Universidade Federal do ABC

Carlos Eduardo Toffoli

Aspectos qualitativos de certas equações do tipo Camassa-Holm

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do IFSP

Santo André, 2023

Universidade Federal do ABC

Carlos Eduardo Toffoli

Aspectos qualitativos de certas equações do tipo Camassa-Holm

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do ABC como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática .

Orientador: Prof. Dr. Igor Leite Freire.

Santo André

2023

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Toffoli, Carlos Eduardo
Aspectos qualitativos de certas equações do tipo Camassa-Holm / Carlos Eduardo Toffoli. — 2023.

72 fls.

Orientador: Igor Leite Freire

Tese (Doutorado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2023.

1. Camassa-Holm. 2. Wave Breaking de Solução. 3. Quantidade Conservada. 4. Propriedade de Persistência. I. Freire, Igor Leite. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2023. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência do orientador.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato, CARLOS EDUARDO TOFFOLI realizada em 15 de Junho de 2023:

Documento assinado digitalmente
gov.br ALISSON DAROS SANTOS
Data: 20/06/2023 15:26:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____
Prof.(a) ALISSON DAROS SANTOS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

Igor Ambo Ferra
____
Prof.(a) IGOR AMBO FERRA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Renata de Oliveira Figueira
____
Prof.(a) RENATA DE OLIVEIRA FIGUEIRA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Documento assinado digitalmente
gov.br WELINGTON VIEIRA ASSUNCAO
Data: 20/06/2023 21:42:21-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____
Prof.(a) WELINGTON VIEIRA ASSUNCAO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

____
Prof.(a) JÚLIO CÉSAR SANTOS SAMPAIO
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

____
Prof.(a) MAURICIO FIRMINO SILVA LIMA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

____
Prof.(a) NAZIME SALES FILHO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

____
Prof.(a) NORBERTO ANIBAL MAIDANA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Documento assinado digitalmente
gov.br MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS
Data: 21/06/2023 06:26:42-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____
Prof.(a) MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

DEDICATÓRIA

Dedico essa tese à minha mãe, Maria Elena Santana (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todas as pessoas que contribuíram para a realização desta tese.

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador Igor Leite Freire, cujo apoio incansável, orientação e conselhos valiosos foram fundamentais para a concretização deste projeto, mas mais importante, pelo carinho, compreensão, pizzas, karaokê, conversas e tudo que me ajudou a manter a sanidade durante alguns períodos extremamente difíceis. Igor, obrigado pela oportunidade e pela confiança!

Gostaria também de agradecer ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, pelo apoio financeiro e logístico prestado durante todo o desenvolvimento da pesquisa.

Aos membros da banca, Alisson Daros Santos, Igor Ambo Ferra, Renata De Oliveira Figueira, Welington Vieira Assunção e Marcus Antonio Mendonça Marrocos pelas considerações e sugestões que enriqueceram esta tese. Muito obrigado!

Aos professores da UFABC por toda dedicação e ajuda.

Aos meus amigos, Cris, Thiago, Samuel, Caroline e Rita. Obrigado pelo apoio, motivação e momentos de descontração. Conseguimos!!

Nazime e Barbara Müller, não conseguiria sem vocês, sem nossos jogos e danças. Quem conhece vocês percebe de início que são maravilhosos, já no final, parece que está no início.

À minha irmã de aniversário, engraçada, fiel, carinhosa, engraçada, inteligente, engraçada, *magavilhosa*, (já falei engraçada?), Mônica. Sou muito feliz por ter você na minha vida. *Omiligado*, Môniquinha!!

Aos meus amigos e companheiros que me ajudaram a concluir este projeto, Julio (in memoriam), Maycon, Maura, Eve, Priscila Viana, João, Bárbara, Stê, Gabriel e Ed. Obrigado por todo apoio, conversas e risadas

Por fim, mas não menos importante, gostaria de agradecer a minha família, Rô, Laura, Luiza, Matheus, Daniel, Ju e meu pai pelo apoio constante e incentivo durante todo o processo de pesquisa. Destaco aqui as duas pessoas mais importantes da minha vida. Marco, sem você isso tudo nem teria começado. Obrigado, meu irmão, por estar do meu lado em todos os momentos. Ligia, minha esposa e companheira, a pessoa mais carinhosa, inteligente e bondosa que eu já vi. Aprendo todos os dias com você. Obrigado por estar sempre ao meu lado e me fazer melhor. Você é a responsável por esse título. Te amo!

Minha mãe. Sei que estaria orgulhosa agora. Foi difícil, mas consegui.

Estou grato por todas as contribuições e por fazerem deste projeto uma realidade. Obrigado a todos!

Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda.

Paulo Freire

RESUMO

Nesse trabalho estudamos a boa colocação, a formação de singularidades, propriedades de persistência de solução, comportamento assintótico e continuação única para soluções de uma equação do tipo Camassa-Holm com uma função arbitrária e um parâmetro não negativo relacionado à dissipação. Descrevemos cenários para a ocorrência de *wave breaking* quando a função é par e o dado inicial é ímpar e também para dados ou funções iniciais mais gerais, desde que estas satisfaçam certas condições em suas primeiras derivadas.

Palavras-chave: Camassa-Holm, *wave breaking* de solução, quantidade conservada, propriedade de persistência.

ABSTRACT

In this work we study well-posedness, formation of singularities, persistence properties of solutions, asymptotic behavior and unique continuation properties for solutions of a Camassa-Holm type equation with an arbitrary function and a non-negative parameter corresponding to dissipation. We describe scenarios for the occurrence of wave breaking when the function is even and subject to an odd initial datum, as well as for more general initial data or functions, provided that they satisfy certain conditions on their first derivatives.

Keywords: Camassa-Holm, wave breaking of solutions, Conserved quantities, Persistence properties.

CONTEÚDO

1 INTRODUÇÃO

Para introduzir o problema da nossa tese, deixe-nos apresentar a equação de Camassa-Holm (CH) que foi inicialmente deduzida por Fuchsteiner e Fokas em [1] e posteriormente estudada por Roberto Camassa e Darryl D. Holm em [2]:

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x - uu_{xxx} - 2u_x u_{xx} = 0, \tag{1}$$

que descreve a altura $u = u(t, x)$ de uma onda viajante de águas rasas. Em [3] são estudadas as condições que garantem o desenvolvimento de *blow-up* e *wave breaking* na solução do problema, que foi a motivação principal do capítulo 4. Em [4] são estudadas propriedades de continuação única para soluções da CH, que junto com [5, 6, 7, 8], motivaram as ideias do capítulo 5. Entre as propriedades que a equação CH possui, podemos ver:

- estrutura bi-Hamiltoniana completamente integrável;
- uma quantidade infinita de leis de conservação;
- soluções *peakon*;
- soluções do tipo soliton.

Na pág. 3871 de [4] são dadas diversas referências para verificar essas propriedades.

Em 2019, Darós e Arruda escrevem [9] que estuda a instabilidade de soluções de ondas viajantes elípticas da equação modificada de Camassa-Holm (mCH) e foi a inspiração para escrevermos [10] em 2020.

Estudamos nesta tese o problema do tipo Camassa-Holm:

$$\begin{cases} u_t - u_{txx} + 3uu_x - uu_{xxx} - 2u_x u_{xx} + \lambda(u - u_{xx}) + \partial_x h(u) &= 0, \\ u(0, x) &= u_0(x). \end{cases}$$

em que $\lambda \geq 0, h \in C^\infty(\mathbb{R})$ é Lipschitz, $h(0) = 0$ e $u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}), s > 3/2$.

Mais precisamente, estudamos a solução u de forma qualitativa quando o dado inicial u_0 possui algumas características, ou seja, quais propriedades a solução herda do dado inicial e quais singularidades u pode desenvolver.

No capítulo 2 fazemos uma revisão teórica para facilitar a leitura e indicar os teoremas que utilizamos no decorrer do texto. No capítulo 3 levantamos a hipótese que o problema estudado é bem posto e a demonstramos utilizando o Teorema de Kato. No capítulo 4 demonstramos que se a solução u desenvolve *blow-up*, então esta singularidade ocorre como *wave breaking* e apresentamos algumas condições que garantem o desenvolvimento de uma *wave breaking* em um tempo $T(\lambda, u_0) < \infty$, utilizando as ideias de [11, 12, 10]. No capítulo 5 mostramos que se u_0 e u_0' têm decaimento exponencial, então essa propriedade é herdada por u, u_x, e se u se anula em um conjunto aberto, a solução u só pode ser a solução nula, utilizando as ideias em [5, 6, 7]. No capítulo 6 fazemos um breve comentário dos resultados obtidos e uma sugestão para trabalho futuro.

Por fim, vale resaltar que esta tese gerou dois artigos na *Journal of Differential Equations*: O artigo [10] publicado em 2020 e o artigo [13] publicado em 2023.

2 REVISÃO TEÓRICA

Neste capítulo iremos fornecer uma revisão teórica das principais ferramentas utilizadas ao longo do texto. A bibliografia utilizada na construção deste capítulo foi principalmente [12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. Também foram utilizadas as referências [11, 22, 23] na construção das definições e das notações utilizadas.

Apresentaremos alguns exemplos que serão retomados nos capítulos seguintes com o propósito de facilitar o entendimento e tornar a leitura mais fluida.

O capítulo está dividido em noções preliminares, operadores, semigrupo, funções $L^p(\mathbb{R})$, espaço de Schwartz, transformadas de Fourier, distribuições temperadas e o espaço de Sobolev.

Optamos por utilizar o ambiente de ***Lema*** para designar resultados conhecidos e demonstrados na bibliografia, o de ***Proposição*** para resultados que não são originais, mas que a demonstração é nossa, ***Teorema*** para os resultados originais da tese e ***Corolário*** quando a demonstração for imediata do resultado anterior.

2.1 NOÇÕES PRELIMINARES

Seja X um espaço vetorial real (ou complexo). Uma ***norma*** sobre X é uma função $\|\cdot\|_X : X \to [0,\infty)$ tal que

1. $\|x\|_X = 0$ se, e somente se $x = 0$,
2. $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \|x\|_X, \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$),
3. $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X, \forall x, y \in X$.

Dois espaços vetoriais normados X e Y são ditos ***espaços vetoriais isométricos*** se existe uma bijeção linear $L : X \to Y$ tal que $\|L(x)\|_Y = \|x\|_X, \forall x \in X$.

Duas normas $\|\cdot\|_{X_1}$ e $\|\cdot\|_{X_2}$ sobre um espaço vetorial X são ditas ***normas equivalentes*** se existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha \|x\|_{X_1} \leq \|x\|_{X_2} \leq \beta \|x\|_{X_1}, \forall x \in X$.

Considere X um espaço vetorial normado, dizemos que a sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ é uma ***sequência de Cauchy*** se

$$\lim_{n,m \to \infty} \|x_n - x_m\|_X = 0.$$

Chamamos de ***espaço de Banach*** um espaço vetorial normado completo, ou seja, toda sequência de Cauchy deste espaço converge para um elemento nele mesmo.

A grande maioria dos resutados que seguem foram retirados da bibliografia e estão identificados como lemas. Optamos por usar o conjunto $\mathbb{R}$ ao invés de $\mathbb{R}^n$ sempre que este aparece nas demonstrações, visto que nosso objetivo se dá em $\mathbb{R}$.

Definição 2.1.1. *Seja X um espaço de Banach real. Então um* ***funcional linear*** *sobre X é uma transformação linear limitada de X em $\mathbb{R}$.*

O espaço de todos os funcionais lineares sobre X é chamado ***espaço dual*** de X e é denotado por X^* .

Definição 2.1.2. *Seja $y \in X^*$. Um espaço de Banach é chamado* ***reflexivo*** *se a isometria $x \mapsto l_x$ de $X \to X^{**}$ definida por $l_x y = y(x)$ é sobrejetiva.*

Definição 2.1.3. *Seja H um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Um* ***produto interno*** *$\langle x, y \rangle_H$ é uma transformação $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) com as seguintes propriedades:*

1. *Para todo $x \in H$, a transforamção $y \mapsto \langle x, y \rangle_H$ é linear.*
2. *$\langle y, x \rangle_H = \overline{\langle x, y \rangle_H}, \forall x, y \in H$.*
3. *$\langle x, x \rangle_H \geq 0, \forall x \in H$ com a igualdade ocorrendo se, e somente se $x = 0$.*

Lema 2.1. *Seja H um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Então para todo $x, y \in H$ temos*

$$|\langle x, y \rangle_H|^2 \leq \langle x, x \rangle_H \langle y, y \rangle_H. \tag{2}$$

Além disso, a espressão

$$\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x \rangle_H}$$

define uma norma em H.

Demonstração. *[16] págs 180-181.* □

A desigualdade (2) é chamada de ***desigualdade de Cauchy-Schwarz***. A notação acima, embora possa parecer carregada, é interessante em um primeiro momento para fazermos a distinção e deixar claro para o leitor em qual espaço estamos trabalhando. Pode ocorrer também que um espaço vetorial tenha mais de uma norma (ou produto interno). Durante o texto deixaremos claro qual norma (ou produto interno) estamos utilizando. Quando não houver perigo de confusão, adotaremos uma notação mais simples.

Um ***espaço de Hilbert*** é um espaço vetorial com produto interno, completo.

2.2 OPERADORES

Sejam X e Y espaços de Banach. Um ***operador linear*** de X em Y é o par $(D(A), A)$ consistindo em um subespaço $D(A) \subset X$ (chamado de ***domínio do operador***) e uma transformação linear $A : D(A) \to Y$.

A ***imagem do operador*** $(D(A), A)$ é um subespaço $\mathcal{R}(A) \subset Y$ definido por $\mathcal{R}(A) = \{y \in Y | y = A(x), \text{para algum } x \in D(A)\}$.

O ***núcleo do operador*** $(D(A), A)$ é um subespaço $\mathcal{N}(A) \subset X$ definido por $\mathcal{N}(A) = \{x \in X | A(x) = 0\}$.

Também podemos definir, caso exista, o ***operador inverso*** de $(D(A), A)$, como o operador $(\mathcal{R}(A), A^{-1})$ que associa todo $y \in \mathcal{R}(A)$ a um único $x \in D(A)$ tal que, $y = A(x)$, ou seja, $A^{-1}(y) = x$.

Lema 2.2. *Sejam X e Y espaços de Banach e $(D(A), A)$ um operador linear de X em Y com imagem $\mathcal{R}(A)$. Então ocorrem as seguintes afirmações:*

1. *O operador inverso $(\mathcal{R}(A), A^{-1})$ existe se, e somente se, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.*

2. *Se o operador inverso existir, então ele é linear.*

Demonstração. *[16] pág. 230.* □

Um operador linear $(D(A), A)$ de X em Y é dito ***operador limitado*** se existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|A(x)\|_Y \leq C\,\|x\|_X \qquad \forall x \in D(A). \tag{3}$$

O menor valor de C em que (3) ocorre chamaremos de ***norma do operador***. Ou seja, o número não negativo

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|_X \neq 0}} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\|_X = 1}} \|A(x)\|_Y\,.$$

Definição 2.2.1. *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que X está **continuamente mergulhado** em Y e escrevemos $X \hookrightarrow Y$, se $X \subset Y$ e existe uma constante C tal que $\|u\|_Y \leq C\,\|u\|_X\,,\ \forall u \in X$.*

O ***gráfico de um operador*** linear $(D(A), A)$ é o conjunto de pares ordenados

$$\Gamma(A) := \{(x, Ax) | x \in D(A)\} \subset X \times Y.$$

Dado um operador linear $(D(A), A)$, denotamos por $(D(A^*), A^*)$ o ***operador adjunto*** de $(D(A), A)$ definido pela relação

$$\langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, A^*y\rangle_X$$

para todo $x \in D(A)$ e $y \in D(A^*)$. Se $(D(A), A) = (D(A^*), A^*)$, dizemos que o operador é ***auto-adjunto***. É claro que neste caso precisamos ter $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*) = D(A) = D(A^*)$.

Dizemos que um operador auto-adjunto $(D(A), A)$ é ***positivo*** se

$$\langle Ax, x\rangle_X \geq 0,\ \forall x \in D(A).$$

2.3 SEMIGRUPO

As definições e lemas apresentadas a seguir foram tiradas de [15] e [16]. Apresentamos apenas um recorte para dar uma base mínima para o leitor acompanhar os lemas seguintes.

Definição 2.3.1. *Seja X um espaço de Banach. Uma família $\{T(t)\}$, $t \geq 0$ de operadores lineares limitados em X é chamada **semigrupo de operadores lineares limitados em** X, se são satisfeitas as seguintes propriedades:*

1. $T(t+s) = T(t)T(s), t, s \geq 0$;

2. $T(0) = I$.

Um semigrupo de operadores lineares limitados $T(t)$ é ***uniformemente contínuo*** se

$$\lim_{t \to 0} \|T(t) - I\|_X = 0.$$

Definição 2.3.2. *Seja $\{T(t)\}$, $t \geq 0$, um semigrupo de operadores lineares limitados sobre o espaço de Banach X. O **gerador infinitesimal do semigrupo** é o operador A definido por*

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}$$

e o domínio de A é o conjunto de todos os vetores $x \in X$ para o qual este limite existe.

Definição 2.3.3. *Seja A o gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t)\}$, $t \geq 0$ de operadores lineares limitados sobre X. Então e^{tA}, $t \geq 0$ denota o semigrupo gerado por A. Ou seja,*

$$T(t) = e^{tA}.$$

Lema 2.3. *Um operador linear A é um gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.*

Demonstração. *[15], pág. 2, teorema 1.2.* □

Lema 2.4. *Seja $T(t)$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados. Então,*

(a) existe uma constante $\omega \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$;

(b) existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$;

(c) o operador A na parte (b) é o gerador infinitesimal de $T(t)$;

(d) $t \mapsto T(t)$ é diferenciável e

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Demonstração. *[15], pág. 3, corolário 1.4.* □

Definição 2.3.4. *Um semigrupo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ de operadores lineares limitados em X é um* ***semigrupo fortemente contínuo*** *de operadores lineares limitados ou C_0* ***semigrupo****, se*

$$\lim_{t \to 0} T(t)x = x$$

para todo $x \in X$.

2.4 FUNÇÕES $L^p(\mathbb{R})$

Nesta seção, iremos admitir familiaridade com conceitos e terminologia da Teoria da Medida. O leitor poderá ler mais sobre este assunto em [18], apêndice C.

Definição 2.4.1. *Sejam $\mathcal{A} \neq \emptyset$ um espaço de medida e $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Sejam ainda as funções $f^+, f^- : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ definidas por $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. Uma função f é dita* ***Lebesgue integrável*** *(ou* ***absolutamente integrável****) se*

$$\int_{\mathcal{A}} f^+(x)dx < \infty$$

e

$$\int_{\mathcal{A}} f^-(x)dx < \infty.$$

Neste caso, diremos que

$$\int_{\mathcal{A}} f(x)dx = \int_{\mathcal{A}} f^+(x)dx - \int_{\mathcal{A}} f^-(x)dx.$$

Seja $1 \leq p < \infty$. O conjunto de todas as funções mensuráveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

é denotado por $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Aqui pedimos licença para o abuso da notação $\|\cdot\|_p$. De fato, a expressão anterior não caracteriza uma norma e sim uma pseudo norma como veremos adiante.

Lema 2.5. *(**Desigualdade de Hölder** para integrais). Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$, então $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.*

Demonstração. *[18] pág. 8.* □

Lema 2.6. *(**Desigualdade de Minkowski** para integrais). Considere* $1 \leq p < \infty$*. Se* $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$*, então* $f + g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ *e* $\|f + g\|_p \leq \|f\|_q + \|g\|_q$.

Demonstração. *[18] págs. 8-9.* □

Exemplo 2.7. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \neq 1 \\ 1 & se \quad x = 1. \end{cases}$$

Então

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} = 0.$$

Mas $f \neq 0$*. Isto mostra que* $\|\cdot\|_p$ *não define uma norma em* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$*, e sim uma **pseudo norma**.*

Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é equivalente a g se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ exceto para um conjunto de medida nula. Denotando a classe de equivalência de uma função f por $[f]$, podemos ver que o conjunto quociente

$$L^p(\mathbb{R}) := \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})\},$$

munido das operações $[f] + [g] = [f + g]$ e $c[f] = [cf]$ fazem de $L^p(\mathbb{R})$ um espaço vetorial. Observe que as operações estão bem definidas. Além disso, definindo

$$\|[f]\|_{L^p(\mathbb{R})} := \|f\|_p,$$

tornamos $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ uma ***norma em*** $L^p(\mathbb{R})$. Veja mais em [18].

Lema 2.8. *Se* $1 \leq p < \infty$*, então* $L^p(\mathbb{R})$ *é um espaço de Banach com a norma*

$$\|[f]\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Demonstração. *[18] págs. 10-11.* □

Seja $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções mensuráveis que são limitadas exceto em um conjunto de medida nula N. Isto é, $|f(x)| \leq K, \forall x \in \mathbb{R} \setminus N$. Para todo $N \subset \mathbb{R}$ de medida nula, tome

$$S_f(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\}.$$

Definimos

$$\|f\|_\infty := \inf\{S_f(N) : N \subset \mathbb{R} \textit{ é um conjunto de medida nula}\}.$$

Novamente, pode ocorrer que $\|f\|_\infty = 0$ para alguma função f que não seja identicamente nula. Corrigimos este problema da mesma forma que fizemos anteriormente, com classes de equivalência. O conjunto quociente

$$L^\infty(\mathbb{R}) := \{[f] : f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})\}$$

munido das mesmas operações citadas fazem de $L^\infty(\mathbb{R})$ um espaço vetorial. Além disso, definindo

$$\|[f]\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \|f\|_\infty,$$

tornamos $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ uma ***norma em*** $L^\infty(\mathbb{R})$.

Lema 2.9. *$L^\infty(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. *[18] pág. 13.* □

Lema 2.10. *Sejam $f(t), g(t)$ funções não negativas e integráveis em um intervalo $[0, T_0]$. Se*

$$u'(t) \leq f(t)u(t) + g(t),$$

então

$$u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t f(s)ds} + \int_0^t g(\tau)d\tau.$$

A desigualdade do Lema 2.10 é conhecida como ***desigualdade de Grönwall*** e também pode ser vista da forma a seguir.

Se $f(t)$ é não negativa, $t > 0$, e

$$u(t) \leq A + \int_0^t f(s)u(s)ds,$$

então

$$u(t) \leq Ae^{\int_0^t f(s)ds}.$$

A demonstração da desigualdade de Grönwall é deixada como exercício em [14], pág. 29 e [16], pág. 10.

2.5 ESPAÇO DE SCHWARTZ

O ***espaço de Schwartz*** (ou das ***funções*** C^∞ ***rapidamente decrescentes***), denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, é a coleção das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tais que, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < \infty$$

para todo par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Chamamos de ***suporte*** de f o conjunto

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega | f(x) \neq 0\}}.$$

Denotamos por $C_0^\infty(\mathbb{R})$, o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis sobre os reais, com suporte contido em um conjunto compacto. Tal conjunto chamamos de conjuto das ***funções testes***. É fácil ver que $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Porém, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \not\subset C_0^\infty(\mathbb{R})$, basta tomar como exemplo a função [1] $\gamma(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Suponha que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\exists c > 0$ tal que, $|x^\alpha f(x)| < c$, ou seja,

$$|f(x)| < \frac{c}{|x|^\alpha}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \forall \alpha \in \mathbb{N}.$$

Da relação anterior, podemos concluir que se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então f é absolutamente integrável e

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0.$$

Seja $1 \leq p < \infty$. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\exists c > 0$ tal que $|f(x)| < \frac{c}{|x|^{p+1}}, \forall x \in \mathbb{R}^*$. Logo $f \in L^p(\mathbb{R})$. De fato,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = \int_{|x|\leq 1} |f(x)|^p dx + \int_{|x|>1} |f(x)|^p dx$$

$$\leq 2\max\{1, \|f\|_{\alpha,\beta}^p\} + \int_{|x|\geq 1} \left(\frac{c}{|x|^2}\right)^p dx < \infty.$$

Portanto, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $f \in L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$.

1 Veja mais em [17], pág. 282.

2.6 A TRANSFORMADA DE FOURIER

A bibliografia utilizada nesta seção foi principalmente [17] e [20], porém adotamos a notação de [11] pela ênfase na transformada de Fourier e pela estética mais agradável na opinião deste autor. Começaremos introduzindo a transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R})$.

Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. A ***transformada de Fourier*** de f é a função $\mathcal{F}f = \hat{f}$ dada por

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

Lema 2.11. *A transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ é uma função contínua, limitada e satisfaz a desigualdade*

$$\left\| \hat{f} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (2\pi)^{-1/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Em particular, a aplicação $f \mapsto \hat{f}$ é um operador limitado de $L^1(\mathbb{R})$ em $L^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Demonstração. *[17] pág. 274-275.* □

Lema 2.12. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $n \in \mathbb{N}$, então $f^{(n)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e*

$$\mathcal{F}\left(f^{(n)}\right)(\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}(f)(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. *[20] pág. 225.* □

Lema 2.13. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Demonstração. *[20] pág. 226-227.* □

Lema 2.14. *A transformada de Fourier $\mathcal{F}$ define uma bijeção linear de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em si mesmo e sua inversa é dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\cdot x} f(\xi)d\xi, \forall x \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Demonstração. *[20] págs.226-229.* □

Corolário 2.15. *Se $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então vale a fórmula de inversão*

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\overset{\curlywedge}{f}\right)(x) = f(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\cdot x}\overset{\curlywedge}{f}(\xi)d\xi.$$

Definimos o ***produto interno em*** $L^2(\mathbb{R})$ por

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}g(x)dx.$$

Lema 2.16. *A **identidade de Parseval** vale em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ou seja, se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então*

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \left\langle \overset{\curlywedge}{f}, \overset{\curlywedge}{g}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

e

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\|\overset{\curlywedge}{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Demonstração. *[17] pág. 178.* □

A ***convolução*** de duas funções integráveis $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é definida pela fórmula

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

sempre que for possível calcular a integral. No caso em que $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, temos que $f * g$ está bem definida e vale

$$\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

A convolução é associativa, comutativa, tem a propriedade distributiva em relação a adição e se uma função f estiver multiplicada por uma constante, a convolução de f por g também estará multiplicada por esta mesma constante, ou seja, se $\lambda \in \mathbb{C}$, f, g e h são funções para que a convolução esteja bem definida, então:

1. $(\lambda f) * g = \lambda(f * g) = f * (\lambda g)$;
2. $(f + g) * h = f * h + g * h$;
3. $f * g = g * f$;
4. $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Lema 2.17. *Sejam $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e g contínua e limitada.*

(i) $f * g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *e* $(f * g)^{(\alpha)} = f^{(\alpha)} * g$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}$.

(ii) *Suponha que*

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |y|)^{\alpha} |g(y)| dy < \infty$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}$. *Então* $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Demonstração. *[17] págs.181-182.* □

Proposição 2.18. *Sejam* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. *Então,* $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *e*

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = (2\pi)^{1/2} \mathcal{F}(f)(\xi) \mathcal{F}(g)(\xi), \forall\, \xi \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. *[20] pág. 234-235.*

2.7 DISTRIBUIÇÃO TEMPERADA

Iremos introduzir agora o conceito de funções generalizadas ou distribuição temperada associada a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. As definições e lemas desta seção foram retirados de [17].

Uma ***distribuição temperada*** é um funcional linear $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ com a propriedade que existe uma sequência $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que

$$T(\varphi) = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(x) \varphi(x) dx \tag{4}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. A coleção de todas as distribuições temperadas forma um espaço vetorial sobre os complexos e denotaremos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Por hora, iremos adotar a notação

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle,\ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Lema 2.19. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *contínua e limitada. Então* f *define um elemento* $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *através da fórmula*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Demonstração. *[17] págs. 184-185.* □

Nem toda distribuição provém de uma função contínua e limitada. Um exemplo de uma distribuição que não é uma função contínua e limitada é a distribuição δ de Dirac.

Exemplo 2.20. *Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. A **distribuição δ de Dirac** centrada em x é definida por*

$$\delta_x(\varphi) = \langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x).$$

Quando a distribuição δ de Dirac for centrada no zero, escrevemos apenas δ.

Definição 2.7.1. *Sejam $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então a convolução*

$$\langle f * \varphi, \Psi \rangle = \langle f, \varphi^- * \Psi \rangle,\ \Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

em que $\varphi^-(x) = \varphi(-x)$.

Definição 2.7.2. *Seja*

$$L = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial^i}{\partial x^i},$$

*com $a_i \in \mathbb{R}, \forall\ 0 \leq i \leq n$, um operador diferencial com coeficientes constantes. A **solução fundamental** da equação associada ao operador L é uma distribuição $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ satisfazendo a equação $Lg = \delta$. A distribuição g é chamada de **função de Green** para o operador L.*

Observe que se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, e tomando $f = g * u$, então $Lf = u$, uma vez que δ é o elemento neutro da convolução. Ainda, se o operador L admite inversa, então $L^{-1}u = g * u$.

Definição 2.7.3. *Sejam $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{N}$. Então a **derivada da distribuição** f de ordem α é definida por*

$$\left\langle f^{(\alpha)}, \varphi \right\rangle = (-1)^{\alpha} \left\langle f, \varphi^{(\alpha)} \right\rangle.$$

Definição 2.7.4. *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e define uma distribuição temperada dada por*

$$\left\langle \widehat{f}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx\varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(\xi)d\xi f(x)dx,$$

ou seja,

$$\left\langle \widehat{f}, \varphi \right\rangle = \left\langle f, \widehat{\varphi} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

A transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se define de forma análoga a definida em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.21. *A transformada de Fourier da distribuição δ de Dirac é $\widehat{\delta} = (2\pi)^{-1/2}$.*

De modo análogo, definimos a ***inversa da transformada de Fourier*** por

$$\left\langle \check{f}, \varphi \right\rangle = \left\langle f, \check{\varphi} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

E por fim, temos que se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{N}$ então

$$\xi^{\alpha} \mathcal{F}\left(f\right)(\xi) = (-i)^{\alpha} \mathcal{F}\left(f^{(\alpha)}\right)(\xi)$$

e

$$\frac{d^{\alpha}}{d\xi^{\alpha}} \mathcal{F}\left(f\right)(\xi) = (-i)^{\alpha} \mathcal{F}\left(x^{\alpha} f\right)(\xi)$$

em que $f^{(\alpha)}$ e $\frac{d^{\alpha}}{d\xi^{\alpha}} \mathcal{F}\left(f\right)(\xi)$ denotam a derivada de ordem α de f e $\mathcal{F}(f)$, respectivamente.

2.8 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Nesta seção utilizamos principalmente as referências [14, 16, 17, 19, 21, 12]. Seguimos utilizando o mesmo critério citados no início do capítulo para os ambientes de lema, proposição e teorema. Os exemplos propostos serão úteis nos capítulos seguintes.

Definição 2.8.1. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Os **espaços de Sobolev** (de tipo $L^2(\mathbb{R})$) são os seguintes subconjuntos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$*

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) | (1 + \xi^2)^{s/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})\},$$

*munido do **produto interno em** $H^s(\mathbb{R})$*

$$\langle f, g \rangle_{H^s(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^s \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \tag{5}$$

*e **norma induzida em** $H^s(\mathbb{R})$*

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Com o produto interno (5) e a norma (6), $H^s(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert.

Seja $k \in \mathbb{R}$, definimos o ***operador*** Λ^k sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ por

$$\Lambda^k(f) = \mathcal{F}^{-1}\left((1+\xi^2)^{k/2}\widehat{f}\right).$$

Exemplo 2.22. *O operador $\Lambda^k : H^s(\mathbb{R}) \to H^{s-k}(\mathbb{R})$ é um isomorfismo isométrico. De fato*

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^{s-k}(1+\xi^2)^k|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^{s-k}|(1+\xi^2)^{k/2}\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

de onde concluímos

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^{s-k}|\mathcal{F}(\Lambda^k(f))(\xi)|^2 d\xi = \left\|\Lambda^k(f)\right\|^2_{H^{s-k}(\mathbb{R})}.$$

Exemplo 2.23. *Considere o operador Λ^2 sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Então a solução fundamental definida em 2.7.2 para este operador é dada por*

$$g(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

De fato, observe que

$$\Lambda^2(g) = \mathcal{F}^{-1}\left((1+\xi^2)\widehat{g}\right) = \delta.$$

Aplicando a transformada de Fourier, obtemos

$$(1+\xi^2)\widehat{g}(\xi) = \widehat{\delta} = (2\pi)^{-1/2}.$$

Logo,

$$\widehat{g}(\xi) = (2\pi)^{-1/2}(1+\xi^2)^{-1},$$

fazendo a inversa de $\widehat{g}(\xi)$, obtemos

$$g(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

Exemplo 2.24. *Seja $u \in H^s(\mathbb{R})$. Então*

$$\Lambda^{-2}u = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|}u(y)dy.$$

Basta utilizar o exemplo anterior e a observação da definição (2.7.2).

Lema 2.25. *Sejam $s, s' \in \mathbb{R}$. Então:*

(i) $H^s(\mathbb{R}) \subseteq H^{s'}(\mathbb{R})$ *se* $s \geq s'$*. Além disso, esta inclusão é contínua e densa;*

(ii) $\mathcal{F}\left(H^s(\mathbb{R})\right) = L^2(\mathbb{R}, (1+\xi^2)^s d\xi)$.

Demonstração. *[17] págs. 304-306.* □

Lema 2.26. *Seja* $m \in \mathbb{N}$*. Então* $f \in H^m(\mathbb{R})$ *se, e somente se,* $f^{(\alpha)} \in L^2(\mathbb{R})$ *para todo* $\mathbb{N} \ni \alpha < m$*, onde as derivadas são calculadas no sentido das distribuições.*

Demonstração. *[17] pág. 307.* □

Lema 2.27. *Seja* $s > 1/2$*. Então* $H^s(\mathbb{R})$ *pode ser continuamente mergulhado em* $C_\infty(\mathbb{R})$ *(a coleção das funções contínuas de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{C}$ *que tendem a zero quando* $|x| \to \infty$*) e vale a desigualdade*

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (2\pi)^{-1/2} \left[\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-s}\right]^{1/2} \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Ainda,

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R})} \left[\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-s}\right]^{1/2}.$$

Demonstração. *[17] pág. 308.* □

Lema 2.28. *Sejam* $s, t \in \mathbb{R}$ *tais que* $-s < t \leq s$*. Considere* $u \in H^s(\mathbb{R})$ *e* $v \in H^t(\mathbb{R})$*. Então*

$$c\,\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} \|v\|_{H^t(\mathbb{R})} \geq \begin{cases} \|uv\|_{H^t(\mathbb{R})} & s > 1/2, \\ \|uv\|_{H^{s+t-1/2}(\mathbb{R})} & s < 1/2, \end{cases}$$

em que c *é uma constante positiva dependendo de* s *e* t*.*

Demonstração. *[21] Lema A1, pág. 65.* □

Um caso particular do Lema 2.28 que utilizamos nesta tese é considerando $s > 3/2$ e $u, v \in H^s(\mathbb{R})$, então

$$\|uv_x\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} \leq c\,\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} \|v_x\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}.$$

A desigualdade anterior é um corolário do Lema 2.28 e sua demonstração é imediata.

Lema 2.29. *Seja* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *infinitamente diferenciável e assuma que* $h(0) = 0$*. Então* $u \mapsto h(u)$ *define uma transformação contínua* $h : H^s(\mathbb{R}) \to H^s(\mathbb{R})$*, para* $s > 1/2$*. Se* $s = 1/2$ *e a derivada* h' *de* h *for limitada, então* $h(u) \in H^s(\mathbb{R})$ *sempre que* $u(x) \in H^s(\mathbb{R})$*. Ainda*

$$|h(u(x))| \leq \sup_{y \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}} \{|h'(y)|\} |u(x)|, \; x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. *[12] pág. 1062, Lema 1.* □

Para $s \geq 0$, considere o espaço $X_s = H^s(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ com a norma

$$\|f\|_{X_s} = \|f\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \forall f \in X_s.$$

Lema 2.30. *Seja $F \in C^\infty(\mathbb{R})$. Se $f, g \in X_s, s \geq 0$. Então*

$$\|F(f) - F(g)\|_{X_s} \leq K \|f - g\|_{X_s},$$

em que K depende de $\|f\|_{X_s}$ e $\|g\|_{X_s}$.

Demonstração. *[12] págs. 1064-1065.* □

O espaço X_s é um espaço de Banach. Basta observar que $H^s(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, $\forall\, s \geq 0$ e tanto $L^2(\mathbb{R})$ quanto $L^\infty(\mathbb{R})$ são espaços de Banach como podemos ver nos lemas 2.8 e 2.9.

Proposição 2.31. *Se $f \in H^s(\mathbb{R})$ e $s > 3/2$, então $\|f_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c\, \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}$, para alguma constante $c > 0$ dependente apenas de s.*

Demonstração. *Temos que $|f_x(x)| = |\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f_x(x))| = |\mathcal{F}^{-1}(\xi \check{f}(\xi))|$. Portanto,*

$$\begin{aligned} |f_x(x)| &= (2\pi)^{-1} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} (\xi \check{f}(\xi)) d\xi \right| \leq (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\xi \check{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\check{f}(\xi)| |\xi| (1+\xi^2)^{s/2} (1+\xi^2)^{-s/2} d\xi. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos então

$$\begin{aligned} |f_x(x)| &\leq (2\pi)^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} |\check{f}(\xi)|^2 (1+\xi^2)^s d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-s} \xi^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq (2\pi)^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-s} \xi^2 d\xi \right) \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-s} \xi^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-s} (1+\xi^2) d\xi = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-s+1} d\xi < \infty,$$

pois $s > 3/2$, temos

$$\|f_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c\, \|f\|_{H^s(\mathbb{R})},$$

em que $c = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-s} \xi^2 d\xi.$ □

Proposição 2.32. *Seja $s \in \mathbb{N}$. Então a norma $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R})}$ é equivalente a*

$$\left(\sum_{i=0}^{s} \left\| \frac{d^i}{dx^i}(\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se $s = 1$, então $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \left\| \frac{d}{dx}(\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$.

Demonstração. *Seja $f \in H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{N}$. Então*

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{s} \begin{pmatrix} s \\ i \end{pmatrix} (\xi^2)^i |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{i=0}^{s} \begin{pmatrix} s \\ i \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} |(\xi)^i \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{i=0}^{s} \begin{pmatrix} s \\ i \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}\left(f^{(i)}\right)(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \sum_{i=0}^{s} \begin{pmatrix} s \\ i \end{pmatrix} \left\| \mathcal{F}(f^{(i)}) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Pela identidade de Parseval, temos

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 = \sum_{i=0}^{s} \begin{pmatrix} s \\ i \end{pmatrix} \left\| (f^{(i)}) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Tomando $\alpha := \max\left\{ \begin{pmatrix} s \\ i \end{pmatrix} \right\}$ e $\beta := \min\left\{ \begin{pmatrix} s \\ i \end{pmatrix} \right\}$, temos

$$\sqrt{\alpha(s+1)} \left(\sum_{i=0}^{s} \left\| \frac{d^i}{dx^i}(f) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \sqrt{\beta(s+1)} \left(\sum_{i=0}^{s} \left\| \frac{d^i}{dx^i}(f) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Proposição 2.33. *Sejam $s > \frac{1}{2}$ e $u \in H^s$. Então temos as relações:*

1. $\|u_x\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}$.
2. $\left\|\partial_x \Lambda^{-2} u\right\|_{H^{s+1}(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}$.

3. $\|u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}$.

Demonstração. *Para demonstrar o primeiro item, basta observar que*

$$\begin{aligned}
\|u_x\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{s-1} |\mathcal{F}(u_x)(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{s-1} |\xi \mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{s-1} \xi^2 |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{s} |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi = \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Lembrando que Λ^{-2} é um isomorfismo e utilizando o item anterior, chegamos no resultado do segundo item. Para demonstrar o terceiro item, notemos que

$$\|u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{s-1} |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{s} |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi = \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}$$

□

3 BOA POSTURA

Dada uma equação diferencial parcial (EDP) com uma condição inicial, dizemos que o problema é ***bem posto*** se ele tem solução única e esta solução depende de forma contínua da condição inicial.

Com o objetivo de verificar se um problema é bem posto, apresentaremos o ***Teorema de Kato*** que nos garante que, sob certas condições, um ***problema de Cauchy***[1] é bem posto.

As principais referências deste capítulo são [15, 16, 17, 11, 21, 12, 24, 10].

3.1 TEOREMA DE KATO

Tosio Kato em [21] tem o objetivo de apresentar um tratamento unificado para o problema de Cauchy para várias equações diferenciais parciais quase-lineares. Neste trabalho ele prova dois teoremas importantes que utilizamos na tese. O primeiro sobre existência e unicidade e o outro sobre a dependência da solução de forma contínua do dado inicial. Ainda neste trabalho, ele mostra que estes teoremas são aplicáveis em diversas EDPs importantes como equações de ondas, a equação Korteweg-de Vries (K.d.V), Navier-Stokes, entre outras. A junção dos dois teoremas de Kato provadas em [21] é compilada no lema a seguir.

Lema 3.1. *(**Teorema de Kato**). Seja $A(u)$ um operador linear, e considere o problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(u)u &= f(u) \in X, \ t \geq 0, \\ u(0) &= u_0 \in Y. \end{cases} \tag{7}$$

Assuma que as condições seguintes são satisfeitas:

1 Uma equação diferencial sujeita a certas condições iniciais sobre a solução.

(I) *X e Y são espaços de Banach reflexivos, tais que $Y \subseteq X$ e a inclusão $Y \hookrightarrow X$ é contínua e densa. Ainda, existe um isomorfismos $S : Y \to X$, tal que $\|u\|_Y = \|Su\|_X$.*

(II) *Existem uma bola W de raio r, com $0 \in W \subseteq Y$ e uma família de operadores $(A(u))_{u\in W} \subseteq \mathcal{L}(X)$, tal que $-A(u)$ gera um semigrupo C_0 em X com $\|e^{-sA(u)}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\beta s}$, para todo $u \in W, s \geq 0$, para um certo número real β.*

(III) *Seja S o isomorfismo da condição (I). Então $B(u) := [S, A(u)]S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, em que $[S, A(u)] = SA(u) - A(u)S$. Além disso, existem constantes c_1 e c_2, tais que $\|B(u)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c_1$, $\|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c_2\|u - v\|_Y$, para todo $u, v \in W$.*

(IV) *Para todo $w \in W$, $Y \subseteq dom(A(w))$ e $\|A(u) - A(v)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq c_3\|u - v\|_X$, para todo $u, v \in W$ em que c_3 é uma constante.*

(V) *A função $f : X \to X$, satisfaz as seguintes condições*

   a) *$f|_W : W \to Y$ é limitada, isto é, existe uma constante c_4 tal que $\|f(w)\|_Y \leq c_4$, $\forall w \in W$;*

   b) *$f|_W : W \to X$ é Lipschitz em relação a norma em X, isto é, existe uma outra constante c_5 tal que $\|f(u) - f(v)\|_X \leq c_5\|u - v\|_X, \forall u, v \in W$.*

Se $u_0 \in W$, então existe $T > 0$ tal que o problema (7) tem solução única $u \in C^0([0, T), W) \cap C^1([0, T), X)$, com $u(0) = u_0$. Além disso, a solução u depende de forma contínua de u_0.

Demonstração. *[21] págs. 36-45. e [15] págs. 135-141.* □

A ideia de compilar os dois teoremas de Kato pode ser vista em vários artigos, entre eles o [25], Lema 2.5. Em [24], Liu e Yin provam o seguinte lema que utilizaremos na próxima seção.

Lema 3.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C^n, n \geq 5$ com $g(0) = 0$ e considere o operador $A(u) = (b + ag(u))\partial_x$ com $u \in H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/2$. Então o operador $A(u)$ satisfaz as condições $(II) - (IV)$ do teorema de Kato.*

Demonstração. *[24] págs. 2500-2502.* □

3.2 RESULTADO PRINCIPAL DA TESE

Vamos agora retomar o nosso problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{txx} + 3uu_x - uu_{xxx} - 2u_xu_{xx} + \lambda(u - u_{xx}) + \partial_x h(u) &= 0, \\ u(0,x) &= u_0(x), \end{cases} \tag{8}$$

em que $\lambda \geq 0, h \in C^\infty(\mathbb{R})$ é Lipschitz, $h(0) = 0$ e $u_0 \in H^s(\mathbb{R}), s > 3/2$.

Observe que se $\lambda = 0$ e $h \equiv 0$, a EDP do problema (8) se torna a equação de Camassa-Holm.

Se aplicarmos Λ^{-2} na EDP de (8), obtemos o seguinte problema equivalente:

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= -\partial_x \Lambda^{-2}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h(u)\right) - \lambda u, \\ u(0,x) &= u_0(x). \end{cases} \tag{9}$$

Como Λ^{-2} é um isomorfismo, se aplicarmos Λ^2 em (9) recuperamos (8) de maneira mais simples.

Iremos mostrar, utilizando o teorema de Kato, que (9) é bem posto. Tomando:

- $s > 3/2$,
- $Y := H^s(\mathbb{R}), X := H^{s-1}(\mathbb{R})$,
- $A(u) := u\partial_x$,
- $f(u) := -\partial_x \Lambda^{-2}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h(u)\right) - \lambda u$ e
- $u(0,x) = u_0(x), u_0 \in H^s(\mathbb{R})$,

o problema (9) estará nas condições do Teorema de Kato. Não encontramos dificuldade para demonstrar a condição *(I)*, e as condições *(II)-(IV)* estão bem estabelecidas em [11] e [24]. Nosso problema é um caso particular dos citados nestes trabalhos, tomando $b = 0$ e $ag(u) = u$ em [24], págs. 2500-2502, e tomando $\gamma = 1$ em [11], pág. 1389. A condição *(V)* do Teorema de Kato é demonstrada de forma análoga a [10].

Proposição 3.3. *$H^s(\mathbb{R})$ é espaço de Banach reflexivo para todo $s \in \mathbb{R}$, tais que $H^s(\mathbb{R}) \subseteq H^{s-1}(\mathbb{R})$ e a inclusão $H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{s-1}(\mathbb{R})$ é contínua e densa. Ainda, existe um isomorfismo $S : H^s(\mathbb{R}) \to H^{s-1}(\mathbb{R})$, tal que $\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} = \|Su\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}$.*

Demonstração. *Em [16] pág. 196-197, podemos ver que todos os espaços de Hilbert são reflexivos. O restante da demonstração é resultado direto do Lema 2.25 item (i) e o Exemplo 2.22 tomando $k = 1$.* □

Proposição 3.4. *O operador $A(u) = u\partial_x$ com $u \in H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/2$ satisfaz as condições $(II) - (IV)$ do teorema de Kato.*

Demonstração. *Basta tomar $b = 0$ e $ag(u) = u$ no Lema 3.2.* □

Teorema 3.5. *Sejam $f : H^s(\mathbb{R}) \to H^s(\mathbb{R})$,*

$$f(u) := -\partial_x \Lambda^{-2} \left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h(u) \right) - \lambda u,$$

$W \subseteq H^s(\mathbb{R})$ uma bola de raio r(podemos assumir de centro em 0) e $s > 3/2$. Então, a função f satisfaz as seguintes condições:

1. *$f|_W$: $W \to H^s(\mathbb{R})$ é limitada, isto é, existe uma constante c_4 tal que $\|f(w)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c_4$, $\forall w \in W$;*

2. *$f|_W$: $W \to H^{s-1}(\mathbb{R})$ é Lipschitz em relação a norma em $H^{s-1}(\mathbb{R})$, isto é, existe uma constante c_5 tal que $\|f(u) - f(v)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} \leq c_5 \|u - v\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}, \forall u, v \in W$.*

Demonstração. *Primeiro vamos mostrar que f está bem definida. Seja $u \in H^s(\mathbb{R})$. Então $u_x^2 \in H^{s-1}(\mathbb{R})$ e $\partial_x \Lambda^{-2}(u_x^2) \in H^s(\mathbb{R})$, $\partial_x \Lambda^{-2}(u^2) \in H^s(\mathbb{R})$. Como $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $h(0) = 0$, então para todo $u \in H^s(\mathbb{R})$, temos $h(u) \in H^s(\mathbb{R})$, como podemos ver no Lema 2.29. Portanto $\partial_x \Lambda^{-2}(h(u)) \in H^s(\mathbb{R})$ e com isso concluímos que f está bem definida. Para mostrar o primeiro item, lembre que $h(u)$ é Lipschitz, $h \in C^\infty$ e que $h(0) = 0$, de onde podemos concluir, pelo Lema 2.29, que*

$$\|h(w)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq a \|w\|_{H^s(\mathbb{R})},$$

em que $a = \sup_{y \leq r}\{|h'(y)|\}$. Daqui em diante c denota genericamente qualquer constante, eventualmente dependente de s. Temos que

$$\|f(w)\|_{H^s(\mathbb{R})} = \left\| -\partial_x \Lambda^{-2} \left(w^2 + \frac{w_x^2}{2} + h(w) \right) - \lambda w \right\|_{H^s(\mathbb{R})},$$

pela Proposição 2.33 item 2 e pela desigualdade triângular, temos

$$\|f(w)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c \left\| w^2 \right\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} + c \left\| \frac{w_x^2}{2} \right\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} + c \|h(w)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} + |\lambda| \|w\|_{H^s(\mathbb{R})},$$

pela Proposição 2.33 itens 1 e 3, e considerando que $\left\|w_x^2\right\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} \leq \|w_x\|^2_{H^{s-1}(\mathbb{R})}$ *temos*

$$\|f(w)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c\left\|w^2\right\|_{H^s(\mathbb{R})} + c\left\|\frac{w}{2}\right\|^2_{H^s(\mathbb{R})} + c\,\|w\|_{H^s(\mathbb{R})} + |\lambda|\|w\|_{H^s(\mathbb{R})} = cr.$$

Para mostrar o segundo item, fazemos

$$\begin{aligned}
&\|f(u)-f(v)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}\\
&= \left\|-\partial_x\Lambda^{-2}\left(u^2+\frac{u_x^2}{2}+h(u)\right) - \lambda u + \partial_x\Lambda^{-2}\left(v^2+\frac{v_x^2}{2}+h(v)\right)+\lambda v\right\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}\\
&\leq \left\|-\partial_x\Lambda^{-2}\left(u^2+\frac{u_x^2}{2}+h(u)\right) + \partial_x\Lambda^{-2}\left(v^2+\frac{v_x^2}{2}+h(v)\right)\right\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} + |\lambda|\|v-u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}\\
&\leq \left\|-\partial_x\Lambda^{-2}\left(u^2+\frac{u_x^2}{2}+h(u)\right) + \partial_x\Lambda^{-2}\left(v^2+\frac{v_x^2}{2}+h(v)\right)\right\|_{H^{s}(\mathbb{R})} + |\lambda|\|v-u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Utilizando novamente a Proposição 2.33 e a desigualdade triângular,

$$\begin{aligned}
\|f(u)-f(v)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} &\leq c\left\|v^2-u^2\right\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} + \frac{c}{2}\left\|v_x^2-u_x^2\right\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}\\
&+c\,\|h(v)-h(u)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} + |\lambda|\|v-u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Utilizando a relação $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$ *e o Lema 2.28, chegamos em*

$$\begin{aligned}
&\|f(u)-f(v)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} \leq c\,\|v+u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}\,\|(v-u)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}\\
&+c\,\|v_x+u_x\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}\,\|v_x-u_x\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} + c\,\|v-u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} + |\lambda|\|v-u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Como $u, v \in W$, $\|u\|_{H^{s-2}(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}$ *(Proposição 2.33 item 3 e* $\|u_x\|_{H^{s-2}(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}$ *(Proposição 2.33 item 1), obtemos*

$$\|f(u)-f(v)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} \leq c\,\|u-v\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})},$$

em que $c > 0$. □

Com estes resultados demonstrados, temos satisfeita a hipótese do item (V) do Teorema de Kato, de modo que obtemos o seguinte resultado de Boa Colocação:

Teorema 3.6. *O problema*

$$\begin{cases} u_t - u_{txx} + 3uu_x - uu_{xxx} - 2u_xu_{xx} + \lambda(u-u_{xx}) + \partial_x h(u) &= 0,\\ u(0,x) &= u_0(x), \end{cases}$$

em que $\lambda \geq 0, h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *é Lipschitz,* $h(0) = 0$ *e* $u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}), s > 3/2$*, é bem posto com solução*

$$u \in C^0([0,T), H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T), H^{s-1}(\mathbb{R})), s > 3/2,$$

$T > 0$ *é o tempo máximo de existência da solução dependendo de* $u(0,x) = u_0$*.*

4 SOLUÇÃO GLOBAL E *WAVE BREAKING*

No capítulo anterior, vimos que o problema

$$\begin{cases} u_t - u_{txx} + 3uu_x - uu_{xxx} - 2u_x u_{xx} + \lambda(u - u_{xx}) + \partial_x h(u) & = & 0, \\ u(0, x) & = & u_0(x) \end{cases} \tag{10}$$

em que $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, $h(u)$ é Lipschitz, $\lambda \geq 0, h(0) = 0$ e $u_0(x) \in H^s(\mathbb{R})$ tem solução única

$$u \in C^0([0, T), H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T), H^{s-1}(\mathbb{R})), s > 3/2.$$

As próximas definições foram feitas com base no trabalho de Escher em [3] e caracterizam o tipo de solução que estamos interessados neste trabalho.

Uma solução $u(t, x) \in C^0([0, T), H^s(\mathbb{R}))$ de um problema proposto é dita ***solução global*** se $T = \infty$ em que T é o tempo máximo de existência da solução. Se $T < \infty$, dizemos que ocorre em u o fenômeno de ***blow-up***. Neste caso, em que $T < \infty$, temos

$$\lim_{t \to T} \sup \|u(t, x)\|_{H^s(\mathbb{R})} = \infty.$$

Assuma agora que $H^s(\mathbb{R}) \subset C^1(\mathbb{R})$ e que $T < \infty$. Se

$$\sup_{(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}} |u(t, x)| < \infty, \qquad \lim_{t \to T} \sup\{\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_x(t, x)|\} = \infty,$$

chamamos o *blow-up* de ***wave breaking***.

Vamos mostrar, sob certas condições, que em toda solução $u(t, x) \in C^0([0, T), H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T), H^{s-1}(\mathbb{R})), s > 3/2$ do problema (10), se $T < \infty$ e $u_0(x) \in H^3(\mathbb{R})$, então ocorre uma solução do tipo *wave breaking*. Para mostrar essa propriedade da solução iremos apresentar um resultado importante a seguir.

4.1 QUANTIDADE CONSERVADA

Vamos mostrar agora uma lei de conservação da nossa equação (10). Considere u uma solução do problema (10) e multiplique a primeira equação por $e^{2\lambda t}u$, obtendo

$$e^{2\lambda t}\left(uu_t - uu_{txx} + 3u^2u_x - u^2u_{xxx} - 2uu_xu_{xx} + \lambda(u^2 - uu_{xx}) + u\partial_x h(u)\right) = 0,$$

que é equivalente a

$$\partial_t\left(e^{2\lambda t}\left(\frac{u^2+u_x^2}{2}\right)\right) + \partial_x\left(e^{2\lambda t}(u^3 - uu_{tx} - u^2u_{xx} - \lambda uu_x)\right) + e^{2\lambda t}u\partial_x h(u) = 0.$$

Tome $g(u)$ tal que, $\partial_x(g(u)) = u\partial_x h(u)$ e $g(0) = 0$. Substituindo acima, obtemos

$$\partial_t\left(e^{2\lambda t}\left(\frac{u^2+u_x^2}{2}\right)\right) + \partial_x\left(e^{2\lambda t}(u^3 - uu_{tx} - u^2u_{xx} - \lambda uu_x + g(u))\right) = 0.$$

Integrando em relação a x, temos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2\lambda t}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{u^2+u_x^2}{2}\right)dx\right) = -\left(e^{2\lambda t}(u^3 - uu_{tx} - u^2u_{xx} - \lambda uu_x + g(u))\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Supondo que

$$\lim_{|x|\to\infty} u(t,x) = 0,$$

que suas derivadas até segunda ordem sejam limitadas e que

$$\int_{\mathbb{R}}\left(u^2+u_x^2\right)dx < +\infty,$$

para todo $t \in [0,T)$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2\lambda t}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{u^2+u_x^2}{2}\right)dx\right) = 0.$$

Tomando

$$\mathcal{H}(t) = \frac{e^{2\lambda t}}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + u_x^2\right) dx,$$

podemos observar que $\mathcal{H}(t)$ não depende de t, ou seja,

$$\frac{e^{2\lambda t}}{2} \|u(t,\cdot)\|^2_{H^1(\mathbb{R})} = \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(0) = \frac{1}{2} \|u(0,\cdot)\|^2_{H^1(\mathbb{R})} = \frac{1}{2} \|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})},$$

e portanto, $\mathcal{H}(t)$ é uma lei de conservação da equação (10), ainda

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})} = e^{-\lambda t} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}. \tag{11}$$

Observe que esta relação é necessária para ocorrer uma *wave breaking*. De fato,

$$|u(t,x)| \leq \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u(t,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})},$$

e portanto

$$\sup_{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}} |u(t,x)| < \infty.$$

4.2 WAVE BREAKING

Os resultados que veremos a seguir, mostram quais são as condições para garantirmos a ocorrência de wave breaking. As ideias para construir e realizar as demonstrações foram inspiradas nos trabalhos de Escher [3], Constantin e Escher em [26], Freire em [25] e Freire et al. em [10].

Considere a função $m(t,x) := \Lambda^2 u(t,x) = u(t,x) - u_{xx}(t,x)$. Observando que

$$3uu_x - uu_{xxx} - 2u_x u_{xx} = uu_x - uu_{xxx} + 2(uu_x - u_x u_{xx}) = u\underbrace{(u_x - u_{xxx})}_{m_x} + 2u_x\underbrace{(u - u_{xx})}_{m},$$

podemos reescrever a EDP do problema (10) como segue:

$$m_t + um_x + 2u_x m + \lambda m + \partial_x h(u) = 0. \tag{12}$$

Observe que se $u \in H^3(\mathbb{R})$, então $m \in H^1(\mathbb{R})$.

Teorema 4.1. *Assuma que* $u_0(x) = u(0,x) \in H^3(\mathbb{R})$ *é o dado inicial do problema* (10) *e* $m_0(x) = u_0(x) - u_0''(x)$. *Seja* $u(t,x)$ *solução do problema* (10) *e suponha que exista* $k > 0$ *tal que* $u_x(t,x) > -k$. *Então existe* $\kappa = \kappa(k,\lambda)$ *tal que* $\|u\|_{H^3(\mathbb{R})} \leq e^{\kappa t}\|m_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$. *Em particular, a norma* $H^3(\mathbb{R})$ *da solução é finita para qualquer tempo finito tal que a solução exista.*

Demonstração. *Como podemos ver no exemplo* (2.22), *temos que*

$$\|u\|_{H^3(\mathbb{R})} = \left\|\Lambda^{-2}m\right\|_{H^3(\mathbb{R})} = \|m\|_{H^1(\mathbb{R})}. \tag{13}$$

Portando, basta mostrar que $\|m\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \kappa\|m_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$. *Considerando a EDP* (12), *temos*

$$\langle m, m_t\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = -\langle m, um_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - 2\langle m, u_x m\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \lambda\langle m, m\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \langle m, \partial_x h(u)\rangle_{L^2(\mathbb{R})},$$

como $\langle f, gh\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle fg, h\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle g, fh\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$, *então*

$$\langle m, m_t\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = -\langle u, mm_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - 2\left\langle u_x, m^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \lambda\|m\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \langle m, \partial_x h(u)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Utilizando a relação: $mm_x = \frac{1}{2}\partial_x(m^2)$, *temos*

$$\langle m, m_t\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = -\frac{1}{2}\left\langle u, \partial_x(m^2)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - 2\left\langle u_x, m^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \lambda\|m\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \langle m, \partial_x h(u)\rangle_{L^2(\mathbb{R})},$$

lembrando que $\left\langle u, \partial_x(m^2)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = -\left\langle u_x, m^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$, *então*

$$\langle m, m_t\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = -\frac{3}{2}\left\langle u_x, m^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \lambda\|m\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \langle m, \partial_x h(u)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{14}$$

Derivando a EDP (12) *com relação à* x, *temos*

$$m_{tx} + 3u_x m_x + um_{xx} + 2u_{xx}m + \lambda m_x + \partial_x^2 h(u) = 0,$$

e portanto

$$\begin{aligned}\langle m_x, m_{tx}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = {} & -3\langle m_x, u_x m_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \langle m_x, um_{xx}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - 2\langle m_x, u_{xx}m\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ & -\lambda\langle m_x, m_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \left\langle m_x, \partial_x^2 h(u)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

utilizando as mesmas relações anteriores, chegamos em

$$\langle m_x, m_{tx}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = -\frac{5}{2}\left\langle u_x, m_x^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - 2\langle u_{xx}, mm_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \lambda \|m_x\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \left\langle m_x, \partial_x^2 h(u)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Agora, observe que

$$\langle u, mm_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \langle u_{xx}, mm_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle u - u_{xx}, mm_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle m, mm_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} \partial_x m^3 dx,$$

como a integral acima é igual a zero, temos que $\langle u, mm_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle u_{xx}, mm_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$. *E como* $\langle u, mm_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = -\frac{1}{2}\left\langle u_x, m^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$, *obtemos*

$$\begin{aligned} \langle m_x, m_{tx}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \quad = \quad & -\frac{5}{2}\left\langle u_x, m_x^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \left\langle u_x, m^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \lambda \|m_x\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ & -\left\langle m_x, \partial_x^2 h(u)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{15}$$

Das relações (14) *e* (15) *e lembrando que* $\|m\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|m_x\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|m\|^2_{H^1(\mathbb{R})}$, *temos*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|m\|^2_{H^1(\mathbb{R})} &= \frac{d}{dt}\left(\|m\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|m_x\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right) = 2\langle m, m_t\rangle_{L^2(\mathbb{R})} + 2\langle m_x, m_{tx}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= -\left\langle u_x, m^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - 5\left\langle u_x, m_x^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - 2\lambda \|m\|_{H^1(\mathbb{R})} - 2\langle m, \partial_x h(u)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad -2\left\langle m_x, \partial_x^2 h(u)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} \langle m, \partial_x h(u)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \left\langle m_x, \partial_x^2 h(u)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \langle m, \partial_x h(u)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \left\langle m, \partial_x^3 h(u)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \left\langle m, \partial_x h(u) - \partial_x^3 h(u)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \left\langle m, \Lambda^2(\partial_x h(u))\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

utilizando Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \langle m, \partial_x h(u)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \left\langle m_x, \partial_x^2 h(u)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|m\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\|\Lambda^2(\partial_x h(u))\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{\|m\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|\Lambda^2(\partial_x h(u))\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}{2}. \end{aligned}$$

Lembrando que Λ^2 é um isomorfismo de $H^3(\mathbb{R})$ em $H^1(\mathbb{R})$ (Exemplo 2.22), tomando h nas condições do teorema e $g = 0$, temos pelo Lema 2.30 que $\|h(u)\|_{X_s} \leq c\,\|u\|_{X_s}$, para alguma constante $c \geq 0$. Observando que se $s > 1/2$, então $X_s = H^s(\mathbb{R})$ e a relação (13), então

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda^2(\partial_x h(u))\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \left\|\Lambda^2(\partial_x h(u))\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|\Lambda^2(h(u))\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \left\|\Lambda^2(h(u))\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\\ &= \|h(u)\|^2_{H^3(\mathbb{R})} \leq c\,\|u\|^2_{H^3(\mathbb{R})} \leq c\,\|m\|^2_{H^1(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Como $\|m\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|m\|_{H^1(\mathbb{R})}$, concluímos então que

$$-2\left(\langle m, \partial_x h(u)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \left\langle m_x, \partial_x^2 h(u)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right) \leq c_1\,\|m\|^2_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Observe que a desigualdade anterior é valida para

$$\left|2\left(\langle m, \partial_x h(u)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \left\langle m_x, \partial_x^2 h(u)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right)\right| \leq c_1\,\|m\|^2_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Estimando $-\left\langle u_x, m^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ e $-5\left\langle u_x, m_x^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$, com base na hipótese do teorema, em que $u_x(t,x) > -k, k > 0$, temos

$$-\left\langle u_x, m^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} -u_x m^2 dx \leq k\int_{\mathbb{R}} m^2 dx = k\,\|m\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

e

$$-5\left\langle u_x, m_x^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \leq 5k\,\|m_x\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Logo,

$$-\left\langle u_x, m^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - 5\left\langle u_x, m_x^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \leq 5k\,\|m\|^2_{H^1(\mathbb{R})},$$

nos permitindo concluir que

$$\frac{d}{dt}\|m\|^2_{H^1(\mathbb{R})} \leq (5k + 2\lambda + c_1)\,\|m\|^2_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Utilizando a desigualdade de Grönwall ,

$$\|m\|^2_{H^1(\mathbb{R})} \leq e^{(5k+2\lambda+c_1)t}\,\|m_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}.$$

□

Em outras palavras, se $T < \infty$ e $u_0 \in H^3(\mathbb{R})$, para que ocorra o *blow-up* na solução u do problema (10) é necessário que $u_x(t,x)$ não seja limitada inferiormente.

Teorema 4.2. *Seja* $u \in C^0([0,T), H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T), H^2(\mathbb{R}))$ *solução do problema* (10) *e* $u_0 \in H^3(\mathbb{R})$. *Se ocorre um blow-up na solução u em um tempo* $T < \infty$, *então u desenvolve uma wave breaking.*

Demonstração. *Pelo teorema anterior, temos que*

$$\lim_{t\to T} \sup\{\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_x(t,x)|\} = \infty, \tag{16}$$

considerando que $\mathcal{H}(t)$ *é uma lei de conservação da equação* (10), *e que portanto*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \|u\|_{H^s(\mathbb{R})} \le \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})},$$

então

$$\sup_{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}} |u(t,x)| < \infty, \tag{17}$$

considerando (16) *e* (17) *temos que a solução u desenvolve wave breaking.* □

Derivando em relação a x a EDP

$$u_t + uu_x + \partial_x\Lambda^{-2}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h(u)\right) + \lambda u = 0,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x\left(u_t + uu_x + \partial_x\Lambda^{-2}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h(u)\right) + \lambda u\right) \\ &= u_{tx} + u_x^2 + uu_{xx} + \partial_x^2\Lambda^{-2}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h(u)\right) + \lambda u_x. \end{aligned}$$

Considerando a relação: $\partial_x^2\Lambda^{-2} = \Lambda^{-2} - 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= u_{tx} + u_x^2 + uu_{xx} + \left(\Lambda^{-2} - 1\right)\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h(u)\right) + \lambda u_x = u_{tx} + u_x^2 + uu_{xx} \\ &+ \Lambda^{-2}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h(u)\right) - \left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h(u)\right) + \lambda u_x \\ &= u_{tx} - u^2 + \frac{u_x^2}{2} - h(u) + uu_{xx} + \Lambda^{-2}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h\right) + \lambda u_x. \end{aligned}$$

O que nos dá a equação:

$$u_{tx} + \frac{u_x^2}{2} = u^2 + h(u) - \Lambda^{-2}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h(u)\right) - \lambda u_x - uu_{xx}. \tag{18}$$

Proposição 4.3. *Sejam $u(0,x) \in H^s(\mathbb{R}), s > 3/2$ e u solução do problema (10). Então*

$$\Lambda^{-2}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2}\right) \geq \frac{u^2}{2}.$$

Demonstração. *Observemos que*

$$\begin{aligned}
\Lambda^{-2}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2}\right)(x) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2}\right)(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-|x-y|}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2}\right)(y)dy + \frac{1}{2}\int_{x}^{\infty} e^{-|x-y|}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2}\right)(y)dy \\
&= \frac{e^{-x}}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2}\right)(y)dy + \frac{e^{x}}{2}\int_{x}^{\infty} e^{-y}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2}\right)(y)dy.
\end{aligned}$$

Como $u^2 + u_x^2 \geq 2uu_x$, então:

$$e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\left(u^2 + u_x^2\right)(y)dy \geq 2e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}u(y)u_x(y)dy,$$

integrando por partes e observando que $u(y) \to 0$ quando $|y| \to \infty$, chegamos em

$$\begin{aligned}
e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\left(u^2 + u_x^2\right)(y)dy &\geq e^{-x}e^{x}u^2(x) - e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}u^2(y)dy \\
&\geq u^2(x) - e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}u^2(y)dy.
\end{aligned}$$

Somando

$$e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}u^2(y)dy$$

e dividindo por dois de ambos os lados,

$$e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2}\right)(y)dy \geq \frac{u^2(x)}{2}.$$

De modo análogo, temos:

$$e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-y}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2}\right)(y)dy \geq \frac{u^2(x)}{2}.$$

De onde concluímos:

$$\begin{aligned}\Lambda^{-2}\left(u^2+\frac{u_x^2}{2}\right)(x) &= \frac{e^{-x}}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\left(u^2+\frac{u_x^2}{2}\right)(y)dy + \frac{e^{x}}{2}\int_{x}^{\infty} e^{-y}\left(u^2+\frac{u_x^2}{2}\right)(y)dy \\ &\geq \frac{u^2(x)}{2}.\end{aligned}$$

□

Da equação (18) e do resultado acima, temos:

$$u_{tx}+\frac{u_x^2}{2}\leq\frac{u^2}{2}+h(u)-\Lambda^{-2}h(u)-\lambda u_x-uu_{xx}. \tag{19}$$

O próximo teorema nos dá as condições para que ocorra *wave breaking*. As ideias para construir e resolver os lemas e teoremas foram inspiradas principalmente em [3] teoremas 5 e 6, págs. 101 e 107, e em [10] Teorema 1.3 pág. 58.

Teorema 4.4. *Seja $u(t,x)\in C^0([0,T),H^3(\mathbb{R}))\cap C^1([0,T),H^2(\mathbb{R}))$, solução do problema de Cauchy (10). Assuma que $u_0=u(0,x)\in H^3(\mathbb{R})$ seja ímpar, $u_0'(0)<-2\lambda$ e h seja par, Lipschitz e $h\in C^\infty(\mathbb{R})$. Então u desenvolve uma wave breaking no tempo finito $T\leq T^*$,*

$$T^*=\begin{cases}\dfrac{2}{|u_0'(0)|}, & se \quad \lambda=0,\\[2ex] \dfrac{1}{\lambda}\ln\left(\dfrac{u_0'(0)}{u_0'(0)+2\lambda}\right), & se \quad \lambda>0.\end{cases}$$

Demonstração. *Seja $u\in C([0,T),H^3(\mathbb{R}))\cap C^1([0,T),H^2(\mathbb{R}))$ a única solução de (10) com a condição inicial u_0. Defina $v(t,x)=-u(t,-x)$ para todo $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}$. Como h é par, temos que a derivada de h é ímpar, e portanto:*

$$\partial_x h(v)=\partial_x h(-u(t,-x))=-\partial_x h(u(t,-x)).$$

Logo:

$$\begin{aligned} &v_t-v_{txx}+3vv_x-vv_{xxx}-2v_xv_{xx}+\lambda(v-v_{xx})+\partial_x h(v)= \\ &=-u_t(t,-x)+u_{txx}(t,-x)-3u(t,-x)u_x(t,-x)+u(t,-x)u_{xxx}(t,-x) \\ &+2u_x(t,-x)u_{xx}(t,-x)-\lambda(u(t,-x)-u_{xx}(t,-x))-\partial_x h(u(t,-x)))=0\end{aligned}$$

e $v(0,x)=-u(0,-x)=-u_0(-x)=u_0(x)$, ou seja, $v(t,x)$ é solução de (8). Como a solução é única, temos que $v=u$ e concluímos que u é ímpar em x. Ainda,

$$u(t,0) = u_{xx}(t,0) = 0, \quad h(u(t,0)) = h(0) = 0. \tag{20}$$

Seja $g(t) := u_x(t,0)$. *Observe que* $g(t) \in C^1[0,T)$ *e que* $g(0) = u_0'(0) < -2\lambda$ *por hipótese. Combinando* (19) *com* (20) *temos:*

$$g'(t) + \lambda g(t) \leq -\frac{g(t)^2}{2}. \tag{21}$$

Se $\lambda = 0$ *então* $g'(t) \leq 0$ *e portanto* $g(t)$ *é não crescente, ou seja,* $g(t) \leq g(0) < 0$ *e:*

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{g(t)}\right] = -\frac{g'(t)}{g^2(t)} \geq \frac{1}{2}.$$

Integrando de 0 *até* t *temos:*

$$\frac{1}{g(t)} \geq \frac{1}{g(0)} + \frac{t}{2}$$

e concluímos que

$$T \leq -2/g(0).$$

Se $\lambda > 0$, *multiplicamos* (21) *por* $e^{\lambda t}$, *obtendo:*

$$e^{\lambda t}g'(t) + e^{\lambda t}\lambda g(t) \leq -e^{\lambda t}\frac{g(t)^2}{2}.$$

Ou seja:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}g(t)\right) \leq -e^{\lambda t}\frac{g(t)^2}{2}.$$

Tome $z(t) = e^{\lambda t}g(t)$. *Substituindo na desigualdades acima temos:*

$$\frac{d}{dt}\left(z(t)\right) \leq -e^{-\lambda t}\frac{z(t)^2}{2}.$$

Daqui concluímos que $z(t)$ *é não crescente e portanto* $z(t) \leq z(0) = g(0) < 0$. *Dividindo a desigualdade anterior por* $z(t)^2$ *obtemos*

$$\frac{d}{dt}\left(z(t)\right)\frac{1}{z(t)^2} \leq -\frac{e^{-\lambda t}}{2}.$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{z(t)}\right] = -\frac{z'(t)}{z^2(t)} \geq \frac{e^{-\lambda t}}{2}.$$

Integrando de 0 até t temos:

$$\frac{1}{z(t)} \geq \frac{1}{z(0)} + \frac{1}{2\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}.$$

Lembrando que $z(t) < 0$

$$0 > \frac{1}{z(0)} + \frac{1}{2\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}.$$

Substituindo $z(0) = g(0)$, chegamos em

$$\frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda} > \frac{1}{g(0)} + \frac{1}{2\lambda},$$

nos levando a seguinte desigualdade:

$$e^{\lambda t} < \left(\frac{g(0)}{g(0) + 2\lambda}\right).$$

Observando que $2\lambda + g(0) < 0$ e que $g(0) = u_0'(0)$, temos:

$$T \leq \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{u_0'(0)}{u_0'(0) + 2\lambda}\right).$$

□

Proposição 4.5. *Seja u solução da equação (10) com problema de valor inicial $u(0,x) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}), s > 3/2$. Então $|u(t,x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\lambda t} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$.*

Demonstração. *Seja $x_0 \in \mathbb{R}$, então:*

$$2u^2(t,x_0) = 2\left(\int_{-\infty}^{x_0} uu_x - \int_{x_0}^{\infty} uu_x\right) dx$$

e

$$\begin{aligned} 2\left(\int_{-\infty}^{x_0} uu_x - \int_{x_0}^{\infty} uu_x\right) dx &\leq \left|\left(\int_{-\infty}^{x_0} 2uu_x - \int_{x_0}^{\infty} 2uu_x\right) dx\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{x_0} \left(u^2 + u_x^2\right) dx + \int_{x_0}^{\infty} \left(u^2 + u_x^2\right) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + u_x^2\right) dx = e^{-2\lambda t} \|u_0\|_{H^1}^2, \end{aligned}$$

como podemos ver em (11). De onde concluímos:

$$2u^2(t,x) \leq e^{-2\lambda t} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \quad \Rightarrow \quad |u(t,x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\lambda t} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

□

Da desigualdade (19), podemos chegar na seguinte desigualdade:

$$u_{tx} + \frac{u_x^2}{2} + \lambda u_x + u u_{xx} \leq \left| \frac{u^2}{2} \right| + |h(u)| + |\Lambda^{-2} h(u)|. \tag{22}$$

Se considerarmos a função $h \in C^{\infty}(\mathbb{R}), h(0) = 0, \|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$, pelo Lema 2.29 temos,

$$|h(u(t,x))| \leq \sup_{|y| \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} \{|h'(y)|\} |u(t,x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\lambda t} \sup_{|y| \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} \{|h'(y)|\} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

e utilizando o Exemplo 2.24,

$$|\Lambda^{-2}(h(u)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|}}{2} h(u) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{-|x-y|}}{2} h(u) \right| dy \leq a \|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|}}{2} dy,$$

em que $a = \sup_{|y| \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} \{|h'(y)|\}$. Como $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|}}{2} dy = 1$ e $\|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\lambda t} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$, concluímos que

$$|\Lambda^{-2}(h(u((t,x))| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\lambda t} \sup_{|y| \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} \{|h'(y)|\} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Pela Proposição 4.5, temos

$$\left| \frac{u^2(t,x)}{2} \right| \leq \left| \frac{u(t,x)}{2} \right|^2 \leq \frac{1}{4} e^{-2\lambda t} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2$$

e substituindo em (22), obtemos

$$u_{tx} + \frac{u_x^2}{2} + \lambda u_x + u u_{xx} \leq \frac{1}{4} e^{-2\lambda t} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \sqrt{2} e^{-\lambda t} \sup_{|y| \leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} \{|h'(y)|\} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}. \tag{23}$$

Proposição 4.6. *Sejam $T > 0$ e $u \in C^1([0,T), H^2(\mathbb{R}))$. Então, para qualquer $t \in [0,T)$ existe pelo menos um ponto $\xi(t) \in \mathbb{R}$ tal que*

$$y(t) := \inf_{x\in\mathbb{R}} \{u_x(t,x)\} = u_x(t,\xi(t)),$$

e a função $y(t)$ é diferenciável em quase todo ponto (q.t.p) $t \in (0,T)$ com

$$\frac{d}{dt}y(t) = y'(t) = u_{tx}(t,\xi(t)).$$

Demonstração. *[3], pág.104.* □

Analisando a desigualdade (23) em $x = \xi(t)$ e substituindo

$$y(t) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \{u_x(t,x)\} = u_x(t,\xi(t)),$$

e observando que $u_{xx}(t,\xi(t)) = 0$ pois $u_x(t,\xi(t))$ é mínimo temos a EDO:

$$y'(t) + \frac{y(t)^2}{2} + \lambda y(t) \leq \frac{1}{4}e^{-2\lambda t} \|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \sqrt{2}e^{-\lambda t} \sup_{|y|\leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} \{|h'(y)|\} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Se $\lambda \geq 0$, então:

$$y'(t) + \frac{y(t)^2}{2} + \lambda y(t) \leq \frac{1}{4} \|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \sqrt{2} \sup_{|y|\leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} \{|h'(y)|\} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Tome

$$\psi(u_0) := \frac{1}{4} \|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \sqrt{2} \sup_{|y|\leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} \{|h'(y)|\} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})},$$

então temos:

$$y'(t) + \frac{y(t)^2}{2} + \lambda y(t) \leq \psi(u_0). \tag{24}$$

Proposição 4.7. *Sejam $u(t,x) \in C([0,T), H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T), H^2(\mathbb{R}))$ uma solução da equação (10), $u_0(x) = u(x,0) \in H^3(\mathbb{R})$,*

$$\psi(u_0) := \frac{1}{4} \|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \sqrt{2} \sup_{|y|\leq \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} \{|h'(y)|\} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Suponha que $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$u_0'(x_0) < -\sqrt{2}\sqrt{\psi(u_0)},$$

e sejam ainda

$$\epsilon_0 := 1 - \frac{2\psi(u_0)}{u_0'(x_0)^2} = 1 - \frac{\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + 4\sqrt{2}a\,\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}}{2u_0'(x_0)^2},$$

em que $a = \sup_{|y| \le \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} \{|h'(y)|\}$, *e*

$$y(t) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \{u_x(t,x)\};$$

então, dado $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$,

$$y(t)^2 > \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) y(0)^2, \forall t \in [0, T).$$

Demonstração. *Temos que*

$$\psi(u_0) < \frac{(u_0'(x_0))^2}{2}.$$

Tome $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ *pequeno tal que:*

$$\psi(u_0) \le (1-\epsilon)\frac{(u_0'(x_0))^2}{2}.$$

Pela hipótese temos, $0 \ge u_0'(x_0) = u_x(0, x_0) \ge y(0)$ *e substituindo acima, temos:*

$$\psi(u_0) \quad \le \quad (1-\epsilon)\frac{y(0)^2}{2}.$$

Substituindo na desigualdade (24):

$$y'(t) + \lambda y(t) \le (1-\epsilon)\frac{y(0)^2}{2} - \frac{y(t)^2}{2}. \tag{25}$$

Multiplicando por $e^{\lambda t}$ *temos*

$$e^{\lambda t}\left(y'(t) + \lambda y(t)\right) \quad \le \quad e^{\lambda t}\left(\frac{1-\epsilon}{2} y(0)^2 - \frac{y(t)^2}{2}\right).$$

Como

$$e^{\lambda t}\left(y'(t)+\lambda y(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}y(t)\right),$$

então

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}y(t)\right) \le e^{\lambda t}\left(\frac{1-\epsilon}{2}y(0)^2-\frac{y(t)^2}{2}\right).$$

Queremos mostrar que:

$$y(t)^2>\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)y(0)^2, \forall t\in[0,T).$$

Suponha que a desigualdade anterior não seja verdadeira para algum $t_0\in[0,T)$. Como para $t=0$ ela é verdadeira e y é contínua, temos que:

$$y(t)^2>\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)y(0)^2, \forall t\in[0,t_0) \tag{26}$$

e

$$y(t_0)^2=\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)y(0)^2. \tag{27}$$

Assumimos em (26) e (27) que t_0 é o primeiro elemento que isso ocorre. Combinando a desigualdade (26) com

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}y(t)\right)\le e^{\lambda t}\left(\frac{1-\epsilon}{2}y(0)^2-\frac{y(t)^2}{2}\right),$$

temos:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}y(t)\right)<e^{\lambda t}\left(\frac{-\epsilon}{4}y(0)^2\right)<0.$$

De onde concluímos que y é decrescente em $[0,t_0)$. Como $y(0)=\inf_{x\in\mathbb{R}}\{u_x(0,x)\}\le u_x(0,x)<0$, temos:

$$\begin{aligned} y(t) &< y(0)<0, \forall t\in[0,t_0)\\ y(t_0)^2 &> y(0)^2, \end{aligned}$$

contrariando assim a igualdade (27). Temos então que

$$y(t)^2>\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)y(0)^2, \forall t\in[0,T).$$

□

O resultado do lema que acabamos de ver nos dá

$$y(0)^2 < \frac{2}{2-\epsilon} y(t)^2$$

e portanto, utilizando a Desigualdade 25

$$\begin{aligned} y'(t) + \lambda y(t) &< \left(\frac{1-\epsilon}{2}\right)\left(\frac{2}{2-\epsilon}\right) y(t)^2 - \frac{1}{2} y(t)^2 \\ &< \left(\frac{1-\epsilon}{2-\epsilon} - \frac{1}{2}\right) y(t)^2 \\ &< \left(\frac{-\epsilon}{2(2-\epsilon)}\right) y(t)^2 < -\frac{\epsilon}{4} y(t)^2. \end{aligned}$$

Teorema 4.8. *Sejam $u(t,x) \in C([0,T), H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T), H^2(\mathbb{R}))$ uma solução do problema de Cauchy (10) com dado inicial $u(0,x) = u_0(x) \in H^3(\mathbb{R})$, com $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, Lipschitziana e $h(0) = 0$;*

$$\psi(u_0) := \frac{1}{4} \|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \sqrt{2} \sup_{|y| \le \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} \{|h'(y)|\} \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})};$$

$$y(t) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{u_x(t,x)\};$$

suponha que $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u_0'(x_0) < -\sqrt{2}\sqrt{\psi(u_0)}$. Sejam ainda

$$\epsilon_0 := 1 - \frac{\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + 4\sqrt{2}a \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}}{2u_0'(x_0)^2}$$

em que $a = \sup_{|y| \le \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}} \{|h'(y)|\}$, e $\lambda_0 := -\epsilon_0 \frac{y(0)}{4}$.

Se $0 \le \lambda < \lambda_0$, então ocorre uma wave breaking em u em um tempo t limitado superiormente por

$$T = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\epsilon_0 y(0)}{4\lambda + \epsilon_0 y(0)}\right), & se\ \lambda > 0, \\ -\frac{4}{\epsilon_0 y(0)}, & se\ \lambda = 0. \end{cases}$$

Demonstração. *Utilizando a deisigualdade obtida na demonstração da Proposição 4.7 para $\epsilon = \epsilon_0$, concluímos que*

$$y'(t) + \lambda y(t) < -\frac{\epsilon_0}{4} y(t)^2. \tag{28}$$

Multiplicando a desigualdade (28) *por* $e^{\lambda t}$, *temos*

$$e^{\lambda t}(y'(t) + \lambda y(t)) < -\frac{\epsilon_0}{4} y(t)^2 e^{\lambda t} \ ,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} y(t)\right) < e^{\lambda t}\left(\frac{-\epsilon_0}{4} y(t)^2\right),$$

de onde concluímos que $e^{\lambda t} y(t)$ *é decrescente e consequentemente* $y(t)$ *também. Seja* $z(t) = e^{\lambda t} y(t)$, *então:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{z(t)}\right) \quad < \quad \frac{-e^{-\lambda t}\epsilon_0}{4}.$$

Considerando $\lambda > 0$, *e integrando de* 0 *a* t, *temos:*

$$\frac{-1}{z(t)} + \frac{1}{z(0)} \quad < \quad \frac{\epsilon_0}{4\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{\epsilon_0}{4\lambda}.$$

Manipulando a desigualdade anterior e substituindo $z(0) = y(0)$, *chegamos em*

$$e^{\lambda t}\left(\frac{1}{y(0)} + \frac{\epsilon_0}{4\lambda}\right) - \frac{\epsilon_0}{4\lambda} \quad < \quad \frac{1}{y(t)}.$$

Por hipótese temos que $0 > u_0'(x_0) = u_x(0, x_0) \geq y(0)$. *E como* $y(t)$ *é decrescente, então* $y(t) < 0$ *e portanto*

$$e^{\lambda t}\left(\frac{1}{y(0)} + \frac{\epsilon_0}{4\lambda}\right) \quad < \quad \frac{\epsilon_0}{4\lambda}.$$

Observando que

$$\frac{1}{y(0)} + \frac{\epsilon_0}{4\lambda} > 0$$

concluímos que

$$t < \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\epsilon_0 y(0)}{4\lambda + \epsilon_0 y(0)}\right).$$

Se $\lambda = 0$, *pela equação* (28) *temos:*

$$y'(t) \quad \leq \quad -\frac{\epsilon_0}{4} y(t)^2$$

concluindo assim que $y(t)$ *é decrescente. Manipulando a desigualdade anterior, chegamos em*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y(t)}\right) \geq \frac{\epsilon_0}{4}.$$

Integrando de 0 *a* t*, obtemos*

$$\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y(0)} \geq \frac{\epsilon_0}{4}t.$$

Como $y(t) \leq y(0) < 0$*,*

$$-\frac{1}{y(0)} \geq \frac{\epsilon_0}{4}t \quad \Rightarrow \quad t \leq -\frac{4}{\epsilon_0 y(0)}.$$

$\square$

5 PERSISTÊNCIA E CONTINUAÇÃO ÚNICA DE SOLUÇÃO

Neste capítulo consideremos o problema:

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= -\partial_x \Lambda^{-2}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h(u)\right) - \lambda u \\ u(0,x) &= u_0(x). \end{cases} \tag{29}$$

em que $\lambda \geq 0, h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $h(x) \geq 0$ (exceto no Teorema 5.2) ocorrendo a igualdade apenas em $x = 0$ e $u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}), s > 3/2$.

Sabemos, pelo teorema de Kato [21], que o problema (29) tem uma única solução (Teorema 3.6). Seja $u(t,x) \in C^0([0,T), H^s(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T), H^{s-1}(\mathbb{R}))$ solução do problema. Para cada $t \in (0,T)$ fixado, definimos $f^t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f^t(x) := u^2(t,x) + \frac{u_x^2(t,x)}{2} + h(u(t,x)), \tag{30}$$

e $F^t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$F^t(x) := \partial_x \left(\Lambda^{-2}\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h(u)\right)\right)(t,x). \tag{31}$$

Observe que $f^t \in H^{s-1}(\mathbb{R})$ e $F^t \in H^s(\mathbb{R})$. Pelo exemplo (2.24), podemos reescrever (31) como

$$F^t(x) = \left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} -sign(x-y)e^{-|x-y|}\left(u^2(t,y) + \frac{u_x^2(t,y)}{2} + h(u(t,y))\right)dy\right). \tag{32}$$

5.1 PERSISTÊNCIA

As ideias utilizadas nesta seção foram retiradas dos trabalhos de Himonas et al. [5], Henry [6], da Silva e Freire [7] e Linares e Ponce [4].

O principal resultado desta seção é observar que se

$$u(t,x) \in C^0([0,T), H^s(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T), H^{s-1}(\mathbb{R})), s > 3/2$$

é solução de (29) e tanto $u_0(x)$ quanto $u_0'(x)$ têm decaimento exponencial, então u e u_x também têm decaimento exponencial.

Dizemos que $|f(x)| \sim o(e^{a|x|})$ quando $x \to \pm\infty$ se

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{|f(x)|}{e^{a|x|}} = 0.$$

Definição 5.1.1. *Dadas as funções $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to [0,\infty)$, utilizamos a notação "$f = O(g)$", ou $|f| \sim O(g)$ se para alguma constante $C > 0, |f(x)| \leq Cg(x), \forall x \in D$.*

No caso particular em que $g(x) = e^{-a|x|}$, dizemos que $|f(x)| \sim O(e^{-a|x|})$ se para alguma constante $C > 0, |e^{a|x|} f(x)| \leq C, \forall x \in D$.

Dizemos que $|f(x)| \sim O(e^{ax})$ *quando* $x \to \infty$ se além do $C > 0$, existir algum $x_0 \in D$, tal que se $x > x_0$, então desigualdade da definição anterior é válida.

Proposição 5.1. *Seja $u \in H^s(\mathbb{R}), s > 1/2$. Então $u \in L^p(\mathbb{R}), \forall p \geq 2$. Ainda, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for limitada e integrável, então $fu \in L^p(\mathbb{R}), \forall p \geq 2$.*

Demonstração. *Como $s > 1/2$, pelo Lema 2.27, temos que $u \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Logo*

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 |u(x)|^r dx \leq \max\{1, \|u\|^r_{L^\infty(\mathbb{R})}\} \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

em que $r = p - 2$. E da mesma forma temos

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)u(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |u(x)|^2 |u(x)|^r dx \leq k^2 \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

em que $k = \max\{1, \|f\|^p_{L^\infty(\mathbb{R})}, \|u\|^r_{L^\infty(\mathbb{R})}\}$. □

Teorema 5.2. *Assuma que $u(t,x) \in C^0([0,T), H^s(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T), H^{s-1}(\mathbb{R}))$, $s > 3/2$ é solução de (29). Assuma que para algum $\theta \in (0,1)$,*

$$|u_0(x)| \sim O(e^{-\theta|x|}) \text{ e } |u_0'(x)| \sim O(e^{-\theta|x|}) \text{ quando } x \to \pm\infty.$$

Então

$$|u(t,x)| \sim O(e^{-\theta|x|}) \text{ e } |u_x(t,x)| \sim O(e^{-\theta|x|}) \text{ quando } x \to \pm\infty$$

uniformemente em $[0, T_0] \subset [0, T)$.

Para demonstrar o teorema acima, precisamos dos resultados a seguir:
Sejam N um inteiro positivo e $\theta \in (0,1)$. Considere a família $\phi_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\phi_N(x) = \begin{cases} e^{\theta|x|}, & se \quad |x| < N, \\ e^{\theta N}, & se \quad |x| \geq N. \end{cases} \tag{33}$$

Podemos observar que $\{\phi_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset C^0(\mathbb{R})$ é uma sequência que converge pontualmente para a função $\phi(x) = e^{\theta|x|}$ e que para cada $N, \phi_N' \leq \phi_N$ em q.t.p.

Proposição 5.3. *Sejam* $\phi_N(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função definida em* (33), $u(t,x) \in C^0([0,T_0], H^s(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T_0], H^{s-1}(\mathbb{R}))$ *com* $s > 3/2$ *solução de* (29), $F^t(x)$ *como definido em* (31) *e* $2 \leq p < \infty$. *Então:*

i. $$\int_{\mathbb{R}} \phi_N(x) u_t(t,x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1} dx = \frac{1}{2p}\frac{d}{dt} \|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})}.$$

ii. $$\int_{\mathbb{R}} u_x(t,x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p} dx \leq \|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})}.$$

iii. $$\int_{\mathbb{R}} F^t(x)\phi_N(x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1} dx \leq \left\|F^t(\cdot)\phi_N(\cdot)\right\|_{L^{2p}(\mathbb{R})} \|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|^{2p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R})}.$$

iv. $$\int_{\mathbb{R}} \lambda(\phi_N(x)u(t,x))^{2p} dx = \lambda \|(\phi_N(\cdot)u(t,\cdot))\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})}.$$

v. $$\int_{\mathbb{R}} \phi_N(x) u_{xt}(t,x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1} dx = \frac{1}{2p}\frac{d}{dt} \|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})}.$$

vi. $$\int_{\mathbb{R}} (\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p} u_x(t,x) dx \leq \|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})} \|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

vii. $$\int_{\mathbb{R}} \phi_N(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1} u(t,x) u_{xx}(t,x) dx$$
$$\leq \frac{1}{2p} \|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})} + \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})}.$$

viii. $$\int_{\mathbb{R}} \partial_x F^t(x)\phi_N(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1} dx \leq \left\|\partial_x F^t(\cdot)\phi_N(\cdot)\right\|_{L^{2p}(\mathbb{R})} \|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|^{2p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R})}.$$

ix. $$\int_{\mathbb{R}} \lambda(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p} dx \leq \lambda \|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})}, \text{ para todo } \lambda \geq 0.$$

Demonstração. *As ideias da demonstração desta proposição foram retiradas de Himonas em [5] e Freire em [27].*

Nos item (iii) e (viii) utilizamos a desigualdade de Hölder e a relação

$$1 = \frac{1}{2p} + \frac{2p-1}{2p}.$$

Observe que $\phi_N(x)u_t(t,x), \phi_N(x)u(t,x) \in L^{2p}(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ (Proposição 5.1).

i. $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \phi_N(x)u_t(t,x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1}dx &= \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}} \partial_t \left(\phi_N(x)u(t,x)\right)^{2p} dx \\ &= \frac{1}{2p}\frac{d}{dt}\left\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\right\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}^{2p}.\end{aligned}$$

ii. *Como $s > 3/2$, então $u_x \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ e portanto*
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u_x(t,x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p}dx &\leq \|u_x(t,\cdot)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}}(\phi_N(x)u(t,x))^{2p}dx \\ &\leq \|u_x(t,\cdot)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})}\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}^{2p}.\end{aligned}$$

iii. *Temos*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} F^t(x)\phi_N(x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1}dx &\leq \int_{\mathbb{R}}|F^t(x)\phi_N(x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1}|dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}}|F^t(x)\phi_N(x)|^{2p}dx\right)^{\frac{1}{2p}}\left(\int_{\mathbb{R}}|(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1}|^{\frac{2p}{2p-1}}dx\right)^{\frac{2p-1}{2p}} \\ &= \left\|F^t(\cdot)\phi_N(\cdot)\right\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}\left(\left(\int_{\mathbb{R}}|(\phi_N(x)u(t,x))|^{2p}dx\right)^{\frac{1}{2p}}\right)^{2p-1} \\ &= \left\|F^t(\cdot)\phi_N(\cdot)\right\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}^{2p-1}.\end{aligned}$$

iv. *Segue da definição da norma $L^{2p}(\mathbb{R})$.*

v. $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \phi_N(x)u_{xt}(t,x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1}dx &= \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}} \partial_t(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p}dx \\ &= \frac{1}{2p}\frac{d}{dt}\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}^{2p}.\end{aligned}$$

vi. *Aqui utilizamos novamente o fato que $u_x \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ e o resultado sai diretamente da definição da norma $L^{2p}(\mathbb{R})$*

$$\int_{\mathbb{R}}(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p}u_x(t,x)dx \leq \|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}^{2p}\|u_x(t,\cdot)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})}.$$

vii. *Iremos integrar* $\int_{\mathbb{R}} \phi_N(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1}u(t,x)u_{xx}(t,x)dx$ *por partes.*

Tomando $\mathcal{U}(t,x) = \phi_N(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1}u(t,x)$*, temos*

$$\begin{aligned}\partial_x\mathcal{U}(t,x) &= (\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p} + (2p)\phi_N'(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1}u(t,x)\\ &+(2p-1)\phi_N^2(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-2}u(t,x)u_{xx}(t,x).\end{aligned}$$

Como $u(t,x), u_x(t,x) \to 0$ *quando* $|x| \to \infty$*, concluímos que*

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_N(\phi_N u_x)^{2p-1}uu_{xx}dx = -\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}} u_x(\phi_N u_x)^{2p} + (2p)u_x u\phi_N'(\phi_N u_x)^{2p-1}dx.$$

Como $\phi_N' \le \phi_N$*, então*

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} \phi_N(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1}u(t,x)u_{xx}(t,x)dx\\ &\le \frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}}|u_x(t,x)||(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p}|dx + \int_{\mathbb{R}}|u(t,x)||(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p}|dx\\ &\le \frac{1}{2p}\|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}^{2p} + \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}^{2p}.\end{aligned}$$

viii. *Temos*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \partial_x F^t(x)\phi_N(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1}dx &\le \int_{\mathbb{R}}|\partial_x F^t(x)\phi_N(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1}|dx\\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}}|\partial_x F^t(x)\phi_N(x)|^{2p}dx\right)^{\frac{1}{2p}}\left(\int_{\mathbb{R}}|(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1}|^{\frac{2p}{2p-1}}dx\right)^{\frac{2p-1}{2p}}\\ &= \left\|\partial_x F^t(\cdot)\phi_N(\cdot)\right\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}^{2p-1}.\end{aligned}$$

ix. *Segue da definição da norma* $L^{2p}(\mathbb{R})$.

□

Considere que $u(t,x) \in C^0([0,T_0], H^s(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T_0], H^{s-1}(\mathbb{R}))$, com $s > 3/2$ solução de (29) e $F^t(x)$ como definido em (31). Então, temos:

$$u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) = -F^t(x) - \lambda u(t,x). \tag{34}$$

Proposição 5.4. *Sejam $\phi_N(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida em (33), $u(t,x) \in C^0([0,T_0], H^s(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T_0], H^{s-1}(\mathbb{R}))$, com $s > 3/2$ solução de (29), $F^t(x)$ como definido em (31), $2 \le p < \infty$ e $M := \max\limits_{t \in [0,T_0]} \{\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}$. Então:*

i. $\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \|\phi_N(\cdot)u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{(M+\lambda)t} + \displaystyle\int_0^t \|F^\tau(\cdot)\phi_N(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} d\tau.$

ii. $\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \left\|\phi_N(\cdot)u_0'(\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{(2M+\lambda)t} + \displaystyle\int_0^t \|\partial_x F^\tau(\cdot)\phi_N(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} d\tau.$

Demonstração. *: Aqui também utilizamos as mesmas ideias de Himonas em [5], Henry em [6] e Freire em [27].*

i. Multiplicando (34) por $\phi_N(x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1}$, segue que:

$$\begin{aligned}&\phi_N(x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1}u_t(t,x) + \phi_N(x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1}u(t,x)u_x(t,x)\\ &= -\phi_N(x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1}F^t(x) - \lambda\phi_N(x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1}u(t,x).\end{aligned}$$

Integrando, de ambos os lados, a equação anterior em relação a x, temos

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} \phi_N(x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1}u_t(t,x)dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi_N(x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1}u(t,x)u_x(t,x)dx\\ &-\int_{\mathbb{R}} \phi_N(x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1}F^t(x)dx - \int_{\mathbb{R}} \lambda\phi_N(x)(\phi_N(x)u(t,x))^{2p-1}u(t,x)dx.\end{aligned}$$

Pela Proposição 5.3 de $(i-iv)$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})} &\le \|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})}\\ &+ \left\|F^t(\cdot)\phi_N(\cdot)\right\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|^{2p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R})} + \lambda\|(\phi_N(\cdot)u(t,\cdot))\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|^{2p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R})}\frac{d}{dt}\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})} &\le \frac{1}{2p}\Big(\|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})}\\ &+ \left\|F^t(\cdot)\phi_N(\cdot)\right\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|^{2p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R})} + \lambda\|(\phi_N(\cdot)u(t,\cdot))\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})}\Big).\end{aligned}$$

Simplificando a desigualdade,

$$\frac{d}{dt}\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2p}\Big(\|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}$$

$$+\left\|F^t(\cdot)\phi_N(\cdot)\right\|_{L^{2p}(\mathbb{R})} + \lambda\|(\phi_N(\cdot)u(t,\cdot))\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}\Big).$$

Como $M \geq \|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ *e* $\frac{1}{2p} < 1$ *temos*

$$\frac{d}{dt}\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})} \leq (M+\lambda)\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})} + \left\|F^t(\cdot)\phi_N(\cdot)\right\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}.$$

Pela desigualdade de Grönwall e fazendo $p\to\infty$, *temos*

$$\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\phi_N(\cdot)u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}e^{(M+\lambda)t} + \int_0^t \|F^\tau(\cdot)\phi_N(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}d\tau.$$

ii. *Derivando* (34) *com respeito a* x *e multiplicando por* $\phi_N(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1}$, *segue que*

$$\begin{aligned}&\phi_N(\phi_N u_x)^{2p-1}u_{xt} + \phi_N(\phi_N u_x)^{2p-1}u_x^2 + \phi_N(\phi_N u_x)^{2p-1}uu_{xx}\\ &\qquad = -\partial_x F^t(x)\phi_N(\phi_N u_x)^{2p-1} - \lambda u_x\phi_N(\phi_N u_x)^{2p-1}.\end{aligned}$$

Integrando a igualdade acima em x,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\phi_N(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1}u_{xt}(t,x)dx = -\int_{\mathbb{R}}\phi_N(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1}u_x^2(t,x)dx\\ &-\int_{\mathbb{R}}\phi_N(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1}u(t,x)u_{xx}(t,x)dx\\ &-\int_{\mathbb{R}}\partial_x F^t(x)\phi_N(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1}dx - \int_{\mathbb{R}}\lambda u_x(t,x)\phi_N(x)(\phi_N(x)u_x(t,x))^{2p-1}dx.\end{aligned}$$

Pela Proposição 5.3 *de* $(v - ix)$, *temos*

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|^{2p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R})}\\ &\leq \frac{1}{2p}\Bigg(\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})}\|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \frac{1}{2p}\|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})}\\ &+\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})} + \left\|\partial_x F^t(\cdot)\phi_N(\cdot)\right\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|^{2p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R})}\\ &+\lambda\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})}\Bigg).\end{aligned}$$

Simplificando,

$$\frac{d}{dt}\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})} < \|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}(2M+\lambda) + \left\|\partial_x F^t(\cdot)\phi_N(\cdot)\right\|_{L^{2p}(\mathbb{R})}.$$

Utilizando a desigualdade de Grönwall e fazendo $p \to \infty$, concluímos que

$$\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \left\|\phi_N(\cdot)u_0'(\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{(2M+\lambda)t} + \int_0^t \|\partial_x F^\tau(\cdot)\phi_N(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\, d\tau.$$

□

Proposição 5.5. *Considere $\phi_N(x)$ a família de funções definida em (33). Se*

$$K_N(x) = \phi_N(x)\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|}}{\phi_N(y)} dy,$$

então

$$0 \leq K_N(x) \leq \frac{2}{1-\theta},\ \forall x \in \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. *Em [6] pag. 104, é dada uma demonstração de uma função $\phi_N(x)$ similar a que nós utilizamos aqui. No entanto, nossa demonstração é diferente da utilizada lá. Também foi realizada uma demonstração simplificada desta proposição em [13] lema 5.1, pág. 471. É fácil ver que $K_N(x) \geq 0$ para todo N e todo x. Podemos observar também que:*

$$0 \leq \frac{\phi_N(x)}{\phi_N(y)} \leq e^{\theta|x-y|}, \forall x, y \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

De fato, suponha que $|x| < N$, então

$$\frac{\phi_N(x)}{\phi_N(y)} = \frac{e^{\theta|x|}}{\phi_N(y)}.$$

Se $|y| < N$,

$$\frac{\phi_N(x)}{\phi_N(y)} = \frac{e^{\theta|x|}}{e^{\theta|y|}} = e^{\theta(|x|-|y|)} \leq e^{\theta|x-y|}.$$

Se $|y| \geq N$,

$$\frac{\phi_N(x)}{\phi_N(y)} = \frac{e^{\theta|x|}}{e^{\theta N}} = e^{\theta\overbrace{(|x|-N)}^{<0}} \leq e^{\theta|x-y|}.$$

Suponha agora que $|x| \geq N$,

$$\frac{\phi_N(x)}{\phi_N(y)} = \frac{e^{\theta N}}{\phi_N(y)}.$$

Se $|y| < N$,

$$\frac{\phi_N(x)}{\phi_N(y)} = \frac{e^{\theta N}}{e^{\theta|y|}} = e^{\theta(N-|y|)} \leq e^{\theta(|x|-|y|)} \leq e^{\theta|x-y|}.$$

Se $|y| \geq N$,

$$\frac{\phi_N(x)}{\phi_N(y)} = \frac{e^{\theta N}}{e^{\theta N}} = 1 \leq e^{\theta|x-y|}.$$

Como $(\theta - 1) < 0$,

$$K_N(x) = \phi_N(x) \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|}}{\phi_N(y)} dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi_N(x)}{\phi_N(y)} e^{-|x-y|} dy \leq \int_{\mathbb{R}} e^{(\theta-1)|x-y|} dy = \frac{2}{1-\theta}.$$

□

Proposição 5.6. *Sejam* $u(t,x) \in C^0([0,T), H^s(\mathbb{R}))$ *com* $s > 3/2$ *solução de* (29), $F^t(x)$ *como definido em* (31) *e* $\phi_N(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função definida em* (33). *Então*

$$\int_0^t \|F^\tau(\cdot)\phi_N(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} d\tau + \int_0^t \|\partial_x F^\tau(\cdot)\phi_N(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} d\tau \leq c \int_0^t \Big(\|\phi_N(\cdot)u(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$
$$+ \|\phi_N(\cdot)u_x(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \Big) d\tau$$

em que c é uma constante positiva.

Demonstração. *Temos por* (32)

$$|\phi_N(x)F^t(x)| = \left|\phi_N(x)\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} -sign(x-y)e^{-|x-y|}\left(u^2(t,y) + \frac{u_x^2(t,y)}{2} + h(u(t,y))\right) dy\right)\right|$$
$$= \left|\phi_N(x)\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|}\left(u^2(t,y) + \frac{u_x^2(t,y)}{2} + h(u(t,y))\right) dy\right)\right|,$$

logo

$$
\begin{aligned}
2|\phi_N(x)F^t(x)| &= \left|\phi_N(x)\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|}\left(u(t,y)^2+\frac{u_y(t,y)^2}{2}+h(u(t,y))\right)dy\right| \\
&= \left|\phi_N(x)\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|}}{\phi_N(y)}\phi_N(y)\left(u(t,y)^2+\frac{u_y(t,y)^2}{2}+h(u(t,y))\right)dy\right| \\
&\leq \left|\phi_N(x)\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|}}{\phi_N(y)}dy\right|\Big(\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+ \\
&\quad \frac{1}{2}\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+\|\phi_N(\cdot)h(u(t,\cdot))\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\Big).
\end{aligned}
$$

$$
\left|\phi_N(x)\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|}}{\phi_N(y)}dy\right| \leq \frac{2}{1-\theta} := k,
$$

e $|h(u(t,x))|\leq C|u(t,x)|$ *em que* C *é uma constante positiva, obtemos*

$$
\begin{aligned}
|\phi_N(x)F^t(x)| &\leq \frac{k}{2}\Big(\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
&\quad +\frac{1}{2}\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+C\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot))\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\Big) \\
&\leq (kM+C)\left(\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right),
\end{aligned}
$$

em que $M := \max_{t\in[0,T_0]}\{\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+\|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}$. *Observando que* $(\partial_x^2\Lambda^{-2})u = (\Lambda^{-2}-I)u = \Lambda^{-2}u-u$,

$$
|\partial_x\phi_N(x)F^t(x)|\leq d\left(\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)
$$

em que d *é uma constante positiva. Logo, podemos concluir que*

$$
\left\|\phi_N(x)F^t(x)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leq c_1\left(\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)
$$

e

$$
\left\|\partial_x\phi_N(x)F^t(x)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leq c_2\left(\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+\|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)
$$

em que c_1 *e* c_2 *são constantes positivas. Somando as duas desigualdades acima e integrando em* $0<t<T$, *concluímos*

$$\int_0^t \|F^\tau(\cdot)\phi_N(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\, d\tau + \int_0^t \|\partial_x F^\tau(\cdot)\phi_N(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\, d\tau \leq c \int_0^t \Big(\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$$+ \|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \Big)\, d\tau$$

em que $c = c_1 + c_2$. □

Todos esses resultados técnicos demonstrados até aqui servirão para demonstrar o resultado principal desta seção que é o Teorema 5.2.

***Demonstração do Teorema* 5.2.** *Pelas proposições* 5.4 *e* 5.6*, temos*

$$\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\phi_N(\cdot)u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\, e^{(M+\lambda)t}$$

$$+ \left\|\phi_N(\cdot)u_0'(\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{(2M+\lambda)t} + \int_0^t \|F^\tau(\cdot)\phi_N(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\, d\tau + \int_0^t \|\partial_x F^\tau(\cdot)\phi_N(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\, d\tau$$

e

$$\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\phi_N(\cdot)u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\, e^{(M+\lambda)t}$$

$$+ \left\|\phi_N(\cdot)u_0'(\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{(2M+\lambda)t} + c\int_0^t \Big(\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \Big)\, d\tau.$$

Seja $d := \max\{e^{(M+\lambda)t}, e^{(2M+\lambda)t}, c\}$. *Então*

$$\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq d \Big[\|\phi_N(\cdot)u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\|\phi_N(\cdot)u_0'(\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} +$$

$$\int_0^t \Big(\|\phi_N(\cdot)u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\phi_N(\cdot)u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \Big)\, d\tau \Big]$$

utilizando a desigualdade de Grönwall e fazendo $N \to \infty$,

$$\left\|e^{\theta|(\cdot)|}u(t,\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\|e^{\theta|(\cdot)|}u_x(t,\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq w \left[\left\|e^{\theta|(\cdot)|}u_0(\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\|e^{\theta|(\cdot)|}u_0'(\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right]$$

em que w *é uma constante positiva. Defina*

$$\left\|e^{\theta|\cdot|}u_0(\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} =: L_1/2$$

e

$$\left\| e^{\theta|\cdot|} u_0'(\cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} =: L_2/2.$$

Seja $L := \max\{wL_1, wL_2\}$, *então*

$$\left\| e^{\theta|(\cdot)|} u(t,\cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| e^{\theta|(\cdot)|} u_x(t,\cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq L$$

Portanto,

$$|e^{\theta|x|} u(t,x)| + |e^{\theta|x|} u_x(t,x)| \leq \left\| e^{\theta|(\cdot)|} u(t,\cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| e^{\theta|(\cdot)|} u_x(t,\cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq L.$$

Logo

$$|e^{\theta|x|} u(t,x)| \leq L \Longrightarrow |u(t,x)| \leq \frac{L}{e^{\theta|x|}}$$

e

$$|e^{\theta|x|} u_x(t,x)| \leq L \Longrightarrow |u_x(t,x)| \leq \frac{L}{e^{\theta|x|}}.$$

□

Antes de enunciar e demonstrar o próximo teorema, observe que se $1/2 < a < 1$ e $|f(x)| \sim O(e^{-2ax})$ quando $x \to \infty$, então $|f(x)| \sim o(e^{-x})$ quando $x \to \infty$. De fato, se $|f(x)| \sim O(e^{-2ax})$ quando $x \to \infty$, então existem $C > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, tais que se $x > x_0$, então:

$$|e^{2ax} f(x)| \leq C,$$

como $2a > 1$, existe $r > 0$, tal que

$$|e^{x+rx} f(x)| \leq C,$$

e portanto

$$|e^{x} f(x)| \leq \frac{C}{e^{-rx}},$$

o que nos leva a concluir que

$$0 \leq \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{e^{-x}} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{C}{e^{-rx}} = 0 \Rightarrow |f(x)| \sim o(e^{-x}). \tag{36}$$

Não é difícil mostrar também que se $u, u_x \sim O(e^{ax})$, então $uu_x, u^2, u_x^2 \sim O(e^{2ax})$.

As ideias do teorema a seguir e sua demonstração foram motivadas pelo artigo [5].

Teorema 5.7. *Assuma que* $u(t,x) \in C^0([0,T_0], H^s(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T_0], H^{s-1}(\mathbb{R}))$, $s > 3/2$ *seja solução de* (29), *para algum* $T_0 > 0$. *Assuma que para algum* $\theta \in (1/2, 1)$,

$$|u_0(x)| \sim o(e^{-|x|}) \text{ e } |u_0'(x)| \sim O(e^{-\theta|x|}) \text{ quando } x \to \pm\infty,$$

suponha a existência de algum $t_1 \in (0, T_0]$ *com*

$$|u(t_1, x)| \sim o(e^{-|x|}) \text{ quando } x \to \pm\infty$$

e que $h(u) \geq 0$ *é Lipschitz, ocorrendo* $h(0) = 0$. *Então* $u \equiv 0$.

Demonstração. *Integrando de* $[0, t_1]$ *a equação* (29), *temos*

$$\begin{aligned} u(t_1,x) - u(0,x) + \int_0^{t_1} u(\tau,x)u_x(\tau,x)d\tau = \\ -\int_0^{t_1} \partial_x \Lambda^{-2}\left(u^2(\tau,x) + \frac{u_x^2}{2}(\tau,x) + h(u(\tau,x))\right)d\tau - \int_0^{t_1} \lambda u(\tau,x)d\tau \end{aligned} \tag{37}$$

Pela hipótese,

$$u(0,x) - u(t_1,x) \sim o(e^{-|x|}) \text{ quando } x \to \pm\infty \; . \tag{38}$$

Também pela hipótese e pelo Teorema 5.2, *temos que* $u(t,x), u_x(t,x) \sim O(e^{-\theta|x|})$ *e portanto*

$$\int_0^{t_1} u(\tau,x)u_x(\tau,x)d\tau \sim O(e^{-2\theta|x|}) \text{ quando } x \to \pm\infty \; , \tag{39}$$

e como visto em (36),

$$\int_0^{t_1} u(\tau,x)u_x(\tau,x)d\tau \sim o(e^{-|x|}) \text{ quando } x \to \pm\infty \; . \tag{40}$$

Ou seja, temos que o primeiro membro da equação (37)

$$\left(u(0,x) - u(t_1,x) + \int_0^{t_1} u(\tau,x)u_x(\tau,x)d\tau\right) \sim o(e^{-|x|}). \tag{41}$$

Vamos mostrar que se $u \not\equiv 0$, *então o segundo membro da equação* (37) *não é* $o(e^{-|x|})$, *nos rendendo assim uma contradição. O Teorema* 5.2 *nos dá*

$$\int_0^{t_1} \lambda u(\tau, x) d\tau \sim O(e^{-\theta|x|}). \tag{42}$$

Analisando a primeira parcela do segundo membro da equação (37), temos

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_1} \partial_x \Lambda^{-2} \left(u^2(\tau, x) + \frac{u_x^2}{2}(\tau, x) + h(u(\tau, x)) \right) d\tau = \\ &\int_0^{t_1} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} sign(x-y) e^{-|x-y|} \left(u^2(\tau, y) + \frac{u_x^2(\tau, y)}{2} + h(u(\tau, y)) \right) dy \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} sign(x-y) e^{-|x-y|} \left(\int_0^{t_1} \left(u^2(\tau, y) + \frac{u_x^2(\tau, y)}{2} + h(u(\tau, y)) \right) d\tau \right) dy. \end{aligned} \tag{43}$$

Já vimos que $|h(u(t,x))| \leq c|u(t,x)|$, *assim*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} sign(x-y) e^{-|x-y|} \left(\int_0^{t_1} (h(u(\tau, y)))\, d\tau \right) dy = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^{y} \left(\int_0^{t_1} (h(u(\tau, y)))\, d\tau \right) dy \\ -e^{x} \int_x^{\infty} e^{-y} \left(\int_0^{t_1} (h(u(\tau, y)))\, d\tau \right) dy. \end{aligned} \tag{44}$$

Suponha que $u(t,x) \not\equiv 0$, *então* $h(u(t,x)) \geq 0$, $h(u(t,x)) \not\equiv 0$ *e*

$$c_0 := \int_{-\infty}^{0} e^{y} \left(\int_0^{t_1} (h(u(\tau, y)))\, d\tau \right) dy > 0,$$

e portanto

$$e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^{y} \left(\int_0^{t_1} (h(u(\tau, y)))\, d\tau \right) dy \geq c_0 e^{-x}, \ \ para\ x \gg 1 \tag{45}$$

o que nos dá que

$$e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^{y} \left(\int_0^{t_1} (h(u(\tau, y)))\, d\tau \right) dy \sim O(e^{-|x|})$$

mas não $o(e^{-|x|})$. *Temos também*

$$-e^{x} \int_x^{\infty} e^{-y} \left(\int_0^{t_1} (h(u(\tau, y)))\, d\tau \right) dy \sim O(e^{-\theta|x|}). \tag{46}$$

Definindo

$$\rho(y) = \int_0^{t_1} \left(u^2(\tau, y) + \frac{u_x^2(\tau, y)}{2}) \right) d\tau$$

temos que $0 \leq \rho(y) \sim O(e^{-2\theta|x|})$, *e portanto* $\rho(y) \sim o(e^{-|x|})$, *e*

$$\int_{\mathbb{R}} sign(x-y)e^{-|x-y|}\rho(y)dy = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\rho(y)dy - e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-y}\rho(y)dy. \tag{47}$$

Considereando $x \gg 0$, a segunda parcela do segundo membro da equação (47) nos dá

$$e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-y}\rho(y)dy \sim o(1)e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-2y}dy \sim o(e^{-|x|}). \tag{48}$$

Como $u(t,x) \not\equiv 0$, então $\rho(y) \neq 0$ e a primeira parcela do segundo membro da equação (47) é maior que zero. Portanto

$$e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\rho(y)dy \geq c_1 e^{-x}, \text{ para } x \gg 1, \tag{49}$$

em que

$$c_1 := \int_{-\infty}^{0} e^{y}\rho(y)dy > 0.$$

O que nos dá novamente que $e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\rho(y)dy \sim O(e^{-|x|})$ mas não $o(e^{-|x|})$, nos rendendo uma contradição com as equações (37)-(49). Se $x \to -\infty$ as equações (45) e (49) nos dão

$$e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\left(\int_{0}^{t_1} (h(u(\tau,y)))\,d\tau\right)dy \to \infty$$

e

$$e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\rho(y)dy \to \infty,$$

nos levando novamente a uma contradição. Logo $u(t,x) = 0$. □

5.2 CONTINUAÇÃO ÚNICA DE SOLUÇÃO

Nesta seção, iremos mostrar que se $u \in C^0([0,T), H^s(\mathbb{R}))$, $s > 3/2$ é solução de (29), tal que u se anula em um aberto $\mathcal{R} \subseteq [0,T) \times \mathbb{R}$, então $u = 0$ em todo lugar. Uma conclusão direta deste teorema é que se $u(0,x) = u_0(x) \neq 0$, então não existe um aberto $\mathcal{R} \subseteq [0,T) \times \mathbb{R}$ para o qual $u(t,x) = 0$, $\forall (t,x) \in \mathcal{R}$ em que $u \in C^0([0,T), H^s(\mathbb{R})), s > 3/2$ é solução de (29).

As ideias utilizadas nesta seção foram motivadas pelo trabalho de Freire [8].

Temos que o problema (29) tem a seguinte quantidade conservada

$$\mathcal{H}(t) = e^{2\lambda t} \int_{\mathbb{R}} u^2(t,x) + u_x^2(t,x)dx = e^{2\lambda t} \|u(t,\cdot)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}. \tag{50}$$

Sejam $t_0, t_1, a, b \in \mathbb{R}$, tais que $t_0 < t_1$ e $a < b$. Defina o retângulo aberto

$$\mathcal{R} := (t_0, t_1) \times (a, b) \subseteq [0, T) \times \mathbb{R}.$$

Considere as seguintes condições

C1 u é solução de (29) tal que

$$\left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h(u)\right)(t,\cdot) \in C^0(\mathbb{R}), t \in [0,T),$$

C2 $u|_{\mathcal{R}} = 0,$

C3 a solução u conserva (50).

Proposição 5.8. *Seja u uma solução de (29) satisfazendo **C3**. Se existe um $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{H}(t_0) = 0$, então $\mathcal{H}(t) = 0, \forall t \in [0,T)$. Em particular, $u(t,x) = 0, \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. *Como $\mathcal{H}(t)$ é uma quantidade conservada, então $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(t_0) = 0, \forall t \in [0,T)$. Além disso, temos que $0 = 2e^{-2\lambda t}\mathcal{H}(t) = \|u(t,\cdot)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}$, o que implica que $u(t,x) = 0, \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$.* □

Proposição 5.9. *Seja u solução de (29) satisfazendo **C1** e $f^t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida em (30). Então*

1. *a função $f^t(x)$ é contínua e não negativa;*
2. *se a solução satisfaz a condição **C3** e existir $t^* \in [0,T)$ tal que $f^{t^*}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então $u(t^*,x) = 0$. Em particular, $f^t(\cdot) = 0, \forall t \in [0,T)$.*

Demonstração. *O primeiro item é trivial. No segundo item, suponha existir tal t^*, então temos*

$$0 = f^{t^*}(x) = \left(u^2 + \frac{u_x^2}{2} + h(u)\right)(t^*,x) = u^2(t^*,x) + \frac{u_x^2(t^*,x)}{2} + h(u(t^*,x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $u^2 \geq 0, u_x^2 \geq 0$ e $h(u) \geq 0$, então a soma é igual a zero se, e somente se, cada um dos termos forem zero. Logo $u^2(t^*,x) = 0$ e $u_x^2(t^*,x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. O que implica que $\mathcal{H}(t^*) = 0$ e o resultado segue da proposição anterior. □

Proposição 5.10. *Seja $(f^t)_{t\in[0,T)}$ uma família de funções em que f^t é definida em (30). Para cada $t \in [0,T)$, $\Lambda^{-2}f^t(x) = 0$ se, e somente se, $f^t(x) = 0$.*

Demonstração. *Sabemos que*

$$\Lambda^{-2}f^t(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f^t(y)dy$$

em que $g(x) = \dfrac{e^{-|x|}}{2}$. Podemos observar que g é estritamente positiva e pela Proposição 5.9 temos que f^t é contínua e não negativa. Portanto, sob essas afirmações, $g * f^t = 0$ se, e somente se, $f^t = 0$. $\square$

Teorema 5.11. *Considere a família de funções $(F^t)_{t\in[0,T)}$ definida em (31). Se u satisfaz as condições **C1** e **C3** e existem números t^*, a, b com $a < b$, tal que $\{t^*\} \times (a,b) \subseteq (0,T) \times \mathbb{R}$, $f^{t^*}|_{(a,b)} = 0$ e $F^{t^*}(a) = F^{t^*}(b)$, então $F^t(\cdot) = 0, \forall t \in [0,T)$. Em particular, $f^t(x) = u(t,x) = 0, \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. *Sabemos que $\partial_x^2\Lambda^{-2} = \Lambda^{-2} - I$, logo, se $x \in (a,b)$*

$$\frac{d}{dx}F^{t^*}(x) = \partial_x^2\Lambda^{-2}f^{t^*}(x) = \Lambda^{-2}f^{t^*}(x) - f^{t^*}(x) = \Lambda^{-2}f^{t^*}(x)$$

pois $f^{t^*}(x) = 0, \forall x \in (a,b)$. Pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$0 = F^{t^*}(a) - F^{t^*}(b) = \int_a^b \Lambda^{-2}f^{t^*}(x)dx = \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y)f^{t^*}(y)dy\right) dx$$

Como $\Lambda^{-2}f^{t^*}(x) \geq 0$, então necessariamente temos $\Lambda^{-2}f^{t^*}(x) = 0$. Temos pela Proposição 5.10 que $f^{t^*}(x) = 0$ e pela Proposição 5.9-item 2, sabemos que $f^t(x) = 0, \forall t \in [0,T)$, de onde concluímos que $F^t(x) = 0, u(t,x) = 0, \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$. $\square$

Teorema 5.12. *Se $u \in C^0([0,T), H^s(\mathbb{R})), s > 3/2$, é uma solução de (29) satisfazendo **C2**, então $u = 0$.*

Demonstração. *Para todo $t > 0$, das equações (31) e (29), podemos reescrever*

$$F^t(x) = -u_t - uu_x - \lambda u.$$

Tomando $t^* \in (t_0, t_1)$ e observando que $u(t,x) = 0, \forall (t,x) \in \mathcal{R}$, então $u_t(t^*, x) = 0, \forall x \in (a,b)$. Concluímos que $F^{t^*}(a) = F^{t^*}(b) = 0$ e que $f^{t^*}(x) = 0, \forall x \in (a,b)$. Logo, pelo Teorema 5.11 temos o resultado. $\square$

Teorema 5.13. *Suponha que* $u \in C^0([0,T), H^s(\mathbb{R}))$, $s > 3/2$, *é uma solução de* (29). *Se para algum* $t^* \in (0,T)$ *existirem números* $a, b \in \mathbb{R}$ *com* $a < b, u(t^*, x) = 0, \forall x \in (a,b)$ *e* $u_t(t^*, a) = u_t(t^*, b) = 0$, *então* $u(t,x) = 0, \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$.

Demonstração. *Sob as condições do teorema, temos que* $F^{t^*}(a) = F^{t^*}(b)$ *e que* $f^{t^*}(x) = 0, \forall x \in (a,b)$, *logo, pelo Teorema* 5.11 *temos o resultado.* $\square$

Corolário 5.14. *Suponha que* $u \in C^0([0,T), H^s(\mathbb{R}))$, $s > 3/2$, *é uma solução de* (29). *Suponha ainda que para algum* $t^* \in (0,T)$ *a função* $u(t^*, \cdot)$ *tenha suporte* Ω. *Se pudermos encontrar um conjunto compacto* $[a,b] \not\subseteq \Omega$ *tal que* $u_t(t^*, a) = u_t(t^*, b) = 0$, *então* $u(t,x) = 0, \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$.

Demonstração. *Basta observar que* $u(t^*, x) = 0, \forall x \in (a,b)$ *e caímos nas hipóteses do Teorema* 5.13. $\square$

6 CONCLUSÃO

No presente trabalho, estudamos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{txx} + 3uu_x - uu_{xxx} - 2u_xu_{xx} + \lambda(u - u_{xx}) + \partial_x h(u) & = & 0, \\ u(0, x) & = & u_0(x), \end{cases}$$

em que $\lambda \geq 0, h \in C^\infty(\mathbb{R})$ é Lipschitz, $h(0) = 0$ e $u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}), s > 3/2$. Mostramos que ele é bem colocado, encontramos condições que garantem o desenvolvimento de *wave breaking* da solução, mostramos que a solução u e sua derivada u_x herdam a propriedade de decaimento do dado inicial u_0 e u_0' e que se $u(t, x) = 0, \forall (t, x) \in \mathcal{R} \subset [0, T) \times \mathbb{R}$ em que $\mathcal{R}$ é um aberto, então a solução do problema é nula em todo o domínio.

Embora o último resultado nos leve a conjecturar que $u(\cdot, x)$ não tenha suporte compacto, nós não temos resultados para provar isso, deixando este tema para trabalhos futuros.

Por fim, a tese gerou dois artigos na revista *Journal of Differential Equations*, o que mostra a relevância e a contribuição do tema para área.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. Fuchssteiner, A. S. Fokas, Symplectic structures, their bäcklund transformations and hereditary symmetries, Physica D: Nonlinear Phenomena 4 (1) (1981) 47–66.

[2] R. Camassa, D. D. Holm, An integrable shallow water equation with peaked solitons, Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 1661–1664.

[3] J. Escher, Breaking water waves, in: A. Constantin (Ed.), Nonlinear Water Waves, in: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2158, Springer, Cham, 2016, pp. 83–119. doi:10.1007/978-3-319-31462-4_2.

[4] F. Linares, G. Ponce, Unique continuation properties for solutions to the Camassa-Holm equation and related models, Proceedings of the American Mathematical Society 148 (2020) 3871–3879.

[5] A. A. Himonas, G. Misiolek, G. Ponce, Y. Zhou, Persistence properties and unique continuation of solutions of the Camassa-Holm equation, Commun. Math. Phys. 271 (2007) 511–522.

[6] D. Henry, Persistence properties for the Degasperis–Procesi equation, J. Hyperbolic Differ. Equations 05 (2008) 99–111.

[7] P. L. da Silva, I. L. Freire, Existence, persistence, and continuation of solutions for a generalized 0-Holm-Staley equation, Journal of Differential Equations 320 (2022) 371–398. doi:https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.02.058.

[8] I. Freire, Geometrical demonstration for persistence properties for a bi-Hamiltonian shallow water system, J. Math. Phys. 63 (041510) (2020).

[9] A. Darós, L. K. Arruda, On the instability of elliptic traveling wave solutions of the modified Camassa–Holm equation, Journal of Differential Equations 266 (2019) 1946–1968.

[10] I. Freire, N. Sales Filho, L. Souza, C. Toffoli, Invariants and wave breaking analysis of a Camassa-Holm type equation with quadratic and cubic nonlinearities, Journal of Differential Equations 269 (2020) 56–77.

[11] O. G. Mustafa, On the Cauchy problem for a generalized Camassa-Holm equation, Nonlinear Analysis 74 (2006) 1382–1399.

[12] A. Constantin, L. Molinet, The initial value problem for a generalized Boussinesq equation, Vol. 15, 2002, p. 1061–1072.

[13] I. Freire, C. Toffoli, Wave breaking and asymptotic analysis of solutions for a class of weakly dissipative nonlinear wave equations, Journal of Differential Equations 358 (2023) 457–483.

[14] M. E. Taylor, Partial Differential Equations I: Basic Theory, Springer, New York, 2011.

[15] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Vol. 44, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Barcelona, Budapest, Hong Kong, London, Milan, Paris, Santa Clara, Singapore, Tokyo, 1983.

[16] M. Renardy, R. C. Rogers, An Introduction to Partial Differential Equations, 2nd Edition, 2003.

[17] R. Iório Júnior, V. M. Iório, Equações diferenciais parciais: uma introdução, 3rd Edition, IMPA, Rio de Janeiro, 2018.

[18] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, Fundamentos de Análise Funcional, SBM, Rio de Janeiro, 2015.

[19] R. Strichartz, A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1994.

[20] V. M. Iório, EDP Um curso de graduação, 4th Edition, IMPA, Rio de Janeiro, 2018.

[21] T. Kato, Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations, in: Spectral theory and differential equations 448 (1975) 25–70, proceedings of the Symposium Dundee, 1974, Dedicated to Konrad Jrgens, in: Lecture Notes in Math.

[22] P. J. Olver, Introduction to Partial Differential Equations, Springer, Cham, 2016.

[23] E. L. Lima, Curso de Análise, 11th Edition, Vol. 2, IMPA, Rio de Janeiro, 2015.

[24] X. Liu, Z. Yin, Local well-posedness and stability of peakons for a generalized Dullin–Gottwald–Holm equation, Nonlinear Analysis 74 (2011) 2497–2507.

[25] I. Freire, Wave breaking for shallow water models with time decaying solutions, Journal of Differential Equations 267 (2020) 5318–5369.

[26] A. Constantin, J. Escher, Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations, Acta Mth. 181 (1998) 229–243.

[27] I. Freire, Persistence properties of a Camassa-Holm type equation with (n+1)-order non-linearities, J. Math. Phys. 63 (011505) (2022).

ÍNDICE REMISSIVO