



Universidade Federal do ABC

THIAGO MATHEUS CAVALHEIRO

# Bifurcações Sliding em Sistemas de Filippov

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do  
“Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq”

Santo André, 2020





Universidade Federal do ABC

**Universidade Federal do ABC**

**Centro de Matemática, Computação e Cognição**

**Thiago Matheus Cavalheiro**

# **Bifurcações Sliding em Sistemas de Filippov**

**Orientador: Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de  
Matemática, Computação e Cognição para  
obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTA É A VERSÃO ORIGINAL DA DISSERTAÇÃO, TAL COMO  
SUBMETIDA À COMISSÃO JULGADORA.

**Santo André, 2020**

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Matheus Cavalheiro, Thiago  
Bifurcações Sliding em sistemas de Filippov / Thiago Matheus  
Cavalheiro. — 2020.

149 fls. : il.

Orientador: Maurício Firmino Silva Lima

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós  
Graduação em Matemática, Santo André, 2020.

1. Sistemas de Filippov. 2. Órbitas periódicas. 3. Aplicação de Poincaré. 4.  
Mapas de descontinuidade. I. Firmino Silva Lima, Maurício. II. Programa  
de Pós-Graduação em Matemática, 2020. III. Título.

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) orientador(a).**

**Santo André/SP**

**30 de Junho de 2020**

**Assinatura do(a) autor(a):**

Thiago Matheus Carvalho

**Assinatura do(a) orientador(a):**





## MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

### Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 -- Bairro Santa Terezinha -- Santo André -- SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

### FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, THIAGO MATHEUS CAVALHEIRO realizada em 11 de Fevereiro de 2020:

  
\_\_\_\_\_  
**Prof.(a) JEFERSON CASSIANO**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

  
\_\_\_\_\_  
**Prof.(a) JOÃO CARLOS DA ROCHA MEDRADO**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

\_\_\_\_\_  
**Prof.(a) CLAUDIO AGUINALDO BUZZI**

\_\_\_\_\_  
**Prof.(a) EDUARDO GUERON**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

  
\_\_\_\_\_  
**Prof.(a) MAURICIO FIRMINO SILVA LIMA**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

\* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

## AGRADECIMENTOS

Quero começar agradecendo à minha esposa, Franciele da Silva. Graças ao seu apoio incondicional, intemporal e todo suporte emocional, este trabalho foi realizado com muito mais vontade e foco, meus sinceros agradecimentos e só lembre que eu te amo.

À minha mãe e irmã, Malvina e Ana Carolina, pelo carinho, amor e compreensão ao longo de todos esses anos de graduação e mestrado, amo vocês. Aos amigos que fiz durante o mestrado (não vou citar nomes pra não ser injusto) pelas longas horas de estudo no bloco B, às discussões sobre listas de exercícios (que foram muitas, devo acrescentar), os trabalhos e apresentações, meu sincero muito obrigado, de coração mesmo. Jamais esquecerei de vocês.

Ao meu orientador, professor Maurício, agradeço pelas muitas horas de discussões, pelo conhecimento que transmitiu a mim durante esse período, pela paciência e por ter me aceitado como orientando. A todos os outros professores que ministraram as disciplinas que fiz. Aos que me ajudaram direta ou indiretamente, aos membros da banca pelas dicas, meu sincero muito obrigado.

Finalmente, mas não menos importante, ao CNPq pelo suporte financeiro. Sem este não seria possível a realização desse trabalho. Muito obrigado.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001"



## RESUMO

O objetivo desse trabalho é o estudo de sistemas dinâmicos suaves por partes do ponto de vista de bifurcações relacionadas ao contato tangente de órbitas periódicas com a variedade de descontinuidade  $\Sigma$ , em especial quando tais soluções encontram a fronteira da região de sliding (região de  $\Sigma$  onde ambos os campos de vetores apontam em sua direção). Essas bifurcações são conhecidas como bifurcações sliding e, para estudá-las, utilizaremos aplicações chamadas *Mapas de Descontinuidade*, cuja finalidade é corrigir o comportamento dos fluxos em vizinhanças da fronteira de descontinuidade  $\Sigma$ . Nesse contexto, dois problemas serão objeto de estudo: quando uma solução periódica é tangente a variedade de descontinuidade de um sistema dinâmico suave por partes com e sem sliding. Quando existir contato tangente de um sistema com sliding, este será na fronteira da região de sliding. Em ambos os casos, aplicações apropriadas que chamaremos de “Zero-time discontinuity map” (ZDM) e “Poincaré discontinuity map” (PDM) serão obtidas. Além disso, apresentaremos o estudo de um sistema suave por partes chamado *dry-friction oscillator* que apresenta uma solução periódica do tipo grazing-sliding. Fazendo uso da aplicação ZDM, mostraremos que essa solução pode ser vista como não-hiperbólica e que, sob certas condições, podem existir outras soluções periódicas que bifurcam dessa solução.

**Palavras-chave:** Sistemas de Filippov, Órbitas Periódicas; Mapas de descontinuidade, Mapa de Poincaré.



## ABSTRACT

The objective of this work is to study the dynamics of a piecewise-smooth dynamical system from the point of view of bifurcations related to the tangent contact of periodic solutions with the discontinuity manifold  $\Sigma$ , especially when such orbits are tangent to the boundary of the sliding region (subset of  $\Sigma$  where both vector fields point toward  $\Sigma$ ). Such bifurcations are known as sliding bifurcations and, in order to study them, applications called *Discontinuity Maps* will be constructed whose purpose is to correct the behavior of the flows in neighborhoods of the discontinuity set  $\Sigma$ . In this context two problems will be studied: when a periodic solution is tangent to the discontinuity manifold of a piecewise smooth dynamical system with and without sliding. When there is a tangent contact of a system with sliding, it will be at the border of the sliding region. In both cases appropriate applications that we will call "Zero-time discontinuity map" (ZDM) and "Poincare discontinuity map" (PDM) will be obtained. In addition, we will present a study of a smooth piecewise system called *dry-friction oscillator* which presents a periodic grazing-sliding solution. Using the application ZDM, we will show that this solution can be seen as non-hyperbolic and that, under certain conditions, there may be other periodic solutions bifurcating from it.

**Keywords:** Filippov Systems; Periodic Orbits; Discontinuity Maps; Poincare Map.



# CONTEÚDO

1	INTRODUÇÃO	3
2	CAMPOS VETORIAIS SUAVES POR PARTES	7
2.1	Conceitos iniciais	7
2.2	Mapas de descontinuidade para bifurcações em sistemas suaves por partes	17
3	BIFURCAÇÕES SLIDING	29
3.1	Mapas de descontinuidade para bifurcações sliding	29
3.2	Sistemas de Filippov	30
3.3	Bifurcações Sliding	31
4	APLICAÇÕES	79
4.1	Osciladores	79
4.1.1	Considerações teóricas	88
4.1.2	Estudo da órbita $\Gamma$	95
4.1.3	Órbita periódica não-hiperbólica	96
4.1.4	Bifurcações da órbita $\Gamma$	98
4.1.5	Prova do teorema (4.8)	101
	Apêndice	103
1	Apêndice 1	103
1.1	Campos vetoriais suaves	103
1.2	Introdução à Teoria de Floquet	105
1.3	Soluções Periódicas	110
2	Apêndice 2	113
2.1	Mapas de descontinuidade para bifurcações em sistemas de impacto	113
3	Apêndice 3	122
3.1	Considerações acerca da bifurcação adding-sliding	122
4	Apêndice 4	126
4.1	Aplicações associadas ao campo vetorial $F_2$	126
	Referências Bibliográficas	129



## LISTA DE SIMBOLOS

$\int_a^b f$  – Integral definida da função integrável  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ao longo do intervalo aberto  $(a, b)$ .

$\mathbb{R}^n$  – O  $\mathbb{R}$ –espaço vetorial, composto por vetores com  $n$ -entradas reais.

$DF$  – Matriz jacobiana da função  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , para  $m, n \in \mathbb{N}$ .

$\Sigma_{ij}, \Sigma$  – Representações da fronteira de descontinuidade com  $i, j \in \mathbb{N}$ .

$\phi_i(x_0, t)$  – Evolução do fluxo  $\phi_i$  associado ao campo  $F_i$ , através do tempo  $t \in \mathbb{R}$ , com condição inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

$\dot{x}$  – Derivada em relação a  $t$  da função vetorial  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ .

$\varepsilon x$  – Pequenas perturbações do ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$\hat{S}$  – Campo sliding em relação a fronteira  $\Sigma$ .

$\partial \hat{S}^\pm$  – Fronteira da região de sliding correspondente aos valores de  $\beta = \pm 1$ .

$BID$  – Bifurcação Induzida por Descontinuidade.

$M_D$  – Mapa de descontinuidade.

$f$  – Expressão geral para um campo autônomo  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  definido em um aberto  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ .

$H_{ij}$  – Expressão geral para a função que determina a(s) subvariedade(s) de descontinuidade  $\Sigma_{ij}$ .

$R$  – Função de restituição (ou lei de impacto) dado em um sistema de impacto ou híbrido.

$EDO$  – Equações Diferenciais Ordinárias.

$\bar{S}_i$  – Fecho do subconjunto  $S_i \subset \mathbb{R}^n$ . Isto é, o conjunto  $S_i \cup \partial S_i$ .

$\mathcal{L}_{F_i}H(x)$ – Derivada de Lie da função  $H$  na direção do campo  $F_i$  aplicada no ponto  $x$ . Ou seja,  $\frac{\partial}{\partial t}H(\phi_i(x, t))$ .

$\Gamma$ – Conjunto dos pontos  $\{x \in \mathbb{R}^n : \phi_i(x_0, t) = x, 0 \leq t \leq T^*\}$  que representam uma órbita  $T^*$ –periódica em um sistema não-linear autônomo do tipo  $\dot{x} = f(x)$ , com condição inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

$A(t)$ – Matriz  $T$ -periódica.

$X(t)$ – Matriz de solução fundamental do sistema  $\dot{y} = A(t)y$ .

$B, C$ – Matrizes não-singulares quaisquer.

$tr(A)$ – Traço da matriz quadrada  $A$  (soma dos elementos da diagonal principal).

$e^A$ – Exponencial da matriz  $A$ .

$C^1(\mathcal{A})$ – Classe das funções  $f$ , diferenciáveis em um aberto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ , cuja diferencial  $Df$  é contínua.

$H_{ij}^{-1}(\{0\})$ – Pré-imagem do ponto 0 pela função  $H_{ij}$ .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – Produto interno usual.

$\Pi, \Pi_N$ – Superfícies transversais ao fluxo.

$v_1(x)$ – Velocidade em relação à fronteira de descontinuidade, dada pela primeira derivada de Lie.

$a_1(x)$ – Aceleração em relação à fronteira de descontinuidade, dada pela segunda derivada de Lie.

$\delta_i, \delta, \Delta_0, \Delta$ – Tempos de evolução do fluxo, com  $i \in \mathbb{N}$ .

$\nabla H(x), H_x(x)$ – Gradiente da função escalar  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é, o vetor  $\left( \frac{\partial H}{\partial x_1}(x), \frac{\partial H}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n}(x) \right)$ .

$PDM$ – Poincaré Discontinuity Mapping. Mapa de projeção em  $\Pi_N$  utilizando um dos fluxos.

$\text{sgn}(g)$ – Sinal da função  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  restrito a uma vizinhança de interesse.

$ZDM$ – Zero-time Discontinuity Mapping - mapa de descontinuidade que não altera o tempo de evolução do fluxo.

$|a|$ – Valor absoluto da constante  $a \in \mathbb{R}$ .

$\emptyset$ – Conjunto vazio.

$(-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$ – Intervalo aberto, cujas extremidades são  $-\varepsilon_f$  e  $\varepsilon_f$ ,  $\varepsilon_f > 0$ .

$\mathcal{A}, \mathcal{D}$ – Representação de subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$ .

$V_A$ – Vizinhança do subconjunto (ou ponto)  $A$ .

$S_A$ – Conjunto dos autovalores da matriz  $A$ .

$H_{min}(\phi_i(x, t))$ – Valor mínimo da função  $H$  em relação à evolução do fluxo  $\phi_i$  com condição inicial  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$H_{max}(\phi_i(x, t))$ – Valor máximo da função  $H$  em relação à evolução do fluxo  $\phi_i$  com condição inicial  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$\ll a$ – Valor real muito menor que  $a \in \mathbb{R}$ .

$\approx$  – Valor aproximado.

$\simeq 0^+$ – Valor próximo a zero estritamente positivo.



29 de Junho de 2020



# 1

## INTRODUÇÃO

O crescente desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos tem firmado a relevância dessa área no meio acadêmico, tendo como precursores Henri Poincaré [1854 – 1912] e Aleksandr Lyapunov [1857 – 1918]. Seus estudos forneceram diversas ferramentas qualitativas importantes (algumas delas podem ser encontradas em [8]), cujo exemplo pertinente a nós é a aplicação de Poincaré, muito utilizada para o estudo de órbitas periódicas. Uma das informações que essa aplicação fornece é sobre a estabilidade dessas soluções através do estudo dos autovalores de sua matriz jacobiana. Em se tratando dos primeiros estudos qualitativos sobre sistemas dinâmicos suaves por partes, estes foram apresentados primeiramente pelo matemático russo Aleksei Filippov [1923 – 2004] em seu trabalho intitulado *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Nele, há uma densa teoria acerca dessa classe de sistemas, assim como a construção do campo deslizante (sliding), que será um dos principais focos de nosso estudo. Dada a relevância dessa área, em nosso trabalho apresentaremos a construção de ferramentas analíticas que ajudarão a compreender a dinâmica de um sistema dinâmico suave por partes (s.p.p.) de equações diferenciais ordinárias que, sob certas condições apresenta uma bifurcação. Uma particularidade desta classe de sistemas dinâmicos que vale ressaltar no momento é que ela admite um subconjunto chamado fronteira de descontinuidade.

Nosso interesse é compreender como as soluções (fluxos) se comportam em vizinhanças desse subconjunto quando ocorrem bifurcações, que por sua vez, são situações que envolvem a perda de propriedades topológicas associadas à estabilidade estrutural do sistema de interesse devido a mudança de parâmetros ou perturbação de condições iniciais. Aleksandr Andronov [1901 – 1952] introduziu a noção de estabilidade estrutural para sistemas dinâmicos suaves utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov. Dito isto, apresentaremos a noção parcialmente análoga desse conceito para nossa classe de sistemas suaves por partes. Nosso principal interesse são as bifurcações que envolvem o contato tangente de soluções com a fronteira da região de sliding. Como veremos

à frente, tal região é um subconjunto aberto contido na fronteira de descontinuidade. Para esse estudo, faremos uso de aplicações chamadas *mapas de Descontinuidade*, que atuam como uma correção do fluxo na vizinhança de interesse. Utilizando essas funções, mostraremos como construir a Aplicação de Poincaré associada às soluções periódicas em contato tangente à fronteira de descontinuidade, em especial, quando o ponto de tangencia pertence à fronteira da região de sliding.

Há uma grande diversidade de problemas físicos que não podem ser descritos com ferramentas da dinâmica contínua. Alguns desses exemplos podem ser encontrados em circuitos elétricos e osciladores de impacto [2], modelos ecológicos como as equações de Bazykin encontradas em [4], que é um caso particular do modelo presa-predador, modelado como uma subclasse de sistemas s.p.p. chamada sistemas de Filippov. A fim de elucidar como essa classe de sistemas se apresenta, as equações de Bazykin são dadas pelo seguinte sistema s.p.p.:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), & x \in S_1. \\ f_2(x), & x \in S_2. \end{cases} \quad (1)$$

sendo que

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^2 - \frac{ax_1x_2}{b+x_1} \\ \frac{ax_1x_2}{b+x_1} - dx_2 \end{bmatrix}.$$

$$f_2(x) = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^2 - \frac{ax_1x_2}{b+x_1} \\ \frac{ax_1x_2}{b+x_1} - dx_2 - Ex_2 \end{bmatrix}.$$

onde  $x_1 > 0$  é a massa da presa,  $x_2 > 0$  é a massa do predador,  $a, b, c, E \in \mathbb{R}$  são parâmetros. Considerando a função  $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $H(x_1, x_2, \alpha) = x_2 - \alpha$ , os subconjuntos  $S_1$  e  $S_2$  são dados por  $S_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : H(x_1, x_2, \alpha) > 0\}$  e  $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : H(x_1, x_2, \alpha) < 0\}$ . Nesse caso, definimos a fronteira de descontinuidade pelo subconjunto  $\Sigma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : H(x_1, x_2, \alpha) = 0\}$ . Vale destacar que um sistema s.p.p. como (1) é do tipo Filippov se e somente se  $f_1(x) \neq f_2(x), \forall x \in \Sigma$ . Além do exemplo acima, ainda em [4], encontramos equações que descrevem generalizações de sistemas ideais de gás-líquido, modelados também por sistemas de Filippov, que será um dos nossos objetos de estudo.

Fazendo um breve resumo de nosso trabalho, nos capítulos 2 e 3 concentraremos nossos esforços em compreender como sistemas suaves por partes se comportam em

uma vizinhança de uma bifurcação (que inicialmente não envolverá regiões de sliding) e também estudar alguns dos possíveis comportamentos que os fluxos podem ter em sistemas de Filippov genéricos do tipo (1). Tais sistemas apresentam regiões onde o campo é mutuamente atrator (ou repulsor) em ambos os lados da fronteira de descontinuidade. Para o caso atrator, chamaremos de região de sliding e para o caso repulsor, região de escape. Definiremos devidamente esses subconjuntos no capítulo 3.

Nosso principal objetivo é a construção dos mapas de descontinuidade para os casos de bifurcações que envolvem regiões de sliding, dadas no capítulo 3. Chamaremos essas de bifurcações sliding. No fim de cada seção, mostraremos como a aplicação de Poincaré associada a cada caso de bifurcação sliding pode ser definida usando as aplicações de descontinuidade construídas. Concluímos esse estudo no capítulo 4, apresentando uma aplicação desses conceitos em um modelo mecânico de oscilador de impacto. Nesta parte, estudamos a existência de soluções periódicas sliding (i.e., soluções periódicas que contém uma pequena região de deslize sobre a fronteira de descontinuidade) que emanam de uma solução periódica não-hiperbólica (ou seja, a aplicação de Poincaré associada tem autovalor 1) do sistema em consideração.



# 2

## CAMPOS VETORIAIS SUAVES POR PARTES

### 2.1 CONCEITOS INICIAIS

Começamos fazendo uma breve introdução sobre os conceitos necessários à compreensão do que são sistemas dinâmicos suaves por partes. Toda teoria tratada aqui pode ser encontrada em [2]. Ainda neste capítulo, definiremos e construiremos alguns exemplos de mapas de Descontinuidade ( $M_D$ ), úteis para compreensão da dinâmica do fluxo para sistemas s.p.p. diante de cenários envolvendo a interação das soluções com a fronteira de descontinuidade que será definida no que segue. A teoria qualitativa geral utiliza a definição formal de sistema dinâmico em função de um espaço de estados  $X \subset \mathbb{R}^n$ , munido da topologia usual (induzida pelas bolas abertas, também na métrica usual) e um operador de evolução, geralmente chamado  $\phi$ , de tal maneira que, dado  $x_0 \in X$ , o operador  $\phi : T \times X \rightarrow X$  leva  $x_0$  até  $\phi_t(x_0)$ , para algum  $t \in T$ . O subconjunto  $T$  é um conjunto de índices que pode ser discreto (se  $T \subset \mathbb{Z}$ ) ou contínuo (se  $T \subset \mathbb{R}$ ). Dessa forma, o fluxo evolui através do 'tempo'  $t$ , até encontrar o ponto  $\phi_t(x_0) \in X$ . Considerando o exposto, temos a seguinte definição:

**Definição 2.1.** *Um espaço de estados  $X \subset \mathbb{R}^n$ , um subconjunto de índices  $T$  e um operador de evolução  $\phi_t : X \rightarrow X$  definem um sistema dinâmico se*

(i)  $\phi_0(x) = x$ , para todo  $x \in X$ ,

(ii)  $\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x))$ , para todo  $x \in X$  e  $t, s \in T$ .

O subconjunto  $\phi_t(x)$  para qualquer  $t \in T$  é chamado trajetória ou órbita passando pelo ponto  $x$ . O retrato de fase de um sistema dinâmico é o espaço de estados particionado em órbitas. Se  $T = \mathbb{Z}$  dizemos que o sistema dinâmico acima é discreto. Se  $T = \mathbb{R}$ , dizemos que o sistema dinâmico é contínuo

A definição acima constitui  $\phi_t(x)$  como um *semigrupo*. Vale destacar que, tomando  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  subconjunto aberto, considere a função vetorial  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  e o seguinte sistema de equações diferenciais autônomo:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathcal{D}. \quad (2)$$

Sendo  $\phi_t$  satisfazendo

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x) = f(\phi_t(x)) \text{ e } \phi_0(x) = x, \quad (3)$$

então  $\phi_t$  é o fluxo de (2) e o subconjunto  $\{\mathcal{D}, \mathbb{R}, \phi_t\}$  define um sistema dinâmico contínuo. A notação que utilizaremos é  $\phi_t(x) = \phi(x, t)$ .

Para começarmos a teoria referente a sistemas s.p.p., definimos:

**Definição 2.2.** *Um sistema suave por partes é composto por um número finito de EDO's:*

$$\dot{x} = F_i(x, \eta); \quad (4)$$

onde  $x \in S_i$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^m$  espaço de parâmetros e  $\cup S_i = \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  e cada  $S_i$  tem interior não-vazio. A interseção  $\Sigma_{ij} = \overline{S_i} \cap \overline{S_j}$ , onde  $\overline{S_i}$  denota o fecho de  $S_i$ , ou é vazio ou é uma subvariedade  $(n-1)$ -dimensional inclusa em  $\overline{S_i} \cup \overline{S_j}$ . Cada campo vetorial  $F_i$  está bem definido em todo o domínio  $\mathcal{D}$  e define um único fluxo  $\phi_i(x, t)$  que, por sua vez, também está bem definido em todo domínio  $\mathcal{D}$ .

O subconjunto  $\Sigma_{ij}$  é chamado de *fronteira de descontinuidade* ou *variedade de descontinuidade*. Cada conjunto  $\Sigma_{ij}$  é uma subvariedade suave de codimensão 1 (isto é,  $(n-1)$ -dimensional e localmente difeomorfa a  $\mathbb{R}^{n-1}$ ), que será dada por  $\Sigma_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n : H_{ij}(x) = 0\}$  para alguma função escalar suave  $H_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Note que, se considerarmos como operador de evolução o fluxo  $\phi_i$ , tomando como espaço de estado  $\mathcal{D}$  e conjunto de índices  $\mathbb{R}$ , o subconjunto  $\{\mathcal{D}, \mathbb{R}, \phi_i\}$  define um sistema dinâmico suave, para qualquer índice  $i$  referente ao sistema dado na definição (2.2).

A próxima definição será importante para definir o que são sistemas de Filippov, que será definido na seção 4:

**Definição 2.3.** *O grau de suavidade de um ponto  $x_0 \in \Sigma_{ij}$ , sendo  $\Sigma_{ij}$  fronteira correspondente a um campo como (4) é a ordem do primeiro termo não nulo da série de Taylor da diferença entre os fluxos  $[\phi_i(x_0, t) - \phi_j(x_0, t)]$ , aplicado em  $t = 0$ .*

**Observação 2.4.** Para casos onde existe apenas uma fronteira de descontinuidade, é considerado como grau de suavidade, o primeiro termo não nulo da série de Taylor da diferença  $[\phi_1(x_0, t) - \phi_2(x_0, t)]$ , aplicado em  $t = 0$ .

**Definição 2.5.** A fronteira de descontinuidade  $\Sigma_{ij}$  é dita uniformemente descontínua se o grau de suavidade é o mesmo para todo ponto  $x_0 \in \Sigma$ . Se  $\Sigma_{ij}$  é uniformemente descontínua de grau  $r$ , dizemos então que  $\Sigma_{ij}$  tem grau de descontinuidade uniforme  $r$ .

**Observação 2.6.** Sem perda de generalidade, estamos supondo, em todos os teoremas que seguem, que a variedade de descontinuidade é um hiperplano. Para o caso onde não seja, pelo fato da função  $H_{ij}$  ser suave com 0 sendo valor regular, pode ser aproximada, em uma vizinhança suficientemente próxima do ponto de interesse, por um hiperplano de codimensão 1, isto é, um plano de dimensão  $n - 1$ .

Um exemplo de sistema s.p.p. é o sistema híbrido, definido como segue.

**Definição 2.7.** Um sistema híbrido suave por partes é composto por um conjunto finito de EDO's:

$$\dot{x} = F_i(x, \eta), x \in S_i. \quad (5)$$

e um conjunto de aplicações:

$$R_{ij} : \Sigma_{ij} \rightarrow \mathcal{D}, \quad (6)$$

onde  $\mathcal{D} = \cup \overline{S}_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma_{ij} := \overline{S}_i \cap \overline{S}_j$  e cada  $S_i$  com interior não-vazio. Além disso, cada  $\Sigma_{ij}$  é uma subvariedade de codimensão 1 ou é vazio.

De tais sistemas, obtemos a definição de sistema de impacto como segue:

**Definição 2.8.** Um Sistema de Impacto é um sistema híbrido suave por partes, onde a função  $R_{ij} : \Sigma_{ij} \rightarrow \Sigma_{ij}$  e o fluxo estão restritos a apenas um lado da fronteira de descontinuidade, isto é, em  $\overline{S}_i = S_i \cup \Sigma_{ij}$  (ou em  $\overline{S}_j = S_j \cup \Sigma_{ij}$ ).

O conceito de bifurcação em sistemas suaves por partes é parcialmente análogo ao de sistemas suaves. Assim como no caso suave, quando há uma discrepância em relação à estabilidade estrutural e a equivalência topológica entre os sistemas suaves por partes dada pela da variação dos valores de parâmetro, dizemos que o sistema apresenta uma bifurcação, que chamaremos de Bifurcação Induzida por Descontinuidade (BID). A definição de estabilidade estrutural é dada na que segue.

**Definição 2.9.** Dizemos que um sistema suave por partes é estruturalmente estável por partes se, dado  $\varepsilon > 0$ , qualquer perturbação de classe  $C^1$  com tamanho máximo  $\varepsilon$  mantém as características de grau de suavidade da fronteira inalteradas, e os retratos de fase são topologicamente equivalentes em relação a topologia produto.

Dessa forma, definimos bifurcações em s.p.p. conforme abaixo:

**Definição 2.10.** Dizemos que uma bifurcação induzida por descontinuidade (BID) ocorre quando, para algum valor de parâmetro, o sistema suave por partes não é estruturalmente estável por partes. Ou seja, para algum valor de parâmetro, existe uma pequena perturbação que conduz a sistemas não topologicamente equivalentes, na topologia usual.

Para estudar esses fenômenos (bifurcações), utilizaremos uma ferramenta chamada mapa de descontinuidade ( $M_D$ ), que por sua vez, pode ser visto como uma aplicação que "corrige" a trajetória, desconsiderando localmente os pontos que pertencem a fronteira de descontinuidade e deslocando os pontos necessários utilizando operadores convenientes. Dito isto, definimos:

**Definição 2.11.** Dado o operador de evolução  $\phi_i$  associado ao campo  $F_i$  de um sistema s.p.p. como na definição (2.2), considere o sistema dinâmico  $\{\mathcal{D}, \mathbb{R}, \phi_i\}$ . O mapa de descontinuidade associado  $M_D : V_x \rightarrow V_x$  definido em uma vizinhança suficientemente grande  $V_x$  de  $x$  tal que  $V_x \cap \Sigma_{ij} \neq \emptyset$ , é dado pela expressão:

$$M_D(x) = \begin{cases} x, & \text{se } \phi_i(x, t) \cap \Sigma_{ij} = \emptyset, \forall t \in \mathbb{R}, \\ \hat{\phi}(x), & \text{se } \phi_i(x, t) \cap \Sigma_{ij} \neq \emptyset, \text{ para algum } t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (7)$$

onde  $\hat{\phi}$  é a correção do fluxo utilizando os operadores de evolução circundantes.

A definição acima afirma que, para o caso suave, o mapa de descontinuidade associado ao sistema dinâmico  $\{\mathcal{D}, \mathbb{R}, \phi_i\}$  é a função identidade  $M_D(x) = x$ . Quando consideramos a presença da fronteira de descontinuidade, temos a necessidade de correção do fluxo, utilizando a função  $\hat{\phi}$  que, por sua vez, é definida conforme a situação apresentada.

Antes de ilustrar o funcionamento da  $M_D$ , a definição de derivada de Lie nos será útil. A saber:

**Definição 2.12.** Dados  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , campos vetoriais suaves e  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  função escalar suave. A derivada de Lie  $\mathcal{L}_F H(x)$  de  $H$  na direção de  $F$  é dada por:

$$\mathcal{L}_F H(x) = \left. \frac{\partial H}{\partial t}(\phi(x, t)) \right|_{t=0} = \frac{\partial H}{\partial x}(x) \cdot F(x) = \langle \nabla H(x), F(x) \rangle$$

A segunda derivada de Lie de  $\mathcal{L}_F H(x)$  na direção de  $G$  é dada por:

$$\mathcal{L}_G \mathcal{L}_F H(x) = \langle \nabla \mathcal{L}_F H(x), G(x) \rangle.$$

Se  $F = G$ , escrevemos  $\mathcal{L}_F \mathcal{L}_F H(x) = \mathcal{L}_F^2 H(x)$ .

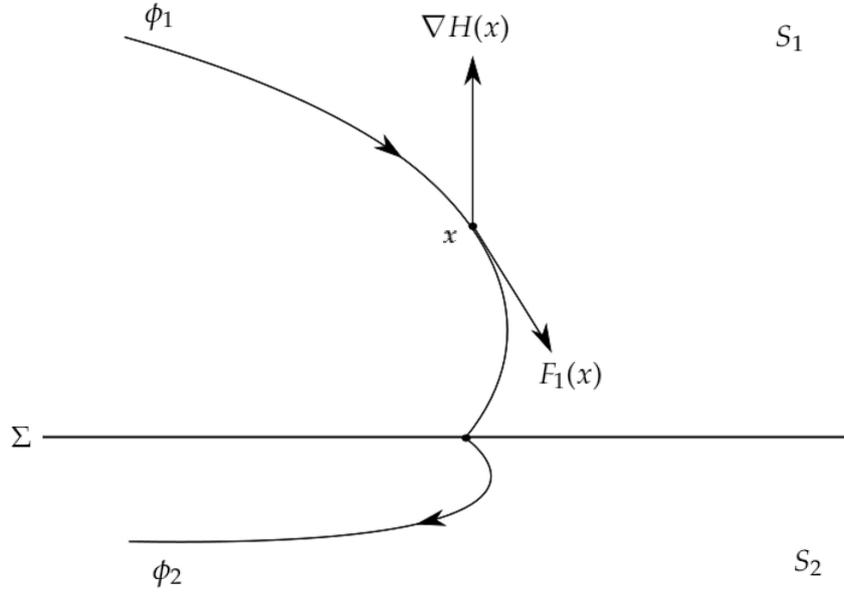


Figura 1: Interpretação geométrica da derivada de Lie para um sistema suave por partes com duas zonas e uma única fronteira de descontinuidade  $\Sigma$

Do ponto de vista geométrico, em se tratando de campos suaves por partes, a derivada de Lie indica a variação do campo  $F_i$  em relação a fronteira de descontinuidade  $\Sigma_{ij} = \{x \in \mathcal{D} : H_{ij}(x) = 0\}$ . Isso nos mostra qual será o comportamento das soluções para pontos pertencentes a  $\Sigma$ , ou seja, quando o fluxo será *transversal* ou *tangente* em uma vizinhança de  $\Sigma$ . Como falamos na observação (2.6), o ponto 0 é um *valor regular* de  $H_{ij}$ , ou seja,  $\nabla H_{ij}(x)$  é sobrejetiva, para todo ponto  $x \in H_{ij}^{-1}(\{0\})$ . Consequentemente, temos  $\nabla H_{ij}(x^*) \neq 0$ . Em particular, isto implica em dizer que  $H_{ij}^{-1}(\{0\})$  é uma *superfície regular* de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Para exemplificar de maneira simples, considere um sistema em  $\mathbb{R}^2$  de duas zonas e que  $\Sigma_{12} = \Sigma = \{x \in \mathcal{D} : H(x) = 0\}$  é uma reta. O gradiente  $\nabla H$  é perpendicular à superfície  $\Sigma$ . Então, a atuação da derivada de Lie pode ser observada na figura (1).

Como estamos tratando de campos vetoriais, a noção de ponto de equilíbrio para campos s.p.p. é parcialmente análoga a utilizada em teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias. Dessa forma, definimos:

**Definição 2.13.** *Suponha um campo vetorial s.p.p. da forma (2.2) com  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e seja  $x^* \in \mathcal{D}$ , ponto de equilíbrio de  $F_i$ , para algum  $i$ .*

- (i) *Dizemos que  $x^*$  é um ponto de equilíbrio admissível de  $F_i$  se  $x^* \in S_i$ .*
- (ii) *Dizemos que  $x^*$  é um ponto de equilíbrio não-admissível de  $F_i$  se  $x^* \in S_j$ , com  $i \neq j$ .*

Para a ilustração da  $M_D$ , como primeiro exemplo, considere um sistema de impacto, dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x), \quad x \in \mathbb{R}^2; \\ R &: \Sigma \rightarrow \Sigma, \end{aligned}$$

com uma única fronteira de descontinuidade  $\Sigma = \{x \in \mathcal{D} : H(x) = 0\}$ , para alguma função suave  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e considere uma trajetória periódica em relação ao fluxo  $\phi$ , como ilustrado na figura (2).

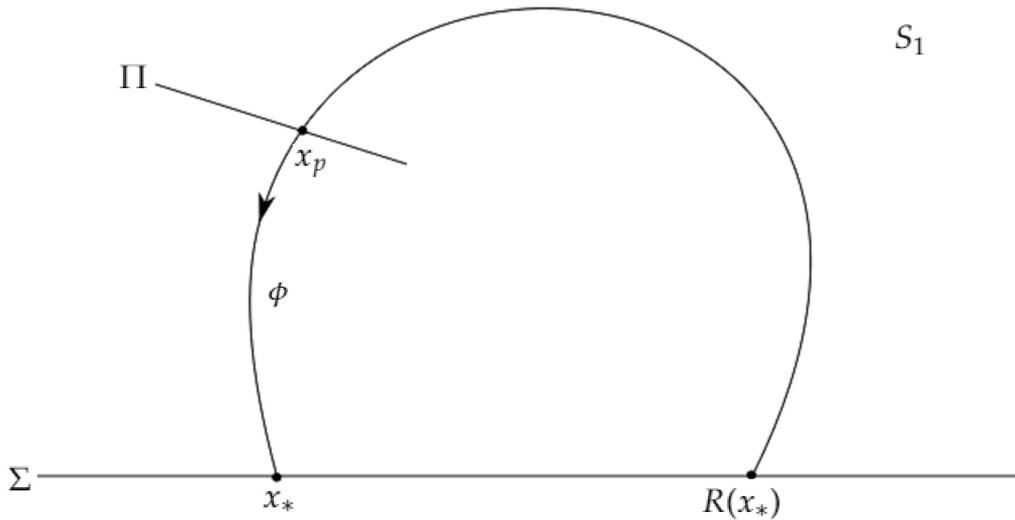


Figura 2: Órbita periódica de um sistema de impacto.

Conforme observamos, sobre o ponto  $x_*$  e considerando a interpretação geométrica da derivada de Lie dada na figura (1), temos  $\mathcal{L}_{F_1} H(x_*) = \langle \frac{\partial H}{\partial x}(x_*), F_1(x_*) \rangle \neq 0$ , ou seja, a solução passando por  $x_*$  é transversal a  $\Sigma$ . Para tal trajetória, considere uma superfície transversal  $\pi$ , contendo o ponto  $x_p$  conforme ilustramos na figura (3). Para algum tempo  $\delta_1 \in \mathbb{R}$ , o fluxo  $\phi(x_p, \delta_1) = x_*$  encontra  $\Sigma$ . A lei de impacto  $R$  leva o ponto  $x_*$  até  $R(x_*)$  como indicado na figura (3). Para algum tempo  $\delta_2 \in \mathbb{R}$ , o fluxo  $\phi(R(x_*), \delta_2)$  encontra a superfície  $\pi$  em  $x_p$ . Agora, tome um ponto  $\hat{x}$  próximo a  $x_p$ . Para o mesmo

tempo  $\delta_1$ , encontramos o ponto  $x_0$  sob ação do fluxo  $\phi$ . Para algum tempo  $\delta_3$ , o fluxo  $\phi(x_0, \delta_3)$  atinge a superfície de impacto  $\Sigma$ . Sob a ação da aplicação  $R$ , encontramos o ponto  $R(\phi(x_0, \delta_3)) = x_3$ . O mapa de descontinuidade leva o ponto  $x_0$  ao ponto *virtual*  $x_4$ , dado por:

$$x_4 = \phi(x_3, -\delta_3)$$

Fazendo isso, obtemos uma aplicação que mantém o tempo de evolução do fluxo inalterado (pois a soma dos tempos é  $\delta_3 - \delta_3 = 0$ ) e que corrige o 'erro' deixado pelo fluxo  $\phi$  na tentativa de atingir a superfície  $\Sigma$ .

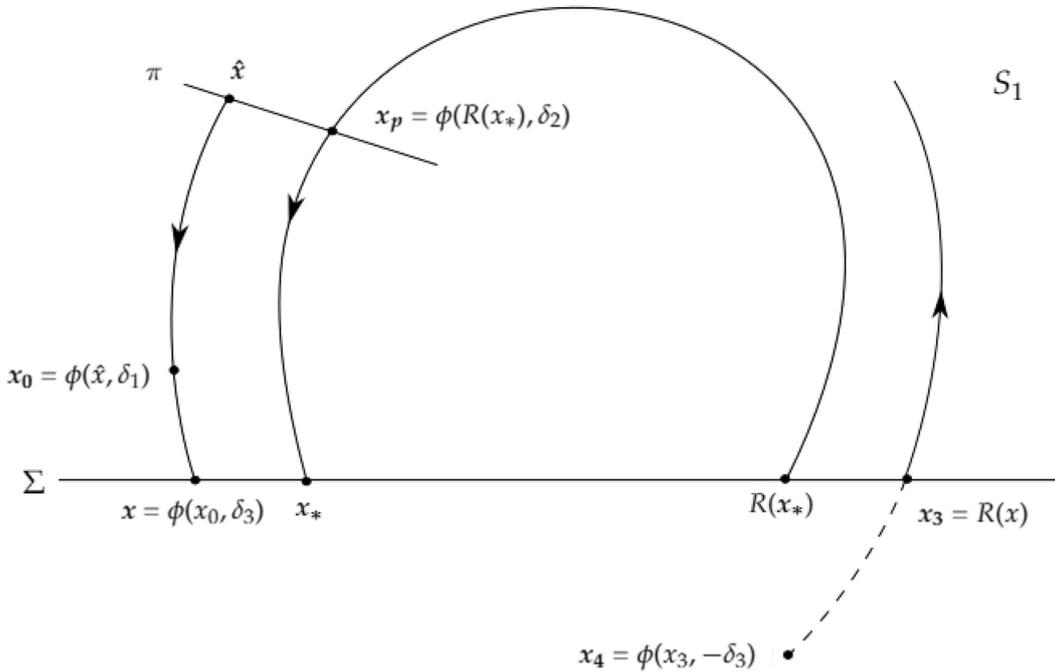


Figura 3: Ilustração do comportamento da  $M_D$  para sistemas de impacto.

Para construir o mapa de descontinuidade citado, considere o ponto  $x$ , tal que:

$$x = \phi(x_0, \delta_3),$$

onde  $x \in \Sigma$ . Expandindo a expressão acima em torno de  $\delta_3 = 0$ , obtemos:

$$\phi(x_0, \delta_3) = x_0 + F(x_0)\delta_3 + O(\delta_3^2).$$

Considerando  $\Delta x = x_0 - x_*$ , obtemos:

$$x = \Delta x + x_* + F(x_*)\delta_3 + O(\delta_3^2).$$

Se  $x \in \Sigma$ , então  $H(x) = 0$ . Logo:

$$H(\Delta x + x_* + F(x_*)\delta_3 + O(\delta_3^2)) = 0.$$

Expandindo tal expressão em torno de  $x_*$ :

$$H(x) = H(x_*) + \frac{\partial H}{\partial x}(x_*)(\Delta x + F(x_*)\delta_3) + O((\Delta x + F(x_*)\delta_3)^2, \delta_3^2) = 0.$$

Como  $x_* \in \Sigma$ , temos  $H(x_*) = 0$ . Logo:

$$H(x) = \frac{\partial H}{\partial x}(x_*)(\Delta x + F(x_*)\delta_3) + O((\Delta x + x_* + F(x_*)\delta_3)^2, \delta_3^2) = 0.$$

Denotamos  $\frac{\partial H}{\partial x}(x) = \nabla H(x)$ . Isolando  $\delta_3$  e como  $\nabla H(x_*) \cdot F(x_*) \neq 0$ , obtemos:

$$\delta_3 = -\frac{\nabla H(x_*) \cdot \Delta x}{\nabla H(x_*) \cdot F(x_*)} + O((\Delta x)^2).$$

Agora, o ponto  $x_4$  é dado por:

$$x_4 = \phi(x_3, -\delta_3).$$

Expandindo tal expressão em torno de  $x_3$ :

$$x_4 = x_3 - F(x_3)\delta_3 + O(\delta_3^2).$$

O ponto  $x_3$  é a imagem de  $x$  pela *lei de impacto*  $R$ . Então:

$$x_3 = R(\Delta x + x_* + F(x_*)\delta_3 + O(\delta_3^2)).$$

Daí:

$$x_4 = R(\Delta x + x_* + F(x_*)\delta_3 + O(\delta_3^2)) - F(R(\Delta x + x_* + F(x_*)\delta_3 + O(\delta_3^2)))\delta_3 + O(\delta_3^2).$$

Expandindo a expressão  $R(\Delta x + x_* + F(x_*)\delta_3 + O(\delta_3^2))$  em torno de  $x_*$ , obtemos:

$$R(\Delta x + x_* + F(x_*)\delta_3 + O(2)) = R(x_*) + \nabla R(x_*) \cdot (\Delta x + F(x_*)\delta_3) + O((\Delta x + F(x_*)\delta_3)^2, \delta_3^2).$$

Então:

$$x_4 = R(x_*) + \nabla R(x_*) \cdot (\Delta x + F(x_*)\delta_3) - \delta_3 F(R(x_*)) + O((\Delta x + F(x_*)\delta_3)^2, \delta_3^2).$$

Substituindo  $\delta_3$  e  $\Delta x$ , obtemos:

$$x_4 = R(x_*) + \left( \nabla R(x_*) + \frac{1}{\nabla H(x_*) \cdot F(x_*)} \left( \left( F(R(x_*)) - \nabla R(x_*)F(x_*) \right) \nabla H(x_*) \right) \right) (x_0 - x_*) + O((\Delta x)^2).$$

como queríamos encontrar.

Dessa forma, acabamos de provar a seguinte proposição:

**Proposição 2.14.** Para uma órbita transversal a superfície de impacto  $\Sigma$ , onde  $\mathcal{L}_{F_1}H(x_*) = \langle \nabla H(x_*), F(x_*) \rangle \neq 0$ , o Mapa de Descontinuidade  $M_D : V_{x^*} \rightarrow V_{x^*}$  para um sistema de impacto como em (8), definido em uma vizinhança  $V_{x^*}$  suficientemente próxima de  $\Sigma$  do ponto  $x^*$  é dado por:

$$M_D(x) = R(x_*) + \left( \nabla R(x_*) + \frac{1}{\nabla H(x_*) \cdot F(x_*)} \left( (F(R(x_*)) - \nabla R(x_*)F(x_*)) \nabla H(x^*) \right) \right) (x - x_*).$$

Como segundo exemplo, considere agora um sistema híbrido suave por partes qualquer, com uma única fronteira de descontinuidade  $\Sigma$ , como segue:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & H(x) > 0; \\ F_2(x), & H(x) < 0; \end{cases} \quad (8)$$

e  $\Sigma_{12} = \Sigma$ , tal que alguma aplicação  $R : \Sigma \rightarrow \mathcal{D}$  esteja definida em  $\Sigma$ . Consideremos então uma órbita periódica e uma superfície transversal  $\Pi$  à órbita, como podemos ver a seguir:

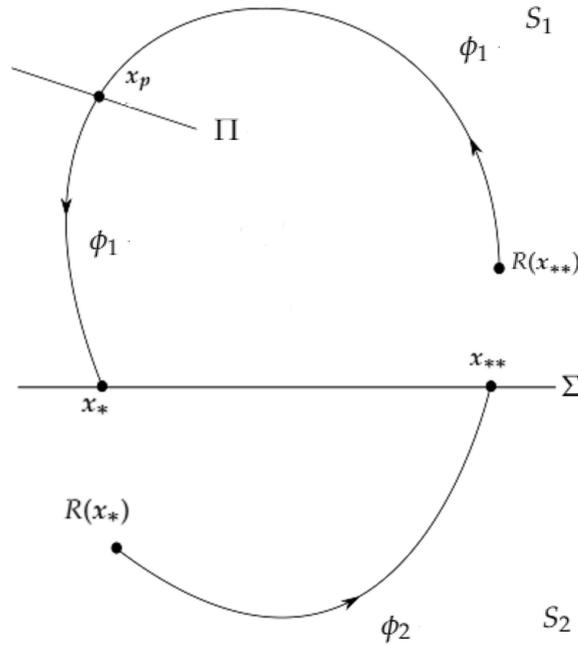


Figura 4: Órbita periódica com uma superfície transversal contendo o ponto  $x_p$ .

Definimos:

$$S_1 = \{x \in \mathcal{D} : H(x) > 0\};$$

$$S_2 = \{x \in \mathcal{D} : H(x) < 0\};$$

Dessa forma, podemos reescrever o sistema (8) como:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1; \\ F_2(x), & x \in S_2; \end{cases}$$

Para um tempo  $t_1$ , saindo de  $\Pi$ , o fluxo  $\phi_1$  encontra a superfície de descontinuidade  $\Sigma$  no ponto  $x_*$ . Sob a ação da aplicação  $R$ , o ponto  $x_*$  é deslocado para  $S_2$  e, sob ação do fluxo  $\phi_2$  encontramos  $\Sigma$  no ponto  $x_{**}$ , sendo que  $x_{**} = \phi_2(R(x_*), t_2)$  para algum tempo  $t_2 > 0$ . Novamente, sob a atuação da função  $R$ , o ponto  $x_{**}$  é deslocado para  $S_1$  e, sob ação do fluxo  $\phi_1$  novamente encontramos o ponto  $x_p$ , onde  $x_p = \phi_1(R(x_{**}), t_3)$  para algum  $t_3 > 0$ , conforme podemos observar na figura (4).

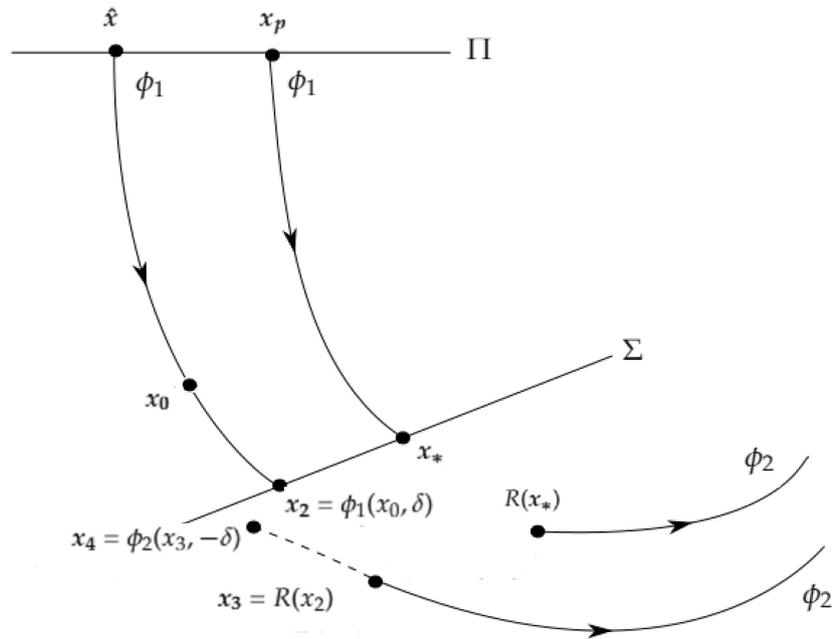


Figura 5: Dinâmica local próximo ao ponto  $x_2$ .

Tomando um ponto  $\hat{x}$ , sob ação do fluxo  $\phi_1$ , encontramos o ponto  $x_0 = \phi_1(x_p, t_1)$ . Para algum tempo  $\delta > 0$ , obtemos o ponto  $x_2 \in \Sigma$ , ou seja,  $x_2 = \phi_1(x_0, \delta)$ , tal que  $H(x_2) = 0$ . O mapa de descontinuidade leva o ponto  $x_0$  a  $x_4$ , sendo que  $x_4 = \phi_2(x_3, -\delta)$ . Com um raciocínio análogo ao anterior, obtemos:

$$\delta = -\frac{\nabla H(x_*)\Delta x}{\nabla H(x_*) \cdot F_1(x_*)} + O((\Delta x)^2).$$

Sendo  $x_2 = \phi_1(x_0, \delta)$ , temos:

$$x_2 = \Delta x + x_* + F_1(x_*)\delta + O(\delta^2).$$

O ponto  $x_3$  é dado por

$$x_3 = R(\Delta x + x_* + F_1(x_*)\delta + O(\delta^2)),$$

que, expandindo em torno de  $x_*$ , obtemos:

$$x_3 = R(x_*) + \nabla R(x_*) \cdot (\Delta x + \delta F_1(x_*)) + O((\Delta x + x_* + \delta F_1(x_*))^2).$$

Expandindo  $\phi_2(x_3, -\delta)$  em torno de  $\delta = 0$ :

$$x_4 = x_3 - F_2(x_3)\delta + O(\delta^2).$$

Substituindo  $x_3$ , obtemos:

$$x_4 = R(x_*) + \nabla R(x_*) \cdot (\Delta x + \delta F_1(x_*)) - \delta F_2(R(x_*)) + O((\Delta x + x_* + \delta F_1(x_*))^2, \delta^2).$$

Substituindo  $\delta$ , obtemos:

$$x_4 = R(x_*) + \left( \nabla R(x_*) + \frac{1}{\nabla H(x_*) \cdot F_1(x_*)} \left( \left( F_2(R(x_*)) - \nabla R(x_*) F_1(x_*) \right) \nabla H(x_*) \right) \right) \Delta x + O((\Delta x)^2).$$

e essa é a expressão final para a  $M_D$ .

Dessa forma, acabamos de demonstrar a seguinte proposição:

**Proposição 2.15.** *Considerando uma órbita periódica de um sistema híbrido suave por partes como (8), com uma única fronteira de descontinuidade como ilustrado na figura (4). Sobre a hipótese de  $\mathcal{L}_{F_1} H(x_*) \neq 0$  para um ponto  $x_* \in \Sigma$ , o mapa de descontinuidade  $M_D : V_{x^*} \rightarrow V_{x^*}$  definido em uma vizinhança  $V_{x^*}$  suficientemente próxima a  $\Sigma$  do ponto  $x_*$  é dado por:*

$$M_D(x) = R(x_*) + \left( \nabla R(x_*) + \frac{1}{\nabla H(x_*) \cdot F_1(x_*)} \left( \left( F_2(R(x_*)) - \nabla R(x_*) F_1(x_*) \right) \nabla H(x_*) \right) \right) (x - x_*).$$

## 2.2 MAPAS DE DESCONTINUIDADE PARA BIFURCAÇÕES EM SISTEMAS SUAVES POR PARTES

O objetivo das próximas seções é estudar a dinâmica de um sistema s.p.p.  $n$ -dimensional, quando este apresenta uma bifurcação. Nesta seção, começaremos o estudo em sistemas

que não apresentam regiões de sliding, sendo este dado na seção 5. Sem perda de generalidade, estudaremos apenas sistemas com duas zonas e uma única fronteira de descontinuidade  $\Sigma$ . Vale destacar que todas as demonstrações feitas nesse trabalho são válidas em campos no  $\mathbb{R}^n$ . Dessa forma, cada fórmula apresentada pode ser utilizada em campos vetoriais  $n$ -dimensionais.

Seja  $\Sigma = \{x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n : H(x) = 0\}$  fronteira de descontinuidade do sistema s.p.p.:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1; \\ F_2(x), & x \in S_2; \end{cases} \quad (9)$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ .

As bifurcações que trataremos aqui acontecem quando, para algum valor de parâmetro do sistema, existe um contato tangente do fluxo  $\phi_1$  com a fronteira de descontinuidade  $\Sigma$ . Como estamos apenas considerando sistemas sem *sliding*, precisamos da seguinte definição:

**Definição 2.16.** *Dado um sistema s.p.p. como em (9), um ponto  $x \in \Sigma$  é dito ponto de costura se as derivadas de Lie com relação aos campos  $F_1$  e  $F_2$  aplicados no ponto  $x$  tem o mesmo sinal, ou seja:*

$$\mathcal{L}_{F_1}H(x) \cdot \mathcal{L}_{F_2}H(x) \geq 0.$$

Sem perda de generalidade, vamos supor que uma trajetória tangencial está inteiramente contida em  $S_1 = \{x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n : H(x) > 0\}$  e que o ponto de contato seja  $x^*$ , como na figura (6).

Assim como no caso de sistemas de impacto (apêndice 2), precisamos considerar algumas hipóteses sobre o ponto  $x^*$ . Assumimos que  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função escalar suave, tal que  $x = 0$  seja *valor regular* de  $H$ . Dessa forma:

$$\nabla H(x^*) \neq 0.$$

Definimos *grazing regular* de maneira análoga ao caso de sistemas de impacto, como segue.

**Definição 2.17.** *Um ponto  $x^*$  é um ponto grazing regular se satisfazer as seguintes hipóteses:*

(i)  $H(x^*) = 0;$

(ii)  $v(x^*) = \frac{\partial H}{\partial t}(\phi_1(x^*, 0)) = \mathcal{L}_{F_1}H(x^*) = 0;$

$$(iii) \ a(x^*) = \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}(\phi_1(x^*, 0)) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) > 0.$$

Um exemplo do comportamento de tais pontos pode ser observado na figura (6). Note que o ponto  $x^*$  é parte de uma trajetória tangencial a  $\Sigma$  e, considerando a interpretação geométrica da derivada de Lie dada na seção anterior, os pontos  $x_1$  e  $x_2$  são *pontos de costura*.

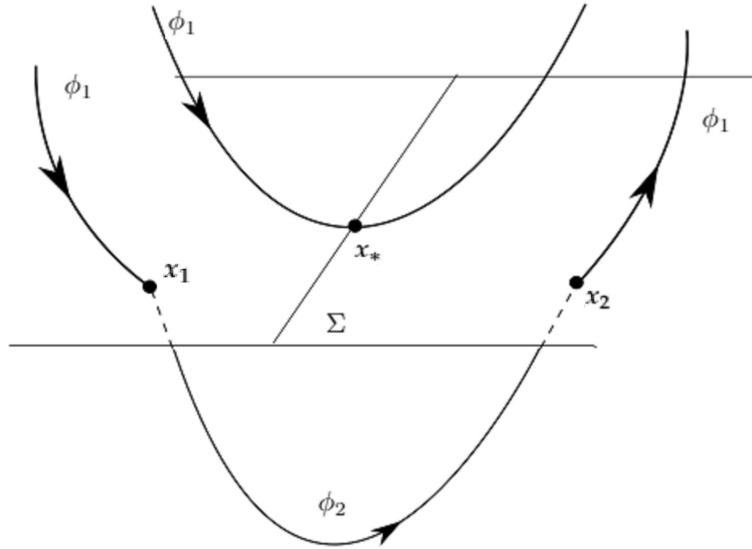


Figura 6: Exemplo de um ponto *grazing regular*  $x^*$  para sistemas com duas zonas.

A fim de compreender como a dinâmica acontece próximo ao ponto  $x^*$ , observe a figura (7). Sendo  $\Pi_N$  seção transversal ao fluxo tangente em  $x^*$ , para pontos que estão em  $S_1$ , se definirmos  $P : \Pi_N \rightarrow \Pi_N$  como sendo  $P(x^*) = x^*$ , a aplicação  $P$  é a aplicação de Poincaré para o caso suave em relação a órbita  $\phi_1(x^*, t)$ . Para pontos em  $S_2$ , devido a presença da fronteira de descontinuidade  $\Sigma$ , há a necessidade de correção do fluxo no ponto  $x \in \Pi_N$ . Tal correção será dada pelo ponto  $x_5 \in \Pi_N$ , sendo que duas aplicações atuam em tal correção: uma leva o ponto  $x \mapsto x_4$  e outra, leva  $x_4 \mapsto x_5$ . Note que o ponto  $x_4$  é dado pela expressão  $x_4 = \phi_1(\phi_2(\phi_1(x, \delta_0), \delta_2), -\delta_0 - \delta_2)$  e  $x_5 = \phi_1(\phi_1(\phi_2(\phi_1(x, \delta_0), \delta_2), -\delta_0 - \delta_2), \Delta_0)$  de tal forma que  $\mathcal{L}_{F_1} H(x_4, \Delta_0) = 0$ . Note que a aplicação que mapeia  $x$  a  $x_4$  não altera o tempo de evolução do fluxo e a aplicação que leva  $x_4$  a  $x_5$  é uma projeção em  $\Pi_N$  suave, usando o fluxo  $\phi_1$ . Portanto, podemos definir duas aplicações, que chamaremos de  $ZDM$  e  $PDM$ , onde  $ZDM(x) \mapsto x_4$  e  $PDM(x) \mapsto x_5$ . Dessa forma, podemos defini-las como segue:

**Definição 2.18.** Dado um sistema s.p.p., a ZDM (Zero-time Discontinuity Mapping) é um mapa de descontinuidade que não altera o tempo de evolução do fluxo.

**Definição 2.19.** A PDM (Poincaré Discontinuity Mapping) é a projeção que mapeia  $ZDM(x)$  em  $\Pi_N$ , utilizando um dos fluxos do sistema.

As definições (2.18) e (2.19) não podem ser estabelecidas diretamente em função de um único fluxo associado a um sistema s.p.p.. Isso significa que, como mapas de descontinuidade são aplicações que utilizam a evolução das soluções em sua definição, não podemos dizer exatamente qual fluxo estes mapas utilizarão de maneira geral. Além disso, na definição (2.19), a superfície  $\Pi_N$  é também definida conforme a necessidade do problema, não sendo necessariamente sempre igual a  $\Pi_N = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{L}_{F_1}H(x) = 0\}$ . Um exemplo disso será tratado no capítulo 5.

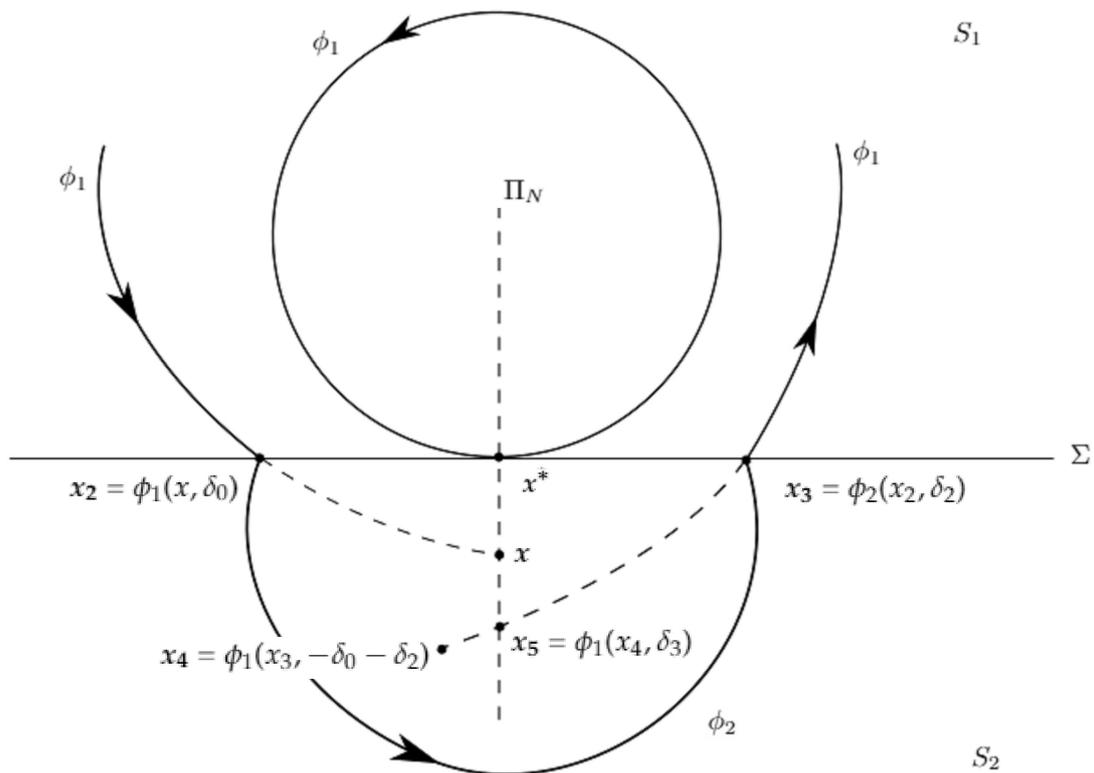


Figura 7: Comportamento dos fluxos, próximo ao ponto de bifurcação  $x^*$ .

Os próximos dois teoremas estabelecem as expressões para as aplicações ZDM e PDM para pontos  $x$  numa vizinhança de um ponto *grazing regular*  $x^*$ .

**Teorema 2.20.** *Seja  $x^*$  um ponto grazing regular de um sistema suave por partes como (9) cuja solução passando por  $x^*$  seja periódica. Se o campo vetorial s.p.p. em  $x^*$  é tal que  $F_1(x^*) \neq F_2(x^*)$ , a ZDM para  $x$  em alguma vizinhança de  $x^*$  é dada por:*

$$ZDM(x) = \begin{cases} x, & H(x) \geq 0; \\ x + \left( 2C_1(x^*) \frac{\mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x^*)} y \right) (F_2(x) - F_1(x)) + O(y^2), & H(x) < 0; \end{cases}$$

**Teorema 2.21.** *Sob as hipóteses do teorema (2.20), seja  $x \in \Pi_N$  suficientemente próximo a  $x^*$ , sendo  $\Pi_N = \{x \in \mathcal{D} : \mathcal{L}_{F_1} H(x) = 0\}$ . Então, a PDM é dada por:*

$$PDM(x) = \begin{cases} x, & H(x) \geq 0; \\ x + 2C_2(x^*) C_1(x^*) \left( F_2(x) - \frac{\mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} F_1(x) \right) y + O(y^2), & H(x) < 0; \end{cases}$$

onde:

$$C_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x)}}.$$

e:

$$C_2(x) = \frac{\mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(x)}{\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x)}.$$

Considerando a superfície  $\Pi_N = \{x \in \mathcal{D} : \mathcal{L}_{F_1} H(x) = 0\}$ , a construção das aplicações ZDM e PDM se dará da seguinte forma:

- 1– Tomar  $x \in \Pi_N$  e, sob a ação do fluxo  $\phi_1$ , obter  $\delta_0 \in \mathbb{R}$ , satisfazendo  $H(\phi_1(x, \delta_0)) = 0$ , onde  $x_2 = \phi_1(x, \delta_0)$ ;
- 2– Sob a ação de  $\phi_2$ , levar  $x_2$  a  $x_3$  de modo que  $x_3 = \phi_2(x_2, \delta_2)$  para algum  $\delta_2 \in \mathbb{R}$ , tal que  $H(x_3) = 0$ ;
- 3– Definir  $ZDM : \Pi_N \rightarrow \mathcal{D}$ , por:

$$ZDM(x) = \phi_1(\phi_2(\phi_1(x, \delta_0), \delta_2), -\delta_0 - \delta_2).$$

- 4– Encontrar  $\delta_3 \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(x_4, \delta_3)) = 0$  e definir  $PDM : \Pi_N \rightarrow \Pi_N$  como sendo:

$$x_5 = PDM(x) = \phi_1(\phi_2(\phi_1(x, \delta_0), \delta_2), -(\delta_0 + \delta_2) + \delta_3).$$

*Demonstração do Teorema (2.20)*

Observando a figura (7), note que a construção do tempo  $\delta_0$  é análoga a construção para sistemas de impacto (dada no apêndice 1), considerando o campo  $F = F_1$ . Portanto:

$$\delta_0(y) = \left( -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)}} \right) y + \left( -\frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{(\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*))^2} \right) y^2 + O(y^3).$$

Devemos encontrar agora  $\delta_2 \in \mathbb{R}$ , satisfazendo  $H(\phi_2(x_2, \delta_2)) = 0$  e considerando  $x_3 = \phi_2(x_2, \delta_2)$ , temos  $H(x_3) = 0$ . Expandindo em séries de Taylor a expressão  $H(\phi_2(x_2, \delta_2)) = 0$  em torno de  $\delta_2 = 0$ , temos:

$$H(\phi_2(x_2, \delta_2)) = H(x_2) + \mathcal{L}_{F_2} H(x_2) \delta_2 + \mathcal{L}_{F_2}^2 H(x_2) \frac{\delta_2^2}{2} + O(\delta_2^3);$$

ou seja:

$$\mathcal{L}_{F_2} H(x_2) \delta_2 + \mathcal{L}_{F_2}^2 H(x_2) \frac{\delta_2^2}{2} + O(\delta_2^3) = 0. \quad (10)$$

Como  $x_2 = \phi_1(x, \delta_0)$ , podemos expandir as expressões  $\mathcal{L}_{F_2} H(x_2)$  e  $\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x_2)$ , em séries de Taylor, em torno do ponto  $x$  inicial, isto é:

$$1. \mathcal{L}_{F_2} H(\phi_1(x, \delta_0)) = \mathcal{L}_{F_2} H(x) + \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(x) \delta_0 + \mathcal{L}_{F_1}^2 \mathcal{L}_{F_2} H(x) \frac{\delta_0^2}{2} + O(\delta_0^3);$$

$$2. \mathcal{L}_{F_2}^2 H(\phi_1(x, \delta_0)) = \mathcal{L}_{F_2}^2 H(x) + \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2}^2 H(x) \delta_0 + \mathcal{L}_{F_1}^2 \mathcal{L}_{F_2}^2 H(x) \frac{\delta_0^2}{2} + O(\delta_0^3);$$

Substituindo tais expressões em (10), temos:

$$(\mathcal{L}_{F_2} H(x) + \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(x) \delta_0) \delta_2 + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x) + \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2}^2 H(x) \delta_0) \delta_2^2 + O(\delta_2^3, \delta_0^2) = 0.$$

Substituindo  $\delta_0$  até o termo de ordem  $y$ , temos:

$$\mathcal{L}_{F_2} H(x) \delta_2 - \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(x) C_1(x^*) \delta_2 y + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{F_2}^2 H(x) \delta_2^2 + O(\delta_2^3) = 0,$$

onde

$$C_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x)}}.$$

Para estes casos, exigimos que:

$$\mathcal{L}_{F_2} H(x) \cdot \mathcal{L}_{F_1} H(x) \geq 0,$$

ou seja, em ambos os lados da fronteira de descontinuidade, os campos nunca sejam atratores e nem repulsores ao mesmo tempo. Como  $x \in \Pi_N$ , temos  $\mathcal{L}_{F_2} H(x) = 0$ .

Portanto:

$$-\mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_2}H(x)C_1(x^*)\delta_2y + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{F_2}^2H(x)\delta_2^2 + O(y^2) = 0.$$

Do fato que  $\mathcal{L}_{F_2}^2H(x^*) \neq 0$ , o TFI garante a existência de uma função suave  $\delta_2(x, y)$  que, em uma vizinhança de  $(x^*, 0)$ , anula a função  $I(x, y, \delta_2) = -\mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_2}H(x)C_1(x^*)y + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{F_2}^2H(x)\delta_2 + O(y^2)$  e ainda considerando que  $\delta_2 \neq 0$ .

Dessa forma, podemos encontrar a expressão de  $\delta_2(x, y)$  em termos de sua expansão em séries de Taylor, em torno de  $(x, y) = (x^*, 0)$ . Tomando apenas os termos em  $y$ , obtemos:

$$\delta_2(x, y) = \delta_2(x^*, 0) + \frac{\partial\delta_2}{\partial y}(x^*, 0)y + O(y^2).$$

É claro que  $\delta_2(x^*, 0) = 0$ . Diferenciando a função  $I$ , temos:

$$\frac{\partial}{\partial y}I(x, y, \delta_2(x, y)) = \frac{\partial I}{\partial y}(x, y, \delta_2) + \frac{\partial I}{\partial \delta_2}(x, y, \delta_2)\frac{\partial\delta_2}{\partial y}(x, y);$$

ou seja:

$$\frac{\partial\delta_2}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial I}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial I}{\partial \delta_2}(x, y)}.$$

Assim, temos:

$$\frac{\partial I}{\partial y}(x^*, 0, 0) = -\mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_2}H(x^*)C_1(x^*),$$

e

$$\frac{\partial I}{\partial \delta_2}(x^*, 0, 0) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{F_2}^2H(x^*).$$

Portanto:

$$\frac{\partial\delta_2}{\partial y}(x^*, 0) = 2\frac{\mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_2}H(x^*)C_1(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2}^2H(x^*)}.$$

Dessa forma, concluimos que:

$$\delta_2(x, y) = 2\frac{\mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_2}H(x^*)C_1(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2}^2H(x^*)}y + O(y^2).$$

A ZDM é definida como sendo:

$$ZDM(x) = \phi_1(\phi_2(\phi_1(x, \delta_0), \delta_2), -(\delta_0 + \delta_2)). \quad (11)$$

Considerando  $T = \delta_0 + \delta_2$  expandindo tal expressão em séries de Taylor, em torno de  $T = 0$ , obtemos:

$$x_4 = \phi_2(\phi_1(x, \delta_0), \delta_2) + F_1(\phi_2(\phi_1(x, \delta_0), \delta_2), -(\delta_0 + \delta_2)) + O(\delta_0^2, \delta_2^2).$$

Analogamente, fazemos com  $\phi_2(\phi_1(x, \delta_0), \delta_2)$  e  $\phi_1(x, \delta_0)$ , para encontrarmos:

$$\begin{aligned}\phi_2(\phi_1(x, \delta_0), \delta_2) &= \phi_1(x, \delta_0) + F_2(\phi_1(x, \delta_0))\delta_2 + O(\delta_2^2), \\ \phi_1(x, \delta_0) &= x + F_1(x)\delta_0 + O(\delta_0^2).\end{aligned}$$

Logo:

$$\phi_2(\phi_1(x, \delta_0), \delta_2) = x + F_1(x)\delta_0 + O(\delta_0^2) + F_2(x + F_1(x)\delta_0 + O(\delta_0^2))\delta_2 + O(\delta_2^2),$$

ou seja:

$$\phi_2(\phi_1(x, \delta_0), \delta_2) = x + F_1(x)\delta_0 + F_2(x)\delta_2 + O(\delta_2^2, \delta_0^2).$$

Daí:

$$x_4 = x + F_1(x)\delta_0 + F_2(x)\delta_2 + F_1(x + F_1(x)\delta_0 + F_2(x)\delta_2)(-\delta_0 - \delta_2) + O(\delta_2^2, \delta_0^2).$$

Expandindo  $F_1(x + F_1(x)\delta_0 + F_2(x)\delta_2)$  em torno de  $x$ , obtemos:

$$F_1(x + F_1(x)\delta_0 + F_2(x)\delta_2) = F_1(x) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(x) \cdot (F_1(x)\delta_0 + F_2(x)\delta_2) + O((F_1(x)\delta_0 + F_2(x)\delta_2)^2).$$

Substituindo em  $x_4$ :

$$x_4 = ZDM(x) = x + F_1(x)\delta_0 + F_2(x)\delta_2 + F_1(x)(-\delta_0 - \delta_2) + O(\delta_2^2, \delta_0^2). \quad (12)$$

Daí:

$$x_4 = x + (F_2(x) - F_1(x))\delta_2 + O(\delta_0^2, \delta_2^2).$$

Substituindo  $\delta_2$ :

$$x_4 = ZDM(x) = x + (F_2(x) - F_1(x)) \left( 2 \frac{\mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(x^*) C_1(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} y \right) + O(y^2).$$

conforme afirma o teorema requerido. ■

*Demonstração do Teorema (2.21)*

Pela definição da PDM, projetaremos a ZDM em  $\Pi_N$  para encontrarmos o ponto  $x_5 = \phi_1(x_4, \delta_3) \in \Pi_N$ , tal que:

$$\mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(x_4, \delta_3)) = 0.$$

onde  $\delta_3 \in \mathbb{R}$  é o tempo necessário para que o fluxo  $x_4 = \phi_1(x_3, -\delta_0 - \delta_2)$  satisfaça a condição acima. Expandindo em séries de Taylor a expressão  $\mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(x_4, \delta_3))$ , em torno de  $\delta_3 = 0$ , temos:

$$\mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(x_4, \delta_3)) = \mathcal{L}_{F_1} H(x_4) + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_4)\delta_3 + O(\delta_3^2). \quad (13)$$

Note que:

$$\mathcal{L}_{F_1} H(x_4) = \mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(x_3, -\delta_0 - \delta_2)).$$

Tomando  $T = -(\delta_0 + \delta_2)$  e expandindo tal expressão em torno de  $T = 0$ :

$$\mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(x_3, -\delta_0 - \delta_2)) = \mathcal{L}_{F_1} H(x_3) + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_3)(-\delta_0 - \delta_2) + O(\delta_0^2, \delta_2^2).$$

Fazendo o mesmo processo no ponto  $x_3 = \phi_2(x_2, \delta_2)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(x_3, -\delta_0 - \delta_2)) &= \mathcal{L}_{F_1} H(x_3) + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_3)(-\delta_0 - \delta_2) + O(\delta_0^2, \delta_2^2) \\ &= \mathcal{L}_{F_1} H(x_2) + \mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x_2) \delta_2 + (\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_2) + \mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_2) \delta_2)(-\delta_0 - \delta_2) \\ &\quad + O(\delta_0^2, \delta_2^2). \end{aligned}$$

Analogamente em  $x_2 = \phi_1(x, \delta_0)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(x_3, -\delta_0 - \delta_2)) &= \mathcal{L}_{F_1} H(x_2) + \mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x_2) \delta_2 + (\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_2) + \mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_2) \delta_2)(-\delta_0 - \delta_2). \\ &= (\mathcal{L}_{F_1} H(x) + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) \delta_0) + (\mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x) + \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x) \delta_0) \delta_2 + \\ &\quad + ((\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x) \delta_0) + (\mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) + \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) \delta_2)(-\delta_0 - \delta_2) \\ &\quad + O(\delta_0^2, \delta_2^2). \end{aligned}$$

Tomando os termos de primeira ordem, obtemos:

$$\mathcal{L}_{F_1} H(x_4) = \mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x) \delta_2 - \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) \delta_2 + O(\delta_0, \delta_2).$$

Fazendo um processo análogo ao anterior em  $\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_4)$ , temos:

$$\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_4) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x) \delta_0 + O(\delta_0, \delta_2).$$

Portanto, em (13):

$$\mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x) \delta_2 - \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) \delta_2 + (\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x) \delta_0) \delta_3 + O(\delta_0, \delta_2, \delta_3) = 0. \quad (14)$$

Em particular, temos:

$$\delta_0(x, y) = \left( -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)}} \right) y + \left( -\frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{(\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*))^2} \right) y^2 + O(y^3),$$

e

$$\delta_2(x, y) = 2 \frac{\mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(x^*) C_1(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x^*)} y + O(y^2).$$

Substituindo  $\delta_0$  e  $\delta_2$  em (14), temos:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x) C_2(x^*) C_1(x^*) y - \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) C_2(x^*) C_1(x^*) y + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) \delta_3 + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x) C_1(x^*) \delta_3 y + \\ & + O(\delta_0, \delta_2, \delta_3) = 0, \end{aligned}$$

onde:

$$C_2(x) = \frac{\mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(x)}{\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x)}.$$

Considere a função:

$$\begin{aligned} J(x, y, \delta_3) &= \mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x) C_2(x^*) C_1(x^*) y - \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) C_2(x^*) C_1(x^*) y + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) \delta_3 + \\ &+ \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x) C_1(x^*) \delta_3 y + O(\delta_0, \delta_2, \delta_3). \end{aligned}$$

Note que  $J(x^*, 0, 0) = 0$  e  $\frac{\partial J}{\partial \delta_3}(x^*, 0, 0) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) \neq 0$ . Pelo TFI existem vizinhanças  $V_{(x^*, 0)}$  de  $(x^*, 0)$ ,  $W_{\delta_3}$  de  $\delta_3 \in \mathbb{R}$  e função suave  $\delta_3 : V_{(x^*, 0)} \rightarrow W_{\delta_3}$  tal que  $J(u, v, \delta_3(u, v)) = 0, \forall (u, v) \in V_{(x^*, 0)}$ . Podemos encontrar de sua série de Taylor, os termos em  $y$  em torno de  $(x^*, 0)$  como segue:

$$\delta_3(x, y) = \delta_3(x^*, 0) + \frac{\partial \delta_3}{\partial y}(x^*, 0) y + O(y^2, (x - x^*)).$$

É fácil ver que  $\delta_3(x^*, 0) = 0$ . O segundo termo da série é dado pela derivação implícita da função  $J$ . De fato, temos:

$$\frac{\partial}{\partial y} J(x, y, \delta_3(x, y)) = \frac{\partial J}{\partial y}(x, y, \delta_3) + \frac{\partial J}{\partial \delta_3}(x, y, \delta_3) \frac{\partial \delta_3}{\partial y}(x, y) = 0,$$

ou seja:

$$\frac{\partial \delta_3}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial J}{\partial y}(x, y, \delta_3)}{\frac{\partial J}{\partial \delta_3}(x, y, \delta_3)}. \quad (15)$$

Encontrando os termos  $\frac{\partial J}{\partial y}(x^*, 0, 0)$  e  $\frac{\partial J}{\partial \delta_3}(x^*, 0, 0)$ , temos:

- $\frac{\partial J}{\partial y}(x^*, 0, 0) = 2\mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*) C_2(x^*) C_1(x^*) - 2\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) C_2(x^*) C_1(x^*),$
- $\frac{\partial J}{\partial \delta_3}(x^*, 0, 0) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*).$

Portanto:

$$\delta_3(x, y) = \frac{-2\mathcal{L}_{F_2}\mathcal{L}_{F_1}H(x^*)C_2(x^*)C_1(x^*) + 2\mathcal{L}_{F_1}^2H(x^*)C_2(x^*)C_1(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2H(x^*)}y + O(y^2). \quad (16)$$

Simplificando tal expressão, encontramos:

$$\delta_3(x, y) = \left( \frac{-2\mathcal{L}_{F_2}\mathcal{L}_{F_1}H(x^*)C_2(x^*)C_1(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2H(x^*)} + 2C_2(x^*)C_1(x^*) \right) y + O(y^2). \quad (17)$$

Encontrado  $\delta_3$ , precisamos encontrar  $\phi_1(x_4, \delta_3)$ , que é dado por:

$$\phi_1(ZDM(x), \delta_3) = ZDM(x) + F_1(ZDM(x))\delta_3 + O(\delta_3^2). \quad (18)$$

Pelo teorema (2.20), a ZDM é dada por:

$$ZDM(x) = x + (F_2(x) - F_1(x)) \left( 2 \frac{\mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_2}H(x^*)C_1(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2}^2H(x^*)} y \right) + O(y^2).$$

Considerando a expressão (18) e expandindo  $F_1(ZDM(x))$  em torno de  $x$ :

$$F_1(x_4) = F_1(x) + O(y^2).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \phi_1(ZDM(x), \delta_3) &= x + (F_2(x) - F_1(x)) \left( 2 \frac{\mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_2}H(x^*)C_1(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2}^2H(x^*)} y \right) + \\ &\quad + F_1(x) \left( \frac{-2\mathcal{L}_{F_2}\mathcal{L}_{F_1}H(x^*)C_2(x^*)C_1(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2H(x^*)} + 2C_2(x^*)C_1(x^*) \right) y + O(y^2) \\ &= x + 2C_2(x^*)C_1(x^*)y \left( F_2(x) - \frac{\mathcal{L}_{F_2}\mathcal{L}_{F_1}H(x^*)C_2(x^*)C_1(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2H(x^*)} F_1(x) \right) + \\ &\quad + O(y^2). \end{aligned}$$

Podemos então concluir que a PDM é dada por:

$$PDM(x) = \begin{cases} x, & H(x) \geq 0; \\ x + 2C_2(x^*)C_1(x^*) \left( F_2(x) - \frac{\mathcal{L}_{F_2}\mathcal{L}_{F_1}H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2H(x^*)} F_1(x) \right) y + O(y^2), & H(x) < 0; \end{cases}$$

conforme queríamos encontrar. ■

Considerando as hipóteses citadas sobre a solução periódica tangencial estudada acima, definimos:

**Definição 2.22.** *Sob as hipóteses dos teoremas (2.20) e (2.21), a Aplicação de Poincaré suave por partes  $P_N$  para sistemas como (9) é a função  $P_N : \Pi_N \rightarrow \Pi_N$  definida por:*

$$P_N(x) = PDM(p(x)).$$

*onde  $p(x) = \phi_1(x, T(x))$  é a Aplicação de Poincaré natural associada ao campo suave  $F_1$  e  $x \in V$ , sendo  $V$  é uma vizinhança do ponto  $x^*$ .*

# 3

## BIFURCAÇÕES SLIDING

### 3.1 MAPAS DE DESCONTINUIDADE PARA BIFURCAÇÕES SLIDING

Dedicamos esta seção ao estudo local de bifurcações que ocorrem em sistemas s.p.p., os quais apresentam grau de suavidade da fronteira igual a 1. Tais sistemas apresentam o que é conhecido como região de sliding (denotado por  $\hat{S}$ ), sendo este um subconjunto aberto de  $\Sigma$ , onde os campos circundantes apontam em direção de  $\Sigma$ . Com isto, o fluxo correspondente “desliza” sobre a fronteira de descontinuidade  $\Sigma$ . Além disso, faremos uso das mesmas ferramentas de análise (ZDM e PDM), construindo tais aplicações e, analogamente aos casos anteriores, definiremos, com auxílio dos mapas de descontinuidade citados, a aplicação de Poincaré suave por partes associada a esses campos. As bifurcações que apresentaremos agora serão definidas conforme o comportamento do campo *Sliding*, que será considerado como uma combinação dos campos  $F_1$  e  $F_2$  sobre a fronteira de descontinuidade  $\Sigma$ , dado pelo método de controle de Utkin [9].

Inicialmente, considere um sistema s.p.p. com duas zonas autônomo  $n$ -dimensional de EDO's com uma *única* fronteira de descontinuidade local, definida pela função  $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  e o subconjunto  $\Sigma = \{x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n : H(x) = 0\}$ , que pode ser escrito na forma:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1; \\ F_2(x), & x \in S_2; \end{cases} \quad (19)$$

sendo 0 valor regular de  $H$ . Os sistemas s.p.p. como (19) contendo regiões de sliding, dependem de hipóteses relacionadas ao grau de suavidade da fronteira  $\Sigma$ . No que segue, definiremos a classe de sistemas s.p.p. que apresentam tal fenômeno.

## 3.2 SISTEMAS DE FILIPPOV

Para o caso onde a fronteira tem grau de descontinuidade uniforme um, isto é  $F_1(x) \neq F_2(x)$ , dizemos que se trata de um *Sistema de Filippov*. Esta classe de sistemas possuem certas regiões de  $\Sigma$ , definidas como segue:

**Definição 3.1.** Dado um sistema s.p.p. como (19) e  $x_0 \in \Sigma$ :

- (i) Dizemos que  $x_0$  é ponto de sliding se  $\mathcal{L}_{F_1}H(x_0) \cdot \mathcal{L}_{F_2}H(x_0) < 0$  com  $\mathcal{L}_{F_1}H(x_0) < 0$  e  $\mathcal{L}_{F_2}H(x_0) > 0$ . Neste caso,  $x_0 \in \hat{S}$ .
- (ii) Dizemos que  $x_0$  é ponto de escape se  $\mathcal{L}_{F_1}H(x_0) \cdot \mathcal{L}_{F_2}H(x_0) < 0$  com  $\mathcal{L}_{F_1}H(x_0) > 0$  e  $\mathcal{L}_{F_2}H(x_0) < 0$ . Neste caso,  $x_0 \in \hat{E}$ .

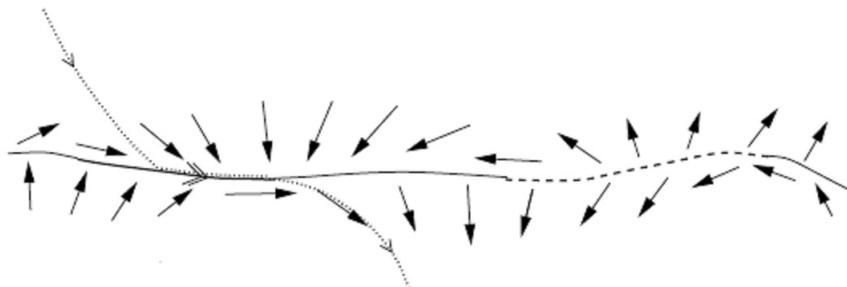


Figura 8: Comportamento do campo Sliding e Escape. Fonte: [2]

**Observação 3.2.** Note que, segundo a definição (3.1) e a imagem (8), a região de sliding está contida em  $\Sigma$  e, conforme a interpretação geométrica da derivada de Lie, é a região onde ambos os campos apontam para  $\Sigma$ . Em contrapartida, a região de escape é a região de  $\Sigma$  onde ambos os campos repulsam de  $\Sigma$ . Além disso, ambas as regiões são subconjuntos abertos disjuntos de  $\Sigma$ , sendo que suas fronteiras são onde as derivadas de Lie se anulam, que chamaremos de pontos singulares.

Os pontos singulares podem ser classificados conforme a próxima definição.

**Definição 3.3.** Dizemos que um ponto singular  $x_0$  de  $S_2$  em  $\Sigma$  é:

- (i) ponto de Dobra se  $\mathcal{L}_{F_2}H(x_0) = 0$  e  $\mathcal{L}_{F_2}^2H(x_0) \neq 0$ ,
- (ii) ponto de Cúspide se  $\mathcal{L}_{F_2}H(x_0) = 0$ ,  $\mathcal{L}_{F_2}^2H(x_0) = 0$ ,  $\mathcal{L}_{F_2}^3H(x_0) \neq 0$  e  $\{\nabla H(x_0), \nabla \mathcal{L}_{F_2}H(x_0), \nabla \mathcal{L}_{F_2}^2H(x_0)\}$  é um conjunto linearmente independente.

A fim de identificar qual é a região de sliding do sistema (19), utilizaremos o *Método de Controle de Utkin* [9]. Tal método supõe que o comportamento do campo sliding, tangente a  $\Sigma$ , se dá pela média dos campos  $F_1$  e  $F_2$  somado com a metade da diferença entre tais campos que, por sua vez, são multiplicados por uma função controle  $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow [-1, 1]$  de tal forma que:

$$F_s(x) = \frac{F_2(x) + F_1(x)}{2} + \frac{F_2(x) - F_1(x)}{2}\beta(x). \quad (20)$$

Para encontrar a função  $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow [-1, 1]$ , do fato que  $F_s$  é tangente a  $\Sigma$ , temos  $\langle \nabla H, F_s \rangle = 0$ . Portanto:

$$\left\langle \nabla H(x), \frac{F_2(x) + F_1(x)}{2} + \frac{F_2(x) - F_1(x)}{2}\beta(x) \right\rangle = 0.$$

Utilizando a bilinearidade do produto interno em  $\mathbb{R}$ , temos:

$$\left\langle \nabla H(x), F_2(x) + F_1(x) \right\rangle + \left\langle \nabla H(x), (F_2(x) - F_1(x))\beta(x) \right\rangle = 0.$$

Isolando  $\beta(x)$  e colocando em notação de derivada de Lie, obtemos:

$$\beta(x) = -\frac{\mathcal{L}_{F_1}H(x) + \mathcal{L}_{F_2}H(x)}{\mathcal{L}_{F_2}H(x) - \mathcal{L}_{F_1}H(x)}.$$

que é a aplicação desejada.

Utilizando tal método, a região de sliding é dada pelo seguinte conjunto:

$$\hat{S} = \{x \in \Sigma : -1 \leq \beta(x) \leq 1\};$$

cujas fronteiras são dadas por:

$$\partial\hat{S}^+ = \{x \in \Sigma : \beta(x) = 1\};$$

$$\partial\hat{S}^- = \{x \in \Sigma : \beta(x) = -1\};$$

### 3.3 BIFURCAÇÕES SLIDING

Para o caso onde o campo admite regiões com sliding, distinguiremos bifurcações desse tipo de campo em 4 principais casos: *Crossing-sliding*, *Grazing-sliding*, *Switching-sliding* e *Adding sliding*.

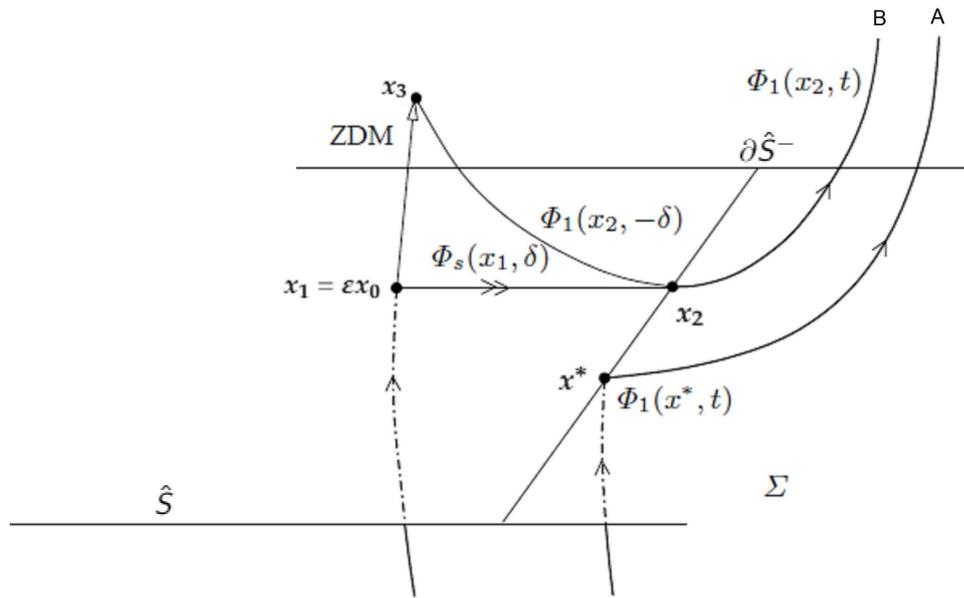


Figura 9: Comportamento da trajetória onde ocorre em  $x^*$  uma bifurcação do tipo *crossing-sliding*.  
 Fonte: [2]

### Bifurcação Crossing-Sliding

Suponha uma solução periódica de (19) tocando a fronteira da região de sliding  $\partial\hat{S}^-$  no ponto  $x^*$ , como na figura (9).

Além disso, vamos supor também a trajetória A é obtida pela perturbação das condições iniciais da trajetória B. Dessa forma, o caso apresentado se caracteriza como uma bifurcação do tipo *Crossing-Sliding*. Sobre o ponto  $x^*$  que, sem perda de generalidade, tomamos  $x^* = 0$ , exigimos as seguintes hipóteses:

- 1 –  $H(x^*) = 0$  e  $\nabla H(x^*) \neq 0$ ;
  - 2 –  $\mathcal{L}_{F_1} H(x^*) = 0$ ;
  - 3 –  $\mathcal{L}_{F_2} H(x^*) > 0$ ;
  - 4 –  $\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) > 0$ ;
- (21)

Note que, pela hipótese 1, do fato que  $\nabla H(x^*) \neq 0$ , o ponto  $x^* = 0$  é um valor regular da função  $H$ , ou seja, a função  $H$  é definida de tal forma que  $DH(x^*)$  é sobrejetiva em uma vizinhança de  $x^*$  e  $H^{-1}(\{0\})$  seja uma superfície regular. Outra informação da hipótese 1 é que  $x^* \in \Sigma$ , haja vista que  $H(x^*) = 0$ . A hipótese 2 indica que  $x^* \in \partial\hat{S}^-$  e a hipótese 3, por sua vez, indica que o fluxo  $\phi_2$  é transversal a  $\Sigma$  em  $x^*$ . A hipótese 4

indica em  $x^*$  um ponto de tangencia em  $\Sigma$ , pois a informação  $\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) > 0$  indica que o fluxo  $\phi_1$  retorna a  $F_1$ .

De tais informações, a ZDM para o presente caso é dada pelo seguinte teorema:

**Teorema 3.4.** *Considere um sistema s.p.p. (19) e suponha que ele admite em  $x^* \in \partial S^-$ , ponto de bifurcação do tipo crossing-sliding. Sob as hipóteses dadas em (21), a ZDM é dada por:*

$$ZDM(x) = \begin{cases} x, & \mathcal{L}_{F_1} H(x) \geq 0; \\ x + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x)^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) \cdot \mathcal{L}_{F_d} H(x)} F_d(x), & \mathcal{L}_{F_1} H(x) < 0; \end{cases}$$

Assim como nas seções anteriores, o teorema da PDM para o caso *crossing-sliding* é dado por:

**Teorema 3.5.** *Sob as hipóteses do teorema (3.4) sobre  $x^*$ , a PDM é dada por:*

$$PDM(x) = \begin{cases} PDM_1(x), & x \notin \hat{S}; \\ PDM_2(x), & x \in \hat{S}; \end{cases}$$

onde  $PDM_1$  e  $PDM_2$  serão dadas como nas expressões a seguir:

$$\begin{aligned} PDM_1(x) &= x + F_1(x) \left( -\frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^3} \mathcal{L}_{F_1} H(x)^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x) \left( \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x)^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2} \right) + O(v_1^3), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} PDM_2(x) &= x + \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x)}{2\mathcal{L}_{F_d} H(x)\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} F_d(x) + F_1(x) \left( -\frac{v_1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} - \left( \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*) \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^3} \right) \frac{v_1^2}{2} + O(v_1^3) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x) \left( \frac{v_1^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2} \right) + O(v_1^3). \end{aligned}$$

Para a construção de tais mapas de descontinuidade, seguiremos os seguintes passos:

- 1– Tomar um ponto  $x_0 \in \hat{S} - \partial \hat{S}$  tal que  $\mathcal{L}_{F_1} H(x_0) < 0$ ;
- 2– Considerar  $\varepsilon$ -perturbações do ponto  $x_0$  e encontrar  $\delta > 0$ , tal que  $\mathcal{L}_{F_1} H(\phi_s(\varepsilon x_0, \delta)) = 0$ , ou seja,  $\phi_s(\varepsilon x_0, \delta) \in \partial \hat{S}^-$ ;
- 3– Definir  $ZDM : \Sigma \rightarrow \mathcal{D}$ , onde:

$$ZDM(\varepsilon x_0) = \phi_1(\phi_s(\varepsilon x_0, \delta), -\delta),$$

4– Após a construção da ZDM, definimos  $PDM : \Sigma \rightarrow \Pi_N$ , dada por:

$$PDM(\varepsilon x_0) = \phi_1(\phi_1(\phi_s(\varepsilon x_0, \delta), -\delta), \delta_1).$$

onde  $\Pi_N := \{x \in \mathcal{D} : \mathcal{L}_{F_1} H(x) = 0\}$ .

**Observação 3.6.** Para a PDM, nós definimos duas aplicações  $PDM_1$  e  $PDM_2$ , ambas com a mesma função (projetar a ZDM na superfície  $\Pi_N$ ). A diferença entre as duas é onde o ponto inicial se encontra, haja vista que, para o caso onde o ponto  $x \notin \hat{S}$ , a ZDM atua como a função identidade e para pontos  $x \in \hat{S}$  a expressão da ZDM é dada pelo Teorema (3.4). Podemos observar o comportamento de tais funções nas imagens (10) e (11).

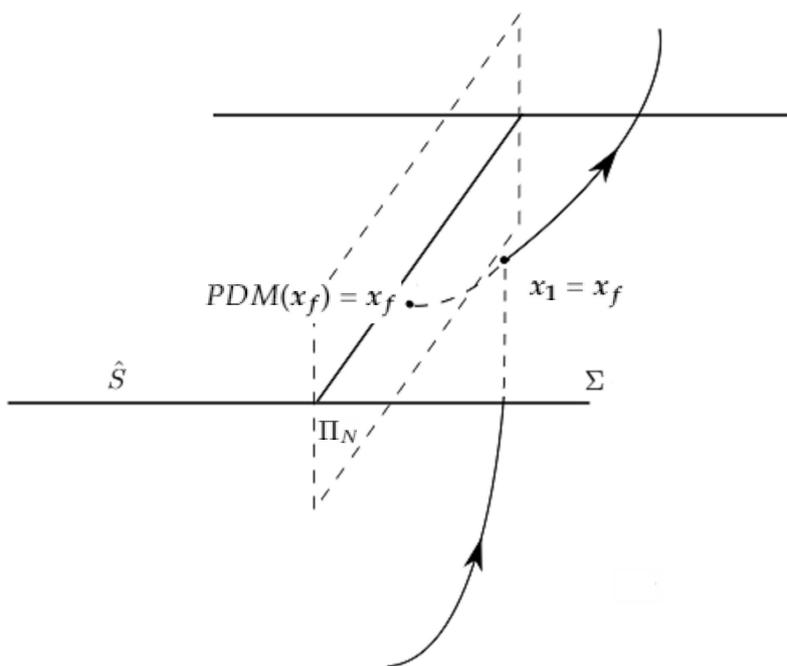


Figura 10: Comportamento da aplicação  $PDM_1$ , definida no teorema 4.3. Aqui podemos notar que, como  $x_1 \notin \hat{S}$ , a ZDM atua como a função identidade e a PDM é apenas a projeção suave usando o fluxo  $\phi_1$  de pontos de  $\Sigma$  em  $\Pi_N$ , como indicado acima.

#### Demonstração do Teorema 3.4

Considere o ponto inicial  $x_0 \in \hat{S}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , com  $\varepsilon \ll 1$ , perturbando o ponto  $x_0$ , precisamos encontrar  $\delta \in \mathbb{R}$ , tal que  $x_2 = \phi_s(\varepsilon x_0, \delta) \in \partial \hat{S}^-$ , ou seja:

$$\mathcal{L}_{F_1} H(x_2) = 0.$$

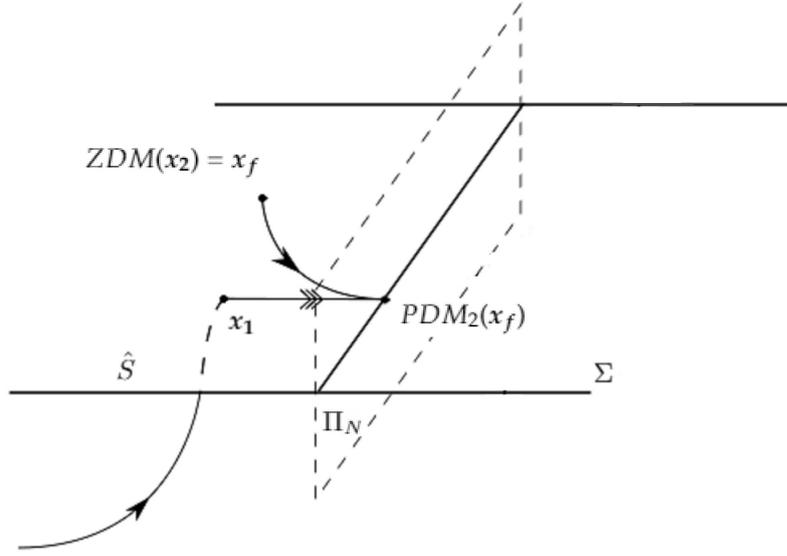


Figura 11: Comportamento da aplicação  $PDM_2$ , definida no Teorema 3.5. Podemos notar aqui que a aplicação  $PDM_2$  projeta suavemente o ponto  $x_f$  usando o fluxo  $\phi_1$ . Como o ponto  $x_f$  é a imagem da ZDM no ponto  $x_1 \in \hat{\Sigma}$ , os primeiros termos da  $PDM_2$  são os termos obtidos pelo teorema 3.5

Expandindo  $\mathcal{L}_{F_1}H(\phi_s(\varepsilon x_0, \delta))$  em torno de  $\delta = 0$ , temos:

$$\mathcal{L}_{F_1}H(\phi_s(\varepsilon x_0, \delta)) = \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0) + \mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_s}H(\varepsilon x_0)\delta + O(\delta^2).$$

O campo  $F_s$  é dado por  $F_s(x) = F_1(x) - C(x)F_d(x)$ , onde  $C(x) = \frac{\mathcal{L}_{F_1}H(x)}{\mathcal{L}_{F_d}H(x)}$ . Substituindo em  $\mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_s}H(\varepsilon x_0)$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_s}H(\varepsilon x_0) &= \langle \nabla \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0), F_s \rangle = \langle \nabla \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0), F_1(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0)F_d(\varepsilon x_0) \rangle = \\ &= \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0)\mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_d}H(\varepsilon x_0) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0)\left(\mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_2}H(\varepsilon x_0) - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)\right). \end{aligned}$$

Então:

$$\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0) + \delta\left(\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0)\left(\mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_2}H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)\right)\right) + O(\delta^2) = 0.$$

Definindo  $v_1 = \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)$ , considere a função  $G(x_0, v_1, \delta) = v_1 + \delta\left(\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0)\left(\mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_2}H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)\right)\right) + O(\delta^2)$

Note que:

$$\frac{\partial G}{\partial \delta}(x^*, 0, 0) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) > 0.$$

Pelo Teorema da função implícita, existe  $\delta(x_0, v_1)$ , função suave que anula  $G(x_0, v_1, \delta)$  em uma vizinhança de  $(x^*, 0)$ , ou seja:

$$G(x_0, v_1, \delta(x_0, v_1)) = 0.$$

com  $(x_0, v_1) \in V_{(x^*, 0)}$ , sendo  $V_{(x^*, 0)}$  uma vizinhança de  $(x^*, 0)$ . Devido a suavidade de  $\delta(x_0, v_1)$ , podemos aproximá-la por séries de Taylor e, tomando apenas os termos em  $v_1$  da expansão de  $\delta$ , obtemos:

$$\delta(x_0, v_1) = \delta(x^*, 0) + \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x^*, 0)v_1 + O(v_1^2, x_0 - x^*).$$

Em  $G$ , temos:

$$\frac{\partial G}{\partial v_1}(x^*, 0, \delta(x^*, 0)) = \frac{\partial G}{\partial v_1}(x^*, 0, 0) + \frac{\partial G}{\partial \delta}(x^*, 0, 0) \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x^*, 0) = 0.$$

Isolando  $\frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x^*, 0)$ , temos:

$$\frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x^*, 0) = - \frac{\frac{\partial G}{\partial v_1}(x^*, 0, 0)}{\frac{\partial G}{\partial \delta}(x^*, 0, 0)}.$$

Novamente em  $G$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial v_1}(x^*, 0, 0) &= 1, \\ \frac{\partial G}{\partial \delta}(x^*, 0, 0) &= \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) > 0. \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x^*, 0) = - \frac{1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)}.$$

Portanto:

$$\delta(x_0, v_1) = - \frac{1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} v_1 + O(v_1^2).$$

Para encontrar a ZDM, definimos:

$$x_3 = ZDM(\varepsilon x_0) := \phi_1(\phi_s(\varepsilon x_0, \delta), -\delta).$$

Expandindo  $\phi_1(\phi_s(\varepsilon x_0, \delta), -\delta)$  em torno de  $\delta = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} x_3 &= \phi_s(\varepsilon x_0, \delta) - F_1(\phi_s(\varepsilon x_0, \delta))\delta + \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\phi_s(\varepsilon x_0, \delta)) \frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3) \\ &= \varepsilon x_0 + F_s(\varepsilon x_0)\delta + \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0) \frac{\delta^2}{2} - F_1(\varepsilon x_0)\delta - \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0)\delta^2 + \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) \frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3) \\ &= \varepsilon x_0 + \delta \left( F_s(\varepsilon x_0) - F_1(\varepsilon x_0) \right) + \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0) - \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) \right) + O(\delta^3), \end{aligned}$$

onde o termo  $\frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0)$  é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0) &= \left( \frac{\partial F_1}{\partial x}(\varepsilon x_0) - \nabla C(\varepsilon x_0) F_d(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \frac{\partial F_d}{\partial x}(x) \right) \left( F_1(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) F_d \right) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) - F_d(\varepsilon x_0) \langle \nabla C(\varepsilon x_0), F_1(\varepsilon x_0) \rangle + O(v_1^2). \end{aligned}$$

O termo  $C(x)$  é dado por:

$$C(x) = \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x)}{\mathcal{L}_{F_d} H(x)}.$$

Portanto, o gradiente de  $C(x)$  é dado por:

$$\nabla C(x) = \frac{\nabla \mathcal{L}_{F_1} H(x)}{\mathcal{L}_{F_d} H(x)} - \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x)}{\mathcal{L}_{F_d} H(x)^2} \nabla \mathcal{L}_{F_d} H(x).$$

Logo:

$$\langle \nabla C(x), F_1(x) \rangle = \frac{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x)}{\mathcal{L}_{F_d} H(x)^2} - \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x)}{\mathcal{L}_{F_d} H(x)^2} \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_d} H(x).$$

Então:

$$x_3 = \varepsilon x_0 + \delta \left( - \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} F_d(\varepsilon x_0) \right) + \frac{\delta^2}{2} \left( - \frac{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} F_d(\varepsilon x_0) + O(v_1^2) \right).$$

Substituindo  $\delta$ :

$$\begin{aligned} x_3 &= \varepsilon x_0 + \left( - \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} \right) \left( - \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} F_d(\varepsilon x_0) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2} \right) \left( - \frac{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} \cdot F_d(\varepsilon x_0) \right) \\ &= \varepsilon x_0 + \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) \cdot \mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} F_d(\varepsilon x_0) - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^2 \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2 \cdot \mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} F_d(\varepsilon x_0) + O(v_1^3). \end{aligned}$$

Note que:

$$\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)) \varepsilon x_0 + O(\varepsilon^2).$$

Então:

$$x_3 = \varepsilon x_0 + \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) \cdot \mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} F_d(\varepsilon x_0) - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) \cdot \mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} F_d(\varepsilon x_0) + O(v_1^3).$$

Portanto:

$$ZDM(\varepsilon x_0) = \varepsilon x_0 + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) \cdot \mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} + O(v_1^3).$$

que era o que queríamos encontrar. ■

### Demonstração do Teorema 3.5

Como falado anteriormente, a PDM é a projeção suave da ZDM na superfície de velocidade zero, ou seja, em  $\Pi_N = \{x \in \mathcal{D} : \mathcal{L}_{F_1} H(x) = 0\}$ . Para tal demonstração, seja  $x_1 = \varepsilon x_0$ . Precisamos considerar dois casos:

**Caso 1:**  $x_1 \notin \hat{S}$

A esta, chamaremos de  $PDM_1$ . Se  $x_1 \notin \hat{S}$ , pelo teorema (3.4) temos  $ZDM(x_1) = x_1$ . Dessa forma, precisamos encontrar  $\delta \in \mathbb{R}$  de tal forma que  $\mathcal{L}_{F_1} H(x_3) = 0$ , sendo  $x_3 = PDM_1(x_1) = \phi_1(x_1, \delta)$ . Expandindo a expressão  $\mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(x_1, \delta))$  em torno de  $\delta = 0$ :

$$\mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(x_1, \delta)) = \mathcal{L}_{F_1} H(x_1) + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_1)\delta + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x_1)\frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3) = 0.$$

Definindo  $v_1 = \mathcal{L}_{F_1} H(x_1)$ , temos:

$$v_1 + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_1)\delta + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x_1)\frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3) = 0.$$

Considerando  $G(x_1, v_1, \delta) = v_1 + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_1)\delta + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x_1)\frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3)$ , note que:

$$\frac{\partial G}{\partial \delta}(x^*, 0, 0) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) \neq 0.$$

Pelo TFI, existe uma função suave  $\delta(x_1, v_1)$  que anula  $G$ , definida em uma vizinhança de  $(x_1, v_1) = (x^*, 0)$ , ou seja:

$$G(x_1, v_1, \delta(x_1, v_1)) = 0.$$

Tomando apenas os termos de intesse na série de Taylor de  $\delta(x_1, v_1)$ , obtemos:

$$\delta(x_1, v_1) = \delta(x^*, 0) + \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x^*, 0)v_1 + \frac{\partial^2 \delta}{\partial v_1^2}(x^*, 0)\frac{v_1^2}{2} + O(v_1^3).$$

Diferenciando  $G$  implicitamente, temos:

$$\frac{\partial G}{\partial v_1}(x_1, v_1, \delta(x_1, v_1)) = \frac{\partial G}{\partial v_1}(x_1, v_1, \delta) + \frac{\partial G}{\partial \delta}(x_1, v_1, \delta)\frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x_1, v_1) = 0. \quad (22)$$

Logo:

$$\frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x^*, 0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial v_1}(x^*, 0, 0)}{\frac{\partial G}{\partial \delta}(x^*, 0, 0)},$$

e como  $\frac{\partial G}{\partial v_1}(x^*, 0, 0) = 1$  e  $\frac{\partial G}{\partial \delta}(x^*, 0, 0) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)$ , obtemos:

$$\frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x^*, 0) = -\frac{1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)}.$$

Para encontrar o segundo termo  $\frac{\partial^2 \delta}{\partial v_1^2}$ , diferenciamos novamente a expressão (22) para obter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{\partial G}{\partial v_1}(x_1, v_1, \delta(x_1, v_1)) \right) &= \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{\partial G}{\partial v_1}(x_1, v_1, \delta) + \frac{\partial G}{\partial \delta}(x_1, v_1, \delta) \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x_1, v_1) \right) = \\ &= \frac{\partial^2 G}{\partial v_1^2}(x_1, v_1, \delta) + \frac{\partial^2 G}{\partial \delta \partial v_1}(x_1, v_1, \delta) \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x_1, v_1) + \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 G}{\partial v_1 \partial \delta}(x_1, v_1, \delta) + \frac{\partial^2 G}{\partial \delta^2}(x_1, v_1, \delta) \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x_1, v_1) \right) \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x_1, v_1) \\ &\quad + \frac{\partial G}{\partial v_1}(x_1, v_1, \delta) \frac{\partial^2 \delta}{\partial v_1^2}(x_1, v_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Note que  $\frac{\partial^2 G}{\partial v_1 \partial \delta} G(x_1, v_1, \delta) = \frac{\partial^2 G}{\partial \delta \partial v_1}(x_1, v_1, \delta) = \frac{\partial^2 G}{\partial v_1^2}(x_1, v_1, \delta) = 0$ . Então:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial v_1^2}(x^*, 0) = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial \delta^2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial v_1} \right)^2}{\frac{\partial G}{\partial \delta}} = -\frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^3}.$$

Daí:

$$\delta(x_1, v_1) = -\frac{v_1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} - \frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^3} \frac{v_1^2}{2} + O(v_1^3).$$

Definimos a PDM como sendo  $PDM(x_1) = \phi_1(x_1, \delta)$ . Expandindo a expressão  $\phi_1(x_1, \delta)$  em torno de  $\delta = 0$ :

$$\phi_1(x_1, \delta) = x_1 + F_1(x_1)\delta + \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x_1) \frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3).$$

Substituindo  $\delta$ :

$$PDM_1(x_1) = x_1 + F_1(x_1) \left( -\frac{v_1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} - \frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^3} \frac{v_1^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x_1) \left( \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x_1)^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2} \right) + O(\delta^3).$$

e após a substituição de  $v_1$ , obtemos:

$$PDM_1(x_1) = x_1 + F_1(x_1) \left( -\frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x_1)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^3} \mathcal{L}_{F_1} H(x_1)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x_1) \left( \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x_1)^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2} \right) + O(v_1^3).$$

conforme queríamos encontrar.

**Caso 2:**  $x_1 \in \hat{S}$

Para tal caso, devemos encontrar  $\delta \in \mathbb{R}$ , tal que  $\phi_1(ZDM(x_1), \delta) \in \Pi_N$ . Expandindo  $\mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(ZDM(x_1), \delta))$ , em torno de  $\delta = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(ZDM(x_1), \delta)) &= \mathcal{L}_{F_1} H(ZDM(x_1)) + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(ZDM(x_1)) \delta + \\ &+ \mathcal{L}_{F_1}^3 H(ZDM(x_1)) \frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3). \end{aligned}$$

Pela expressão obtida no teorema (3.4), temos:

$$\mathcal{L}_{F_1} H(ZDM(x_1)) = \mathcal{L}_{F_1} H \left( x_1 + \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x_1)^2}{2\mathcal{L}_{F_d} H(x_1)\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} F_d(x_1) \right).$$

Expandindo a expressão acima em torno de  $x_1$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_1} H \left( x_1 + \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x_1)^2}{2\mathcal{L}_{F_d} H(x_1)\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} F_d(x_1) \right) &= \mathcal{L}_{F_1} H(x_1) + \langle \nabla \mathcal{L}_{F_1} H(x_1), F_d(x_1) \rangle \cdot \\ &\cdot \frac{v_1^2}{2\mathcal{L}_{F_d} H(x^*)\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} + O(v_1^3) \\ &= \mathcal{L}_{F_1} H(x_1) + \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(x_1)}{2\mathcal{L}_{F_d} H(x^*)\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} v_1^2 + O(v_1^3). \end{aligned}$$

Então:

$$\mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(ZDM(x_1), \delta)) = v_1 + \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(x_1)}{2\mathcal{L}_{F_d} H(x^*)\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} v_1^2 + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_1) \delta + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x_1) \frac{\delta^2}{2} + O(v_1^3) = 0.$$

Considerando

$$\begin{aligned} G(x_1, v_1, \delta) &= v_1 + \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(x_1)}{2\mathcal{L}_{F_d} H(x^*)\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} v_1^2 + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_1) \delta + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x_1) \frac{\delta^2}{2} + O(v_1^3) \quad (23) \\ &= 0. \end{aligned}$$

note que:

$$G(x^*, 0, 0) = 0.$$

e

$$\frac{\partial G}{\partial \delta}(x^*, 0, 0) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) \neq 0.$$

Pelo teorema da função implícita, existe  $\delta(x_1, v_1)$ , função suave, tal que  $G(x_1, v_1, \delta(x_1, v_1)) = 0$ . Analogamente ao caso anterior, obtemos:

$$\frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x^*, 0) = -\frac{1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)}.$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{\partial G}{\partial v_1}(x_1, v_1, \delta(v_1)) \right) &= \frac{\partial^2 G}{\partial v_1^2}(x_1, v_1, \delta) + \frac{\partial^2 G}{\partial \delta \partial v_1}(x_1, v_1, \delta) \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x_1, v_1) + \left( \frac{\partial^2 G}{\partial v_1 \partial \delta}(x_1, v_1, \delta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 G}{\partial \delta^2}(x_1, v_1, \delta) \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x_1, v_1) \right) \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x_1, v_1) + \frac{\partial G}{\partial \delta}(x_1, v_1, \delta) \frac{\partial^2 \delta}{\partial v_1^2}(x_1, v_1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e também, notamos que  $\frac{\partial^2 G}{\partial v_1 \partial \delta}(x_1, v_1, \delta) = \frac{\partial^2 G}{\partial \delta \partial v_1}(x_1, v_1, \delta) = 0$ , que nos resta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial v_1^2}(x_1, v_1, \delta(x_1, v_1)) &= \frac{\partial^2 G}{\partial v_1^2}(x_1, v_1, \delta) + \frac{\partial^2 G}{\partial \delta^2}(x_1, v_1, \delta) \left( \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x_1, v_1) \right)^2 + \\ &\quad + \frac{\partial G}{\partial \delta}(x_1, v_1, \delta) \frac{\partial^2 \delta}{\partial v_1^2}(x_1, v_1) = 0. \end{aligned}$$

Da expressão (23), obtemos:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v_1^2}(x_1, v_1, \delta) = \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(x_1)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*) \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)}.$$

Logo:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial v_1^2}(x^*, 0) = -\frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*) \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2} - \frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^3}.$$

Portanto:

$$\delta(x_1, v_1) = -\frac{v_1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} - \left( \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*) \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2} + \frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^3} \right) \frac{v_1^2}{2} + O(v_1^3).$$

Definimos a PDM como sendo:

$$PDM_2(x_3) = \phi_1(x_3, \delta).$$

Expandindo a expressão acima, temos:

$$\phi_1(x_3, \delta) = x_3 + F_1(x_3)\delta + \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x_3) \frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3).$$

Novamente pelo teorema (3.4):

$$F_1(x_3) = F_1 \left( x_1 + \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x_1)}{2\mathcal{L}_{F_d} H(x_1)\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} F_d(x_1) \right),$$

que, por sua vez, pode ser expandido em torno de  $x_1$  para obtermos:

$$F_1(x_3) = F_1(x_1) + O(x_1).$$

Analogamente para  $\frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x_3)$ :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x_1) + O(x_1).$$

Substituindo as expressões acima e  $x_3$  na  $PDM_2$ :

$$PDM_2(x_1) = x_1 + \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x_1)}{2\mathcal{L}_{F_d} H(x_1)\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} F_d(x_1) + F_1(x_1)\delta + \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x_1) \frac{\delta^2}{2} + O(x_1, \delta^3, v_1^3)$$

Substituindo  $\delta$ :

$$\begin{aligned} PDM_2(x_1) = & x_1 + \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x_1)}{2\mathcal{L}_{F_d} H(x_1)\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} F_d(x_1) + F_1(x_1) \left( -\frac{v_1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2} + \frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^3} \right) \frac{v_1^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x_1) \cdot \\ & \cdot \left( \frac{v_1^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2} \right) + O(x_1, v_1^3). \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

Com auxílio das funções  $ZDM$  e  $PDM$ , podemos definir a *Aplicação de Poincaré suave por partes* associada à uma bifurcação do tipo crossing-sliding. Primeiramente, observe a figura (12). Considere  $\Pi_1$  subconjunto de  $\Sigma$  como indicado na figura (12). Suponha que uma solução periódica de (19) passa pelo ponto  $x^*$ , tal que  $x^*$  seja um ponto de bifurcação do tipo crossing-sliding. Para algum  $T_1 \in \mathbb{R}$ , considerando como condição inicial  $x_0 \in \Pi_1$  a trajetória  $\phi_2(x_0, T_1)$  encontra  $\Sigma$  em  $x_1$ . Sob ação da  $PDM$ , encontramos o ponto  $PDM(x_1)$ , como ilustrado na figura. Sob ação do fluxo  $\phi_1$ , para algum  $T_2 \in \mathbb{R}$ ,

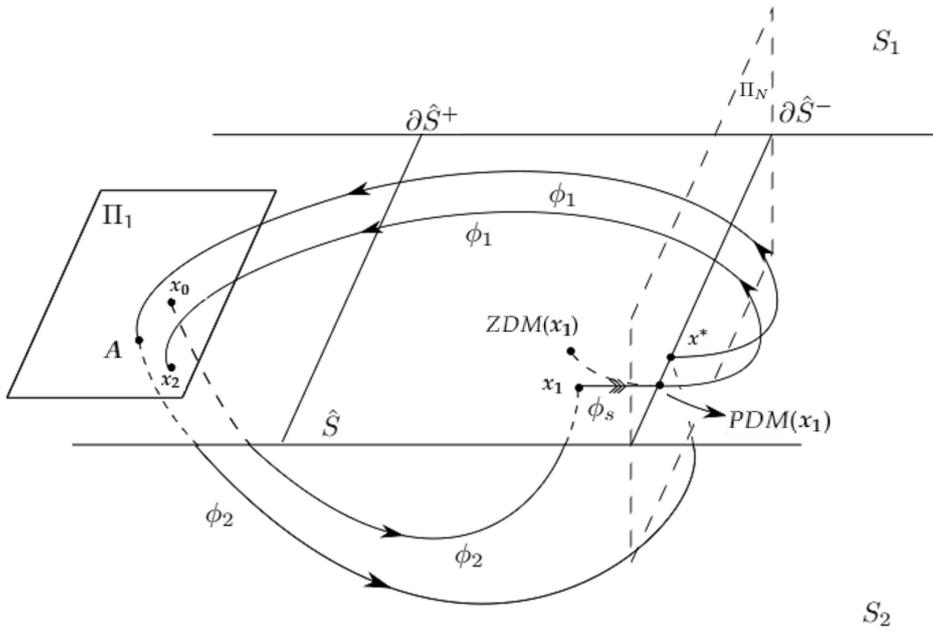


Figura 12: Comportamento da Aplicação de Poincaré para uma bifurcação do tipo crossing-sliding para pontos em  $\hat{S}$ .

encontramos o ponto  $x_2 \in \Pi_1$ . Então, a aplicação de Poincaré  $P_N : \Pi_1 \rightarrow \Pi_1$  é a função que leva  $x_0$  a  $x_2$ , ou seja:

$$P_N(x_0) = x_2.$$

Agora, como ilustramos na figura (13), para pontos  $x \notin \hat{S}$ , a PDM atua como uma projeção suave do ponto  $x_1 = ZDM(x_1)$  em  $\Pi_N$ , como demonstrado no Teorema (3.5). Assim, a Aplicação de Poincaré  $P_N$  é a aplicação que leva  $y_0$  a  $y_2$ , ou seja:

$$P_N(y_0) = y_2.$$

Considerando as afirmações acima, definimos:

**Definição 3.7.** Dado um sistema s.p.p. como em (19) e  $x^* \in \Sigma$ , ponto de bifurcação do tipo crossing-sliding. A aplicação de Poincaré suave por partes  $P_N : \Pi_1 \rightarrow \Pi_1$  associada é definida por:

$$P_N(x) = \phi_1(PDM(\phi_2(x, T_1)), T_2).$$

onde PDM é dada no teorema (3.5) e  $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$  são tais que  $\phi_2(x, T_1), \phi_1(PDM(\phi_2(x, T_1)), T_2) \in \Sigma$ .

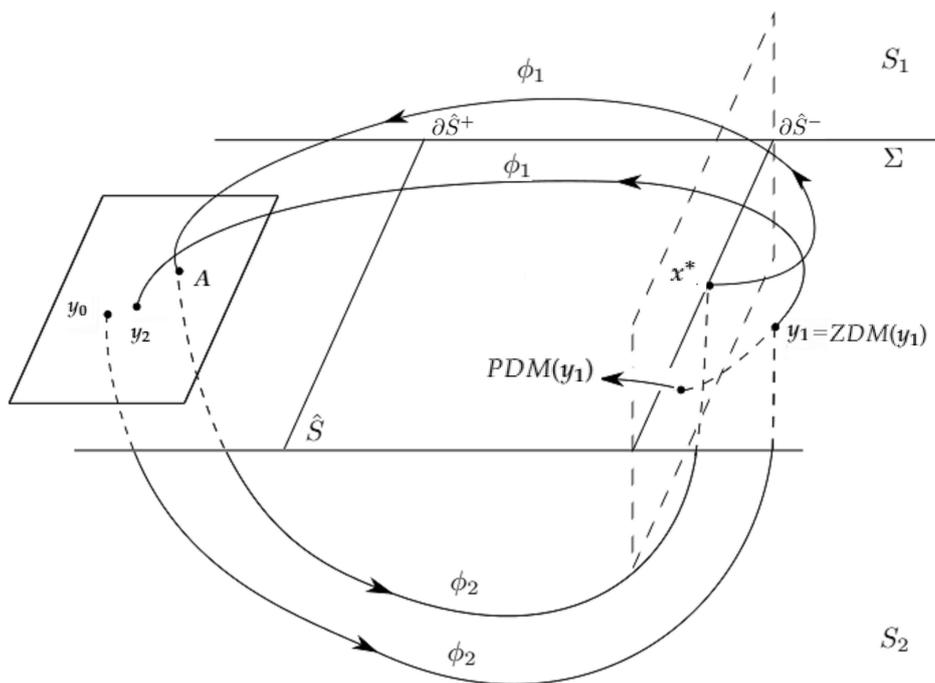


Figura 13: Comportamento da Aplicação de Poincaré para uma bifurcação do tipo crossing-sliding para pontos fora de  $\hat{S}$ .

Dessa forma, podemos notar que  $P_N(A) = A$ , ou seja, o ponto  $A$  é o ponto fixo da aplicação de Poincaré, que representa exatamente a trajetória periódica que passa pelo ponto de bifurcação  $x^*$ .

### Bifurcação Grazing-Sliding

Considere a situação seguinte, ilustrada na figura (15): uma solução de (19) passando por  $x^* \in \partial\hat{S}^-$  é periódica e está contida em  $S_1$ . A trajetória passando pelo ponto  $x_3$  é uma perturbação da solução passando por  $x^*$ . Nesse caso, o ponto  $x^*$  é um ponto de bifurcação que chamaremos de *grazing-sliding*. Para tal caso, sobre o ponto de bifurcação  $x^* = 0$  exigimos as mesmas hipóteses consideradas no caso *crossing-sliding*, dadas em (21).

Dessa forma, a ZDM para o presente caso é dada pelo teorema que segue:

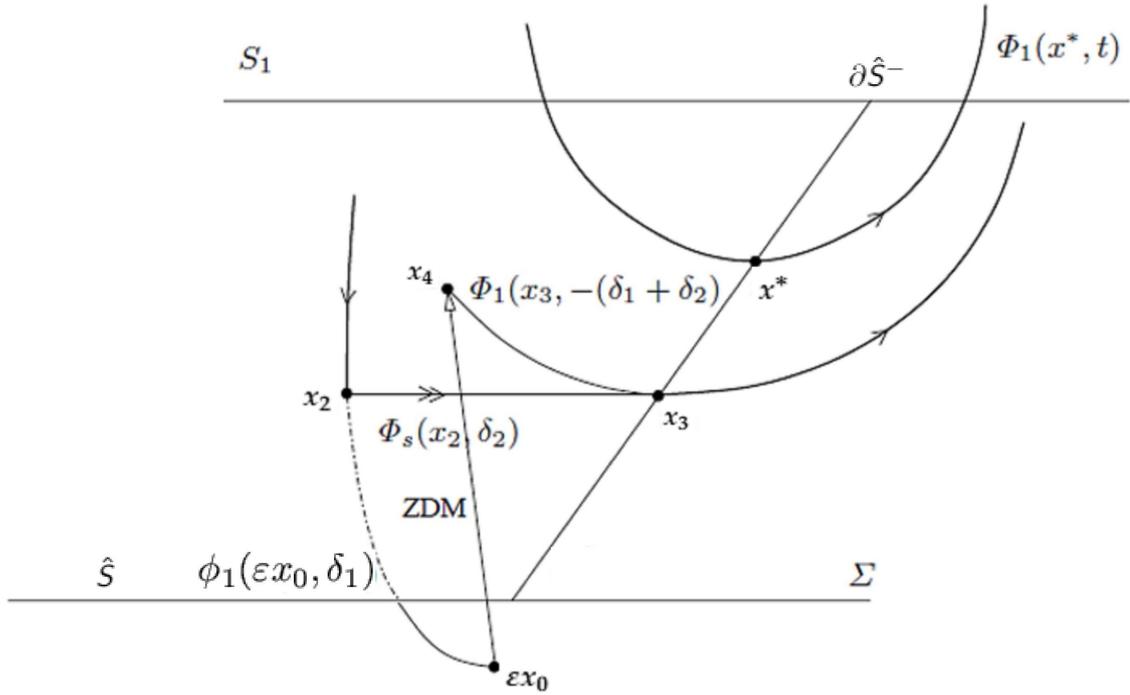


Figura 14: Ilustração do comportamento do fluxo próximo ao ponto de bifurcação *grazing-sliding*.  
 Fonte: [2].

**Teorema 3.8.** *Considere o sistema s.p.p. (19) e suponha que ele admite em  $x^* \in \partial S^-$  ponto de bifurcação do tipo *grazing-sliding*. Então, a ZDM é dada por:*

$$ZDM(x) = \begin{cases} x, & H(x) > 0; \\ x - \left( \frac{H(x)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x)} \right) (F_2(x) - F_1(x)), & H(x) \leq 0; \end{cases}$$

para  $x$  em uma vizinhança suficientemente próxima de  $x^*$ .

Para a PDM, temos o seguinte teorema:

**Teorema 3.9.** *Sob as hipóteses do teorema (3.8), a PDM é dada por:*

$$PDM(x) = \begin{cases} x, & x \in S_1; \\ x + y^2 \left( \frac{1}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} F_2(x) - \frac{\mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} F_1(x) \right), & x \in S_2; \end{cases}$$

onde  $y = \sqrt{-H(x)} = \sqrt{-H_{min}(\phi_1(x, t))}$ .

Para a construção das expressões acima, seguiremos os seguintes passos:

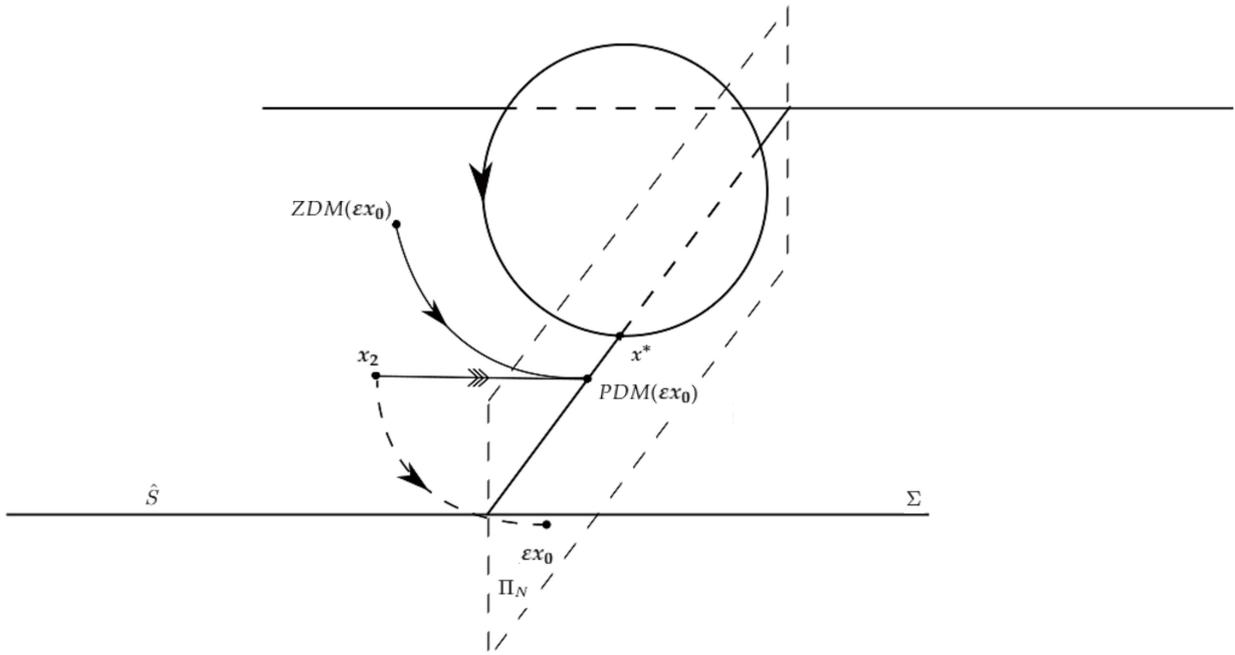


Figura 15: Comportamento da PDM para o caso *Grazing-Sliding*.

- 1– Em uma vizinhança suficientemente próxima de  $x^*$ , tomar o ponto inicial  $x_0 \in \Pi_N := \{x \in \mathcal{D} : \mathcal{L}_{F_1}H(x) = 0\}$  e considerar  $\varepsilon$ -perturbações do ponto  $x_0$  tal que  $H(\varepsilon x_0) < 0$ , com  $|\varepsilon| \ll 1$ ;
- 2– Encontrar  $\delta_1 < 0$  tal que  $x_2 = \phi_1(\varepsilon x_0, \delta_1)$ , e  $H(x_2) = 0$ ;
- 3– Encontrar  $\delta_2 > 0$  e  $x_3 = \phi_s(x_2, \delta_2)$ , tal que  $\mathcal{L}_{F_1}H(x_3) = 0$ ;
- 4– Definir  $ZDM : \Pi_N \rightarrow D$ , como sendo:

$$x_4 = ZDM(\varepsilon x_0) = \phi_1(\phi_s(\phi_1(\varepsilon x_0, \delta_1), \delta_2), -\delta_1 - \delta_2).$$

- 5– Encontrar  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{L}_{F_1}H(\phi_s(ZDM(\varepsilon x_0), \alpha)) = 0$ , definir  $PDM : \Sigma \rightarrow \Pi_N$ , como sendo:

$$PDM(\varepsilon x_0) = \phi_s(ZDM(\varepsilon x_0), \alpha).$$

onde  $\Pi_N \subset \partial S^-$ .

#### *Demonstração do Teorema 3.8*

Tome  $x_0 \in S_2$  e considere  $\varepsilon$ -perturbações de  $x_0$ , com  $|\varepsilon| \ll 1$ . Para encontrar o tempo  $\delta_1$  satisfazendo  $H(x_2) = 0$ , onde  $x_2 = \phi_1(\varepsilon x_0, \delta_1)$ , observando a figura (15), podemos

notar que sua construção é análoga à construção para sistemas de impacto. Dessa forma, o tempo  $\delta_1$  é dado por:

$$\delta_1(x_0, y) = -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)}} y + O(y^2),$$

onde  $y = \sqrt{-H(\varepsilon x_0)}$ .

Considerando que  $x_2 = \phi_1(\varepsilon x_0, \delta_1)$  e  $x_3 = \phi_s(x_2, \delta_2)$ , para encontrar  $\delta_2 > 0$ , precisamos que  $x_3$  satisfaça  $\mathcal{L}_{F_1} H(x_3) = 0$ , ou seja,  $x_3 \in \partial \hat{S}^-$ . Expandindo  $\mathcal{L}_{F_1} H(x_3)$  em torno de  $\delta_2 = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_1} H(x_3) &= \mathcal{L}_{F_1} H(x_2) + \mathcal{L}_{F_s} \mathcal{L}_{F_1} H(x_2) \delta_2 + O(\delta_2^2) \\ &= \mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(\varepsilon x_0, \delta_1)) + \mathcal{L}_{F_s} \mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(\varepsilon x_0, \delta_1)) \delta_2 + O(\delta_2^2) \\ &= \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0) + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) \delta_1 + \mathcal{L}_{F_s} \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0) \delta_2 + O(\delta_2^2, \delta_1^2). \end{aligned}$$

Em particular, temos:

$$\mathcal{L}_{F_s} \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \left( \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) \right).$$

Logo:

$$\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0) + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) \delta_1 + \left( \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \left( \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) \right) \right) \delta_2 + O(\delta_2^2, \delta_1^2) = 0.$$

Considerando o fato de  $\varepsilon x_0 \in \Pi_N$  temos  $\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0) = 0$ . Daí:

$$\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) (\delta_1 + \delta_2) + O(\delta_2^2, \delta_1^2) = 0,$$

o que implica em dizer que:

$$\delta_2 = -\delta_1 + O(y^2).$$

Logo:

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)}} y + O(y^2).$$

A ZDM é definida pela expressão:

$$x_4 = ZDM(\varepsilon x_0) := \phi_1(\phi_s(\phi_1(\varepsilon x_0, \delta_1), \delta_2), -\delta_1 - \delta_2).$$

Expandindo tal expressão em torno de  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} x_4 &= \varepsilon x_0 + \delta_2 (F_s(\varepsilon x_0) - F_1(\varepsilon x_0)) + \frac{\delta_2^2}{2} \left( \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0) - \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) \right) - \delta_1 \delta_2 \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0) \right) + O(\delta_1^3, \delta_2^3). \end{aligned}$$

Substituindo  $\delta_2 = -\delta_1 + O(y^2)$  na expressão acima:

$$ZDM(\varepsilon x_0) = \varepsilon x_0 + \delta_2(F_s(\varepsilon x_0) - F_1(\varepsilon x_0)) + \frac{\delta_2^2}{2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) - \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0) \right).$$

Analogamente ao caso anterior, precisamos encontrar os termos  $F_s(\varepsilon x_0)$  e  $\frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0)$ . Note que, como  $\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0) = 0$ , temos  $F_1(\varepsilon x_0) = F_s(\varepsilon x_0)$ . O termo  $\frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0)$  para tal caso, é dado por:

$$\frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0) = \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) - \frac{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)} F_d(\varepsilon x_0), \quad (24)$$

ou seja:

$$ZDM(\varepsilon x_0) = \varepsilon x_0 + \frac{\delta_2^2}{2} \left( F_d(\varepsilon x_0) \frac{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)} \right). \quad (25)$$

Substituindo a expressão para  $\delta_2$  em (25):

$$ZDM(\varepsilon x_0) = \varepsilon x_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} y^2 \right) \left( F_d(\varepsilon x_0) \frac{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)} \right).$$

Podemos também notar que:

$$\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) + O(\varepsilon).$$

Portanto:

$$ZDM(\varepsilon x_0) = \varepsilon x_0 + \left( F_d(\varepsilon x_0) \frac{y^2}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)} \right).$$

Substituindo  $y$  na expressão anterior, obtemos

$$ZDM(\varepsilon x_0) = \varepsilon x_0 - \left( \frac{H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)} \right) (F_2(\varepsilon x_0) - F_1(\varepsilon x_0)).$$

como queríamos demonstrar. ■

### *Demonstração do Teorema 3.9*

Para a demonstração do teorema (3.9), consideremos o ponto  $\varepsilon x_0 \in S_2$  e a  $ZDM(\varepsilon x_0)$ , tal que  $\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0) = 0$ , como na figura (15).

Devemos então projetar  $ZDM(\varepsilon x_0)$  suavemente em  $\Pi_2$  sob ação do fluxo  $\phi_1$ . Para isso, precisamos encontrar  $\delta \in \mathbb{R}$ , tal que  $\mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(ZDM(\varepsilon x_0), \delta)) = 0$ . Expandindo tal expressão em torno de  $\delta = 0$ , temos:

$$\mathcal{L}_{F_1} H(\phi_1(ZDM(\varepsilon x_0), \delta)) = \mathcal{L}_{F_1} H(ZDM(\varepsilon x_0)) + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(ZDM(\varepsilon x_0))\delta + O(\delta^2) = 0.$$

Analogamente aos casos anteriores, obtemos:

$$\delta(\varepsilon x_0, v_1) = -\frac{v_1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} + O(v_1^2),$$

onde  $v_1 = \mathcal{L}_{F_1} H(ZDM(\varepsilon x_0))$ . Substituindo a expressão da ZDM do teorema (3.8), temos:

$$\mathcal{L}_{F_1} H(ZDM(\varepsilon x_0)) = \mathcal{L}_{F_1} H\left(\varepsilon x_0 + y^2 \frac{F_d(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)}\right).$$

Expandindo a expressão  $\mathcal{L}_{F_1} H\left(\varepsilon x_0 + y^2 \frac{F_d(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)}\right)$  em torno de  $\varepsilon x_0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_1} H\left(\varepsilon x_0 + y^2 \frac{F_d(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)}\right) &= \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0) + \langle \nabla \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0), F_d(\varepsilon x_0) \rangle \frac{y^2}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)} + O(y^3) \\ &= \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0) + \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)} y^2 + O(y^3). \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon x_0, v_1) &= -\frac{1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} \left( \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0) + y^2 \left( \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} \left( y^2 \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)} \right) + O(v_1^2). \end{aligned}$$

Escrevendo  $\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0) = \mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*) + O(\varepsilon)$  e  $\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0) = \mathcal{L}_{F_2} H(x^*) + O(\varepsilon)$ , temos:

$$\delta(\varepsilon x_0, v_1) = -y^2 \left( \frac{\mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) \mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} - \frac{1}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} \right) + O(v_1^2, \varepsilon).$$

Definimos a PDM como sendo:

$$PDM(\varepsilon x_0) = \phi_1(ZDM(\varepsilon x_0), \delta).$$

Expandindo a expressão  $\phi_1(ZDM(\varepsilon x_0), \delta)$  em torno de  $\delta = 0$ :

$$\phi_1(ZDM(\varepsilon x_0), \delta) = ZDM(\varepsilon x_0) + F_1(ZDM(\varepsilon x_0))\delta + O(\delta^2).$$

Em particular, temos:

$$ZDM(\varepsilon x_0) = \varepsilon x_0 + y^2 \frac{F_d(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)} + O(y^3)$$

e:

$$F_1(ZDM(\varepsilon x_0)) = F_1\left(\varepsilon x_0 + y^2 \frac{F_d(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)} + O(y^3)\right).$$

Expandindo a expressão acima em torno de  $\varepsilon x_0$  até o termo de ordem  $O(\varepsilon x_0)$ :

$$F_1\left(\varepsilon x_0 + y^2 \frac{F_d(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} + O(y^3)\right) = F_1(\varepsilon x_0) + O(\varepsilon x_0, y^3),$$

ou seja:

$$\phi_1(ZDM(\varepsilon x_0), \delta) = ZDM(\varepsilon x_0) + F_1(ZDM(\varepsilon x_0))\delta + O(\varepsilon x_0, \delta^2, y^3), \quad (26)$$

$$= ZDM(x_2) + F_1(\varepsilon x_0)\delta + O(\delta^2, \varepsilon x_0, y^3). \quad (27)$$

Substituindo  $\delta$  na expressão anterior:

$$PDM(\varepsilon x_0) = \varepsilon x_0 + y^2 \frac{F_d(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)} + F_1(\varepsilon x_0) \left( -y^2 \left( \frac{\mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} - \frac{1}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} \right) \right) + O(y^3, \varepsilon x_0).$$

Expandindo  $\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)$  em torno de  $x^*$ :

$$\mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0) = \mathcal{L}_{F_2} H(x^*) + O(\varepsilon x_0)$$

Dessa forma, concluímos que:

$$PDM(\varepsilon x_0) = \varepsilon x_0 + y^2 \left( \frac{1}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} F_2(\varepsilon x_0) - \frac{\mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} F_1(\varepsilon x_0) \right).$$

que era o que queríamos encontrar. ■

De maneira análoga ao caso anterior, podemos construir a aplicação de Poincaré suave por partes para pontos de bifurcação do tipo grazing-sliding. Para isso, observemos a figura (16). Suponha uma solução periódica passando por  $x^*$ , sendo  $x^*$  um ponto de bifurcação do tipo grazing-sliding. Para alguma trajetória passando por  $x_0$ , tome o ponto  $\phi_1(x_0, T) = x_1 \in \Pi_N$  e  $T \in \mathbb{R}$ . Sob ação da  $PDM$ , dada no teorema (3.9), encontramos o ponto  $PDM(x_1) \in \Pi_N$ . Então, a Aplicação de Poincaré  $P_N$  para pontos de bifurcação do tipo grazing-sliding é a aplicação que leva  $x_0$  a  $PDM(x_1)$ , ou seja:

$$P_N(x_0) = PDM(x_1).$$

Considerando as afirmações acima, definimos:

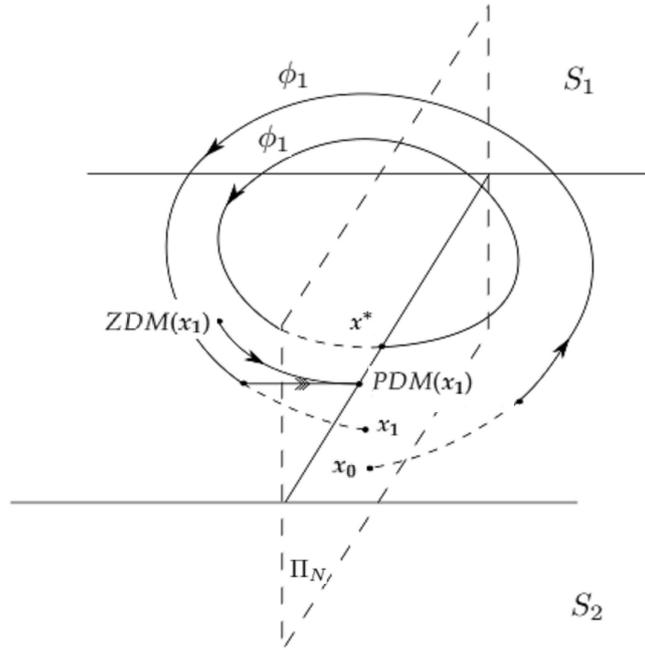


Figura 16: Comportamento da Aplicação de Poincaré para pontos de bifurcação do tipo grazing-sliding.

**Definição 3.10.** Para uma trajetória periódica de um sistema do tipo (19) apresentando uma bifurcação do tipo grazing-sliding, a aplicação de Poincaré suave por partes  $P_N : \Pi_N \rightarrow \Pi_N$  associada, é definida por:

$$P_N(x) = PDM(\phi_1(x, T)),$$

onde  $T$  é o período da trajetória passando por  $x^*$  e  $PDM$  é dada no Teorema (3.9).

Dessa forma, temos

$$P_N(x^*) = x^*$$

ou seja, o ponto  $x^*$  é um ponto fixo da aplicação de Poincaré, que representa a órbita periódica ilustrada na figura (16).

### Bifurcação Switching-Sliding

Considere uma trajetória periódica de (19) em  $S_1$ , que atinge a fronteira  $\partial S^-$  no ponto  $x^*$  como podemos observar na figura (17). A trajetória próxima é uma perturbação da trajetória contendo  $x^*$ . Dessa forma, o ponto  $x^*$  é uma bifurcação, que chamaremos de *Switching-Sliding*.

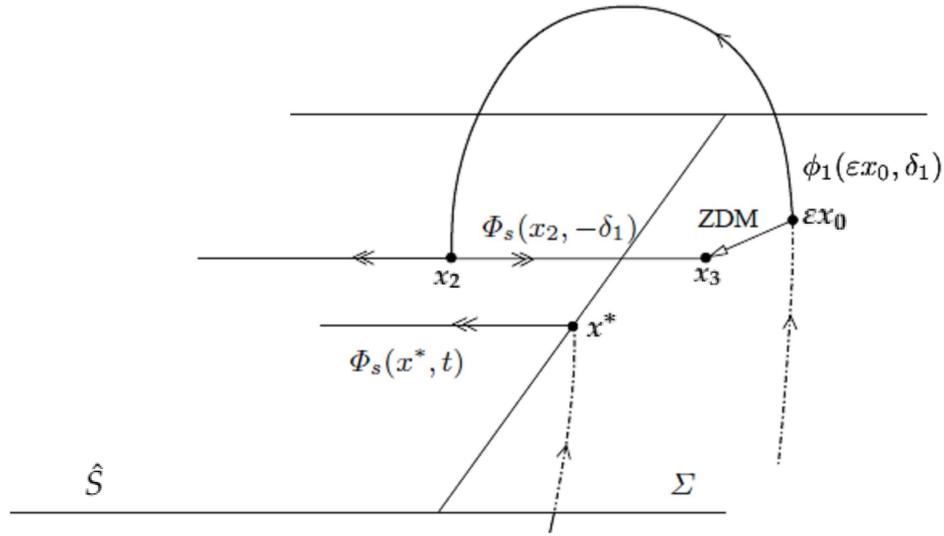


Figura 17: Comportamento dos fluxos em uma vizinhança do ponto  $x^*$  para a ZDM do caso *switching-sliding*. Fonte: [2].

Para o presente caso, exigiremos as seguintes hipóteses sobre o ponto de bifurcação  $x^* = 0$ :

- 1 –  $H(x^*) = 0; \nabla H(x^*) \neq 0$ ;
- 2 –  $\mathcal{L}_{F_1} H(x^*) = 0$ ;
- 3 –  $\mathcal{L}_{F_2} H(x^*) > 0$ ;
- 4 –  $\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) < 0$ .

Considerando as hipóteses acima sobre o ponto  $x^*$ , note que pela hipótese 1, assim como nos casos anteriores, pelo fato de  $\nabla H(x^*) \neq 0$  o ponto  $x^* = 0$  é um valor regular da função  $H$  e, também,  $x^* \in \Sigma$ , pois  $H(x^*) = 0$ . A hipótese 2 indica que o ponto está sobre  $\partial S^-$  e, além disso, que a trajetória  $\phi_1$  passando por  $x^*$  é tangente a  $\Sigma$  em  $x^*$ . A hipótese 3 indica que o fluxo  $\phi_2$  é transversal a  $\Sigma$  em  $x^*$  e, a hipótese 4 indica que o fluxo  $\phi_1$  é tangente a  $x^*$  por uma trajetória que está contida em  $S_2$ , ou seja, o ponto  $x^*$  é uma *dobra invisível*.

O teorema da ZDM do caso *switching-sliding* é dado no que segue:

**Teorema 3.11.** *Considere o sistema s.p.p. (19) e suponha que ele admite em  $x^* \in \partial S^-$  um ponto de bifurcação do tipo *switching-sliding*. Então, a ZDM :  $\Sigma \rightarrow \Sigma$  numa vizinhança de  $x^*$  é dada por:*

$$ZDM(x) = \begin{cases} x, & \mathcal{L}_{F_1} H(x) > 0; \\ Z(x), & \mathcal{L}_{F_1} H(x) \leq 0; \end{cases}$$

onde

$$Z(x) = x + 2 \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x)^3}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2 \mathcal{L}_{F_d} H(x)} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{1}{2 \mathcal{L}_{F_d} H(x)} \left( \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) - \mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x) \right) \right) F_d(x).$$

O teorema da PDM para o presente caso é dado por:

**Teorema 3.12.** *Sob as hipóteses do teorema (3.11), a PDM :  $\Sigma \rightarrow \Pi_N$  para um ponto de bifurcação do tipo switching-sliding é dada por:*

$$\begin{aligned} PDM(x) = & x + \frac{2 \mathcal{L}_{F_1} H(x)^3}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) \mathcal{L}_{F_d} H(x)} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x}(x) + \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(x)}{\mathcal{L}_{F_d} H(x)} \right) F_d(x) - \\ & -(F_1(x) - C(x) F_d(x)) \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)}, \end{aligned}$$

sendo  $x$  ponto inicial da ZDM.

Para a construção do presente caso, seguiremos os seguintes passos, ilustrados na imagem acima:

- 1– Tomar como ponto inicial  $x_0 \in \Sigma \setminus \hat{S}$  tal que  $\mathcal{L}_{F_1} H(x_0) > 0$ ;
- 2– Encontrar  $\delta > 0$ , tal que  $x_2 = \phi_1(\epsilon x_0, \delta) \in \Sigma$ , ou seja,  $H(x_2) = 0$ ;
- 3– Definir  $ZDM : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , onde :

$$ZDM(\epsilon x_0) = \phi_s(\phi_1(\epsilon x_0, \delta), -\delta).$$

- 4– Encontrar  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tal que  $\mathcal{L}_{F_1} H(\phi_s(ZDM(\epsilon x_0), \alpha)) = 0$  e definir  $PDM : \Sigma \rightarrow \Pi_N$ , dada por:

$$PDM(\epsilon x_0) = \phi_s(ZDM(\epsilon x_0), \alpha).$$

*Demonstração do Teorema 3.11*

O tempo  $\delta > 0$  pode ser encontrado implicitamente pela equação:

$$H(\phi_1(\epsilon x_0, \delta)) = 0.$$

De fato, expandindo  $H(\phi_1(\epsilon x_0, \delta))$  em torno de  $\delta = 0$ , temos:

$$H(\phi_1(\epsilon x_0, \delta)) = H(\epsilon x_0) + \mathcal{L}_{F_1} H(\epsilon x_0) \delta + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\epsilon x_0) \frac{\delta^2}{2} + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(\epsilon x_0) \frac{\delta^3}{6} + O(\delta^4) = 0.$$

Como  $\varepsilon x_0 \in \Sigma$ , temos  $H(\varepsilon x_0) = 0$ . Logo:

$$\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0) \delta + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) \frac{\delta^2}{2} + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(\varepsilon x_0) \frac{\delta^3}{6} + O(\delta^4) = 0.$$

Como buscamos  $\delta \neq 0$ , considerando  $v_1 = \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)$ , temos:

$$v_1 + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) \frac{\delta}{2} + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(\varepsilon x_0) \frac{\delta^2}{6} + O(\delta^3) = 0$$

Fazendo uso das técnicas anteriores e considerando  $G(x_0, v_1, \delta) = v_1 + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) \frac{\delta}{2} + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(\varepsilon x_0) \frac{\delta^2}{6} + O(\delta^3)$ , note que  $\frac{\partial G}{\partial \delta}(x^*, 0, 0) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)$ . Por hipótese,  $\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) < 0$ . Pelo T.F.I. existe uma função suave  $\delta(x_0, v_1)$  satisfazendo  $G(x_0, v_1, \delta(x_0, v_1)) = 0$ .

Para encontrar a primeira aproximação de  $\delta$ , derivamos a função  $G$  implicitamente em relação a  $v_1$ :

$$\frac{\partial G}{\partial v_1}(x_0, v_1, \delta(x_0, v_1)) = \frac{\partial G}{\partial v_1}(x_0, v_1, \delta) + \frac{\partial G}{\partial \delta}(x_0, v_1, \delta) \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x_0, v_1) = 0. \quad (28)$$

Isolando o termo  $\frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x_0, v_1)$  e aplicando  $G$  no ponto  $(x_0, v_1, \delta) = (x^*, 0, 0)$ , obtemos:

$$\frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x^*, 0) = - \frac{\frac{\partial G}{\partial v_1}(x^*, 0, 0)}{\frac{\partial G}{\partial \delta}(x^*, 0, 0)}.$$

Para encontrar o termo de segunda ordem de  $\delta$ , diferenciamos novamente a expressão (28) em relação a  $v_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{\partial G}{\partial v_1}(x_0, v_1, \delta(x_0, v_1)) \right) &= \frac{\partial^2 G}{\partial v_1^2}(v_1, \delta) + \frac{\partial^2 G}{\partial \delta \partial v_1}(x_0, v_1, \delta) \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x_0, v_1) + \left( \frac{\partial^2 G}{\partial v_1 \partial \delta}(x_0, v_1, \delta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 G}{\partial \delta^2}(x_0, v_1, \delta) \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x_0, v_1) \right) \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x_0, v_1) + \frac{\partial G}{\partial \delta}(x_0, v_1, \delta) \frac{\partial^2 \delta}{\partial v_1^2}(x_0, v_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Os termos da expressão acima são dados por:

- $\frac{\partial G}{\partial v_1}(x^*, 0) = 1,$
- $\frac{\partial G}{\partial \delta}(x^*, 0) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*),$
- $\frac{\partial^2 G}{\partial v_1^2}(x^*, 0) = 0,$

- $\frac{\partial^2 G}{\partial v_1 \partial \delta}(x^*, 0) = 0,$
- $\frac{\partial^2 G}{\partial \delta \partial v_1}(x^*, 0) = 0,$
- $\frac{\partial^2 G}{\partial \delta^2}(x^*, 0) = \frac{1}{3} \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*).$

A expansão em séries de Taylor de  $\delta$  em relação a variável  $v_1$  é dada por:

$$\delta(x_0, v_1) = \delta(x^*, 0) + \frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x^*, 0)v_1 + \frac{\partial^2 \delta}{\partial v_1^2}(x^*, 0)\frac{v_1^2}{2} + O(v_1^3).$$

Substituindo os termos acima, temos:

$$\frac{\partial \delta}{\partial v_1}(x^*, 0) = -\frac{2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)},$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial v_1^2}(x^*, 0) = -\frac{1}{3} \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*) \left( -\frac{2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} \right)^2 \left( \frac{2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} \right),$$

ou seja:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial v_1^2}(x^*, 0) = -\frac{8}{3} \frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^3}.$$

Portanto:

$$\delta(x_0, v_1) = -2 \frac{v_1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} + \frac{1}{2} \left( -\frac{8}{3} \frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^3} \right) \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^2 + O(v_1^3),$$

que, por sua vez, pode ser reescrito como:

$$\delta(x_0, v_1) = -2 \frac{v_1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} - \frac{4}{3} \frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^3} v_1^2 + O(v_1^3).$$

Definimos:

$$x_3 = ZDM(\varepsilon x_0) := \phi_s(\phi_1(\varepsilon x_0, \delta), -\delta).$$

Para encontrarmos a expressão da ZDM, expandimos  $\phi_s(\phi_1(\varepsilon x_0, \delta), -\delta)$  em torno de  $\delta = 0$ :

$$\phi_s(\phi_1(\varepsilon x_0, \delta), -\delta) = \varepsilon x_0 + \delta(F_1(\varepsilon x_0) - F_s(\varepsilon x_0)) + \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) - \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0) \right).$$

Em particular, o termo  $\frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0)$  é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0) &= \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \frac{\partial F_1}{\partial x} F_d(\varepsilon x_0) - \frac{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} F_d(\varepsilon x_0) + \\ &+ \frac{\mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)^2} \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0) F_d(\varepsilon x_0) + O(v_1^2). \end{aligned}$$

Substituindo  $F_s$  e a expressão acima na ZDM:

$$\begin{aligned} \phi_s(\phi_1(\varepsilon x_0, \delta), -\delta) &= \varepsilon x_0 + \delta(F_1(\varepsilon x_0) - F_1(\varepsilon x_0) + C(\varepsilon x_0)F_d(\varepsilon x_0)) + \\ &+ \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) - \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \frac{\partial F_1}{\partial x} F_d(\varepsilon x_0) - \frac{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} \cdot \right. \right. \\ &\left. \left. \cdot F_d(\varepsilon x_0) + \frac{\mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)^2} \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0) F_d(\varepsilon x_0) + O(v_1^2) \right) \right). \end{aligned}$$

Simplificando tal expressão, obtemos:

$$\begin{aligned} ZDM(\varepsilon x_0) &= \varepsilon x_0 + \delta \left( C(\varepsilon x_0) F_d(\varepsilon x_0) \right) + \frac{\delta^2}{2} \left( C(\varepsilon x_0) \frac{\partial F_1}{\partial x} F_d(\varepsilon x_0) + \frac{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} F_d(\varepsilon x_0) + \right. \\ &\left. + \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)^2} (\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)) F_d(\varepsilon x_0) \right). \end{aligned}$$

Substituindo  $\delta$ :

$$\begin{aligned} ZDM(\varepsilon x_0) &= \varepsilon x_0 - 2 \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) \mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} F_d(\varepsilon x_0) + 2 \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2} \left( C(\varepsilon x_0) \frac{\partial F_1}{\partial x} F_d(\varepsilon x_0) + \right. \\ &\left. + \frac{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} F_d(\varepsilon x_0) + \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)^2} (\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)) F_d(\varepsilon x_0) \right). \end{aligned}$$

Distribuindo a multiplicação e substituindo  $C(\varepsilon x_0)$ , temos:

$$\begin{aligned} ZDM(\varepsilon x_0) &= \varepsilon x_0 - 2 \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) \mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} F_d(\varepsilon x_0) + 2 \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^3}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2 \mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} \frac{\partial F_1}{\partial x} F_d(\varepsilon x_0) + \\ &+ 2 \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^2}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) \mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} F_d(\varepsilon x_0) + 2 \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^3}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2 \mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)^2} (\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) - \\ &- \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0)) F_d(\varepsilon x_0). \end{aligned}$$

Simplificando os termos possíveis, temos:

$$ZDM(\varepsilon x_0) = \varepsilon x_0 + 2 \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^3}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)^2 \mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} \left( \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_2} H(\varepsilon x_0) \right) \right) F_d(\varepsilon x_0).$$

que é o que queríamos demonstrar. ■

*Demonstração do Teorema 3.12*

Para este caso, consideraremos como superfície de velocidade zero  $\Pi_N = \partial S^-$ , haja vista que o fluxo que projetará a ZDM é o fluxo *sliding*  $\phi_s$  que, por sua vez, está contido na fronteira de descontinuidade  $\Sigma$ . Para ilustrar o comportamento da PDM, observemos a figura (18).

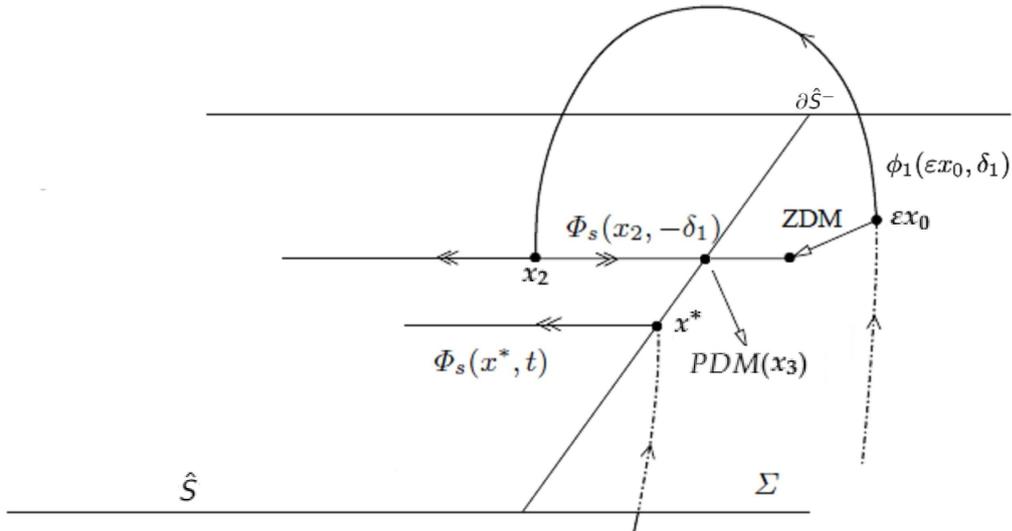


Figura 18: Comportamento da PDM para o caso *Switching-Sliding*. Ilustramos aqui o comportamento de ambas as funções ZDM e PDM. Fonte: [2].

Devemos então encontrar um tempo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tal que:

$$\mathcal{L}_{F_1} H(\phi_s(x_3, \alpha)) = 0.$$

Eventualmente, o ponto  $x_3$  pode pertencer a  $\partial\hat{S}^-$ . Para este caso, temos  $\alpha = 0$ . Para qualquer outro caso, a fim de encontrar o tempo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , devemos expandir o lado esquerdo da expressão acima em torno de  $\alpha = 0$ :

$$\mathcal{L}_{F_1}H(\phi_s(x_3, \alpha)) = \mathcal{L}_{F_1}H(x_3) + \mathcal{L}_{F_s}\mathcal{L}_{F_1}H(x_3)\alpha + O(\alpha^2) = 0. \quad (29)$$

Sendo  $\varepsilon x_0$  o ponto inicial e considerando  $x_3 = ZDM(\varepsilon x_0)$ , o termo  $\mathcal{L}_{F_1}H(x_3)$  é dado por:

$$\mathcal{L}_{F_1}H(x_3) = \mathcal{L}_{F_1}H\left(\varepsilon x_0 + 2C_3v_1^3\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(\varepsilon x_0) + C_4\right)F_d(\varepsilon x_0)\right),$$

onde  $C_3 = \frac{1}{\mathcal{L}_{F_1}^2H(x^*)\mathcal{L}_{F_2}H(x_1)}$  e  $C_4 = \frac{\mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_d}H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d}H(\varepsilon x_0)}$ .

Expandindo a expressão  $\mathcal{L}_{F_1}H(x_3)$  em torno de  $\varepsilon x_0$ :

$$\mathcal{L}_{F_1}H(x_3) = \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0) + \left\langle \nabla \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0), 2C_3v_1^3\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(\varepsilon x_0) + C_4\right)F_d(\varepsilon x_0) \right\rangle + O(\varepsilon x_0^2),$$

ou seja:

$$\mathcal{L}_{F_1}H(x_3) = \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0) + 2C_3\left(L_{F_{1,x}F_d}\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0) + C_4\mathcal{L}_{F_d}\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)\right)v_1^3 + O(v_1^4).$$

Analogamente em  $\mathcal{L}_{F_s}\mathcal{L}_{F_1}H(x_3)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_s}\mathcal{L}_{F_1}H(x_3) &= \mathcal{L}_{F_s}\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0) + 2C_3\left(\mathcal{L}_{F_{1,x}F_d}\mathcal{L}_{F_s}\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0) + C_4\mathcal{L}_{F_d}\mathcal{L}_{F_s}\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)\right)v_1^3 + \\ &\quad + O(v_1^4). \end{aligned}$$

Substituindo em (29):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0) + 2C_3\left(L_{F_{1,x}F_d}\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0) + C_4\mathcal{L}_{F_d}\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)\right)v_1^3 + \alpha\left(\mathcal{L}_{F_1}^2H(\varepsilon x_0) - \right. \\ \left. - C(\varepsilon x_0)\mathcal{L}_{F_d}\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)\right) + O(\alpha^2, v_1^4) = 0. \end{aligned}$$

Fazendo  $G(x_0, v_1, \alpha) = v_1 + 2C_3\left(L_{F_{1,x}F_d}\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0) + C_4\mathcal{L}_{F_d}\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)\right)v_1^3 + \alpha\left(\mathcal{L}_{F_1}^2H(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0)\mathcal{L}_{F_d}\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)\right) + O(\alpha^2, v_1^4) = 0$ , note que:

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha}(x^*, 0, 0) = \mathcal{L}_{F_1}^2H(x^*) \neq 0.$$

Pelo teorema da função implícita, existe uma função suave  $\alpha(x_0, v_1)$ , definida em uma vizinhança do ponto  $x^*$  que anula  $G$ , ou seja  $G(x_0, v_1, \alpha(x_0, v_1)) = 0$ . Utilizando uma primeira aproximação do termo em  $v_1$  série de Taylor de  $\alpha(x_0, v_1)$ , obtemos:

$$\alpha(\varepsilon x_0, v_1) = \alpha(x^*, 0) + \frac{\partial \alpha}{\partial v_1}(x^*, 0)v_1 + O(v_1^2).$$

O termo  $\frac{\partial \alpha}{\partial v_1}(x^*, 0)$  é dado por:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v_1}(x^*, 0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial v_1}(x^*, 0, 0)}{\frac{\partial G}{\partial \alpha}(x^*, 0, 0)},$$

sendo que  $\frac{\partial G}{\partial v_1}(x^*, 0, 0) = 1$  e  $\frac{\partial G}{\partial \alpha}(x^*, 0, 0) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)$ .

Portanto:

$$\alpha(\varepsilon x_0, v_1) = -\frac{v_1}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)} + O(v_1^2).$$

Definimos a PDM como sendo  $PDM : \Sigma \rightarrow \Pi_1$ , tal que:

$$PDM(\varepsilon x_0) = \phi_s(ZDM(\varepsilon x_0), \alpha).$$

Expandindo a expressão acima em torno de  $\alpha = 0$ , obtemos:

$$\phi_s(x_3, \alpha) = x_3 + F_s(x_3)\alpha + O(\alpha^2).$$

Em  $F_s$ , podemos expandir novamente em torno de  $\varepsilon x_0$  para obter:

$$\phi_s(x_3, \alpha) = x_3 + F_s(\varepsilon x_0)\alpha + O(\varepsilon x_0, \alpha^2).$$

Substituindo  $F_s$ :

$$\phi_s(x_3, \alpha) = x_3 + (F_1(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0)F_d(\varepsilon x_0))\alpha + O(\varepsilon x_0, \alpha^2). \quad (30)$$

Substituindo  $x_3$  e  $\alpha$  em (30):

$$\begin{aligned} PDM(\varepsilon x_0) = & \varepsilon x_0 + \frac{2\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)^3}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)\mathcal{L}_{F_d}H(\varepsilon x_0)} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x}(\varepsilon x_0) + \left( \frac{\mathcal{L}_{F_d}\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d}H(\varepsilon x_0)} \right) \right) F_d(\varepsilon x_0) - \\ & - \left( F_1(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0)F_d(\varepsilon x_0) \right) \frac{\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)}. \end{aligned} \quad (31)$$

que era o queríamos encontrar. ■

Para construirmos a aplicação de Poincaré suave por partes para bifurcações do tipo switching-sliding, considere a figura (19).

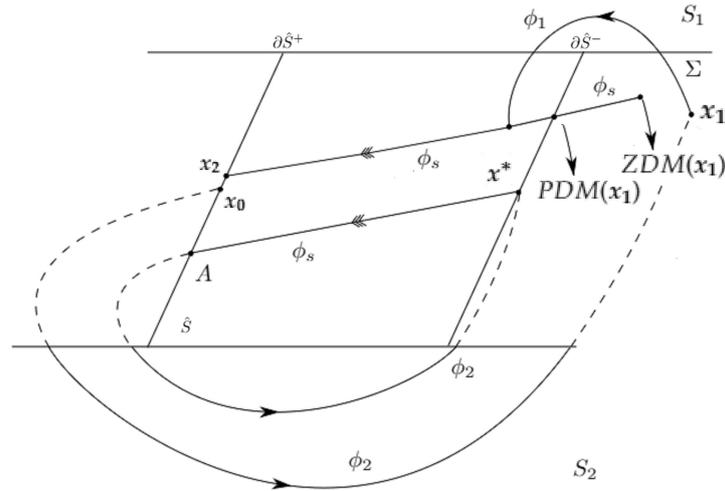


Figura 19: Comportamento da Aplicação de Poincaré para pontos de bifurcação do tipo Switching-Sliding.

Dessa forma, considere uma solução periódica de (19) partindo do ponto  $A \in \partial S^+$ . Para um ponto  $x_0 \in \partial S^+$  e algum  $T_1 \in \mathbb{R}$ , o fluxo  $\phi_2$  encontra  $\Sigma$  em  $x_1$ , ou seja  $x_1 = \phi_2(x_0, T)$ . Sob ação da PDM, encontramos o ponto  $PDM(x_1) \in \Pi_N$ , onde  $\Pi_N \subset \partial S^-$  e, para algum  $T_2 \in \mathbb{R}$ , encontramos  $x_2 \in \partial S^+$ , ou seja,  $x_2 = \phi_s(PDM(x_1), T_2)$ . A Aplicação de Poincaré  $P_N$  é a função que leva  $x_0$  a  $x_2$ , ou seja:

$$P_N(x_0) = x_2.$$

Portanto, definimos:

**Definição 3.13.** *Considere uma solução  $T$ -periódica, passando por um ponto de bifurcação  $x^*$  do tipo Switching-sliding. A aplicação de Poincaré suave por partes para pontos  $x$  em uma vizinhança de  $x^*$  é dada por:*

$$P_N(x) = \phi_s(PDM(\phi_2(x, T_1)), T_2).$$

onde  $T_1$  e  $T_2$  são tais que  $\phi_2(x, T_1) \in \Sigma$  e  $\phi_s(PDM(\phi_2(x, T_1)), T_2) \in \partial S^+$ .

De tal definição, podemos notar que  $P_N(A) = A$ , ou seja,  $A$  é ponto fixo da Aplicação de Poincaré, representando a órbita periódica que passa por  $x^*$ .

### Bifurcação Adding-Sliding

Suponha uma trajetória periódica de (19) inteiramente contida na região de sliding que tangencia  $\partial S^-$  no ponto  $x^*$ , como podemos observar na figura (20). Suponha que a

trajetória passando por  $x_2$  é uma perturbação da trajetória passando por  $x^*$ . O ponto  $x^*$  é uma bifurcação, a qual chamaremos de *adding-sliding*.

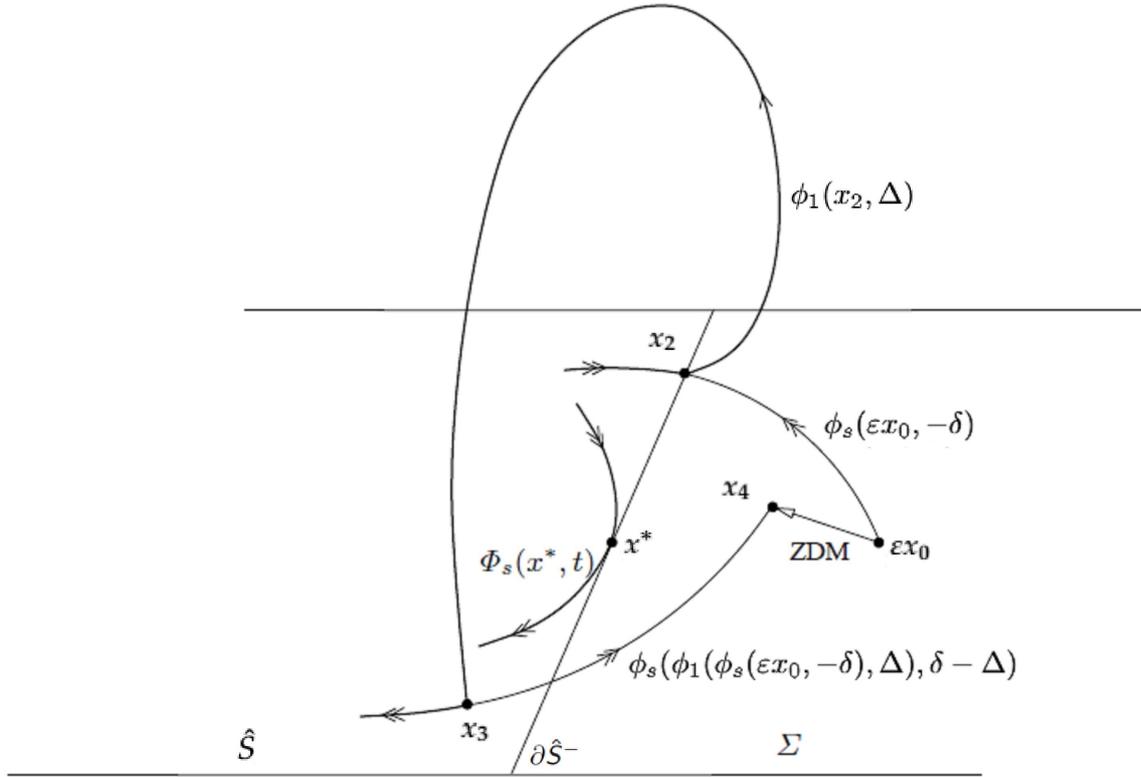


Figura 20: Comportamento dos fluxos em torno da bifurcação Adding-Sliding. Fonte: [2].

Para o presente caso, exigimos sobre o ponto de bifurcação  $x^* = 0$  as seguintes hipóteses:

- 1 –  $H(x^*) = 0; \nabla H(x^*) \neq 0;$
- 2 –  $\mathcal{L}_{F_1} H(x^*) = 0;$
- 3 –  $\mathcal{L}_{F_2} H(x^*) > 0;$
- 4 –  $\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) = 0;$
- 5 –  $\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*) < 0.$

Analogamente aos casos anteriores, as hipótese 1 indica que o ponto  $x^* = 0$  é valor regular da função  $H$  e  $x^* \in \Sigma$ . A hipótese 2 indica que  $x^* \in \partial S^-$  e a hipótese 3 indica que o fluxo  $\phi_2$  é transversal a  $\Sigma$  em  $x^*$ . As hipóteses 4 e 5 indicam que o ponto  $x^*$  é um *ponto de cúspide*, cujo comportamento está representado na figura (20).

Assim sendo, o teorema da ZDM para bifurcações do tipo adding-sliding é dado por:

**Teorema 3.14.** *Considere o sistema s.p.p. (19) e suponha que ele admite em  $x^* \in \partial\hat{S}$  um ponto de bifurcação do tipo adding-sliding. Então a ZDM :  $\Sigma \rightarrow \Sigma$ , definida numa vizinhança de  $x^*$  é dada por:*

$$ZDM(x) = \begin{cases} x, & \mathcal{L}_{F_1}H(x) \leq 0; \\ x + 3\sqrt{-2\frac{\mathcal{L}_{F_1}H(x)}{\mathcal{L}_{F_1}^3H(x^*)}\frac{\mathcal{L}_{F_1}H(x)}{\mathcal{L}_{F_2}H(x^*)}F_d(x) + O(v_1^2)}, & \mathcal{L}_{F_1}H(x) > 0; \end{cases}$$

Também temos o teorema da PDM que é dado no que segue:

**Teorema 3.15.** *Sob as hipóteses dadas no teorema (3.14), a PDM :  $\Sigma \rightarrow \Pi_N$  para um ponto de bifurcação do tipo adding-sliding, é dada por:*

$$PDM(x) = \begin{cases} x, & x \in \hat{S}; \\ P(x), & x \notin \hat{S}; \end{cases}$$

onde:

$$P(x) = x + \frac{3\mathcal{L}_{F_1}H(x)}{\mathcal{L}_{F_2}H(x^*)}\sqrt{-2\frac{\mathcal{L}_{F_1}H(x)}{\mathcal{L}_{F_1}^3H(x^*)}F_d(x) - (F_1(x) - C(x)F_d(x)) \cdot \left(\frac{\mathcal{L}_{F_2}\mathcal{L}_{F_1}H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^3H(x^*)}\mathcal{L}_{F_1}H(x)\right)} + O(v_1^2),$$

e  $x$  é o ponto inicial da ZDM.

No que segue, construiremos a ZDM e a PDM do presente caso, seguindo os seguintes passos:

- 1– Tomar o ponto inicial  $x_0 \in \Sigma \setminus \hat{S}$ ;
- 2– Sob a ação do fluxo Sliding, encontrar  $x_2 = \phi_s(\varepsilon x_0, -\delta) \in \partial\hat{S}^-$ ;
- 3– Sob ação do fluxo  $\phi_1$ , encontrar o ponto  $x_3 = \phi_1(x_2, \Delta)$ , tal que  $H(x_3) = 0$ ;
- 4– Defimos:

$$x_4 = ZDM(\varepsilon x_0) := \phi_s(\phi_1(\phi_s(\varepsilon x_0, -\delta), \Delta), \delta - \Delta).$$

- 5– Sob a ação do fluxo sliding, encontrar  $\eta \in \mathbb{R}$  de tal forma que  $\mathcal{L}_{F_s}\beta(\phi_s(x_4, \eta)) = 0$  e definir  $PDM : \Sigma \rightarrow \Pi_N$ :

$$PDM(\varepsilon x_0) = \phi_s(ZDM(\varepsilon x_0), \eta).$$

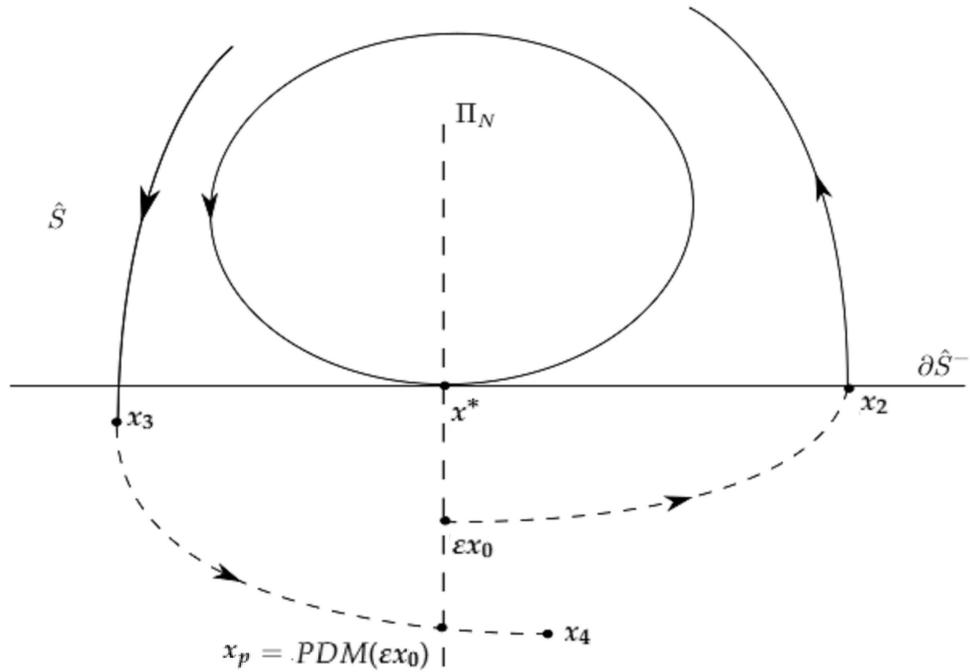


Figura 21: Comportamento local da PDM para uma bifurcação do tipo *adding-sliding*.

Precisaremos dos seguintes resultados, bastante conhecidos em EDO, cujas demonstrações podem ser encontradas na página 82 de [8]:

**Teorema 3.16. (Dependência em condições iniciais)** *Seja  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  conjunto aberto contendo o ponto  $x_0$  e assumamos que  $f \in C^1(\mathcal{A})$ . Então existe um  $a > 0$  e  $\delta > 0$  tal que, para todo  $y \in B_\delta(x_0)$ , o problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x); \\ x(0) &= y; \end{aligned}$$

tem solução única  $u(y, t)$  com  $u \in C^1(\mathcal{G})$ , onde  $\mathcal{G} = B_\delta(x_0) \times [-a, a]$ .

Como corolário, temos:

**Corolário 3.17.** *Sob as hipóteses do Teorema (3.16), temos:*

$$\Phi(y, t) = \frac{\partial u}{\partial y}(y, t); \tag{32}$$

para  $t \in [-a, a]$  e  $y \in B_\delta(x_0)$  se, e somente se  $\Phi(y, t)$  é a matriz de solução do PVI:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= D(f(u(y, t))); \\ \Phi(y, 0) &= I. \end{aligned}$$

para  $t \in [-a, a]$  e  $y \in B_\delta(x_0)$ , onde  $I$  denota a matriz identidade.

Considerando que o fluxo seja tão suave quanto queiramos, a expansão de  $\phi_i(x, t)$  em torno do ponto  $(x, t) = (0, 0)$  é dada por:

$$\phi_i(x, t) = \phi_i(0, 0) + \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(0, 0)t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2}(0, 0)t^2.$$

Usando o corolário acima, segue que:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x}(0, 0) = \Phi_i(0, 0) = I.$$

Note também que  $\phi_i(0, 0) = 0$ . Portanto, a expressão de  $\phi_i(x, t)$  pode ser reescrita como:

$$\phi_i(x, t) = x + F_i(0)t + \frac{\partial F_1}{\partial x} F_i(0) \frac{t^2}{2} + O(t^3, x^2). \quad (33)$$

*Demonstração do Teorema 3.14*

Tome  $x_0 \in \Sigma \setminus \bar{\mathcal{S}}$ . Considere  $\varepsilon$ -perturbações do ponto  $x_0$ , onde  $|\varepsilon| \ll 1$ . Primeiramente, note que:

$$F_1(x_0) = F_1(x^*) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(x^*)x_0 + O(x_0^2).$$

Logo:

$$\langle \nabla H, F_1 \rangle(x_0) = \langle \nabla H, F_1 \rangle(x^*) + \left\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x}(x^*)x_0 \right\rangle + O(x_0^2).$$

Como  $\langle \nabla H, F_1 \rangle(x^*) = \mathcal{L}_{F_1} H(x^*) = 0$ , temos:

$$\mathcal{L}_{F_1} H(x_0) \approx \left\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x}(x^*)x_0 \right\rangle + O(x_0^2). \quad (34)$$

Devemos encontrar  $\delta \in \mathbb{R}$  de tal forma que  $\langle \nabla \beta, \phi_s(\varepsilon x_0, -\delta) \rangle = 0$ . Para isso, considere o ponto  $x_2 = \phi_s(\varepsilon x_0, -\delta)$ . Expandindo a expressão de  $x_2$  em torno de  $(\varepsilon x_0, \delta) = (x^*, 0)$  e usando o fato dado na expressão (33), obtemos:

$$x_2 = \phi_s(\varepsilon x_0, -\delta) = \varepsilon x_0 - F_1(x^*)\delta + \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x^*) \frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3). \quad (35)$$

Para simplificar a notação, quando a função estiver aplicada no ponto  $x^* = 0$ , escreveremos  $F_i(0) = F_i$ . Substituindo (35) na expressão  $\langle \nabla \beta, x_2 \rangle = 0$  temos que:

$$\varepsilon \langle \nabla \beta, x_0 \rangle - \langle \nabla \beta, F_s \rangle \delta + \left\langle \nabla \beta, \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s \right\rangle \frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3) = 0. \quad (36)$$

Note que  $F_1(x^*) = F_s(x^*)$ . Pela expressão (24) e o fato de que  $\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*) = 0$ , temos  $\frac{\partial F_s}{\partial x} F_s = \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1$ . Substituindo tais expressões em (36):

$$\varepsilon \langle \nabla \beta, x_0 \rangle - \langle \nabla \beta, F_1 \rangle \delta + \langle \nabla \beta, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \rangle \frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3) = 0. \quad (37)$$

Em particular, o gradiente  $\nabla \beta(x)$  é dado por:

$$\nabla \beta(x) = - \left( \frac{\nabla \mathcal{L}_{F_1} H(x) + \nabla \mathcal{L}_{F_2} H(x)}{\mathcal{L}_{F_d} H(x)} - \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x) + \mathcal{L}_{F_2} H(x)}{\mathcal{L}_{F_d} H(x)^2} \left( \nabla \mathcal{L}_{F_2} H(x) - \nabla \mathcal{L}_{F_1} H(x) \right) \right),$$

que em  $x = x^*$ , torna-se:

$$\nabla \beta(x^*) = - \frac{2}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} \cdot \nabla \mathcal{L}_{F_1} H(x^*). \quad (38)$$

Daí:

$$\langle \nabla \beta, F_1 \rangle = - \frac{2}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} \langle \nabla \mathcal{L}_{F_1} H(x^*), F_1 \rangle = -2 \frac{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} = 0. \quad (39)$$

Em (37), usando o fato acima e isolando  $\delta$ , obtêm-se:

$$\delta(\varepsilon) = \sqrt{-2 \frac{\langle \nabla \beta, x_0 \rangle}{\langle \nabla \beta, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \rangle}} \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

e substituindo (39), podemos então concluir que:

$$\delta(\varepsilon) = \sqrt{-2 \frac{\langle \nabla \mathcal{L}_{F_1} H, x_0 \rangle}{\langle \nabla \mathcal{L}_{F_1} H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \rangle}} \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

Em particular, temos:

$$\nabla \mathcal{L}_{F_1} H(x) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x) \cdot F_1(x) + \nabla H(x) \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x}(x).$$

Como  $H$  é um hiperplano, temos  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x) = 0$ . Daí  $\nabla \mathcal{L}_{F_1} H(x) = \nabla H(x) \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x}(x)$ . Substituindo em  $\delta(\varepsilon)$ :

$$\delta(\varepsilon) = \sqrt{-2 \frac{\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} x_0 \rangle}{\langle \nabla H, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \rangle}} \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

Nesse momento, precisamos descobrir como são os termos acima em termos de derivadas de Lie. Em primeiro lugar, note que:

$$\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) = \left\langle \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x) \cdot F_1(x) + \nabla H(x) \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x}(x), F_1(x) \right\rangle,$$

e então:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x) &= \left\langle \nabla \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x) \cdot F_1(x) + \nabla H(x) \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x}(x), F_1(x) \right), F_1(x) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x) \cdot F_1(x) + \nabla H(x) \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x}(x), \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x) \right\rangle. \\ &= \left\langle \frac{\partial^3 H}{\partial x^3}(x) \cdot F_1(x) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x) \cdot F_1(x) + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x) \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x}(x) + \nabla H(x) \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(x), F_1(x), F_1(x) \right\rangle + \\ &\quad + \left\langle \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x) \cdot F_1(x) + \nabla H(x) \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \right)^2, F_1(x) \right\rangle. \\ &= \left\langle \nabla H(x), \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} F_1(x)^2 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \right)^2 F_1(x) \right\rangle. \end{aligned}$$

Em particular, estamos assumindo que  $\partial \hat{S}^-$  é localmente linear. Dessa forma:

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} = 0.$$

Usando o fato provado no apêndice 3, obtemos:

$$\left\langle \nabla H(x), \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} F_1(x)^2 \right\rangle = 0. \quad (40)$$

Logo:

$$\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x) = \left\langle \nabla H(x), \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \right)^2 F_1(x) \right\rangle. \quad (41)$$

Substituindo (41) e (34) em  $\delta$ :

$$\delta(\varepsilon) = \sqrt{-2 \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x_0)}{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}} \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

É conveniente para nós considerarmos  $\gamma = \sqrt{-2 \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x_0)}{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}}$ . Devemos agora encontrar um tempo  $\Delta > 0$ , tal que  $H(\phi_1(x_2, \Delta)) = 0$ . Expandindo tal expressão em torno de  $\Delta = 0$ :

$$H(\phi_1(x_2, \Delta)) = H(x_2) + \mathcal{L}_{F_1} H(x_2) \Delta + \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_2) \frac{\Delta^2}{2} + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x_2) \frac{\Delta^3}{6} + O(\Delta^4) = 0.$$

Do fato que  $x_2 \in \partial\hat{S}^- \subset \Sigma$ , temos  $H(x_2) = \mathcal{L}_{F_1} H(x_2) = 0$ . Daí:

$$\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_2) \frac{\Delta^2}{2} + \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x_2) \frac{\Delta^3}{6} + O(\Delta^4) = 0.$$

Como estamos supondo  $\Delta \neq 0$ , então:

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_2) + \frac{\Delta}{6} \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x_2) + O(\Delta^2) = 0. \quad (42)$$

O ponto  $x_2$  é dado pela expressão  $x_2 = \phi_s(\varepsilon x_0, -\delta)$ . Logo:

$$\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x_2) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\phi_s(\varepsilon x_0, -\delta)).$$

Expandindo a expressão acima em torno de  $\delta = 0$ :

$$\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\phi_s(\varepsilon x_0, -\delta)) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1}^3 H(\varepsilon x_0) \delta + O(\delta^2).$$

Para  $\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x_2)$ , expandindo também em torno de  $\delta = 0$

$$\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x_2) = \mathcal{L}_{F_1}^3 H(\varepsilon x_0) + O(\delta).$$

Substituindo as expressões acima em (42):

$$\frac{1}{2} \left( \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1}^3 H(\varepsilon x_0) \delta \right) + \frac{\Delta}{6} \left( \mathcal{L}_{F_1}^3 H(\varepsilon x_0) \right) + O(\delta^2, \Delta^2) = 0.$$

e tomando  $\delta(\varepsilon) = \gamma\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon)$  na expressão acima:

$$\frac{1}{2} \left( \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1}^3 H(\varepsilon x_0) (\gamma\sqrt{\varepsilon}) \right) + \frac{\Delta}{6} \left( \mathcal{L}_{F_1}^3 H(\varepsilon x_0) \right) + O(\Delta^2, \varepsilon^2) = 0.$$

Considere a função  $G(x_0, \varepsilon, \Delta) = \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1}^3 H(\varepsilon x_0) (\gamma\sqrt{\varepsilon}) \right) + \frac{\Delta}{6} \left( \mathcal{L}_{F_1}^3 H(\varepsilon x_0) \right) + O(\Delta^2, \varepsilon^2) = 0$ . Fazendo uma mudança de variável  $t = \sqrt{\varepsilon}$ , temos  $G(x_0, t, \Delta) = \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}_{F_1}^2 H(t^2 x_0) - \mathcal{L}_{F_1}^3 H(t^2 x_0) (\gamma t) \right) + \frac{\Delta}{6} \left( \mathcal{L}_{F_1}^3 H(t^2 x_0) \right) + O(\Delta^2, t) = 0$ . Além disso:

$$G(x^*, 0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial \Delta}(x^*, 0, 0) = \frac{1}{6} \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*) \neq 0.$$

Pelo teorema da função implícita, existe uma função suave  $\Delta(x_0, t)$  que anula  $G$  em uma vizinhança de  $x^* = 0$ , ou seja,  $G(x_0, t, \Delta(x_0, t)) = 0$ . Desse fato, tomando apenas os termos em  $t$  da série de Taylor de  $\Delta$ , obtemos:

$$\Delta(x_0, t) = \Delta(x^*, 0) + \frac{\partial \Delta}{\partial t}(0)t + O(t^2),$$

onde o termo  $\frac{\partial \Delta}{\partial t}(x^*, 0)$  é dado por:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t}(x^*, 0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial t}(x^*, 0, 0)}{\frac{\partial G}{\partial \Delta}(x^*, 0, 0)}.$$

Em  $G$ , temos:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x^*, 0, 0) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)\gamma.$$

Logo:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t}(x^*, 0) = -\frac{\left(-\frac{1}{2}\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)\right)\gamma}{\frac{1}{6}\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)} = 3\gamma.$$

Portanto:

$$\Delta(x_0, \varepsilon) = 3\gamma\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

Definimos:

$$ZDM(\varepsilon x_0) = \phi_s(\phi_1(\phi_s(\varepsilon x_0, -\delta), \Delta), \delta - \Delta).$$

Expandindo a expressão  $\phi_s(\phi_1(\phi_s(\varepsilon x_0, -\delta), \Delta), \delta - \Delta)$  em torno de  $\delta = \Delta = 0$ :

$$\begin{aligned} \phi_s(\phi_1(\phi_s(\varepsilon x_0, -\delta), \Delta), \delta - \Delta) &= \varepsilon x_0 + \Delta(F_1(\varepsilon x_0) - F_s(\varepsilon x_0)) + \left(\frac{\Delta^2}{2} - \delta\Delta\right) \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0)\right). \end{aligned} \quad (43)$$

Além disso, o campo  $F_s$  é dado por:

$$F_s = \frac{F_1 + F_2}{2} + \frac{F_2 - F_1}{2}\beta(x),$$

onde  $\beta(x) = -\frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x) + \mathcal{L}_{F_2} H(x)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x) - \mathcal{L}_{F_1} H(x)}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_s}{\partial x}(x) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x}(x) \right) + \frac{1}{2} \left( \nabla \beta(x) F_d(x) - \beta(x) \frac{\partial F_d}{\partial x}(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x}(x) + \nabla \beta(x) F_d(x) + \beta(x) \frac{\partial F_d}{\partial x}(x) \right). \end{aligned}$$

Aplicando no ponto  $x = x^*$ :

$$\frac{\partial F_s}{\partial x}(x^*) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x^*) + \frac{F_d}{2} \nabla \beta(x^*).$$

Temos também:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2}(x) = & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}(x) F_d(x) + \nabla \beta(x) \frac{\partial F_d}{\partial x}(x) + \right. \\ & \left. + \nabla \beta(x) \frac{\partial F_d}{\partial x}(x) + \beta(x) \frac{\partial^2 F_d}{\partial x^2}(x) \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Aplicando no ponto  $x^*$  e usando o fato de que  $\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}(x) = 0$ , obtemos:

$$\frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(x) + 2 \nabla \beta \frac{\partial F_d}{\partial x}(x) - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}(x) \right).$$

Logo:

$$\frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \nabla \beta \frac{\partial F_d}{\partial x}.$$

Pela expressão (39), temos:

$$\nabla \beta = -\frac{2}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} \nabla \mathcal{L}_{F_1} H(x^*).$$

Para encontrar o termo de ordem  $O(3/2)$ , ou seja, o termo da ordem de  $\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$  da expressão (43), precisamos expandir  $(F_1 - F_s)(\varepsilon x_0)$  em torno de  $\varepsilon = 0$ :

$$(F_1 - F_s)(\varepsilon x_0) = (F_1 - F_s)(x^*) + \frac{\partial}{\partial x}(F_1 - F_s)(x^*) \varepsilon x_0 + O((\varepsilon x_0)^2). \quad (45)$$

O termo  $\frac{\partial}{\partial x}(F_1 - F_s)(x^*) \varepsilon x_0$  é dado por:

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_1 - F_s)(x^*) \varepsilon x_0 = \varepsilon \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} x_0 - \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} x_0 + F_d \langle \nabla \beta, x_0 \rangle \right) \right),$$

ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_1 - F_s)(x^*) \varepsilon x_0 = -\frac{F_d}{2} \langle \nabla \beta, x_0 \rangle.$$

Substituindo  $\nabla \beta$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_1 - F_s)(x^*) \varepsilon x_0 = \frac{F_d}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} \langle \nabla \mathcal{L}_{F_1} H(x^*), x_0 \rangle \varepsilon.$$

Analogamente para  $\frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) - \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0)$ :

$$\frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(x^*) = \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x^*) + \frac{F_d}{2} \langle \nabla \beta, F_1 \rangle,$$

que, como  $\langle \nabla \beta, F_1 \rangle = 0$ , temos:

$$\frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(x^*) = \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x^*).$$

Em particular, note que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F_i}{\partial x} F_i \right) = \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} F_i + \frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_i}{\partial x}.$$

Portanto, os termos da expansão de  $\frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) - \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0)$  em torno de  $x^*$  são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) - \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0) &= \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x^*) - \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(x^*) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x^*) - \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(x^*) \right) \varepsilon x_0 + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} F_1 \varepsilon x_0 + \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \varepsilon x_0 - \frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2} F_s \varepsilon x_0 - \frac{\partial F_s}{\partial x} \frac{\partial F_s}{\partial x} \varepsilon x_0 + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

que, por sua vez, pode ser reescrito como:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(\varepsilon x_0) - \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s(\varepsilon x_0) = \varepsilon \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} F_1 x_0 + \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} x_0 - \frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2} F_s x_0 - \frac{\partial F_s}{\partial x} \frac{\partial F_s}{\partial x} x_0 \right) + O(\varepsilon^2).$$

O termo  $\frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2} F_s$  é dado pela soma:

$$\frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2} F_s = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} F_1 + \nabla \beta \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1.$$

enquanto que, o termo  $\frac{\partial F_s}{\partial x} \frac{\partial F_s}{\partial x}$  é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_s}{\partial x} \frac{\partial F_s}{\partial x} &= \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{F_d}{2} \nabla \beta \right) \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{F_d}{2} \nabla \beta \right) = \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{F_d}{2} \nabla \beta + \\ &\quad + \frac{F_d}{2} \nabla \beta \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{F_d}{4} \langle \nabla \beta, F_d \rangle \nabla \beta. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2} F_s x_0 + \left( \frac{\partial F_s}{\partial x} \right)^2 x_0 &= \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \right)^2 x_0 + \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{F_d}{2} \langle \nabla \beta, x_0 \rangle + \frac{F_d}{2} \langle \nabla \beta \frac{\partial F_1}{\partial x}, x_0 \rangle + \\ &\quad + \frac{F_d}{4} \langle \nabla \beta, F_d \rangle \langle \nabla \beta, x_0 \rangle + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} F_1 x_0 + \langle \nabla \beta, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \rangle x_0. \end{aligned}$$

Concluimos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} F_1 x_0 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \right)^2 x_0 - \frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2} F_s x_0 - \left( \frac{\partial F_s}{\partial x} \right)^2 x_0 &= -\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{F_d}{2} \langle \nabla \beta, x_0 \rangle - \\ &- \frac{F_d}{2} \langle \nabla \beta \frac{\partial F_1}{\partial x}, x_0 \rangle - \frac{F_d}{4} \langle \nabla \beta, F_d \rangle \langle \nabla \beta, x_0 \rangle - \langle \nabla \beta, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \rangle x_0, \end{aligned}$$

que pode ser reescrito, substituindo  $\nabla \beta$ , como sendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} F_1 x_0 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \right)^2 x_0 - \frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2} F_s x_0 - \left( \frac{\partial F_s}{\partial x} \right)^2 x_0 &= \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} F_d - \right. \\ &\left. \frac{F_d}{\mathcal{L}_{F_2} H(x_0)^2} \mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*) \mathcal{L}_{F_1} H(x_0) \right). \end{aligned}$$

Substituindo na expressão da ZDM, obtemos:

$$x_4 = \varepsilon x_0 + \Delta \left( \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} F_d \right) \varepsilon + \left( \frac{\Delta^2}{2} - \Delta \delta \right) \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} \right) \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} F_d \varepsilon + O(\varepsilon^{5/2}).$$

Em  $\Delta$ , temos  $\Delta(\varepsilon) = 3\gamma\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon)$ , que implica em dizer que  $\frac{\Delta^2}{2} = \frac{9}{2}\gamma^2 \varepsilon + O(\varepsilon) = 3\gamma^2 \varepsilon + O(\varepsilon)$ , daí:

$$\frac{\Delta^2}{2} - \Delta \delta + O(\varepsilon) = \frac{9}{2}\delta^2 - 3\delta^2 + O(\varepsilon) = \frac{3}{2}\delta^2 + O(\varepsilon).$$

Daí:

$$x_f = \varepsilon x_0 + 3\delta \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} F_d(\varepsilon x_0) + \frac{3}{2}\delta^2 \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} \right) \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} F_d \varepsilon + O(\varepsilon^{5/2}).$$

Substituindo  $\delta$ :

$$\begin{aligned} x_f = ZDM(\varepsilon x_0) &= \varepsilon x_0 + 3\sqrt{-2 \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)} \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} F_d(\varepsilon x_0)} - 3 \left( \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)^2}{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*) \mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} \right) \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} - \right. \\ &\left. - \frac{\mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} \right) F_d(\varepsilon x_0) \varepsilon + O(\varepsilon^{5/2}). \end{aligned}$$

que era o que queríamos demonstrar. ■

*Demonstração do Teorema 3.15*

Devemos projetar o ponto  $x_4 = ZDM(\varepsilon x_0)$  em  $\Pi_N$  usando o fluxo  $\phi_s$ . Para o presente caso, consideraremos  $\Pi_N = \{x \in \Sigma : \mathcal{L}_{F_s}\beta(x) = 0\} \subset \Sigma$ . Para isso, precisamos encontrar um tempo  $\eta \in \mathbb{R}$ , tal que  $\mathcal{L}_{F_s}\beta(\phi_s(x_4, \eta)) = 0$ . Eventualmente, o ponto  $\phi_s(x_4, \eta)$  pode pertencer a  $\Pi_N$ . Nesse caso,  $\eta = 0$ . Para qualquer outro caso, tomamos  $x_p = \phi_s(x_4, \eta)$  e expandimos tal expressão em torno de  $x_4$ :

$$\mathcal{L}_{F_s}\beta(x_p) = \mathcal{L}_{F_s}\beta(x_4) + \eta \mathcal{L}_{F_s}^2\beta(x_4) + O(\eta^2) = 0.$$

Pelo teorema (3.14), temos  $x_4 = \varepsilon x_0 + \frac{3}{\mathcal{L}_{F_2}H(x^*)} \sqrt{-\frac{2}{\mathcal{L}_{F_1}^3H(x^*)}} v_1 \sqrt{v_1} F_d(\varepsilon x_0) + O(v_1^2)$ , onde  $v_1 = \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)$ . Fazendo  $C_5 = \frac{3}{\mathcal{L}_{F_2}H(x^*)} \sqrt{-\frac{2}{\mathcal{L}_{F_1}^3H(x^*)}}$  e expandindo o termo  $\mathcal{L}_{F_s}\beta(x_4)$  em torno de  $\varepsilon x_0$ , obtemos:

$$\mathcal{L}_{F_s}\beta(x_4) = \mathcal{L}_{F_s}\beta(\varepsilon x_0 + C_5 v_1 \sqrt{v_1} F_d(\varepsilon x_0)) = \mathcal{L}_{F_s}\beta(\varepsilon x_0) + \left\langle \nabla \mathcal{L}_{F_s}\beta(\varepsilon x_0), C_5 v_1 \sqrt{v_1} F_d(\varepsilon x_0) \right\rangle + O(v_1^3),$$

que, por sua vez, pode ser reescrito como:

$$\mathcal{L}_{F_s}\beta(x_4) = \mathcal{L}_{F_s}\beta(\varepsilon x_0) + C_5 \mathcal{L}_{F_d}\mathcal{L}_{F_s}\beta(\varepsilon x_0) v_1 \sqrt{v_1} + O(v_1^3).$$

O termo  $\mathcal{L}_{F_s}\beta(\varepsilon x_0)$  é dado por:

$$\mathcal{L}_{F_s}\beta(\varepsilon x_0) = \langle \nabla \beta(\varepsilon x_0), F_s(\varepsilon x_0) \rangle.$$

Substituindo  $\nabla \beta(\varepsilon x_0)$  e  $F_s(\varepsilon x_0) = F_1(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0)F_d(\varepsilon x_0)$  na expressão acima:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_s}\beta(\varepsilon x_0) = & \left\langle \frac{\mathcal{L}_{F_2}H(\varepsilon x_0) + \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)}{(\mathcal{L}_{F_2}H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0))^2} \left( \nabla \mathcal{L}_{F_2}H(\varepsilon x_0) - \nabla \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0) \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\nabla \mathcal{L}_{F_2}H(\varepsilon x_0) + \nabla \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2}H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)}, F_1(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0)F_d(\varepsilon x_0) \right\rangle, \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_s}\beta(\varepsilon x_0) = & \frac{\mathcal{L}_{F_2}H(\varepsilon x_0) + \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)}{(\mathcal{L}_{F_2}H(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0))^2} \left( \mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_d}H(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0)\mathcal{L}_{F_d}^2H(\varepsilon x_0) \right) - \\ & - \frac{1}{\mathcal{L}_{F_d}H(\varepsilon x_0)} \left( \mathcal{L}_{F_1}\mathcal{L}_{F_2+F_1}H(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0)\mathcal{L}_{F_d}\mathcal{L}_{F_2+F_1}H(\varepsilon x_0) \right). \end{aligned}$$

O termo  $\mathcal{L}_{F_d}\mathcal{L}_{F_s}\beta(x_1)$  é dado por:

$$\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_s} \beta(\varepsilon x_0) = \langle \nabla \mathcal{L}_{F_s} \beta(\varepsilon x_0), F_d(\varepsilon x_0) \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}(\varepsilon x_0) F_s(\varepsilon x_0) + \nabla \beta(\varepsilon x_0) \frac{\partial F_s}{\partial x}(\varepsilon x_0), F_d(\varepsilon x_0) \right\rangle,$$

e como  $\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} = 0$ , temos:

$$\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_s} \beta(\varepsilon x_0) = \left\langle \nabla \beta(\varepsilon x_0) \frac{\partial F_s}{\partial x}(\varepsilon x_0), F_d(\varepsilon x_0) \right\rangle.$$

Substituindo  $\frac{\partial F_s}{\partial x}(\varepsilon x_0)$  e usando a bilinearidade do produto interno:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_s} \beta(\varepsilon x_0) &= \left\langle \nabla \beta(\varepsilon x_0), \left( \frac{\partial F_1}{\partial x}(\varepsilon x_0) - \nabla C(\varepsilon x_0) F_d(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \frac{\partial F_d}{\partial x}(\varepsilon x_0) \right) F_d(\varepsilon x_0) \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla \beta(\varepsilon x_0), \frac{\partial F_1}{\partial x}(\varepsilon x_0) F_d(\varepsilon x_0) \right\rangle - \left\langle \nabla \beta(\varepsilon x_0), F_d(\varepsilon x_0) \right\rangle \left\langle \nabla C(\varepsilon x_0), F_d(\varepsilon x_0) \right\rangle - \\ &\quad - C(\varepsilon x_0) \left\langle \nabla \beta(\varepsilon x_0), \frac{\partial F_d}{\partial x}(\varepsilon x_0) F_d(\varepsilon x_0) \right\rangle, \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como:

$$\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_s} \beta(\varepsilon x_0) = \mathcal{L}_{F_{1,x} F_d} \beta(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \mathcal{L}_{F_{d,x} F_d} \beta(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_d} C(\varepsilon x_0) \mathcal{L}_{F_d} \beta(\varepsilon x_0).$$

Substituindo  $\nabla C(\varepsilon x_0)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_s} \beta(\varepsilon x_0) &= \mathcal{L}_{F_{1,x} F_d} \beta(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \mathcal{L}_{F_{d,x} F_d} \beta(\varepsilon x_0) - \left( \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)^2} \mathcal{L}_{F_d}^2 H(\varepsilon x_0) \right) \mathcal{L}_{F_d} \beta(\varepsilon x_0). \end{aligned}$$

O termo  $\mathcal{L}_{F_s}^2 \beta(\varepsilon x_0)$  é dado por:

$$\mathcal{L}_{F_s}^2 \beta(\varepsilon x_0) = \langle \nabla \mathcal{L}_{F_s} \beta(\varepsilon x_0), F_s(\varepsilon x_0) \rangle = \left\langle \nabla \beta(\varepsilon x_0), \frac{\partial F_s}{\partial x}(\varepsilon x_0) F_s(\varepsilon x_0) \right\rangle.$$

Substituindo  $\frac{\partial F_s}{\partial x}$  e  $F_s$ :

$$\mathcal{L}_{F_s}^2 \beta(\varepsilon x_0) = \left\langle \nabla \beta, \left( \frac{\partial F_1}{\partial x}(\varepsilon x_0) - \nabla C(\varepsilon x_0) F_d(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \frac{\partial F_d}{\partial x}(\varepsilon x_0) \right) (F_1(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) F_d(\varepsilon x_0)) \right\rangle.$$

Novamente fazendo uso da bilinearidade do produto interno, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_s}^2 \beta(\varepsilon x_0) &= \mathcal{L}_{F_1, x F_1} \beta(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \mathcal{L}_{F_1, x F_d} \beta(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_d} \beta(\varepsilon x_0) \left( \frac{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)^2} \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0) \right) + C(\varepsilon x_0) \mathcal{L}_{F_d} \beta(\varepsilon x_0) \left( \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)^2} \mathcal{L}_{F_d}^2 H(\varepsilon x_0) \right) - C(\varepsilon x_0) \mathcal{L}_{F_d, x F_1} \beta(\varepsilon x_0) + C(\varepsilon x_0)^2 \mathcal{L}_{F_d, x F_d} \beta(\varepsilon x_0). \end{aligned}$$

Note que:

$$\mathcal{L}_{F_s} \beta(x_p) = \mathcal{L}_{F_s} \beta(\varepsilon x_0) + C_5 \cdot \mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_s} \beta(\varepsilon x_0) v_1 \sqrt{v_1} + \mathcal{L}_{F_s}^2 \beta(\varepsilon x_0) \eta + O(\eta^2, v_1^3) = 0.$$

Substituindo as expressões encontradas na expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_s} \beta(x_p) &= \mathcal{L}_{F_1} \beta(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \mathcal{L}_{F_d} \beta(\varepsilon x_0) + C_5 \left( \mathcal{L}_{F_1, x F_d} \beta(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \mathcal{L}_{F_d, x F_d} \beta(\varepsilon x_0) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} - \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)^2} \mathcal{L}_{F_d}^2 H(\varepsilon x_0) \right) \mathcal{L}_{F_d} \beta(\varepsilon x_0) \right) v_1 \sqrt{v_1} + \\ &\quad + \eta \left( \mathcal{L}_{F_1, x F_1} \beta(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \mathcal{L}_{F_1, x F_d} \beta(\varepsilon x_0) - \mathcal{L}_{F_d} \beta(\varepsilon x_0) \left( \frac{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)^2} \mathcal{L}_{F_1} \mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0) \right) + C(\varepsilon x_0) \mathcal{L}_{F_d} \beta(\varepsilon x_0) \left( \frac{\mathcal{L}_{F_d} \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_d} H(\varepsilon x_0)^2} \mathcal{L}_{F_d}^2 H(\varepsilon x_0) \right) - C(\varepsilon x_0) \mathcal{L}_{F_d, x F_1} \beta(\varepsilon x_0) + C(\varepsilon x_0)^2 \mathcal{L}_{F_d, x F_d} \beta(\varepsilon x_0) \right) + O(\eta^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo  $G(x_0, v_1, \eta) = \mathcal{L}_{F_1} \beta(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \mathcal{L}_{F_d} \beta(\varepsilon x_0) + \dots$ , note que:

$$G(x^*, 0, 0) = 0.$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}(x^*, 0, 0) = \mathcal{L}_{F_1, x F_1} \beta(x^*).$$

Analisando o termo  $\mathcal{L}_{F_1, x F_1} \beta(x^*)$ :

$$\mathcal{L}_{F_1, x F_1} \beta(x^*) = \left\langle \nabla \beta, \frac{\partial F_1}{\partial x} F_1(x^*) \right\rangle = -\frac{2}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)} \left\langle \nabla H, \frac{\partial F_1^2}{\partial x} F_1 \right\rangle,$$

que, por sua vez, como foi encontrado no caso *adding-sliding*, temos:

$$\left\langle \nabla H, \frac{\partial F_1^2}{\partial x} F_1 \right\rangle = \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*) \neq 0.$$

Logo:

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}(x^*, 0, 0) = -2 \frac{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)}.$$

que, por sua vez não se anula devido às hipóteses do ponto  $x^*$ . Portanto:

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}(x^*, 0, 0) \neq 0.$$

Pelo TFI, existe uma função suave  $\eta(x_0, v_1)$  que anula  $G$ , ou seja,  $G(x_0, v_1, \eta(x_0, v_1)) = 0$  sendo que  $\eta(\varepsilon x_0, v_1)$  pode ser aproximada por sua série de Taylor em torno de  $(x^*, 0)$ . Tomando os termos em  $v_1 = \mathcal{L}_{F_1} H(\varepsilon x_0)$  da série de Taylor de  $\eta$ , temos:

$$\eta(x_0, v_1) = \eta(x^*, 0) + \frac{\partial \eta}{\partial v_1}(x^*, 0)v_1 + O(v_1^2).$$

O termo  $\frac{\partial \eta}{\partial v_1}(x^*, 0)$  é dado por:

$$\frac{\partial \eta}{\partial v_1}(x^*, 0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial v_1}(x^*, 0, 0)}{\frac{\partial G}{\partial \eta}(x^*, 0, 0)}.$$

Em particular, temos que:

$$\frac{\partial G}{\partial v_1}(x^*, 0, 0) = \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \mathcal{L}_{F_1} \beta(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0) \mathcal{L}_{F_d} \beta(\varepsilon x_0) \right) \Bigg|_{\varepsilon x_0 = x^*},$$

que, sendo  $\mathcal{L}_{F_1} \beta(x^*) = 0$ , temos:

$$\frac{\partial G}{\partial v_1}(x^*, 0, 0) = \frac{2}{\mathcal{L}_{F_2} H(x^*)^2} \mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*).$$

Substituindo em  $\eta$ :

$$\eta(x_0, v_1) = \frac{\mathcal{L}_{F_2} \mathcal{L}_{F_1} H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x^*)} v_1 + O(v_1^2).$$

Definimos a PDM por:

$$x_p = PDM(\varepsilon x_0) = \phi_s(x_4, \eta) = x_4 + F_s(x_4)\eta + O(\eta^2).$$

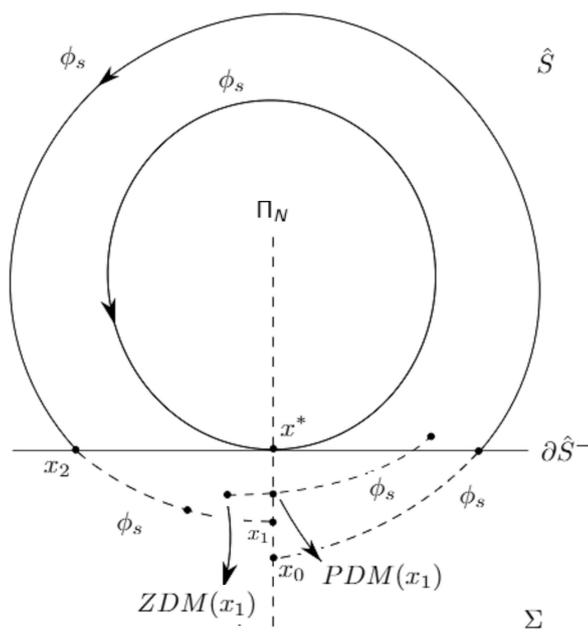


Figura 22: Comportamento local da PDM e ZDM para o caso Adding-sliding.

Em  $F_s(x_4)$ , temos:

$$F_s(x_4) = F_s(\varepsilon x_0) + O((\varepsilon x_0)^2).$$

Daí:

$$x_p = x_4 + (F_1(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0)F_d(\varepsilon x_0))\eta + O(\eta^2).$$

Substituindo  $\eta$  e  $x_4$ :

$$PDM(\varepsilon x_0) = \varepsilon x_0 + \frac{3\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_2}H(x^*)} \sqrt{-2\frac{\mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0)}{\mathcal{L}_{F_1}^3H(x^*)}F_d(\varepsilon x_0) - (F_1(\varepsilon x_0) - C(\varepsilon x_0)F_d(\varepsilon x_0))} \cdot \left( \frac{\mathcal{L}_{F_2}\mathcal{L}_{F_1}H(x^*)}{\mathcal{L}_{F_1}^3H(x^*)} \mathcal{L}_{F_1}H(\varepsilon x_0) \right) + O(v_1^2).$$

que é a expressão final da PDM. ■

Dessa forma, levando em consideração o exposto sobre as aplicações ZDM e PDM, podemos então construir a aplicação de Poincaré suave por partes associada à bifurcações do tipo adding-sliding. Primeiramente, considere a figura (22), que representa o comportamento local em  $\Sigma$  das aplicações PDM e ZDM para o caso adding-sliding, próximas a uma órbita periódica de (19) passando por  $x^*$ .

Para um ponto inicial  $x_0 \in \Pi_N$ , sob ação do fluxo  $\phi_s$  encontramos o ponto  $x_1 \in \Pi_N$ , para algum tempo  $T_1 \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $x_1 = \phi_s(x_0, T_1)$ . Sob ação das aplicações ZDM e

PDM, encontramos o ponto  $PDM(x_1) \in \Pi_N$ . Com essas informações, definimos a Aplicação de Poincaré  $P_N$  para pontos de bifurcação do caso adding-sliding como sendo a aplicação que leva  $x_0$  a  $PDM(x_1)$ , ou seja:

$$P_N(x_0) = PDM(x_1).$$

Então, podemos definir:

**Definição 3.18.** *Suponha uma solução periódica de (19), de período  $T_1$ , que passa por um ponto de bifurcação do tipo adding-sliding e considere a superfície  $\Pi_N = \{x \in \Sigma : L_{F_s}\beta(x) = 0\}$ . A aplicação de Poincaré suave por partes para pontos  $x$  em uma vizinhança do ponto de bifurcação  $x^*$  é dada pela função  $P_N : \Pi_N \longrightarrow \Pi_N$  definida como:*

$$P_N(x) = PDM(\phi_s(x, T_1)).$$

sendo que a expressão da PDM é dada pelo teorema (3.15).

Com tal definição, podemos notar que  $P_N(x^*) = x^*$ , ou seja, o ponto de bifurcação  $x^*$  é um ponto fixo da Aplicação de Poincaré que, por sua vez, representa a órbita periódica que passa pelo ponto  $x^*$ .



# 4

## APLICAÇÕES

### 4.1 OSCILADORES

A fim de concluirmos nosso trabalho, faremos o estudo de um sistema dinâmico suave por partes, com objetivo de encontrar as bifurcações que estudamos e fazer uso das aplicações que demonstramos. O sistema escolhido é motivado por um problema mecânico conhecido por *dry-friction oscillator* (oscilador de atrito seco, em uma tradução literal), que consiste em um bloco anexado a uma mola sobre uma esteira, onde desejamos entender como esse bloco se movimenta em função da velocidade angular do eixo, fornecida no problema. Para chegarmos nas equações do modelo estudado, utilizamos as ideias dos trabalhos [5] e [7].

Consideremos então as equações que modelam nosso problema:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + ky &= \alpha_1 \operatorname{sgn}(\dot{y} - \rho\dot{\theta}) + \varepsilon(-\alpha_2(\dot{y} - \rho\dot{\theta}) + \alpha_3(\dot{y} - \rho\dot{\theta})^3). \\ J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} &= M + n\rho\mu \operatorname{sgn}(\dot{y} - \rho\dot{\theta}). \end{aligned} \quad (46)$$

Nas equações acima, temos  $y$  como sendo o deslocamento do bloco,  $\ddot{y}$  a aceleração do bloco em relação a velocidade da esteira,  $m$  é a massa do bloco,  $(\dot{y} - \rho\dot{\theta})$  é a velocidade relativa entre o bloco e a esteira, que por sua vez, depende do raio  $\rho$  do eixo de rotação. Das constantes restantes,  $k$  é a constante elástica da mola e  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , e  $\mu, b$  são constantes de atrito, sendo que o termo  $\alpha_1 \operatorname{sgn}(\dot{y} - \rho\dot{\theta}) + \varepsilon(-\alpha_2(\dot{y} - \rho\dot{\theta}) + \alpha_3(\dot{y} - \rho\dot{\theta})^3)$  é chamado de *coeficiente de atrito de Coulomb*.

Esse termo pode ser entendido da seguinte forma: a constante  $\alpha_1$  é o módulo do coeficiente de atrito estático multiplicado pela força normal assumida sobre a superfície de atrito. Os termos restantes  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  são motivados pelo fato de que a amplitude do atrito dinâmico é tipicamente menor que o atrito estático para pequenas velocidades relativas  $(\dot{y} - \rho\dot{\theta})$ . O termo  $b$  é o atrito viscoso no motor da correia de transporte,  $\rho$  é o raio do eixo da esteira,  $n$  a força normal,  $M$  o torque do motor,  $J$  o momento de inércia e  $\theta$  o ângulo de rotação do eixo esteira. Além disso, os termos  $\dot{\theta}$  e  $\ddot{\theta}$  representam,

respectivamente, a velocidade e a aceleração do eixo da esteira. Todas as constantes são estritamente positivas e  $\varepsilon$  é uma pequena perturbação.

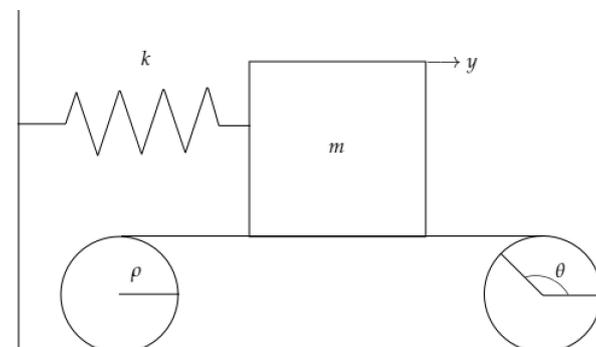


Figura 23: Situação modelada pelas equações em (46).

Considerando a seguinte mudança de variáveis  $x_1 = \frac{y}{\rho}$ ,  $x_2 = \left(\frac{\dot{y}}{\rho} - \dot{\theta}\right) \sqrt{\frac{m}{k}}$ ,  $x_3 = \theta$ ,  $x_4 = \dot{\theta} \sqrt{\frac{m}{k}}$  e a mudança de escala temporal  $t = \tau \sqrt{\frac{k}{m}}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_4. \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \beta_4 x_4 + \gamma_5 + \varepsilon(-\hat{\alpha}_2 x_2 + \gamma_3 x_2^3) + \gamma_4 \operatorname{sgn}(x_2). \\ \dot{x}_3 &= x_4. \\ \dot{x}_4 &= -\beta_4 x_4 + \gamma_5 + \operatorname{sgn}(x_2). \end{aligned} \quad (47)$$

onde  $\beta_4 = \frac{b}{J} \sqrt{\frac{m}{k}}$ ,  $\gamma_5 = \frac{M}{\mu \rho n}$ ,  $\gamma_3 = \frac{\rho^4 \alpha_3 (\mu n)^2 m}{J^2 k} \sqrt{\frac{m}{k}}$ ,  $\hat{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{\sqrt{km}}$ ,  $\gamma_4 = \left(\frac{\alpha_1 J}{\rho^2 \mu n m} - 1\right)$  e  $\varepsilon > 0$  é uma pequena perturbação.

Em (47), a variável  $x_3$  aparece apenas na terceira equação. Portanto, reduziremos nosso estudo ao sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_4. \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \beta_4 x_4 + \gamma_5 + \varepsilon(-\hat{\alpha}_2 x_2 + \gamma_3 x_2^3) + \gamma_4 \operatorname{sgn}(x_2). \\ \dot{x}_4 &= -\beta_4 x_4 + \gamma_5 + \operatorname{sgn}(x_2). \end{aligned} \quad (48)$$

Esse sistema suave por partes em particular, tem como fronteira de descontinuidade o conjunto  $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_4) \in \mathbb{R}^3 : H(x_1, x_2, x_4) = 0\}$ , onde  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é  $H(x_1, x_2, x_4) = x_2$ . Dessa forma, o sistema se apresenta como:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_4), & (x_1, x_2, x_4) \in S_1. \\ F_2(x_1, x_2, x_4), & (x_1, x_2, x_4) \in S_2. \end{cases} \quad (49)$$

sendo que  $S_1 = \{(x_1, x_2, x_4) \in \mathbb{R}^3 : H(x_1, x_2, x_4) > 0\}$ ,  $S_2 = \{(x_1, x_2, x_4) \in \mathbb{R}^3 : H(x_1, x_2, x_4) < 0\}$  e os campos vetoriais  $F_1$  e  $F_2$  são dados por:

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_2 + x_4 \\ -x_1 + \beta_4 x_4 - \gamma_5 + \varepsilon(-\hat{\alpha}_2 x_2 + \gamma_3 x_2^3) + \gamma_4 \\ -\beta_4 x_4 + \gamma_5 + 1 \end{bmatrix}, \quad (50)$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_2 + x_4 \\ -x_1 + \beta_4 x_4 - \gamma_5 + \varepsilon(-\hat{\alpha}_2 x_2 + \gamma_3 x_2^3) - \gamma_4 \\ -\beta_4 x_4 + \gamma_5 - 1 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

A proposição a seguir descreve o comportamento do fluxo desse sistema em regiões próximas à fronteira  $\Sigma$ :

**Proposição 4.1.** *Para o sistema (49), a fronteira de descontinuidade  $\Sigma$  é dividida como segue:*

- (i) *A região de costura é dada por  $\{x \in \Sigma : |x_1 - \beta_4 x_4 + \gamma_5| > |\gamma_4|\}$ .*
- (ii) *Se  $\text{sgn}(\gamma_4) = 1$ , não existe região de sliding e a região de escape é dada por  $\hat{E} = \{x \in \Sigma : |x_1 - \beta_4 x_4 + \gamma_5| < |\gamma_4|\}$ .*
- (iii) *Se  $\text{sgn}(\gamma_4) = -1$ , não existe região de escape e a região de sliding é dada por  $\hat{S} = \{x \in \Sigma : |x_1 - \beta_4 x_4 + \gamma_5| < |\gamma_4|\}$ .*
- (iv) *Se  $\gamma_4 = 0$ , não existem regiões de escape e sliding.*

*Demonstração:* Considerando que  $\mathcal{L}_{F_1}H(x) = -x_1 + \beta_4 x_4 + \gamma_4 - \gamma_5$  e  $\mathcal{L}_{F_2}H(x) = -x_1 + \beta_4 x_4 - \gamma_4 - \gamma_5$ , obtemos  $\mathcal{L}_{F_1}H(x) \cdot \mathcal{L}_{F_2}H(x) = (x_1 - \beta_4 x_4 + \gamma_5)^2 - \gamma_4^2$ . A desigualdade  $\mathcal{L}_{F_1}H(x) \cdot \mathcal{L}_{F_2}H(x) > 0$  resulta em  $|x_1 - \beta_4 x_4 + \gamma_5| > |\gamma_4|$ , e obtemos (i).

Suponha agora  $\text{sgn}(\gamma_4) = 1$ . É fácil ver que  $\mathcal{L}_{F_1}H(x) > \mathcal{L}_{F_2}H(x)$ . Portanto, não existe região de sliding. A região de escape é dada quando  $\mathcal{L}_{F_2}H(x) < 0 < \mathcal{L}_{F_1}H(x)$ . A desigualdade  $\mathcal{L}_{F_1}H(x) \cdot \mathcal{L}_{F_2}H(x) < 0$  resulta em  $\hat{E} = \{x \in \Sigma : |x_1 - \beta_4 x_4 + \gamma_5| < |\gamma_4|\}$ , e obtemos (ii). Agora, suponhamos  $\text{sgn}(\gamma_4) = -1$ . Claramente obtemos  $\mathcal{L}_{F_1}H(x) < \mathcal{L}_{F_2}H(x)$ . Portanto, não existe região de escape e analogamente ao item (ii), obtemos  $\hat{S} = \{x \in \Sigma : |x_1 - \beta_4 x_4 + \gamma_5| < |\gamma_4|\}$ , como em (iii). O caso onde  $\gamma_4 = 0$ , implica em  $\mathcal{L}_{F_1}H(x) = \mathcal{L}_{F_2}H(x)$ . Dessa forma, não existe região de sliding nem escape. Concluimos o teorema. ■

Em nosso estudo, consideraremos  $\gamma_4 < 0$ . Nesse caso, o campo vetorial (49) tem região de sliding onde a definimos utilizando o método de controle de Utkin, dado em [9]. Tal campo é apresentado na seguinte proposição:

**Proposição 4.2.** *O campo vetorial sliding  $F_s$  do campo s.p.p. (49) é dado por:*

$$F_s(x_1, x_2, x_4) = \begin{bmatrix} x_4 \\ 0 \\ \frac{1}{\gamma_4}(x_1 - \beta_4 x_4(1 - \gamma_4) + \gamma_5(1 + \gamma_4)) \end{bmatrix}. \quad (52)$$

*Demonstração:* A forma geral para o campo  $F_s$  é dada pela expressão (20), sendo que  $\eta(x, p)$  tem a seguinte forma  $\eta(x, \gamma_4, \beta_4, \gamma_5) = -\frac{1}{\gamma_4}(x_1 - x_4\beta_4 + \gamma_5)$ , onde  $x = (x_1, x_2, x_4) \in \mathbb{R}^3$ . Substituindo tal expressão em

$$F_s = \frac{F_1 + F_2}{2} + \eta \cdot \frac{F_2 - F_1}{2}, \quad (53)$$

obtemos o resultado. ■

#### *Propriedades do sistema*

Relembrando da definição de ponto de equilíbrio para campos s.p.p., dada em (2.13), a proposição que segue fornece algumas propriedades que nos serão úteis nesse estudo.

**Proposição 4.3.** *São válidas as seguintes propriedades:*

- (i) O sistema (48) admite os planos invariantes  $\Pi_{\pm} = \left\{ (x_1, x_2, x_4) \in \mathbb{R}^3 : x_4 = \frac{\pm 1 + \gamma_5}{\beta_4} \right\}$ ,
- (ii) O campo vetorial  $F_1$  não possui pontos de equilíbrio admissíveis. Além disso, o campo  $F_2$  tem um único ponto de equilíbrio admissível, dado por  $(x_1, x_2, x_4) = \left( -(1 + \gamma_4) + \varepsilon \left( \frac{\alpha_2}{\beta_4}(\gamma_5 - 1) - \frac{\gamma_3}{\beta_4^3}(\gamma_5 - 1)^3 \right), \frac{1 - \gamma_5}{\beta_4}, \frac{\gamma_5 - 1}{\beta_4} \right)$  se e somente se,  $\gamma_5 > 1$ .

*Demonstração:* Da última equação do sistema (48) obtemos diretamente (i).

Resolvendo o sistema  $F_1(x_1, x_2, x_3) = 0$ , obtemos:

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \left( (1 + \gamma_4) + \varepsilon \left( \frac{\alpha_2}{\beta_4}(\gamma_5 + 1) - \frac{\gamma_3}{\beta_4^3}(\gamma_5 + 1)^3 \right), -\frac{1 + \gamma_5}{\beta_4}, \frac{\gamma_5 + 1}{\beta_4} \right). \quad (54)$$

Como  $\frac{1 + \gamma_5}{\beta_4} > 0$ , temos que  $\bar{x}_2 = -\frac{1 + \gamma_5}{\beta_4} < 0$ , para quaisquer valores de  $\gamma_5$  e  $\beta_4$ . Dessa forma  $x_2 \notin S_1$ . Portanto, o ponto de equilíbrio de  $F_1$  é não-admissível. Considerando o campo  $F_2$ , resolvendo  $F_2(x_1, x_2, x_3) = 0$ , obtemos:

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \left( -(1 + \gamma_4) + \varepsilon \left( \frac{\alpha_2}{\beta_4} (\gamma_5 - 1) - \frac{\gamma_3}{\beta_4^3} (\gamma_5 - 1)^3 \right), \frac{1 - \gamma_5}{\beta_4}, \frac{\gamma_5 - 1}{\beta_4} \right). \quad (55)$$

Consequentemente  $x_2 = \frac{1 - \gamma_5}{\beta_4} < 0$  se e somente se  $\gamma_5 > 1$ , haja vista que  $\beta_4 > 0$ . Obtemos o resultado. ■

O próximo resultado garante a existência de soluções periódicas para o sistema (48) sempre que  $\varepsilon = 0$

**Proposição 4.4.** *Restrito ao plano invariante  $\Pi_-$ , o campo  $F_2$  tem, para  $\varepsilon = 0$ , um ponto de equilíbrio do tipo centro em  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ .*

*Demonstração:* De fato, tomando  $\varepsilon = 0$  no campo  $F_2$  e restringindo ao plano invariante  $\Pi_-$  temos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \frac{\gamma_5 - 1}{\beta_4}, \\ \dot{x}_2 &= -1 - x_1 - \gamma_4. \end{aligned} \quad (56)$$

É fácil ver que tal sistema é linear e tem um ponto de equilíbrio em  $\bar{x} = (-1 - \gamma_4, \frac{1 - \gamma_5}{\beta_4})$  do tipo centro. ■

A partir de agora, investigaremos a existência de ciclos limite para o sistema (48). Para este fim, faremos uso do método *Averaging de primeira ordem* para garantir condições de existência para tais ciclos sempre que  $\varepsilon \simeq 0^+$ .

O teorema *Averaging*, cuja demonstração pode ser encontrada na página 169 de [10], é dado por:

**Teorema 4.5. (Método Averaging de primeira ordem)** *Considere  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e considere um sistema de EDO's do tipo:*

$$\dot{x} = \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 f_2(t, x, \varepsilon), \quad (57)$$

onde  $f_1 : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f_2 : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \longrightarrow \mathbb{R}^n$  são funções contínuas,  $T$ -periódicas na primeira variável. Definimos o campo médio como sendo  $h_0 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfazendo:

$$h_0(z) = \int_0^T f_1(t, z) dz, \quad (58)$$

Assumindo que:

(i)  $f_1, f_2, \frac{\partial f_1}{\partial x}$  e  $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}$  são funções bem definidas, contínuas e limitadas por uma constante  $M$  (independente de  $\varepsilon$ ) no subconjunto  $[0, \infty) \times \mathcal{D}$ , sendo que  $-\varepsilon_f < \varepsilon < \varepsilon_f$ .

(ii) Se  $h_0(a) = 0$ , para algum  $a \in \mathcal{D}$ , tem-se  $\det(Dh_0(a)) \neq 0$ .

Então, para  $|\varepsilon| > 0$  suficientemente pequeno, existe uma solução  $T$ -periódica  $\varphi$  dependente de  $\varepsilon$  tal que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$  sempre que  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Usando esse teorema, queremos mostrar o seguinte resultado:

**Teorema 4.6.** Para  $\varepsilon \simeq 0^+$  e  $\hat{\alpha}_2 - \frac{3\gamma_3(-1 + \gamma_5)^2}{\beta_4^2} > 0$ , o sistema (48) admite um ciclo limite inteiramente contido em  $S_2$ .

*Demonstração:* É suficiente considerarmos o campo  $F_2$  restrito ao plano invariante  $\Pi_-$ , dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \frac{\gamma_5 - 1}{\beta_4}, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(-\alpha_2 x_2 + \gamma_3 x_2^3) - \gamma_4 - 1. \end{aligned} \quad (59)$$

e o ponto de equilíbrio

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \left( -1 - \gamma_4 + \varepsilon \left( \hat{\alpha}_2 \frac{\gamma_5 - 1}{\beta_4} - \gamma_3 \frac{(\gamma_5 - 1)^3}{\beta_4^3} \right), \frac{1 - \gamma_5}{\beta_4} \right). \quad (60)$$

Através da translação do ponto de equilíbrio para a origem e usando coordenadas polares  $x_1 = r \cos \theta$  e  $x_2 = r \sin \theta$ , reescrevemos o sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r \varepsilon \sin^2 \theta \left( -\hat{\alpha}_2 + \frac{3\gamma_3(-1 + \gamma_5^2)}{\beta_4^2} - \frac{3r\gamma_3(-1 + \gamma_5) \sin \theta}{\beta_4} + \right. \\ &\quad \left. + r^2 \gamma_3 \sin^2 \theta \right), \\ \dot{\theta} &= -1 + \varepsilon \left( -\hat{\alpha}_2 \cos \theta \sin \theta + \frac{3\gamma_3(-1 + \gamma_5^2) \cos \theta \sin \theta}{\beta_4^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3r\gamma_3(-1 + \gamma_5) \cos \theta \sin^2 \theta}{\beta_4} + r^2 \gamma_3 \cos \theta \sin^3 \theta \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Associado a esse sistema, considere a equação auxiliar:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} = & r\epsilon \sin^2 \theta \left( -\hat{\alpha}_2 + \frac{3\gamma_3(-1 + \gamma_5)^2}{\beta_4^2} + \frac{3r\gamma_3(-1 + \gamma_5) \sin \theta}{\beta_4} - r^2\gamma_3 \sin^2 \theta \right) - \\ & - r\epsilon^2 \cos \theta \sin^3 \theta \left( -\hat{\alpha}_2 + \frac{3\gamma_3(-1 + \gamma_5)^2}{\beta_4^2} + \frac{3r\gamma_3(-1 + \gamma_5) \sin \theta}{\beta_4} - \right. \\ & \left. - r^2\gamma_3 \sin^2 \theta \right)^2 + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (62)$$

Note que esta equação está na forma canônica para aplicar o método Averaging. Nesse caso, o campo médio é dado por:

$$h_0(r) = \frac{1}{4}\pi \left( 4\hat{\alpha}_2 - 3r^2\gamma_3 - \frac{12\gamma_3(-1 + \gamma_5)^2}{\beta_4^2} \right). \quad (63)$$

cujos zeros são:

$$r^\pm = \pm \frac{2}{\sqrt{3\gamma_3}} \sqrt{\hat{\alpha}_2 - \frac{3\gamma_3(-1 + \gamma_5)^2}{\beta_4^2}}. \quad (64)$$

Além disso, temos:

$$\frac{dh_0}{dr}(r^\pm) = \pm \pi \epsilon \left( \sqrt{3\gamma_3 \left( \hat{\alpha}_2 - \frac{3\gamma_3(-1 + \gamma_5)^2}{\beta_4^2} \right)} \right) \neq 0. \quad (65)$$

Como  $\gamma_3 > 0$ , concluímos que  $\frac{dh_0}{dr}(r^\pm) \neq 0$  em  $\mathbb{R}$ , se e somente se  $\hat{\alpha}_2 - \frac{3\gamma_3(-1 + \gamma_5)^2}{\beta_4^2} > 0$ .

Portanto, sempre que tomarmos  $\hat{\alpha}_2 - \frac{3\gamma_3(-1 + \gamma_5)^2}{\beta_4^2} > 0$ , o sistema (49) admite uma solução  $2\pi$ -periódica satisfazendo  $\phi_2 \rightarrow r^+$  sempre que  $\epsilon \rightarrow 0$ . Observando a terceira equação do campo  $F_2$  no sistema de Filippov (49), é fácil ver que o campo  $F_2$  é contrativo fora do semiplano  $\Pi_-$ . Consequentemente, o campo (49) tem uma solução  $2\pi$ -periódica inteiramente contida em  $S_2$ . ■

### Bifurcações de ciclos limite

Nessa seção, estudaremos que tipo de bifurcações sliding surgem do sistema (48). Inicialmente, vamos supor que o sistema tem um ciclo limite  $\Gamma$ ,  $2\pi$ -periódico contido em  $\bar{S}_2$ , tangente a  $\Sigma$  em  $x^*$ , satisfazendo as condições do teorema averaging. O resultado seguinte exhibe algumas propriedades do sistema (48).

**Lema 4.7.** *Suponha que o sistema (48) admita órbita  $2\pi$ -periódica  $\Gamma$ , tangente a  $\Sigma$  inteiramente contida em  $S_2$ . As seguintes propriedades são válidas:*

(i)  $\Gamma \subset \Pi_-$ ,

(ii) O ponto de tangência  $\Gamma \cap \Sigma = \{x^*\}$  é dado por:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_4^*) = \left( -\gamma_4 - 1, 0, \frac{\gamma_5 - 1}{\beta_4} \right).$$

*Demonstração:* Considerando que a dinâmica fora do plano é contrativa, é fácil ver (i). Para (ii), o ponto  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_4^*)$  deve satisfazer  $\mathcal{L}_{F_2}H = 0$ . Usando tal equação e o fato de  $x_2^* = 0$  e  $x_4^* = \frac{\gamma_5 - 1}{\beta_4}$  obtemos (ii). ■

Neste momento, podemos enunciar o principal resultado desse capítulo, resumido no teorema a seguir.

**Teorema 4.8.** *Considere o sistema (49) e suponha  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \phi_2(x^*, t), 0 \leq t \leq 2\pi\}$  solução  $2\pi$ -periódica do tipo grazing-sliding. Esta solução está contida em  $S_2 \cap \Pi_-$  e encontra  $\Sigma$  no ponto de tangência quadrática  $x^*$ , dado no lema (4.7). Temos também:*

(i) *Quando vista como órbita suave,  $\Gamma$  é hiperbólica e instável, para quaisquer valores admissíveis de parâmetro.*

(ii) *Quando vista como órbita sliding, para qualquer raiz do polinômio (104),  $\Gamma$  é não-hiperbólica. Além disso, para uma vizinhança suficientemente próxima de  $p^*$ , considerando  $v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p) > 0$ , temos os seguintes cenários:*

(a) *Sob a condição  $v_0(p) > 0$ ,  $v_2(p) > 0$  e  $v_4(p) > 0$ , existe uma única solução periódica com uma pequena evolução do fluxo sliding contida em  $S_2 \cup \overline{\Sigma_S}$  bifurcando de  $\Gamma$ .*

(b) *Sob a condição  $v_0(p) > 0$ ,  $v_2(p) > 0$  e  $v_4(p) < 0$ , coexistem duas soluções periódicas, com uma pequena evolução do fluxo sliding contidas em  $S_2 \cup \overline{\Sigma_S}$  que bifurcam de  $\Gamma$ .*

(c) *Sob a condição  $v_0(p) < 0$ ,  $v_2(p) > 0$  e  $v_4(p) > 0$ , existe uma solução periódica suave inteiramente contida em  $S_2$  bifurcando de  $\Gamma$  e não existem soluções periódicas sliding.*

As ferramentas necessárias para a demonstração do teorema (4.8) bem como as funções  $v_0(p)$ ,  $v_2(p)$  e  $v_4(p)$  serão construídas na demonstração dos teoremas (4.9) e (4.11), mais especificamente, a partir dos sistemas de equações (73) e (76). As expressões gerais de  $v_0(p)$ ,  $v_2(p)$  e  $v_4(p)$  serão dadas na observação (4.10) e nas expressões em (85).

Para o estudo das bifurcações de  $\Gamma$  apresentadas no teorema (4.8), faremos uso da função  $P_N : \Pi_N \times \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathcal{D}$ , dada pela expressão:

$$P_N(x, p) = \begin{cases} P(\phi_2(x, 2\pi, p), p) & , \text{ se } H(\phi_2(x, 2\pi, p)) \leq 0. \\ g(P(\phi_2(x, 2\pi, p), p), p) & , \text{ se } H(\phi_2(x, 2\pi, p)) \geq 0. \end{cases} \quad (66)$$

onde  $p = (m, k, n, \mu, \rho, J, b, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varepsilon, M) \in \mathbb{R}^{12}$ ,  $P : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^{12} \rightarrow \Pi_N$  é a projeção sobre a superfície  $\Pi_N = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{L}_{F_2}H(x, p) = 0\}$ , usando o fluxo  $\phi_2$  pelo menor caminho possível de  $F_2$ , dada por:

$$P(x, p) = x - \frac{\mathcal{L}_{F_2}H(x, p)}{\mathcal{L}_{F_2}^2H(x^*, p^*)}F_2(x, p) \quad (67)$$

e  $g : \Pi_N \times \mathbb{R}^{12} \rightarrow \Pi_N$  é o mapa de descontinuidade ZDM para o campo  $F_2$ . Tal mapa tem a forma

$$g(x, p) = x + \beta(x, y, p)y^2 + O(y^3). \quad (68)$$

onde  $y = \sqrt{H_{max}(x, p)}$  e  $\beta(x, y, p) = \frac{F_d(x, p)}{\mathcal{L}_{F_1}H(x, p)}$ . O fato da função  $P$  fazer uso da menor trajetória possível de  $F_2$  está associada à construção da aplicação de Poincaré, dada pelo teorema (.17) (que se encontra no apêndice 1), haja vista que a aplicação  $\tau(x)$  em geral, não é conhecida. A função  $\tau$  calcula o tempo necessário à evolução do fluxo para atingir a superfície  $\Pi_N$ . Dito isto, a aplicação  $P$  'completa' o ciclo, projetando o ponto sobre a superfície desejada  $\Pi_N$ .

Para as trajetórias que não envolvem sliding, a primeira expressão  $P(\phi_2(x, 2\pi, p), p)$  é a aplicação de Poincaré clássica associada à órbita  $\Gamma$ . Para trajetórias que envolvem evoluções do fluxo sliding, note que a segunda expressão não necessariamente mapeia pontos para  $\Pi_N$ . Dessa forma, tal expressão não representa a aplicação de Poincaré suave por partes associada a  $\Gamma$ , mas como as aplicações PDM e ZDM são conjugadas, a aplicação  $P_N$  é localmente equivalente a ela. As construções associadas às aplicações  $P$  e  $g$  serão dadas no apêndice 4.

Primeiramente, note que  $\Gamma$  pode ser vista de duas formas: contendo uma pequena porção de fluxo sliding, dada pelo ponto  $x^*$ , ou como órbita suave. Quando consideramos que  $\Gamma$  tangencia  $\Sigma$  em  $x^*$ , dizemos que ocorre uma bifurcação do tipo *grazing-sliding*, lembrando que  $x^*$  satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} H(x^*, p) &= 0 \text{ e } H_x(x^*, p) \neq 0; \\ \mathcal{L}_{F_2}H(x^*, p) &= 0; \\ \mathcal{L}_{F_2}^2H(x^*, p) &< 0; \\ \mathcal{L}_{F_d}H(x^*, p) &\neq 0. \end{aligned} \quad (69)$$

A fim de determinar as ferramentas necessárias ao estudo de uma órbita como  $\Gamma$ , na próxima subsecção faremos um estudo teórico de um sistema de Filippov com duas zonas, que possui uma solução periódica em contato tangente com a fronteira de descontinuidade satisfazendo as hipóteses acima.

#### 4.1.1 Considerações teóricas

Considere um sistema de Filippov do tipo:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, p), & x \in S_1. \\ F_2(x, p), & x \in S_2. \end{cases} \quad (70)$$

que admite uma solução  $T^*$ -periódica da forma  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi_2(x^*, t, p^*) = x, 0 \leq s \leq T^*\} \subset S_2$  satisfazendo  $H(\phi_2(x^*, s, p^*)) \leq 0$  e  $H(\phi_2(x^*, s, p^*)) = 0$  sempre que  $s \equiv 0 \pmod{T^*}$ , onde  $p \in \mathbb{R}^m$  é um ponto no espaço de parâmetros  $\mathbb{R}^m$ . Faremos uso da aplicação  $P_N : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{D}$ , escrita na forma:

$$P_N(x, p) = \begin{cases} P(\phi_2(x, T^*, p), p) & , \text{ se } H(\phi_2(x, T^*, p)) \leq 0. \\ g(P(\phi_2(x, T^*, p), p), p) & , \text{ se } H(\phi_2(x, T^*, p)) \geq 0. \end{cases} \quad (71)$$

para o estudo das bifurcações sliding que emergem de  $\Gamma$  no espaço de parâmetros. Suponhamos também que  $\Gamma$  é hiperbólica quando vista como órbita periódica suave de  $F_2$  (isto é, ponto fixo hiperbólico da aplicação de Poincaré clássica associada ao campo  $F_2$ ) e não-hiperbólica quando vista como órbita periódica sliding (isto é, ponto fixo não-hiperbólico da aplicação de Poincaré suave por partes associada). Usando as expressões dadas em (68) e (67), as derivadas de  $P(\phi_2(x^*, T^*, p), p)$  e  $g(P(\phi_2(x^*, T^*, p), p), p)$  em relação à variável  $x$  são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} A^* &= \left( I - \frac{F_2(x^*, p^*) \cdot (\mathcal{L}_{F_2} H)_x(x^*, p)}{\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x^*, p)} \right) \cdot \phi_{2,x}(x^*, T^*, p^*), \\ A_s^* &= \left( I - \beta(x^*, 0, p^*) H_x(x^*, p^*) \right) \cdot A^*. \end{aligned} \quad (72)$$

onde  $(\mathcal{L}_{F_2} H)_x(x^*, p) = \frac{\partial \mathcal{L}_{F_2} H}{\partial x}(x^*, p)$ ,  $H_x(x^*, p) = \frac{\partial H}{\partial x}(x^*, p)$  e  $\phi_{2,x}(x^*, T^*, p^*) = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x^*, T^*, p^*)$ .

#### *Órbitas periódicas suaves*

O próximo resultado fornecerá ferramentas para o estudo de órbitas periódicas de  $F_2$  contidas em  $S_2$  que bifurcam de  $\Gamma$ .

**Teorema 4.9.** *Considere um sistema de Filippov do tipo (70) tendo para  $p = p^*$  uma solução  $T^*$ -periódica hiperbólica (se vista como suave) tangente a  $\Sigma$  em  $x^*$  satisfazendo as condições (69). Então, existem funções suaves  $\bar{x}(p)$  e  $\bar{T}(p)$  bem definidas em uma vizinhança de  $p^*$  satisfazendo:*

$$\begin{aligned} \bar{x} - \phi_2(\bar{x}, \bar{T}, p) &= 0, \\ \mathcal{L}_{F_2}H(\bar{x}, p) &= 0. \end{aligned} \tag{73}$$

*Demonstração:* Considere a função  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dada por:

$$f(t, x, p) = \begin{bmatrix} x - \phi_2(x, t, p) \\ \mathcal{L}_{F_2}H(x, p) \end{bmatrix}.$$

Note que:

$$f(x^*, T^*, p^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para  $z = (t, x)$ , considerando  $J = \phi_{2,x}(x, t, p)$ ,  $V = (\mathcal{L}_{F_2}H)_x(x, p)$  e  $F_2^* = F_2(x^*, p^*)$  obtemos:

$$f_z(z^*, p^*) = \begin{bmatrix} I - J^* & -F_2^* \\ V^* & 0 \end{bmatrix}.$$

onde  $f_z$  denota a derivada de  $f$  em relação à variável  $z$ . O determinante de  $f_z(z^*, p^*)$  é dado por:

$$\det(f_z(z^*, p^*)) = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x^*, p^*) \cdot \det(I - A^*). \tag{74}$$

onde  $A^* = \left( I - \frac{F_2^* \cdot (\mathcal{L}_{F_2}H)_x(x^*, p)}{\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x^*, p)} \right) \phi_{2,x}(x^*, T^*, p) = P_x(\phi_2(x^*, T^*, p^*), p^*)$ . Pelas condições dadas em (69), temos  $\mathcal{L}_{F_2}H(x^*, p^*) < 0$  e como  $\Gamma$  é hiperbólica, obtemos  $\det(I - A^*) \neq 0$ . Logo  $\det(f_z(T, x^*, p^*)) \neq 0$ .

Sendo  $f_z(z^*, p^*)$  matriz não singular (isto é,  $\det(f_z(z^*, p^*)) \neq 0$ ), o teorema da função implícita garante a existência de funções suaves  $\bar{x}(p)$  and  $\bar{T}(p)$  bem definidas em uma vizinhança de  $p = p^*$ , tal que:

$$f(\bar{x}(p), \bar{T}(p), p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, obtemos o resultado. ■

**Observação 4.10.** *Note que, associada com a solução  $\bar{x}(p)$  obtida no teorema anterior, podemos definir a função real:*

$$v_0(p) = H(\bar{x}(p), p), \tag{75}$$

Neste caso,  $\bar{x}(p)$  corresponde a um ponto de uma órbita periódica admissível do sistema (70), se e somente se  $v_0(p) < 0$ .

### Órbitas periódicas sliding

O próximo resultado fornece ferramentas para estudarmos a existência de órbitas periódicas sliding que emanam do ponto de bifurcação  $x^*$ :

**Teorema 4.11.** *Considere o sistema de Filippov (70), tendo para  $p = p^*$  uma solução  $T^*$ -periódica não-hiperbólica (se vista como sliding) de  $F_2$ , tangente a  $\Sigma$  em  $x^*$  satisfazendo (69). Então existe uma função suave  $x'(p, y)$  bem definida em uma vizinhança de  $(p^*, 0)$  e  $T'' \in \mathbb{R}$  satisfazendo:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_2}H(x', p) &= 0, \\ x' - \phi_2(x'', T'', p) &= 0, \\ x'' - g(x', p, y) &= 0, \\ y^2 - H(x', p) &= 0. \end{aligned} \tag{76}$$

Além disso, a linearização de  $g(P(\phi_2(x', T'', p), p), p)$  dada por:

$$\Lambda = g_x(x', p) \cdot P_x(x', p) \cdot \phi_{2,x}(x'', T'', p) \tag{77}$$

tem autovalor 1 se, e somente se,  $1 - H_x(\bar{x}, p)\bar{A}(I - \bar{A})^{-1}\bar{\beta} = 0$  e  $H_x(\bar{x}(p), p)\bar{A}(I - \bar{A})^{-2}\bar{\beta} \neq 0$ , onde  $\bar{x}(p)$  é o ponto fixo obtido no teorema (4.9) e  $\bar{\beta} = \frac{F_d(\bar{x}(p), p)}{\mathcal{L}_{F_1}H(\bar{x}(p), p)}$ .

**Observação 4.12.** O ponto  $x'$  está associado com a solução periódica de (70) que contém uma pequena porção sliding conforme indicamos na figura (24). Dessa forma, se  $1 \in S_\Lambda$ , significa que, quando vista como órbita periódica sliding, tal solução é não-hiperbólica.

*Demonstração do teorema 4.11:* Considere a função:  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dada por:

$$f(x, t, y, p) = x - P(\phi_2(t, x''(x, y, p), p), p)$$

onde  $x''$  é a expressão da ZDM associada ao campo  $F_2$ , dada pela terceira equação de (76).

Note que:

$$f_x(x, t, y, p) = I - P_x(\phi_2(t, x'', p), p)\phi_{2,x}(t, x'', p) \frac{\partial x''}{\partial x}(x, y, p). \tag{78}$$

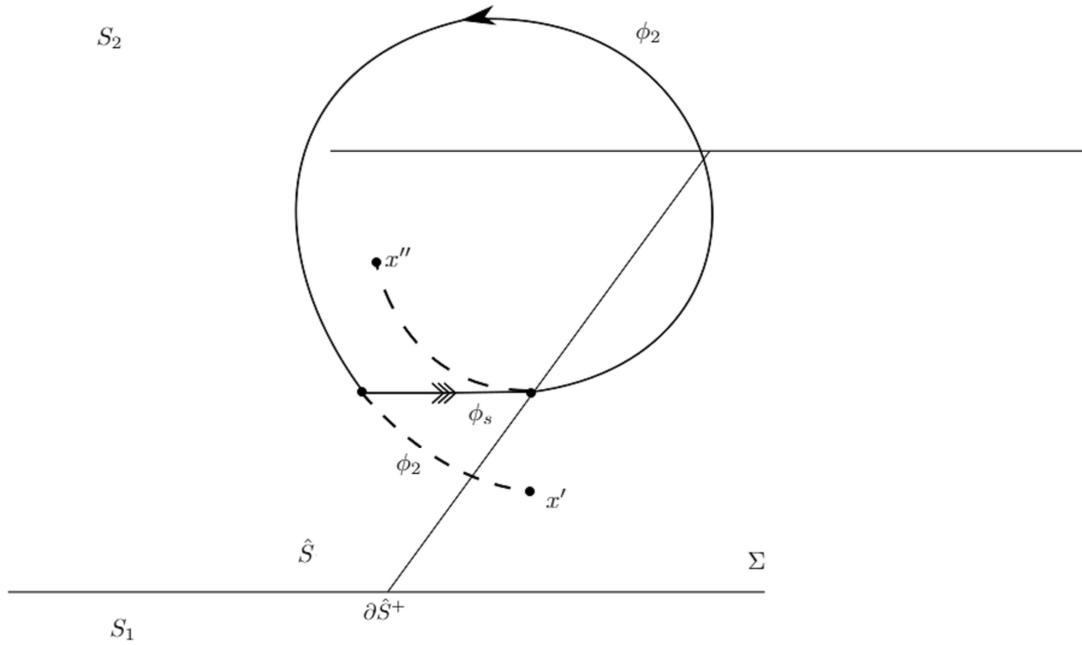


Figura 24: Solução periódica com pequena porção sliding, representada pelo sistema (76)

Aplicando a expressão acima em  $(\bar{x}(p), \bar{T}(p), 0, p)$ :

$$\begin{aligned} f_x(\bar{x}(p), \bar{T}(p), 0, p) &= I - P_x(\bar{x}(p), p)\phi_{2,x}(\bar{x}(p), \bar{T}(p), p) \\ &= I - \bar{A}. \end{aligned}$$

Do fato que  $\Gamma$  é solução  $T^*$ -periódica hiperbólica quando vista como suave, obtemos:  $\det(I - \bar{A}) \neq 0$ . Além disso,  $f(\bar{x}, \bar{T}, 0, p) = \bar{x} - \bar{x} = 0$ .

Novamente pelo teorema da função implícita, existe  $x'$  em uma vizinhança de  $\bar{x}$  tal que:

$$f(x'(t, y, p), t, y, p) = 0, \tag{79}$$

para  $(t, y, p) \in V_{(\bar{T}, 0, p^*)}$ , onde  $V_{(\bar{T}, 0, p^*)}$  é uma vizinhança suficientemente pequena de  $(\bar{T}, 0, p^*)$ .

Como queremos resolver o sistema (76), devemos mostrar que o ponto  $x'$  satisfaz todas as condições esperadas. Primeiramente, temos

$$x' = P(\phi_2(x'', t, p), p). \tag{80}$$

Do fato que  $P$  é a projeção suave em  $\Pi_N$  (ver 67), obtemos  $x' \in \Pi_N$ . Consequentemente, deve existir  $T'' \in \mathbb{R}$  satisfazendo:

$$x' = \phi_2(T'', x'', p).$$

Isto implica que  $x'$  satisfaz a primeira e segunda equações de (76). Em particular, a terceira equação de (76) afirma que  $x''$  é a ZDM de  $x'$ . Consequentemente  $x'$  satisfaz todas as afirmações requeridas.

Observando a quarta equação de (76) e considerando  $y$  como variável independente, em  $y = 0$  notamos que  $\bar{x} = x' = x''$  e  $\bar{T} = T''$ . Como o teorema da função implícita nos garante  $x'(t, p, y)$  como função tão suave quanto  $f$ , podemos expandí-la em séries de Taylor em torno de  $y = 0$  como segue:

$$x'(y, p) = x'(0, p) + \frac{\partial x'}{\partial y}(0, p)y + \frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}(0, p)\frac{y^2}{2} + \frac{\partial^3 x'}{\partial y^3}(0, p)\frac{y^3}{6} + \frac{\partial^4 x'}{\partial y^4}(0, p)\frac{y^4}{24} + O(y^5) \quad (81)$$

onde obtemos as derivadas de  $x'$  em relação a  $y$  de  $f(t, x'(y, p), y, p) = 0$ . Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} x'(0, p) &= \bar{x}(p). \\ \frac{\partial x'}{\partial y}(p, 0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}(0, p) &= 2\bar{A}(I - \bar{A})^{-1}\bar{\beta}. \\ \frac{\partial^3 x'}{\partial y^3}(0, p) &= 6\bar{A}(I - \bar{A})^{-1}\bar{\beta}_y. \\ \frac{\partial^4 x'}{\partial y^4}(0, p) &= (I - \bar{A})^{-1} \left[ 12\bar{A}\beta_{yy}(\bar{x}, 0, p) + 12 \left[ \left( P_{xx}(\bar{x}, p) \bar{J}^2 + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + P_x(\bar{x}, p)\phi_{2,xx}(\bar{T}, \bar{x}, 2\pi) \right) \beta(\bar{x}, 0, p) + \bar{A}\beta_x(\bar{x}, 0, p) \right] \\ &\quad 2(I - \bar{A})^{-1}\bar{A}\beta(\bar{x}, 0, p) + 3 \left( P_{xx}(\bar{x}, p)\phi_{2,x}(\bar{T}, \bar{x}, 2\pi)^2 + \right. \\ &\quad \left. P_x(\bar{x}, p)\phi_{2,xx}(\bar{T}, \bar{x}, p) \right) 4((I - \bar{A})^{-1}\bar{A}\beta(\bar{x}, p))^2 \right]. \end{aligned} \quad (82)$$

Portanto, a função  $x'(y, p)$  é da forma:

$$x'(y, p) = \bar{x}(p) + \bar{A}(I - \bar{A})^{-1}(\beta + y\beta_y)y^2 + \frac{\partial^4 x'}{\partial y^4}(0, p)\frac{y^4}{24} + O(y^5) \quad (83)$$

Substituindo tal expressão na equação  $y^2 - H(x', p)$  e expandindo em séries de Taylor em torno de  $y = 0$ , tomando apenas os termos em  $y$ , obtemos:

$$\begin{aligned} -H(\bar{x}(p), p) + \left( 2 - H_x(\bar{x}(p), p) \frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}(0, p) \right) \frac{y^2}{2} + \left( -H_x(\bar{x}(p), p) \frac{\partial^3 x'}{\partial y^3}(0, p) \right) \frac{y^3}{6} \\ + \left( -H_x(\bar{x}(p), p) \frac{\partial^4 x'}{\partial y^4}(0, p) \right) \frac{y^4}{24} + O(y^5) = 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Substituindo (82) na expressão anterior e considerando:

$$\begin{aligned} v_2(p) &= 1 - H_x(\bar{x}(p), p)\bar{A}(I - \bar{A})^{-1}\bar{\beta}, \\ v_3(p) &= -H_x(\bar{x}(p), p)\bar{A}(I - \bar{A})^{-1}\bar{\beta}_y, \\ v_4(p) &= -\frac{1}{24}H_x(\bar{x}(p), p)\frac{\partial^4 x'}{\partial y^4}(0, p) \end{aligned} \quad (85)$$

do fato que  $x'_y(0, p) = 0$  podemos reescrever (84) da seguinte maneira:

$$-v_0(p) + v_2(p)y^2 + v_3(p)y^3 + v_4(p)y^4 + O(y^5) = 0. \quad (86)$$

o que conclui a primeira parte do teorema.

No que segue, inicialmente precisamos das expressões das matrizes  $g_x(P(\phi_2(x'', T'', p), p), p)$  e  $P_x(x'(p, y), p)\phi_{2,x}(T'', x'', p)$ . Considerando  $y$  como dependente de  $x$  e computando a derivada da terceira equação de (76) (que é o mapa de descontinuidade ZDM, dado pela expressão (68)) em relação à variável  $x$ , obtemos

$$g_x(x'(t, y), p) = I + \beta_x(x', p, y)y^2 + \left( \beta(x', p, y) + \frac{1}{2}\beta_y(x', p, y)y \right) 2y_x y. \quad (87)$$

Derivando  $y^2 - H(x', p) = 0$  em relação a variável  $x$ , nós obtemos  $2y_x y - H_x(x', p) = 0$ . Substituindo na equação anterior:

$$g_x(x'(p, y), p) = I + \beta_x(x', p, y)y^2 + \left( \beta(x', p, y) + \frac{1}{2}\beta_y(x', p, y)y \right) H_x(x', p). \quad (88)$$

Agora, expandindo  $g_x(x'(p, y), p)$  em torno de  $y = 0$ , obtemos:

$$g_x(x'(p, y), p) = \left( I + \left( \beta(\bar{x}(p), p, 0) + \frac{3}{2}\beta_y(\bar{x}(p), p, 0) \right) H_x(\bar{x}, p) \right) + O(y^2). \quad (89)$$

Analogamente, expandindo  $P_x(x'(p, y), p)\phi_{2,x}(x'', T'', p)$  em torno de  $(x, t, y, p) = (\bar{x}(p), \bar{T}(p), p, 0)$  temos que:

$$P_x(x'(p, y), p)\phi_{2,x}(x'', T'', p) = P_x(\bar{x}(p), p)\phi_{2,x}(\bar{x}(p), \bar{T}(p), p) + O(y). \quad (90)$$

Finalmente, considerando  $\bar{\beta} = \beta(\bar{x}(p), p, 0)$ ,  $\bar{\beta}_y = \beta_y(\bar{x}(p), p, 0)$  e substituindo (90) e (89) em  $\Lambda$ , obtemos:

$$\Lambda = \left( I + \left( \bar{\beta} + \frac{3}{2}\bar{\beta}_y y \right) H_x(\bar{x}(p), p) \right) (\bar{A} + O(y)). \quad (91)$$

isto é,

$$\Lambda = \bar{A} + O(y) + \left( \bar{\beta} + \frac{3}{2}\bar{\beta}_y y \right) (H_x(\bar{x}(p), p)\bar{A} + O(y^2)). \quad (92)$$

O polinômio característico de  $\Lambda$  é dado por:

$$\det(\lambda I - \Lambda) = \det\left(\lambda I - \bar{A} - \left(\bar{\beta} + \frac{3}{2}\bar{\beta}_y y\right)(H_x(\bar{x}(p), p)\bar{A})\right) + O(y^2) = 0. \quad (93)$$

Do fato que

$$\det(M + NR) = \det(M)(1 + R \cdot M^{-1} \cdot N).$$

para qualquer matriz invertível  $M$ , vetor coluna  $N$  e vetor linha  $R$ , nós obtemos:

$$\det(\lambda I - \Lambda) = \det(\lambda I - \bar{A})\left(1 - H_x(\bar{x}(p), p)\bar{A}(\lambda I - \bar{A})^{-1}\left(\bar{\beta} + \frac{3}{2}\bar{\beta}_y y\right)\right) + O(y^2) = 0. \quad (94)$$

Se  $\lambda$  não é autovalor de  $\bar{A}$ , devemos ter:

$$\left(1 - H_x(\bar{x}(p), p)\bar{A}(\lambda I - \bar{A})^{-1}\left(\bar{\beta} + \frac{3}{2}\bar{\beta}_y y\right)\right) + O(y^2) = 0.$$

Como  $\bar{x}(p)$  é órbita  $\bar{T}$ -periódica hiperbólica dada pelo teorema (4.9), podemos expandir a expressão anterior em torno de  $\lambda = 1$  para obter:

$$1 - H_x(\bar{x}(p), p)\bar{A}(I - \bar{A})^{-1}\left(\bar{\beta} + \frac{3}{2}\bar{\beta}_y y\right) - H_x(\bar{x}(p), p)\bar{A}(I - \bar{A})^{-2}\bar{\beta}(\lambda - 1) + O((\lambda - 1)^2, y) = 0$$

Aplicando em  $y = 0$  e notando que  $v_2(p) = 1 - H_x(\bar{x}(p), p)\bar{A}(I - \bar{A})^{-1}\bar{\beta}$ , nós obtemos:

$$v_2(p) - H_x(\bar{x}(p), p)\bar{A}(I - \bar{A})^{-2}\bar{\beta}(\lambda - 1) + O((\lambda - 1)^2) = 0. \quad (95)$$

Como  $v_2(p) - H_x(\bar{x}(p), p)\bar{A}(I - \bar{A})^{-2}\bar{\beta}(\lambda - 1) + O((\lambda - 1)^2) = 0$  e usando a hipótese inicial  $H_x(\bar{x}(p), p)\bar{A}(I - \bar{A})^{-2}\bar{\beta} \neq 0$ , segue que  $\lambda = 1$  se e somente se  $v_2(p) = 0$ . ■

**Observação 4.13.** Este teorema fornece as expressões das funções  $v_2(p)$ ,  $v_3(p)$  e  $v_4(p)$ , necessárias à demonstração do teorema (4.8).

#### Condição de existência para órbitas sliding

Observando a equação (86), esta nos dá as informações necessárias para a existência ou não de órbitas periódicas sliding. No que segue, faremos um estudo da equação:

$$-v_0(p) + v_2(p)y^2 + v_3(p)y^3 + v_4(p)y^4 + O(y^5) = 0. \quad (96)$$

De acordo com o teorema (4.9), se para algum valor de parâmetro  $p^*$  a órbita sliding tem autovalor 1, então  $v_0(p^*) = v_2(p^*) = 0$ . Dessa forma, através da análise em sequência

do sinal dos elementos  $v_0, v_2, v_3$  e  $v_4$  podemos concluir sobre a existência de tais órbitas. Em particular, quando (96) tem uma raiz dupla positiva, devemos ter:

$$2v_2(p)y + 3v_3(p)y^2 + 4v_4(p)y^3 + O(y^4) = 0. \quad (97)$$

Portanto, se garantirmos condições para a existência de certo  $y > 0$  satisfazendo (96) e (97), ocorre um fenômeno conhecido como bifurcação *sela-nó* (quando duas órbitas periódicas com porções *sliding* se 'chocam', formando uma única).

No que segue, faremos a demonstração do teorema (4.8). Visto que encontrar a solução periódica  $\Gamma$  do problema é tão difícil quanto analisá-la, não faremos esse processo neste trabalho. Estamos supondo que tal solução  $\Gamma$  existe e satisfaz as condições que precisamos.

#### 4.1.2 Estudo da órbita $\Gamma$

Em se tratando da solução analítica para o campo vetorial  $F_2$ , expandindo as soluções  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  em séries de Taylor em torno de  $\varepsilon = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{11}(t) + \varepsilon x_{12}(t) + O(\varepsilon^2), \\ x_2(t) &= x_{21}(t) + \varepsilon x_{22}(t) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (98)$$

onde  $x_{11}(t)$  e  $x_{21}(t)$  são soluções do sistema dado por  $F_2$  quando  $\varepsilon = 0$ . Além disso, escreveremos  $x_{ij}(0) = \hat{x}_{ij}$  e, conseqüentemente

$$\begin{aligned} x_{11}(0) + \varepsilon x_{12}(0) &= \hat{x}_{11} + \varepsilon \hat{x}_{12}, \\ x_{21}(0) + \varepsilon x_{22}(0) &= \hat{x}_{21} + \varepsilon \hat{x}_{22}. \end{aligned} \quad (99)$$

Portanto, a primeira aproximação do fluxo em  $\varepsilon = 0$  é da forma

$$\phi_2((\hat{x}_{11} + \varepsilon \hat{x}_{12}, \hat{x}_{21} + \varepsilon \hat{x}_{22}, \hat{x}_4), t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) + \varepsilon x_{12}(t) \\ x_{21}(t) + \varepsilon x_{22}(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}. \quad (100)$$

onde  $x_4(t)$  é dada pela solução da terceira equação de (51).

Considerando os autovalores da linearização da Aplicação de Poincaré clássica, dada pela matriz  $A^* = P_x(x^*, p) \cdot \phi_{2,x}(x^*, 2\pi, p)$ , denotando  $S_{A^*}$  como o conjunto dos autovalores de  $A^*$ , desconsiderando o autovalor trivial 1, obtemos:

$$S_{A^*} = \{1 + \varepsilon, e^{-2\beta_4\pi}\}. \quad (101)$$

que, como  $\beta_4 > 0$  e  $1 + \varepsilon > 1$ , podemos concluir que, quando vista como órbita suave,  $\Gamma$  é *instável*, o que mostra o item (i) do teorema (4.8).

Considerando agora a matriz  $A_s^* = g_x(x^*, p) \cdot P_x(x^*, p) \cdot \phi_{2,x}(x^*, 2\pi, p)$ , obtemos:

$$S_{A_s^*} = \{0, \lambda(p)\}. \quad (102)$$

onde  $p = (b, J, M, \mu, \rho, n, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{10}$ . Para simplificar a expressão geral de  $\lambda(p)$ , consideraremos  $m = k = 1$ . A saber:

$$\lambda(p) = e^{-\frac{2b\pi}{J}} \frac{\zeta_1(p)}{\zeta_2(p)}, \quad (103)$$

onde

$$\begin{aligned} \zeta_1(p) &= 4b^{10}\eta_0 J \alpha_2 \varepsilon + 48b^8 \eta_0 J^3 \alpha_2 \varepsilon + 92b^6 \eta_0 J^5 \alpha_2 \varepsilon + 4b^{11} \left( -2 + e^{\frac{2b\pi}{J}} \eta_2 + \frac{J\alpha_1}{n\mu\rho^2} \right) + \\ &+ 504b^2 \eta_0 J^7 \alpha_3 \varepsilon \rho^2 \eta_1^2 - 432 \eta_0 J^9 \alpha_3 \varepsilon \rho^2 \eta_1^2 - 756b e^{\frac{2b\pi}{J}} J^8 \pi \alpha_3 \varepsilon \rho^2 \eta_1^2 - 72b^4 \eta_0 J^5 \varepsilon \\ &(2J^2 \alpha_2 + \alpha_3 \rho^2 \eta_1^2) + b^5 J^4 \left( 4J^2 \left( 13 + 85e^{\frac{2b\pi}{J}} \eta_2 + 85\gamma_4 \right) - 1323e^{\frac{2b\pi}{J}} \pi \alpha_3 \varepsilon \rho^2 \eta_1^2 \right) + \\ &+ 3b^3 J^6 \left( 48J^2 \left( e^{\frac{2b\pi}{J}} \eta_2 + \frac{J\alpha_1}{n\mu\rho^2} \right) - 595e^{\frac{2b\pi}{J}} \pi \alpha_3 \varepsilon \rho^2 \eta_1^2 + 7b^7 J^2 \left( 4J^2 \left( -5 + \right. \right. \right. \\ &9e^{\frac{2b\pi}{J}} \eta_2 + 9\gamma_4 \left. \left. \left. \right) - 45e^{\frac{2b\pi}{J}} \pi \alpha_3 \varepsilon \rho^2 \eta_1^2 \right) + b^9 \left( J^2 \left( -52 + 60e^{\frac{2b\pi}{J}} \eta_2 + 60\gamma_4 \right) - \right. \\ &\left. \left. - 21e^{\frac{2b\pi}{J}} \pi \alpha_3 \varepsilon \rho^2 \eta_1^2 \right) \right) \\ \zeta_2(p) &= 4b^3 (b^2 + J^2)^2 (b^4 + 13b^2 J^2 + 36J^4) \gamma_4 \\ \gamma_4 &= \left( -1 + \frac{J\alpha_1}{n\mu\rho^2} \right) \\ \eta_0 &= -1 + e^{\frac{2b\pi}{J}} \\ \eta_1 &= M - n\mu\rho \\ \eta_2 &= -1 + \pi \alpha_2 \varepsilon \end{aligned}$$

Na seção que segue, encontraremos condições sob as quais se tem  $\lambda(p) = 1$ .

#### 4.1.3 Órbita periódica não-hiperbólica

##### *Existência do autovalor 1*

Considerando a expressão obtida para  $\lambda$  em (103), a fim de obtermos  $\lambda = 1$ , considerando  $\varepsilon$  como variável principal, construímos um polinômio  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  da forma:

$$h(\rho) = a_0 + a_1 \varepsilon. \quad (104)$$

onde

$$\begin{aligned}
a_1 &= n\mu\rho^2(4J(-b^2 + J^2)(b^8\alpha_2 + 13b^6J^2\alpha_2 + 36b^4J^4\alpha_2 - 18b^2J^4\alpha_3\rho^2\eta_1^2 + 108J^6\alpha_3\rho^2\eta_1^2) + \\
&\quad + e^{\frac{2b\pi}{J}}(4b^{10}J\alpha_2 + 48b^8J^3\alpha_2 + 92b^6J^5\alpha_2 + 4b^{11}\pi\alpha_2 + 504b^2J^7\alpha_3\rho^2\eta_1^2 - \\
&\quad - 432J_3^\alpha\rho^2\eta_1^2 - 756bJ^8\pi\alpha_3\rho^2\eta_1^2 + b^5J^4\pi(340J^2\alpha_2 - 1323\alpha_3\rho^2\eta_1^2) + \\
&\quad + 3b^3J^6\pi(48J^2\alpha_2 - 595\alpha_3\rho^2\eta_1^2) + 3b^9\pi(20J^2\alpha_2 - 7\alpha_3\rho^2\eta_1^2) + \\
&\quad + 63b^7J^2\pi(4J^2\alpha_2 - 5\alpha_3\rho^2\eta_1^2) - 72b^4J^5(2J^2\alpha_2 + \alpha_3\rho^2\eta_2^2)), \\
a_0 &= -c_0(J\alpha_1(b^2 + J^2)(e^{\frac{2b\pi}{J}} - 1) + 2b^2n\mu\rho^2), \\
c_0 &= 4b^3(b^2 + J^2)(b^2 + 4J^2)(b^2 + 9J^2).
\end{aligned}$$

Aqui a função  $h$  foi construída de tal forma que  $h = 0$  se, e somente se  $\lambda = 1$ . Assim, para mostrar o item (ii) do teorema (4.8), basta mostrar a existência de valores de parâmetro que anulam o polinômio  $h$ . Nossa principal ferramenta será a análise dos sinais dos termos de  $h$  em (104)  $a_0$  e  $a_1$ , considerando as expressões acima. Como  $(h(\varepsilon), \varepsilon)$  é uma reta em  $\mathbb{R}^2$ , tomando

$$\varepsilon_0 = -\frac{a_0}{a_1}, \quad (105)$$

obtemos  $(h(\varepsilon_0), \varepsilon_0) = (0, \varepsilon_0)$ . Dessa forma, precisamos garantir condições para que  $\varepsilon_0 > 0$ .

**Observação 4.14.** Observando a expressão de  $\lambda$  em (103), devemos ter  $\zeta_2(p) \neq 0$ . Nesse termo, a expressão  $4b^3(b^2 + J^2)^2(b^4 + 13b^2J^2 + 36J^4)$  é estritamente positiva (devido ao fato de todos os parâmetros serem estritamente positivos). Além disso, para a existência do campo sliding, usando a proposição (4.1), concluímos que  $\gamma_4 < 0$  e conseqüentemente,  $J\alpha_1 < n\mu\rho^2$  (em  $m = 1$ ).

**Observação 4.15.** Para uma escolha admissível de parâmetros, o termo  $a_0$  é estritamente negativo.

De fato, como o termo  $c_0 > 0$  e  $e^{\frac{2b\pi}{J}} - 1 > 0$ , obtemos  $c_0(J\alpha_1(b^2 + J^2)(e^{\frac{2b\pi}{J}} - 1) + 2b^2n\mu\rho^2) > 0$ . Portanto  $a_0 < 0$ .

Para garantir  $a_1 > 0$ , tomando a condição  $J\alpha_1 < n\mu\rho$ , considere a seguinte escolha parcial de parâmetros:

$$C_1 = \{k = m = \rho = \mu = n = \alpha_1 = b = 1, J = 0.5\}, \quad (106)$$

Para tal condição satisfazer  $a_1 > 0$ , devemos ter

$$\alpha_3 < 0.205286 \frac{\alpha_2}{(1 - M)^2}, \quad (107)$$

e  $M \neq 1$ .

Dessa forma, concluímos que sempre que tomarmos  $\varepsilon = -\frac{a_0}{a_1}$  com as condições  $C_1$  e (107) devemos ter  $\lambda = 1$ . Nesse caso, chamamos a solução periódica grazing-sliding  $\Gamma$  de *não-hiperbólica* (caso ela exista).

#### 4.1.4 Bifurcações da órbita $\Gamma$

Em se tratando do campo (51), para este caso em particular, o termo  $v_3$  é identicamente nulo, ou seja  $v_3 \equiv 0, \forall p \in \mathbb{R}^{10}$ . Portanto, fazendo uso da expressão (96), a equação para existência de órbitas sliding a ser analisada será dada por

$$-v_0(p) + v_2(p)y^2 + v_4(p)y^4 + O(y^5) = 0. \quad (108)$$

Neste momento, buscamos soluções positivas em  $y$  para o polinômio acima. Cada solução em  $y$  desse polinômio representa a existência de uma órbita periódica com uma pequena porção sliding, sendo que tal  $y$  satisfaz o sistema do teorema (4.11).

Desconsiderando os termos de ordem  $O(y^5)$ , a equação (108) tem solução analítica em  $y$ , dada por:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\frac{v_2(p)}{v_4(p)} \pm \frac{1}{v_4(p)} \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p)v_4(p)}}. \quad (109)$$

Estamos interessados no caso em que  $y > 0$ . Assim, em (109) devemos ter

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\frac{v_2(p)}{v_4(p)} \pm \frac{1}{v_4(p)} \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p)v_4(p)}},$$

ou seja:

$$-\frac{v_2(p)}{v_4(p)} \pm \frac{1}{v_4(p)} \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p)v_4(p)} > 0. \quad (110)$$

Analisando separadamente cada sinal dos termos acima, inicialmente considere  $v_2 > 0$ .

Caso  $v_4 > 0$ : de (110), temos:

$$-v_2(p) \pm \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p)v_4(p)} > 0. \quad (111)$$

Em (111), supondo  $v_2(p)^2 + 4v_0(p)v_4(p) > 0$ , a única opção em (111) que satisfaz a condição esperada é:

$$-v_2(p) + \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p)v_4(p)} > 0. \quad (112)$$

haja vista que  $-v_2(p) - \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p)} < 0$ . Dessa forma, temos  $v_0(p) \cdot v_4(p) > 0$ . Portanto, a primeira condição para solução única é dada por  $v_0(p), v_2(p), v_4(p) > 0$ , e  $v_2(p)^2 + 4v_0(p)v_4(p) > 0$ .

Caso  $v_4 < 0$ : em (110) devemos ter:

$$-v_2(p) \pm \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p)v_4(p)} < 0. \quad (113)$$

Precisamos analisar duas inequações:

$$\begin{aligned} -v_2 + \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p)} &< 0. \\ -v_2 - \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p)} &< 0. \end{aligned} \quad (114)$$

Da primeira inequação em (114) obtemos diretamente  $v_0(p) \cdot v_4(p) < 0$ . Da segunda inequação em (114), temos

$$v_2(p) + \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p)} > 0, \quad (115)$$

que, supondo  $v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p) > 0$ , a condição  $v_0(p) \cdot v_4(p) < 0$  é suficiente para satisfazer (115). Portanto, a primeira condição para obtermos duas soluções positivas de (109) deve ser  $v_0(p), v_2(p) > 0$ ,  $v_4(p) < 0$  e  $v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p) > 0$ .

Para o caso  $v_2 < 0$ , temos as seguintes considerações:

Caso  $v_4 > 0$ : em (110), temos:

$$-v_2(p) \pm \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p)} > 0. \quad (116)$$

o que nos deixa duas inequações para analisar:

$$\begin{aligned} -v_2(p) + \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p)} &> 0. \\ -v_2(p) - \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p)} &> 0. \end{aligned} \quad (117)$$

A primeira condição é claramente satisfeita, considerando  $v_2(p)^2 + 4v_0(p)v_4(p) > 0$  e  $v_2(p) < 0$ . Da segunda condição em (117), obtemos:

$$v_2(p)^2 > v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p). \quad (118)$$

de onde se conclui  $v_0(p) \cdot v_4(p) < 0$ . Dessa forma, para que existam duas soluções reais em  $y > 0$ , temos que a segunda condição para existência de duas soluções positivas é dada por  $v_0(p), v_2(p) < 0$ ,  $v_4(p) > 0$  e  $v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p) > 0$ .

Caso  $v_4 < 0$ : em (110):

$$-v_2(p) \pm \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p)} < 0. \quad (119)$$

que, considerando  $v_2 < 0$ , temos apenas:

$$-v_2(p) - \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p)} < 0. \quad (120)$$

haja vista que  $-v_2(p) + \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p)} > 0$ . Daí:

$$-v_2(p) < \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p)}. \quad (121)$$

que implica diretamente em  $v_0(p) \cdot v_4(p) > 0$ . Dessa forma, a segunda condição para que exista uma única solução para (109) é  $v_0(p), v_2(p), v_4(p) < 0$  e  $v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p) > 0$

Dos casos apresentados acima, concluímos que, para a existência de duas raízes positivas de (109), além da condição  $v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p) > 0$ , devemos ter:

$$\begin{aligned} v_0(p), v_2(p) &< 0. \\ v_4(p) &> 0. \\ \text{ou} & \\ v_0(p), v_2(p) &> 0. \\ v_4(p) &< 0. \end{aligned} \quad (122)$$

e para a existência de uma única raiz positiva de (109), além da condição  $v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p) > 0$ , devemos ter:

$$\begin{aligned} v_0(p), v_2(p), v_4(p) &> 0. \\ \text{ou} & \\ v_0(p), v_2(p), v_4(p) &< 0. \end{aligned} \quad (123)$$

A análise para encontrar as condições de não-existência segue da desigualdade:

$$-\frac{v_2(p)}{v_4(p)} \pm \frac{1}{v_4(p)} \sqrt{v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p)} < 0. \quad (124)$$

Usando um raciocínio análogo ao anterior, as condições de não-existência são dadas pelas seguintes:

$$\begin{aligned}
 v_4(p), v_2(p) &> 0. \\
 v_0(p) &< 0. \\
 &\text{ou} \\
 v_4(p), v_0(p) &> 0. \\
 v_2(p) &< 0. \\
 &\text{ou} \\
 v_4(p), v_0(p) &< 0. \\
 v_2(p) &> 0. \\
 &\text{ou} \\
 v_4(p), v_2(p) &< 0. \\
 v_0(p) &> 0.
 \end{aligned} \tag{125}$$

Com essas considerações, podemos agora demonstrar o teorema principal (4.8).

#### 4.1.5 Prova do teorema (4.8)

Considere o conjunto dos autovalores da aplicação de Poincaré clássica associada a solução periódica  $\Gamma$ , dada pela expressão (101), desconsiderando o autovalor trivial 1. Como  $1 + \varepsilon > 1$ , a solução  $\Gamma$  é instável, conforme afirma o item (i).

Para o item (ii), considere a escolha parcial de parâmetros  $C_1$ , dada em (106). Completando-a com os parâmetros remanescentes, considere as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_1 = \{k = m = \rho = \mu = n = \alpha_1 = b = 1, J = 0.5, M = 1.1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \\
 \alpha_3 = 1\}.
 \end{aligned} \tag{126}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_2 = \{k = m = \rho = \mu = n = \alpha_1 = b = 1, J = 0.5, M = 1.1, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 4, \\
 \alpha_3 = 81.5\}.
 \end{aligned}$$

Para a condição  $\bar{C}_1$ , obtemos  $\varepsilon = 0.15543198024670718$  como raiz positiva do polinômio (104). A condição  $\bar{C}_2$  forneceu  $\varepsilon = 0.4941022756212668$ . Em ambas as condições, note que  $\lambda = 1$ . Em particular, a condição (107) é também satisfeita.

Ambas as condições  $\bar{C}_1$  e  $\bar{C}_2$  nos forneceram:

$$\text{sgn}(v_2) = 1. \tag{127}$$

em uma vizinhança suficientemente pequena  $V_{x^*}$  do ponto de tangência  $x^*$ .

Dessa forma, precisamos analisar o sinal dos termos  $v_0(p)$  e  $v_4(p)$ . Assuma que  $v_2(p)^2 + 4v_0(p) \cdot v_4(p) > 0$  e considere os seguintes casos:

*Caso  $v_0(p) > 0$*  : Tal situação nos permite as fornece os seguintes resultados:

(a) Para a condição  $\bar{C}_1$ , segue que  $v_4 = 3.2947 > 0$ . Como  $v_2(p) > 0$ , temos  $v_0 > 0, v_2 > 0, v_4 > 0$ . Dessa forma, a condição (123) revela a existência de uma única solução periódica sliding que bifurca de  $\Gamma$ , demonstrando o item *ii – a*.

(b) Para a condição  $\bar{C}_2$ , segue que  $v_4 = -0.435493 < 0$ . Como  $v_2(p) > 0$ , temos  $v_0 > 0, v_2 > 0, v_4 < 0$  que, considerando a condição (122), temos a coexistência de duas soluções periódicas sliding que bifurcam de  $\Gamma$ , demonstrando o item *ii – b*.

*Caso  $v_0(p) < 0$*  : Usando a observação (4.10), existe uma solução periódica suave inteiramente contida em  $S_2$ . Além disso, temos as seguintes considerações:

(c) Para a condição  $\bar{C}_1$ , obtivemos  $v_4 = 3.2947 > 0$ . Como  $v_2(p) > 0$ , temos  $v_0 < 0, v_2 > 0, v_4 > 0$ . Considerando a condição (125), não existem soluções periódicas sliding bifurcando de  $\Gamma$ .

(d) Para a condição  $\bar{C}_2$ , obtivemos  $v_4 = -0.435493 < 0$ . Como  $v_2(p) > 0$ , temos  $v_0 < 0, v_2 > 0, v_4 < 0$ . Considerando a condição (125) novamente não existem soluções periódicas sliding bifurcando de  $\Gamma$ .

Ambos os casos *c* e *d*, demonstram a não existência de soluções periódicas bifurcando de  $\Gamma$ , que demonstra o item *ii – c* do teorema (4.8). Concluimos o resultado. ■

# APÊNDICE

## 1 APÊNDICE 1

### 1.1 Campos vetoriais suaves

Neste capítulo a parte, discutiremos alguns conceitos necessários para construção do mapa de Poincaré para campos vetoriais suaves. Uma das características dessa aplicação é oferecer a possibilidade do estudo da estabilidade de órbitas periódicas. A ideia é simples, dado um campo vetorial suave autônomo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e supondo  $\Gamma$  solução  $T$ -periódica associada ao campo:

$$\dot{x} = f(x), \quad (128)$$

passando através do ponto  $x_0$ , considere  $\Pi$  hiperplano perpendicular a  $\Gamma$  contendo  $x_0$ . Para qualquer  $x_1 \in \Pi$  suficientemente próximo a  $x_0$ , pelo teorema da dependência em condições iniciais, dado em [8], a solução  $\phi(x_1, t)$  de (128) passando por  $x_1$  em  $t = 0$ , cruza novamente  $\Sigma$  em um ponto  $\phi(x_1, \hat{t}) = x_2$ , para algum tempo  $\hat{t} \in \mathbb{R}$ . Dessa forma, a aplicação de Poincaré pode ser definida como sendo a função  $P : \Pi \rightarrow \Pi$ , onde  $P(x_0) = x_0$  e  $P(x_1) = x_2$ . O comportamento da aplicação  $P$  irá dizer se as trajetórias circundantes se aproximam da solução periódica  $\Gamma$  ou se distanciam, influenciando diretamente na estabilidade de  $\Gamma$ .

A seguir, apresentamos o enunciado do Teorema da Função Implícita, o qual foi largamente utilizado nas seções anteriores. A demonstração deste pode ser encontrada na página 384 de [1].

**Teorema .16. (Teorema da Função Implícita - TFI)** *Seja  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  aberto contendo  $(a, b)$ . Suponha  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^m$  seja  $C^1(\mathcal{A})$ , tal que  $F(a, b) = 0$  e  $DF(a, b)(0, v)$  seja isomorfismo. Então existe uma vizinhança  $\mathcal{W}$  de  $a \in \mathbb{R}^n$  e uma única função  $\phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , sendo  $\phi \in C^1(\mathcal{W})$ , tal que  $\phi(a) = b$  e:*

$$F(x, \phi(x)) = 0, \forall x \in \mathcal{W}. \quad (129)$$

Com isso, apresentamos o teorema de existência da Aplicação de Poincaré, dado no que segue.

**Teorema .17.** *Seja  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $f \in C^1(\mathcal{A})$ . Suponha que  $\phi(x_0, t)$  é solução  $T$ -periódica de (128) e que o ciclo:*

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \phi(x_0, t), 0 \leq t \leq T\}, \quad (130)$$

*está contido em  $\mathcal{A}$ , com  $f(x_0) \neq 0$ . Seja  $\Pi$  hiperplano ortogonal a  $\Gamma$  em  $x_0$ , isto é:*

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_0) \cdot f(x) = 0\}. \quad (131)$$

*Então existe  $\delta > 0$  e uma única função  $\tau(x)$  bem definida e continuamente diferenciável para  $x \in B_\delta(x_0)$  tal que  $\tau(x_0) = T$  e*

$$\phi(x, \tau(x)) \in \Pi, \quad (132)$$

$\forall x \in B_\delta(x_0)$ .

*Demonstração:* Este teorema é uma imediata aplicação do TFI. Dado  $x_0 \in \Gamma \subset \mathcal{A}$ , defina a função  $F : \mathcal{A} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$F(x, t) = [\phi(x, t) - x_0] \cdot f(x_0). \quad (133)$$

Note que  $F$  está bem definida em todo domínio  $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$  e  $F \in C^1(\mathcal{A} \times \mathbb{R})$ . Como  $\phi(x, t)$  é  $T$ -periódica, temos:

$$F(x_0, T) = [x_0 - x_0] \cdot f(x_0) = 0. \quad (134)$$

Temos também que:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x_0, T) = f(\phi(x, t)) \Big|_{t=T, x=x_0} \cdot f(x_0) = f(x_0) \cdot f(x_0) \neq 0, \quad (135)$$

pois, por hipótese,  $f(x_0) \neq 0$ .

Pelo TFI, existe uma função  $\tau(x)$ , definida e continuamente diferenciável tal que  $\tau(x_0) = T$  e:

$$F(x, \tau(x)) = 0, \forall x \in B_\delta(x_0). \quad (136)$$

para algum  $\delta > 0$ , ou seja:

$$[\phi(x, \tau(x)) - x_0] \cdot f(x_0) = 0. \quad (137)$$

Portanto  $\phi(x, \tau(x)) \in \Pi, \forall x \in B_\delta(x_0)$ . ■

Com esse teorema, definimos:

**Definição .18.** A função  $P : \Pi \rightarrow \Pi$  dada por:

$$P(x) = \phi(x, \tau(x)), \quad (138)$$

com  $\Pi$  dado nas condições do teorema (.17) é chamada Aplicação de Poincaré.

No que segue, introduziremos alguns conceitos básicos sobre *Teoria de Floquet*, a fim de estudarmos a estabilidade de uma solução  $\Gamma$ ,  $T$ -periódica  $\phi(x_0, t)$  de um sistema do tipo (128), utilizando a aplicação de Poincaré associada.

## 1.2 Introdução à Teoria de Floquet

A utilização da aplicação de Poincaré para a estudo da estabilidade de soluções se dá pela análise dos autovalores de sua matriz jacobiana  $DP(x)$ . A teoria de Floquet nos dará aporte teórico para esse estudo, a partir do estudo da linearização do sistema (128) sobre  $\Gamma$ . Dessa forma, devemos analisar um sistema não-autônomo do tipo:

$$y' = A(t)y, \quad (139)$$

onde  $A(t) = Df(\phi(x_0, T))$  é matriz  $T$ -periódica.

Todos os resultados desse capítulo podem ser encontrados em [11], com exceção dos resultados finais dessa seção (.27) e (.28). De maneira geral, essa teoria mostra que a solução de (139) deve ser da forma  $y(t) = e^{ht}p(t)$ , onde  $p$  é função também  $T$ -periódica. Começamos então definindo:

**Definição .19. (Matriz fundamental):** Sejam  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$   $n$  soluções de (139). Considere a matriz, cujas colunas são formadas pelas soluções  $x_1, \dots, x_n$ :

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ [x_1(t)] & [x_2(t)] & \dots & [x_n(t)] \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{bmatrix}$$

Então  $X(t)$  é uma matriz  $n \times n$  solução de  $X' = A(t)X$ . Se  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  são linearmente independentes, então  $X(t)$  é não-singular e então  $X(t)$  é chamada Matriz Fundamental. Se  $X(0) = I$  então  $X(t)$  é a Matriz Fundamental Principal.

Segue agora uma série de Lemas e Teoremas necessários para a construção da solução do problema (139):

**Lema .20.** Se  $X(t)$  é a matriz fundamental, então  $Y(t) = X(t)B$  também é, para qualquer matriz constante não-singular  $B$ .

*Demonstração:* Como  $X(t)$  e  $B$  são matrizes não-singulares, dada a matriz  $Y(t) = X(t)B$ , a matriz  $Y^{-1}(t) = B^{-1}X^{-1}(t)$  existe. Logo  $Y$  é não-singular, e:

$$Y' = X'B = AXB = YB, \quad (140)$$

como queríamos demonstrar. ■

**Lema .21.** Seja  $W(t)$  Wronskiano de  $X(t)$  (determinante de  $X(t)$ ). Então:

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds}. \quad (141)$$

*Demonstração:* Seja  $t_0 \in \mathbb{R}$  um constante qualquer. Expandindo  $X(t)$  em séries de Taylor em torno de  $t = t_0$ :

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t_0) + X'(t_0)(t - t_0) + O((t - t_0)^2) \\ &= X(t_0) + A(t_0)X(t_0)(t - t_0) + O((t - t_0)^2) \\ &= [I + (t - t_0)A(t_0)]X(t_0) + O((t - t_0)^2). \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \text{Det}(X(t)) &= \text{Det}((I + (t - t_0)A(t_0))X(t_0)). \\ &= \text{Det}(I + (t - t_0)A(t_0))\text{Det}(X(t_0)). \end{aligned} \quad (142)$$

Dada uma matriz  $M$  não-singular qualquer e  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , a expansão de  $\text{Det}(I + \varepsilon M)$  em torno de  $\varepsilon = 0$  é dada por:

$$\text{Det}(I + \varepsilon M) = \text{Det}(I) + \varepsilon \text{tr}(M) + O(\varepsilon^2).$$

Usando esse fato em (142) e como  $\text{Det}(X(t)) = W(t)$ :

$$W(t) = W(t_0)(1 + (t - t_0)\text{tr}(A(t_0))) + O((t - t_0)^2). \quad (143)$$

Expandindo  $W(t)$  em séries de Taylor em torno de  $t_0$ :

$$W(t) = W(t_0) + W'(t_0)(t - t_0) + O((t - t_0)^2). \quad (144)$$

Igualando (143) e (144):

$$W'(t_0) = W(t_0)tr(A(t_0)).$$

que, por sua vez é uma EDO da forma:

$$\frac{dW}{dt} = W(t)tr(A(t_0)). \quad (145)$$

cuja solução - por separação de variáveis - é dada por:

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t tr(A(s))ds}.$$

como queríamos demonstrar. ■

**Teorema .22.** *Seja  $A(t)$  matriz  $T$ -periódica. Se  $X(t)$  é matriz fundamental, então  $X(t + T)$  também é e existe uma matriz não-singular constante  $B$  tal que:*

$$\begin{aligned} (i) X(t + T) &= X(t)B, \forall t \in \mathbb{R}, \\ (ii) Det(B) &= e^{\int_0^T tr(A(s))ds}, \end{aligned}$$

onde  $tr(A)$  denota o traço da matriz  $A$  (soma dos elementos da diagonal principal).

*Demonstração:* Começaremos demonstrando que  $X(t + T)$  é matriz fundamental de (139). De fato, defina  $Y(t) = X(t + T)$ . Segue do fato de  $A$  ser  $T$ -periódica, que:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= X'(t + T) = A(t + T)X(t + T) \\ &= A(t)X(t + T) \\ &= A(t)Y(t). \end{aligned}$$

Agora, demonstraremos a afirmação (i). Tome  $B(t) = X^{-1}(t)Y(t)$ . Então:

$$\begin{aligned} Y(t) &= X(t)X^{-1}(t)X(t)Y(t) \\ &= X(t)B(t). \end{aligned}$$

Tome  $B_0 = B(t_0)$ . Pelo lema (.20),  $Y_0(t) = X(t)B_0$  é matriz de solução fundamental de (139), onde  $Y_0(t_0) = Y(t_0)$ . Pelo teorema de existência e unicidade de Picard [2], temos  $Y_0(t) = Y(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Então  $B_0 = B(t)$ , para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ . Logo  $B$  não depende de  $t$

Para demonstrar a afirmação (ii), pelo lema (.21):

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t tr(A(s))ds}.$$

Fazendo uso das propriedades da integral, obtemos:

$$\begin{aligned}
 W(t+T) &= W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t+T} \text{tr}(A(s))ds} \\
 &= W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds + \int_t^{t+T} \text{tr}(A(s))ds} \\
 &= W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds} e^{\int_t^{t+T} \text{tr}(A(s))ds} \\
 &= W(t)e^{\int_t^{t+T} \text{tr}(A(s))ds} \\
 &= W(t)e^{\int_0^T \text{tr}(A(s))ds}.
 \end{aligned}$$

de onde se pode concluir:

$$W(t+T) = W(t)e^{\int_0^T \text{tr}(A(s))ds}.$$

Pela afirmação (i) temos  $X(t+T) = X(t)B$ . Logo:

$$\begin{aligned}
 \text{Det}(X(t+T)) &= \text{Det}(X(t))\text{Det}(B) \\
 W(t+T) &= W(t)\text{Det}(B).
 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\text{Det}(B) = e^{\int_0^T \text{tr}(A(s))ds}.$$

como desejado. ■

**Observação .23.** A matriz  $B$  não depende de  $t$  e pode ser computada escolhendo  $t = 0$  para obter:

$$B = X^{-1}(0)X(T).$$

Se as condições iniciais indicarem que  $X(0) = I$ , então:

$$B = X(T).$$

Como mostrado por Hartman em [6], se a matriz  $B$  é não-singular, existe uma matriz (não necessariamente única)  $R$  de tal forma que:

$$B = e^{RT}. \tag{146}$$

Portanto, podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema .24.** (Teorema de Floquet) Seja um sistema do tipo (139), onde  $A(t)$  é  $T$ -periódica, ou seja:

$$A(t) = A(t+T).$$

Então qualquer matriz fundamental de (139) tem a forma:

$$X(t) = Z(t)e^{Rt}.$$

onde  $Z(t) = Z(t+T)$  e  $R$  é uma matriz constante e, se  $X(0) = I$ , então  $Z(0) = I$ .

*Demonstração:* Seja  $X(t)$  matriz fundamental de (139). Pelo teorema (.22), obtemos que  $X(t+T)$  também é e  $X(t+T) = X(t)B$ . Usando a expressão (146), obtemos:

$$X(t+T) = X(t)e^{RT}. \quad (147)$$

para alguma matriz constante  $R$ . Defina  $Z(t) = X(t)e^{-Rt}$ . Então:

$$\begin{aligned} Z(t+T) &= X(t+T)e^{-R(t+T)} \\ &= X(t+T)e^{-RT}e^{-Rt} \\ &= X(t)e^{-Rt} \\ &= Z(t) \end{aligned}$$

Portanto  $Z(t+T) = Z(t)$ , como gostaríamos de demonstrar. ■

Com esse teorema, temos a seguinte definição:

**Definição .25.** Os autovalores  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  de  $B$  são chamados de *Multiplicadores Característicos*. Os *Expoentes Característicos*  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  são os autovalores de  $R$ , que satisfazem:

$$\rho_i = e^{\mu_i T}, i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Então, dada a definição acima, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema .26.** Seja  $\rho$  multiplicador característico e  $\mu$  seu correspondente expoente característico. Então existe uma solução de (139) tal que:

- (i)  $x(t+T) = \rho x(t)$ .
- (ii) Existe uma função  $T$ -periódica  $p(t)$ , tal que  $x(t) = e^{\mu t} p(t)$ .

*Demonstração:* Para demonstrar (i), dado que  $B$  é não-singular, seja  $v$  autovetor de  $B$ , com autovalor correspondente  $\rho$ . Tome  $x(t) = X(t)v$ . Então:

$$\begin{aligned} x'(t) &= X'(t)v \\ &= A(t)X(t)v \\ &= A(t)x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
x(t+T) &= X(t+T)v \\
&= X(t)Bv \\
&= X(t)\rho v \\
&= \rho x(t).
\end{aligned}$$

ou seja:

$$x(t+T) = \rho x(t).$$

Para demonstrar (ii), considere a função  $p(t) = x(t)e^{-\mu t}$ . Então  $p(t)$  é periódica: de fato, temos:

$$\begin{aligned}
p(t+T) &= x(t+T)e^{-\mu(t+T)} \\
&= \rho x(t)e^{-\mu(t+T)} \\
&= \frac{\rho}{e^{\mu T}} x(t)e^{-\mu t} \\
&= x(t)e^{-\mu t}
\end{aligned}$$

o que implica que  $p(t+T) = x(t)e^{-\mu t}$  tem período  $T$ . Portanto,  $p$  é periódica. ■

Em [2], encontramos que a solução de (139), dada a condição inicial  $x(0) = x_0$  é dada por:

$$x(t) = X(t)X^{-1}(0)x_0 \quad (148)$$

que não convém demonstrar aqui, pois utiliza conceitos além do que necessitamos por enquanto.

### 1.3 Soluções Periódicas

Em se tratando de soluções periódicas, considere um sistema do tipo:

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n. \quad (149)$$

onde  $f \in C^1(E)$ , para algum  $E \in \mathbb{R}^n$  aberto. Suponha que existe uma solução periódica  $\gamma(t)$  com período  $T$ , tal que:

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : x_0 = \gamma(t), 0 \leq t \leq T\} \quad (150)$$

Linearizando (149) sobre a solução  $\phi$ , obtemos:

$$y' = A(t)y. \quad (151)$$

onde  $A(t) = Df(\phi(t))$ . Sendo  $\phi$  função  $T$ -periódica,  $A(t)$  também é. Dado  $\Sigma$  hiperplano ortogonal a  $\Gamma$ , seja  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$  aplicação de Poincaré associada ao ciclo  $\Gamma$ . Como será explicado, encontrar os autovalores de  $DP(x_0)$  se reduz a encontrar a matriz de solução fundamental do sistema (151), que em geral, é um problema tão difícil de se resolver quanto encontrar a forma explícita da aplicação  $P$ . No que segue, mostraremos alguns dos conceitos principais a respeito da matriz  $X(T)$  que nos ajudarão a compreender como a matriz  $DP(x_0)$  pode ser construída.

Dados  $x, x_0 \in E$ , seja  $\phi(x_0, t)$  fluxo do sistema (149) e seja  $\gamma(t) = \phi(x_0, t)$  órbita periódica de (149), passando pelo ponto  $x_0 \in \mathcal{A}$ . Considere a matriz:

$$H(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t). \quad (152)$$

Em particular, o fluxo  $\phi \in C^1(\mathcal{A} \times \mathbb{R})$ . Pelo teorema de Schwarz obtemos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x}(x, t). \quad (153)$$

$\forall (x, t) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R}$ . Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t}(x, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(x, t)) \\ &= Df(\phi(x, t)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t). \end{aligned}$$

ou seja:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = Df(\phi(x, t))H(x, t). \quad (154)$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ .

Tomando  $x = x_0$ ,  $H(t, x_0)$  satisfaz:

$$X'(t) = Df(\phi(x, t))X(t) \text{ com condição inicial } X(0) = I. \quad (155)$$

Pelo teorema de Floquet:

$$H(x_0, t) = Z(t)e^{Rt}. \quad (156)$$

o que segue:

$$H(x_0, T) = e^{RT}. \quad (157)$$

ou seja,  $H(x_0, t) = X(t)$  é matriz de solução fundamental de (151).

Dessa forma, temos a seguinte proposição:

**Proposição .27.** *Um dos autovalores da matriz  $X(T)$  é sempre 1.*

*Demonstração:* Sendo  $\gamma(t)$  órbita periódica de (149), satisfazendo:

$$\gamma'(t) = f(\gamma(t)). \quad (158)$$

Derivando em  $t$  a expressão acima e fazendo uso da regra da cadeia, obtemos:

$$\gamma''(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t). \quad (159)$$

Portanto,  $\gamma'(t)$  é solução do sistema linear não-autônomo (151), com condição inicial  $\gamma'(0) = f(0)$ .

Pela expressão (148), obtemos:

$$\gamma'(t) = X(t)X^{-1}(0)f(0). \quad (160)$$

e do fato que  $X^{-1}(0) = I$ , obtemos  $\gamma'(t) = X(t)f(0)$ . Para  $t = T$ , substituindo em (158):

$$H(0, T)f(0) = f(0). \quad (161)$$

Portanto,  $X(T)$  tem pelo menos um autovalor igual a 1 com autovetor correspondente  $f(0)$ . ■

Em particular, pode-se escolher uma base de  $\mathbb{R}^n$  de tal forma que a última coluna de  $X(T)$  seja da forma  $(0, 0, \dots, 0, 1)^T$ . Dessa forma, o próximo teorema, demonstrado por [2] na página 205, estabelece condições necessárias para se considerar como  $DP(x)$  a matriz de  $X(T)$  excluindo-se a última coluna e linha.

**Teorema .28.** *Suponha que  $f \in C^1(\mathcal{A})$  onde  $\mathcal{A}$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  e que  $\gamma(t) = \phi(0, t)$  é uma órbita periódica de (149) contida em  $\mathcal{A}$ . Para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno e  $x \in \Sigma \cap B_\delta(0)$ , seja  $P(x)$  mapa de Poincaré para  $\gamma$  em 0 onde  $\Sigma$  é hiperplano  $(n - 1)$ -dimensional ortogonal a  $\Gamma$  em 0. Se  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  são os expoentes característicos de  $\Gamma$  então os multiplicadores característicos  $e^{\mu_1}, e^{\mu_2}, \dots, e^{\mu_{n-1}}$  são os autovalores de  $DP(0)$ , obtidos pela escolha de certa base de  $\mathbb{R}^n$ , que transforma a última coluna de  $H(0, T) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, T)$  em  $(0, 0, \dots, 0, 1)^T$  e pela exclusão da última coluna e linha de  $H(0, T)$ .*

Com essa informação, para encontrar os autovalores da Aplicação de Poincaré, basta encontrar os multiplicadores característicos  $\mu_i, i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ , excluindo o autovalor trivial  $\mu_n = 1$ .

Dizemos então que a órbita  $\Gamma$  é *estável* se o módulo de todos os autovalores da aplicação de Poincaré é menor que 1. Se pelo menos um dos autovalores tem módulo maior que 1, então a órbita  $\Gamma$  é *instável*. Além disso, se os autovalores tiverem módulo diferente de 1, dizemos que a solução periódica  $\Gamma$  é *hiperbólica* e caso contrário, dizemos que  $\Gamma$  é *não-hiperbólica* (i.e, a aplicação de Poincaré associada tem autovalor 1).

## 2 APÊNDICE 2

### 2.1 Mapas de descontinuidade para bifurcações em sistemas de impacto

Nesta seção em particular, estudaremos como a dinâmica de um sistema de impacto se comporta para campos que apresentam bifurcações sem regiões de sliding. Toda trajetória passando por  $\Sigma$  será tangencial ou transversal. Quando a trajetória for transversal, o ponto onde o fluxo encontra  $\Sigma$  sofrerá a ação de certa aplicação  $R : \Sigma \rightarrow \Sigma$  que, para trajetórias tangenciais, a aplicação  $R$  agirá como a identidade no ponto de tangência. Dessa forma, faremos a construção da *ZDM* e da *PDM* para este caso em particular.

Analogamente ao capítulo 3, estaremos supondo sem perda de generalidade que os sistemas tem uma única fronteira de descontinuidade  $\Sigma$  e com duas zonas  $F_1$  e  $F_2$ . Para o caso geral, com mais de duas zonas e mais de uma fronteira de descontinuidade basta aplicar as mesmas ideias separadamente para cada fronteira do sistema. Nesta seção em particular, estaremos considerando apenas sistemas de impacto, que por sua vez, são sistemas cujos fluxos estão restritos a apenas um dos lados da fronteira. Chamaremos apenas de campo  $F$  e fluxo  $\phi$ .

Como citado no texto, faremos uso do mapa de Descontinuidade *ZDM*. Um tipo de comportamento que aparece também nesses sistemas é quando uma das trajetórias tangencia a fronteira  $\Sigma$ . Para descrever tal situação, considere  $\Sigma = \{x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n : H(x) = 0\}$  superfície de impacto,  $v(x) = \mathcal{L}_{F_1} H(x) = \langle \nabla H(x), F(x) \rangle$ ,  $W(x)$  funções suaves tais que  $x + W(x) \cdot v(x)$  seja também suave, para alguma função  $W$  tão suave quanto necessário.

**Definição .29.** Dizemos que o sistema de impacto híbrido está escrito na forma local quando pode ser escrito como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x), x \in S_1, \\ R(x^-) &= x^- + W(x^-) \cdot v(x^-), \\ a(x) &= \left\langle \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F(x) + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x}(x) \right), F(x) \right\rangle. \end{aligned} \quad (162)$$

com  $R : \Sigma \rightarrow \Sigma$  e  $S_1 = \{x \in \mathcal{D} : H(x) > 0\}$ .

Dito isto, definimos:

**Definição .30.** Considere um sistema de impacto escrito na forma local (162) e um ponto  $x^* \in \Sigma$ . Dizemos que  $x^*$  é um ponto grazing regular se satisfizer as seguintes condições:

1.  $H(x^*) = 0$ ;
2.  $v(x^*) = \frac{\partial}{\partial t} H(\phi(x^*, 0)) = \mathcal{L}_F H(x^*) = 0$ ;
3.  $a(x^*) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} H(\phi(x^*, 0)) = \mathcal{L}_F^2 H(x^*) > 0$ ;

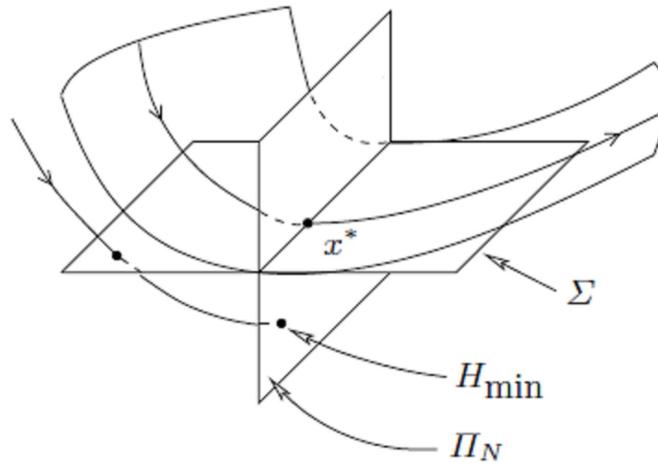


Figura 25: Superfície contendo um ponto grazing regular  $x^*$ , isto é, um ponto cuja trajetória que o contém tangencia  $\Sigma$ . Fonte: [2].

Note que  $x^*$  é parte de uma trajetória que tangencia  $\Sigma$ , ou seja, para alguma condição inicial  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos  $\phi(x, t) = x^*$ , como podemos observar na figura (25).

Para a construção da ZDM, temos o seguinte teorema:

**Teorema .31.** *Suponha que  $x^*$  é um ponto grazing regular de um sistema híbrido de impacto escrito na forma local (162). Então, a ZDM definida para todo  $x$  em alguma vizinhança suficientemente próxima de  $x^*$  pode ser escrita como:*

$$ZDM(x) = \begin{cases} x, & H(x) \geq 0; \\ x - \sqrt{2a(x^*)}W(x^*)y + O(y^2), & H(x) < 0; \end{cases}$$

onde  $y(x) = \sqrt{-H(x)} = \sqrt{H_{min}(\phi(x, t))}$ .

Como citado desta seção, faremos também a construção da PDM que atua como uma projeção suave sobre a superfície  $\Pi_N$  que para o caso de sistemas de impacto, será definida como:

$$\Pi_N := \{x \in \mathcal{D} : \mathcal{L}_F H(x) = 0\}.$$

Essa aplicação é importante e necessária para a construção da *Aplicação de Poincaré* para campos s.p.p. para todos os casos de bifurcações citados nesse texto. O teorema da PDM é dado como segue:

**Teorema .32.** *Suponha que  $x^*$  é um ponto grazing regular de um sistema híbrido de impacto escrito na forma local (162). Então, a PDM definida para todo  $x \in \Pi_N = \{x \in \mathcal{D} : \mathcal{L}_F H(x) = 0\}$  em alguma vizinhança suficientemente próxima de  $x^*$ , pode ser escrita como:*

$$PDM(x) = \begin{cases} x, & H(x) \geq 0; \\ x + \beta(x, y)y, & H(x) < 0; \end{cases}$$

onde  $\beta(x, y) = \sqrt{-2a(x)} \left( W(x) - \frac{b(x)}{a(x)} F(x) \right) + O(y)$  e  $b(x) = \mathcal{L}_W \mathcal{L}_F H(x)$ .

A ZDM será construída a partir dos seguintes passos:

- 1– Tomar  $x_1 \in \Pi_N$  inicial;
- 2– Sob ação do fluxo  $\phi$ , encontraremos  $\delta < 0$ , tal que  $H(\phi(x_1, \delta)) = 0$ ;
- 3– Sob ação da função  $R$ , obtemos o ponto  $x_3 = R(x_2)$ , onde  $x_2 = \phi(x_1, \delta)$ ;
- 4– Definimos  $ZDM : \Pi_N \longrightarrow D$ , dada por:

$$ZDM(x_1) = \phi(R(\phi(x_1, \delta)), -\delta).$$

- 5– Após encontrada a ZDM, definimos  $PDM : \Pi_N \longrightarrow \Pi_N$ , como sendo:

$$PDM(x_1) = \phi(x, \Delta_0);$$

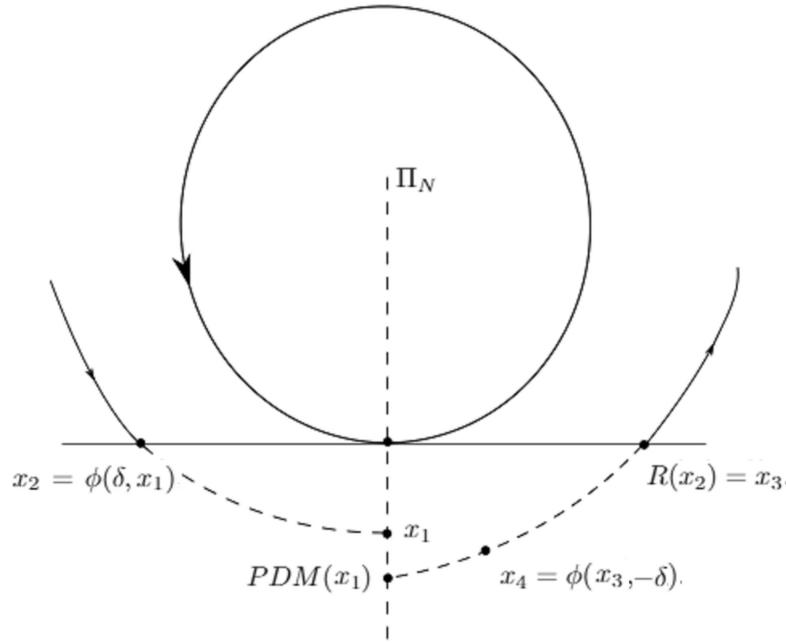


Figura 26: Comportamento da ZDM e da PDM próximo a um ponto *grazing* regular

*Demonstração do Teorema .31*

Para a construção da ZDM, seja  $x_1 \in \Pi_N$ . Então  $\mathcal{L}_F H(x_1) = 0$ . Em  $x_1$ , suponha que  $H(x_1) < 0$ . Defina:

$$y = \sqrt{-H(x_1)},$$

que implica em:

$$y^2 + H(x_1) = 0;$$

Então:

$$H(\phi(x_1, \delta)) - (y^2 + H(x_1)) - \mathcal{L}_F H(x_1) = 0. \tag{163}$$

Como  $H$  é uma função suave, podemos expandí-la em termos de sua série de Taylor, em torno de  $\delta = 0$ . Dessa forma, temos:

$$H(\phi(x_1, \delta)) = H(x_1) + \mathcal{L}_F H(x_1)\delta + \mathcal{L}_F^2 H(x_1)\frac{\delta^2}{2} + \mathcal{L}_F^3 H(x_1)\frac{\delta^3}{6} + O(\delta^4). \tag{164}$$

Substituindo em (163), obtemos:

$$\mathcal{L}_F^2 H(x_1)\frac{\delta^2}{2} + \mathcal{L}_F^3 H(x_1)\frac{\delta^3}{6} - y^2 + O(\delta^4) = 0. \tag{165}$$

Tomando:

$$A = \mathcal{L}_F^2 H(x) \frac{\delta^2}{2} + \mathcal{L}_F^3 H(x) \frac{\delta^3}{6} + O(\delta^4);$$

Podemos escrever a equação anterior na forma:

$$(\sqrt{A} - y)(\sqrt{A} + y) = 0;$$

isto é:

$$\left( \sqrt{\mathcal{L}_F^2 H(x) \frac{\delta^2}{2} + \mathcal{L}_F^3 H(x) \frac{\delta^3}{6} + O(\delta^4)} - y \right) \left( \sqrt{\mathcal{L}_F^2 H(x) \frac{\delta^2}{2} + \mathcal{L}_F^3 H(x) \frac{\delta^3}{6} + O(\delta^4)} + y \right) = 0. \quad (166)$$

Como, por hipótese  $\delta < 0$ , segue que:

$$\delta \left( \sqrt{\frac{\mathcal{L}_F^2 H(x)}{2} + \frac{\mathcal{L}_F^3 H(x) \delta}{6} + O(\delta^2)} \right) + y = 0.$$

Além disso, temos  $\mathcal{L}_F^2 H(x^*) \neq 0$ . Assim, teorema da função implícita garante a existência de uma função suave  $\delta(x, y)$  que anula a expressão acima, em uma vizinhança  $V_{(x^*, 0)}$  do ponto  $(x, y) = (x^*, 0)$ .

Tomando  $G(x, y, \delta) = \delta \left( \sqrt{\frac{\mathcal{L}_F^2 H(x)}{2} + \frac{\mathcal{L}_F^3 H(x) \delta}{6} + O(\delta^2)} \right) + y = 0$ , notamos que  $G$  é uma função diferenciável. Portanto, derivando-a implicitamente, podemos encontrar a expressão para  $\delta(x, y)$  em termos de sua série de Taylor em torno de  $(x, y) = (x^*, 0)$ . Aqui, precisaremos apenas dos termos em  $y$  da série de Taylor de  $\delta$ . Considerando tal afirmação, temos:

$$\delta(x, y) = \delta(x^*, 0) + \frac{\partial \delta}{\partial y}(x^*, 0)y + \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}(x^*, 0) \frac{y^2}{2} + O(y^3). \quad (167)$$

É fácil ver que o termo  $\delta(x^*, 0)$  é nulo. Para encontrar o termo  $\frac{\partial \delta}{\partial y}(x^*, 0)$ , derivando  $G$  implicitamente pela *regra da cadeia* temos:

$$\frac{\partial}{\partial y} G(x, y, \delta(x, y)) = \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, \delta) + \frac{\partial G}{\partial \delta}(x, y, \delta) \frac{\partial \delta}{\partial y}(x, y) = 0;$$

Logo:

$$\frac{\partial \delta}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial G}{\partial y}(x, y, \delta)}{\frac{\partial G}{\partial \delta}(x, y, \delta)}. \quad (168)$$

Podemos notar que

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y, \delta) = 1,$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \delta}(x, y, \delta) &= \delta \cdot \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}_F^2 H(x) \frac{1}{2} + \mathcal{L}_F^3 H(x) \frac{\delta}{6} + O(\delta^4) \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\mathcal{L}_F^3 H(x)}{6} + O(\delta^2) \right) + \\ &+ \sqrt{\frac{\mathcal{L}_F^2 H(x)}{2} + \frac{\mathcal{L}_F^3 H(x) \delta}{6} + O(\delta^4)}. \end{aligned}$$

Aplicando tal expressão no ponto  $(x^*, 0, 0)$ , temos:

$$\frac{\partial G}{\partial \delta}(x^*, 0, 0) = \sqrt{\frac{\mathcal{L}_F^2 H(x^*)}{2}}. \quad (169)$$

Portanto:

$$\frac{\partial \delta}{\partial y}(x^*, 0) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{\mathcal{L}_F^2 H(x^*)}{2}}} = -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}_F^2 H(x^*)}}; \quad (170)$$

ou seja:

$$\frac{\partial \delta}{\partial y}(x^*, 0) = -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}_F^2 H(x^*)}}. \quad (171)$$

Para encontrar o 2º termo, precisamos novamente derivar implicitamente a função  $G$ , para obter:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, \delta) + \frac{\partial G}{\partial \delta}(x, y, \delta) \frac{\partial \delta}{\partial y}(x, y) \right) = 0;$$

e, então:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x, y, \delta) + \frac{\partial^2 G}{\partial \delta \partial y}(x, y, \delta) \frac{\partial \delta}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial G}{\partial \delta}(x, y, \delta) \frac{\partial \delta}{\partial y}(x, y) \right) = 0.$$

Como  $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial \delta \partial y} = 0$ , pela regra do produto:

$$\frac{\partial G}{\partial \delta} \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \delta^2} \frac{\partial \delta}{\partial y} + \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \delta} \right) \frac{\partial \delta}{\partial y} = 0;$$

e, do fato que  $\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \delta} = \frac{\partial^2 G}{\partial \delta \partial y} = 0$ , temos:

$$\frac{\partial G}{\partial \delta} \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \delta^2} \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) \frac{\partial \delta}{\partial y} = 0.$$

Substituindo  $\frac{\partial \delta}{\partial y}(x, y)$  na expressão acima, temos:

$$\frac{\partial G}{\partial \delta} \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \delta^2} \left( -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial \delta}} \right)^2 = 0.$$

Portanto:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial \delta^2} \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)^2}{\left( \frac{\partial G}{\partial \delta} \right)^3}.$$

Encontrando os termos necessários temos:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \delta^2}(x^*, 0, 0) = \frac{\mathcal{L}_F^3 H(x^*)}{6} \left( \sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}_F^2 H(x^*)}} \right).$$

Substituindo na expressão anterior:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{\frac{\mathcal{L}_F^3 H(x^*)}{6} \left( \sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}_F^2 H(x^*)}} \right)}{\sqrt{\frac{\mathcal{L}_F^2 H(x^*)}{2}}},$$

ou seja:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{2}{3} \frac{\mathcal{L}_F^3 H(x^*)}{(\mathcal{L}_F^2 H(x^*))^2}.$$

Portanto:

$$\delta(x, y) = \left( -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}_F^2 H(x^*)}} \right) y + \left( -\frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}_F^3 H(x^*)}{(\mathcal{L}_F^2 H(x^*))^2} \right) y^2 + O(y^3).$$

Seja  $x_2 \in \Sigma$  ponto do primeiro impacto. Temos que  $v_2(x, y) = \mathcal{L}_F H(x_2) = \mathcal{L}_F H(\phi(x, \delta))$ .

Expandindo tal expressão em torno de  $\delta = 0$ , obtemos:

$$v_2(x, y) = \mathcal{L}_F H(x) + \mathcal{L}_F^2 H(x) \delta + \frac{\mathcal{L}_F^3 H(x) \delta^2}{2} + O(\delta^3).$$

Substituindo  $\delta$ , temos:

$$\begin{aligned} v_2(x, y) &= \mathcal{L}_F^2 H(x) \left( \left( -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}_F^2 H(x)}} \right) y + \left( -\frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}_F^3 H(x)}{(\mathcal{L}_F^2 H(x))^2} \right) y^2 + O(y^3) \right) + \\ &\quad + \frac{\mathcal{L}_F^3 H(x)}{2} \left( \left( -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}_F^2 H(x)}} \right) y + \left( -\frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}_F^3 H(x)}{(\mathcal{L}_F^2 H(x))^2} \right) y^2 \right)^2 + O(y^3) \\ &= -\sqrt{2a(x)} y - \frac{1}{3} \frac{\mathcal{L}_F^3 H(x)}{\mathcal{L}_F^2 H(x)} y^2 + \frac{\mathcal{L}_F^3 H(x)}{\mathcal{L}_F^2 H(x)} y^2 + O(y^3). \end{aligned}$$

Logo:

$$v_2(x, y) = -\sqrt{2a(x)}y + \frac{2}{3} \frac{\mathcal{L}_F^3 H(x)}{\mathcal{L}_F^2 H(x)} y^2 + O(y^3).$$

Em  $x_3 = R(x_2)$ , temos:

$$\mathcal{L}_F H(x_3) = \mathcal{L}_F H(x_2 + W(x_2)v_2) = \nabla H(x_2 + W(x_2)v_2) \cdot F(x_2 + W(x_2)v_2).$$

Expandindo em torno de  $x_2$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F H(x_3) &= \langle \nabla H(x_2), F(x_2) \rangle + \left\langle \nabla H(x_2) \frac{\partial F}{\partial x}(x_2) + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_2) F(x_2), W(x_2) \right\rangle v_2 + O(v_2) \\ &= v_2 + \mathcal{L}_W \mathcal{L}_F H(x_2) v_2 + O(v_2^2). \end{aligned}$$

Tomando  $v_3(x, v_2) = \mathcal{L}_{F_1} H(x_3)$ , temos:

$$v_3(x, v_2) = v_2 + v_2 \mathcal{L}_W \mathcal{L}_{F_1} H(x_2) + O(v_2^2).$$

Definimos a ZDM como sendo:

$$x_4 = ZDM(x_1) = \phi(R(\phi(x_1, \delta)), -\delta).$$

Expandindo tal expressão em torno de  $\delta = 0$  temos:

$$x_4 = R(\phi(x, \delta)) + F(R(\phi(x, \delta)))(-\delta) + O(\delta^2);$$

sendo que:

$$R(\phi(x, \delta)) = \phi(x, \delta) + W(\phi(x, \delta))v_2.$$

Então:

$$\begin{aligned} \phi(x, \delta) &= x + F(x)\delta + O(\delta^2), \\ W(\phi(x, \delta)) &= W(x + F(x)\delta + O(\delta^2)) = W(x) + \frac{\partial W}{\partial x} F(x)\delta + O(\delta^2). \end{aligned}$$

Em  $R(\phi(x, \delta))$ , temos:

$$\begin{aligned} R(\phi(x, \delta)) &= x + F(x)\delta + (W(x) + \frac{\partial W}{\partial x} F(x)\delta)v_2 + O(\delta, v_2) \\ &= x + F(x)\delta + W(x)v_2 + \frac{\partial W}{\partial x} F(x)\delta v_2 + O(\delta, v_2). \end{aligned}$$

Em  $x_4$ :

$$\begin{aligned} x_4 &= x + F(x)\delta + W(x)v_2 + \frac{\partial W}{\partial x}F(x)\delta v_2 + O(\delta, v_2) + (F(x + F(x)\delta + W(x)v_2 + \frac{\partial W}{\partial x}F(x)\delta v_2 + \\ &\quad + O(\delta, v_2)))(-\delta) \\ x_4 &= x + W(x)v_2 + \frac{\partial W}{\partial x}F(x)\delta v_2 - \frac{\partial F}{\partial x}W(x)\delta v_2 + O(\delta^2, v_2^2) + O(\delta^2). \end{aligned} \quad (172)$$

Portanto:

$$x_4 = x + W(x)v_2 + \frac{\partial W}{\partial x}F(x)\delta v_2 - \frac{\partial F}{\partial x}W(x)\delta v_2 + O(\delta^2, v_2^2).$$

Basta então substituir  $\delta$  e  $v_2$  para obtermos:

$$ZDM(x) = \begin{cases} x, & H(x) \geq 0; \\ x - \sqrt{2a(x^*)}W(x^*)y + O(y^2), & H(x) < 0; \end{cases}$$

que era o que queríamos demonstrar. ■

*Demonstração do Teorema 32*

A PDM é dada pelo ponto  $x_5$ , onde

$$x_5 = \phi(x_4, \Delta_0).$$

é a projeção do ponto  $x_4$  na superfície de velocidade zero  $\Pi = \{x \in D : \mathcal{L}_F H(x) = 0\}$

Expandindo a expressão acima, obtemos:

$$x_5 = x_4 + F(x_4)\Delta_0 + O(\Delta_0^2).$$

Utilizando a expressão (172), expandindo  $F(x_4)$  em torno de  $x$ , obtemos:

$$\begin{aligned} F(x_4) &= F(x + W(x)v_2 + \frac{\partial W}{\partial x}F(x)\delta v_2 - \frac{\partial F}{\partial x}W(x)\delta v_2 + O(\delta^2, v_2^2)) = F(x) + \frac{\partial F}{\partial x}(x)W(x)v_2 + \\ &\quad + O(\delta, v_2). \end{aligned}$$

Portanto:

$$x_5 = x_4 + (F(x) + \frac{\partial F}{\partial x}W(x))\Delta_0 + O(\Delta_0^2).$$

Devemos encontrar  $\Delta_0$  tal que  $\mathcal{L}_F H(x_5) = 0$ . Expandindo  $\mathcal{L}_F H(x_5)$  em torno de  $\Delta_0 = 0$ , obtemos:

$$\mathcal{L}_F H(x_5) = \mathcal{L}_F H(x_4) + \mathcal{L}_F^2 H(x_4)\Delta_0 + O(\Delta_0^2) = 0.$$

Expandindo o termo  $\mathcal{L}_F H(x_4)$  em torno de  $x$ , temos:

$$\mathcal{L}_F H(x_4) = \mathcal{L}_F H(x) + \mathcal{L}_W \mathcal{L}_F H(x)v_2 + O(\delta, v_2) = 0.$$

Fazendo o mesmo com o termo  $\mathcal{L}_F^2 H(x_4)$ , temos:

$$\mathcal{L}_F^2 H(x_4) = \mathcal{L}_F^2 H(x) + O(v_2).$$

Substituindo em  $\mathcal{L}_F H(x_5)$ :

$$\mathcal{L}_F H(x_5) = \mathcal{L}_F H(x) + \mathcal{L}_W \mathcal{L}_F H(x) v_2 + \Delta_0 \mathcal{L}_F^2 H(x) + O(v_2, \Delta_0) = 0.$$

Como  $\mathcal{L}_F^2 H(x^*) \neq 0$ , o teorema da função implícita garante que existe um  $\Delta_0(x, v_2)$  função suave que anula a expressão acima em torno de  $x^*$ . Dessa forma, obtemos:

$$\Delta_0(v_2) = -\frac{\mathcal{L}_W \mathcal{L}_F H(x^*)}{\mathcal{L}_F^2 H(x^*)} v_2 + O(v_2^2).$$

Substituindo  $\Delta_0$  e  $x_4$  em  $x_5$ :

$$x_5 = x + \sqrt{2a(x)} \left( W(x) - \frac{\mathcal{L}_W \mathcal{L}_F H(x^*)}{\mathcal{L}_F^2 H(x^*)} F(x) \right) y + O(y^2). \quad (173)$$

que era o que queríamos demonstrar. ■

Conforme citamos no texto inicial, para construir a aplicação de Poincaré suave por partes, precisamos das aplicações ZDM e PDM, haja vista que a PDM é construída pela projeção da ZDM em  $\Pi_N$ . Dessa forma, temos a seguinte definição:

**Definição .33.** *A aplicação de Poincaré suave por partes  $P_N$  para sistemas de impacto é uma função  $P_N : \Pi_N \rightarrow \Pi_N$  definida por:*

$$P_N(x) = PDM(p(x)),$$

onde  $p : \Pi_N \rightarrow \Pi_N$  é dada por  $p(x) = \phi(x, T(x))$  que é a Aplicação de Poincaré natural associada para campos vetoriais suaves.

### 3 APÊNDICE 3

#### 3.1 Considerações acerca da bifurcação adding-sliding

Esta seção é dedicada a mostrar o fato usado no teorema do caso de bifurcação adding-sliding, dado na seguinte proposição:

**Proposição .34.** *Sob as hipóteses do teorema (3.14), temos:*

$$\left\langle \nabla H(x), \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} F_1(x) \right\rangle = 0. \quad (174)$$

*Demonstração:* Considerando  $\partial \hat{S}^-$  localmente linear, temos:

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}(x) = 0, \forall x \in V_{x^*}.$$

onde  $V_{x^*}$  é uma vizinhança suficientemente próxima a  $x^*$ , sendo que  $x^*$  satisfaz as hipóteses do teorema (3.14).

Usando a expressão  $\beta(x) = -\frac{\langle \nabla H, F_2 \rangle + \langle \nabla H, F_2 \rangle}{\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle}$ , temos:

$$\begin{aligned} \nabla \beta &= (-1) \left( \frac{1}{\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_2 + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_1 + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\langle \nabla H, F_2 \rangle + \langle \nabla H, F_2 \rangle}{(\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle)^2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_2 + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_1 - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \right), \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \nabla \beta &= \frac{\langle \nabla H, F_2 \rangle + \langle \nabla H, F_2 \rangle}{(\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle)^2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_2 + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_1 - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_2 + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_1 + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \nabla \beta &= \frac{\langle \nabla H, F_2 \rangle + \langle \nabla H, F_2 \rangle}{(\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle)^2} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Derivando novamente a expressão acima:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} &= \frac{\langle \nabla H, F_2 \rangle + \langle \nabla H, F_2 \rangle}{(\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle)^2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \right) + \\
&+ \frac{\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x}}{(\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle)^2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \right) - \\
&- 2 \frac{\langle \nabla H, F_2 \rangle + \langle \nabla H, F_2 \rangle}{(\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle)^3} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_2 + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \right. \\
&- \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_1 - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x}}{(\langle \nabla H, F_2 \rangle - \langle \nabla H, F_1 \rangle)^2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_2 + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \right. \\
&- \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_1 - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

Aplicando no ponto de bifurcação  $x = x^*$  e considerando que  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} &= \frac{1}{\langle \nabla H, F_2 \rangle} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{\langle \nabla H, F_2 \rangle^2} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \cdot \\
&\left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) - \frac{2}{\langle \nabla H, F_2 \rangle^2} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) - \\
&- \frac{1}{\langle \nabla H, F_2 \rangle} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{(\langle \nabla H, F_2 \rangle)^2} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \cdot \\
&\left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Juntando os termos semelhantes e organizando de maneira apropriada:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} &= -\frac{2}{\langle \nabla H, F_2 \rangle} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\langle \nabla H, F_2 \rangle^2} \left( \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) - \right. \\
&- 2 \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \right. \\
&- \left. \left. \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Isolando o termo  $\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} = & \frac{1}{2 \cdot \langle \nabla H, F_2 \rangle} \left( \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) - \right. \\ & - 2 \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \right). \end{aligned}$$

Dessa forma, o termo  $\left\langle \nabla H, \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} F_1^2 \right\rangle$  é dado por:

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla H, \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} F_1^2 \right\rangle = & \frac{1}{2 \cdot \langle \nabla H, F_2 \rangle} \left( \left\langle \nabla H, \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) F_1 \right\rangle \left\langle \nabla H, \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) F_1 \right\rangle - \right. \\ & - 2 \left\langle \nabla H, \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) F_1 \right\rangle \left\langle \nabla H, \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) F_1 \right\rangle + \left\langle \nabla H, \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) F_1 \right\rangle \left\langle \nabla H, \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) F_1 \right\rangle \right). \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla H, \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} F_1^2 \right\rangle = & \frac{1}{2 \cdot \langle \nabla H, F_2 \rangle} \left( \left\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F_1 \right\rangle \left\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F_1 \right\rangle - 2 \left\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F_1 \right\rangle \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F_1 \right\rangle + \left\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F_1 \right\rangle \left\langle \nabla H, \frac{\partial F_2}{\partial x} F_1 \right\rangle \right) \\ = & 0. \end{aligned}$$

Concluimos que:

$$\left\langle \nabla H(x), \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} F_1(x)^2 \right\rangle = 0.$$

■

## 4 APÊNDICE 4

4.1 Aplicações associadas ao campo vetorial  $F_2$ 

Dedicamos essa seção à construção das aplicações  $P$  e  $g$  citadas no último capítulo desse texto, referentes ao campo  $F_2$ , sendo que  $g$  é a ZDM de um sistema de Filippov genérico da forma:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x) & , x \in S_1. \\ F_2(x) & , x \in S_2. \end{cases} \quad (175)$$

De maneira geral, suponha que o sistema (175) possua solução periódica  $\Gamma$ , tangenciando  $\Sigma$  em  $x^*$ . O ponto  $x^*$  deve satisfazer as seguintes hipóteses:

- (i)  $\mathcal{L}_{F_2}H(x^*) = 0$  e  $H(x^*) = 0$ ,
- (ii)  $\mathcal{L}_{F_2}^2H(x^*) < 0$ ,
- (iii)  $\mathcal{L}_{F_d}H(x^*) \neq 0$ .

A construção das aplicações  $P$  e  $g$  é dada pelas proposições (.35) e (.36), a saber:

**Proposição .35.** *Dado um sistema de Filippov como (175) e uma solução periódica  $\Gamma$  do tipo grazing-sliding, tangenciando  $\Sigma$  no ponto  $x^*$  satisfazendo as hipóteses acima. Então, a aplicação de projeção  $P : \mathcal{D} \rightarrow \Pi_N$  na superfície  $\Pi_N$  é dada por:*

$$P(x_0) = \begin{cases} x_0, & x_0 \in \Pi_N, \\ x_0 - \frac{\mathcal{L}_{F_2}H(x_0)}{\mathcal{L}_{F_2}^2H(x^*)}F_2(x_0) + O(v_1^2), & x_0 \notin \Pi_N. \end{cases} \quad (176)$$

*Demonstração:* Devemos encontrar  $T_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $P(x_0) = \phi_2(x_0, T_0)$  satisfazendo:

$$\mathcal{L}_{F_2}H(\phi_2((x_0, T_0))) = 0. \quad (177)$$

Eventualmente, o ponto  $x_0$  pode pertencer a  $\Pi_N$ . Dessa forma  $T_0 = 0$  e  $P(x_0) = x_0$ . Para o caso onde  $x_0 \notin \Pi_N$ , expandindo (177) em torno de  $T_0 = 0$ :

$$\mathcal{L}_{F_2}H(x_0) + \mathcal{L}_{F_2}^2H(x_0)T_0 + O(T_0^2) = 0. \quad (178)$$

Fazendo uso das técnicas anteriores, obtemos:

$$T_0(v_1) = -\frac{\mathcal{L}_{F_2}H(x_0)}{\mathcal{L}_{F_2}^2H(x^*)} + O(v_1^2). \quad (179)$$

Em  $\phi_2(x_0, T_0, p) = P(x_0, p)$ :

$$P(x_0) = x_0 + F_2(x_0)T_0 + O(T_0^2) \quad (180)$$

e, substituindo  $T_0$ :

$$P(x_0) = x_0 - \frac{\mathcal{L}_{F_2}H(x_0)}{\mathcal{L}_{F_2}^2H(x^*)}F_2(x_0) + O(v_1^2). \quad (181)$$

que é a expressão final da  $P$ . ■

A proposição que segue é análoga ao teorema (3.8). Porém, a aplicação ZDM construída está relacionada ao campo  $F_2$ , sendo que  $x^*$  satisfaz as hipóteses (i), (ii), e (iii) citadas acima.

**Proposição .36.** *Considere o sistema s.p.p. (175) e suponha que ele admite em  $x^* \in \partial S^+$  ponto de bifurcação do tipo grazing-sliding, cuja solução periódica está contida em  $S_2$ . Então, a ZDM é dada por:*

$$ZDM(x) = \begin{cases} x, & H(x) > 0; \\ x + \left( \frac{H(x)}{\mathcal{L}_{F_1}H(x)} \right) (F_2(x) - F_1(x)), & H(x) \leq 0; \end{cases}$$

para  $x$  em uma vizinhança suficientemente próxima de  $x^*$ .

*Demonstração:* Assim como na construção da ZDM do caso grazing-sliding para o campo  $F_1$ , tomando  $x_1 = H_{max}(\phi_2(x, t)) \in \Pi_N$  para algum  $x \in \mathcal{D}$ , precisamos inicialmente encontrar  $\delta \in \mathbb{R}$  tal que  $H(\phi_2(x_1, \delta)) = 0$ . Expandindo  $H(\phi_2(x_1, \delta))$  na expressão

$$H(\phi_2(x_1, \delta)) - (-y^2 + H(x_1)) - \mathcal{L}_{F_2}H(x_1)\delta = 0, \quad (182)$$

obtemos:

$$\mathcal{L}_{F_2}^2H(x_1)\frac{\delta^2}{2} + y^2 + O(\delta_3) = 0. \quad (183)$$

Em particular, tal expressão é válida, mesmo no caso em que  $x_1 \notin \Pi_N$ . Reescrevendo (183) como:

$$-\left( -\mathcal{L}_{F_2}^2H(x_1)\frac{\delta^2}{2} \right) + y^2 + O(\delta_3) = 0. \quad (184)$$

e escrevendo  $A = -\mathcal{L}_{F_2}^2H(x_1)\frac{\delta^2}{2}$ , temos:

$$(\sqrt{A} - y)(\sqrt{A} + y) = 0. \quad (185)$$

Considerando  $\delta < 0$ , temos:

$$\sqrt{-\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x_1) \frac{\delta^2}{2} + y} = \delta \sqrt{\frac{-\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x_1)}{2} + y} = 0 \quad (186)$$

Tomando  $f : D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x_1, y, \delta) = y + \delta \sqrt{-\frac{\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x_1)}{2}}$ , note que:

- $f(x^*, 0, 0) = 0$ ,
- $\frac{\partial f}{\partial \delta}(x^*, 0, 0) = \sqrt{-\frac{\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x^*)}{2}} > 0$ .

e, conseqüentemente, pelo teorema da função implícita, existe uma função suave  $\delta(x_1, y)$  bem definida em uma vizinhança  $V_{(x^*, 0)}$  de  $(x^*, 0)$  de tal forma que:

$$f(x_1, y, \delta(x_1, y)) = 0, \quad (187)$$

$\forall (x, \delta) \in V_{(x^*, 0)}$ .

Dado que o TFI garante a diferenciabilidade de  $\delta(x_1, y)$ , tomando os termos de primeira ordem da expansão em séries de Taylor em relação a  $y$ , temos:

$$\delta(x_1, y) = \delta(x^*, 0) + \frac{\partial \delta}{\partial y}(x^*, 0)y + O(y^2). \quad (188)$$

Analogamente ao caso grazing-sliding, obtemos:

$$\delta(x_1, y) = -\sqrt{\frac{-2}{\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x^*)}}y + O(y^2). \quad (189)$$

Considerando  $x_2 = \phi_2(x_1, \delta)$ , o valor  $\delta_2 \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $\mathcal{L}_{F_2} H(\phi_s(x_2, \delta_2)) = 0$  é obtido de forma análoga ao caso grazing-sliding, dado por  $\delta_2 = -\delta + O(y^2)$ , ou seja:

$$\delta_2(x_1, y) = \sqrt{\frac{-2}{\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x^*)}}y + O(y^2). \quad (190)$$

Considerando que  $ZDM(x_1) = \phi_2(\phi_s(\phi_2(x_1, \delta), \delta_2), -\delta - \delta_2)$  e tomando  $T = -\delta - \delta_2$ , obtemos de forma análoga que:

$$ZDM(x_1) = x_1 + (F_s(x_1) - F_2(x_1))\delta_2 + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} F_2 - \frac{\partial F_s}{\partial x} F_s \right) \frac{\delta_2^2}{2}. \quad (191)$$

Do fato que  $\mathcal{L}_{F_2} H(x_1) = 0$ , é fácil ver que  $F_s - F_2 = 0$ . Além disso, temos:

$$\frac{\partial F_s}{\partial x}(x_1) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_1) - \nabla C(x_1)F_d(x_1) - C(x_1) \frac{\partial F_d}{\partial x}(x_1), \quad (192)$$

e, novamente usando o fato citado acima, obtemos:

$$\frac{\partial F_s}{\partial x}(x_1) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_1) - \nabla C(x)F_d(x_1). \quad (193)$$

Dessa forma, segue que:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}F_2(x_1) - \frac{\partial F_s}{\partial x}F_s(x_1) = \langle \nabla C(x_1), F_2(x_1) \rangle F_d(x_1). \quad (194)$$

onde  $C(x_1) = \frac{\mathcal{L}_{F_1}H(x_1)}{\mathcal{L}_{F_d}H(x_1)}$  e, conseqüentemente  $\nabla C(x_1) = -\frac{\nabla \mathcal{L}_{F_2}H(x_1)}{\mathcal{L}_{F_1}H(x_1)}$ . Portanto:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}F_2(x_1) - \frac{\partial F_s}{\partial x}F_s(x_1) = -\frac{\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x_1)}{\mathcal{L}_{F_1}H(x_1)}F_d(x_1). \quad (195)$$

Concluimos que:

$$ZDM(x_1) = x_1 + \frac{\delta_2^2}{2} \left( -\frac{\mathcal{L}_{F_2}^2 H(x_1)}{\mathcal{L}_{F_1}H(x_1)} \right) F_d(x_1). \quad (196)$$

Substituindo  $\delta_2$  e  $y^2 = H(x_1)$  em (196):

$$ZDM(x_1) = x_1 + \frac{H(x_1)}{\mathcal{L}_{F_1}H(x_1)}F_d(x_1) + O(y^2). \quad (197)$$

que era o que queríamos encontrar. ■



## BIBLIOGRAFIA

- [1] BARTLE, R. G. *The elements of real analysis*. John Wiley and sons. 1976.
- [2] BERNARDO, M.; BUDD, C. J.; CHAMPNEYS, A. R.; KOWALKZYK, P. *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*. Springer. 2008.
- [3] BERNARDO, M.; KOWALKZYK, P.; NORDMARK, A. *Bifurcations of dynamical systems with sliding: derivation of normal-form mappings*. Elsevier. 2002.
- [4] BIÁK, M.; HANUS, T.; JANOVSÁ, D. *Some applications of Filippov systems*. Elsevier. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2013.
- [5] CASSIANO, J., LIMA, M.F.S., FONSECA, A. *Normally Hyperbolic Sets in Discontinuous Dry Friction Oscillator*. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2015.
- [6] HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations*. Society of Industrial and Applied Mathematics. 2002.
- [7] NORDMARK, A.; KOWALCZYK, P. *A codimension-two scenario of sliding solutions in grazing-sliding bifurcations*. *Nonlinearity*. Institute of Physics Publishing. 2005.
- [8] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*. Springer Science & Business Media. 2013.
- [9] UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer-Verlag. Berlin. 1992.
- [10] VERHULST, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag. Berlin. 1989.
- [11] WARD, M. J. *Basic Floquet Theory*. Vancouver. (Apostila)