &= \bar{y} + 2\varepsilon(2\pi - \bar{x}) + \frac{4\varepsilon \operatorname{sen}(\bar{y})}{v} \left( (2\pi - \bar{x})\cos(\bar{x}) + 2\operatorname{sen}(\bar{x}) \right). \end{aligned}$$

*Demonstração:*

É semelhante à prova do teorema anterior. ■

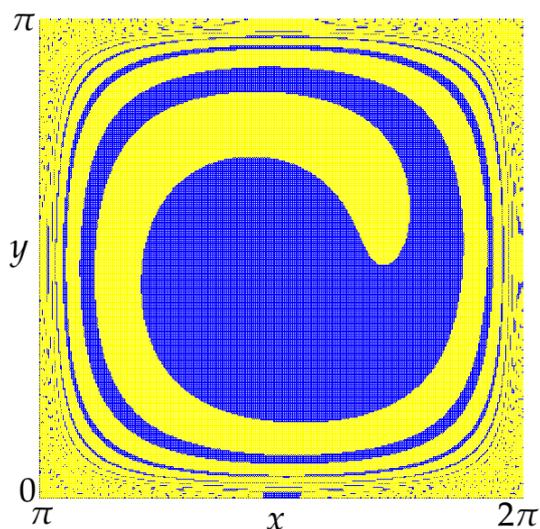


Figura 28: As partículas dentro da região azul permanecem em  $\Omega_2$  depois de uma iteração do mapa. As partículas da região amarela escapam à região  $(2\pi, 3\pi) \times (0, \pi) \equiv \Omega_1$  depois de ser iteradas.

No primeiro dos dois casos anteriores temos que a partícula atravessa novamente o plano  $\Sigma_0^-$  na posição  $(\mathbf{x}_1, -\varepsilon)$ . No segundo caso, a partícula já não possuirá natação e continuará sua trajetória sobre uma linha de corrente. O ângulo crescerá de forma linear e proporcional a  $\psi(\mathbf{x}_s)$ . Para calcular o instante  $t_1$  em que a partícula atravessa o plano  $\Sigma_0^-$  temos que resolver a equação diferencial

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= 2\varepsilon\tilde{\psi}(\mathbf{x}_s), \\ \theta(t_s) &= -2\pi + \varepsilon,\end{aligned}$$

cuja solução é

$$\theta(t) = -2\pi + \varepsilon + 2\varepsilon\psi(\mathbf{x}_s)(t - t_s).$$

Assim obtemos o instante  $t_1$  quando  $\theta = -\varepsilon$ . Esse instante é

$$t_1 = \frac{\pi - \varepsilon}{\varepsilon\psi(\mathbf{x}_s)} + t_s.$$

Então, a posição final ao atravessar  $\Sigma_0^-$  é dada por  $(\mathbf{x}_1, -\varepsilon) = \varphi_{\mathbf{x}}(t_1 - t_s, \mathbf{x}_s, +\varepsilon)$ .

Do teorema anterior concluímos que a região  $\Omega_2$  está dividida em duas subregiões. Uma corresponde a condições iniciais cujas imagens sob o mapa de Poincaré permanecem

em  $\Omega_2$  e a outra corresponde a condições iniciais que escapam de  $\Omega_2$  (i.e. retornam a  $\Omega_1$ ). Na figura 28 podemos ver essas duas regiões. Na figura 29 podemos ver iterações dessas regiões sob o mapa de Poincaré.

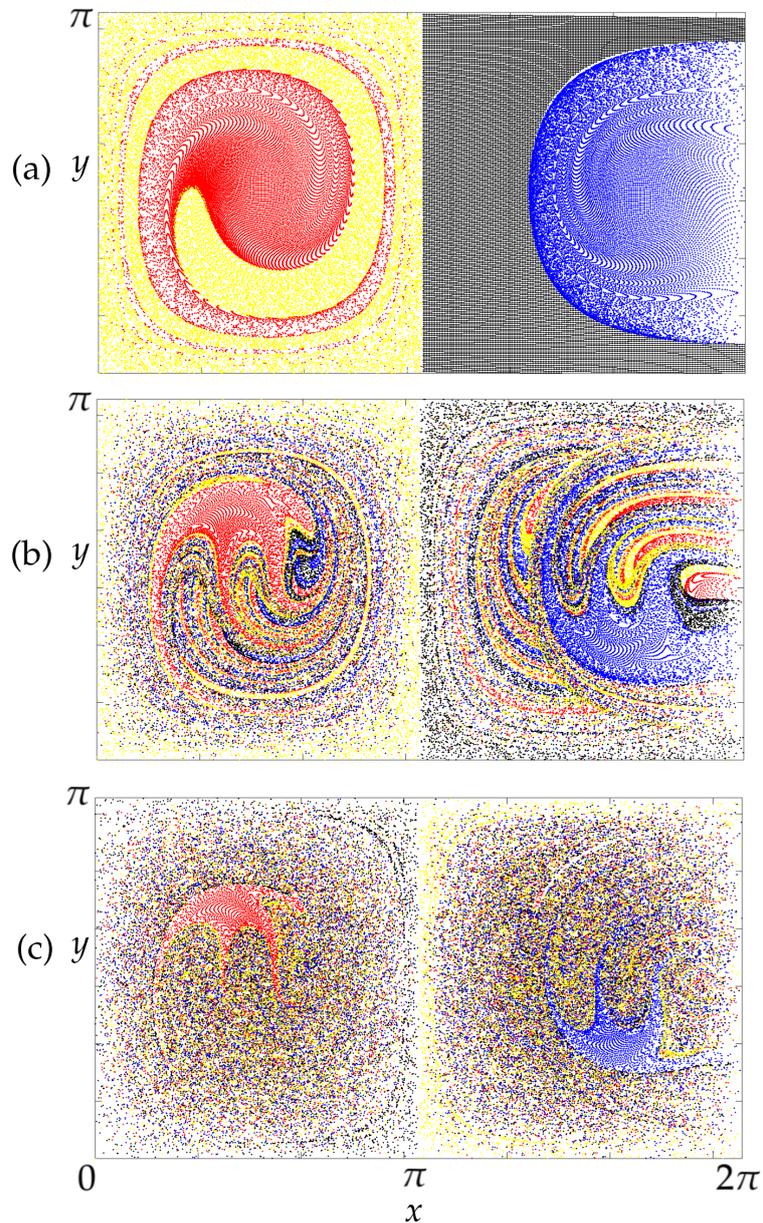


Figura 29: Iterações do mapa de Poincaré das regiões  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . (a) Uma iteração. (b) Cinco iterações. (c) Dez iterações. As cores correspondem às mesmas que as respectivas regiões nas figuras 27 e 28.



# 6

## CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Esta tese pretendeu contribuir em duas linhas de pesquisa na área de dinâmica de partículas autopropelidas em escoamentos. A primeira linha corresponde a partículas pontuais, onde buscamos aprofundar e estender resultados anteriores que indicavam, para uma escolha particular dos parâmetros, a vantagem de uma natação com modulação temporal na velocidade sobre a natação com velocidade constante na situação em que essas velocidades são, em média, iguais. Mostramos que, de fato, essa vantagem é observada em toda a ampla região do espaço de parâmetros que investigamos aqui. Ao mesmo tempo, nossa análise indica as escolhas dos parâmetros que mais promovem o transporte das partículas autopropelidas. Nossa abordagem foi tanto analítica, em que nos valem de técnicas de caos de separatriz, notadamente com o uso do mapa da separatriz, como numérica. Esses resultados estão detalhados no artigo que corresponde ao Anexo A.

Um resultado mais surpreendente nessa linha, e que ainda não foi reportado em artigo, é que mesmo na situação em que a velocidade constante de autopropulsão é, em cada instante, maior ou igual à velocidade temporalmente modulada, há regiões do espaço de parâmetros em que a modulação temporal aumenta a medida do conjunto de condições iniciais de soluções que não ficam aprisionadas pelas barreiras de transporte do escoamento. Essa descoberta está apresentada na seção 4.2. Os resultados acima podem ter aplicação, por exemplo, na confecção industrial de dispositivos autopropelidos com melhor desempenho.

O nosso estudo na linha de pesquisa de partículas pontuais tem possibilidades de extensões interessantes. A primeira, que o autor já está explorando, corresponde a encontrar um critério geral, i.e., independente do modelo de escoamento, que mostre as condições necessárias para que a modulação temporal seja melhor promotora do transporte mesmo na situação descrita no parágrafo anterior. Outra extensão impor-

tante seria estudar os efeitos do movimento Browniano sobre as eficiências de transporte.

A segunda linha de pesquisa a que nos dedicamos foi a de partículas não pontuais, que possuem dinâmica interna devido à sua forma. Mais especificamente, a sua orientação é modificada pelo escoamento de acordo com a equação de Jeffery. Em particular estudamos partículas esferoidais com autopropulsão na direção de orientação. Com vistas à modelagem da situação em que as partículas buscam maximizar o movimento ao longo de uma dada direção, o que é relevante por exemplo em fototaxia, consideramos a velocidade de autopropulsão como constante quando a orientação das partículas é próxima de tal direção e, de outro modo, nula. O campo de velocidades resultante é descontínuo, o que nos levou a estudar o problema usando o formalismo de sistemas de Filippov. A ferramenta mais importante nesse contexto foi a derivada de Lie, que nos permitiu caracterizar o tipo de descontinuidade e fazer uma descrição do campo de velocidades. Primeiramente, usando teoria de perturbação singular, obtivemos a solução do fluxo descontínuo em primeira ordem para caracterizar o retrato de fase. A seguir, definimos o mapa de Poincaré, válido também até a primeira ordem, sobre um dos planos de descontinuidade, e ilustramos sua ação em todo o domínio.

Como perspectiva do nosso trabalho nessa segunda linha, destacamos o uso do mapa de Poincaré que derivamos para a quantificação da eficiência de transporte em função do parâmetro perturbativo. Outra extensão interessante que se coloca é a consideração do caso de partículas elipsoidais, descritas pela mesma equação de Jeffery usada aqui mas com parâmetro de excentricidade  $\lambda$  diferente de zero.

# **Anexos**



ANEXO A: ARTIGO 'SWIMMING ALONG  
A FIXED DIRECTION IN STEADY  
FLOWS'

# Swimming along a fixed direction in steady flows: constant *versus* periodically modulated self-propulsion velocity

Alfredo Jara Grados<sup>1</sup>, Rafael Dias Vilela

*Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, Santo André-SP, Brazil*

---

## Abstract

Two models of self-propulsion of tiny particles in a steady two-dimensional flow corresponding to convective cells with transport barriers are studied. The goal is to determine the most efficient model to foster the transport of particles along a predetermined direction. In both models the self-propulsion velocity of the particles is, at any instant, along the predetermined direction. The first model corresponds to self-propulsion with constant speed and the second model corresponds to self-propulsion with a sinusoidal temporal modulation of the speed. The main motivating question is: which of the models considered leads to a larger set of initial conditions of trajectories which do not remain confined in a bounded region of the physical space? We use numerical and analytical methods to address this question.

*Keywords:* Self-propelled particles; phototaxis; separatrix map.

---

## 1. Introduction

In this paper we investigate the dynamics of very small swimming particles in a steady two-dimensional flow. The particles can represent, for instance, microorganisms or artificial microswimmers [1]. In processes such as phototaxis, swimmers may target a distant source, which effectively leads them to seek a long-range net motion along a predetermined direction. In the presence

---

<sup>1</sup>alfredo.jara@ufabc.edu.br

of transport barriers of the fluid flow, the particles can adopt different strategies. Here, we study two such strategies, which we also refer to as *models*. In both, the self-propulsion velocity is along the predetermined direction. The first model corresponds to self-propulsion with constant speed and the second one corresponds to self-propulsion with a sinusoidal temporal modulation of the speed. As we are interested in tiny swimmers, for which viscosity dominates, the velocity of each particle at any instant is considered to be the sum of the model-dependent self-propulsion velocity with the fluid flow velocity at the position of the particle. For simplicity, we neglect the effects of diffusion.

Our goal is to determine the most efficient model to foster the transport of the particles. We are interested in the nontrivial case where the self-propulsion velocity is small compared to the characteristic flow velocity. In this situation, whether a certain particle will escape or remain trapped depends on its initial position. We therefore say that a model is more efficient than another one if it yields a larger set (in the sense of area for the case of 2D flows analysed here) of initial positions of trajectories that do not remain confined.

For concreteness, we consider the convective flow given by:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2\pi \sin(2\pi x) \cos(2\pi y), \\ \frac{dy}{dt} &= -2\pi \cos(2\pi x) \sin(2\pi y).\end{aligned}\tag{1}$$

One readily notes that the trajectories of all fluid particles remain confined in bounded regions of the physical space.

We now add a self-propulsion term describing a constant speed  $\alpha$ . For simplicity, we consider that the self-propulsion velocity is along the positive  $x$ -axis, which translates as:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2\pi \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) + \alpha, \\ \frac{dy}{dt} &= -2\pi \cos(2\pi x) \sin(2\pi y),\end{aligned}\tag{2}$$

with  $\alpha > 0$ , which we shall refer to as the *first swimming model*. The phase portrait of (2) is shown in figure 1, where one can observe the coexistence of trapped and escaping trajectories.

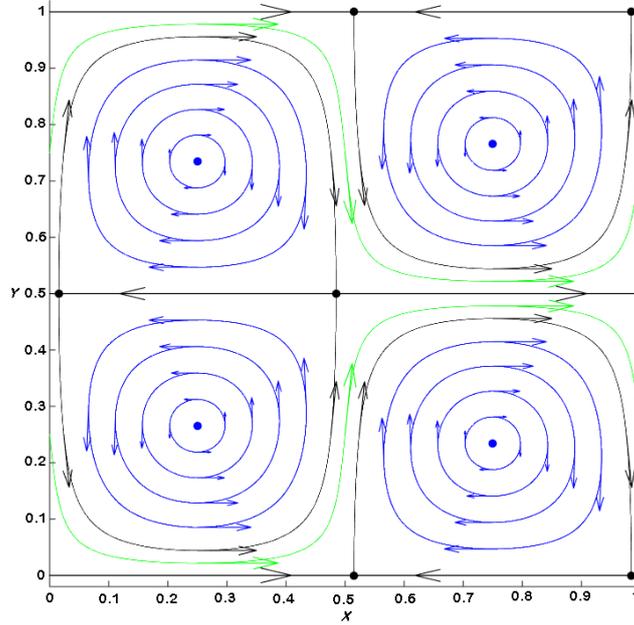


Figure 1: Phase portrait of equation (2) with  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ . Both confined (blue) and escaping (green) trajectories are shown, as well the solutions separating them (black).

The question we pose is whether a particle with no information whatsoever about the flow and bounded to have the same mean self-propulsion speed  $\alpha$  as in the first model can increase its chance of escaping. We are thus led to consider a small periodic temporal modulation in the speed, which then reads  $\alpha + \epsilon \sin(\omega t)$ , where  $0 < \epsilon < \alpha$ . In this way, the system takes the form:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2\pi \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) + \alpha + \epsilon \sin(\omega t), \\ \frac{dy}{dt} &= -2\pi \cos(2\pi x) \sin(2\pi y), \end{aligned} \quad (3)$$

which shall be called the *second swimming model*.

We choose a temporal modulation because we expect chaos in the region of the separatrices when a Hamiltonian system of one degree of freedom is subject to a non-autonomous perturbation. This is indeed visible in a Poincaré section of solutions of Eq. (3), shown in figure 2. Chaos produces transport between confined and non-confined regions. Here, in order to compare the models in

their efficiency to foster transport, we measure numerically and analytically the variation in the area of the set of initial conditions of non-confined trajectories as  $\epsilon$  is increased from zero.

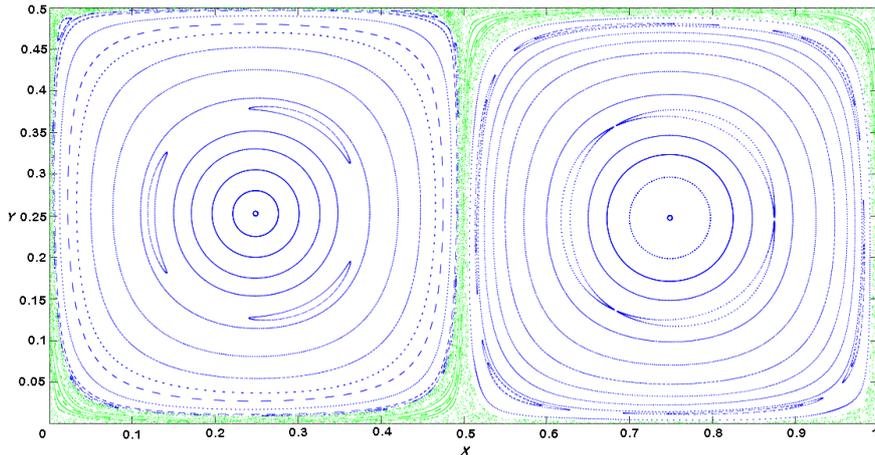


Figure 2: Poincaré section of solutions of equation (3). The parameters are  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ,  $\epsilon = 0.3$  and  $\omega = 75$ . Escaping trajectories are shown in green.

## 2. First Swimming Model: Self-propulsion with constant velocity

Equations (1) and (2) correspond to Hamiltonian systems of 1 degree of freedom, with stream function given by

$$\psi_0(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + \alpha y, \quad (4)$$

where  $\alpha = 0$  in equation (1) and  $\alpha \neq 0$  in equation (2).

We are interested in studying equation (2), which corresponds to our first swimming model. This system has heteroclinic trajectories and both elliptical and hyperbolic equilibria. The equilibria of the first model are the singular points of the vector field

$$\mathbf{X}(x, y) = \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, -\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) \quad (5)$$

and can be calculated analytically. Because of the spatial periodicity of the solutions of equation (2), it suffices to study the model in the square  $Q \equiv [0, 1) \times [0, 1)$ , where there are four hyperbolic equilibria given by:

$$\mathbf{r}_{m,j}^h = (x_{m,j}^h, y_{m,j}^h) = \left( \left\{ \frac{1}{4} + (-1)^j \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \left( -\frac{\alpha(-1)^m}{2\pi} \right) \right] \right\} \text{ modulo } 1, \frac{m}{2} \right), \quad (6)$$

with  $m = 0$  or  $1$  and  $j = 1$  or  $2$ . These hyperbolic equilibria are shown in figure 3.

The heteroclinic connections satisfy

$$\psi_0(x, y) = \psi_0(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h). \quad (7)$$

They are therefore given by

$$\begin{aligned} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + \alpha y &= \sin(2\pi x_{m,j}^h) \sin(2\pi y_{m,j}^h) + \alpha y_{m,j}^h \\ &= \frac{\alpha m}{2}, \end{aligned} \quad (8)$$

and can be seen in figure 3.

As stated before, our goal is to determine which of the two models considered promotes more transport of the swimmers in the following sense: we aim to calculate the area of the set of initial conditions of non-confined trajectories for each of the models and check which model leads to the largest area. This area will be equal to 1 (total area of  $Q$ ) minus the area of the set of confined trajectories. For the first model, the latter is, due to symmetry, simply four times the area between the separatrices  $\Gamma_1$  and  $\Lambda_1$  shown in figure 3.

The equations for separatrices  $\Gamma_1$  and  $\Lambda_1$  are given by

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \quad \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + \alpha y &= \frac{\alpha}{2}, & 0.5 < y < 1; \\ \Lambda_1 : \quad y &= 0.5, & x_{1,1}^h < x < x_{1,2}^h. \end{aligned} \quad (9)$$

From the equation for  $\Gamma_1$  we can isolate  $x$ , thereby defining two functions  $x_1(y)$  and  $x_2(y)$ , with  $0.5 < y < y_{\max}$ . These functions are such that  $x_{1,1}^h < x_1(y) \leq 0.25 \leq x_2(y) < x_{1,2}^h$  and  $x_1(y) + x_2(y) = 0.5$ . The area of the region bounded by  $\Gamma_1$  and  $\Lambda_1$  is then given by:

$$A_{\Gamma_1 \Lambda_1}(\alpha) = \int_{0.5}^{y_{\max}} [x_2(y) - x_1(y)] dy, \quad (10)$$

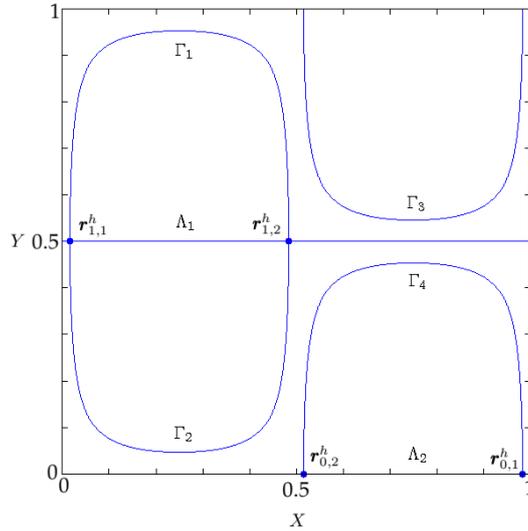


Figure 3: Heteroclinic connections for equation (2) with  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ . The separatrices  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  and  $\Lambda_1$  correspond to  $m = 1$ . The separatrices  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_4$  and  $\Lambda_2$  correspond to  $m = 0$ .

where  $y_{\max}$ ,  $x_1(y)$ , and  $x_2(y)$  depend on  $\alpha$ . In order to calculate  $y_{\max}$ , we note that it corresponds to the  $y$  coordinate of the intersection of  $\Gamma_1$  with the straight line  $x = 0.25$ . In other words,  $y_{\max}$  satisfies the inequality  $0.5 < y_{\max} < 1$  and the transcendental equation

$$\sin(2\pi y_{\max}) + \alpha y_{\max} = \frac{\alpha}{2}. \quad (11)$$

We thus obtain the area of the set of initial conditions of confined trajectories in the first model:

$$A_1^c(\alpha) = 4A_{\Gamma_1\Lambda_1}(\alpha). \quad (12)$$

Finally, the area of the set of initial conditions of *escaping* (i.e, non-confined) trajectories is:

$$A_1^e(\alpha) = 1 - A_1^c(\alpha). \quad (13)$$

### 3. Second Swimming Model: Self-propulsion with periodic temporal modulation

#### 3.1. Chaos

We shall now prove analytically the existence of the chaotic trajectories in the region of the separatrices  $\Gamma_i$  by using the *Melnikov method* [2]. Note that the second model can be written as

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y}, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial\psi_0}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x},\end{aligned}\tag{14}$$

where  $\psi_0$  is the stream function given in equation (4) and

$$\hat{\psi}(x, y, t) = \sin(\omega t)y.\tag{15}$$

The function  $\hat{\psi}$  is called a Hamiltonian perturbation and (14) is called a Hamiltonian system of one and a half degree of freedom.

In general, if  $\gamma_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$  is a parametrization of the separatrix  $\Gamma_i$ , where  $i = 1, 2, 3$  or  $4$ , the corresponding Melnikov function is defined by

$$M_i(\theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\psi_0(\gamma_i(t - \theta_0)), \hat{\psi}(\gamma_i(t - \theta_0), t)\} dt,\tag{16}$$

where

$$\{\psi_0, \hat{\psi}\} = \frac{\partial\psi_0}{\partial x} \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y} - \frac{\partial\psi_0}{\partial y} \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x}\tag{17}$$

is the *Poisson brackets* of  $\psi_0$  with  $\hat{\psi}$ .

The meaning of the Melnikov function is the following:  $\varepsilon M_i(\theta)$  is proportional to the *signed* distance, to first order in  $\varepsilon$ , between stable and unstable manifolds which replace  $\Gamma_i$  when one substitutes system (2) by system (3).

Replacing (4), (15), and (17) in equation (16), we obtain the following expression for the Melnikov function:

$$M_i(\theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \cos(2\pi x_i(t - \theta_0)) \sin(2\pi y_i(t - \theta_0)) \sin(\omega t) dt,\tag{18}$$

where, for the sake of simplicity, the dependence of  $M_i$  on the parameters  $\alpha$  (since both  $x_i$  and  $y_i$  depend on  $\alpha$ ) and  $\omega$  has not been made explicit in the notation. After the substitution  $t \mapsto t - \theta_0$ , the Melnikov function reads:

$$\begin{aligned} M_i(\theta_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \cos(2\pi x_i(t)) \sin(2\pi y_i(t)) \sin(\omega(t + \theta_0)) dt \\ &= 2\pi [I_i(\alpha, \omega) \cos(\omega\theta_0) + J_i(\alpha, \omega) \sin(\omega\theta_0)], \end{aligned} \quad (19)$$

where

$$I_i(\alpha, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi x_i(t)) \sin(2\pi y_i(t)) \sin(\omega t) dt \quad (20)$$

and

$$J_i(\alpha, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi x_i(t)) \sin(2\pi y_i(t)) \cos(\omega t) dt. \quad (21)$$

By means of a suitable choice of the initial condition  $\gamma_i(0)$  for each  $\Gamma_i$ , we can simplify the above integrals. In particular we choose  $\gamma_1(0)$  and  $\gamma_2(0)$  as the intersections of the straight line  $x = 0.25$  with  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ , respectively. Analogously, we choose  $\gamma_3(0)$  and  $\gamma_4(0)$  as the intersections of the straight line  $x = 0.75$  with  $\Gamma_3$  and  $\Gamma_4$ , respectively. We then obtain

$$I_i(\alpha, \omega) = 2 \int_0^{+\infty} \cos(2\pi x_i(t)) \sin(2\pi y_i(t)) \sin(\omega t) dt$$

and

$$J_i(\alpha, \omega) = 0$$

for all positive  $\alpha$  and  $\omega$ . We also obtain  $I_1 = I_4 = -I_2 = -I_3$ .

For the values of  $\alpha$  and  $\omega$  for which the integral  $I_i(\alpha, \omega)$  does not vanish, we see that  $M_i(\theta)$  has simple zeroes, implying chaos of the horseshoe type for the dynamics of equation (3) in the region where the separatrices  $\Gamma_i$  of system (2) are located.

Melnikov functions are similarly defined for the horizontal separatrices shown in figure 3, as for example  $\Lambda_1$ . Because of the parametrizations of these separatrices, however, the corresponding Melnikov functions vanish identically. This is consistent with the survival of the horizontal separatrices when we switch from equation (2) to equation (3).

### 3.2. Separatrix map

We now use separatrix-map techniques to obtain the curve separating confined trajectories of non-confined trajectories in the second model. In general, the so-called separatrix map describes the dynamics near the separatrices when an integrable system is perturbed. It was introduced by Zaslavsky and Filonenko [3] to investigate the one-dimensional motion of a charged particle in the field of a wave traveling under perturbation. It was later studied by Chirikov under the name of *whisker map* [4]. Weiss and Knobloch used the separatrix map to analyse transport in a binary-fluid mixture due to traveling waves [5]. It is worth noting that our unperturbed system, equation (2), is the same one considered in their work.

The separatrix map is obtained by considering successive intersections, to be denoted  $(x_n, y_n)$ , of the trajectories of the second model, equation (3), with an unidimensional surface  $\Sigma$  fixed in the phase space. Although the map is insensitive to the specific choice of the surface, let us follow [5] and consider for concreteness any of the surfaces (where both  $x$  and  $y$  are taken modulo 1)

$$\Sigma = \Sigma_{m,j}^{\pm} = \{(x, y) \mid y = y_{m,j}^h \pm |x - x_{m,j}^h|\} \quad (22)$$

in a small neighbourhood of the hyperbolic equilibrium  $(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h)$ . At each intersection  $(x_n, y_n)$  the value of the stream function of the first model is calculated, i.e., we define  $\psi_0^n = \psi_0(x_n, y_n)$ . The other variable used in the separatrix map is the time  $t_n$  at which the trajectory crosses the line  $x$  modulo 1 =  $0.75 - m/2$  with positive  $\dot{x}$  just prior to the  $(n+1)$ -th intersection with  $\Sigma_{m,j}^{\pm}$ . Note that, defining  $s_n$  by  $(x_n, y_n) = (x(s_n), y(s_n))$ , we have  $t_n < s_{n+1} < t_{n+1}$ .

Provided that  $\epsilon$  is sufficiently small, the rate of change of  $\psi_0$  along an actual trajectory of equation (3) can be approximated by the corresponding rate along the separatrix. If we also use the approximation  $t_{n+1} - t_n \simeq T(\psi_0^{n+1})$ , where  $T(h)$  is the period of the stream function  $\psi_0 = h$ , we obtain the separatrix map as [5, 6]:

$$\begin{aligned} \psi_0^{n+1} &= \psi_0^n + \epsilon M(t_n), \\ t_{n+1} &= t_n + T(\psi_0^{n+1}), \end{aligned} \quad (23)$$

where  $M$  is the Melnikov function calculated in (19).

The main problem here is that there is no analytical representation for  $T(\psi_0^{n+1})$ . However, the dynamics of the trajectories in the neighbourhood of an equilibrium is very slow, meaning that we can use a Taylor expansion of  $\psi_0$  in the neighbourhood of a hyperbolic equilibrium of the first model to approximate  $T(\psi_0^{n+1})$  [7, 8].

The Taylor expansion for  $\psi_0$  in a neighbourhood of a hyperbolic equilibrium  $(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h)$  is given by:

$$\psi_0(x_{m,j}^h + u, y_{m,j}^h + v) \approx \psi_0(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h) + \frac{1}{2}[u \ v] \nabla^2 \psi_0(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h) [u \ v]^t, \quad (24)$$

where the matrix  $\nabla^2 \psi_0(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h)$  is given by:

$$\nabla^2 \psi_0(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h) = -4\pi^2 \begin{bmatrix} 0 & \cos(2\pi x_{m,j}^h) \\ \cos(2\pi x_{m,j}^h) & 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Using equation (6), we obtain:

$$\cos(2\pi x_{m,j}^h) = (-1)^{j+1} \frac{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{2\pi}. \quad (26)$$

Thus, the matrix in equation (25) is

$$\nabla^2 \psi_0(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h) = (-1)^j 2\pi \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Using the above equality and equation (8), we can recast (24) as

$$\psi_0(x, y) \approx \frac{\alpha m}{2} + (-1)^j k (x - x_{m,j}^h)(y - y_{m,j}^h), \quad (28)$$

where  $k = 2\pi \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$ , from which the approximated equations for the trajectories in a neighbourhood of  $(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h)$  are derived:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (-1)^j k (x - x_{m,j}^h), \\ \frac{dy}{dt} &= (-1)^{j+1} k (y - y_{m,j}^h). \end{aligned} \quad (29)$$

Noting that the trajectory on the streamline  $\psi_0 = H$  close to a separatrix spends a time interval roughly given by  $T(\psi_0)/2$  in the neighbourhood of each

hyperbolic equilibrium it approaches, we can integrate the first equation (29) to write

$$\ln \left| \frac{x_1 - x_{m,j}^h}{x_0 - x_{m,j}^h} \right| = (-1)^j T(H) \frac{k}{2}, \quad (30)$$

where  $(x_0, y_0)$  and  $(x_1, y_1)$  are the points where a solution of (29) intersects the boundary of an open ball centered at the hyperbolic equilibrium  $(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h)$ , as shown in figure 4. Using equation (28) to compute  $H = \psi_0(x_1, y_1)$ , we can express  $x_1 - x_{m,j}^h$  in terms of  $H$ . Equation (30) then becomes:

$$T(H) = (-1)^j \frac{2}{k} \ln \left| \frac{2H - \alpha m}{2k(x_0 - x_{m,j}^h)(y_1 - y_{m,j}^h)} \right|. \quad (31)$$

Thus, the separatrix map is approximated by the following equations:

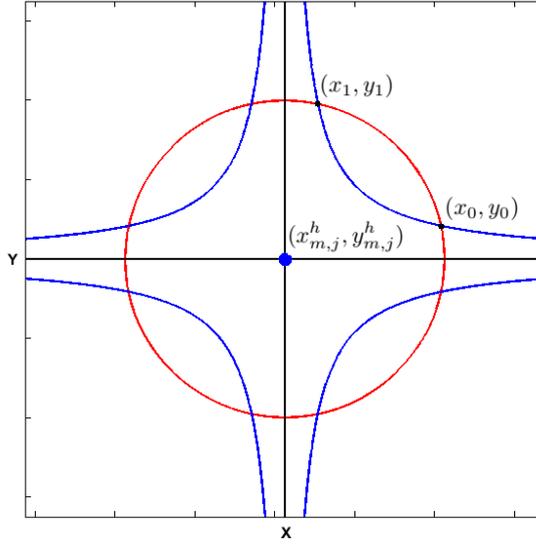


Figure 4: Solutions of equation (29) (blue) in the neighbourhood of a hyperbolic equilibrium  $(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h)$ . The intersection points of one such a solution with the boundary (in red) of an open ball centered at the equilibrium are  $(x_0, y_0)$  and  $(x_1, y_1)$ , where the former is visited before the latter. In black, we show the stable and unstable spaces of  $(x_{m,j}^h, y_{m,j}^h)$ .

$$\begin{aligned} \psi_0^{n+1} &= \psi_0^n + \varepsilon M(t_n), \\ t_{n+1} &= t_n + (-1)^j \left( \frac{2}{k} \right) \ln \left| \frac{2\psi_0^{n+1} - \alpha m}{2k(x_0 - x_{m,j}^h)(y_1 - y_{m,j}^h)} \right|. \end{aligned} \quad (32)$$

To obtain the curve separating confined trajectories of non-confined ones, we first use the criterium given in [3], [6] and [9] to locate the boundaries of the stochastic layer,

$$\max_{t_n} \left| \frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} - 1 \right| = 1, \quad (33)$$

which corresponds to the observation that the dynamical unstability associated to separatrix chaos first manifests itself as the stretching of the variable  $t_n$ . Using equation (32), we obtain

$$\max_{t_n} \left| \frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} - 1 \right| = \left| \frac{4\varepsilon}{k(2\psi_0^{n+1} - \alpha m)} \right| \max_{t_n} \left| \frac{dM}{dt_n} \right|. \quad (34)$$

From the expression for the Melnikov function given in (19), we get

$$\begin{aligned} \max_{t_n} \left| \frac{dM}{dt_n} \right| &= \max_{t_n} |2\pi\omega I_i(\alpha, \omega) \cos(\omega t_n)| \\ &= 2\pi\omega |I_i(\alpha, \omega)|. \end{aligned} \quad (35)$$

Using (35) and (34), equation (33) becomes:

$$\left| \frac{8\varepsilon\pi\omega I_i(\alpha, \omega)}{k(2\psi_0^{n+1} - \alpha m)} \right| = 1. \quad (36)$$

The above equality describes the following curves which form the boundary of the stochastic layer:

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y) = \psi_0^{s_1} &\equiv \frac{\alpha m}{2} + \frac{2\varepsilon\omega I_i(\alpha, \omega)}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}, \\ \psi_0(x, y) = \psi_0^{s_2} &\equiv \frac{\alpha m}{2} - \frac{2\varepsilon\omega I_i(\alpha, \omega)}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}. \end{aligned} \quad (37)$$

We now observe that, for each separatrix  $\Gamma_i$ , one of the above curves is located in the region of escaping trajectories of the unperturbed system whereas the other one lies in the region of confined trajectories. The latter will, in the *perturbed* system, separate escaping from confined solutions since chaos breaks transport barriers.

The region corresponding to confined trajectories is therefore contained by

one of the following curves:

$$\sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + \alpha y = \psi_0^s = \begin{cases} \frac{\alpha m}{2} + \frac{2\varepsilon\omega I_i(\alpha, \omega)}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} \\ \text{or} \\ \frac{\alpha m}{2} - \frac{2\varepsilon\omega I_i(\alpha, \omega)}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}. \end{cases} \quad (38)$$

Let  $\zeta = \psi_0^{-1}(\psi_0^s)$  be such a curve, depicted for a specific choice of parameters in figure 5. In order to calculate the area  $A_\zeta$  enclosed by  $\zeta$ , we proceed as in section 2. We obtain:

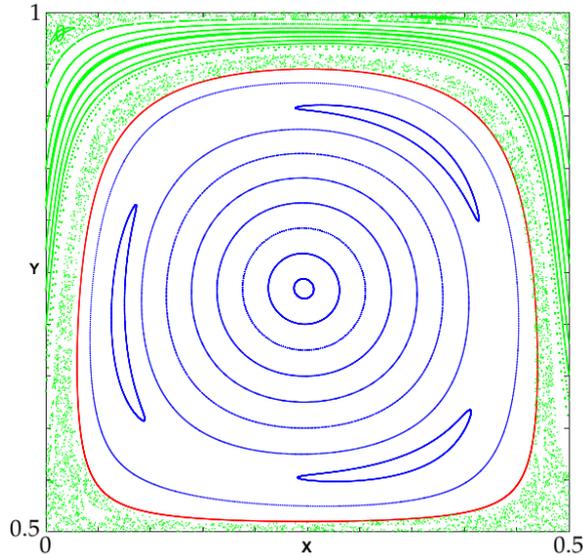


Figure 5: Theoretical boundary (red), predicted by equation (38), between the regions of confined (blue) and escaping (green) solutions. The parameters are  $\alpha = \pi/5$ ,  $\epsilon = 0.2$  and  $\omega = 80$ .

$$A_\zeta = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} [x_2(y) - x_1(y)] dy, \quad (39)$$

where  $x_2$  and  $x_1$  are the functions of  $y$  implicitly defined by equation (38) and  $y_{\min}$  and  $y_{\max}$  are the two solutions of

$$\sin(2\pi y) + \alpha y = \psi_0^s,$$

and

$$-\sin(2\pi y) + \alpha y = \psi_0^s,$$

respectively, for  $i \leq 2$  and  $i \geq 3$ .

Then, the area of the set of initial conditions of confined trajectories within the unit square is given by

$$A_2^\varepsilon = 4A_\zeta \tag{40}$$

and the area of the set of initial conditions of non-confined trajectories within the unit square is

$$A_2^\varepsilon = 1 - A_2^\varepsilon. \tag{41}$$

### 3.3. Comparison with the first model

We have used our theoretical results, equations (13) and (41), to compare the two models for different values of the parameters  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  and  $\omega$ . In figure 6, the percentage variation of the area of the set of initial conditions of non-confined trajectories is shown as a function of  $\varepsilon$  and  $\omega$  for a fixed value of  $\alpha$ . Note the existence of values of the parameters for which the percentage increase exceeds 80%.

To validate our analytical results, we have also calculated, for specific values of the parameters, the same quantities using numerical methods. For that purpose, we have chosen initial conditions near the separatrices  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  and  $\Gamma_4$  until obtaining the 4 curves separating confined from non-confined motion. This was performed numerically by means of the bisection method, with an error smaller than  $10^{-6}$ . We have used the bubble sort algorithm [10] to index each point of these curves and from that obtained the area of the region within each such a curve using numerical integration. Finally, by adding the area of the 4 regions we have computed the area of the set of initial conditions of confined trajectories in the square  $Q$ . The numerical results show very good agreement with our analytical predictions for several choices of the parameters. Important deviations appear as the parameters approach the region above the black curve

in figure 6, where the following inequality does not hold:

$$8\omega\varepsilon|I_i(\alpha, \omega)| \leq \alpha\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}. \quad (42)$$

This is a condition for the validity of our analytical results for the second model. It arises because, if the perturbation  $\varepsilon$  is large enough, the exterior boundary curve of the stochastic region close to  $\Gamma_1$  (respectively,  $\Gamma_2$ ) collides with the exterior boundary curve of the stochastic region close to  $\Gamma_3$  (respectively,  $\Gamma_4$ ).

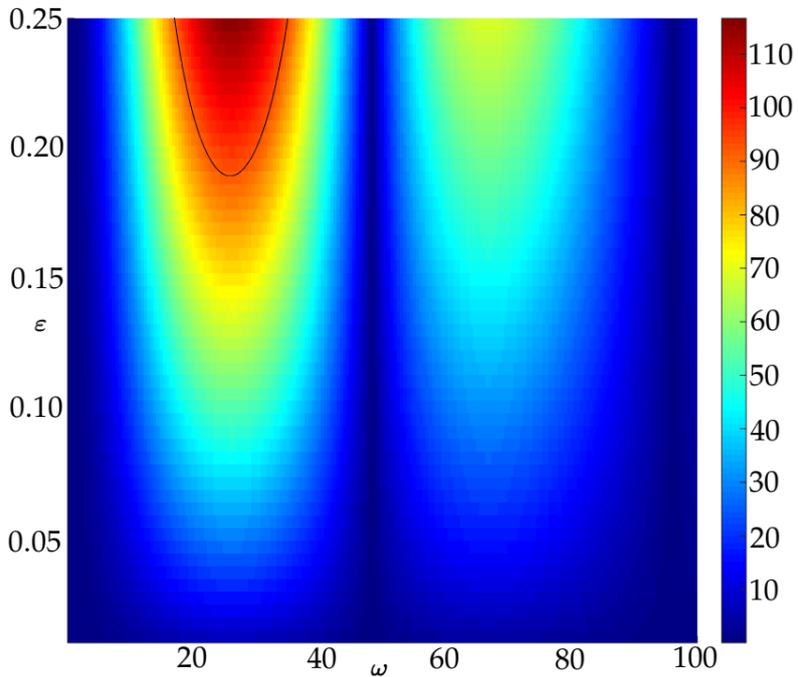


Figure 6: Percentage increase of the area of the set of initial conditions of non-confined trajectories for the second model as compared to the corresponding area for the first model. In this case we have  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ . The region under the black curve is the validity region i.e. is the region where the parameters satisfy inequality (42).

#### 4. Conclusions

We have compared two models of swimming particles. The models studied display both confined and escaping trajectories, and our goal here was to deter-

mine which model leads to a larger probability of escaping. For the first model the calculations are easier since it corresponds to an integrable system. The second model is a periodic perturbation of the first one. By means of the Melnikov method we have demonstrated the occurrence of separatrix chaos. Using separatrix-map techniques we could approximate analytically the boundary of the region of escaping solutions. This has allowed us to show that the area of initial conditions leading to non-confined trajectories increases as we replace the first by the second model. Our main result is the analytical quantification of that increase, which we have further numerically validated.

Research started in this work suggests some interesting extensions. First, new bases of comparison between models that take into account not only the area of the set of initial conditions leading to non-confined trajectories but also the average velocity of the particles may be introduced and exploited. Second, it would be interesting to investigate new models for particles that can obtain local information about the flow (e.g., pressure gradients). It would also be interesting to compare all these models with the optimal model, which can be obtained by means of variational methods and requires global knowledge of the flow.

The authors are grateful to Jean-Régis Angilella for important discussions and suggestions. A.J.G. thanks CAPES for his PhD fellowship.

## References

- [1] ELGETI J., WINKLER R.G. & GOMPPER G., *Physics of microswimmers-single particle motion and collective behavior: a review*, Reports on Progress in Physics 78, 056601 (2015).
- [2] MELNIKOV V. K., *On the stability of the center for time periodic perturbations*, Trans. Moscow Math Soc. 12, pp. 1-57 (1963).
- [3] ZASLAVSKY G. M. & FILONENKO N. N., *Stochastic instability of trapped*

- particles and conditions of application of the quasi-linear approximation*,  
Sov. Phys. JETP 27, pp. 851-857 (1968).
- [4] CHIRIKOV B. V., *A universal instability of many - dimensional oscillator systems*, Physical Reports 52, N° 5, pp. 263-379 (1979).
- [5] WEISS, J. B. & KNOBLOCH, E., *Mass transport and mixing by modulated travelling waves*, Physical Review A, vol. 40, N° 5, pp. 2579-2589 (1989).
- [6] ZASLAVSKY G. M., *The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*, Imperial College Press, Second Edition, 2007.
- [7] KUZNETSOV L. & ZASLAVSKY G., *Regular and chaotic advection in the flow field of a three-vortex system*, Physical Review E, vol. 58, N° 6, pp. 7330 - 7349 (1998).
- [8] ANGILELLA J. R., *Asymptotic properties of wall-induced chaotic mixing in point vortex pairs*, Physics of Fluids 23, 113602 (2011).
- [9] ROM - KEDAR V., *Homoclinic tangles-classification and applications*, Nonlinearity 7, pp. 441-473 (1994).
- [10] CORMEN T. H. et al., *Introduction to Algorithms*, The MIT Press, Third Edition, 2009.

## ANEXO B: PARAMETRIZAÇÃO DAS TRAJETÓRIAS SEM NATAÇÃO

**Definição B. 1.** Seja  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  e  $0 \leq k \leq 1$ . Define-se a **integral elíptica incompleta do primeiro tipo**, como a integral

$$\text{ellipticF}(\varphi; k) = \int_0^\varphi \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k \text{sen}^2 \mu}}.$$

O número  $k$  é chamado de **módulo** e a variável  $\varphi$  é chamada de **argumento** da integral elíptica.

Quando  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , a integral anterior se diz **completa** e a denotamos por  $K$ . Assim

$$K = \text{ellipticF}\left(\frac{\pi}{2}; k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k \text{sen}^2 \mu}}.$$

Considerando agora, para cada  $k$  fixado, a função

$$u(\varphi; k) = \text{ellipticF}(\varphi; k),$$

temos que essa função possui inversa que é denotada por  $\text{sn}(u; k)$  tal que

$$\text{sn}(u; k) = \text{sen}(\varphi) = \text{ellipticF}^{-1}(u; k). \quad (\text{B. 1})$$

**Definição B. 2.** A função definida na equação B. 1 é chamada de **função seno elíptico de Jacobi**.

Com as duas definições anteriores obtemos a solução do sistema de equações de 5.3 quando  $v_\beta(\theta; \varepsilon, v) = 0$  e  $\psi(x, y) = \text{sen}(x)\text{sen}(y)$ , i.e. obtemos a solução de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\varepsilon \text{sen}(x)\cos(y), \\ \dot{y} &= -2\varepsilon \cos(x)\text{sen}(y), \\ \dot{\theta} &= 2\varepsilon \text{sen}(x)\text{sen}(y). \end{aligned} \quad (\text{B. 2})$$

Seja  $(\mathbf{x}_0, \theta_0)$  com  $\mathbf{x}_0 \in \Omega_1 = (0, \pi) \times (0, \pi)$  uma condição inicial para o sistema anterior. A parametrização será obtida também na região  $\Omega_1$ , depois pode ser generalizada para

as outras regiões. Definimos  $\psi_0 = \psi(x_0)$ . Já que as duas primeiras equações representam as curvas de nível de  $\psi(x, y)$  temos que

$$\text{sen}(x)\text{sen}(y) = \psi_0,$$

e então

$$\text{sen}(y) = \frac{\psi_0}{\text{sen}(x)}.$$

A expressão anterior é substituída na primeira equação B. 2 para se obter

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\varepsilon\text{sen}(x)\cos(y) \\ &= \pm 2\varepsilon\text{sen}(x)\sqrt{1 - \frac{\psi_0^2}{\text{sen}^2(x)}} \\ &= \pm 2\varepsilon\sqrt{\text{sen}^2(x) - \psi_0^2}. \end{aligned} \tag{B. 3}$$

Definindo a nova variável

$$u = \arcsin\left(\frac{|\cos(x)|}{\sqrt{1 - \psi_0^2}}\right) \tag{B. 4}$$

obtemos a igualdade

$$\text{sen}(x) = \pm\sqrt{1 - (1 - \psi_0^2)\text{sen}^2(u)}, \tag{B. 5}$$

Por outro lado, podemos derivar a equação B. 4 e substituir nesse resultado a igualdade B. 3, obtendo

$$\dot{u} = \pm 2\varepsilon\text{sen}(x),$$

substituindo agora a igualdade B. 5 na equação anterior obtem-se

$$\dot{u} = \pm 2\varepsilon\sqrt{1 - (1 - \psi_0^2)\text{sen}^2(u)}.$$

E assim, integrando a equação diferencial obtida temos

$$\int_{u_0}^u \frac{d\eta}{\sqrt{1 - (1 - \psi_0^2)\text{sen}^2(\eta)}} = \pm 2\varepsilon t.$$

Note que o lado esquerdo da equação anterior pode ser escrito como uma diferença de duas integrais elípticas do primeiro tipo com módulo  $1 - \psi_0^2$ . Então obtem-se

$$\text{ellipticF}(u; 1 - \psi_0^2) = \text{ellipticF}(u_0; 1 - \psi_0^2) \pm 2\varepsilon t.$$

Para isolar a variável  $u$ , aplicamos a função seno elíptico de Jacobi em ambos os lados da equação anterior, isso dá como resultado

$$\text{sen}(u) = \text{sn}\left(\text{ellipticF}(u_0; 1 - \psi_0^2) \pm 2\epsilon t; 1 - \psi_0^2\right).$$

Voltando à variável original tem-se

$$\frac{|\cos(x)|}{\sqrt{1 - \psi_0^2}} = \text{sn}\left(\text{ellipticF}(u_0; 1 - \psi_0^2) \pm 2\epsilon t; 1 - \psi_0^2\right),$$

finalmente obtemos

$$x(t) = \arccos\left(\sqrt{1 - \psi_0^2} \text{sn}\left(\text{ellipticF}(u_0; 1 - \psi_0^2) \pm 2\epsilon t; 1 - \psi_0^2\right)\right),$$

$$\text{com } u_0 = \arcsen\left(\frac{|\cos(x_0)|}{\sqrt{1 - \psi_0^2}}\right).$$

De forma semelhante, a parametrização da segunda coordenada dá como resultado

$$y(t) = \arccos\left(\sqrt{1 - \psi_0^2} \text{sn}\left(\text{ellipticF}(v_0; 1 - \psi_0^2) \pm 2\epsilon t; 1 - \psi_0^2\right)\right),$$

$$\text{com } v_0 = \arcsen\left(\frac{|\cos(y_0)|}{\sqrt{1 - \psi_0^2}}\right).$$

Pode-se demonstrar que a escolha dos sinais depende só da localização da condição inicial. Assim, fazemos contas semelhantes nas outras regiões para obter a respectiva parametrização. Então, para  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , definimos

$$\text{i) } u_0 = \arcsen\left(\frac{|\cos(x_0)|}{\sqrt{1 - \psi_0^2}}\right) \text{ e } v_0 = \arcsen\left(\frac{|\cos(y_0)|}{\sqrt{1 - \psi_0^2}}\right).$$

$$\text{ii) } u(t) = \text{sig}(\tan(x_0))\text{ellipticF}(u_0; 1 - \psi_0^2) - 2\text{sig}(\text{sen}(x_0)\cos(y_0))\epsilon t$$

$$\text{iii) } v(t) = \text{sig}(\tan(y_0))\text{ellipticF}(u_0; 1 - \psi_0^2) + 2\text{sig}(\cos(x_0)\text{sen}(y_0))\epsilon t.$$

Com as expressões anteriores obtemos a parametrização procurada. Essa parametrização é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \arccos\left(\sqrt{1 - \psi_0^2} \text{sn}(u(t); 1 - \psi_0^2)\right) + \pi\mu_\pi(x_0), \\ y(t) &= \arccos\left(\sqrt{1 - \psi_0^2} \text{sn}(v(t); 1 - \psi_0^2)\right) + \pi\mu_\pi(y_0). \end{aligned}$$

Finalmente,  $\theta(t)$  é dada por

$$\theta(t) = 2\varepsilon\psi(\mathbf{x}_0)t + \theta_0.$$

A parametrização anterior será escrita  $\varphi_{\mathcal{X}}(t, \mathbf{x}_0, \theta_0)$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] GARCIA X., RAFAÏ S. & PEYLA P., *Light Control of the Flow of Phototactic Microswimmer Suspensions*, Physical Review Letters 110, 138106 (2013).
- [2] DAI B. *et al.*, *Programmable artificial phototactic microswimmer*, Nature Nanotechnology, 11, 1087 – 1092 (2016).
- [3] JARA G. A., *Estratégias de Natação em Escoamentos Bidimensionais*, Dissertação de Mestrado, UFABC 2014.
- [4] ELGETI J., WINKLER R.G. & GOMPPER G., *Physics of microswimmers—single particle motion and collective behavior: a review*, Reports on Progress in Physics, 78, 056601 (2015).
- [5] JEFFERY G. B., *The Motion of Ellipsoidal Particles Immersed in a Viscous Fluid*, Proc. Roy. Soc. A 102, 161 – 179 (1923).
- [6] DI BERNARDO M. *et al.*, *Piecewise-smooth Dynamical Systems Theory and Applications*, Springer 2008.
- [7] ARROWSMITH D. K., PLACE C. M., *An Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press 1990.
- [8] ARROWSMITH D. K., PLACE C. M., *Dynamical Systems Differential equations, maps and chaotic behaviour*, Chapman & Hall 1992.
- [9] WIGGINS S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, 2<sup>o</sup> Edition, Springer-Verlag 2003.
- [10] MELNIKOV V. K., *On the Stability of the center for time periodic perturbations*, Trans. Moscow Math Soc. 12 ,1 – 57 (1963).
- [11] ZASLAVSKY G. M., FILONENKO N. N., *Stochastic Instability of Trapped Particles and Conditions of Applicability of the Quasi-Linear Approximation*, Soviet Physics JETP, Vol. 25, N<sup>o</sup>5, 851 – 857 (1968).

- [12] SHILNIKOV L. P., *A Case of the Existence of a Denumerable Set of Periodic Motions*, Sov. Math Dokl. 6, 163 – 166 (1965).
- [13] TRESCHÉV D., *Multidimensional Symplectic Separatrix Maps*, J. Nonlinear Sci., 12, 27 – 58 (2002).
- [14] AHN T., KIM G., KIM S., *Analysis of the Separatrix Map in Hamiltonian Systems*, Physica D, 89, 315 – 328 (1996).
- [15] CHIRIKOV B. V., *A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems*, Physics Reports, 52, N°5, 263 – 379 (1979).
- [16] CHERNIKOV A. A., NEISHTADT A. I., ROGAL'SKY A. V., YAKHNIN V. Z., *Lagrangian Turbulence in Nonstationary 2-D Flows*, Chaos, Vol 1, N°2, 206 – 211 (1991).
- [17] ROM-KEDAR V., *Transport Rates of a Class of Two-Dimensional Maps and Flows*, Physica D, 43, 229 – 268 (1990).
- [18] ROM-KEDAR V., *Homoclinic Tangles-Classification and Applications*, Nonlinearity, 7, 441 – 473 (1994).
- [19] TRUEBA J. L., BALTANÁS J. P., FEUDEL F., SANJUÁN M. A., *On the Estimate of the Stochastic Layer Width for a Model of Tracer Dynamics*, Chaos, Vol. 13, N°3, 866 – 873 (2003).
- [20] ZASLAVSKY G., *The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*, 2° Edition, Imperial College Press 2007.
- [21] ACARY V., BONNEFON O. & BROGLIATO B., *Nonsmooth Modeling and Simulations for Switched Circuits*, Lecture Notes in Electrical Engineering Vol. 69, Springer 2011.
- [22] FILIPPOV A. F. et al., *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Kluwer Academic Publishers 1988.
- [23] BARTON E. H., *An Introduction to Mechanics of Fluid*, Longmans, Green & Co. 1915.
- [24] BATCHELOR, G. K.; *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press 1967.

- [25] MASSEY B., *Mechanics of Fluids*, 8<sup>o</sup> Edition, Taylor & Francis 2006.
- [26] PATERSON A. R., *A First Course in Fluid Dynamics*, Cambridge University Press 1983.
- [27] KATZ J., *Introductory Fluid Mechanics*, Cambridge University Press 2010.
- [28] KUNDU P. K., COHEN I. M., *Fluid Mechanics*, 4<sup>o</sup> Edition, Elsevier 2008.
- [29] MAXEY M. R., RILEY J. J., *Equation of Motion for a Small Rigid Sphere in a Nonuniform Flow*, Phys. Fluids 26, 883 – 889 (1989).
- [30] HOWSE J. R. et al., *Self-Motile Colloidal Particles: From Directed Propulsion to Random Walk*, Phys. Rev. Lett 99, 048102 (2007).
- [31] DREYFUS R., *Microscopic Artificial Swimmers*, Nature(London) 437, 862 – 865 (2005).
- [32] PEDLEY T. J., KESSLER J. O., *Hydrodynamic Phenomena in Suspensions of Swimming Microorganisms*, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 24, 313 – 358 (1992).
- [33] KHURANA N., BLAWZDZIEWICZ J., OULLETTE T., *Reduced Transport of Swimming Particles in Chaotic Flow due to Hydrodynamic Trapping*, Physical Review Letters, 106, 198104 (2011).
- [34] TORNEY C., NEUFELD Z., *Transport and Aggregation of Self-Propelled Particles in Fluid Flows*, Physical Review Letters, 99, 078101 (2007).
- [35] EINSTEIN A., *Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen*, Annalen der Physik, Vol. 19, 289 – 306 (1896) com uma correção no Vol. 34, 591 – 592 (1906).
- [36] JUNK M., ILLNER R., *A New Derivation of Jeffery's Equation*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics 9, 455 – 488 (2007).
- [37] BRENNER H., *Rheology of a Dilute Suspension of Axisymmetric Brownian Particles*, Int. J. Multiphase flow, 1, 195 – 341 (1974).
- [38] BRETHERTON F. P., *The Motion of a Rigid Particles in a Shear Flow at Low Reynolds Number*, J. Fluid Mech. 14, 284 – 304 (1962).
- [39] PETRIE C. J. S., *The Rheology of Fibre Suspension*, J. Non-Newt. Fluid Mech., 87, 369 – 402 (1999).

- [40] KIM S., KARRILLA S. J., *Microhydrodynamics, Principles and Selected Applications*, Butterworth-Heinemann 1991.
- [41] GOLDSTEIN H., *Classical Mechanics*, 2° Edition, Addison-Wesley 1980.