



Universidade Federal do ABC

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ALINE JAQUELINE DE OLIVEIRA ANDRADE

Aditividade de funções em estruturas alternativas

Santo André, 2025



Aline Jaqueline de Oliveira Andrade

Aditividade de funções em estruturas alternativas

Tese de doutorado apresentada ao programa de pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do ABC para obtenção do título de Doutora em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Bruno Leonardo Macedo Ferreira

Santo André, 2025

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

De Oliveira Andrade, Aline Jaqueline
Aditividade de funções em estruturas alternativas / Aline
Jaqueline De Oliveira Andrade. — 2025.

185 fls.

Orientação de: Bruno Leonardo Macedo Ferreira

Tese (Doutorado) — Universidade Federal do ABC, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2025.

1. aditividade de funções. 2. *-álgebra alternativa. 3. álgebra
alternativa generalizada. 4. álgebra não associativas. I. Macedo
Ferreira, Bruno Leonardo. II. Programa de Pós-Graduação em
Matemática, 2025. III. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC


Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP

CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

Ata de Defesa de Tese de Doutorado e Folha de Assinaturas

No dia 7 de Novembro de 2025 às 15:00, no local: Auditório 801 no 8º andar do Bloco B do Campus Santo André da Universidade Federal do ABC, realizou-se a Defesa da Tese de Doutorado, que constou da apresentação do trabalho intitulado "Aditividade de funções em estruturas alternativas" de autoria da candidata, ALINE JAQUELINE DE OLIVEIRA ANDRADE, RA nº 23202110228, discente do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da UFABC, sob orientação do Profº BRUNO LEONARDO MACEDO FERREIRA. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, a candidata foi considerada aprovada pela Banca Examinadora.

E, para constar, foi lavrada a presente ata e folha de assinaturas assinada pelos membros da Banca.

Documento assinado digitalmente
 **BRUNO LEONARDO MACEDO FERREIRA**
Data: 10/11/2025 12:13:56-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. BRUNO LEONARDO MACEDO FERREIRA, UTFPR

Presidente - Interno ao Programa



Documento assinado digitalmente
Bruno Tadeu Costa
Data: 07/11/2025 18:18:24-0300
CPF: ***.595.068-**
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Dr. BRUNO TADEU COSTA, UFSC

Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição



Documento assinado digitalmente
DYLENE AGDA SOUZA DE BARROS
Data: 08/11/2025 09:45:14-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. DYLENE AGDA SOUZA DE BARROS, UFU

Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição



Documento assinado digitalmente
HENRIQUE GUZZO JUNIOR
Data: 08/11/2025 11:23:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. HENRIQUE GUZZO JUNIOR, USP

Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP
CEP 09210-580 - Fone: (11) 4996-0017



Documento assinado digitalmente

TANISE CARNIERI PIERIN

Data: 10/11/2025 11:47:26-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dra. TANISE CARNIERI PIERIN, UFPR

Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

Dr. LUIS ENRIQUE RAMIREZ, UFABC

Membro Suplente - Examinador(a) Interno ao Programa

Dr. FERNANDO ARAUJO BORGES, UFPR

Membro Suplente - Examinador(a) Externo à Instituição

Dra. RUTH NASCIMENTO FERREIRA, UTFPR

Membro Suplente - Examinador(a) Externo à Instituição



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP

CEP 09210-580 - Fone: (11) 4996-0017

Folha de Ressalvas

(não incluir esta Folha de Ressalvas na versão final da Tese)

Ressalvas e sugestões da Banca examinadora:

Nenhuma

Os membros que participaram de modo remoto foram:

Bruno Leonardo Macedo Ferreira
Bruno Tadeu Costa
Tanise Carnieri Pierin

Por sugestão da banca examinadora, o **novo título** passa a ser (em letra de forma e legível):

Indique o **idioma** da dissertação/tese: **Português** **Inglês** **Outro:** _____


a) Novo Título em **Português** (se a dissertação/tese é em português):

b) Novo Título em **Inglês** (preenchimento obrigatório para dissertação/tese em qualquer idioma):


c) Novo Título em **outro idioma**, conforme o idioma indicado acima, se houver:

Declaração de Atendimento às Observações da Banca

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única da autora e com a anuência do orientador.

Documento assinado digitalmente
 **ALINE JAQUELINE DE OLIVEIRA ANDRADE**
Data: 28/11/2025 12:00:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Aline Jaqueline de Oliveira Andrade

Documento assinado digitalmente
 **BRUNO LEONARDO MACEDO FERREIRA**
Data: 02/12/2025 11:48:42-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Bruno Leonardo Macedo Ferreira

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

DEDICATÓRIA

Dedico essa à minha mãe Leda (*in memoriam*), à minha tia Maisa e à minha avó Almerita (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Agradeço, com profunda emoção, à minha mãe Leda (*in memoriam*), mulher de sabedoria singular, que mesmo com pouca instrução formal me transmitiu o valor do conhecimento e a crença de que um futuro melhor seria possível por meio do estudo. Espero, de coração, que onde quer que esteja, esteja celebrando comigo esta conquista.

À minha tia Maisa, que, com amor e responsabilidade, cuidou de mim e da minha irmã como se fôssemos suas filhas, deixo minha sincera gratidão por sua presença constante em nossas vidas.

À minha avó Almerita (*in memoriam*), que sempre acreditou em mim e sonhava em “me ver” doutora, minha eterna gratidão. Tenho certeza de que, junto com minha mãe, compartilha agora, em espírito, a alegria desta realização.

Agradeço à minha irmã Amanda, cuja forma discreta de demonstrar carinho se revela na alegria silenciosa com cada uma de minhas conquistas.

Ao meu orientador, Bruno Ferreira, agradeço pela confiança e dedicação ao aceitar me orientar sem hesitar. Esteve presente em todas as etapas do doutorado, especialmente no desenvolvimento do projeto sanduíche, que sempre foi um sonho para mim.

À Elisabete Barreiro, que foi minha coautora em diversos artigos, coorientadora no projeto de doutorado sanduíche e colaboradora essencial na revisão desta tese, registro minha sincera gratidão.

À Dahisy, minha professora de Análise Funcional e orientadora nos estágios de docência, que se tornou uma grande amiga ao longo do doutorado, agradeço pela presença constante e pelas conversas enriquecedoras, especialmente durante os momentos difíceis do doutorado e do período do doutorado sanduíche.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da UFABC pelo apoio ao longo da jornada, em especial à Alejandra, à Sandra, ao Cristian, ao Daniel e ao Jeferson. Estendo meus agradecimentos à Regina, secretária dos programas de pós-graduação, por sua incansável dedicação em lidar com as inúmeras demandas administrativas.

À Gabriela Espelho, agradeço pela presença constante, especialmente durante o doutorado sanduíche, pelo carinho, pelo apoio incondicional e por compartilhar comigo os momentos mais desafiadores desta trajetória. Sou profundamente grata por tudo.

Às amigas Dalila e Amanda, minha eterna gratidão pela amizade sólida, pelo apoio nos momentos difíceis e pela presença afetuosa em minha vida. Vocês são, sem dúvida, da UFV para a vida.

Ao Gabriel, agradeço pela escuta atenta, pelas conversas sinceras, pelas caminhadas e pela amizade generosa e constante. Sua presença tornou essa jornada mais leve e significativa.

Agradeço às pessoas incríveis que conheci por meio do handebol, e que se tornaram grandes amigas, em particular, a Tetê, a Caipira, a Babi e o Vivi. Compartilharam comigo os desafios do doutorado com acolhimento e companheirismo, sendo fundamentais ao longo do caminho.

Aos amigos de laboratório, o Denis, o Denilson e o Lucas, agradeço pela parceria no dia a dia acadêmico, pelas conversas produtivas e pela amizade sincera, que tornaram a rotina mais leve.

Aos amigos que conquistei durante o doutorado sanduíche, em especial à Juliana, à Kellyane, à Tânia, ao Gonçalo e ao Terrível, expresso minha sincera gratidão por terem tornado inesquecível este período desafiador que tive a felicidade de viver na Universidade de Coimbra, Portugal.

Agradeço à CAPES pelo financiamento contínuo ao longo de minha trajetória acadêmica, desde a graduação até o doutorado sanduíche. Embora o valor das bolsas esteja defasado em relação às demandas reais dos estudantes, o apoio concedido foi fundamental para que eu pudesse me dedicar integralmente à formação acadêmica e, assim, chegar à conclusão desta tese.

Por fim, deixo registrado que, para uma mulher, cursar um doutorado em Matemática exige muito mais do que dedicação acadêmica. É como diz a canção *Maria, Maria*, de Milton Nascimento: “...é preciso ter força, é preciso ter raça, é preciso ter gana sempre...”. E o que nunca me faltou foi a força, herança das mulheres da minha família; a raça, essa determinação que me impulsiona e sustenta; e a gana por um futuro mais justo e igualitário, onde o conhecimento seja caminho para a transformação.

Estuda Lili!
A única coisa que é sua de verdade é o seu estudo.
— De Oliveira, L. A.

RESUMO

Nesta tese, apresentamos quatro resultados principais obtidos durante a pesquisa de doutorado da autora, no contexto do estudo de estruturas algébricas alternativas. Os três primeiros foram elaborados considerando uma $*$ -álgebra alternativa com identidade contendo um idempotente simétrico não trivial e sujeita a determinadas condições estruturais. O primeiro deles consiste em uma caracterização de uma n -função $*$ -Lie multiplicativa. O segundo também apresenta uma caracterização, no entanto de uma n -função $*$ -Jordan multiplicativa, e o terceiro, por sua vez, estabelece a aditividade de derivações $*$ -Jordan. O quarto resultado trata da aditividade de isomorfismos em álgebras alternativas generalizadas. Além disso, fizemos a construção de um exemplo de álgebra alternativa generalizada que não é alternativa, uma construção que, até onde sabemos, não foi previamente encontrada na literatura.

Palavras-chave: aditividade, derivação $*$ -Jordan, $*$ -derivação, isomorfismo multiplicativo, $*$ -álgebra, alternativa, alternativa generalizada.

ABSTRACT

In this thesis, we present four main results obtained during the author's doctoral research on alternative algebraic structures. The first three results concern alternative $*$ -algebras with identity and a non-trivial symmetric idempotent, under certain structural conditions. The first result provides a characterization of multiplicative $*$ -Lie n -map. The second one also offers a characterization, this time of multiplicative $*$ -Jordan n -map. The third result establishes the additivity of $*$ -Jordan derivations. The fourth result addresses the additivity of isomorphisms in generalized alternative algebras. Additionally, we introduce an example of a generalized alternative algebra that is not alternative, a construction which, to the best of our knowledge, has not previously appeared in the literature.

Keywords: additivity, $*$ -Jordan derivation, $*$ -derivation, multiplicative isomorphism, $*$ -algebra, alternative algebra, alternative generalized algebra

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Preliminares	15
2.1	Conceitos gerais	15
2.2	Decomposição de Peirce	22
3	Funções *-Lie e *-Jordan em *-álgebras alternativas	27
3.1	Função *-Lie em *-álgebras alternativas	27
3.2	Função *-Jordan em *-álgebras alternativas	61
4	Derivações *-Jordan não lineares em *-álgebras alternativas	89
5	Isomorfismos em álgebras alternativas generalizadas	119
5.1	Álgebra Alternativas Generalizadas	119
5.2	Construção de um exemplo de álgebra alternativa generalizada	143
6	Conclusão	155
6.1	Desdobramentos	155
6.2	Estudos futuros	156
	Referências Bibliográficas	156
	Índice Remissivo	160

1

INTRODUÇÃO

Ao longo da história da matemática, certas equações se destacaram não apenas pela sua utilidade, mas também pela elegância com que expõem ideias fundamentais. Um exemplo claro disso são as chamadas **equações funcionais de Cauchy**, que foram formuladas por Cauchy [5] em 1821 e podemos encontrar nas páginas 103 e 104 do livro *Cours d'analyse*. A mais famosa é a **equação funcional Cauchy aditiva** e é dada por

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Uma função que satisfaz tal equação é conhecida como função aditiva.

Apesar de parecer simples, essa equação nos leva a um questionamento: quais funções satisfazem essa relação? Essa resposta depende diretamente de quais outras propriedades exigimos das funções, por exemplo, se exigirmos que a função seja contínua, a resposta é qualquer função do tipo $f(x) = ax$. Porém, se deixarmos de lado condições como continuidade, monotonicidade ou outras restrições, a resposta pode não ser uma função tão bem conhecida.

Além da versão aditiva, existe a **equação funcional Cauchy multiplicativa**, que é dada por

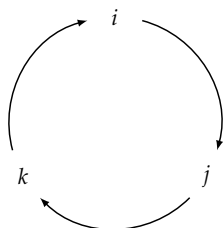
$$f(xy) = f(x)f(y),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Uma função que satisfaz tal equação é conhecida como função multiplicativa. Ela também busca funções que preservem uma estrutura, só que agora ligada à multiplicação. Nessa versão, as funções do tipo $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$ costumam ser as soluções mais conhecidas, desde que o domínio e a imagem da função estejam bem definidos. As equações funcionais Cauchy aditiva e multiplicativa, apesar de bem teóricas, aparecem em várias áreas da matemática da álgebra à teoria da medida, passando por análise funcional e até questões envolvendo simetrias.

A busca por estruturas que tenham certas propriedades quando submetidas a operações específicas, apareceu em vários momentos da história e continua presente nos dias atuais. Um exemplo de onde essa busca consta na história da matemática é a descoberta dos **quatérnios**. Ela foi feita por Hamilton, no ano de 1843. Já familiar com os números complexos, tentava encontrar uma maneira de representar o espaço tridimensional usando uma estrutura algébrica semelhante. Mas ele se deparou com uma barreira teórica: simplesmente não havia uma forma de fazer isso funcionar perfeitamente com apenas três dimensões. Com isso a única forma de solucionar tal problema foi adicionar uma quarta dimensão. Durante uma caminhada, Hamilton teve uma ideia que mudaria o futuro da álgebra: em uma ponte Hamilton gravou a famosa relação

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Diferente do que é válido para os números reais e complexos, os quatérnios não satisfaz a propriedade de comutatividade. Essa não comutatividade abre espaço para várias aplicações, por exemplo as rotações no espaço. A multiplicação entre os elementos i , j e k pode ser visualizada como um ciclo, onde, por exemplo, $ij = k$, mas $ji = -k$. A multiplicação nos quatérnios é representada pelo seguinte diagrama



Assim percebemos que tanto as equações funcionais de Cauchy quanto os quatérnios de Hamilton tiveram origem do mesmo desejo profundo de entender e formalizar padrões, simetrias e transformações.

Por sua vez, a criação dos octônios está ligada a Graves, colega e amigo de Hamilton, que, inspirado pela descoberta dos quatérnios, desenvolveu uma álgebra de dimensão 8. Ainda em 1843, Graves apresentou os octônios como uma álgebra de divisão normada e formulou o “teorema dos oito quadrados”. Embora Hamilton tenha se oferecido para ajudar

na divulgação desse trabalho, seu foco nos quatérnios atrasou a publicação. Isso permitiu que Cayley publicasse primeiro sobre os octônios, o que levou à atribuição da autoria a ele, passando os octônios a serem conhecidos como “números de Cayley”. Posteriormente, Graves descobriu que o teorema dos oito quadrados já havia sido estabelecido por Degen em 1818, o que contribuiu para que os octônios permanecessem por muito tempo em segundo plano. Além disso, a multiplicação nos octônios não é associativa.

Em 1933, Artin realizou duas contribuições significativas nesse campo. A primeira foi a introdução da notação

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz),$$

conhecida como o **associador** de x , y e z . Mais ainda, foi Artin quem mostrou que qualquer álgebra que satisfaça as identidades

$$x(xy) = x^2y \quad \text{e} \quad (xy)y = xy^2$$

para todos x e y na álgebra é dita uma álgebra alternativa. Se apenas a primeira identidade for satisfeita então a álgebra é dita alternativa à esquerda e se apenas a segunda identidade for satisfeita a álgebra é dita alternativa à direita.

A segunda contribuição de Artin se trata da demonstração de que toda subálgebra gerada por um par de elementos de uma álgebra alternativa é, necessariamente, associativa.

É imperativo ressaltar que este resultado, amplamente conhecido como Teorema de Artin, possui uma importância central na teoria das álgebras não associativas. Ele atua como um critério fundamental para avaliar a proximidade estrutural de uma álgebra alternativa em relação à propriedade da associatividade.

Também foi Artin quem primeiro levantou a hipótese de que a chamada **lei alternativa** se aplicaria aos números de Cayley. Essa lei pode ser expressa pela seguinte identidade

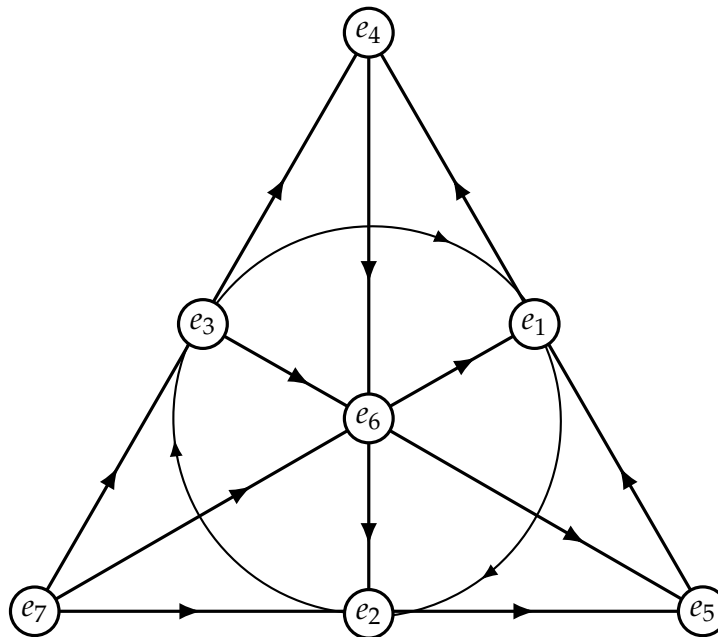
$$(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) = \text{sng}(\sigma)(x, y, z),$$

com x, y, z são números de Cayley e σ é uma permutação de três elementos. Apesar da conjectura inicial ter sido feita por Artin, foi Zorn quem mais tarde conseguiu demonstrar formalmente que essa propriedade de fato é válida para os octônios. Além disso, a multiplicação nesta álgebra é dada pela tabela abaixo

	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Tabela 1: Tabela de multiplicação dos octônios

Considerando $i = e_1, j = e_2, k = e_3, l = e_4, li = e_5, lj = e_6$ e $lk = e_7$ na tabela acima podemos representá-la no **plano de Fano** a seguir



Os quatérnios são facilmente reconhecidos como uma subálgebra dos octônios, o que pode ser observado tanto na tabela de multiplicação quanto no plano de Fano, que mostra a relação entre os diagramas dessas duas estruturas.

À medida que os conjuntos numéricos são expandidos, iniciando pelo conjunto dos números reais e prosseguindo para os complexos, os quatérnios e os octônios, observamos um aumento dimensional acompanhado pela perda de propriedades algébricas cruciais.

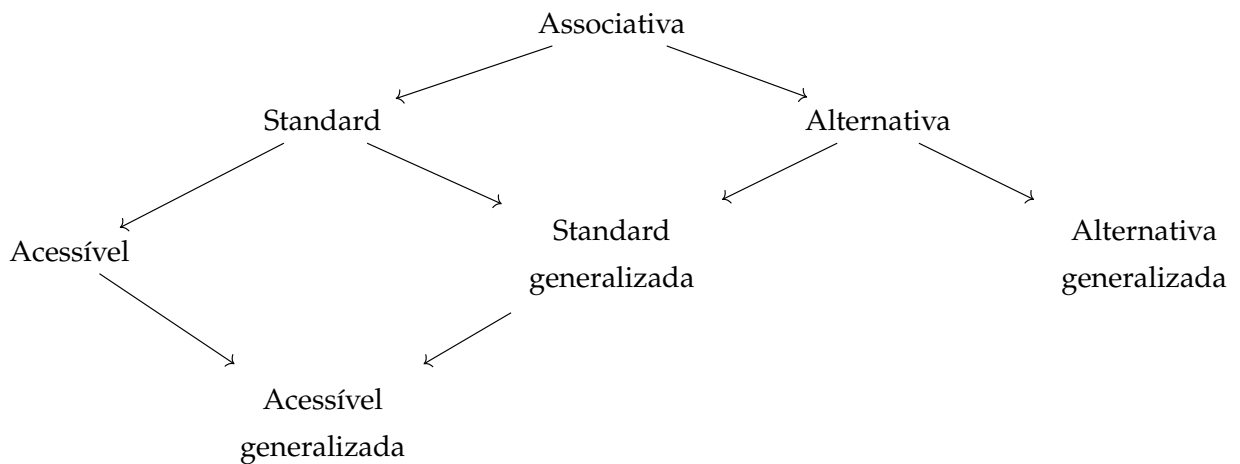
Por exemplo, o corpo dos números reais possui uma relação de ordem total, uma propriedade que é perdida no corpo dos números complexos. Ao progredir para os quatérnios, a operação de multiplicação deixa de ser comutativa. Finalmente, com a transição para os octônios, ocorre a perda da associatividade da multiplicação. Essa expansão está relacionada ao processo chamado **duplicação de Cayley-Dickson**, desenvolvido em 1919 por Dickson [12], que generalizou um método inicialmente proposto por Cayley em 1845. Essa construção consiste em dobrar a dimensão da álgebra a cada passo, criando pares de elementos da etapa anterior e definindo uma nova multiplicação. Para que essa multiplicação seja coerente e preserve certas propriedades, algumas regras algébricas precisam ser flexibilizadas. É justamente por isso que, ao aumentar a dimensão, perdemos a ordem, a comutatividade e, finalmente, a associatividade. Esse processo pode ser visualizado no diagrama abaixo

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{O}$$

No estudo dessas estruturas, uma ferramenta importante para analisar álgebras associativas é a decomposição de Peirce, descoberta em 1870. Peirce mostrou que, dado um idempotente não trivial e em uma álgebra associativa \mathfrak{A} , definida sobre um corpo \mathbb{K} , é possível decompor \mathfrak{A} em uma soma direta de subespaços vetoriais de alguma forma relacionadas com e . Essa decomposição foi estendida para álgebras alternativas por Zorn em 1935.

Em 1971, Kleinfeld [30] introduziu uma nova classe de estruturas algébricas, chamadas álgebras alternativas generalizadas. Nesse trabalho, ele propôs uma generalização dos anéis alternativos com o objetivo de ampliar o estudo de álgebras não associativas que, embora não satisfaçam todas as identidades das álgebras alternativas, ainda preservam algumas de suas propriedades essenciais. Essa iniciativa buscava estender o escopo da teoria algébrica para além de exemplos já bem conhecidos, como os números de Cayley (ou octônios), que são álgebras alternativas clássicas. O trabalho de Kleinfeld contribuiu significativamente para a compreensão de estruturas mais gerais dentro da álgebra não associativa, abrindo novas direções para a pesquisa na área.

Ao longo do tempo outras álgebras não associativas também receberam atenção especial de diversos autores. Algumas das álgebras que mais se destacaram estão presentes no diagrama abaixo



Algumas perguntas ainda estão em aberto como, por exemplo, se existe relação entre as álgebras standard e as álgebras alternativas generalizadas ou entre as standard generalizadas e as alternativas generalizadas, ou ainda, entre a acessível e a alternativa generalizada. Porém uma pergunta que temos a resposta, até o momento, é quanto a relação entre as álgebras alternativas e álgebras alternativas generalizadas: toda álgebra alternativa, por definição, satisfaz as condições necessárias para ser considerada uma álgebra alternativa generalizada. Isso acontece porque as identidades que caracterizam a alternatividade, à esquerda e à direita, implicam diretamente as condições mais fracas que definem as estruturas alternativas generalizadas. No entanto, a recíproca não é verdadeira como veremos ao decorrer dessa tese.

O estudo de estruturas alternativas generalizadas tem despertado crescente interesse ao longo dos anos, resultando em diversas contribuições relevantes na literatura. Pesquisadores como os citados em [26, 27, 29, 31, 39] têm desenvolvido investigações significativas nesse campo, consolidando-o como uma área promissora para novas descobertas e aplicações teóricas.

A decomposição de Peirce é um recurso importante para as investigações sobre álgebras alternativas, e, como era de se esperar, tal estrutura também desempenha um papel crucial

no estudo das álgebras alternativas generalizadas. Em 2020, Da Motta Ferreira, Guzzo Jr e Ferreira [18] descreveram o radical de uma álgebra bária alternativa generalizada de dimensão finita e também propuseram a decomposição de Peirce para o caso das álgebras alternativas generalizadas. Tal decomposição foi descrita no resultado abaixo

Teorema 1.1. [18, Theorem 1.1] *Seja \mathfrak{A} uma álgebra alternativa generalizada sobre um corpo \mathbb{K} de característica diferente de 2 e 3, com um idempotente e não trivial. Então \mathfrak{A} admite uma decomposição de Peirce em soma direta de subespaços*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{10} \oplus \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{A}_{01} \oplus \mathfrak{A}_{00},$$

com $\mathfrak{A}_{ij} := \{x_{ij} \in \mathfrak{A} \mid ex_{ij} = ix_{ij} \text{ e } x_{ij}e = jx_{ij}\}$, para $i, j \in \{0, 1\}$ ou $(i, j) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. É fácil ver que $e \in \mathfrak{A}_{11}$. A regra de multiplicação entre os espaços da decomposição de Peirce é

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{jl} &\subseteq \mathfrak{A}_{il}, \quad (i, j, l \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ij} &\subseteq \mathfrak{A}_{ji}, \quad i \neq j \quad (i, j \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{kl} &= \{0\}, \text{ se } j \neq k \text{ e } (i, j) \neq (k, l) \quad (i, j, k, l \in \{0, 1\}), \\ x_{ij}^2 &= 0, \quad i \neq j \quad (i, j \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{ii}\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} &\subseteq \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, \quad \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\mathfrak{A}_{ii} \subseteq \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, \quad (i \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} &= \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\mathfrak{A}_{ij} = \{0\}, \quad i \neq j \quad (i, j \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} &= \{0\}. \end{aligned}$$

Além do estudo estrutural das álgebras alternativas (generalizadas), outro aspecto fundamental abordado ao longo desta tese diz respeito à aditividade de certas funções definidas sobre estas estruturas. O estudo de aditividade de funções é o foco desta tese e teve início no contexto associativo no ano de 1969 com as investigações de Martindale III [35], que inicialmente estabeleceu o resultado a seguir

Teorema 1.2. [35, Theorem] *Seja R uma anel associativo possuindo uma família $\{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ de idempotentes satisfazendo as seguintes condições*

- (i) *Se $x \in R$ é tal que $xR = 0$, então $x = 0$.*

(ii) Se $e_\alpha Rx = 0$, para cada $\alpha \in \Lambda$, então $x = 0$.

(iii) Para cada $\alpha \in \Lambda$, $e_\alpha R(1 - e_\alpha) = 0$ implica em $e_\alpha x(1 - e_\alpha) = 0$.

Então todo isomorfismo multiplicativo de R sobre um anel associativo qualquer é aditivo.

O artigo de Daif [8] publicado em 1991 investigou quando uma derivação multiplicativa, ou seja, uma função que satisfaz $d(ab) = d(a)b + ad(b)$, é aditiva. A partir da questão proposta por Martindale, o autor analisou o problema usando a decomposição de Peirce com relação a um elemento idempotente do anel. Neste trabalho foi mostrado que sob certas condições (condições de Martindale), a derivação multiplicativa é necessariamente aditiva.

Uma questão natural é se vale a recíproca ao questionamento feito por Martindale no que diz respeito à aditividade de funções. Em particular, para anéis booleanos, Jarbouï e Subaiei [28] mostraram o resultado a seguir

Teorema 1.3. [28, Theorem 2.3] *Sejam R um anel booleano não nulo com unidade e S um anel qualquer com característica diferente de 2. Se $\varphi : R \rightarrow S$ é uma função \vee -aditiva, então são equivalentes*

(i) Para qualquer $x \in R$, $\varphi(x) + \varphi(1_R - x) = \varphi(0_R) + \varphi(1_R)$.

(ii) Para qualquer $x \in R$, $\varphi(x)\varphi(1_R - x) = \varphi(0_R)$.

(iii) φ é multiplicativa.

O estudo da aditividade de funções em estruturas não associativas teve início em 2013 com a investigação elaborada por Da Motta Ferreira, Guzzo Jr e Ferreira [13], no qual os autores generalizaram o resultado de Martindale para o caso não associativo, mais especificamente, para anéis standard. Desde então, como veremos a seguir, vários pesquisadores se dedicaram ao estudo de funções que satisfazem a equação funcional Cauchy aditiva. No ano de 2014, Da Motta Ferreira e Guzzo Jr com o artigo [7] estabeleceram o teorema a seguir o qual nos exhibe uma condição sobre um anel alternativo para que um isomorfismo seja aditivo.

Teorema 1.4. *Seja S um anel alternativo contendo uma família $\{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ de idempotentes. Suponha que R seja um subanel de S tal que*

(i) *Para cada $\alpha \in \Lambda$, $e_\alpha R \subseteq R$ e $Re_\alpha \subseteq R$.*

(ii) *Se $x \in R$ é tal que $xR = 0$, então $x = 0$.*

(iii) *Se $x \in R$ é tal que $(e_\alpha R)x = 0$ (ou $e_\alpha(Rx) = 0$) para todo $\alpha \in \Lambda$, então $x = 0$ (e portanto, $Rx = 0$ implica $x = 0$).*

(iv) *Para cada $\alpha \in \Lambda$ e $x \in R$, se $(e_\alpha Re_\alpha)(R(1 - e_\alpha)) = 0$, então $e_\alpha x e_\alpha = 0$.*

Então qualquer isomorfismo multiplicativo φ de um anel R em um anel alternativo arbitrário é aditivo.

Agora, no artigo publicado em 2014, Ferreira e Nascimento [14] investigaram anéis alternativos livres de 3-torção e apresentaram uma generalização de um resultado anteriormente obtido por Daif. Especificamente, os autores demonstraram que, ao se impor certas condições sobre um anel alternativo R , toda derivação multiplicativa em R é aditiva. Como consequências imediatas desse resultado, os pesquisadores mostraram que, se R for um anel alternativo primo, livre de 3-torção e contendo um idempotente não trivial, então toda derivação em R é uma função Cauchy aditiva. Além disso, eles provam que, sob determinadas condições sobre o anel R , toda derivação também é uma função Jordan derivável.

Em um estudo publicado em 2016, Ferreira e Ferreira [24] se dedicaram à análise da aditividade das derivações de Jordan multiplicativas no contexto de anéis alternativos. Os autores impuseram certas condições sobre um anel alternativo R e demonstraram que uma derivação de Jordan multiplicativa em R é uma função Cauchy aditiva. No mesmo trabalho, provaram que, se uma derivação em um anel alternativo R satisfizer algumas condições, de modo que $D(ab + ba) = D(a)b + aD(b) + D(b)a + bD(a)$, então D é aditiva. Os pesquisadores finalizaram este artigo provando que uma derivação em um anel alternativo primo com algumas características é uma função Cauchy aditiva.

Ainda no ano de 2016, Da Motta Ferreira e Ferreira [6] apresentaram um teorema mais abrangente sobre a aditividade de isomorfismos n -multiplicativos e derivações n -multiplicativas para a classe de anéis alternativos. O resultado é o seguinte:

Teorema 1.5. [6, Theorem 2.2] *Sejam R e R' dois anéis alternativos. Suponha que R seja um anel com uma família $\{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ de idempotentes que satisfazem*

- (i) *Se $x \in R$ é tal que $xR = 0$, então $x = 0$.*
- (ii) *Se $x \in R$ é tal que $(e_\alpha R)x = 0$ (ou $e_\alpha(Rx) = 0$) para todo $\alpha \in \Lambda$, então $x = 0$ (e portanto, $Rx = 0$ implica $x = 0$).*
- (iii) *Para cada $\alpha \in \Lambda$ e $x \in R$, se $(e_\alpha x e_\alpha)(R(1 - e_\alpha)) = 0$, então $e_\alpha x e_\alpha = 0$.*

Então, todo isomorfismo n -multiplicativo φ de R em um anel alternativo arbitrário R' é aditivo.

Já no ano de 2018, Ferreira e Ferreira [21] investigaram sobre as triplas derivações de Jordan que satisfazem a equação funcional Cauchy aditiva e também forneceram a seguinte caracterização de anéis alternativos primos livres de 3-torção que é de grande importância para os resultados apresentados no desenvolvimento desta tese

Teorema 1.6. [21, Theorem 1.1] *Seja R um anel alternativo livre de 3-torção, temos que R é primo se, e só se, dados $a, b \in R$, com $(aR)b = \{0\}$ (ou $a(Rb) = \{0\}$) implica $a = 0$ ou $b = 0$.*

Continuando a história sobre a linha de pesquisa no contexto não associativo, no ano de 2020, Ferreira et al [20] demonstraram no resultado principal que uma derivação de Jordan, sob um anel alternativo R satisfazendo algumas condições, pode ser unicamente determinada como uma soma de uma derivação de R e uma derivação de Jordan singular de R .

Nesse contexto, é relevante mencionar uma das multiplicações utilizadas nesta tese, definida por $[a, b]_* = ab - ba^*$, introduzida em 1990 por Šemrl [38]. Nesse trabalho, o autor observou que aplicações da forma $x \mapsto [x, a]_*$ surgem de maneira natural no estudo da representação de funcionais quadráticos por meio de funcionais sesquilineares, especialmente em contextos relacionados à teoria de operadores em espaços de Hilbert. Essa

multiplicação difere da comutação usual por envolver uma modificação no segundo termo, o que gera novas propriedades algébricas e funcionais.

Inspirado pelas observações de Šemrl, Molnár [36] iniciou, em 1996, um estudo sistemático da multiplicação $[a, b]_*$. Em seu trabalho, Molnár considerou a álgebra $\mathcal{B}(H)$ de todos os operadores lineares limitados definidos em um espaço de Hilbert H , e investigou a relação entre essa multiplicação e as estruturas de ideais de uma álgebra. Seu principal resultado mostrou que um subespaço de $\mathcal{B}(H)$ é um ideal no sentido tradicional se, e somente se, for um $*$ -ideal à esquerda, ou seja, um subespaço fechado sob multiplicações à esquerda e também compatível com a operação de conjugação definida em $\mathcal{B}(H)$. Esse resultado abriu caminho para uma nova abordagem na caracterização de ideais em álgebras de operadores, agora considerando essas multiplicações modificadas.

Posteriormente, no ano de 2000, Brešar e Fošner [4] generalizaram o resultado de Molnár utilizando uma abordagem puramente algébrica, sem recorrer a métodos analíticos. Eles exploraram de forma sistemática diversas identidades envolvendo a multiplicação $[a, b]_*$ e a multiplicação associativa original (multiplicação da álgebra), e conseguiram descrever condições mais amplas sob as quais certos subespaços se comportam como ideais. Em um trabalho publicado no ano de 2003, Fošner [25] introduziu e estudou uma nova multiplicação, dada por $\{a, b\}_* = ab + ba^*$, que pode ser vista como uma versão modificada da multiplicação de Jordan. Nesse estudo, a autora investigou como os ideais usuais de um anel R se relacionam com os ideais à direita em relação a essa nova operação. A multiplicação $\{a, b\}_*$ será amplamente utilizada ao longo desta tese como uma ferramenta central para desenvolvimento dos nossos estudos.

O interesse por multiplicações como $\{a, b\}_*$ também se estendeu à caracterização de funções entre álgebras. Em 2013, Fang, Li e Fu [32] mostraram que, sob certas condições, uma função ϕ entre duas álgebras de von Neumann preserva a multiplicação $\{a, b\}_*$ se, e somente se, for um isomorfismo de $*$ -anéis, o que reforça a importância estrutural dessa operação. No ano de 2018, Taghavi et al. [40] também consideraram a multiplicação $\{a, b\}_*$ e estudaram propriedades de funções bijetivas entre $*$ -álgebras, com foco em identificar quando essas funções preservam a aditividade, contribuindo assim para uma melhor compreensão do comportamento estrutural de tais aplicações. Avançando nessa direção,

em 2022, Ferreira e Costa [17] ampliaram o campo dessas investigações ao introduzir dois novos conceitos: a n -função $*$ -Lie multiplicativa e a n -função $*$ -Jordan multiplicativa. Os autores utilizaram essas definições para estabelecer condições sob as quais obtiveram uma caracterização de uma n -função $*$ -Lie–Jordan entre \mathbb{C}^* -álgebras como um isomorfismo de $*$ -anel.

Dessa forma, notamos que as condições de Martindale são fundamentais na análise de funções Cauchy aditivas. Esse entendimento serviu como ponto de partida e motivação para o desenvolvimento das nossas pesquisas que sustentam a elaboração desta tese, as quais se apoiam em definições e resultados estruturais essenciais que são apresentados ao longo do trabalho.

Nesta tese, o Capítulo 2, é de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho, pois reúne definições fundamentais para a compreensão dos resultados apresentados posteriormente. Entre os conceitos abordados, destacam-se as definições de álgebra alternativa e álgebra alternativa generalizada, que desempenham papel central na estruturação dos tópicos que se seguem. Além disso, apresentamos teoremas relevantes, como o Teorema de Artin, que estabelece uma conexão significativa entre álgebras alternativas e álgebras associativas, contribuindo para uma melhor compreensão das propriedades dessas estruturas. Com o intuito de tornar mais acessíveis os conceitos discutidos, também são incluídos exemplos concretos que ilustram as definições, facilitando a visualização das ideias abstratas desenvolvidas ao longo da tese.

Dando continuidade aos fundamentos estabelecidos no capítulo anterior, o Capítulo 3 é dedicado à análise de duas classes específicas de funções introduzidas por Ferreira e Costa [17]. Nesse capítulo, apresentamos caracterizações precisas dessas funções, baseando-nos em generalizações das multiplicações estudadas anteriormente. Mostramos que se considerarmos φ uma função bijetiva multiplicativa unital escalar sobre \mathbb{C} , então φ é uma n -função $*$ -Lie multiplicativa se, e somente se, ela for um isomorfismo. Essa caracterização é feita por meio da multiplicação $q_{n,*}$, uma generalização da operação introduzida por Šemrl [38]. De forma análoga, demonstramos que considerando φ como anteriormente, temos que φ é uma n -função $*$ -Jordan multiplicativa se, e somente se, φ é um isomorfismo, sendo que, nesse caso, utilizamos a multiplicação $q_{n,*}$ definida por Fošner [25].

No Capítulo 4, damos continuidade à abordagem iniciada nos capítulos anteriores e seguimos explorando a multiplicação $q_{n,*}$, desta vez no contexto de derivações. Nesse capítulo, apresentamos uma caracterização na qual mostramos que, sob certas restrições, uma função φ definida em álgebras alternativas é uma n -derivação $*$ -Jordan não linear se, e somente se, φ é uma derivação $*$ -aditiva. Esse resultado reforça a aplicabilidade das multiplicações generalizadas não apenas na caracterização de isomorfismos, como visto no Capítulo 3, mas também no estudo de derivações em contextos onde não se assume aditividade.

No Capítulo 5, retomamos o estudo dos isomorfismos, agora no contexto das álgebras alternativas generalizadas. Nos capítulos anteriores, trabalhamos com álgebras alternativas, com foco principal na caracterização de funções que preservam as multiplicações p_n^* e q_n^* . Neste capítulo, porém, seguimos por um caminho diferente. Consideramos os isomorfismos e estudamos as características que conseguimos extrair dessas funções. Para isso, utilizamos a decomposição de Peirce, uma ferramenta essencial para a análise interna das álgebras alternativas generalizadas.

Essa decomposição, apresentada por Da Motta Ferreira, Guzzo Jr e Ferreira [18], permite descrever de forma precisa a estrutura dessas álgebras a partir de idempotentes. Com base nessa ferramenta, mostramos que, sob determinadas condições, todo isomorfismo multiplicativo entre álgebras alternativas generalizadas é também aditivo. Além disso, após uma busca extensa na literatura, não encontramos exemplos concretos dessas álgebras. Por isso, apresentamos aqui um exemplo inédito, que representa uma contribuição original e significativa para a área.

Encerrando a tese, o último capítulo apresenta a conclusão do trabalho. Nele, reunimos os principais resultados obtidos ao longo dos capítulos e destacamos como cada parte contribuiu para o avanço no estudo da aditividade de funções em estruturas alternativas. Também mostramos os frutos diretos da pesquisa, como as citações em artigos científicos e a citação de nossos trabalhos em um livro da área, o que reforça a relevância dos temas abordados. Por fim, indicamos algumas questões que surgiram durante o desenvolvimento dos nossos trabalhos e que pretendemos investigar em estudos futuros, com o objetivo de dar continuidade a esta linha de pesquisa.

Destacamos que a ordem dos capítulos foi cuidadosamente escolhida de maneira a refletir a progressão natural dos conceitos e resultados facilitando a compreensão do leitor e garantindo uma apresentação lógica e coesa da tese.

2 | PRELIMINARES

Neste capítulo, reunimos definições, conceitos fundamentais e exemplos que servirão de base para o desenvolvimento da teoria apresentada ao longo deste trabalho. Nosso objetivo é fornecer ao leitor as ferramentas conceituais necessárias para a compreensão dos resultados que serão discutidos nos capítulos posteriores. Como principais referências para a elaboração deste material introdutório, utilizamos o livro *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Schafer [37], que oferece uma exposição clara e sistemática das estruturas algébricas não associativas, com ênfase em álgebras alternativas, de Jordan e de Lie. Complementamos essa abordagem com o livro *Rings That Are Nearly Associative*, de Zhevlakov, Slin'ko, Shestakov e Shirshov [41], que trata de maneira aprofundada diversas classes de álgebras não associativas, oferecendo uma perspectiva mais abrangente e técnica sobre este tema. Sempre que necessário, recorreremos também à literatura complementar, incluindo artigos científicos, com o intuito de enriquecer a discussão teórica e apoiar formalmente os resultados apresentados. Assim, estabelecemos neste capítulo os alicerces conceituais sobre os quais se apoiará o restante da tese.

2.1 CONCEITOS GERAIS

Partimos do pressuposto de que o leitor já possui conhecimento prévio de estruturas algébricas básicas, como por exemplo grupos, anéis, ideais e álgebra linear.

Ao longo deste capítulo sempre que utilizarmos R estaremos nos referindo a um anel associativo com identidade, denotada por 1_R . Dizemos que um grupo abeliano $(M, +)$ é um **R -módulo à esquerda** se existe uma operação de multiplicação escalar

$$\cdot : R \times M \rightarrow M, \quad (r, \alpha) \mapsto r \cdot \alpha$$

tal que, para todos $r, s \in R$ e $\alpha, \beta \in M$, valem as seguintes propriedades:

1. $(r + s) \cdot \alpha = r \cdot \alpha + s \cdot \alpha$
2. $r \cdot (\alpha + \beta) = r \cdot \alpha + r \cdot \beta$
3. $(rs) \cdot \alpha = r \cdot (s \cdot \alpha)$
4. $1_R \cdot \alpha = \alpha$

Assim como podemos considerar a multiplicação escalar agindo à esquerda, também é possível definí-la agindo à direita. Isso nos leva à noção de módulo à direita.

Um grupo abeliano $(M, +)$ é chamado de **R -módulo à direita** se existe uma operação

$$\cdot : M \times R \rightarrow M, \quad (\alpha, r) \mapsto \alpha \cdot r$$

tal que, para todos $r, s \in R$ e $\alpha, \beta \in M$, são satisfeitas as seguintes propriedades:

1. $\alpha \cdot (r + s) = \alpha \cdot r + \alpha \cdot s$
2. $(\alpha + \beta) \cdot r = \alpha \cdot r + \beta \cdot r$
3. $\alpha \cdot (rs) = (\alpha \cdot r) \cdot s$
4. $\alpha \cdot 1_R = \alpha$

Se R é um anel comutativo com identidade e $(M, +, \cdot)$ é um R -módulo à esquerda, então podemos definir naturalmente uma estrutura de R -módulo à direita em M por:

$$\alpha * r = r \cdot \alpha$$

para todo $\alpha \in M$ e $r \in R$.

Analogamente, se $(M, +, *)$ é um R -módulo à direita, podemos definir um R -módulo à esquerda por $r \cdot \alpha = \alpha * r$. Assim, no caso em que R é um anel comutativo com identidade não é necessário distinguir entre as ações à esquerda e à direita. Nesses casos, dizemos simplesmente que M é um R -**módulo**.

Um R -módulo M é dito **fiel** se, para qualquer $a \in R$, $aM = 0$ implica que $a = 0$. Um exemplo conhecido de \mathbb{Z} -módulo fiel é \mathbb{Z} . Com efeito, seja $a \in \mathbb{Z}$ tal que $am = 0$, para todo $m \in \mathbb{Z}$. Claramente, $a = 0$ e, portanto, \mathbb{Z} é um \mathbb{Z} -módulo fiel.

Sejam R e S anéis e M um grupo abeliano que é simultaneamente um módulo à esquerda sobre R e um módulo à direita sobre S . Então, M é chamado de (R, S) -**bimódulo** se, para todos $r \in R, s \in S$ e $m \in M$, vale

$$(rm)s = r(ms).$$

Por exemplo, \mathbb{Z} é um (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) -bimódulo.

Uma \mathbb{K} -**álgebra**, ou simplesmente **álgebra**, é um espaço vetorial \mathfrak{A} sobre um corpo \mathbb{K} munido de uma função bilinear $\cdot : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, denotada $\cdot(a, b) = a \cdot b$, e chamada de multiplicação. Uma álgebra \mathfrak{A} é dita uma álgebra **associativa** se satisfaz

$$(a, b, c) = 0,$$

para todos $a, b, c \in \mathbb{K}$. O espaço vetorial dado pelas matrizes quadradas de ordem n , com coeficientes em \mathbb{R} , munido do produto matricial é uma \mathbb{R} -álgebra associativa, chamada de **álgebra das matrizes de ordem n** , com coeficientes em \mathbb{R} .

No estudo de álgebras não associativas alguns operadores desempenham papel central para descrever suas propriedades. Entre eles, destacam-se o **comutador** e o **associador**, que são definidos, respectivamente, por

$$[x, y] = xy - yx$$

e

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz),$$

para todos $x, y, z \in \mathfrak{A}$.

Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' álgebras. Uma função $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ é dita **função aditiva** se satisfaz a equação funcional Cauchy aditiva $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, para todos $x, y \in \mathfrak{A}$ e é dita **função**

multiplicativa se satisfaz a equação funcional Cauchy multiplicativa $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para todos $x, y \in \mathfrak{A}$.

Uma função $*$: $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ é uma **involução** se

$$(a + b)^* = a^* + b^*, \quad (a^*)^* = a, \quad (ab)^* = b^*a^*,$$

para todos $a, b \in \mathfrak{A}$. Uma álgebra \mathfrak{A} munida de uma involução é chamada ***-álgebra**. Um elemento $a \in \mathfrak{A}$ é um elemento **simétrico** se $a^* = a$. Um exemplo conhecido é quando consideramos $\mathfrak{A} = M_n(\mathbb{R})$ e a aplicação $T : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ que é transposta usual da álgebra de matrizes. É conhecido que para quaisquer $A, B \in \mathfrak{A}$ temos

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (A^T)^T = A, \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

Logo, T é uma involução. Agora, seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Observemos que

$$A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = A.$$

o que faz de A uma matriz simétrica.

Definição 2.1. *Seja \mathfrak{A} uma álgebra. Para $x \in \mathfrak{A}$, sejam $L_x, R_x : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ os operadores multiplicação à esquerda e à direita, definidos respectivamente por*

$$L_x(a) = xa \quad e \quad R_x(a) = ax,$$

para todo $a \in \mathfrak{A}$.

Definição 2.2. *Uma álgebra \mathfrak{A} sobre um corpo \mathbb{K} é dita **alternativa** se satisfaz*

$$a(ab) = a^2b \quad e \quad (ba)a = ba^2,$$

para todos $a, b \in \mathfrak{A}$.

No livro de Schafer [37] são apresentadas algumas identidades envolvendo associadores que se aplicam as álgebras alternativas. Para todos $x, y \in \mathfrak{A}$, temos

$$(x, y, x) = 0$$

de onde

$$(xy)x = x(yx) \quad (2.1)$$

ou em termos da multiplicação à esquerda e à direita,

$$L_x R_x = R_x L_x.$$

A identidade da Equação (2.1) é conhecida por **flexibilidade** ou **regra de flexibilidade**. Conforme apresentado em [41], linearizando a identidade em (2.1), obtemos a seguinte identidade

$$(x, z, y) + (z, x, y) = 0,$$

para todos $x, y, z \in \mathfrak{A}$.

Definição 2.3. *Sejam \mathfrak{A} uma álgebra, I e J ideais de \mathfrak{A} . Dizemos que \mathfrak{A} é uma álgebra **prima** se $IJ = \{0\}$, então $I = \{0\}$ ou $J = \{0\}$.*

Em 1987 Beidar et al. [3] e em 2018 Ferreira et al. [22], de forma independente, estabeleceram um resultado fundamental no contexto dos anéis, o qual fornece uma caracterização eficaz das álgebras alternativas primas. O resultado a seguir exhibe tal caracterização e será muito utilizado ao longo desta tese.

Proposição 2.4. [22, Theorem 1.1] *Seja \mathfrak{A} uma álgebra alternativa sobre um corpo de característica diferente de 3. Então \mathfrak{A} é prima se, e só se, dados $a, b \in \mathfrak{A}$, $(a\mathfrak{A})b = \{0\}$ (ou $a(\mathfrak{A}b) = \{0\}$) implica $a = 0$ ou $b = 0$.*

Exemplo 2.5. *Um exemplo clássico de álgebra alternativa prima é a álgebra dos octônios, que denotamos por \mathbb{O} .*

Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' duas álgebras com identidades $1_{\mathfrak{A}}$ e $1_{\mathfrak{A}'}$, respectivamente e $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ uma função. Dizemos que

- (i) φ **preserva o produto** se $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, para todos $a, b \in \mathfrak{A}$;
- (ii) φ **preserva o produto de Lie** se $\varphi(ab - ba) = \varphi(a)\varphi(b) - \varphi(b)\varphi(a)$, para todos $a, b \in \mathfrak{A}$;
- (iii) φ **preserva o produto de Jordan** se $\varphi(ab + ba) = \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a)$, para todos $a, b \in \mathfrak{A}$;

- (iv) φ é **aditiva** se $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, para todos $a, b \in \mathfrak{A}$;
- (v) φ é um **isomorfismo** se φ é uma bijeção aditiva que preserva o produto e a multiplicação por escalar e
- (vi) φ é **unital** se $\varphi(1_{\mathfrak{A}}) = 1_{\mathfrak{A}'}$.

Consideramos $M_2(\mathbb{R})$ a álgebra das matrizes 2×2 com coeficientes em \mathbb{R} , $P \in M_2(\mathbb{R})$ invertível e $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por $\varphi(A) = PAP^{-1}$. Vamos mostrar que φ satisfaz o item (i). Sejam $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Assim $\varphi(AB) = PABP^{-1} = PAP^{-1}PBP^{-1} = \varphi(A)\varphi(B)$. Agora mostraremos o item (ii).

$$\begin{aligned}\varphi(AB - BA) &= P(AB - BA)P^{-1} = PABP^{-1} - PBAP^{-1} = PAP^{-1}PBP^{-1} - PBP^{-1}PAP^{-1} \\ &= \varphi(A)\varphi(B) - \varphi(B)\varphi(A).\end{aligned}$$

Logo φ preserva o produto de Lie. O item (iii) também é mostrado de forma simples

$$\begin{aligned}\varphi(AB + BA) &= P(AB + BA)P^{-1} = PABP^{-1} + PBAP^{-1} = PAP^{-1}PBP^{-1} + PBP^{-1}PAP^{-1} \\ &= \varphi(A)\varphi(B) + \varphi(B)\varphi(A).\end{aligned}$$

Logo φ preserva o produto de Jordan. A aditividade é provada da seguinte forma

$$\varphi(A + B) = P(A + B)P^{-1} = PAP^{-1} + PBP^{-1} = \varphi(A) + \varphi(B).$$

Observamos que, pela invertibilidade de P , φ é bijetiva. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, $\varphi(\alpha A) = P(\alpha A)P^{-1} = \alpha PAP^{-1} = \alpha \varphi(A)$. Logo, φ preserva a multiplicação por escalar. Como φ é bijetiva, preserva a multiplicação por escalar e pelos itens (i) e (iv), temos que φ é um isomorfismo. Finalmente, mostraremos o item (v). Seja $I \in M_2(\mathbb{R})$ a identidade. Assim, $\varphi(I) = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$. Logo, φ é unital.

Duas operações bilineares $s_1, s_2: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ são ditas equivalentes quando existir uma constante não nula $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que para todos $a, b \in \mathfrak{A}$ temos $s_1(a, b) = \lambda s_2(a, b)$.

Definição 2.6. *Seja \mathfrak{A} uma álgebra. Uma derivação $\mathfrak{D} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ é uma função linear que satisfaz $\mathfrak{D}(ab) = \mathfrak{D}(a)b + a\mathfrak{D}(b)$, para todos $a, b \in \mathfrak{A}$.*

Um exemplo elementar de derivação é aquele que encontramos no cálculo diferencial. Seja $\mathfrak{A} = \mathbb{R}[x]$ a álgebra dos polinômios com coeficientes em \mathbb{R} . Consideramos $\mathfrak{D} : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ a função tal que $\mathfrak{D}(f(x)) = \frac{df(x)}{dx}$. Observamos que \mathfrak{D} é de fato uma derivação, pois dados $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(f(x)g(x)) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \mathfrak{D}(f(x))g(x) + f(x)\mathfrak{D}(g(x)), \\ \mathfrak{D}(f(x) + g(x)) &= \mathfrak{D}(f(x)) + \mathfrak{D}(g(x)), \\ \mathfrak{D}(\lambda f(x)) &= \lambda \mathfrak{D}(f(x)).\end{aligned}$$

Nossa próxima definição introduz uma estrutura mais geral do que as álgebras alternativas, sobre a qual estudaremos a equação funcional de Cauchy. Com as ferramentas anteriores podemos agora introduzir a noção de álgebra alternativa generalizada.

Definição 2.7. *Uma álgebra \mathfrak{A} sobre um corpo \mathbb{K} de característica diferente de 2 e 3 é chamada álgebra alternativa generalizada se as seguintes três identidades são satisfeitas*

$$(wx, y, z) + (w, x, [y, z]) = w(x, y, z) + (w, y, z)x, \quad (2.2)$$

$$([w, x], y, z) + (w, x, yz) = y(w, x, z) + (w, x, y)z, \quad (2.3)$$

$$(x, x, x) = 0, \quad (2.4)$$

para todos $x, y, z, w \in \mathfrak{A}$.

Toda álgebra alternativa, por definição, satisfaz as condições que caracterizam uma álgebra alternativa generalizada. Contudo, a recíproca não é verdadeira: existem álgebras alternativas generalizadas que não são alternativas no sentido clássico. Na Seção 5.2 do Capítulo 5, apresentamos um exemplo explícito de uma álgebra alternativa generalizada que não satisfaz as identidades de alternatividade. Até onde verificamos na literatura, não há registros prévios de exemplos com essas características, o que reforça a relevância da construção apresentada.

2.2 DECOMPOSIÇÃO DE PEIRCE

Consideremos \mathfrak{A} uma álgebra sobre um corpo \mathbb{K} . Um elemento $e \in \mathfrak{A}$ é chamado **idempotente** se $e^2 = e$. Observamos facilmente que 0 é um idempotente e se \mathfrak{A} possuir uma identidade, que denotaremos por $1_{\mathfrak{A}}$, então $1_{\mathfrak{A}}$ também é um idempotente e ambos recebem o nome de idempotentes triviais. Se e for um idempotente diferente de 0 e $1_{\mathfrak{A}}$, o chamaremos de **idempotente não trivial**. Quando $e, f \in \mathfrak{A}$ são idempotentes não triviais e $fe = ef = 0$, com $e \neq f$, os denominamos **idempotentes ortogonais**.

A decomposição de Peirce desempenha um papel fundamental na análise das álgebras associativas, especialmente quando considerada em relação a um elemento idempotente. Dado um idempotente não trivial e pertencente a uma álgebra associativa \mathfrak{A} , definida sobre um corpo arbitrário \mathbb{K} é possível expressar \mathfrak{A} como uma soma direta de subespaços vetoriais

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{00} \oplus \mathfrak{A}_{01} \oplus \mathfrak{A}_{10} \oplus \mathfrak{A}_{11},$$

em que cada subespaço \mathfrak{A}_{jk} é formado pelos elementos $x_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$ que satisfazem as condições $ex_{jk} = jx_{jk}$ e $x_{jk}e = kx_{jk}$, para todos $j, k \in \{0, 1\}$.

Seja \mathfrak{A} uma álgebra sobre um corpo \mathbb{K} e consideremos um subconjunto $X \subseteq \mathfrak{A}$. A subálgebra gerada por X , denotada por $\mathfrak{A}[X]$, é definida como a menor subálgebra de \mathfrak{A} que contém todos os elementos de X . Quando o conjunto gerador é finito, dizemos que a subálgebra é **finitamente gerada**.

No caso particular em que a estrutura é gerada por um único elemento $x \in \mathfrak{A}$, utilizamos a notação $\mathfrak{A}[x]$. Nesse cenário, as potências de x podem ser construídas de forma recursiva, adotando-se a convenção $x_1 = x$ e $x^{j+1} = xx^j$, para todo $j \geq 1$. Dizemos que \mathfrak{A} é **associativa nas potências** se, para cada elemento $x \in \mathfrak{A}$, a subálgebra $\mathfrak{A}[x]$ for associativa.

Cabe observarmos que essa definição implica o uso de potências obtidas por multiplicação à esquerda. Em álgebras que não são associativas, essas potências podem, em princípio, diferir daquelas formadas pela multiplicação à direita, isto é, $x^{j+1} = x^jx$. Entretanto, no contexto das álgebras analisadas nesta tese, ambas as formas coincidem, não havendo ambiguidade na definição das potências de um elemento.

Um elemento a de uma álgebra associativa nas potências \mathfrak{A} é dito nilpotente se existir um inteiro $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. Uma álgebra composta exclusivamente por elementos nilpotentes é chamada de nilálgebra.

Nas álgebras associativas, a decomposição de Peirce depende crucialmente da existência de ao menos um elemento idempotente que não seja trivial. Esse aspecto torna fundamental o resultado que será apresentado a seguir.

Proposição 2.8. [37, Proposition 3.3, p. 32] *Toda álgebra associativa nas potências de dimensão finita \mathfrak{A} , que não é uma nilálgebra, possui um idempotente não trivial.*

No contexto das álgebras alternativas, a identidade flexível possibilita a aplicação da técnica de decomposição de forma análoga ao que ocorre nas álgebras associativas. Assim, quando uma álgebra alternativa \mathfrak{A} possui um idempotente não trivial e , é possível expressar \mathfrak{A} como uma soma direta de subespaços vetoriais associados a esse idempotente. Essa decomposição é dada por

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{10} \oplus \mathfrak{A}_{01} \oplus \mathfrak{A}_{00},$$

com \mathfrak{A}_{jk} o subespaço vetorial de \mathfrak{A} dado por

$$\mathfrak{A}_{jk} = \{x_{jk} \mid ex_{jk} = jx_{jk} \text{ e } x_{jk}e = kx_{jk}\},$$

para todos $j, k \in \{0, 1\}$.

No âmbito das álgebras alternativas com identidade $1_{\mathfrak{A}}$, ter em consideração a existência de 2 idempotentes não triviais e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ permite a obtenção de uma decomposição da álgebra \mathfrak{A} como soma direta de subespaços vetoriais

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{12} \oplus \mathfrak{A}_{21} \oplus \mathfrak{A}_{22}.$$

Cada subespaço \mathfrak{A}_{jk} , com $j, k \in \{1, 2\}$, é definido da seguinte forma

$$\mathfrak{A}_{jk} = \left\{ x_{jk} \mid e_m x_{jk} = \delta_{mj} x_{jk} \quad \text{e} \quad x_{jk} e_m = \delta_{mk} x_{jk}, \text{ com } m \in \{1, 2\} \right\},$$

com δ_{jk} a delta de Kronecker. Nessas condições, segue que $\mathfrak{A}_{jk} = e_j \mathfrak{A} e_k$. Demonstraremos essa igualdade analisando os casos possíveis e vamos utilizar de maneira decisiva a alternatividade da álgebra em questão.

Inicialmente vamos considerar o caso $\mathfrak{A}_{jk} = e_j \mathfrak{A} e_k$, $j \neq k$, $j, k \in \{1, 2\}$. Seja $x_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$. Assim, $e_j x_{jk} = \delta_{jj} x_{jk} = x_{jk}$ e $x_{jk} e_k = \delta_{kk} x_{jk} = x_{jk}$, de onde, $e_j x_{jk} e_j = 0$ e

$$x_{jk} = e_j x_{jk} - e_j x_{jk} e_j = e_j x_{jk} (1 - e_j) \in e_j \mathfrak{A} e_k.$$

Inversamente, dado $x \in e_j \mathfrak{A} e_k$, existe $y \in \mathfrak{A}$ tal que $x = e_j y e_k$. Como e_j e e_k são idempotentes ortogonais, segue que $x \in \mathfrak{A}_{jk}$.

Agora consideraremos o caso $\mathfrak{A}_{jj} = e_j \mathfrak{A} e_j$, $j \in \{1, 2\}$. Seja $x_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$. Assim, $e_j x_{jj} = x_{jj}$ e $x_{jj} e_j = x_{jj}$, de onde $x_{jj} \in e_j \mathfrak{A} e_j$. Por outro lado, dado $x \in e_j \mathfrak{A} e_j$, existe $y \in \mathfrak{A}$ tal que $x = e_j y e_j$.

Apresentaremos uma proposição que diz respeito à multiplicação entre os espaços de Peirce. Caso o leitor tenha necessidade de verificar a demonstração da Proposição 2.9, a mesma pode ser encontrada na página 36 do livro [37].

Proposição 2.9. [37, Proposition 3.4] *Propriedades da decomposição de Peirce para álgebras alternativas*

- (i) $\mathfrak{A}_{jk} \mathfrak{A}_{kl} \subseteq \mathfrak{A}_{jl}$, $j, k, l \in \{1, 2\}$,
- (ii) $\mathfrak{A}_{jk} \mathfrak{A}_{jk} \subseteq \mathfrak{A}_{kj}$, $j, k \in \{1, 2\}$,
- (iii) $\mathfrak{A}_{jk} \mathfrak{A}_{lm} = \{0\}$, se $k \neq l$ e $(j, k) \neq (l, m)$, $j, k, l, m \in \{1, 2\}$,
- (iv) $x_{jk}^2 = 0$, com $j \neq k$, $j, k \in \{1, 2\}$.

No que diz respeito à decomposição de Peirce para álgebras associativas, temos $\mathfrak{A}_{jk} \mathfrak{A}_{jk} = \{0\}$, com $j \neq k$, $j, k \in \{0, 1\}$, enquanto para o caso de uma álgebra alternativa, em geral, isso não é válido.

Assim como ocorre no caso das álgebras associativas e das álgebras alternativas, as álgebras alternativas generalizadas também admitem uma decomposição de Peirce. Essa decomposição, fundamentada na existência de elementos idempotentes, permite dividir a álgebra em subespaços que revelam aspectos relevantes da sua estrutura interna de multiplicação. Embora o procedimento de decomposição siga, em linhas gerais, os mesmos princípios utilizados nos contextos associativo e alternativo, o cenário das álgebras alternativas generalizadas apresenta particularidades que requerem atenção especial. Em especial,

torna-se necessário verificar cuidadosamente as propriedades de simetria e de fechamento entre os componentes obtidos na decomposição, pois elas nem sempre se manifestam de maneira imediata.

Na proposição a seguir, formalizamos a decomposição de Peirce no contexto das álgebras alternativas generalizadas, destacando suas principais propriedades e ressaltando os elementos que a diferenciam da formulação clássica.

Proposição 2.10. [18, Theorem 1.1] *Seja \mathfrak{A} uma álgebra alternativa generalizada sobre um corpo \mathbb{K} de característica diferente de 2 e 3, com um idempotente e . Então \mathfrak{A} admite uma decomposição de Peirce em soma direta de subespaços*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{10} \oplus \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{A}_{01} \oplus \mathfrak{A}_{00},$$

com $\mathfrak{A}_{ij} := \{x_{ij} \in \mathfrak{A} \mid ex_{ij} = ix_{ij} \text{ e } x_{ij}e = jx_{ij}\}$, para $i, j \in \{0, 1\}$ ou $(i, j) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. A regra de multiplicação entre os espaços da decomposição de Peirce é

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{jl} &\subseteq \mathfrak{A}_{il}, \quad (i, j, l \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ij} &\subseteq \mathfrak{A}_{ji}, \quad i \neq j \quad (i, j \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{kl} &= \{0\}, \text{ if } j \neq k \text{ e } (i, j) \neq (k, l) \quad (i, j, k, l \in \{0, 1\}), \\ x_{ij}^2 &= 0, \quad i \neq j \quad (i, j \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{ii}\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} &\subseteq \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, \quad \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\mathfrak{A}_{ii} \subseteq \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, \quad (i \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} &= \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\mathfrak{A}_{ij} = \{0\}, \quad i \neq j \quad (i, j \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} &= \{0\}. \end{aligned}$$

Proposição 2.11. *Seja \mathfrak{A} uma álgebra, para $y, z \in \mathfrak{A}$ definimos a derivação*

$$\Sigma_{y,z}(a) = \left([L_y, L_z] + [L_y, R_z] + [R_y, R_z] \right)(a),$$

para todo $a \in \mathfrak{A}$, é aditiva.

Demonstração. Os operadores L_y e R_z são lineares para quaisquer $y, z \in \mathfrak{A}$. Assim, os comutadores $[L_y, L_z]$, $[L_y, R_z]$ e $[R_y, R_z]$ também são lineares, e a sua soma

$$\Sigma_{y,z} = [L_y, L_z] + [L_y, R_z] + [R_y, R_z]$$

é linear. Em particular, para $a, b \in \mathfrak{A}$, $\Sigma_{y,z}(a + b) = \Sigma_{y,z}(a) + \Sigma_{y,z}(b)$. \square

Observação 2.12. Além das propriedades estruturais obtidas por meio da decomposição de Peirce, convém destacar uma característica adicional de operadores que desempenharão papel relevante em nossos resultados posteriores. Em particular, a derivação $\Sigma_{y,z}$, introduzida na Proposição 2.11, apresenta comportamento aditivo. Essa propriedade é imediata ao observar que $\Sigma_{y,z}$ é definida como combinação linear de comutadores de operadores lineares, o que garante sua linearidade. Para fins de completude, registramos abaixo a verificação direta dessa aditividade.

3

FUNÇÕES *-LIE E *-JORDAN EM *-ÁLGEBRAS ALTERNATIVAS

Dedicamos este capítulo à caracterização de duas funções que foram estudadas no artigo "**-Lie-type maps on alternative *-algebras*" [9] publicado em 2023 no *Journal of Algebra and its applications* e daquela estudada no artigo "**-Jordan-type maps on alternative *-algebras*" [10] publicado em 2024 no *Journal of Mathematical Sciences*.

Tais funções são chamadas n -função *-Lie multiplicativa e n -função *-Jordan multiplicativa, e foram introduzidas no artigo [17].

Ao longo deste capítulo os resultados serão provados considerando as álgebras sobre o corpo dos números complexos e a involução será a conjugação complexa.

3.1 FUNÇÃO *-LIE EM *-ÁLGEBRAS ALTERNATIVAS

Nesta seção descrevemos a investigação realizada em colaboração com os pesquisadores Elisabete Barreiro e Bruno Ferreira, que resultou no artigo "**-Lie-type maps on alternative *-algebras*" [9]. Neste trabalho demonstramos que sob algumas hipóteses, uma função bijetiva multiplicativa unital é *-aditiva, e adicionamos uma hipótese às já existentes para obtermos que uma função bijetiva multiplicativa e escalar sobre \mathbb{C} é um *-isomorfismo. E em consequência desse último resultado obtivemos uma caracterização de uma n -função bijetiva multiplicativa escalar sobre \mathbb{C} como um *-isomorfismo.

A definição a seguir é fundamental para o desenvolvimento desta seção e pode ser consultada em [17].

Definição 3.1. *Seja \mathfrak{A} uma *-álgebra. Denotamos $[a_1, a_2]_* = a_1a_2 - a_2a_1^*$ e as seqüências de polinômios*

$$p_{1*}(a_1) = a_1 \quad e \quad p_{n*}(a_1, a_2, \dots, a_n) = [p_{(n-1)*}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n]_*,$$

para todo inteiro $n \geq 2$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$.

Levando em conta a Definição 3.1, temos $p_{2*}(a_1, a_2) = [a_1, a_2]_* = a_1a_2 - a_2a_1^*$, para todos $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}$, $p_{3*}(a_1, a_2, a_3) = [[a_1, a_2]_*, a_3]_*$, para todos $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{A}$, e assim sucessivamente. Segundo Brešar e Fošner [4], o primeiro registro que temos da multiplicação p_{2*} é no trabalho de Šemrl [38]. Observamos que a multiplicação p_{2*} é aditiva. De fato, sejam $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in \mathfrak{A}$, temos

$$[a_1 + a_2, b]_* = (a_1 + a_2)b - b(a_1 + a_2)^* = a_1b + a_2b - ba_1^* - ba_2^* = [a_1, b]_* + [a_2, b]_*$$

e

$$[a, b_1 + b_2]_* = a[b_1 + b_2] + [b_1 + b_2]a^* = ab_1 + ab_2 - b_1a^* - b_2a^* = [a, b_1]_* + [a, b_2]_*.$$

Lema 3.2. *Notamos que para todo inteiro $n \geq 2$ e para $j \in \{1, \dots, n-1\}$, temos $p_{n*}(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_{(n-j+1)*}(p_{j*}(a_1, a_2, \dots, a_j), a_{j+1}, \dots, a_n)$.*

Demonstração. Fixaremos n e faremos indução sobre j . Para $j = 1$, segue que $p_{n*}(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_{n*}(p_{1*}(a_1), a_2, \dots, a_n)$. Logo é válido para $j = 1$. Suponhamos que seja válido para para algum $j > 1$, ou seja,

$$p_{n*}(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_{(n-j+1)*}(p_{j*}(a_1, a_2, \dots, a_j), a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Segue da Definição 3.1 que

$$\begin{aligned} p_{n*}(a_1, a_2, \dots, a_n) &= p_{(n-j+1)*}(p_{j*}(a_1, \dots, a_j), a_{j+1}, \dots, a_n) \\ &= [\dots [[p_{j*}(a_1, \dots, a_j), a_{j+1}]_*, a_{j+2}]_*, \dots, a_n]_* \\ &= p_{(n-j+1-1)*}(p_{(j+1)*}(a_1, \dots, a_{j+1}), a_{j+2}, \dots, a_n) \\ &= p_{(n-(j+1)+1)*}(p_{(j+1)*}(a_1, \dots, a_{j+1}), a_{j+2}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Logo, pela hipótese de indução, temos $p_{n_*}(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_{(n-j+1)_*}(p_{j_*}(a_1, a_2, \dots, a_j), a_{j+1}, \dots, a_n)$, para $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Por exemplo para $j = n-1$,

$$p_{n_*}(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_{2_*}(p_{(n-1)_*}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n).$$

□

Uma propriedade que será muito utilizada ao longo desta seção é a seguinte:

Proposição 3.3. *A multiplicação p_{n_*} dada na Definição 3.1 é n -aditiva, para todo $n \geq 1$ inteiro.*

Demonstração. Nesta prova vamos utilizar indução sobre n . Sejam $b, c, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{A}$. Para $n = 1$, verificamos que $p_{1_*}(b + c) = b + c = p_{1_*}(b) + p_{1_*}(c)$. Suponhamos que $p_{(n-1)_*}$ seja $(n-1)$ -aditiva, ou seja, para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned} p_{(n-1)_*}(a_1, \dots, a_{j-1}, b + c, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}) &= p_{(n-1)_*}(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}) \\ &\quad + p_{(n-1)_*}(a_1, \dots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que p_{n_*} é n -aditiva. Para $j \in \{2, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned} p_{n_*}(a_1, \dots, a_{j-1}, b + c, a_{j+1}, \dots, a_n) &= \\ &= [p_{(n-1)_*}(a_1, \dots, a_{j-1}, b + c, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}), a_n]_* \\ &= [p_{(n-1)_*}(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}) + p_{(n-1)_*}(a_1, \dots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}), a_n]_* \\ &= [p_{(n-1)_*}(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}), a_n]_* + [p_{(n-1)_*}(a_1, \dots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}), a_n]_* \\ &= p_{n_*}(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n) + p_{n_*}(a_1, \dots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Para $j = n$, como p_{2_*} é aditiva, segue que

$$\begin{aligned} p_{n_*}(a_1, \dots, a_{n-1}, b + c) &= [p_{(n-1)_*}(a_1, \dots, a_{n-1}), b + c]_* \\ &= [p_{(n-1)_*}(a_1, \dots, a_{n-1}), b]_* + [p_{(n-1)_*}(a_1, \dots, a_{n-1}), c]_* \\ &= p_{n_*}(a_1, \dots, a_{n-1}, b) + p_{n_*}(a_1, \dots, a_{n-1}, c). \end{aligned}$$

Logo, pela hipótese de indução, temos que p_{n_*} é n -aditiva.

□

Agora apresentaremos o primeiro resultado principal desta seção.

Teorema 3.4. *Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' duas *-álgebras alternativas com identidades $1_{\mathfrak{A}}$ e $1_{\mathfrak{A}'}$, respectivamente. Consideramos e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} . Suponha que \mathfrak{A} satisfaz a seguinte condição: para $x \in \mathfrak{A}$,*

$$(e_j \mathfrak{A})x = \{0\}, \text{ para todo } j \in \{1, 2\}, \quad \text{implica que} \quad x = 0. \quad (3.1)$$

Se $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ é uma função bijetiva unital que satisfaz

$$\varphi\left(p_{n_*}(a, b, \xi, \dots, \xi)\right) = p_{n_*}\left(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi)\right), \quad (3.2)$$

para todos $a, b \in \mathfrak{A}$ e $\xi \in \{e_1, e_2, 1_{\mathfrak{A}}\}$, então φ é *-aditiva.

Um questionamento que deve surgir é o seguinte: vale a recíproca do Teorema acima? Para o caso de *-álgebras alternativas é uma questão em aberto.

Outro questionamento natural é: existem exemplos de álgebras alternativas que satisfazem a Condição (3.1) do Teorema 3.4? A resposta para esta pergunta é positiva e o exemplo é dado a seguir.

Exemplo 3.5. *Sejam \mathfrak{A} uma álgebra com identidade 1, de base $\{1, e, a_{12}, b_{12}, a_{21}, b_{21}\}$ em que e é um idempotente simétrico não trivial e a multiplicação nesta é dada por*

\cdot	1	e	a_{12}	b_{12}	a_{21}	b_{21}
1	1	e	a_{12}	b_{12}	a_{21}	b_{21}
e	e	e	a_{12}	b_{12}	0	0
a_{12}	a_{12}	0	0	b_{21}	e	0
b_{12}	b_{12}	0	$-b_{21}$	0	0	0
a_{21}	a_{21}	a_{21}	$1 - e$	0	0	b_{12}
b_{21}	b_{21}	b_{21}	0	0	$-b_{12}$	0

Note que \mathfrak{A} constitui uma álgebra alternativa que satisfaz a Condição (3.1) do Teorema 3.4. Observamos, contudo, que \mathfrak{A} não é associativa. De fato, por definição, se uma álgebra \mathfrak{A} é associativa, então $(x, y, z) = 0$ para todos $x, y, z \in \mathfrak{A}$. Entretanto, como

$$(a_{12}b_{12})a_{21} = -b_{12} \quad \text{e} \quad a_{12}(b_{12}a_{21}) = 0,$$

obtemos que $(a_{12}, b_{12}, a_{21}) = -b_{12} \neq 0$. Portanto, \mathfrak{A} não é associativa.

Agora daremos início a demonstração dos resultados necessários para a prova do Teorema 3.4, que tem como objetivo mostrar que φ é aditiva. Vamos considerar que são válidas as hipóteses do Teorema 3.4. Utilizaremos a decomposição de Peirce de \mathfrak{A} com respeito ao idempotente e_1 , dada por $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{12} \oplus \mathfrak{A}_{21} \oplus \mathfrak{A}_{22}$, com

$$\mathfrak{A}_{jk} := \{a_{jk} \mid e_t a_{jk} = \delta_{tj} a_{jk} \text{ e } a_{jk} e_t = \delta_{kt} a_{jk}\}, \quad j, k, t \in \{1, 2\},$$

onde $\delta_{t_1 t_2}$ denota a delta de Kronecker. Observamos que para os idempotentes e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$, temos $e_1 \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{12}$ e $e_2 \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{21} \oplus \mathfrak{A}_{22}$.

As Proposições 3.6, 3.7 e 3.8 serão de grande importância para demonstração dos resultados desta seção.

Proposição 3.6. $(\mathfrak{A}_{kj})^* \subset \mathfrak{A}_{jk}$, para todos $j, k \in \{1, 2\}$.

Demonstração. Seja $a_{kj} \in \mathfrak{A}_{kj}$, para todos $j, k \in \{1, 2\}$, então

$$a_{kj}^* = (e_k a_{kj} e_j)^* = (e_j)^* (a_{kj})^* (e_k)^* = e_j (a_{kj})^* e_k \in \mathfrak{A}_{jk}.$$

□

Proposição 3.7. Sejam $a, b, h \in \mathfrak{A}$ tais que $\varphi(h) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Para $c \in \mathfrak{A}$, temos

$$\varphi(p_{n_*}(h, c, \xi, \dots, \xi)) = \varphi(p_{n_*}(a, c, \xi, \dots, \xi)) + \varphi(p_{n_*}(b, c, \xi, \dots, \xi)),$$

$$\varphi(p_{n_*}(c, h, \xi, \dots, \xi)) = \varphi(p_{n_*}(c, a, \xi, \dots, \xi)) + \varphi(p_{n_*}(c, b, \xi, \dots, \xi)),$$

para $\xi \in \{e_1, e_2, 1_{\mathfrak{A}}\}$.

Demonstração. Dados $c \in \mathfrak{A}$ e $\xi \in \{e_1, e_2, 1_{\mathfrak{A}}\}$, pela Condição (3.2) do Teorema 3.4 e pela Proposição 3.3, temos

$$\begin{aligned} \varphi(p_{n_*}(h, c, \xi, \dots, \xi)) &= p_{n_*}(\varphi(h), \varphi(c), \varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi)) = p_{n_*}(\varphi(a) + \varphi(b), \varphi(c), \varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi)) \\ &= p_{n_*}(\varphi(a), \varphi(c), \varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi)) + p_{n_*}(\varphi(b), \varphi(c), \varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi)) \\ &= \varphi(p_{n_*}(a, c, \xi, \dots, \xi)) + \varphi(p_{n_*}(b, c, \xi, \dots, \xi)). \end{aligned}$$

De modo análogo provamos a segunda identidade.

□

Proposição 3.8. $\varphi(0) = 0$.

Demonstração. Como φ é sobrejetiva, existe $x \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(x) = 0$. Pela Condição (3.2), segue que

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \varphi(p_{n_*}(0, x, 1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}})) = p_{n_*}(\varphi(0), \varphi(x), \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}})) \\ &= p_{n_*}(\varphi(0), 0, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}})) = 0.\end{aligned}$$

□

Nas Proposições 3.9 e 3.10 vamos apresentar uma parte dos cálculos necessários para as demonstrações dos Lemas 3.11– 3.21.

Proposição 3.9. *Sejam $a_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, $a \in \mathfrak{A}$ e $\varphi(a) \in \mathfrak{A}'$. Para todo $n \geq 2$, temos*

$$p_{n_*}(a_{jk}, e_1, \dots, e_1) = \begin{cases} 2^{n-2}(a_{11} - a_{11}^*), & (j, k) = (1, 1), \\ a_{21} - a_{21}^*, & (j, k) = (2, 1), \\ 0, & (j, k) = (1, 2) \text{ ou } (j, k) = (2, 2). \end{cases} \quad (3.3)$$

$$p_{n_*}(a_{jk}, e_2, \dots, e_2) = \begin{cases} 2^{n-2}(a_{22} - a_{22}^*), & (j, k) = (2, 2), \\ a_{12} - a_{12}^*, & (j, k) = (1, 2), \\ 0, & (j, k) = (1, 1) \text{ ou } (j, k) = (2, 1). \end{cases} \quad (3.4)$$

$$p_{n_*}(a_{12} + a_{21}, e_l, \dots, e_l) = \begin{cases} a_{21} - a_{21}^*, & l = 1, \\ a_{12} - a_{12}^*, & l = 2. \end{cases} \quad (3.5)$$

$$p_{n_*}(a, 1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}) = 2^{n-2}(a - a^*). \quad (3.6)$$

$$p_{n_*}(\varphi(a), 1_{\mathfrak{A}'}, \dots, 1_{\mathfrak{A}'}) = 2^{n-2}(\varphi(a) - \varphi(a)^*). \quad (3.7)$$

Demonstração. Para esta demonstração utilizaremos o processo de indução sobre n . Vamos mostrar a Equação (3.3), e Equação (3.4) é demonstrada de forma análoga. Assim, calculando

$p_{2_*}(a_{jk}, e_1) = a_{jk}e_1 - e_1a_{jk}^* = \delta_{k1}a_{jk} - \delta_{1k}a_{jk}^*$, de onde,

$$\begin{aligned}p_{2_*}(a_{11}, e_1) &= \delta_{11}a_{11} - \delta_{11}a_{11}^* = a_{11} - a_{11}^*, & p_{2_*}(a_{12}, e_1) &= \delta_{21}a_{12} - \delta_{12}a_{12}^* = 0, \\ p_{2_*}(a_{21}, e_1) &= \delta_{11}a_{21} - \delta_{11}a_{21}^* = a_{21} - a_{21}^*, & p_{2_*}(a_{22}, e_1) &= \delta_{21}a_{22} - \delta_{12}a_{22}^* = 0.\end{aligned}$$

Concluimos que é válido para $n = 2$. Suponhamos que também seja válido para $n - 1$, isto é,

$$p_{(n-1)*}(a_{11}, e_1, \dots, e_1) = 2^{n-3}(a_{11} - a_{11}^*) \quad \text{e} \quad p_{(n-1)*}(a_{21}, e_1, \dots, e_1) = a_{21} - a_{21}^*.$$

Para $(j, k) = (1, 1)$, pelo Lema 3.2 e pela aditividade da multiplicação p_{n*} , segue que

$$\begin{aligned} p_{n*}(a_{11}, e_1, \dots, e_1) &= p_{2*}\left(p_{(n-1)*}(a_{11}, e_1, \dots, e_1), e_1\right) \\ &= p_{2*}(2^{n-3}a_{11}, e_1) - p_{2*}(2^{n-3}a_{11}^*, e_1) \\ &= 2^{n-3}(a_{11}e_1 - e_1a_{11}^*) - 2^{n-3}\left(a_{11}^*e_1 - e_1(a_{11}^*)^*\right) \\ &= 2^{n-3}(\delta_{11}a_{11} - \delta_{11}a_{11}^* - \delta_{11}a_{11}^* + \delta_{11}a_{11}) = 2^{n-2}(a_{11} - a_{11}^*). \end{aligned}$$

Analogamente para $(j, k) = (2, 1)$, pelo Lema 3.2 e pela aditividade da multiplicação p_{n*} , obtemos

$$\begin{aligned} p_{n*}(a_{21}, e_1, \dots, e_1) &= p_{2*}\left(p_{(n-1)*}(a_{21}, e_1, \dots, e_1), e_1\right) \\ &= p_{2*}(a_{21}, e_1) - p_{2*}(a_{21}^*, e_1) \\ &= a_{21}e_1 - e_1a_{21}^* - a_{21}^*e_1 + e_1(a_{21}^*)^* \\ &= \delta_{11}a_{21} - \delta_{11}a_{21}^* - \delta_{21}a_{21}^* + \delta_{12}a_{21} \\ &= a_{21} - a_{21}^*. \end{aligned}$$

Logo, pela hipótese de indução, para todo $n \geq 2$, chegamos a

$$p_{n*}(a_{jk}, e_1, \dots, e_1) = \begin{cases} 2^{n-2}(a_{11} - a_{11}^*), & (j, k) = (1, 1), \\ a_{21} - a_{21}^*, & (j, k) = (2, 1), \\ 0, & (j, k) = (1, 2) \text{ ou } (j, k) = (2, 2). \end{cases}$$

Agora, mostraremos a Equação (3.5). Pela aditividade de p_{n*} , segue que

$$p_{n*}(a_{12} + a_{21}, e_1, \dots, e_l) = p_{n*}(a_{12}, e_1, \dots, e_l) + p_{n*}(a_{21}, e_1, \dots, e_l).$$

Pelas Equações (3.4) e (3.3), temos

$$p_{n*}(a_{12} + a_{21}, e_1, \dots, e_l) = \begin{cases} a_{21} - a_{21}^*, & l = 1, \\ a_{12} - a_{12}^*, & l = 2. \end{cases}$$

Neste passo vamos demonstrar a Equação (3.6). Notamos que a Equação (3.7) pode ser provada de forma similar. Para $n = 2$, $p_{2_*}(a, 1_{\mathfrak{A}}) = a - a^*$. Suponhamos que seja válido para $n - 1$, isto é, $p_{(n-1)_*}(a, 1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}) = 2^{n-3}(a - a^*)$. Agora, pela aditividade de p_{n_*} , obtemos

$$\begin{aligned} p_{n_*}(a, 1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}) &= p_{2_*}\left(p_{(n-1)_*}(a, 1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}), 1_{\mathfrak{A}}\right) \\ &= p_{2_*}\left(2^{n-3}(a - a^*), 1_{\mathfrak{A}}\right) = p_{2_*}(2^{n-3}a, 1_{\mathfrak{A}}) - p_{2_*}(2^{n-3}a^*, 1_{\mathfrak{A}}) \\ &= 2^{n-3}(a - a^*) - 2^{n-3}(a^* - a) \\ &= 2^{n-2}(a - a^*). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.10. *Dados $a_{jk}, b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, com $j, k \in \{1, 2\}$, para todo inteiro $n \geq 3$*

$$p_{n_*}(e_1, a_{jk}, e_1, \dots, e_1) = \begin{cases} -a_{21} + a_{21}^*, & (j, k) = (2, 1), \\ 0, & (j, k) \neq (2, 1), \end{cases} \quad (3.8)$$

$$p_{n_*}(e_2, a_{jk}, e_2, \dots, e_2) = \begin{cases} -a_{12} + a_{12}^*, & (j, k) = (1, 2), \\ 0, & (j, k) \neq (1, 2). \end{cases} \quad (3.9)$$

$$p_{n_*}(b_{21}, a_{jk}, e_1, \dots, e_1) = \begin{cases} b_{21}a_{jk} - (b_{21}a_{jk})^*, & (j, k) = (1, 1), \\ -a_{jk}b_{21} + (a_{jk}b_{21}^*)^*, & (j, k) = (1, 2), \\ 0, & (j, k) = (2, 1) \text{ ou } (j, k) = (2, 2). \end{cases} \quad (3.10)$$

$$p_{n_*}(b_{12}, a_{jk}, e_2, \dots, e_2) = \begin{cases} b_{12}a_{jk} - (b_{12}a_{jk})^*, & (j, k) = (2, 2), \\ -a_{jk}b_{12}^* + (a_{jk}b_{12}^*)^*, & (j, k) = (2, 1), \\ 0, & (j, k) = (1, 1) \text{ ou } (j, k) = (1, 2). \end{cases} \quad (3.11)$$

Para $j, k \in \{1, 2\}$, com $j \neq k$, segue que

$$p_{n_*}(b_{11}, a_{jk}, e_k, \dots, e_k) = \begin{cases} -a_{21}b_{11} + (a_{21}b_{11}^*)^*, & (j, k) = (2, 1), \\ b_{11}a_{12} - (b_{11}a_{12})^*, & (j, k) = (1, 2). \end{cases} \quad (3.12)$$

$$p_{n_*}(b_{22}, a_{jk}, e_k, \dots, e_k) = \begin{cases} b_{22}a_{21} - (b_{22}a_{21})^*, & (j, k) = (2, 1), \\ -a_{12}b_{22} + (a_{12}b_{22}^*)^*, & (j, k) = (1, 2). \end{cases} \quad (3.13)$$

$$p_{n_*}(a_{jk}, b_{jk}, e_j, \dots, e_j) = \begin{cases} a_{12}b_{12} - (a_{12}b_{12})^* - 2^{n-3}(b_{12}a_{12}^*) + 2^{n-3}(b_{12}a_{12}^*)^*, & (j, k) = (1, 2) \\ a_{21}b_{21} - (a_{21}b_{21})^* - 2^{n-3}(b_{21}a_{21}^*) + 2^{n-3}(b_{21}a_{21}^*)^*, & (j, k) = (2, 1). \end{cases} \quad (3.14)$$

Demonstração. Sejam $a_{jk}, b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$. Ao longo desta demonstração utilizaremos indução sobre n . Inicialmente vamos mostrar que é válida a Equação (3.8). Assim, calcularemos $p_{2_*}(e_1, a_{jk})$. Observamos que $p_{2_*}(e_1, a_{jk}) = e_1a_{jk} - a_{jk}e_1^* = e_1a_{jk} - a_{jk}e_1 = \delta_{1j}a_{jk} - \delta_{k1}a_{jk}$. Assim, $p_{2_*}(e_1, a_{11}) = \delta_{11}a_{11} - \delta_{11}a_{11} = 0$, $p_{2_*}(e_1, a_{12}) = \delta_{11}a_{12} - \delta_{21}a_{12} = a_{12}$. Agora, vamos calcular $p_{2_*}(e_1, a_{21}) = \delta_{12}a_{21} - \delta_{11}a_{21} = -a_{21}$, $p_{2_*}(e_1, a_{22}) = \delta_{12}a_{22} - \delta_{21}a_{22} = 0$. Assim, vamos calcular $p_{3_*}(e_1, a_{jk}, e_1)$ apenas para os casos em que $p_{2_*}(e_1, a_{jk}) \neq 0$. Assim, $p_{3_*}(e_1, a_{12}, e_1) = [p_{2_*}(e_1, a_{12}), e_1]_* = [a_{12}, e_1]_* = a_{12}e_1 - e_1a_{12}^* = \delta_{21}a_{12} - \delta_{12}a_{12}^* = 0$ e $p_{3_*}(e_1, a_{21}, e_1) = [p_{2_*}(e_1, a_{21}), e_1]_* = [-a_{21}, e_1]_* = -a_{21}e_1 + e_1a_{21}^* = -\delta_{11}a_{21} + \delta_{11}a_{21}^* = -a_{21} + a_{21}^*$. Suponhamos que isso seja válido para $n - 1$, ou seja, $p_{(n-1)_*}(e_1, a_{21}, e_1, \dots, e_1) = -a_{21} + a_{21}^*$. Logo, $p_{n_*}(e_1, a_{21}, e_1, \dots, e_1) = p_{2_*}(p_{(n-1)_*}(e_1, a_{21}, e_1, \dots, e_1), e_1)$. Pela Proposição 3.3 e aditividade da multiplicação p_{n_*} , temos

$$\begin{aligned} p_{n_*}(e_1, a_{21}, e_1, \dots, e_1) &= p_{2_*}(p_{(n-1)_*}(e_1, a_{21}, e_1, \dots, e_1), e_1) = p_{2_*}(-a_{21} + a_{21}^*, e_1) \\ &= p_{2_*}(-a_{21}, e_1) + p_{2_*}(a_{21}^*, e_1) = -a_{21}e_1 + e_1a_{21}^* + a_{21}^*e_1 - e_1(a_{21}^*)^* \\ &= -a_{21}e_1 + e_1a_{21}^* + a_{21}^*e_1 - e_1a_{21} = -\delta_{11}a_{21} + \delta_{11}a_{21}^* + \delta_{21}a_{21}^* - \delta_{12}a_{21} \\ &= -a_{21} + a_{21}^*. \end{aligned}$$

Logo, pela hipótese de indução, segue que $p_{n_*}(e_1, a_{21}, e_1, \dots, e_1) = -a_{21} + a_{21}^*$, para todo $n \geq 3$. Refazendo estes cálculos e trocando e_1 por e_2 e a_{21} por a_{12} , obtemos a Equação (3.9).

Vamos mostrar a Equação (3.10) e a prova da Equação (3.11) é feita de forma similar. Primeiro, consideraremos $a_{jk} = a_{11}$. Para $n = 2$, temos $p_{2_*}(b_{21}, a_{11}) = b_{21}a_{11} - a_{11}b_{21}^*$. Utilizaremos indução sobre n . Para $n = 3$, pelo Lema 3.2 e pela Proposição 3.3, segue que

$$\begin{aligned}
p_{3*}(b_{21}, a_{11}, e_1) &= p_{2*}\left(p_{2*}(b_{21}, a_{11}), e_1\right) = p_{2*}(b_{21}a_{11} - a_{11}b_{21}^*, e_1) \\
&= p_{2*}(b_{21}a_{11}, e_1) - p_{2*}(a_{11}b_{21}^*, e_1) \\
&= (b_{21}a_{11})e_1 - e_1(b_{21}a_{11})^* - (a_{11}b_{21}^*)e_1 + e_1(a_{11}b_{21}^*)^* \\
&= \delta_{11}b_{21}a_{11} - \delta_{11}(b_{21}a_{11})^* - \delta_{21}(a_{11}b_{21}^*) + \delta_{12}(a_{11}b_{21}^*)^* \\
&= b_{21}a_{11} - (b_{21}a_{11})^*.
\end{aligned}$$

Suponhamos que seja válido para $n - 1$, isto é, $p_{(n-1)*}(b_{21}, a_{11}, e_1, \dots, e_1) = b_{21}a_{11} - (b_{21}a_{11})^*$. Pelo Lema 3.2 e pela aditividade da multiplicação p_{n*} , concluímos que

$$\begin{aligned}
p_{n*}(b_{21}, a_{11}, e_1, \dots, e_1) &= p_{2*}\left(p_{(n-1)*}(b_{21}, a_{11}, e_1, \dots, e_1), e_1\right) = p_{2*}\left(b_{21}a_{11} - (b_{21}a_{11})^*, e_1\right) \\
&= p_{2*}(b_{21}a_{11}, e_1) - p_{2*}\left((b_{21}a_{11})^*, e_1\right) \\
&= (b_{21}a_{11})e_1 - e_1(b_{21}a_{11})^* - (b_{21}a_{11})^*e_1 + e_1\left((b_{21}a_{11})^*\right)^* \\
&= \delta_{11}b_{21}a_{11} - \delta_{11}(b_{21}a_{11})^* - \delta_{21}(b_{21}a_{11})^* - \delta_{12}(b_{21}a_{11}) \\
&= b_{21}a_{11} - (b_{21}a_{11})^*.
\end{aligned}$$

Logo, pela hipótese de indução, temos $p_{n*}(b_{21}, a_{11}, e_1, \dots, e_1) = b_{21}a_{11} - (b_{21}a_{11})^*$, para todo $n \geq 3$.

Agora, vamos considerar o caso $a_{jk} = a_{12}$. Para $n = 2$, $p_{2*}(b_{21}, a_{12}) = b_{21}a_{12} - a_{12}b_{21}^*$. Utilizaremos indução sobre n . Para $n = 3$, pelo Lema 3.2 e aditividade da multiplicação p_{n*} , temos

$$\begin{aligned}
p_{3*}(b_{21}, a_{12}, e_1) &= p_{2*}\left(p_{2*}(b_{21}, a_{12}), e_1\right) = p_{2*}(b_{21}a_{12} - a_{12}b_{21}^*, e_1) \\
&= p_{2*}(b_{21}a_{12}, e_1) - p_{2*}(a_{12}b_{21}^*, e_1) \\
&= (b_{21}a_{12})e_1 - e_1(b_{21}a_{12})^* - (a_{12}b_{21}^*)e_1 + e_1(a_{12}b_{21}^*)^* \\
&= \delta_{21}b_{21}a_{12} - \delta_{12}(b_{21}a_{12})^* - \delta_{11}a_{12}b_{21}^* + \delta_{11}(a_{12}b_{21}^*)^* \\
&= -a_{12}b_{21}^* + (a_{12}b_{21}^*)^*.
\end{aligned}$$

Vamos supor que também seja válido para $n - 1$, ou seja,

$$p_{(n-1)*}(b_{21}, a_{12}, e_1, \dots, e_1) = -a_{12}b_{21}^* + (a_{12}b_{21}^*)^*.$$

Pelo Lema 3.2 e como a multiplicação p_{n_*} é aditiva, segue que

$$\begin{aligned}
p_{n_*}(b_{21}, a_{12}, e_1, \dots, e_1) &= p_{2_*}\left(p_{(n-1)_*}(b_{21}, a_{12}, e_1, \dots, e_1), e_1\right) \\
&= p_{2_*}\left(-a_{12}b_{21}^* + (a_{12}b_{21}^*)^*, e_1\right) \\
&= p_{2_*}(-a_{12}b_{21}^*, e_1) + p_{2_*}\left((a_{12}b_{21}^*)^*, e_1\right) \\
&= -a_{12}b_{21}^*e_1 + e_1(a_{12}b_{21}^*)^* + (a_{12}b_{21}^*)^*e_1 - e_1\left((a_{12}b_{21}^*)^*\right)^* \\
&= -\delta_{11}a_{12}b_{21}^* + \delta_{11}(a_{12}b_{21}^*)^* + \delta_{21}(a_{12}b_{21}^*)^* - \delta_{12}a_{12}b_{21}^* \\
&= -a_{12}b_{21}^* + (a_{12}b_{21}^*)^*.
\end{aligned}$$

Portanto, pela hipótese de indução, concluímos que $p_{n_*}(b_{21}, a_{12}, e_1, \dots, e_1) = -a_{12}b_{21}^* + (a_{12}b_{21}^*)^*$, para todo $n \geq 3$.

Neste passo vamos mostrar a Equação (3.12). Existem dois casos para considerar que são $(j, k) = (2, 1)$ e $(j, k) = (1, 2)$, no entanto demonstraremos apenas o caso $(j, k) = (2, 1)$, pois o caso $(j, k) = (1, 2)$ pode ser demonstrado de forma análoga. Para $n = 2$, segue que $p_{2_*}(b_{11}, a_{21}) = b_{11}a_{21} - a_{21}b_{11}^* = -a_{21}b_{11}^*$. Utilizaremos indução sobre n . Para $n = 3$, pelo Lema 3.2, concluímos

$$\begin{aligned}
p_{3_*}(b_{11}, a_{21}, e_1) &= p_{2_*}\left(p_{2_*}(b_{11}, a_{21}), e_1\right) = p_{2_*}(-a_{21}b_{11}^*, e_1) = -(a_{21}b_{11}^*)e_1 + e_1(a_{21}b_{11}^*)^* \\
&= -\delta_{11}a_{21}b_{11}^* + \delta_{11}(a_{21}b_{11}^*)^* = -a_{21}b_{11}^* + (a_{21}b_{11}^*)^*.
\end{aligned}$$

Suponhamos que seja válido para $n - 1$, isto é,

$$p_{(n-1)_*}(b_{11}, a_{21}, e_1, \dots, e_1) = -a_{21}b_{11}^* + (a_{21}b_{11}^*)^*.$$

Pelo Lema 3.2 e Proposição 3.3, obtemos

$$\begin{aligned}
p_{n_*}(b_{11}, a_{21}, e_1, \dots, e_1) &= p_{2_*}\left(p_{(n-1)_*}(b_{11}, a_{21}, e_1, \dots, e_1), e_1\right) \\
&= p_{2_*}(-a_{21}b_{11}^*, e_1) + p_{2_*}\left((a_{21}b_{11}^*)^*, e_1\right) \\
&= -(a_{21}b_{11}^*)e_1 + e_1(a_{21}b_{11}^*)^* + (a_{21}b_{11}^*)^*e_1 - e_1\left((a_{21}b_{11}^*)^*\right)^* \\
&= -\delta_{11}a_{21}b_{11}^* + \delta_{11}(a_{21}b_{11}^*)^* + \delta_{21}(a_{21}b_{11}^*)^* - \delta_{12}a_{21}b_{11}^*
\end{aligned}$$

$$= -a_{21}b_{11}^* + (a_{21}b_{11}^*)^*.$$

Portanto, pela hipótese de indução, temos $p_{n_*}(b_{11}, a_{21}, e_1, \dots, e_1) = -a_{21}b_{11}^* + (a_{21}b_{11}^*)^*$, para todo $n \geq 3$.

Demonstraremos agora a Equação (3.13). Assim como na demonstração anterior, existem dois casos para considerar, a saber, $k = 1$ e $k = 2$. Faremos a prova para $k = 1$, já que o caso $k = 2$ é similar. Quando $k = 1$, como $j, k \in \{1, 2\}$ e $j \neq k$, temos $j = 2$. Para $n = 2$, segue que $p_{2_*}(b_{22}, a_{21}) = \delta_{22}b_{22}a_{21} - \delta_{12}a_{21}b_{22}^* = b_{22}a_{21}$. Utilizaremos indução sobre n . Para $n = 3$, pela Observação 3.2, concluímos

$$\begin{aligned} p_{3_*}(b_{22}, a_{21}, e_1) &= p_{2_*}(b_{22}a_{21}, e_1) = (b_{22}a_{21})e_1 - e_1(b_{22}a_{21})^* = \delta_{11}b_{22}a_{21} - \delta_{11}(b_{22}a_{21})^* \\ &= b_{22}a_{21} - (b_{22}a_{21})^*. \end{aligned}$$

Suponhamos que seja válido para $n - 1$, ou seja,

$$p_{(n-1)_*}(b_{22}, a_{21}, e_1, \dots, e_1) = b_{22}a_{21} - (b_{22}a_{21})^*.$$

Pelo Lema 3.2 e aditividade da multiplicação p_{n_*} , obtemos

$$\begin{aligned} p_{n_*}(b_{22}, a_{21}, e_1, \dots, e_1) &= p_{2_*}\left(p_{(n-1)_*}(b_{22}, a_{21}, e_1, \dots, e_1), e_1\right) \\ &= p_{2_*}(b_{22}a_{21}, e_1) - p_{2_*}\left((b_{22}a_{21})^*, e_1\right) \\ &= (b_{22}a_{21})e_1 - e_1(b_{22}a_{21})^* - (b_{22}a_{21})^*e_1 + e_1\left((b_{22}a_{21})^*\right)^* \\ &= \delta_{11}b_{22}a_{21} - \delta_{11}(b_{22}a_{21})^* - \delta_{12}(b_{22}a_{21})^* + \delta_{21}\left((b_{22}a_{21})^*\right) \\ &= b_{22}a_{21} - (b_{22}a_{21})^*. \end{aligned}$$

Logo, pela hipótese de indução, temos $p_{n_*}(b_{22}, a_{21}, e_1, \dots, e_1) = b_{22}a_{21} - (b_{22}a_{21})^*$, para todo $n \geq 3$. Seguindo o mesmo procedimento que utilizamos para demonstrar as Equações (3.12) e (3.13), podemos mostrar a Equação (3.14). □

Agora daremos início a demonstração de uma série de lemas que serão necessários para a demonstração do Teorema 3.4.

Lema 3.11. Se $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$ e $b_{22} \in \mathfrak{A}_{22}$, então

$$\varphi(a_{11} + b_{22}) = \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{22}).$$

Demonstração. Como φ é sobrejetiva, dado $\varphi(a_{11}) + \varphi(b_{22}) \in \mathfrak{A}'$ existe $h \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(h) = \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{22})$. Podemos escrever, $h = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}$. Pela Equação (3.8), $p_{n_*}(e_1, h, e_1, \dots, e_1) = -h_{21} + h_{21}^*$. Pela Condição (3.2) do Teorema 3.4, decorre que

$$\begin{aligned} \varphi\left(p_{n_*}(e_1, h, e_1, \dots, e_1)\right) &= p_{n_*}\left(\varphi(e_1), \varphi(h), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(e_1), \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{22}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(e_1), \varphi(a_{11}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) + p_{n_*}\left(\varphi(e_1), \varphi(b_{22}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(e_1, a_{11}, e_1, \dots, e_1)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(e_1, b_{22}, e_1, \dots, e_1)\right) \\ &= \varphi(0) + \varphi(0) = 0 = \varphi(0). \end{aligned}$$

Logo, $\varphi(-h_{21} + h_{21}^*) = \varphi(p_{n_*}(e_1, h, e_1, \dots, e_1)) = \varphi(0)$. Como φ é injetiva, segue que $-h_{21} + h_{21}^* = 0$. Utilizando o fato de que $h_{21}^* \in \mathfrak{A}_{12}$ e $h_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, obtemos $h_{21} = 0$. Agora, pela Proposição 3.10, concluímos que $p_{n_*}(e_2, h, e_2, \dots, e_2) = -h_{12} + h_{12}^*$. Seguindo o mesmo processo que anteriormente, chegamos a

$$\begin{aligned} \varphi\left(p_{n_*}(e_2, h, e_2, \dots, e_2)\right) &= p_{n_*}\left(\varphi(e_2), \varphi(h), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(e_2), \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{22}), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(e_2), \varphi(a_{11}), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) + p_{n_*}\left(\varphi(e_2), \varphi(b_{22}), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(e_2, a_{11}, e_2, \dots, e_2)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(e_2, b_{22}, e_2, \dots, e_2)\right) \\ &= \varphi(0) + \varphi(0) = 0 = \varphi(0). \end{aligned}$$

Logo, $\varphi(-h_{12} + h_{12}^*) = \varphi\left(p_{n_*}(e_2, h, e_2, \dots, e_2)\right) = \varphi(0)$. Novamente pela injetividade de φ , segue que $-h_{12} + h_{12}^* = 0$ e como $h_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ e $h_{12}^* \in \mathfrak{A}_{21}$, obtemos $h_{12} = 0$.

Agora, vamos mostrar que $h_{11} = a_{11}$. Seja $d_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ qualquer. Da Equação (3.10), segue que $p_{n_*}(d_{21}, a_{11}, e_1, \dots, e_1) = d_{21}a_{11} - (d_{21}a_{11})^*$ e $p_{n_*}(d_{21}, b_{22}, e_1, \dots, e_1) = 0$, e então deduzimos que

$$\varphi(p_{n_*}(d_{21}, h, e_1, \dots, e_1)) = p_{n_*}\left(\varphi(d_{21}), \varphi(h), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= p_{n_*} \left(\varphi(d_{21}), \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{22}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1) \right) \\
&= p_{n_*} \left(\varphi(d_{21}), \varphi(a_{11}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1) \right) + p_{n_*} \left(\varphi(d_{21}), \varphi(b_{22}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1) \right) \\
&= \varphi \left(p_{n_*}(d_{21}, a_{11}, e_1, \dots, e_1) \right) + \varphi \left(p_{n_*}(d_{21}, b_{22}, e_1, \dots, e_1) \right) \\
&= \varphi \left(d_{21}a_{11} - (d_{21}a_{11})^* \right) + \varphi(0) \\
&= \varphi(d_{21}a_{11} - (d_{21}a_{11})^*).
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela Equação (3.10), obtemos $\varphi \left(p_{n_*}(d_{21}, h, e_1, \dots, e_1) \right) = \varphi \left(d_{21}h_{11} - (d_{21}h_{11})^* \right)$. Da injetividade de φ , concluímos que $d_{21}h_{11} - (d_{21}h_{11})^* = d_{21}a_{11} - (d_{21}a_{11})^*$. Como $d_{21}h_{11}, d_{21}a_{11} \in \mathfrak{A}_{21}$ e $(d_{21}h_{11})^*, (d_{21}a_{11})^* \in \mathfrak{A}_{12}$, pela decomposição de Peirce em soma direta, temos $d_{21}h_{11} - d_{21}a_{11} = 0$, equivalentemente, $d_{21}(h_{11} - a_{11}) = 0$. Mais ainda, pela arbitrariedade de $d_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, resulta que $(e_2\mathfrak{A})(h_{11} - a_{11}) = \{0\}$ e pela Condição (3.1) do Teorema 3.4, constatamos que $h_{11} - a_{11} = 0$ e, portanto, $h_{11} = a_{11}$.

Finalmente, mostraremos que $h_{22} = a_{22}$. Seja $d_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ qualquer. Pela Equação (3.11), temos $p_{n_*}(d_{12}, a_{11}, e_2, \dots, e_2) = 0$ e $p_{n_*}(d_{12}, b_{22}, e_2, \dots, e_2) = d_{12}b_{22} - (d_{12}b_{22})^*$. Logo,

$$\begin{aligned}
&\varphi \left(p_{n_*}(d_{12}, h, e_2, \dots, e_2) \right) = p_{n_*} \left(\varphi(d_{12}), \varphi(h), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2) \right) \\
&= p_{n_*} \left(\varphi(d_{12}), \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{22}), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2) \right) \\
&= p_{n_*} \left(\varphi(d_{12}), \varphi(a_{11}), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2) \right) + p_{n_*} \left(\varphi(d_{12}), \varphi(b_{22}), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2) \right) \\
&= \varphi \left(p_{n_*}(d_{12}, a_{11}, e_2, \dots, e_2) \right) + \varphi \left(p_{n_*}(d_{12}, b_{22}, e_2, \dots, e_2) \right) \\
&= \varphi(0) + \varphi \left(d_{12}b_{22} - (d_{12}b_{22})^* \right) \\
&= \varphi \left(d_{12}b_{22} - (d_{12}b_{22})^* \right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela Equação (3.11), segue que

$$\varphi \left(p_{n_*}(d_{12}, h, e_2, \dots, e_2) \right) = \varphi \left(d_{12}h_{22} - (d_{12}h_{22})^* \right).$$

Da injetividade de φ , concluímos que $d_{12}b_{22} - (d_{12}b_{22})^* = d_{12}h_{22} - (d_{12}h_{22})^*$. Assim, $d_{12}h_{22} - d_{12}b_{22} = 0$, ou seja, $d_{12}(h_{22} - b_{22}) = 0$. Além disso, pela arbitrariedade de $d_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$, obtemos $(e_1\mathfrak{A})(h_{22} - b_{22}) = \{0\}$ e novamente pela Condição (3.1) do Teorema 3.4, constatamos $h_{22} = b_{22}$.

□

Lema 3.12. Para quaisquer $a_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ e $b_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, temos

$$\varphi(a_{12} + b_{21}) = \varphi(a_{12}) + \varphi(b_{21}).$$

Demonstração. Como φ é sobrejetora, dado $\varphi(a_{12}) + \varphi(b_{21}) \in \mathfrak{A}'$ existe $h \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(h) = \varphi(a_{12}) + \varphi(b_{21})$, com $h = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}$.

Inicialmente vamos mostrar que $h_{21} = b_{21}$ e $h_{12} = a_{12}$. Pela aditividade da multiplicação p_{n_*} , Condição (3.2) do Teorema 3.4 e Equação (3.8), temos

$$\begin{aligned} \varphi\left(p_{n_*}(e_1, h, e_1, \dots, e_1)\right) &= p_{n_*}\left(\varphi(e_1), \varphi(h), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(e_1), \varphi(a_{12}) + \varphi(b_{21}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(e_1), \varphi(a_{12}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) + p_{n_*}\left(\varphi(e_1), \varphi(b_{21}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(e_1, a_{12}, e_1, \dots, e_1)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(e_1, b_{21}, e_1, \dots, e_1)\right) \\ &= \varphi(0) + \varphi(-b_{21} + b_{21}^*) = \varphi(-b_{21} + b_{21}^*). \end{aligned}$$

Por outro lado, da Equação (3.8), segue que $p_{n_*}(e_1, h, e_1, \dots, e_1) = -h_{21} + h_{21}^*$. De onde, $\varphi(p_{n_*}(e_1, h, e_1, \dots, e_1)) = \varphi(-h_{21} + h_{21}^*)$ e $\varphi\left(p_{n_*}(e_1, h, e_1, \dots, e_1)\right) = \varphi(-b_{21} + b_{21}^*)$. Logo, $\varphi(-h_{21} + h_{21}^*) = \varphi(-b_{21} + b_{21}^*)$. Pela injetividade de φ , obtemos $-h_{21} + h_{21}^* = -b_{21} + b_{21}^*$ e pela decomposição de Peirce, concluímos que $h_{21} = b_{21}$. Para mostrar que $h_{12} = a_{12}$ faremos os mesmos cálculos porém trocando e_1 por e_2 , ou seja,

$$\begin{aligned} \varphi\left(p_{n_*}(e_2, h, e_2, \dots, e_2)\right) &= p_{n_*}\left(\varphi(e_2), \varphi(h), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(e_2), \varphi(a_{12}) + \varphi(b_{21}), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(e_2), \varphi(a_{12}), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) + p_{n_*}\left(\varphi(e_2), \varphi(b_{21}), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(e_2, a_{12}, e_2, \dots, e_2)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(e_2, b_{21}, e_2, \dots, e_2)\right) \\ &= \varphi(-a_{12} + a_{12}^*) + \varphi(0) = \varphi(-a_{12} + a_{12}^*). \end{aligned}$$

Entretanto, pela Equação (3.9), temos $\varphi\left(p_{n_*}(e_2, h, e_2, \dots, e_2)\right) = \varphi(-h_{12} + h_{12}^*)$. Logo, $\varphi(-h_{12} + h_{12}^*) = \varphi(-a_{12} + a_{12}^*)$. Novamente pela injetividade de φ , temos $-h_{12} + h_{12}^* = -a_{12} + a_{12}^*$. Assim, $h_{12} = a_{12}$.

Agora, mostraremos que $h_{11} = 0$. Seja $d_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ qualquer. Pela aditividade da multiplicação p_{n_*} e Equação (3.10), temos $p_{n_*}(d_{21}, h, e_1, \dots, e_1) = d_{21}h_{11} - (d_{21}h_{11})^* - h_{12}d_{21} + (h_{12}d_{21}^*)^*$, $p_{n_*}(d_{21}, a_{12}, e_1, \dots, e_1) = -a_{12}d_{21} + (a_{12}b_{21}^*)^*$ e $p_{n_*}(d_{21}, b_{21}, e_1, \dots, e_1) = 0$. Segue da aditividade da multiplicação p_{n_*} e Condição (3.2) do Teorema 3.4, que

$$\begin{aligned} \varphi\left(p_{n_*}(d_{21}, h, e_1, \dots, e_1)\right) &= p_{n_*}\left(\varphi(d_{21}), \varphi(h), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(d_{21}), \varphi(a_{12}) + \varphi(b_{21}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(d_{21}), \varphi(a_{12}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) + p_{n_*}\left(\varphi(d_{21}), \varphi(b_{21}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(d_{21}, a_{12}, e_1, \dots, e_1)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(d_{21}, b_{21}, e_1, \dots, e_1)\right) \\ &= \varphi\left(-a_{12}d_{21} + (a_{12}d_{21}^*)^*\right) + \varphi(0) = \varphi\left(-a_{12}d_{21} + (a_{12}d_{21}^*)^*\right). \end{aligned}$$

Por sua vez, da Equação (3.10), obtemos

$$\varphi\left(p_{n_*}(d_{21}, h, e_1, \dots, e_1)\right) = \varphi\left(d_{21}h_{11} - (d_{21}h_{11})^* - h_{12}d_{21} + (h_{12}d_{21}^*)^*\right).$$

Da injetividade de φ , concluímos que $d_{21}h_{11} - (d_{21}h_{11})^* = 0$. De onde, $d_{21}h_{11} = 0$. Logo, pela arbitrariedade de $d_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, chegamos a $(e_2\mathfrak{A})h_{11} = \{0\}$ e pela Condição (3.1) do Teorema 3.4, deduzimos que $h_{11} = 0$.

Finalmente, vamos provar que $h_{22} = 0$. Seja $d_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ qualquer. Da Equação (3.11), temos

$$\begin{aligned} p_{n_*}(d_{12}, h, e_2, \dots, e_2) &= (d_{12}, h_{21}, e_2, \dots, e_2) + p_{n_*}(d_{12}, h_{22}, e_2, \dots, e_2) \\ &= -h_{21}d_{12}^* + (h_{21}d_{12}^*)^* + d_{12}h_{22} - (d_{12}h_{22})^*, \end{aligned}$$

$p_{n_*}(d_{12}, a_{12}, e_2, \dots, e_2) = 0$ e $p_{n_*}(d_{12}, b_{21}, e_2, \dots, e_2) = -b_{21}d_{12} + (b_{21}d_{12}^*)^*$. Como a multiplicação p_{n_*} é aditiva e pela Condição (3.2) do Teorema 3.4, segue que

$$\begin{aligned} \varphi\left(p_{n_*}(d_{12}, h, e_2, \dots, e_2)\right) &= p_{n_*}\left(\varphi(d_{12}), \varphi(h), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(d_{12}), \varphi(a_{12}) + \varphi(b_{21}), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(d_{12}), \varphi(a_{12}), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) + p_{n_*}\left(\varphi(d_{12}), \varphi(b_{21}), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(d_{12}, a_{12}, e_2, \dots, e_2)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(d_{12}, b_{21}, e_2, \dots, e_2)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi(0) + \varphi\left(-b_{21}d_{12} + (b_{21}d_{12}^*)^*\right) \\
&= \varphi\left(-b_{21}d_{12} + (b_{21}d_{12}^*)^*\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela Equação (3.11), obtemos

$$\varphi\left(p_{n_*}(d_{12}, h, e_2, \dots, e_2)\right) = \varphi\left(d_{12}h_{22} - (d_{12}h_{22})^* - b_{21}d_{12} + (b_{21}d_{12}^*)^*\right).$$

Da injetividade de φ , concluímos que $d_{12}h_{22} - (d_{12}h_{22})^* = 0$. De onde, $d_{12}h_{22} = 0$. Além disso, pela arbitrariedade de $d_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$, chegamos a $(e_1\mathfrak{A})h_{22} = \{0\}$ e novamente pela Condição (3.1) do Teorema 3.4, deduzimos que $h_{22} = 0$. □

No próximo lema mostraremos que φ preserva a aditividade se considerarmos um elemento de cada subespaço da decomposição de Peirce.

Lema 3.13. *Para quaisquer $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, $b_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$, $c_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ e $d_{22} \in \mathfrak{A}_{22}$, temos*

$$\varphi(a_{11} + b_{12} + c_{21} + d_{22}) = \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{12}) + \varphi(c_{21}) + \varphi(d_{22}).$$

Demonstração. Como φ é sobrejetiva, dado $\varphi(a_{11}) + \varphi(b_{12}) + \varphi(c_{21}) + \varphi(d_{22}) \in \mathfrak{A}'$ existe $h \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(h) = \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{12}) + \varphi(c_{21}) + \varphi(d_{22})$, com $h = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}$. Pelos Lemas 3.11 e 3.12, decorre que

$$\varphi(h) = \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{12}) + \varphi(c_{21}) + \varphi(d_{22}) = \varphi(a_{11} + d_{22}) + \varphi(b_{12} + c_{21}).$$

Inicialmente, mostraremos que $h_{21} = c_{21}$. Pela aditividade da multiplicação p_{n_*} , pelo Lema 3.12, pela Equação (3.8) e aditividade da multiplicação p_{n_*} , obtemos

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(p_{n_*}(e_1, h, e_1, \dots, e_1)\right) \\
&= p_{n_*}\left(\varphi(e_1), \varphi(a_{11} + d_{22}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) + p_{n_*}\left(\varphi(e_1), \varphi(b_{12}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\
&\quad + p_{n_*}\left(\varphi(e_1), \varphi(c_{21}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\
&= \varphi\left(p_{n_*}(e_1, a_{11} + d_{22}, e_1, \dots, e_1)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(e_1, b_{12}, e_1, \dots, e_1)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(e_1, c_{21}, e_1, \dots, e_1)\right) \\
&= \varphi\left(p_{n_*}(e_1, c_{21}, e_1, \dots, e_1)\right) = \varphi\left(-c_{21} + c_{21}^*\right).
\end{aligned}$$

Também, $\varphi\left(p_{n_*}(e_1, h, e_1, \dots, e_1)\right) = \varphi(-h_{21} + h_{21}^*)$. Logo, $\varphi(-h_{21} + h_{21}^*) = \varphi(-c_{21} + c_{21}^*)$. Pela injetividade de φ , chegamos a $-h_{21} + h_{21}^* = -c_{21} + c_{21}^*$. Da decomposição de Peirce, deduzimos que $h_{21} = c_{21}$. Analogamente, considerando as mesmas contas com e_2 no lugar de e_1 , constatamos que $h_{12} = b_{12}$.

Agora, vamos provar que $h_{11} = a_{11}$. Dado $t_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ qualquer, pela aditividade da multiplicação p_{n_*} , temos

$$\varphi\left(p_{n_*}(t_{21}, h, e_1, \dots, e_1)\right) = \varphi\left(p_{n_*}(t_{21}, a_{11} + d_{22}, e_1, \dots, e_1)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(t_{21}, b_{12} + c_{21}, e_1, \dots, e_1)\right).$$

Pela Equação (3.10) e aditividade da multiplicação p_{n_*} , segue que $p_{n_*}(t_{21}, b_{12} + c_{21}, e_1, \dots, e_1) = -b_{12}t_{21} + (b_{12}t_{21}^*)^*$ e $p_{n_*}(t_{21}, d_{22}, e_1, \dots, e_1) = 0$, de onde,

$$\varphi\left(p_{n_*}(t_{21}, h, e_1, \dots, e_1)\right) = \varphi\left(p_{n_*}(t_{21}, a_{11}, e_1, \dots, e_1)\right).$$

Ainda pela Equação (3.10), temos $p_{n_*}(t_{21}, h, e_1, \dots, e_1) = t_{21}h_{11} - (t_{21}h_{11})^* - b_{12}t_{21} + (b_{12}t_{21}^*)^*$ e $p_{n_*}(t_{21}, a_{11}, e_1, \dots, e_1) = t_{21}a_{11} - (t_{21}a_{11})^*$. Logo, como φ é injetora, obtemos $t_{21}(h_{11} - a_{11}) = 0$. Agora, pela arbitrariedade $t_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, concluímos que $(e_2\mathfrak{A})(h_{11} - a_{11}) = \{0\}$ e pela Condição (3.1) do Teorema 3.4, chegamos a $h_{11} = a_{11}$. De forma similar, dado $t_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ qualquer e trocando e_1 por e_2 , deduzimos que $h_{22} = d_{22}$. □

O próximo lema nos mostra que φ é aditiva quando os elementos pertencem aos espaços \mathfrak{A}_{12} ou \mathfrak{A}_{21} .

Lema 3.14. *Para $a_{jk}, b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, com $j \neq k$, $j, k \in \{1, 2\}$, temos $\varphi(a_{jk} + b_{jk}) = \varphi(a_{jk}) + \varphi(b_{jk})$.*

Demonstração. Devemos analisar dois casos, a saber $(j, k) = (1, 2)$ e $(j, k) = (2, 1)$ e nesta demonstração consideraremos apenas o caso $(j, k) = (2, 1)$, já que o outro caso é análogo.

Dados $\varphi(-a_{21}) + \varphi(-b_{21}) \in \mathfrak{A}'$ e $\varphi(a_{21}^*) + \varphi(b_{21}^*) \in \mathfrak{A}'$, como φ é sobrejetiva, existem $h, r \in \mathfrak{A}$ tais que $\varphi(h) = \varphi(-a_{21}) + \varphi(-b_{21})$ e $\varphi(r) = \varphi(a_{21}^*) + \varphi(b_{21}^*)$, com $h = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}$ e $r = r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22}$.

Nosso primeiro objetivo é mostrar que $h \in \mathfrak{A}_{21}$, e inicialmente vamos provar que $h_{12} = 0$. Pela aditividade da multiplicação p_{n_*} , Proposição 3.7 e Equação (3.9), temos

$$\begin{aligned}\varphi(-h_{12} + h_{12}^*) &= \varphi(p_{n_*}(e_2, h, e_2, \dots, e_2)) \\ &= \varphi(p_{n_*}(e_2, -a_{21}, e_2, \dots, e_2)) + \varphi(p_{n_*}(e_2, -b_{21}, e_2, \dots, e_2))\end{aligned}$$

e $\varphi(p_{n_*}(e_2, -a_{21}, e_2, \dots, e_2)) = 0$, $\varphi(p_{n_*}(e_2, -b_{21}, e_2, \dots, e_2)) = 0$. Portanto $\varphi(-h_{12} + h_{12}^*) = 0$. Pela injetividade de φ e decomposição de Peirce, segue que $h_{12} = 0$.

Vamos provar que $h_{11} = 0$. Dado $d_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ qualquer, pela Proposição 3.7 e Equação (3.10), obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(d_{21}h_{11} - (d_{21}h_{11})^*) &= \varphi(p_{n_*}(d_{21}, h, e_1, \dots, e_1)) \\ &= \varphi(p_{n_*}(d_{21}, -a_{21}, e_1, \dots, e_1)) + \varphi(p_{n_*}(d_{21}, -b_{21}, e_1, \dots, e_1)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, $d_{21}h_{11} = 0$. Pela arbitrariedade de $d_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, concluímos que $(e_2\mathfrak{A})h_{11} = \{0\}$ e pela Condição (3.1) do Teorema 3.4, chegamos a $h_{11} = 0$.

Finalmente, vamos demonstrar que $h_{22} = 0$. Da Equação (3.4) e Proposição 3.7, temos

$$\begin{aligned}\varphi(2^{n-2}(h_{22} - h_{22}^*)) &= \varphi(p_{n_*}(h, e_2, \dots, e_2)) \\ &= \varphi(p_{n_*}(-a_{21}, e_2, \dots, e_2)) + \varphi(p_{n_*}(-b_{21}, e_2, \dots, e_2)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como φ é injetora, segue que $2^{n-2}(h_{22} - h_{22}^*) = 0$, o que implica em $h_{22} = h_{22}^*$.

Pela Proposição 3.7 e Equação (3.19), deduzimos

$$\begin{aligned}\varphi(2^{n-2}i(h_{22} + h_{22}^*)) &= \varphi(p_{n_*}(ie_2, h, e_2, \dots, e_2)) \\ &= \varphi(p_{n_*}(ie_2, -a_{21}, e_2, \dots, e_2)) + \varphi(p_{n_*}(ie_2, -b_{21}, e_2, \dots, e_2)) \\ &= \varphi(0) + \varphi(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Da injetividade de φ , resulta que $2^{n-2}i(h_{22} + h_{22}^*) = 0$ e utilizando o fato de que $h_{22} = h_{22}^*$, constatamos que $h_{22} = 0$. Portanto, $h = h_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$.

Agora, nosso objetivo é mostrar que $r \in \mathfrak{A}_{12}$. Inicialmente mostraremos que $r_{21} = 0$. Pela Equação (3.8) e Proposição 3.7, segue que

$$\begin{aligned}\varphi(-r_{21} + r_{21}^*) &= \varphi\left(p_{n_*}(e_1, r, e_1, \dots, e_1)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(e_1, a_{21}^*, e_1, \dots, e_1)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(e_1, b_{21}^*, e_1, \dots, e_1)\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Pela injetividade de φ e pela decomposição de Peirce, concluímos que $r_{21} = 0$.

Neste passo, mostraremos que $r_{22} = 0$. Dado $d_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ qualquer, pela Equação (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}\varphi\left(d_{12}r_{22} - (d_{12}r_{22})^*\right) &= \varphi\left(p_{n_*}(d_{12}, r, e_2, \dots, e_2)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(d_{12}, a_{21}^*, e_2, \dots, e_2)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(d_{12}, b_{21}^*, e_2, \dots, e_2)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

e, pela injetividade de φ , concluímos que $d_{12}r_{22} = 0$. Assim, pela arbitrariedade de $d_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$, chegamos a $(e_1\mathfrak{A})r_{22} = \{0\}$ e pela Condição (3.1) do Teorema 3.4, deduzimos que $r_{22} = 0$.

Da Equação (3.3) e da Proposição 3.7, concluímos que

$$\begin{aligned}\varphi\left(2^{n-2}(r_{11} - r_{11}^*)\right) &= \varphi\left(p_{n_*}(r, e_1, \dots, e_1)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(a_{21}^*, e_1, \dots, e_1)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(b_{21}^*, e_1, \dots, e_1)\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como φ é injetora, deduzimos que $2^{n-2}(r_{11} - r_{11}^*) = 0$, o que implica em $r_{11} = r_{11}^*$. Agora, mostraremos que $r_{11} = 0$. Da Equação (3.18) resulta que

$$\begin{aligned}\varphi\left(2^{n-2}i(r_{11} + r_{11}^*)\right) &= \varphi\left(p_{n_*}(ie_1, r, e_1, \dots, e_1)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(ie_1, a_{21}^*, e_1, \dots, e_1)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(ie_1, b_{21}^*, e_1, \dots, e_1)\right) \\ &= \varphi(0) + \varphi(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como φ é injetiva e utilizando o fato de que $r_{11} = r_{11}^*$, constatamos que $2^{n-1}ir_{11} = 0$. Logo, $r_{11} = 0$. Portanto, $r = r_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$.

Agora, pela aditividade da multiplicação p_{n_*} e Equação (3.22), temos

$$\begin{aligned}\varphi\left(-a_{21} - b_{21} + a_{21}^* + b_{21}^*\right) &= \varphi\left(p_{n_*}(e_2 - a_{21}, e_1 - b_{21}, e_1, \dots, e_1)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(e_2 - a_{21}), \varphi(e_1 - b_{21}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right)\end{aligned}$$

e pelo Lema 3.13, temos

$$\varphi\left(-a_{21} - b_{21} + a_{21}^* + b_{21}^*\right) = p_{n_*}\left(\varphi(e_2) + \varphi(-a_{21}), \varphi(e_1) + \varphi(-b_{21}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right).$$

Pela aditividade da multiplicação p_{n_*} , segue que

$$\begin{aligned}\varphi\left(-a_{21} - b_{21} + a_{21}^* + b_{21}^*\right) &= p_{n_*}\left(\varphi(e_2), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) + p_{n_*}\left(\varphi(-a_{21}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\ &\quad + p_{n_*}\left(\varphi(e_2), \varphi(-b_{21}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\ &\quad + p_{n_*}\left(\varphi(-a_{21}), \varphi(-b_{21}), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right).\end{aligned}$$

Logo, pelas Equações (3.3) e (3.21), concluímos que

$$\begin{aligned}\varphi\left(-a_{21} - b_{21} + a_{21}^* + b_{21}^*\right) &= \varphi\left(p_{n_*}(-a_{21}, e_1, \dots, e_1)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(e_2, -b_{21}, e_1, \dots, e_1)\right) \\ &= \varphi(-a_{21} + a_{21}^*) + \varphi(-b_{21} + b_{21}^*) \\ &= \varphi(-a_{21}) + \varphi(a_{21}^*) + \varphi(-b_{21}) + \varphi(b_{21}^*) \\ &= \varphi(h) + \varphi(r) \\ &= \varphi(h_{21}) + \varphi(r_{12}) \\ &= \varphi(h_{21} + r_{12}).\end{aligned}$$

Agora, pela injetividade de φ , obtemos $-a_{21} - b_{21} + a_{21}^* + b_{21}^* = h_{21} + r_{12}$. Pela decomposição de Peirce, chegamos a $h_{21} = -a_{21} - b_{21}$ e $r_{12} = a_{21}^* + b_{21}^*$. De onde, $\varphi(h) = \varphi(-a_{21} - b_{21})$, $\varphi(h) = \varphi(-a_{21}) + \varphi(-b_{21})$, $\varphi(r) = \varphi(a_{21}^* + b_{21}^*)$ e $\varphi(r) = \varphi(a_{21}^*) + \varphi(b_{21}^*)$. Logo, $\varphi(-a_{21} - b_{21}) = \varphi(-a_{21}) + \varphi(-b_{21})$ e $\varphi(a_{21}^* + b_{21}^*) = \varphi(a_{21}^*) + \varphi(b_{21}^*)$. Portanto, $\varphi(a_{jk} + b_{jk}) = \varphi(a_{jk}) + \varphi(b_{jk})$, com $j \neq k, j, k \in \{1, 2\}$.

□

Lema 3.15. Para quaisquer $a_{jj}, b_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$, com $j \in \{1, 2\}$, temos $\varphi(a_{jj} + b_{jj}) = \varphi(a_{jj}) + \varphi(b_{jj})$.

Demonstração. Observamos que temos dois casos a serem analisados, mostraremos o caso $j = 2$, o caso $j = 1$ é análogo. Dados $\varphi(a_{22}), \varphi(b_{22}) \in \mathfrak{A}'$, como φ é sobrejetora, existe $h \in \mathfrak{A}$, $h = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}$, tal que $\varphi(h) = \varphi(a_{22}) + \varphi(b_{22})$. Pela Equação (3.8) e Proposição 3.7, segue que

$$\begin{aligned} \varphi(-h_{21} + h_{21}^*) &= \varphi\left(p_{n_*}(e_1, h, e_1, \dots, e_1)\right) = p_{n_*}\left(\varphi(e_1), \varphi(h), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(e_1, a_{22}, e_1, \dots, e_1)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(e_1, b_{22}, e_1, \dots, e_1)\right) = 0. \end{aligned}$$

Pela injetividade de φ , segue que $h_{21} = 0$. Da mesma forma, pela Equação (3.9) e Proposição 3.7, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi(-h_{12} + h_{12}^*) &= \varphi\left(p_{n_*}(e_2, h, e_2, \dots, e_2)\right) = p_{n_*}\left(\varphi(e_2), \varphi(h), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(e_2, a_{22}, e_2, \dots, e_2)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(e_2, b_{22}, e_2, \dots, e_2)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e pela injetividade de φ , concluímos que $h_{12} = 0$. Dado $d_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ qualquer, pela Equação (3.10) e Proposição 3.7, chegamos a

$$\begin{aligned} \varphi(d_{21}h_{11} - (d_{21}h_{11})^*) &= \varphi\left(p_{n_*}(d_{21}, h, e_1, \dots, e_1)\right) = p_{n_*}\left(\varphi(d_{21}), \varphi(h), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(d_{21}, a_{22}, e_1, \dots, e_1)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(d_{21}, b_{22}, e_1, \dots, e_1)\right) = 0. \end{aligned}$$

Novamente, pela injetividade de φ , temos $d_{21}h_{11} = 0$. Logo, $(e_2\mathfrak{A})h_{11} = \{0\}$ e pela Condição (3.1) do Teorema 3.4, deduzimos que $h_{11} = 0$.

Para concluir a demonstração deste lema, resta mostrarmos que $h_{22} = a_{22} + b_{22}$. Dado $d_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ qualquer, pela Equação (3.11), resulta que

$$\begin{aligned} \varphi(d_{12}h_{22} - (d_{12}h_{22})^*) &= \varphi\left(p_{n_*}(d_{12}, h, e_2, \dots, e_2)\right) = p_{n_*}\left(\varphi(d_{12}), \varphi(h), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(d_{12}, a_{22}, e_2, \dots, e_2)\right) + \varphi\left(p_{n_*}(d_{12}, b_{22}, e_2, \dots, e_2)\right) \\ &= \varphi\left(d_{12}a_{22} - (d_{12}a_{22})^*\right) + \varphi\left(d_{12}b_{22} - (d_{12}b_{22})^*\right). \end{aligned}$$

Como $d_{12}a_{22}, d_{12}b_{22} \in \mathfrak{A}_{12}$ e $(d_{12}a_{22})^*, (d_{12}b_{22})^* \in \mathfrak{A}_{21}$, pelos Lemas 3.12 e 3.14, e pela definição de involução, constatamos que

$$\begin{aligned} \varphi\left(d_{12}h_{22} - (d_{12}h_{22})^*\right) &= \varphi(d_{12}a_{22}) + \varphi\left(- (d_{12}a_{22})^*\right) + \varphi(d_{12}b_{22}) + \varphi\left(- (d_{12}b_{22})^*\right) \\ &= \varphi(d_{12}a_{22} + d_{12}b_{22}) + \varphi\left(- (d_{12}a_{22})^* - (d_{12}b_{22})^*\right) \\ &= \varphi(d_{12}a_{22} + d_{12}b_{22}) + \varphi\left(- \left(d_{12}(a_{22} + b_{22})\right)^*\right) \\ &= \varphi\left(d_{12}(a_{22} + b_{22}) - \left(d_{12}(a_{22} + b_{22})\right)^*\right). \end{aligned}$$

Pela injetividade de φ , temos $d_{12}h_{22} - (d_{12}h_{22})^* = d_{12}(a_{22} + b_{22}) - \left(d_{12}(a_{22} + b_{22})\right)^*$, e da decomposição de Peirce segue que $d_{12}h_{22} = d_{12}(a_{22} + b_{22})$ e $(d_{12}h_{22})^* = \left(d_{12}(a_{22} + b_{22})\right)^*$. Logo, pela arbitrariedade de $d_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$, obtemos $(e_1\mathfrak{A})(h_{22} - (a_{22} + b_{22})) = \{0\}$ e pela Condição (3.1) do Teorema 3.4, concluímos que $h_{22} - (a_{22} + b_{22}) = 0$, de onde, $h_{22} = a_{22} + b_{22}$. Portanto, $\varphi(a_{22} + b_{22}) = \varphi(a_{22}) + \varphi(b_{22})$. □

Agora temos condições para demonstrar o primeiro teorema principal desta seção. Lembraremos o enunciado do Teorema 3.4: Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' duas *-álgebras alternativas com identidades $1_{\mathfrak{A}}$ e $1_{\mathfrak{A}'}$, respectivamente. Consideramos e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} . Suponha que \mathfrak{A} satisfaz a seguinte condição: dado $x \in \mathfrak{A}$,

$$(e_j\mathfrak{A})x = \{0\} \text{ para todo } j \in \{1, 2\} \text{ implica em } x = 0.$$

e $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ é uma função bijetiva unital tal que

$$\varphi\left(p_{n_*}(a, b, \xi, \dots, \xi)\right) = p_{n_*}\left(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi)\right),$$

para todos $a, b \in \mathfrak{A}$ e $\xi \in \{e_1, e_2, 1_{\mathfrak{A}}\}$, então φ é *-aditiva.

Demonstração do Teorema 3.1. Usando os Lemas 3.13–3.15, temos que φ é aditiva. Com efeito, se $a, b \in \mathfrak{A}$, com $a = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$ e $b = b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi(a + b) &= \varphi(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} + b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}) \\
&= \varphi(a_{11} + b_{11}) + \varphi(a_{12} + b_{12}) + \varphi(a_{21} + b_{21}) + \varphi(a_{22} + b_{22}) \\
&= \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{11}) + \varphi(a_{12}) + \varphi(b_{12}) + \varphi(a_{21}) + \varphi(b_{21}) + \varphi(a_{22}) + \varphi(b_{22}) \\
&= \varphi(a) + \varphi(b).
\end{aligned}$$

Mais ainda, como φ é aditiva e unital, para todo $a \in \mathfrak{A}$ e pela Equação (3.6), segue que

$$\begin{aligned}
2^{n-2}(\varphi(a) - \varphi(a)^*) &= p_{n_*}(\varphi(a), 1_{\mathfrak{A}'}, \dots, 1_{\mathfrak{A}'}) = p_{n_*}(\varphi(a), \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}})) \\
&= \varphi(p_{n_*}(a, 1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}})) = \varphi(2^{n-2}(a - a^*)) \\
&= 2^{n-2}\varphi(a - a^*) \\
&= 2^{n-2}(\varphi(a) - \varphi(a^*)).
\end{aligned}$$

Logo, $\varphi(a)^* = \varphi(a^*)$. Portanto, φ é *-aditiva. □

Agora vamos enunciar o segundo resultado principal desta seção. Neste teorema estamos considerando válidas as mesmas hipóteses do Teorema 3.4 e acrescentamos uma condição sobre o contradomínio.

Teorema 3.16. *Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' *-álgebras alternativas com identidades $1_{\mathfrak{A}}$ e $1_{\mathfrak{A}'}$, respectivamente, e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} . Seja $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ uma bijeção unital multiplicativa escalar sobre \mathbb{C} . Suponha que \mathfrak{A} satisfaz as condições do Teorema 3.4, a saber*

$$(e_j \mathfrak{A})x = \{0\}, \text{ para todo } j \in \{1, 2\}, \text{ implica em } x = 0,$$

$$\varphi(p_{n_*}(a, b, \xi, \dots, \xi)) = p_{n_*}(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi)),$$

para todo $a, b \in \mathfrak{A}$ e $\xi \in \{e_1, e_2, 1_{\mathfrak{A}}\}$.

Além disso, se \mathfrak{A}' satisfaz a condição

$$(\varphi(e_j) \mathfrak{A}')y = \{0\}, \text{ para todo } j \in \{1, 2\}, \text{ implica em } y = 0, \quad (3.15)$$

então φ é um *-isomorfismo.

Notamos que uma parte das condições do Teorema 3.16 é a mesma do Teorema 3.4 e por isso temos que φ é *-aditiva. Assim, nos resta mostrar que φ preserva a multiplicação, ou seja, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, para todos $a, b \in \mathfrak{A}$, e para demonstrar este fato são necessários a proposição e os lemas a seguir.

Proposição 3.17. *Seja i a identidade imaginária em \mathbb{C} , temos*

$$p_{n_*}(b_{21}, ia_{12}, e_2, \dots, e_2) = 2^{n-3} i (b_{21}a_{12} + (b_{21}a_{12})^*). \quad (3.16)$$

$$p_{n_*}(b_{12}, ia_{21}, e_1, \dots, e_1) = 2^{n-3} i (b_{12}a_{21} + (b_{12}a_{21})^*). \quad (3.17)$$

$$p_{n_*}(ie_1, a_{jk}, e_1, \dots, e_1) = \begin{cases} 2^{n-2} i (a_{11} + a_{11}^*), & (j, k) = (1, 1), \\ i (a_{21} + a_{21}^*), & (j, k) = (2, 1), \\ 0, & (j, k) = (1, 2) \text{ ou } (j, k) = (2, 2). \end{cases} \quad (3.18)$$

$$p_{n_*}(ie_2, a_{jk}, e_2, \dots, e_2) = \begin{cases} 2^{n-2} i (h_{22} + h_{22}^*), & (j, k) = (2, 2) \\ i (a_{12} + a_{12}^*), & (j, k) = (1, 2), \\ 0, & (j, k) = (1, 1) \text{ ou } (j, k) = (2, 1). \end{cases} \quad (3.19)$$

E para todo inteiro $n \geq 2$, segue que

$$p_{n_*}(e_j, e_k, e_j, \dots, e_j) = 0, \text{ se } j \neq k, \text{ com } j, k \in \{1, 2\}, \quad (3.20)$$

e para todo inteiro $n \geq 3$, obtemos

$$p_{n_*}(e_2, a_{21}, e_1, \dots, e_1) = a_{21} - a_{21}^*, \quad (3.21)$$

$$p_{n_*}(e_2 - a_{21}, e_1 - b_{21}, e_1, \dots, e_1) = -a_{21} - b_{21} + a_{21}^* + b_{21}^*. \quad (3.22)$$

Demonstração. Sejam $a_{jk}, b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$ e i a identidade imaginária em \mathbb{C} . Ao longo desta demonstração utilizaremos indução sobre n . Inicialmente provaremos a Equação (3.16). A demonstração da Equação (3.17) é feita de forma similar e por isso não iremos apresentá-la. Para $n = 2$, temos

$$p_{2_*}(b_{21}, ia_{12}) = b_{21}(ia_{12}) - (ia_{12})b_{21}^* = ib_{21}a_{12} - ia_{12}b_{21}^*.$$

Vamos utilizar indução sobre n . Para $n = 3$, pelo Lema 3.2 e aditividade da multiplicação p_{n*} , segue que

$$\begin{aligned} p_{3*}(b_{21}, ia_{12}, e_2) &= p_{2*}(ib_{21}a_{12}, e_2) - p_{2*}(ia_{12}b_{21}^*, e_2) \\ &= i(b_{21}a_{12})e_2 - e_2(ib_{21}a_{12})^* - (ia_{12}b_{21}^*)e_2 + e_2\left(ia_{12}b_{21}^*\right)^* \\ &= ib_{21}a_{12} + i(b_{21}a_{12})^*. \end{aligned}$$

Suponhamos que seja válido para $n - 1$, isto é,

$$p_{(n-1)*}(b_{21}, ia_{12}, e_2, \dots, e_2) = 2^{n-4}\left(ib_{21}a_{12} + i(b_{21}a_{12})^*\right).$$

Pelo Lema 3.2 e como a multiplicação p_{n*} é aditiva, concluímos que

$$\begin{aligned} &p_{n*}(b_{21}, ia_{12}, e_2, \dots, e_2) \\ &= p_{2*}\left(2^{n-4}ib_{21}a_{12}, e_2\right) + p_{2*}\left(2^{n-4}i(b_{21}a_{12})^*, e_2\right) \\ &= 2^{n-4}(ib_{21}a_{12})e_2 - 2^{n-4}e_2(ib_{21}a_{12})^* + 2^{n-4}\left(i(b_{21}a_{12})^*e_2\right) - 2^{n-4}e_2\left(i(b_{21}a_{12})^*\right)^* \\ &= 2^{n-4}\left(i\delta_{22}b_{21}a_{12} + i\delta_{22}(b_{21}a_{12})^* + i\delta_{22}(b_{21}a_{12})^* + i\delta_{22}b_{21}a_{12}\right) \\ &= 2^{n-4}\left(2ib_{21}a_{12} + 2i(b_{21}a_{12})^*\right) \\ &= 2^{n-3}i\left(b_{21}a_{12} + (b_{21}a_{12})^*\right). \end{aligned}$$

Logo, pela hipótese de indução, temos $p_{n*}(b_{21}, ia_{12}, e_2, \dots, e_2) = 2^{n-3}i\left(b_{21}a_{12} + (b_{21}a_{12})^*\right)$, para todo $n \geq 3$.

Neste passo vamos demonstrar a Equação (3.18). A demonstração da Equação (3.19) é feita da mesma forma considerando as modificações necessárias. Para $n = 2$, constatamos que $p_{2*}(ie_1, a_{jk}) = ie_1a_{jk} - a_{jk}(ie_1)^* = i\delta_{1j}a_{jk} + i\delta_{k1}a_{jk}$, de onde

$$p_{2*}(ie_1, a_{11}) = i\delta_{11}a_{11} + i\delta_{11}a_{11} = 2ia_{11}, \quad p_{2*}(ie_1, a_{12}) = i\delta_{11}a_{12} + i\delta_{21}a_{12} = ia_{12}$$

$$p_{2*}(ie_1, a_{21}) = i\delta_{12}a_{21} + i\delta_{11}a_{21} = ia_{21}, \quad p_{2*}(ie_1, a_{22}) = i\delta_{12}a_{22} + i\delta_{21}a_{22} = 0.$$

Vamos calcular $p_{3*}(ie_1, a_{jk}, e_1)$ apenas para os casos em que $p_{2*}(ie_1, a_{jk}) \neq 0$. Pelo Lema 3.2, resulta que

$$\begin{aligned} p_{3*}(ie_1, a_{11}, e_1) &= p_{2*}\left(p_{2*}(ie_1, a_{11}), e_1\right) = p_{2*}(2ia_{11}, e_1) = 2ia_{11}e_1 - 2e_1(ia_{11})^* \\ &= 2i\delta_{11}a_{11} + 2i\delta_{11}a_{11}^* = 4i(a_{11} + a_{11}^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3_*}(ie_1, a_{12}, e_1) &= p_{2_*}\left(p_{2_*}(ie_1, a_{12}), e_1\right) = p_{2_*}(ia_{12}, e_1) = ia_{12}e_1 - e_1(ia_{12})^* \\
&= i\delta_{21}a_{12} - i\delta_{12}a_{12}^* = 0, p_{3_*}(ie_1, a_{21}, e_1) = p_{2_*}\left(p_{2_*}(ie_1, a_{21}), e_1\right) = p_{2_*}(ia_{21}, e_1) \\
&= i\delta_{11}a_{21} + i\delta_{11}a_{21}^* = i(a_{21} + a_{21}^*).
\end{aligned}$$

Suponhamos que seja válido para $n - 1$, isto é,

$$p_{(n-1)_*}(ie_1, a_{11}, e_1, \dots, e_1) = 2^{n-3}i(a_{11} + a_{11}^*) \quad \text{e} \quad p_{(n-1)_*}(ie_1, a_{21}, e_1, \dots, e_1) = i(a_{21} + a_{21}^*).$$

Para $(j, k) = (1, 1)$, pelo Lema 3.2 e aditividade da multiplicação p_{n_*} , constatamos que

$$\begin{aligned}
p_{n_*}(ie_1, a_{11}, e_1, \dots, e_1) &= p_{2_*}\left(p_{(n-1)_*}(ie_1, a_{11}, e_1, \dots, e_1), e_1\right) \\
&= p_{2_*}(2^{n-3}ia_{11}, e_1) + p_{2_*}(2^{n-3}ia_{11}^*, e_1) \\
&= 2^{n-3}ia_{11}e_1 - 2^{n-3}e_1(ia_{11})^* + 2^{n-3}ia_{11}^*e_1 - 2^{n-3}e_1(ia_{11}^*)^* \\
&= 2^{n-3}i(a_{11} + a_{11}^* + a_{11}^* + a_{11}) = 2^{n-2}(a_{11} + a_{11}^*).
\end{aligned}$$

De forma similar, pelo Lema 3.2 e aditividade da multiplicação p_{n_*} , decorre que

$$\begin{aligned}
p_{n_*}(ie_1, a_{21}, e_1, \dots, e_1) &= p_{2_*}\left(p_{2_*}(ie_1, a_{21}), e_1\right) = p_{2_*}(ia_{21}, e_1) + p_{2_*}(ia_{21}^*, e_1) \\
&= ia_{21}e_1 - e_1(ia_{21}^*) + ia_{21}^*e_1 - e_1(ia_{21})^* \\
&= ia_{21} + ia_{21}^* = i(a_{21} + a_{21}^*).
\end{aligned}$$

Portanto, pela hipótese de indução, para todo $n \geq 2$, temos

$$p_{n_*}(ie_1, a_{jk}, e_1, \dots, e_1) = \begin{cases} 2^{n-2}i(a_{11} + a_{11}^*), & (j, k) = (1, 1), \\ i(a_{21} + a_{21}^*), & (j, k) = (2, 1), \\ 0, & (j, k) = (1, 2) \text{ ou } (j, k) = (2, 2). \end{cases}$$

Agora mostraremos a Equação (3.20). Suponhamos, sem perda de generalidade que $j = 1$ e $k = 2$. Para $n = 2$, temos, $p_{2_*}(e_1, e_2) = e_1e_2 - e_2e_1^*$. Assim,

$$p_{2_*}(e_1, e_2) = e_1e_2 - e_2e_1 = e_1(1 - e_1) - (1 - e_1)e_1 = e_1 - e_1^2 - e_1 + e_1^2 = 0.$$

Suponhamos que seja válido para $n - 1$, ou seja, $p_{(n-1)_*}(e_1, e_2, e_1, \dots, e_1) = 0$. Logo,

$$p_{n_*}(e_1, e_2, e_1, \dots, e_1) = p_{2_*}(p_{(n-1)_*}(e_1, e_2, e_1, \dots, e_1), e_1) = p_{2_*}(0, e_1) = 0.$$

Portanto, pela hipótese de indução, temos $p_{n*}(e_1, e_2, e_1, \dots, e_1) = 0$, para todo $n \geq 2$.

Na Proposição 3.10, consideramos apenas a multiplicação p_{n*} quando os idempotentes e_1 e e_2 estão nas posições à direita, uma vez que $p_{n*}(e_s, \dots, e_s, b_{tl}, a_{jk}) = 0$, para todos $j, k, l, t, s \in \{1, 2\}$. Basta notarmos que $p_{2*}(e_s, e_s) = e_s e_s - e_s e_s^* = e_s^2 - e_s^2 = e_s - e_s = 0$. De onde, indutivamente, segue que $p_{(n-2)*}(e_s, \dots, e_s) = 0$ e daí, $p_{(n-1)*}(e_s, \dots, e_s, b_{tl}) = 0$. Logo, $p_{2*}(p_{(n-1)*}(e_s, \dots, e_s, b_{tl}), a_{jk}) = 0$.

Neste passo mostraremos a Equação (3.21). Para $n = 2$,

$$p_{2*}(e_2, a_{21}) = e_2 a_{21} - a_{21} e_2 = \delta_{22} a_{21} - \delta_{12} a_{21} = a_{21}.$$

Para $n = 3$ e pelo Lema 3.2, segue que

$$p_{3*}(e_2, a_{21}, e_1) = p_{2*}(p_{2*}(e_2, a_{21}), e_1) = p_{2*}(a_{21}, e_1) = a_{21} e_1 - e_1 a_{21}^* = \delta_{11} a_{21} - \delta_{11} a_{21}^* = a_{21} - a_{21}^*.$$

Suponhamos que seja válido para $n - 1$, ou seja, $p_{(n-1)*}(e_2, a_{21}, e_1, \dots, e_1) = a_{21} - a_{21}^*$. Assim, pela aditividade da multiplicação p_{n*} , concluimos que

$$\begin{aligned} p_{n*}(e_2, a_{21}, e_1, \dots, e_1) &= p_{2*}(p_{(n-1)*}(e_2, a_{21}, e_1, \dots, e_1), e_1) \\ &= p_{2*}(a_{21}, e_1) - p_{2*}(a_{21}^*, e_1) \\ &= a_{21} e_1 - e_1 a_{21}^* - a_{21}^* e_1 + e_1 a_{21} \\ &= \delta_{11} a_{21} - \delta_{11} a_{21} - \delta_{21} a_{21}^* + \delta_{12} a_{21} \\ &= a_{21} - a_{21}^*. \end{aligned}$$

Logo, pela hipótese de indução, temos $p_{n*}(e_2, a_{21}, e_1, \dots, e_1) = a_{21} - a_{21}^*$, para todo $n \geq 3$.

Resta provarmos a Equação (3.22). Pela aditividade da multiplicação p_{n*} , pela Proposição 3.9 e das Equações (3.10), (3.20) e (3.21), temos

$$\begin{aligned} &p_{n*}(e_2 - a_{21}, e_1 - b_{21}, e_1, \dots, e_1) \\ &= p_{n*}(e_2, e_1, e_1, \dots, e_1) - p_{n*}(e_2, b_{21}, e_1, \dots, e_1) - p_{n*}(a_{21}, e_1, e_1, \dots, e_1) + p_{n*}(a_{21}, b_{21}, e_1, \dots, e_1) \\ &= -p_{n*}(e_2, b_{21}, e_1, \dots, e_1) - p_{n*}(a_{21}, e_1, e_1, \dots, e_1) \\ &= -a_{21} - b_{21} + a_{21}^* + b_{21}^*. \end{aligned}$$

□

Lema 3.18. *Se $e_j \in \mathfrak{A}$ é um idempotente simétrico, então $f_j = \varphi(e_j)$ é um idempotente simétrico em \mathfrak{A}' .*

Demonstração. Seja φ uma função multiplicativa escalar sobre \mathbb{C} . Assim,

$$\begin{aligned} 2^{n-1}if_j &= 2^{n-1}i\varphi(e_j) = \varphi(2^{n-1}ie_j) = \varphi\left(p_{n_*}(ie_j, e_j, 1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}})\right) \\ &= p_{n_*}\left(i\varphi(e_j), \varphi(e_j), \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}})\right). \end{aligned}$$

Como φ é unital, temos

$$2^{n-1}if_j = p_{n_*}\left(i\varphi(e_j), \varphi(e_j), 1_{\mathfrak{A}'}, \dots, 1_{\mathfrak{A}'}\right) = 2^{n-1}i\varphi(e_j)^2 = 2^{n-1}if_j^2.$$

Logo, q_j é um idempotente. Agora mostraremos que q_j é simétrico. Como e_j é um idempotente simétrico, temos $p_{n_*}(e_j, 1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}) = 0$. Logo,

$$0 = \varphi(0) = \varphi\left(p_{n_*}(e_j, 1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}})\right) = p_{n_*}(q_j, 1_{\mathfrak{A}'}, \dots, 1_{\mathfrak{A}'}) = 2^{n-1}(f_j - f_j^*),$$

de onde $q_j^* = q_j$. Portanto, q_j é simétrico. □

Conforme será demonstrado no próximo lema, φ configura-se como uma função Cauchy multiplicativa quando um dos elementos considerados é idempotente.

Lema 3.19. *Se $a \in \mathfrak{A}$, então $\varphi(e_j a) = \varphi(e_j)\varphi(a)$ e $\varphi(ae_j) = \varphi(a)\varphi(e_j)$, $j \in \{1, 2\}$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\varphi(ae_j) = \varphi(a)\varphi(e_j)$. A outra igualdade é provada de forma análoga. Pela Condição (3.2) do Teorema 3.4, temos

$$\begin{aligned} \varphi\left(2^{n-2}(ae_j - e_j a^*)\right) &= \varphi\left(p_{n_*}(a, e_j, 1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}})\right) = p_{n_*}\left(\varphi(a), \varphi(e_j), \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}})\right) \\ &= 2^{n-2}\left(\varphi(a)\varphi(e_j) - \varphi(e_j)\varphi(a)^*\right), \end{aligned} \tag{3.23}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi\left(2^{n-2}i(ae_j + e_j a^*)\right) &= \varphi\left(p_{n_*}(ia, e_j, 1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}})\right) = p_{n_*}\left(\varphi(ia), \varphi(e_j), \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}})\right) \\ &= 2^{n-2}i\left(\varphi(a)\varphi(e_j) + \varphi(e_j)\varphi(a)^*\right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Como φ é *-aditiva, multiplicando a Equação (3.23) por i e somando com a Equação (3.24), segue que

$$\varphi\left(2^{n-2}i(ae_j + e_ja^*)\right) + \varphi\left(2^{n-2}i(ae_j - e_ja^*)\right) = 2^{n-1}i\varphi(a)\varphi(e_j)$$

e, pela aditividade de φ , concluímos que

$$\varphi(2^{n-2}iae_j + 2^{n-2}ie_ja^* + 2^{n-2}iae_j - 2^{n-2}ie_ja^*) = \varphi(2^{n-1}iae_j) = 2^{n-1}i\varphi(ae_j).$$

Logo, $\varphi(a)\varphi(e_j) = \varphi(ae_j)$. □

Consideremos também a decomposição de Peirce de \mathfrak{A}' com respeito ao idempotente $f_j = \varphi(e_j)$, com $j \in \{1, 2\}$, dada por $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'_{11} \oplus \mathfrak{A}'_{12} \oplus \mathfrak{A}'_{21} \oplus \mathfrak{A}'_{22}$, com $\mathfrak{A}'_{kj} := f_k \mathfrak{A}' f_j$, para $k, j \in \{1, 2\}$.

Lema 3.20. $\varphi(\mathfrak{A}_{jk}) \subset \mathfrak{A}'_{jk}$, para todos $j, k \in \{1, 2\}$.

Demonstração. Seja $a \in \mathfrak{A}_{jk}$, para alguns $j, k \in \{1, 2\}$. Pela definição dos espaços da decomposição de Peirce, temos $a = e_j a e_k$. Aplicando o Lema 3.19, temos

$$\varphi(a) = \varphi(e_j a e_k) = \varphi(e_j)\varphi(ae_k) = \varphi(e_j)\varphi(a)\varphi(e_k) = q_j \varphi(a) q_k.$$

Novamente pela definição dos subespaços da decomposição de Peirce, concluímos que $\varphi(a) \in \mathfrak{A}'_{jk}$. □

Os próximos lemas estabelecem a multiplicatividade da aplicação φ . Vale observar que no item (iv), há uma diferença em relação ao caso associativo, uma vez que os produtos entre certos espaços da decomposição de Peirce \mathfrak{A}_{jk} não são, em geral, nulos, o que exige uma análise específica.

Lema 3.21. *Sejam $j, k \in \{1, 2\}$ com $j \neq k$.*

(i) *Dados $a_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$ e $b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, segue que $\varphi(a_{jj}b_{jk}) = \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jk})$.*

(ii) *Dados $a_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$ e $b_{kj} \in \mathfrak{A}_{kj}$, segue que $\varphi(a_{jk}b_{kj}) = \varphi(a_{jk})\varphi(b_{kj})$.*

(iii) Dados $a_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$ e $b_{kk} \in \mathfrak{A}_{kk}$, segue que $\varphi(a_{jk}b_{kk}) = \varphi(a_{jk})\varphi(b_{kk})$.

(iv) Dados $a_{jk}, b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, segue que $\varphi(a_{jk}b_{jk}) = \varphi(a_{jk})\varphi(b_{jk})$.

Demonstração. Vamos provar os itens (i), (ii) e (iv), uma vez que o item (iii) é demonstrado de forma análoga. Inicialmente vamos mostrar o item (i). Sejam $a_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$ e $b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$. Como φ é *-aditiva, pelas Equações (3.12) e (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} \varphi(a_{jj}b_{jk}) - \left(\varphi(a_{jj}b_{jk})\right)^* &= \varphi\left(a_{jj}b_{jk} - (a_{jj}b_{jk})^*\right) = \varphi\left(p_{n_*}(a_{jj}, b_{jk}, e_k, \dots, e_k)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(a_{jj}), \varphi(b_{jk}), \varphi(e_k), \dots, \varphi(e_k)\right) \\ &= p_{n_*}\left(\varphi(a_{jj}), \varphi(b_{jk}), q_k, \dots, q_k\right) \\ &= \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jk}) - \left(\varphi(a_{jj})\varphi(b_{jk})\right)^*. \end{aligned}$$

Assim, $\varphi(a_{jj}b_{jk}) - \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jk}) = \left(\varphi(a_{jj}b_{jk})\right)^* - \left(\varphi(a_{jj})\varphi(b_{jk})\right)^*$. Logo, pelo Lema 3.20 e pela decomposição de Peirce, concluímos que $\varphi(a_{jj}b_{jk}) = \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jk})$.

Neste passo vamos mostrar o item (ii) para $(j, k) = (2, 1)$, o caso $(j, k) = (1, 2)$ pode ser demonstrado de forma similar. Sejam $a_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ e $b_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ quaisquer. Pela Equação (3.16), chegamos a $p_{n_*}(a_{21}, ib_{12}, e_2, \dots, e_2) = 2^{n-3}i\left(a_{21}b_{12} + (a_{21}b_{12})^*\right)$. Como φ é aditiva e multiplicativa unital escalar sobre \mathbb{C} e pelo Lema 3.20, deduzimos que

$$\varphi\left(p_{n_*}(a_{21}, ib_{12}, e_2, \dots, e_2)\right) = 2^{n-3}i\left(\varphi(a_{21}b_{12}) + \varphi((a_{21}b_{12})^*)\right)$$

e

$$\begin{aligned} \varphi\left(p_{n_*}(a_{21}, ib_{12}, e_2, \dots, e_2)\right) &= p_{n_*}\left(\varphi(a_{21}), i\varphi(b_{12}), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2)\right) \\ &= 2^{n-3}i\left(\varphi(a_{21})\varphi(b_{12}) + (\varphi(a_{21})\varphi(b_{12}))^*\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi(a_{21})\varphi(b_{12}) + \left(\varphi(a_{21})\varphi(b_{12})\right)^* = \varphi(a_{21}b_{12}) + \varphi(a_{21}b_{12})^*. \quad (3.25)$$

Pela arbitrariedade de $a_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, podemos trocar a_{21} por $ia_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ na Equação (3.25). Assim, $\varphi(ia_{21}b_{12}) + \varphi(ia_{21}b_{12})^* = i\left(\varphi(a_{21}b_{12}) - \varphi(a_{21}b_{12})^*\right)$. Por sua vez,

$$\varphi(ia_{21})\varphi(b_{12}) + \left(\varphi(ia_{21})\varphi(b_{12})\right)^* = i\left(\varphi(a_{21})\varphi(b_{12}) - (\varphi(a_{21})\varphi(b_{12}))^*\right).$$

Consequentemente,

$$\varphi(a_{21})\varphi(b_{12}) - \left(\varphi(a_{21})\varphi(b_{12})\right)^* = \varphi(a_{21}b_{12}) - \varphi(a_{21}b_{12})^*. \quad (3.26)$$

Somando as Equações (3.25) e (3.26), resulta que $2\varphi(a_{21})\varphi(b_{12}) = 2\varphi(a_{21}b_{12})$. Portanto, $\varphi(a_{21}b_{12}) = \varphi(a_{21})\varphi(b_{12})$.

Finalmente iremos demonstrar o item (iv) para $(j, k) = (1, 2)$; o caso $(j, k) = (2, 1)$ pode ser demonstrado de forma análoga. Sejam $a_{12}, b_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ quaisquer. Pela Equação (3.14) e como φ é *-aditiva, constatamos que

$$\begin{aligned} & \varphi(a_{12}b_{12}) - \varphi(a_{12}b_{12})^* - 2^{n-3}\varphi(b_{12}a_{12}^*)^* + 2^{n-3}\varphi(b_{12}a_{12}^*) \\ &= \varphi\left(a_{12}b_{12} - (a_{12}b_{12})^* - 2^{n-3}(b_{12}a_{12}^*)^* + 2^{n-3}(b_{12}a_{12}^*)\right) \\ &= \varphi\left(p_{n_*}(a_{12}, b_{12}, e_1, \dots, e_1)\right) = p_{n_*}\left(\varphi(a_{12}), \varphi(b_{12}), q_1, \dots, q_1\right) \\ &= \varphi(a_{12})\varphi(b_{12}) - \left(\varphi(a_{12})\varphi(b_{12})\right)^* - 2^{n-3}\varphi(b_{12})\varphi(a_{12})^* + 2^{n-3}\left(\varphi(b_{12})\varphi(a_{12}^*)\right)^*. \end{aligned}$$

Da decomposição de Peirce, segue que $\varphi(a_{12}b_{12}) = \varphi(a_{12})\varphi(b_{12})$.

□

Lema 3.22. Sejam $a_{jj}, b_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$, com $j \in \{1, 2\}$, temos $\varphi(a_{jj}b_{jj}) = \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jj})$.

Demonstração. Sejam $a_{jj}, b_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$ e $c_{kj} \in \mathfrak{A}_{kj}$, com $j \neq k, j, k \in \{1, 2\}$. Relembramos que em toda álgebra alternativa é flexível, ou seja, $(c_{kj}, a_{jj}, b_{jj}) + (b_{jj}, a_{jj}, c_{kj}) = 0$. Como $(b_{jj}, a_{jj}, c_{kj}) = 0$, constatamos que $(c_{kj}, a_{jj}, b_{jj}) = 0$.

Pelo item (iii) do Lema 3.21 decorre que $\varphi(c_{kj})\varphi(a_{jj}b_{jj}) = \varphi(c_{kj}a_{jj}b_{jj})$ e

$$\varphi(c_{kj})\varphi(a_{jj}b_{jj}) = \varphi(c_{kj}a_{jj}b_{jj}) = \varphi(c_{kj}a_{jj})\varphi(b_{jj}) = \varphi(c_{kj})\varphi(a_{jj})\varphi(b_{jj}).$$

Assim, $\varphi(c_{kj})\left(\varphi(a_{jj}b_{jj}) - \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jj})\right) = 0$. Como $\varphi(c_{kj}) \in \mathfrak{A}'_{kj}$ e $\varphi(a_{jj}b_{jj}), \varphi(a_{jj}), \varphi(b_{jj}) \in \mathfrak{A}'_{jj}$, temos

$$\left(\varphi(e_k)\mathfrak{A}'\right)\left(\varphi(a_{jj}b_{jj}) - \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jj})\right) = \{0\}.$$

Pela Condição (3.15) do Teorema 3.16, segue que $\varphi(a_{jj}b_{jj}) = \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jj})$.

□

Agora estamos em condições de demonstrar o Teorema 3.16.

Demonstração do Teorema 3.2. Observamos que, pelo Teorema 3.4, φ é *-aditiva, e pelos Lemas 3.21 e 3.22, temos $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Portanto, como φ é uma bijeção *-aditiva e preserva a multiplicação, resulta que φ é um *-isomorfismo. □

Proposição 3.23. *Notamos que se φ é um *-isomorfismo então φ preserva a multiplicação p_{n*} para todo inteiro $n \geq 2$, ou seja,*

$$\varphi\left(p_{n*}(a, b, \xi, \dots, \xi)\right) = p_{n*}\left(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi)\right),$$

para todos $a, b \in \mathfrak{A}$, $\xi \in \{e_1, e_2, 1_{\mathfrak{A}}\}$.

Demonstração. Seja $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ um *-isomorfismo. Para $n = 2$, segue que $\varphi(p_{2*}(a, b)) = \varphi(ab - ba^*) = \varphi(a)\varphi(b) - \varphi(b)\varphi(a)^* = p_{2*}(\varphi(a), \varphi(b))$. Para esta demonstração utilizaremos indução sobre n . Para $n = 3$, como φ é um *-isomorfismo, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi\left(p_{3*}(a, b, \xi)\right) &= \varphi\left(p_{2*}(ab - ba^*, \xi)\right) = \varphi\left((ab - ba^*)\xi - \xi(ab - ba^*)^*\right) \\ &= \varphi(ab - ba^*)\varphi(\xi) - \varphi(\xi)\left(\varphi(ab - ba^*)\right)^* \\ &= \left(\varphi(a)\varphi(b) - \varphi(b)\varphi(a)^*\right)\varphi(\xi) - \varphi(\xi)\left(\varphi(a)\varphi(b) - \varphi(b)\varphi(a)^*\right)^* \\ &= p_{2*}\left(\varphi(a)\varphi(b) - \varphi(b)\varphi(a)^*, \varphi(\xi)\right) = p_{3*}\left(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(\xi)\right). \end{aligned}$$

Suponhamos que seja verdadeiro para $n - 1$, ou seja,

$$\varphi\left(p_{(n-1)*}(a, b, \xi, \dots, \xi)\right) = p_{(n-1)*}\left(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi)\right).$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \varphi\left(p_{n*}(a, b, \xi, \dots, \xi)\right) &= \varphi\left(p_{2*}(p_{(n-1)*}(a, b, \xi, \dots, \xi), \xi)\right) \\ &= p_{2*}\left(\varphi\left(p_{(n-1)*}(a, b, \xi, \dots, \xi)\right), \varphi(\xi)\right) \\ &= p_{2*}\left(p_{(n-1)*}\left(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi)\right), \varphi(\xi)\right) \end{aligned}$$

$$= p_{n_*} \left(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi) \right).$$

Logo, pela hipótese de indução, concluímos que

$$\varphi \left(p_{n_*}(a, b, \xi, \dots, \xi) \right) = p_{n_*} \left(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi) \right),$$

para todo inteiro $n \geq 2$.

□

Este teorema tem algumas consequências imediatas que listaremos a seguir.

Corolário 3.24. *Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' *-álgebras alternativas com identidades $1_{\mathfrak{A}}$ e $1_{\mathfrak{A}'}$, respectivamente, e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} . Seja $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ uma bijeção multiplicativa unital escalar sobre \mathbb{C} . Supondo que \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' satisfazem as seguintes condições,*

$$(e_j \mathfrak{A})x = \{0\}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad \text{implica em} \quad x = 0$$

e

$$(\varphi(e_j) \mathfrak{A}')y = \{0\}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad \text{implica em} \quad y = 0.$$

Então, φ é uma n -função *-Lie multiplicativa se, e só se, φ é um *-isomorfismo.

Demonstração. Com efeito, se $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ é uma n -função *-Lie multiplicativa, ou seja, satisfaz

$$\varphi \left(p_{n_*}(a_1, \dots, a_n) \right) = p_{n_*} \left(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n) \right),$$

para todos $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$ e $n \geq 2$, pelo Teorema 3.16, temos que φ é um *-isomorfismo.

Observamos que a implicação contrária é imediata. De fato, se φ é um *-isomorfismo, então φ é uma bijeção unital *-aditiva que preserva a multiplicação e, em particular, preserva a multiplicação p_{n_*} . Portanto φ é uma n -função *-Lie multiplicativa.

□

Observamos que, neste caso do Corolário 3.24, o grau de liberdade é n , enquanto no Teorema 3.16 é 2 (a liberdade de variação se restringe às duas primeiras variáveis). Sendo assim, resultado com grau de liberdade n decorre diretamente do Teorema 3.16.

Lembramos que para toda álgebra alternativa prima, consideramos a caracterização apresentada nas preliminares na qual dados $a, b \in \mathfrak{A}$, $(a\mathfrak{A})b = \{0\}$ (ou $a(\mathfrak{A}b) = \{0\}$) implica $a = 0$ ou $b = 0$. Logo, se \mathfrak{A} é uma álgebra alternativa prima, então \mathfrak{A} satisfaz a Condição (3.1) do Teorema 3.4 e a Condição (3.15) do Teorema 3.16. Portanto, o resultado a seguir é uma consequência imediata do Teorema 3.16.

Corolário 3.25. *Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' *-álgebras alternativas primas com identidades $1_{\mathfrak{A}}$ e $1_{\mathfrak{A}'}$, respectivamente, $e_1, e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} e $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ uma função multiplicativa escalar sobre \mathbb{C} . Sob estas condições, φ é uma n -função *-Lie bijetiva multiplicativa unital se, e só se, φ é um *-isomorfismo.*

Nesta seção nossos esforços foram no sentido de classificar uma n -função *-Lie multiplicativa unital escalar sobre \mathbb{C} e para tal classificação consideramos a multiplicação p_{n*} . Agora, a próxima seção terá como objetivo classificar uma n -função *-Jordan bijetiva unital escalar sobre \mathbb{C} e utilizando a multiplicação q_{n*} , que iremos definir.

3.2 FUNÇÃO *-JORDAN EM *-ÁLGEBRAS ALTERNATIVAS

Nesta seção vamos detalhar nossos estudos sobre a caracterização de funções *-Jordan bijetiva unital. Esta caracterização foi apresentada no artigo "-Jordan-type maps on alternative *-algebras" [10], elaborado em conjunto com Liudmila Sabinina e Bruno Ferreira, publicado em 2024 no *Journal of Mathematical Sciences*.

Definição 3.26. *Seja \mathfrak{A} uma *-álgebra. Denotamos $\{a_1, a_2\}_* = a_1a_2 + a_2a_1^*$, para todos $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}$ e as sequências de polinômios*

$$q_{1*}(a_1) = a_1 \quad e \quad q_{n*}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{q_{(n-1)*}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n\}_*,$$

para todo inteiro $n \geq 2$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$.

Neste caso, $q_{2*}(a_1, a_2) = \{a_1, a_2\}_*$, $q_{3*}(a_1, a_2, a_3) = \{\{a_1, a_2\}_*, a_3\}_*$ e assim por diante. Notamos que q_{2*} é a multiplicação introduzida por Fošner [25], que é aditiva. De fato, dados $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in \mathfrak{A}$, temos

$$\{a_1 + a_2, b\}_* = (a_1 + a_2)b + b(a_1 + a_2)^* = a_1b + a_2b + ba_1^* + ba_2^* = \{a_1, b\}_* + \{a_2, b\}_*$$

e

$$\{a, b_1 + b_2\}_* = a(b_1 + b_2) + (b_1 + b_2)a^* = ab_1 + ab_2 + b_1a^* + b_2a^* = \{a, b_1\}_* + \{a, b_2\}_*.$$

Podemos questionar se as multiplicações p_{n*} e q_{n*} são equivalentes; entretanto, veremos adiante que isso não ocorre. Esse fato, por sua vez, sustenta a validade de todos os resultados estabelecidos a partir deste ponto.

Se as multiplicações p_{n*} e q_{n*} fossem equivalentes, existiria uma constante $\lambda \in \mathbb{C}$ não nula, tal que $p_{n*}(a_1, \dots, a_n) = \lambda q_{n*}(a_1, \dots, a_n)$, para todos $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$. Seja $e_1 \in \mathfrak{A}$ um idempotente simétrico não trivial. Consideramos $a_j = e_1$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Assim, $p_{n*}(a_1, \dots, a_n) = p_{n*}(e_1, \dots, e_1) = 0$ e $q_{n*}(a_1, \dots, a_n) = q_{n*}(e_1, \dots, e_1) = 2^{n-1}e_1$. De onde teríamos $2^{n-1}\lambda e_1 = 0$, como e_1 é não trivial e estamos trabalhando sobre \mathbb{C} , segue que $\lambda = 0$. Portanto, as multiplicações p_{n*} e q_{n*} não são equivalentes.

O Lema 3.2 continua sendo válido quando substituimos a multiplicação p_{n*} pela multiplicação q_{n*} , isto é:

Lema 3.27. *Notamos que, para todo inteiro $n \geq 2$ e para $j \in \{1, \dots, n-1\}$, temos $q_{n*}(a_1, \dots, a_n) = q_{(n-j+1)*}(q_{j*}(a_1, \dots, a_j), a_{j+1}, \dots, a_n)$.*

Demonstração. Com efeito, vamos fixar n e fazer indução sobre j . Para $j = 1$, $q_{1*}(a_1) = a_1$ e segue que $q_{n*}(a_1, \dots, a_n) = q_{n*}(q_{1*}(a_1), a_2, \dots, a_n)$. Assim, é válido para $j = 1$. Suponhamos que seja válido para algum $j > 1$, ou seja,

$$q_{n*}(a_1, \dots, a_n) = q_{(n-j+1)*}(q_{j*}(a_1, \dots, a_j), a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Assim, pela Definição 3.26, concluímos que

$$\begin{aligned}
q_{n*}(a_1, \dots, a_n) &= q_{(n-j+1)*}\left(q_{j*}(a_1, \dots, a_j), a_{j+1}, \dots, a_n\right) \\
&= \{\dots \{ \{q_{j*}(a_1, \dots, a_j), a_{j+1}\}_*, a_{j+2}\}_*, \dots, a_n\}_* \\
&= q_{(n-j+1-1)*}\left(q_{(j+1)*}(a_1, \dots, a_{j+1}), a_{j+2}, \dots, a_n\right) \\
&= q_{(n-(j+1)+1)*}\left(q_{(j+1)*}(a_1, \dots, a_{j+1}), a_{j+2}, \dots, a_n\right).
\end{aligned}$$

Logo, pela hipótese de indução, obtemos $q_{n*}(a_1, \dots, a_n) = q_{(n-j+1)*}\left(q_{j*}(a_1, \dots, a_j), a_{j+1}, \dots, a_n\right)$, para todo inteiro $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Por exemplo para $j = n-1$,

$$q_{n*}(a_1, \dots, a_n) = q_{2*}\left(q_{(n-1)*}(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n\right).$$

□

A próxima proposição é de suma importância para o desenvolvimento desta seção e é análoga à Proposição 3.3, porém estamos considerando a multiplicação q_{n*} dada na Definição 3.26.

Proposição 3.28. *A multiplicação q_{n*} é n -aditiva.*

Demonstração. Para esta demonstração vamos utilizar indução sobre n . Sejam $b, c, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{A}$. Para $n = 1$, $q_{1*}(b + c) = b + c = q_{1*}(b) + q_{1*}(c)$. Logo é válido para $n = 1$. Suponhamos que seja válido para $n - 1$, isto é,

$$\begin{aligned}
q_{(n-1)*}(a_1, \dots, a_{j-1}, b + c, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}) &= q_{(n-1)*}(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}) \\
&\quad + q_{(n-1)*}(a_1, \dots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}),
\end{aligned}$$

para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Queremos mostrar que q_{n*} é n -aditiva. Para $j \in \{1, \dots, n-1\}$, pela hipótese de indução, segue que q_{j*} é j -aditiva. Pelo Lema 3.27, concluímos que

$$\begin{aligned}
q_{n*}(a_1, \dots, a_{j-1}, b + c, a_{j+1}, \dots, a_n) &= \\
&= \{q_{(n-1)*}(a_1, \dots, a_{j-1}, b + c, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}), a_n\}_* \\
&= \{q_{(n-1)*}(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}) + q_{(n-1)*}(a_1, \dots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}), a_n\}_*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{q_{(n-1)*}(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}), a_n\}_* \\
&\quad + \{q_{(n-1)*}(a_1, \dots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}), a_n\}_* \\
&= q_n(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n) + q_n(a_1, \dots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \dots, a_n).
\end{aligned}$$

Para $j = n$, como q_{2*} é aditiva e pelo Lema 3.27, segue que

$$\begin{aligned}
q_{n*}(a_1, \dots, a_{n-1}, b + c) &= \{q_{(n-1)*}(a_1, \dots, a_n), b + c\}_* \\
&= \{q_{(n-1)*}(a_1, \dots, a_n), b\}_* + \{q_{(n-1)*}(a_1, \dots, a_n), c\}_* \\
&= q_{n*}(a_1, \dots, a_{n-1}, b) + q_{n*}(a_1, \dots, a_{n-1}, c).
\end{aligned}$$

Portanto, pela hipótese de indução, a multiplicação q_{n*} é n -aditiva. □

Uma questão relevante é como q_{n*} se comporta quando os elementos que estamos considerando são os idempotentes simétricos não nulos. A resposta é a seguinte: se $\xi \in \{1_{\mathfrak{A}}, e_1, e_2\}$, então $q_{n*}(\xi, \dots, \xi) = 2^{n-1}\xi$. De fato, faremos indução sobre n . Pela definição de q_{2*} e como ξ é um idempotente simétrico, temos

$$q_{2*}(\xi, \xi) = \{\xi, \xi\}_* = \xi\xi + \xi\xi^* = 2\xi^2 = 2\xi.$$

Suponhamos que seja válido para $n - 1$, ou seja, $q_{(n-1)*}(\xi, \dots, \xi) = 2^{n-2}\xi$. Pelo Lema 3.27, segue que

$$\begin{aligned}
q_{n*}(\xi, \dots, \xi) &= \{q_{(n-1)*}(\xi, \dots, \xi), \xi\}_* = \{2^{n-2}\xi, \xi\}_* = 2^{n-2}\xi\xi + \xi 2^{n-2}\xi^* \\
&= 2^{n-2}\xi^2 + 2^{n-2}\xi^2 = 2^{n-2}\xi + 2^{n-2}\xi = 2^{n-1}\xi.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Nosso próximo resultado exhibe os cálculos que serão muito utilizados nas demonstrações dos lemas que virão a seguir.

As contas apresentadas na demonstração da Proposição 3.29 têm apenas a finalidade de permitir ao leitor verificar a veracidade das equações envolvidas na proposição. Elas não serão retomadas em outras partes do trabalho, estando aqui exclusivamente como uma forma de comprovação, caso o leitor desejar conferir os detalhes do desenvolvimento.

Proposição 3.29. *Sejam $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{12} \oplus \mathfrak{A}_{21} \oplus \mathfrak{A}_{22}$ uma *-álgebra alternativa com unidade $1_{\mathfrak{A}}$, $e_1, e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais de \mathfrak{A} , $a_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, $b_{tl} \in \mathfrak{A}_{tl}$. As seguintes igualdades são válidas para $n \geq 2$*

$$q_{n*}(e_1, \dots, e_1, a_{jk}) = \begin{cases} 2^{n-1}a_{jk}, & (j, k) = (1, 1), \\ 2^{n-2}a_{jk}, & (j, k) = (1, 2) \text{ ou } (j, k) = (2, 1), \\ 0, & (j, k) = (2, 2). \end{cases} \quad (3.28)$$

$$q_{n*}(e_2, \dots, e_2, a_{jk}) = \begin{cases} 0, & (j, k) = (1, 1), \\ 2^{n-2}a_{jk}, & (j, k) = (1, 2) \text{ ou } (j, k) = (2, 1), \\ 2^{n-1}a_{jk}, & (j, k) = (2, 2). \end{cases} \quad (3.29)$$

$$q_{n*}(e_1, \dots, e_1, b_{11}, a_{jk}) = 2^{n-2} \left(b_{11}a_{jk} + a_{jk}b_{11}^* \right), \text{ se } (j, k) \neq (2, 2). \quad (3.30)$$

$$q_{n*}(e_2, \dots, e_2, b_{11}, a_{jk}) = 0, \text{ para todos } j, k \in \{1, 2\}. \quad (3.31)$$

$$q_{n*}(e_1, \dots, e_1, b_{12}, a_{jk}) = 2^{n-3} \left(b_{12}a_{jk} + a_{jk}b_{12}^* \right), \text{ se } (j, k) \neq (1, 1). \quad (3.32)$$

$$q_{n*}(e_2, \dots, e_2, b_{12}, a_{jk}) = 2^{n-3} \left(b_{12}a_{jk} + a_{jk}b_{12}^* \right), \text{ se } (j, k) \neq (1, 1). \quad (3.33)$$

$$q_{n*}(e_1, \dots, e_1, b_{21}, a_{jk}) = 2^{n-3} \left(b_{21}a_{jk} + a_{jk}b_{21}^* \right), \text{ se } (j, k) \neq (2, 2). \quad (3.34)$$

$$q_{n*}(e_2, \dots, e_2, b_{21}, a_{jk}) = 2^{n-3} \left(b_{21}a_{jk} + a_{jk}b_{21}^* \right), \text{ se } (j, k) \neq (2, 2). \quad (3.35)$$

$$q_{n*}(e_1, \dots, e_1, b_{22}, a_{jk}) = 0, \text{ para todos } j, k \in \{1, 2\}. \quad (3.36)$$

$$q_{n*}(e_2, \dots, e_2, b_{22}, a_{jk}) = 2^{n-2} \left(b_{22}a_{jk} + a_{jk}b_{22}^* \right), \text{ se } (j, k) \neq (1, 1). \quad (3.37)$$

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar as Equações (3.28) e (3.29). Pelo Lema 3.27, segue que

$$\begin{aligned} q_{n*}(e_1, \dots, e_1, a_{jk}) &= q_{2*} \left(q_{(n-1)*}(e_1, \dots, e_1, e_1), a_{jk} \right) = q_{2*} \left(2^{n-2}e_1, a_{jk} \right) \\ &= 2^{n-2}e_1a_{jk} + 2^{n-2}a_{jk}e_1^* = 2^{n-2} \left(\delta_{1j}a_{jk} + \delta_{k1}a_{jk} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

e, trocando e_1 por e_2 , decorre que

$$q_{n*}(e_2, \dots, e_2, a_{jk}) = 2^{n-2} \left(\delta_{2j}a_{jk} + \delta_{k2}a_{jk} \right) \quad (3.39)$$

Vamos analisar todos os casos possíveis nas Equações (3.38) e (3.39):

- (i) Se $(j, k) = (1, 1)$, então $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, a_{11}) = 2^{n-1}a_{11}$ e $q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, a_{11}) = 0$.
- (ii) Se $(j, k) = (1, 2)$, então $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, a_{12}) = 2^{n-2}a_{12}$ e $q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, a_{12}) = 2^{n-2}a_{12}$.
- (iii) Se $(j, k) = (2, 1)$, então $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, a_{21}) = 2^{n-2}a_{21}$ e $q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, a_{21}) = 2^{n-2}a_{21}$.
- (iv) Se $(j, k) = (2, 2)$, então $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, a_{22}) = 0$ e $q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, a_{22}) = 2^{n-1}a_{22}$.

Agora, nossos cálculos serão no intuito de mostrar as demais equações. Da Equação (3.28), temos $q_{(n-1)_*}(e_1, \dots, e_1, b_{tl}) = 2^{n-3}\delta_{1t}b_{tl} + 2^{n-3}\delta_{l1}b_{tl}$, de onde segue que

$$\begin{aligned} q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{tl}, a_{jk}) &= q_{2_*}\left(q_{(n-1)_*}(e_1, \dots, e_1, b_{tl}), a_{jk}\right) = q_{2_*}(2^{n-3}\delta_{1t}b_{tl} + 2^{n-3}\delta_{l1}b_{tl}, a_{jk}) \\ &= q_{2_*}(2^{n-3}\delta_{1t}b_{tl}, a_{jk}) + q_{2_*}(2^{n-3}\delta_{l1}b_{tl}, a_{jk}) \\ &= 2^{n-3}\delta_{1t}(b_{tl}a_{jk} + a_{jk}b_{tl}^*) + 2^{n-3}\delta_{l1}(b_{tl}a_{jk} + a_{jk}b_{tl}^*). \end{aligned} \quad (3.40)$$

De forma análoga, trocando e_1 por e_2 , obtemos:

$$q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, b_{tl}, a_{jk}) = 2^{n-3}\delta_{2t}(b_{tl}a_{jk} + a_{jk}b_{tl}^*) + 2^{n-3}\delta_{l2}(b_{tl}a_{jk} + a_{jk}b_{tl}^*). \quad (3.41)$$

Primeiro vamos demonstrar a Equação (3.30). Fazendo $t = l = 1$ na Equação (3.40), concluímos que $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{11}, a_{jk}) = 2^{n-2}(b_{11}a_{jk} + a_{jk}b_{11}^*)$. Seguem imediatamente os casos abaixo

- (i) Se $(j, k) = (1, 1)$, então $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{11}, a_{11}) = 2^{n-2}(b_{11}a_{11} + a_{11}b_{11}^*)$.
- (ii) Se $(j, k) = (1, 2)$, então $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{11}, a_{12}) = 2^{n-2}b_{11}a_{12}$.
- (iii) Se $(j, k) = (2, 1)$, então $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{11}, a_{21}) = 2^{n-2}a_{21}b_{11}^*$.
- (iv) Se $(j, k) = (2, 2)$, então $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{11}, a_{22}) = 0$.

Agora vamos fazer a prova da Equação (3.31). Fazendo $t = l = 1$ na Equação (3.41), concluímos que $q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, b_{11}, a_{jk}) = 0$.

Da Equação (3.27), resulta que $q_{(n-2)*}(e_2, \dots, e_2) = 2^{n-3}e_2$ e pela Observação 3.27, constatamos

$$q_{(n-1)*}(e_2, \dots, e_2, b_{11}) = q_{2*}(2^{n-3}e_2, b_{11}) = 2^{n-3}(e_2b_{11} + b_{11}e_2^*) = 0.$$

Consequentemente, $q_{n*}(e_2, \dots, e_2, b_{11}, a_{jk}) = q_{2*}(q_{(n-1)*}(e_2, \dots, e_2, b_{11}), a_{jk}) = q_{2*}(0, a_{jk}) = 0$, para todos $j, k \in \{1, 2\}$.

Para verificar a Equação (3.32), basta considerar $t = 1$ e $l = 2$ na Equação (3.40). A Equação (3.33), por sua vez, é obtida ao se adotar $t = 1$ e $l = 2$ na Equação (3.41). De modo análogo, a verificação da Equação (3.34) requer apenas tomar $t = 2$ e $l = 1$ na Equação (3.40). Similarmente, para demonstrar a Equação (3.35), basta assumir $t = 2$ e $l = 1$ na Equação (3.41). Prosseguindo da mesma forma, a Equação (3.36) é verificada ao se fazer $t = l = 2$ na Equação (3.40). Finalmente, para obter a Equação (3.37), deve-se substituir $t = l = 2$ na Equação (3.41). □

Definição 3.30. *Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' *-álgebras. Uma função $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ é uma *n-função *-Jordan multiplicativa* se*

$$\varphi\left(q_{n*}(a_1, a_2, \dots, a_n)\right) = q_{n*}\left(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_j), \dots, \varphi(a_n)\right),$$

para todos $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$, com n um inteiro tal que $n \geq 2$.

Enunciaremos agora o primeiro resultado principal desta seção. Tal resultado diz respeito à aditividade de uma função bijetiva unital em *-álgebras alternativas que satisfazem uma condição específica.

Teorema 3.31. *Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' duas *-álgebras alternativas com identidades $1_{\mathfrak{A}}$ e $1_{\mathfrak{A}'}$, respectivamente e e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} . Suponha que \mathfrak{A} satisfaz a seguinte condição*

$$x(\mathfrak{A}e_j) = \{0\}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad \text{implica em} \quad x = 0, \quad \text{para } x \in \mathfrak{A}, \quad (3.42)$$

Se $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ é uma função bijetiva unital que satisfaz

$$\varphi\left(q_{n*}(\xi, \dots, \xi, a, b)\right) = q_{n*}\left(\varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi), \varphi(a), \varphi(b)\right), \quad (3.43)$$

para todos $a, b \in \mathfrak{A}$ e $\xi \in \{e_1, e_2, 1_{\mathfrak{A}}\}$, então φ é *-aditiva.

Antes de começarmos a apresentar os resultados usados na demonstração do Teorema 3.31, é importante destacarmos que a sequência adotada nesta seção não segue a mesma ordem dos resultados semelhantes mencionados na Seção 3.1. Além disso, aqui também aparecem afirmações que não têm correspondência na parte anterior, e o contrário também acontece. Desde o Lema 3.32 até o Lema 3.40 estavamos consideraremos as mesmas hipóteses do Teorema 3.31.

Lema 3.32. $\varphi(0) = 0$.

Demonstração. Como φ é sobrejetora, existe $z \in \mathfrak{A}$, tal que $\varphi(z) = 0$. Pelo Lema 3.27 e pela Equação (3.27), segue que

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \varphi\left(q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, 0, z)\right) = q_{n_*}\left(\varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \varphi(0), \varphi(z)\right) \\ &= q_{n_*}\left(\varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \varphi(0), 0\right) = q_{3_*}\left(2^{n-3}1_{\mathfrak{A}'}, \varphi(0), 0\right) \\ &= q_{2_*}\left(2^{n-2}\varphi(0), 0\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Lema 3.33. Sejam $a, b, h \in \mathfrak{A}$ tais que $\varphi(h) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Então

$$\varphi\left(q_{n_*}(\xi, \dots, \xi, c, h)\right) = \varphi\left(q_{n_*}(\xi, \dots, \xi, c, a)\right) + \varphi\left(q_{n_*}(\xi, \dots, \xi, c, b)\right),$$

e

$$\varphi\left(q_{n_*}(\xi, \dots, \xi, h, c)\right) = \varphi\left(q_{n_*}(\xi, \dots, \xi, a, c)\right) + \varphi\left(q_{n_*}(\xi, \dots, \xi, b, c)\right),$$

para todos $c \in \mathfrak{A}$ e $\xi \in \{e_1, e_2, 1_{\mathfrak{A}}\}$.

Demonstração. Demonstraremos a primeira identidade. A segunda é demonstrada de forma similar. Sejam $a, b, h \in \mathfrak{A}$ tais que $\varphi(h) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Pela aditividade da multiplicação q_{n_*} , obtemos

$$\begin{aligned}\varphi\left(q_{n_*}(\xi, \dots, \xi, c, h)\right) &= q_{n_*}\left(\varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi), \varphi(c), \varphi(h)\right) \\ &= q_{n_*}\left(\varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi), \varphi(c), \varphi(a) + \varphi(b)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q_{n_*}(\varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi), \varphi(c), \varphi(a)) + q_{n_*}(\varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi), \varphi(c), \varphi(b)) \\
&= \varphi(q_{n_*}(\xi, \dots, \xi, c, a)) + \varphi(q_{n_*}(\xi, \dots, \xi, c, b)).
\end{aligned}$$

□

Agora daremos início a uma sequência de lemas necessários para demonstração do primeiro teorema principal desta seção. Salientamos que para a demonstração do Teorema 3.31 serão necessários apenas 3 lemas, que a saber são 3.37, 3.39 e 3.40, e os demais lemas são auxiliares. Ademais, notamos que a menos das multiplicações preservadas pelas funções de cada um dos teoremas, o Lema 3.13 é semelhante ao Lema 3.37, o Lema 3.14 é semelhante ao Lema 3.39 e o Lema 3.15 é semelhante ao Lema 3.40.

Lema 3.34. *Se $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$ e $b_{22} \in \mathfrak{A}_{22}$, então $\varphi(a_{11} + b_{22}) = \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{22})$.*

Demonstração. Dado $\varphi(a_{11}) + \varphi(b_{22}) \in \mathfrak{A}'$, como φ é sobrejetora existe $h \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(h) = \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{22})$. Pela decomposição de Peirce, podemos escrever $h = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}$. Pelo Lema 3.33, temos

$$\varphi(2^{n-2}(e_j h + h e_j)) = \varphi(q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, h)) = \varphi(q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, a_{11})) + \varphi(q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, b_{22})),$$

com $j \in \{1, 2\}$. Usando a Equação (3.27), concluímos que

$$\begin{aligned}
\varphi(2^{n-2}(e_j h + h e_j)) &= \varphi(q_{2_*}(2^{n-2}e_j, a_{11})) + \varphi(q_{2_*}(2^{n-2}e_j, b_{22})) \\
&= \varphi(2^{n-2}(e_j a_{11} + a_{11} e_j)) + \varphi(2^{n-2}(e_j b_{22} + b_{22} e_j)).
\end{aligned}$$

Pelas Equações (3.28) e (3.29), chegamos a $q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, a_{11}) = 0$ e $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{22}) = 0$ e, portanto, $\varphi(2^{n-2}(e_2 h + h e_2)) = \varphi(2^{n-2}(e_2 b_{22} + b_{22} e_2))$ e $\varphi(2^{n-2}(e_1 h + h e_1)) = \varphi(2^{n-2}(e_1 a_{11} + a_{11} e_1))$. Desenvolvendo estes cálculos, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi(2^{n-1}a_{11}) &= \varphi(2^{n-2}(e_1 a_{11} + a_{11} e_1)) = \varphi(2^{n-2}(e_1 h + h e_1)) \\
&= \varphi(2^{n-2}(e_1 h_{11} + e_1 h_{12} + e_1 h_{21} + e_1 h_{22} + h_{11} e_1 + h_{12} e_1 + h_{21} e_1 + h_{22} e_1)) \\
&= \varphi(2^{n-2}(h_{11} + h_{12} + h_{11} + h_{21})) = \varphi(2^{n-1}h_{11} + 2^{n-2}h_{12} + 2^{n-2}h_{21})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi(2^{n-1}b_{22}) &= \varphi\left(2^{n-2}(e_2b_{22} + b_{22}e_2)\right) = \varphi\left(2^{n-2}(e_2h + he_2)\right) \\ &= \varphi\left(2^{n-2}(e_2h_{11} + e_2h_{12} + e_2h_{21} + e_2h_{22} + h_{11}e_2 + h_{12}e_2 + h_{21}e_2 + h_{22}e_2)\right) \\ &= \varphi\left(2^{n-2}(h_{21} + h_{22} + h_{12} + h_{22})\right) = \varphi\left(2^{n-2}h_{12} + 2^{n-2}h_{21} + 2^{n-1}h_{22}\right).\end{aligned}$$

Pela injetividade de φ , decorre que $2^{n-1}h_{11} + 2^{n-2}h_{12} + 2^{n-2}h_{21} = 2^{n-1}a_{11}$ e $2^{n-2}h_{12} + 2^{n-2}h_{21} + 2^{n-1}h_{22} = 2^{n-1}b_{22}$. Agora, pela decomposição de Peirce, segue que $h_{11} = a_{11}$, $h_{12} = 0$, $h_{21} = 0$ e $h_{22} = b_{22}$. Portanto, $\varphi(a_{11} + b_{22}) = \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{22})$. □

Lema 3.35. Se $a_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ e $b_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, então $\varphi(a_{12} + b_{21}) = \varphi(a_{12}) + \varphi(b_{21})$.

Demonstração. Dado $\varphi(a_{12}) + \varphi(b_{21}) \in \mathfrak{A}'$, pela sobrejetividade de φ , existe $h \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(h) = \varphi(a_{12}) + \varphi(b_{21})$, com $h = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}$. Inicialmente vamos mostrar que $h_{11} = h_{22} = 0$. Pelo Lema 3.33, obtemos

$$\varphi\left(q_{n*}\left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-2}}, h\right)\right) = \varphi\left(q_{n*}\left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-2}}, a_{12}\right)\right) + \varphi\left(q_{n*}\left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-2}}, b_{21}\right)\right)$$

Agora, pela Equação (3.28), pelo Lema 3.27 e pela Equação (3.27), concluímos que

$$\begin{aligned}q_{n*}\left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-2}}, a_{12}\right) &= q_{2*}\left(q_{(n-1)*}\left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-2}}\right), a_{12}\right) = q_{2*}(e_1, a_{12}) \\ &= e_1a_{12} + a_{12}e_1 = a_{12}\end{aligned}$$

e, analogamente, $q_{n*}\left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-2}}, b_{21}\right) = b_{21}$. Assim,

$$\varphi\left(q_{n*}\left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-2}}, h\right)\right) = \varphi(a_{12}) + \varphi(b_{21}) = \varphi(h).$$

Por outro lado, decorre que

$$\begin{aligned}\varphi\left(q_{n*}\left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-2}}, h\right)\right) &= \varphi\left(q_{2*}\left(q_{(n-1)*}\left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-2}}\right), h\right)\right) = \varphi\left(q_{2*}(e_1, h)\right) \\ &= \varphi(2h_{11} + h_{12} + h_{21}).\end{aligned}$$

Logo, $\varphi(2h_{11} + h_{12} + h_{21}) = \varphi(h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22})$ e, da injetividade de φ , deduzimos que $2h_{11} + h_{12} + h_{21} = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}$. Pela decomposição de Peirce, resulta que $h_{11} = 0$ e $h_{22} = 0$.

Neste passo vamos mostrar que $h_{12} = a_{12}$. Seja $c_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ qualquer. Pela Equação (3.27) e pelo Lema 3.27, constatamos que

$$\begin{aligned} q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, h, c_{21} \right) &= q_{3_*}(e_1, h, c_{21}) = q_{2_*}(h_{12} + h_{21}, c_{21}) \\ &= q_{2_*}(h_{12}, c_{21}) + q_{2_*}(h_{21}, c_{21}) \\ &= h_{12}c_{21} + c_{21}h_{12}^* + h_{21}c_{21} + c_{21}h_{21}^*, \\ q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, a_{12}, c_{21} \right) &= q_{3_*}(e_1, a_{12}, c_{21}) = q_{2_*}(a_{12}, c_{21}) = a_{12}c_{21} + c_{21}a_{12}^*, \\ q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, b_{21}, c_{21} \right) &= q_{3_*}(e_1, b_{21}, c_{21}) = q_{2_*}(b_{21}, c_{21}) = b_{21}c_{21} + c_{21}b_{21}^*. \end{aligned}$$

Sendo assim, pela aditividade de q_{n_*} , temos

$$\begin{aligned} & q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, a_{12} + b_{21}, c_{21} \right), e_1 \right) \\ &= q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, a_{12}, c_{21} \right), e_1 \right) \\ &\quad + q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, b_{21}, c_{21} \right), e_1 \right) \\ &= q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, a_{12}c_{21} + c_{21}a_{12}^*, e_1 \right) + q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, b_{21}c_{21} + c_{21}b_{21}^*, e_1 \right) \\ &= q_{3_*}(e_1, a_{12}c_{21}, e_1) + q_{3_*}(e_1, c_{21}a_{12}^*, e_1) + q_{3_*}(e_1, b_{21}c_{21}, e_1) + q_{3_*}(e_1, c_{21}b_{21}^*, e_1) \\ &= q_{2_*}(2a_{12}c_{21}, e_1) + q_{2_*}(c_{21}a_{12}^*, e_1) + q_{2_*}(b_{21}c_{21}, e_1) + q_{2_*}(0, e_1) \\ &= 2 \left(a_{12}c_{21} + (a_{12}c_{21})^* \right). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} & \varphi \left(q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, h, c_{21} \right), e_1 \right) \right) \\ &= \varphi \left(q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, h_{12} + h_{21}, c_{21} \right), e_1 \right) \right) \\ &= \varphi \left(2 \left(h_{12}c_{21} + (h_{12}c_{21})^* \right) \right). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \varphi \left(q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, h, c_{21} \right), e_1 \right) \right) \\
&= q_{n_*} \left(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1), \varphi \left(\frac{e_1}{2^{n-3}} \right), q_{n_*} \left(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1), \varphi(h), \varphi(c_{21}) \right), \varphi(e_1) \right) \\
&= q_{n_*} \left(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1), \varphi \left(\frac{e_1}{2^{n-3}} \right), q_{n_*} \left(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1), \varphi \left(\frac{e_1}{2^{n-3}} \right), \varphi(a_{12}) + \varphi(b_{21}), \varphi(c_{21}) \right), \varphi(e_1) \right).
\end{aligned}$$

Por sua vez, pela aditividade da multiplicação q_{n_*} e Equação (3.44), segue que

$$\begin{aligned}
& \varphi \left(q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, h, c_{21} \right), e_1 \right) \right) \\
&= q_{n_*} \left(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1), \varphi \left(\frac{e_1}{2^{n-3}} \right), q_{n_*} \left(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1), \varphi \left(\frac{e_1}{2^{n-3}} \right), \varphi(a_{12}), \varphi(c_{21}) \right), \varphi(e_1) \right) \\
&\quad + q_{n_*} \left(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1), \varphi \left(\frac{e_1}{2^{n-3}} \right), q_{n_*} \left(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_1), \varphi \left(\frac{e_1}{2^{n-3}} \right), \varphi(b_{21}), \varphi(c_{21}) \right), \varphi(e_1) \right) \\
&= \varphi \left(q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, a_{12}, c_{21} \right), e_1 \right) \right) \\
&\quad + \varphi \left(q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, q_{n_*} \left(e_1, \dots, e_1, \frac{e_1}{2^{n-3}}, b_{21}, c_{21} \right), e_1 \right) \right) \\
&= \varphi \left(2 \left(a_{12}c_{21} + (a_{12}c_{21})^* \right) \right).
\end{aligned}$$

De onde, $\varphi \left(2 \left(a_{12}c_{21} + (a_{12}c_{21})^* \right) \right) = \varphi \left(2 \left(h_{12}c_{21} + (h_{12}c_{21})^* \right) \right)$. Pela injetividade de φ , obtemos $a_{12}c_{21} + (a_{12}c_{21})^* = h_{12}c_{21} + (h_{12}c_{21})^*$. Pela decomposição de Peirce, segue que

$$(h_{12} - a_{12})c_{21} + c_{21}^* (h_{12}^* - a_{12}^*) = 0 \quad (3.45)$$

Agora, pela arbitrariedade de $c_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, podemos considerar $ic_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ no lugar de c_{21} , a fim de concluir que $i(h_{12} - a_{12})c_{21} - ic_{21}^* (h_{12}^* - a_{12}^*) = 0$. Assim,

$$(h_{12} - a_{12})c_{21} - c_{21}^* (h_{12}^* - a_{12}^*) = 0.$$

Ao somarmos esta última e a Equação (3.45), obtemos $(h_{12} - a_{12})c_{21} = 0$, para todo $c_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, o que implica em $(h_{12} - a_{12})(\mathfrak{A}e_1) = \{0\}$. Pela Condição (3.42) do Teorema 3.16, deduzimos que $h_{12} - a_{12} = 0$, isto é, $h_{12} = a_{12}$.

Mostraremos que $h_{21} = b_{21}$ utilizando cálculos análogos aos realizados anteriormente, trocando e_1 por e_2 e c_{21} por c_{12} . Notamos que para $c_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ qualquer, resulta que

$$q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_2}{2^{n-3}}, h, c_{12} \right) = h_{21}c_{12} + h_{12}c_{12} + c_{12}h_{21}^* + c_{12}h_{12}^*,$$

$$\begin{aligned} q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_2}{2^{n-3}}, a_{12}, c_{12} \right) &= a_{12}c_{12} + c_{12}a_{12}^*, \\ q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_2}{2^{n-3}}, b_{21}, c_{12} \right) &= b_{21}c_{12} + c_{12}b_{21}^*. \end{aligned}$$

Além disso, pela aditividade da multiplicação q_{n_*} , constatamos que

$$\begin{aligned} &\varphi \left(q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_2}{2^{n-3}}, q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_2}{2^{n-3}}, h, c_{12} \right), e_2 \right) \right) \\ &= q_{n_*} \left(\varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2), \varphi \left(\frac{e_2}{2^{n-3}} \right), q_{n_*} \left(\varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2), \varphi \left(\frac{e_2}{2^{n-3}} \right), \varphi(h), \varphi(c_{12}) \right), \varphi(e_2) \right) \\ &= q_{n_*} \left(\varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2), \varphi \left(\frac{e_2}{2^{n-3}} \right), q_{n_*} \left(\varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2), \varphi \left(\frac{e_2}{2^{n-3}} \right), \varphi(a_{12}) + \varphi(b_{21}), \varphi(c_{12}) \right), \varphi(e_2) \right) \\ &= q_{n_*} \left(\varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2), \varphi \left(\frac{e_2}{2^{n-3}} \right), q_{n_*} \left(\varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2), \varphi \left(\frac{e_2}{2^{n-3}} \right), \varphi(a_{12}), \varphi(c_{12}) \right), \varphi(e_2) \right) \\ &\quad + q_{n_*} \left(\varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2), \varphi \left(\frac{e_2}{2^{n-3}} \right), q_{n_*} \left(\varphi(e_2), \dots, \varphi(e_2), \varphi \left(\frac{e_2}{2^{n-3}} \right), \varphi(b_{21}), \varphi(c_{12}) \right), \varphi(e_2) \right) \\ &= \varphi \left(q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_2}{2^{n-3}}, q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_2}{2^{n-3}}, a_{12}, c_{12} \right), e_2 \right) \right) \\ &\quad + \varphi \left(q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_2}{2^{n-3}}, q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_2}{2^{n-3}}, b_{21}, c_{12} \right), e_2 \right) \right) \\ &= \varphi \left(q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_2}{2^{n-3}}, a_{12}c_{12} + c_{12}a_{12}^*, e_2 \right) \right) + \varphi \left(q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_2}{2^{n-3}}, b_{21}c_{12} + c_{12}b_{21}^*, e_2 \right) \right) \\ &= \varphi(0) + \varphi \left(2 \left(b_{21}c_{12} + (b_{21}c_{12})^* \right) \right) = \varphi \left(2 \left(b_{21}c_{12} + (b_{21}c_{12})^* \right) \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi \left(q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_2}{2^{n-3}}, q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_2}{2^{n-3}}, h, c_{21} \right), e_2 \right) \right) = \varphi \left(2 \left(b_{21}c_{12} + (b_{21}c_{12})^* \right) \right)$$

e de forma similar

$$\varphi \left(q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_2}{2^{n-3}}, q_{n_*} \left(e_2, \dots, e_2, \frac{e_1}{2^{n-3}}, h, c_{21} \right), e_2 \right) \right) = \varphi \left(2 \left(h_{21}c_{12} + (h_{21}c_{12})^* \right) \right).$$

Pela injetividade de φ , temos $(h_{21} - b_{21})c_{12} + c_{12}^*(h_{21}^* - b_{21}^*) = 0$, para todo $c_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$. Agora considerando $ic_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ no lugar de c_{12} , segue que $i \left((h_{21} - b_{21})c_{12} - c_{12}^*(h_{21}^* - b_{21}^*) \right) = 0$, o que implica em $(h_{21} - b_{21})c_{12} - c_{12}^*(h_{21}^* - b_{21}^*) = 0$. Somando com a equação anterior, obtemos $2(h_{21} - b_{21})c_{12} = 0$, de onde $(h_{21} - b_{21})c_{12} = 0$. Pela arbitrariedade de $c_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$, decorre que $(h_{21} - b_{21})(\mathfrak{A}e_2) = \{0\}$ e pela Condição (3.42) do Teorema 3.31, concluímos que $h_{21} = b_{21}$. Portanto, $\varphi(a_{12} + b_{21}) = \varphi(a_{12}) + \varphi(b_{21})$.

□

Lema 3.36. *Se $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, $b_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$, $c_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ e $d_{22} \in \mathfrak{A}_{22}$, então*

$$\varphi(a_{11} + b_{12} + c_{21}) = \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{12}) + \varphi(c_{21}) \quad e \quad \varphi(b_{12} + c_{21} + d_{22}) = \varphi(b_{12}) + \varphi(c_{21}) + \varphi(d_{22}).$$

Demonstração.

Vamos mostrar a segunda identidade, a primeira é provada de forma similar. Dado $\varphi(b_{12}) + \varphi(c_{21}) + \varphi(d_{22}) \in \mathfrak{A}'$, pela sobrejetividade de φ , existe $h \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(h) = \varphi(b_{12}) + \varphi(c_{21}) + \varphi(d_{22})$. Pelo Lema 3.33 e Equação (3.28), temos

$$\begin{aligned} \varphi(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, h)) &= \varphi(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{12})) + \varphi(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, c_{21})) + \varphi(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, d_{22})) \\ &= \varphi(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{12})) + \varphi(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, c_{21})). \end{aligned}$$

Como $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{12}) = 2^{n-2}b_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ e $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, c_{21}) = 2^{n-2}c_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, pelo Lema 3.35, segue que

$$\varphi(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, h)) = \varphi(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{12}) + q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, c_{21})). \quad (3.46)$$

Da injetividade de φ , obtemos $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, h) = q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{12}) + q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, c_{21})$. Pela Equação (3.27), concluímos que

$$\begin{aligned} q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, h) &= q_{2_*}(q_{(n-1)_*}(e_1, \dots, e_1), h) = q_{2_*}(2^{n-2}e_1, h) = 2^{n-2}(2h_{11} + h_{12} + h_{21}), \\ q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, c_{21}) &= q_{2_*}(2^{n-2}e_1, c_{21}) = 2^{n-2}c_{21}, \\ q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{12}) &= q_{2_*}(2^{n-2}e_1, b_{12}) = 2^{n-2}b_{12}. \end{aligned}$$

Logo, pela Equação (3.46) e injetividade da φ , obtemos $2h_{11} + h_{12} + h_{21} = b_{12} + c_{21}$. Da decomposição de Peirce, chegamos a $h_{11} = 0$, $h_{12} = b_{12}$ e $h_{21} = c_{21}$.

Neste passo iremos mostrar que $h_{22} = d_{22}$. Pela aditividade da multiplicação q_{n_*} , deduzimos que

$$\begin{aligned} q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, b_{12}) &= q_{3_*}(2^{n-3}1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, b_{12}) \\ &= q_{3_*}(2^{n-3}1_{\mathfrak{A}}, e_1, b_{12}) - q_{3_*}(2^{n-3}1_{\mathfrak{A}}, e_2, b_{12}) \\ &= q_{2_*}(2^{n-2}e_1, b_{12}) - q_{2_*}(2^{n-2}e_2, b_{12}) \\ &= 2^{n-2}b_{12} - 2^{n-2}b_{12} = 0, \end{aligned}$$

e, analogamente, $q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, c_{21}) = 0$ e $q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, d_{22}) = -2^{n-1}d_{22}$. Da aditividade de q_{n_*} e Condição (3.43) do Teorema 3.31 resulta que

$$\begin{aligned} & \varphi\left(q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, h)\right) \\ &= \varphi\left(q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, b_{12})\right) + \varphi\left(q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, c_{21})\right) \\ & \quad + \varphi\left(q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, d_{22})\right) \\ &= \varphi\left(q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, d_{22})\right). \end{aligned}$$

Por outro lado, pela Equação (3.27), constatamos que $q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, h) = -2^{n-1}h_{22}$. Como

$$\varphi\left(q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, h)\right) = \varphi\left(q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, d_{22})\right)$$

e como φ é injetiva, decorre que $h_{22} = d_{22}$. Portanto, $\varphi(b_{12} + c_{21} + d_{22}) = \varphi(b_{12}) + \varphi(c_{21}) + \varphi(d_{22})$.

□

No próximo lema, utilizaremos os três anteriores para demonstrar que φ é aditiva na soma dos espaços de Peirce.

Lema 3.37. *Se $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, $b_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$, $c_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ e $d_{22} \in \mathfrak{A}_{22}$, então*

$$\varphi(a_{11} + b_{12} + c_{21} + d_{22}) = \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{12}) + \varphi(c_{21}) + \varphi(d_{22}).$$

Demonstração. Dado $\varphi(a_{11}) + \varphi(b_{12}) + \varphi(c_{21}) + \varphi(d_{22}) \in \mathfrak{A}'$, pela sobrejetividade de φ , existe $h \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(h) = \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{12}) + \varphi(c_{21}) + \varphi(d_{22})$, com $h = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}$. Pela aditividade de q_{n_*} , segue que

$$\begin{aligned} \varphi\left(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, h)\right) &= \varphi\left(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, a_{11})\right) + \varphi\left(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{12})\right) \\ & \quad + \varphi\left(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, c_{21})\right) + \varphi\left(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, d_{22})\right). \end{aligned}$$

Pela Equação (3.28), obtemos

$$\varphi\left(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, h)\right) = \varphi\left(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, a_{11})\right) + \varphi\left(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{12})\right) + \varphi\left(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, c_{21})\right).$$

Agora, como $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, a_{11}) = 2^{n-1}a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{12}) = 2^{n-2}b_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ e $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, c_{21}) = 2^{n-2}c_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, pelo Lema 3.36, concluímos que

$$\varphi\left(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, h)\right) = \varphi\left(q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, a_{11}) + q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{12}) + q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, c_{21})\right).$$

Da injetividade de φ , obtemos

$$q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, h) = q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, a_{11}) + q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, b_{12}) + q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, c_{21}).$$

Em contrapartida, temos $q_{n_*}(e_1, \dots, e_1, h) = 2^{n-2}(2h_{11} + h_{12} + h_{21})$, de onde,

$$2^{n-2}(2h_{11} + h_{12} + h_{21}) = 2^{n-1}a_{11} + 2^{n-2}b_{12} + 2^{n-2}c_{21}.$$

Logo, pela decomposição de Peirce, deduzimos que $h_{11} = a_{11}$, $h_{12} = b_{12}$ e $h_{21} = b_{21}$.

Agora, mostraremos que $h_{22} = d_{22}$. Da aditividade de q_{n_*} e Condição (3.43) do Teorema 3.31, resulta que

$$\begin{aligned} \varphi\left(q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, h)\right) &= \varphi\left(q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, a_{11})\right) + \varphi\left(q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, b_{12})\right) \\ &\quad + \varphi\left(q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, c_{21})\right) + \varphi\left(q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, d_{22})\right). \end{aligned}$$

Pela Equação (3.29), constatamos que

$$\varphi\left(q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, h)\right) = \varphi\left(q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, b_{12})\right) + \varphi\left(q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, c_{21})\right) + \varphi\left(q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, d_{22})\right)$$

e como $q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, b_{12}) = 2^{n-2}b_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$, $q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, c_{21}) = 2^{n-2}c_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ e $q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, d_{22}) = 2^{n-1}d_{22} \in \mathfrak{A}_{22}$, pelo Lema 3.36, decorre que

$$\varphi\left(q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, h)\right) = \varphi\left(q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, b_{12}) + q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, c_{21}) + q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, d_{22})\right).$$

Da injetividade de φ segue que

$$q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, h) = q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, b_{12}) + q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, c_{21}) + q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, d_{22}).$$

Da mesma forma, $q_{n_*}(e_2, \dots, e_2, h) = 2^{n-2}(h_{12} + h_{21} + 2h_{22})$. Consequentemente

$$2^{n-2}(h_{12} + h_{21} + 2h_{22}) = 2^{n-2}b_{12} + 2^{n-2}c_{21} + 2^{n-1}d_{22}.$$

Logo, pela decomposição de Peirce, obtemos $h_{12} = b_{12}$, $h_{21} = b_{21}$ e $h_{22} = d_{22}$. Portanto, $\varphi(a_{11} + b_{12} + c_{21} + d_{22}) = \varphi(a_{11}) + \varphi(b_{12}) + \varphi(c_{21}) + \varphi(d_{22})$.

□

Apresentaremos a seguir um lema técnico adicional, o qual será aplicado na demonstração do Lema 3.39.

Lema 3.38. *Se $a_{12}, b_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ e $c_{21}, d_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, então*

$$\varphi(a_{12}b_{12} + a_{12}^*) = \varphi(a_{12}b_{12}) + \varphi(a_{12}^*) \quad e \quad \varphi(a_{21}b_{21} + a_{21}^*) = \varphi(a_{21}b_{21}) + \varphi(a_{21}^*).$$

Demonstração. Vamos mostrar apenas a segunda identidade, a primeira é provada de forma análoga. Sejam $a_{21}, b_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$. Notamos que, pelo Lema 3.27 e Equação (3.27), segue que

$$\begin{aligned} q_{n_*} \left(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, a_{21}, \frac{1}{2^{n-2}}(e_1 + b_{21}) \right) &= q_{3_*} \left(2^{n-3}1_{\mathfrak{A}}, a_{21}, \frac{1}{2^{n-2}}(e_1 + b_{21}) \right) \\ &= q_{2_*} \left(2^{n-2}a_{21}, \frac{1}{2^{n-2}}(e_1 + b_{21}) \right) \\ &= q_{2_*} \left(2^{n-2}a_{21}, \frac{e_1}{2^{n-2}} \right) + q_{2_*} \left(2^{n-2}a_{21}, \frac{b_{21}}{2^{n-2}} \right) \\ &= a_{21} + a_{21}^* + a_{21}b_{21} + b_{21}a_{21}^*. \end{aligned}$$

Como $a_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, $a_{21}^*, a_{21}b_{21} \in \mathfrak{A}_{12}$ e $b_{21}a_{21}^* \in \mathfrak{A}_{22}$, pelo Lema 3.37, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi(a_{21}) + \varphi(a_{21}^* + a_{21}b_{21}) + \varphi(b_{21}a_{21}^*) &= \varphi(a_{21} + a_{21}^* + a_{21}b_{21} + b_{21}a_{21}^*) \\ &= \varphi \left(q_{n_*} \left(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, a_{21}, \frac{1}{2^{n-2}}(e_1 + b_{21}) \right) \right) \\ &= q_{n_*} \left(\varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \varphi(a_{21}), \varphi \left(\frac{1}{2^{n-2}}(e_1 + b_{21}) \right) \right) \\ &= q_{n_*} \left(\varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \varphi(a_{21}), \varphi \left(\frac{e_1}{2^{n-2}} \right) + \varphi \left(\frac{b_{21}}{2^{n-2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Como a multiplicação q_{n_*} é aditiva e pela Equação (3.27), continuamos com

$$\begin{aligned} \varphi(a_{21}) + \varphi(a_{21}^* + a_{21}b_{21}) + \varphi(b_{21}a_{21}^*) \\ = q_{n_*} \left(\varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \varphi(a_{21}), \varphi \left(\frac{e_1}{2^{n-2}} \right) \right) + q_{n_*} \left(\varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \varphi(a_{21}), \varphi \left(\frac{b_{21}}{2^{n-2}} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi \left(q_{n_*} \left(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, a_{21}, \frac{e_1}{2^{n-2}} \right) \right) + \varphi \left(q_{n_*} \left(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, a_{21}, \frac{b_{21}}{2^{n-2}} \right) \right) \\
&= \varphi \left(q_{3_*} \left(2^{n-3} 1_{\mathfrak{A}}, a_{21}, \frac{e_1}{2^{n-2}} \right) \right) + \varphi \left(q_{3_*} \left(2^{n-3} 1_{\mathfrak{A}}, a_{21}, \frac{b_{21}}{2^{n-2}} \right) \right) \\
&= \varphi \left(q_{2_*} \left(2^{n-2} a_{21}, \frac{e_1}{2^{n-2}} \right) \right) + \varphi \left(q_{2_*} \left(2^{n-2} a_{21}, \frac{b_{21}}{2^{n-2}} \right) \right) \\
&= \varphi(a_{21} + a_{21}^*) + \varphi(a_{21} b_{21} + b_{21} a_{21}^*).
\end{aligned}$$

Novamente, pelo Lema 3.37, deduzimos que

$$\varphi(a_{21}) + \varphi(a_{21}^* + a_{21} b_{21}) + \varphi(b_{21} a_{21}^*) = \varphi(a_{21}) + \varphi(a_{21}^*) + \varphi(a_{21} b_{21}) + \varphi(b_{21} a_{21}^*).$$

Logo, $\varphi(a_{21} b_{21} + a_{21}^*) = \varphi(a_{21} b_{21}) + \varphi(a_{21}^*)$.

□

Agora, mostraremos a aditividade de φ no espaços \mathfrak{A}_{12} e \mathfrak{A}_{21} .

Lema 3.39. Se $a_{jk}, b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, com $j, k \in \{1, 2\}$, $j \neq k$, então $\varphi(a_{jk} + b_{jk}) = \varphi(a_{jk}) + \varphi(b_{jk})$.

Demonstração. Da aditividade da multiplicação q_{n_*} , Equação (3.27) e pelo Lema 3.27 resulta que

$$\begin{aligned}
&q_{n_*} \left(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, \frac{e_j + a_{jk}}{2^{n-2}}, e_k + b_{jk} \right) \\
&= q_{n_*} \left(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, \frac{e_j}{2^{n-2}}, e_k \right) + q_{n_*} \left(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, \frac{a_{jk}}{2^{n-2}}, e_k \right) + q_{n_*} \left(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, \frac{e_j}{2^{n-2}}, b_{jk} \right) \\
&\quad + q_{n_*} \left(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, \frac{a_{jk}}{2^{n-2}}, b_{jk} \right) \\
&= q_{2_*}(e_j, e_k) + q_{2_*}(a_{jk}, e_k) + q_{2_*}(e_j, b_{jk}) + q_{2_*}(a_{jk}, b_{jk}) \\
&= a_{jk} + a_{jk}^* + b_{jk} + a_{jk} b_{jk} + b_{jk} a_{jk}^*.
\end{aligned}$$

Pelos Lemas 3.37 e 3.38, segue que

$$\begin{aligned}
&\varphi(a_{jk} + b_{jk}) + \varphi(a_{jk} b_{jk} + a_{jk}^*) + \varphi(b_{jk} a_{jk}^*) = \varphi(a_{jk} + b_{jk} + a_{jk} b_{jk} + a_{jk}^* + b_{jk} a_{jk}^*) \\
&= \varphi \left(q_{n_*} \left(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, \frac{e_j + a_{jk}}{2^{n-2}}, e_k + b_{jk} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q_{n_*} \left(\varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \varphi \left(\frac{e_j + a_{jk}}{2^{n-2}} \right), \varphi(e_k + b_{jk}) \right) \\
&= q_{n_*} \left(\varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \varphi \left(\frac{e_j}{2^{n-2}} \right) + \varphi \left(\frac{a_{jk}}{2^{n-2}} \right), \varphi(e_k) + \varphi(b_{jk}) \right).
\end{aligned}$$

Como q_{n_*} é aditiva, obtemos

$$\begin{aligned}
&\varphi(a_{jk} + b_{jk}) + \varphi(a_{jk}b_{jk} + a_{jk}^*) + \varphi(b_{jk}a_{jk}^*) \\
&= q_{n_*} \left(\varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \varphi \left(\frac{e_j}{2^{n-2}} \right), \varphi(e_k) \right) + q_{n_*} \left(\varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \varphi \left(\frac{a_{jk}}{2^{n-2}} \right), \varphi(e_k) \right) \\
&\quad + q_{n_*} \left(\varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \varphi \left(\frac{e_j}{2^{n-2}} \right), \varphi(b_{jk}) \right) \\
&\quad + q_{n_*} \left(\varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \varphi \left(\frac{a_{jk}}{2^{n-2}} \right), \varphi(b_{jk}) \right) \\
&= \varphi \left(q_{n_*} \left(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, \frac{e_j}{2^{n-2}}, e_k \right) \right) + \varphi \left(q_{n_*} \left(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, \frac{a_{jk}}{2^{n-2}}, e_k \right) \right) \\
&\quad + \varphi \left(q_{n_*} \left(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, \frac{e_j}{2^{n-2}}, b_{jk} \right) \right) + \varphi \left(q_{n_*} \left(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, \frac{a_{jk}}{2^{n-2}}, b_{jk} \right) \right) \\
&= \varphi(0) + \varphi(a_{jk} + a_{jk}^*) + \varphi(b_{jk}) + \varphi(a_{jk}b_{jk} + b_{jk}a_{jk}^*) \\
&= \varphi(b_{jk}) + \varphi(a_{jk} + a_{jk}^*) + \varphi(a_{jk}b_{jk} + b_{jk}a_{jk}^*).
\end{aligned}$$

Logo, pelos Lemas 3.35 e 3.36, concluímos que

$$\varphi(b_{jk}) + \varphi(a_{jk}) + \varphi(a_{jk}^*) + \varphi(a_{jk}b_{jk} + b_{jk}a_{jk}^*) = \varphi(a_{jk} + b_{jk}) + \varphi(a_{jk}^*) + \varphi(a_{jk}b_{jk}) + \varphi(b_{jk}a_{jk}^*).$$

Portanto, $\varphi(a_{jk} + b_{jk}) = \varphi(a_{jk}) + \varphi(b_{jk})$. □

Ainda nos resta mostrar que φ satisfaz a condição Cauchy aditiva quando os elementos pertencem aos espaços \mathfrak{A}_{11} ou \mathfrak{A}_{22} .

Lema 3.40. Se $a_{jj}, b_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$, então $\varphi(a_{jj} + b_{jj}) = \varphi(a_{jj}) + \varphi(b_{jj})$, com $j \in \{1, 2\}$.

Demonstração. Dado $\varphi(a_{jj}) + \varphi(b_{jj}) \in \mathfrak{A}'$, pela sobrejetividade de φ existe $h \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(h) = \varphi(a_{jj}) + \varphi(b_{jj})$, com $h = h_{jj} + h_{kj} + h_{jk} + h_{kk}$ e $j \neq k$.

Inicialmente, mostraremos que $h_{kj} = h_{jk} = h_{kk} = 0$. Pelo Lema 3.33, pelas Equações (3.28) e (3.29), constatamos que

$$\varphi\left(q_{n_*}(e_k, \dots, e_k, h)\right) = \varphi\left(q_{n_*}(e_k, \dots, e_k, a_{jj})\right) + \varphi\left(q_{n_*}(e_k, \dots, e_k, b_{jj})\right) = 0.$$

Por outro lado, como a multiplicação q_{n_*} é aditiva, decorre que

$$\begin{aligned} q_{n_*}(e_k, \dots, e_k, h) &= q_{n_*}(e_k, \dots, e_k, h_{jj}) + q_{n_*}(e_k, \dots, e_k, h_{kj}) + q_{n_*}(e_k, \dots, e_k, h_{jk}) \\ &\quad + q_{n_*}(e_k, \dots, e_k, h_{kk}) \\ &= q_{2_*}(2^{n-2}e_k, h_{jj}) + q_{2_*}(2^{n-2}e_k, h_{kj}) + q_{2_*}(2^{n-2}e_k, h_{jk}) + q_{2_*}(2^{n-2}e_k, h_{kk}) \\ &= 2^{n-2}h_{kj} + 2^{n-2}h_{jk} + 2^{n-1}h_{kk}, \end{aligned}$$

de onde $\varphi\left(q_{n_*}(e_k, \dots, e_k, h)\right) = \varphi\left(2^{n-2}h_{kj} + 2^{n-2}h_{jk} + 2^{n-1}h_{kk}\right)$. Logo, pela injetividade de φ e decomposição de Peirce, segue que $h_{kj} = 0$, $h_{jk} = 0$ e $h_{kk} = 0$.

Mostraremos agora que $h_{jj} = a_{jj} + b_{jj}$. Seja $c_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$ qualquer. Assim, pela Lema 3.33, obtemos $\varphi\left(q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, h, c_{jk})\right) = \varphi\left(q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, a_{jj}, c_{jk})\right) + \varphi\left(q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, b_{jj}, c_{jk})\right)$. Como $q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, a_{jj}, c_{jk})$, $q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, b_{jj}, c_{jk}) \in \mathfrak{A}_{jk}$, pelo Lema 3.39, concluímos que

$$\varphi\left(q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, h, c_{jk})\right) = \varphi\left(q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, a_{jj}, c_{jk}) + q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, b_{jj}, c_{jk})\right).$$

Como φ é injetiva, chegamos a

$$\begin{aligned} q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, h, c_{jk}) &= q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, a_{jj}, c_{jk}) + q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, b_{jj}, c_{jk}) \\ &= q_{2_*}(2^{n-2}a_{jj}, c_{jk}) + q_{2_*}(2^{n-2}b_{jj}, c_{jk}) = 2^{n-2}\left((a_{jj} + b_{jj})c_{jk}\right). \end{aligned}$$

Por sua vez, $q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, h, c_{jk}) = q_{2_*}(2^{n-2}h_{jj}, c_{jk}) = 2^{n-2}h_{jj}c_{jk}$. Assim, $h_{jj}c_{jk} = (a_{jj} + b_{jj})c_{jk}$, de onde $(h_{jj} - (a_{jj} + b_{jj}))c_{jk} = 0$. Pela arbitrariedade de $c_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, deduzimos que

$$(h_{jj} - (a_{jj} + b_{jj}))(\mathfrak{A}e_k) = \{0\}$$

e pela Condição (3.42) do Teorema 3.31, resulta que $h_{jj} - (a_{jj} + b_{jj}) = 0$. Portanto, $h_{jj} = a_{jj} + b_{jj}$. \square

Neste ponto estamos em condições de provar o Teorema 3.31, cujo enunciado é: Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' duas *-álgebras alternativas com identidades $1_{\mathfrak{A}}$ e $1_{\mathfrak{A}'}$, respectivamente, e e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} . Suponha que \mathfrak{A} satisfaz para $x \in \mathfrak{A}$

$$x(\mathfrak{A}e_i) = \{0\}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad \text{implica em} \quad x = 0.$$

Se $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ é uma função bijetiva unital que satisfaz

$$\varphi\left(q_{n_*}(\xi, \dots, \xi, a, b)\right) = q_{n_*}\left(\varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi), \varphi(a), \varphi(b)\right),$$

para todos $a, b \in \mathfrak{A}$ e $\xi \in \{e_1, e_2, 1_{\mathfrak{A}}\}$. Então, φ é *-aditiva.

Demonstração do Teorema 3.3. Observamos que a aditividade de φ segue dos Lemmas 3.37, 3.39 e 3.40. Devemos mostrar agora que φ preserva a involução. Como φ é aditiva, temos $\varphi(a + a^*) = \varphi(a) + \varphi(a^*)$. Por outro lado, também pela aditividade de φ e como φ é unital, segue que

$$\begin{aligned} 2^{n-2}\varphi(a + a^*) &= \varphi\left(2^{n-2}(a + a^*)\right) = \varphi\left(q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, a, 1_{\mathfrak{A}})\right) \\ &= q_{n_*}\left(\varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \varphi(a), \varphi(1_{\mathfrak{A}})\right) \\ &= q_{n_*}\left(1_{\mathfrak{A}'}, \dots, 1_{\mathfrak{A}'}, \varphi(a), 1_{\mathfrak{A}'}\right) \\ &= q_{2_*}\left(2^{n-2}\varphi(a), 1_{\mathfrak{A}'}\right) \\ &= 2^{n-2}\left(\varphi(a) + \varphi(a^*)\right). \end{aligned}$$

Assim, $\varphi(a + a^*) = \varphi(a) + \varphi(a^*)$. Logo, $\varphi(a) + \varphi(a^*) = \varphi(a) + \varphi(a^*)$. Portanto, $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$, isto é, φ é *-aditiva. \square

Assim como na seção anterior estamos usando uma equivalência da definição de álgebra alternativa prima que consta no capítulo de preliminares e que é a seguinte: dados $a, b \in \mathfrak{A}$, $(a\mathfrak{A})b = \{0\}$ (ou $a(\mathfrak{A}b) = \{0\}$), implica $a = 0$ ou $b = 0$. Logo, é simples notarmos que toda *-álgebra alternativa prima satisfaz a Condição (3.42) do Teorema 3.31. Portanto, o resultado que apresentaremos abaixo é uma consequência imediata do Teorema 3.31.

Corolário 3.41. *Sejam \mathfrak{A} uma *-álgebra alternativa prima e \mathfrak{A}' uma *-álgebra alternativa com unidades $1_{\mathfrak{A}}$ e $1_{\mathfrak{A}'}$, respectivamente e e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} . Se $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ é uma função bijetiva unital que satisfaça*

$$\varphi\left(q_{n_*}(\xi, \dots, \xi, a, b)\right) = q_{n_*}\left(\varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi), \varphi(a), \varphi(b)\right)$$

para todos $a, b \in \mathfrak{A}$ e $\xi \in \{1_{\mathfrak{A}}, e_1, e_2\}$, então, φ é *-aditiva.

Uma questão relevante é se conseguimos identificar alguma outra propriedade significativa de φ . A resposta é afirmativa. A partir deste ponto, nosso objetivo será demonstrar que, sob uma hipótese adicional, φ é um *-isomorfismo de anéis. Apresentaremos, a seguir, o segundo resultado principal desta seção.

Teorema 3.42. *Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' duas *-álgebras alternativas com unidades $1_{\mathfrak{A}}$ e $1_{\mathfrak{A}'}$, respectivamente, e e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} . Seja $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ uma função bijetiva unital. Supondo que \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' satisfaçam as seguintes condições, para $x \in \mathfrak{A}$*

$$x(\mathfrak{A}e_j) = \{0\}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad \text{implica em} \quad x = 0$$

e

$$y(\mathfrak{A}'\varphi(e_j)) = \{0\}, \quad j \in \{1, 2\} \quad \text{implica em} \quad y = 0. \quad (3.47)$$

Se φ satisfaz

$$\varphi\left(q_{n_*}(\xi, \dots, \xi, a, b)\right) = q_{n_*}\left(\varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi), \varphi(a), \varphi(b)\right),$$

para todos $a, b \in \mathfrak{A}$ e $\xi \in \{1_{\mathfrak{A}}, e_1, e_2\}$, então φ é *-isomorfismo de anéis.

Observamos que no Teorema 3.16 supusemos que \mathfrak{A} satisfazia as condições do Teorema 3.4 e agora no Teorema 3.42 estamos supondo que \mathfrak{A} satisfaz as condições do Teorema 3.31. Além disso, a condição que adicionamos em ambos os casos é a mesma. Salientamos que apesar das semelhanças entre nossos dois resultados serem claras, nossos estudos fazem sentido uma vez que as multiplicações que estamos considerando não são equivalentes.

Lema 3.43. *Se e_j , $j \in \{1, 2\}$, é um idempotente em \mathfrak{A} , então $f_j = \varphi(e_j)$ é um idempotente em \mathfrak{A}' e $f_j f_k = 0$, com $j \neq k$, $j, k \in \{1, 2\}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.31, temos que φ é aditiva e como φ é também unital, temos

$$\begin{aligned} 2^{n-1}f_j &= 2^{n-1}\varphi(e_j) = \varphi(2^{n-1}e_j) = \varphi\left(q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_j, e_j)\right) = q_{n_*}\left(\varphi(1_{\mathfrak{A}}), \dots, \varphi(1_{\mathfrak{A}}), \varphi(e_j), \varphi(e_j)\right) \\ &= q_{n_*}\left(1_{\mathfrak{A}'}, \dots, 1_{\mathfrak{A}'}, f_j, f_j\right) = 2^{n-1}f_jf_j. \end{aligned}$$

Assim, $f_jf_j = f_j$. Além disso, $f_j - f_jf_j = 0$, o que implica em, $f_j(1_{\mathfrak{A}'} - f_j) = 0$, ou seja, $f_jf_k = 0$, com $f_k = 1_{\mathfrak{A}} - f_j$. □

Nosso próximo objetivo é mostrar que a função φ mantém os subespaços das decomposições de Peirce.

Lema 3.44. *Se $a_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, então $\varphi(a_{jk}) \in \mathfrak{A}'_{jk}$.*

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que $\varphi(a_{jk}) \in \mathfrak{A}'_{jk}$, para $j, k \in \{1, 2\}$, $j \neq k$. Seja $a_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$. D aditividade de φ decorre que

$$\begin{aligned} 2^{n-2}\varphi(a_{jk}) &= \varphi(2^{n-2}a_{jk}) = \varphi\left(q_{n_*}(e_k, \dots, e_k, a_{jk})\right) = q_{n_*}\left(\varphi(e_k), \dots, \varphi(e_k), \varphi(a_{jk})\right) \\ &= q_{n_*}\left(f_k, \dots, f_k, \varphi(a_{jk})\right) = 2^{n-2}\left(f_k\varphi(a_{jk}) + \varphi(a_{jk})f_k\right). \end{aligned}$$

Neste caso, $\varphi(a_{jk}) = f_k\varphi(a_{jk}) + \varphi(a_{jk})f_k$ e como φ é unital, segue que

$$f_k\varphi(a_{jk})f_k = f_kf_k\varphi(a_{jk})f_k + f_k\varphi(a_{jk})f_kf_k = 2f_k\varphi(a_{jk})f_k,$$

assim, $f_k\varphi(a_{jk})f_k = 0$. Analogamente, $f_j\varphi(a_{jk})f_j = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi\left(q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, a_{jk}, e_j)\right) = q_{n_*}\left(f_j, \dots, f_j, \varphi(a_{jk}), f_j\right) \\ &= 2^{n-3}\left(f_j\varphi(a_{jk})f_j + \varphi(a_{jk})f_j + f_j\varphi(a_{jk})^*f_j + f_j\varphi(a_{jk})^*\right). \end{aligned}$$

Por conseguinte, $f_j\varphi(a_{jk})f_j + \varphi(a_{jk})f_j + f_j\varphi(a_{jk})^*f_j + f_j\varphi(a_{jk})^* = 0$. Multiplicando à esquerda por f_k e utilizando o fato de que f_j e f_k são ortogonais, obtemos

$$0 = f_kf_j\varphi(a_{jk})f_j + f_k\varphi(a_{jk})f_j + f_kf_j\varphi(a_{jk})^*f_j + f_kf_j\varphi(a_{jk})^* = f_k\varphi(a_{jk})f_j.$$

Portanto, $\varphi(a_{jk}) \in \mathfrak{A}'_{jk}$.

Finalmente vamos mostrar que $\varphi(a_{jj}) \in \mathfrak{A}'_{jj}$, $j \in \{1, 2\}$. Note que,

$$\begin{aligned} 2^{n-1}\varphi(a_{jj}) &= \varphi(2^{n-1}a_{jj}) = \varphi\left(q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, a_{jj})\right) = q_{n_*}\left(f_j, \dots, f_j, \varphi(a_{jj})\right) \\ &= 2^{n-2}\left(f_j\varphi(a_{jj}) + \varphi(a_{jj})f_j\right). \end{aligned}$$

Assim, $2\varphi(a_{jj}) = f_j\varphi(a_{jj}) + \varphi(a_{jj})f_j$. Como $f_j \in \mathfrak{A}'_{jj}$, segue que

$$f_j\left(\varphi(a_{jj})\right)_{kj} = 0, \quad \left(\varphi(a_{jj})\right)_{jk}f_j = 0, \quad f_j\left(\varphi(a_{jj})\right)_{kk} = 0 \quad \text{e} \quad \left(\varphi(a_{jj})\right)_{kk}f_j = 0.$$

Logo, $\varphi(a_{jj}) \in \mathfrak{A}'_{jj}$. □

Os resultados que se seguem têm por objetivo comprovar que φ preserva a operação de multiplicação.

Lema 3.45. Se $a_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$ e $b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, com $j \neq k$, então $\varphi(a_{jj}b_{jk}) = \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jk})$.

Demonstração. Sejam $a_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$ e $b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, com $j \neq k$. Pela aditividade de φ , deduzimos que

$$2^{n-2}\varphi(a_{jj}b_{jk}) = \varphi(2^{n-2}a_{jj}b_{jk}) = \varphi\left(q_{n_*}(e_j, \dots, e_j, a_{jj}, b_{jk})\right) = q_{n_*}\left(f_j, \dots, f_j, \varphi(a_{jj}), \varphi(b_{jk})\right).$$

Agora, do Lema 3.44 resulta que $2^{n-2}\varphi(a_{jj}b_{jk}) = 2^{n-2}\varphi(a_{jj})\varphi(b_{jk})$, de onde,

$$\varphi(a_{jj}b_{jk}) = \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jk}).$$
□

Lema 3.46. Se $a_{jj}, b_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$, então $\varphi(a_{jj}b_{jj}) = \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jj})$.

Demonstração. Seja $x \in \mathfrak{A}_{jk}$, $j \neq k$. Como $a_{jj}b_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$, pela flexibilidade da álgebra alternativa e pelo Lema 3.45, segue que

$$\begin{aligned} \varphi(a_{jj}b_{jj})\varphi(x) &= \varphi\left((a_{jj}b_{jj})x\right) = \varphi\left(a_{jj}(b_{jj}x)\right) = \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jj}x) \\ &= \varphi(a_{jj})\left(\varphi(b_{jj})\varphi(x)\right) = \left(\varphi(a_{jj})\varphi(b_{jj})\right)\varphi(x). \end{aligned}$$

Assim, $\left(\varphi(a_{jj}b_{jj}) - \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jj})\right)\varphi(x) = 0$. Como $\varphi(a_{jj}b_{jj}) - \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jj}) \in \mathfrak{A}'_{jj}$, $\varphi(x) \in \mathfrak{A}'_{jk}$ e φ é sobrejetora, chegamos a $\left(\varphi(a_{jj}b_{jj}) - \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jj})\right)\left(\mathfrak{A}'\varphi(e_k)\right) = \{0\}$. Logo, pela Condição (3.47) do Teorema 3.42, deduzimos que $\varphi(a_{jj}b_{jj}) - \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jj}) = 0$, ou seja, $\varphi(a_{jj}b_{jj}) = \varphi(a_{jj})\varphi(b_{jj})$. □

Lema 3.47. *Sejam $a_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$ e $b_{kj} \in \mathfrak{A}_{kj}$, com $j, k \in \{1, 2\}$, $j \neq k$, temos $\varphi(a_{jk}b_{kj}) = \varphi(a_{jk})\varphi(b_{kj})$.*

Demonstração. Sejam $a_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$ e $b_{kj} \in \mathfrak{A}_{kj}$, com $j, k \in \{1, 2\}$, $j \neq k$. Pela aditividade de φ , segue que

$$\begin{aligned} 2^{n-3}\varphi(a_{jk}b_{kj}) &= \varphi(2^{n-3}a_{jk}b_{kj}) = \varphi(q_{n*}(e_j, \dots, e_j, a_{jk}, b_{kj})) = q_{2*}(2^{n-3}\varphi(a_{jk}), \varphi(b_{kj})) \\ &= 2^{n-3}(\varphi(a_{jk})\varphi(b_{kj}) + \varphi(b_{kj})\varphi(a_{jk})^*) \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.44, obtemos $\varphi(a_{jk}b_{kj}) \in \mathfrak{A}'_{jj}$, $\varphi(a_{jk})\varphi(b_{kj}) \in \mathfrak{A}'_{jj}$ e $\varphi(b_{kj})\varphi(a_{jk})^* \in \mathfrak{A}'_{jk}$ e como a decomposição de Peirce é dada pela soma direta de subespaços vetoriais, concluímos que $\varphi(a_{jk}b_{kj}) = \varphi(a_{jk})\varphi(b_{kj})$. □

Lema 3.48. *Se $a_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$ e $b_{kk} \in \mathfrak{A}_{kk}$, com $j, k \in \{1, 2\}$, $j \neq k$, então $\varphi(a_{jk}b_{kk}) = \varphi(a_{jk})\varphi(b_{kk})$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathfrak{A}_{kj}$, com $k \neq j$. Pela flexibilidade da álgebra alternativa e pelos Lemas 3.45 e 3.47, segue que

$$\begin{aligned} \varphi(a_{jk}b_{kk})\varphi(x) &= \varphi((a_{jk}b_{kk})x) = \varphi(a_{jk}(b_{kk}x)) = \varphi(a_{jk})\varphi(b_{kk}x) \\ &= \varphi(a_{jk})(\varphi(b_{kk})\varphi(x)) = (\varphi(a_{jk})\varphi(b_{kk}))\varphi(x), \end{aligned}$$

de onde $(\varphi(a_{jk}b_{kk}) - \varphi(a_{jk})\varphi(b_{kk}))\varphi(x) = 0$. Como $\varphi(x) \in \mathfrak{A}'_{kj}$, $\varphi(a_{jk}b_{kk}) - \varphi(a_{jk})\varphi(b_{kk}) \in \mathfrak{A}'_{jk}$ e φ é sobrejetora, obtemos $(\varphi(a_{jk}b_{kk}) - \varphi(a_{jk})\varphi(b_{kk}))(\mathfrak{A}'\varphi(e_j)) = \{0\}$. Portanto, pela Condição (3.47) do Teorema 3.42, concluímos que $\varphi(a_{jk}b_{kk}) = \varphi(a_{jk})\varphi(b_{kk})$. □

Salientamos que no Lema 3.49 temos uma sutil diferença entre o caso associativo e o caso alternativo. No caso associativo, $a_{jk}b_{jk} = 0$, $j \neq k$, enquanto no caso alternativo, em geral, isso não é válido.

Lema 3.49. *Se $a_{jk}, b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, com $k \neq j$, então $\varphi(a_{jk}b_{jk}) = \varphi(a_{jk})\varphi(b_{jk})$.*

Demonstração. Sejam $a_{jk}, b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, $j, k \in \{1, 2\}$, $j \neq k$. Como φ é aditiva, segue que

$$\begin{aligned} 2^{n-3} \left(\varphi(a_{jk}b_{jk}) + \varphi(b_{jk}a_{jk}^*) \right) &= \varphi \left(2^{n-3} (a_{jk}b_{jk} + b_{jk}a_{jk}^*) \right) = \varphi \left(q_{n*}(e_j, \dots, e_j, a_{jk}, b_{jk}) \right) \\ &= 2^{n-3} \left(\varphi(a_{jk})\varphi(b_{jk}) + \varphi(b_{jk})\varphi(b_{jk}^*) \right). \end{aligned}$$

Como $\varphi(a_{jk})\varphi(b_{jk}) \in \mathfrak{A}'_{kj}$, $\varphi(b_{jk})\varphi(b_{jk}^*) \in \mathfrak{A}'_{jj}$ e $\varphi(a_{jk}b_{jk}) \in \mathfrak{A}'_{kj}$, obtemos

$$\varphi(a_{jk}b_{jk}) = \varphi(a_{jk})\varphi(b_{jk}).$$

□

Finalmente temos todos os resultados necessários para a demonstração do Teorema 3.42. Tal demonstração é feita de forma bem direta já que todos os cálculos necessários foram feitos para demonstrar o Teorema 3.31 e os Lemas 3.43 – 3.49.

Demonstração do Teorema 3.4. Segue do Teorema 3.31 que φ é *-aditiva e dos Lemas 3.43 – 3.49, temos que φ preserva a multiplicação, ou seja, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, para todos $a, b \in \mathfrak{A}$. Portanto, φ é um *-isomorfismo de anéis.

□

Como consequência do Teorema 3.42, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.50. *Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' duas *-álgebras alternativas primas com unidades $1_{\mathfrak{A}}$ e $1_{\mathfrak{A}'}$, respectivamente, e e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} . Se $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ é uma função bijetiva unital que satisfaz*

$$\varphi \left(q_{n*}(\xi, \dots, \xi, a, b) \right) = q_{n*} \left(\varphi(\xi), \dots, \varphi(\xi), \varphi(a), \varphi(b) \right),$$

para todos $a, b \in \mathfrak{A}$ e $\xi \in \{1_{\mathfrak{A}}, e_1, e_2\}$, então φ é um *-isomorfismo de anéis.

Observamos que, neste caso do Corolário 3.50, o grau de liberdade é n , enquanto no Teorema 3.42 é 2 (a liberdade de variação se restringe às duas primeiras variáveis). Sendo assim, o resultado com grau de liberdade n decorre diretamente do Teorema 3.42.

Corolário 3.51. *Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' *-álgebras alternativas com identidades $1_{\mathfrak{A}}$ e $1_{\mathfrak{A}'}$, respectivamente, e e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} . Seja $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ uma bijeção multiplicativa unital escalar sobre \mathbb{C} . Assuma que \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' satisfazem as seguintes condições*

$$x(\mathfrak{A}e_j) = \{0\}, j \in \{1, 2\}, \quad \text{implica em} \quad x = 0$$

e

$$y(\mathfrak{A}'\varphi(e_j)) = \{0\}, j \in \{1, 2\}, \quad \text{implica em} \quad y = 0.$$

Nestas condições, φ é uma n -função *-Jordan multiplicativa se, e só se, φ é um *-isomorfismo de anéis.

Com efeito, se $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ é uma n -função *-Jordan multiplicativa, ou seja, satisfaz

$$\varphi\left(q_{n*}(a_1, \dots, a_n)\right) = q_{n*}\left(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)\right),$$

para todos $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$ e $n \geq 2$, pelo Teorema 3.42, temos que φ é um *-isomorfismo de anéis.

Notamos que a implicação contrária pode ser verificada de forma direta. De fato, se φ é um *-isomorfismo, então se trata de uma aplicação que preserva a adição, a multiplicação e a operação de involução. Em particular, φ também conserva a multiplicação q_{n*} . Sendo assim, φ satisfaz as condições para ser considerada uma n -função *-Jordan multiplicativa.

Corolário 3.52. *Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' duas *-álgebras alternativas primas com identidades $1_{\mathfrak{A}}$ e $1_{\mathfrak{A}'}$, respectivamente, e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} . Seja $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ uma bijeção multiplicativa unital escalar sobre \mathbb{C} . Então φ é uma n -função *-Jordan bijetiva multiplicativa se, e só se, φ é um *-isomorfismo de anéis.*

Observação 3.53. *Os teoremas principais deste capítulo são válidos para $n \geq 2$. Contudo em algumas demonstrações estamos utilizando proposições e equações válidas para $n \geq 3$, mas isso não afeta os resultados para uma 2-função *-Lie (*-Jordan) multiplicativa, pois uma 2-função *-Lie (*-Jordan) multiplicativa é uma n -função *-Lie (*-Jordan) multiplicativa, para $n \geq 3$.*

Na Seção 3.2, estabelecemos que toda função *-Jordan bijetiva e unital, sob certas hipóteses, constitui um *-isomorfismo de anéis.

No Capítulo 3 provamos que toda n -função *-Lie multiplicativa é um isomorfismo e que toda n -função *-Jordan multiplicativa é um *-isomorfismo de anéis. Já no Capítulo 4, vamos demonstrar que, sob condições apropriadas, uma derivação é uma n -derivação *-aditiva.

4

DERIVAÇÕES *-JORDAN NÃO LINEARES EM *-ÁLGEBRAS ALTERNATIVAS

Este capítulo é dedicado à investigação realizada em conjunto com os pesquisadores Gabriela Moraes, Ruth Ferreira e Bruno Ferreira. Tal investigação culminou no artigo [11], intitulado “Nonlinear *-Jordan-type derivations on alternative *-algebras” que foi publicado em 2022 na revista *Siberian Electronic Mathematical Reports*. Neste artigo exibimos uma caracterização na qual, sobre algumas restrições, φ é uma derivação *-Jordan não linear se, e só se, φ é uma derivação *-aditiva.

Definição 4.1. *Seja \mathfrak{A} uma *-álgebra. Uma n -derivação *-Jordan não linear com $n \geq 2$ é uma função $\mathfrak{D} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ tal que*

$$\mathfrak{D}\left(q_{n_*}(a_1, \dots, a_n)\right) = \sum_{k=1}^n q_{n_*}\left(a_1, \dots, a_{k-1}, \mathfrak{D}(a_k), a_{k+1}, \dots, a_n\right)$$

para todos $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$.

Observamos que se $n = 2$, então \mathfrak{D} é uma derivação *-Jordan não linear, e se $n = 3$, então \mathfrak{D} é uma tripla derivação *-Jordan não linear, seguindo o mesmo padrão que os autores utilizaram no artigo [16].

Para manter a notação que utilizamos no artigo [11], e que foi introduzida em [19], para todos $a, a_{n-1}, a_n \in \mathfrak{A}$, escrevemos

$$\tilde{\xi}_a(a_{n-1}, a_n) := q_{n_*}(a, \dots, a, a_{n-1}, a_n).$$

E para simplificar os cálculos futuros usamos ainda a seguinte notação:

$$\sum_{\mathfrak{D}(a)} \tilde{\xi}_{\mathfrak{D}(a)}(a_{n-1}, a_n) := q_{n_*}(\mathfrak{D}(a), a, \dots, a, a_{n-1}, a_n) + \dots + q_{n_*}(a, \dots, a, \mathfrak{D}(a), a_{n-1}, a_n).$$

Destacamos que continuam válidas todas as propriedades da multiplicação $q_{n,*}$, que provamos na Seção 3.2 do Capítulo 3.

Agora, enunciaremos o resultado principal deste capítulo, que diz respeito à aditividade de uma derivação sob algumas condições.

Teorema 4.2. *Seja \mathfrak{A} uma *-álgebra alternativa com identidade $1_{\mathfrak{A}}$, e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} . Assuma que \mathfrak{A} satisfaz, para $x \in \mathfrak{A}$*

$$(x\mathfrak{A})e_j = \{0\}, j \in \{1, 2\}, \quad \text{implica} \quad x = 0. \quad (4.1)$$

Se $\mathfrak{D}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ é tal que

$$\mathfrak{D}\left(q_{n,*}(a_1, \dots, a_n)\right) = \sum_{k=1}^n q_{n,*}\left(a_1, \dots, a_{k-1}, \mathfrak{D}(a_k), a_{k+1}, \dots, a_n\right), \quad (4.2)$$

para todos $a_{n-1}, a_n \in \mathfrak{A}$ e $a_k = 1_{\mathfrak{A}}$, para todo $k \in \{1, \dots, n-2\}$, então \mathfrak{D} é uma derivação *-aditiva.

Assim como fizemos no Capítulo 3, utilizaremos uma sequência de lemas para detalhar as demonstrações dos resultados deste capítulo. Para os próximos resultados estamos considerando válidas as condições do Teorema 4.2.

Lema 4.3. $\mathfrak{D}(0) = 0$.

Demonstração. Observamos que

$$\mathfrak{D}(0) = \mathfrak{D}\left(q_{n,*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, 0, 0)\right) = \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \zeta_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(0, 0) + \zeta_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(0), 0) + \zeta_{1_{\mathfrak{A}}}(0, \mathfrak{D}(0)) = 0.$$

□

Lema 4.4. Se $a_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ e $b_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, então $\mathfrak{D}(a_{12} + b_{21}) = \mathfrak{D}(a_{12}) + \mathfrak{D}(b_{21})$.

Demonstração. Consideramos $h = \mathfrak{D}(a_{12} + b_{21}) - \mathfrak{D}(a_{12}) - \mathfrak{D}(b_{21})$, com $h = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}$. Assim,

$$\begin{aligned} \zeta_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, a_{12}) &= q_{n,*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, a_{12}) = q_{3,*}\left(q_{(n-2)*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}), e_1 - e_2, a_{12}\right) \\ &= q_{2,*}\left(2^{n-2}(e_1 - e_2), a_{12}\right) = q_{2,*}(2^{n-2}e_1, a_{12}) - q_{2,*}(2^{n-2}e_2, a_{12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^{n-2}(e_1 a_{12} + a_{12} e_1) - 2^{n-2}(e_2 a_{12} + a_{12} e_2) \\
 &= 2^{n-2} a_{12} - 2^{n-2} a_{12} = 0
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, b_{21}) &= q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, b_{21}) = q_{2_*}(2^{n-2}(e_1 - e_2), b_{21}) \\
 &= 2^{n-2}(e_1 b_{21} + b_{21} e_1) - 2^{n-2}(e_2 b_{21} + b_{21} e_2) = 2^{n-2}(b_{21} - b_{21}) = 0.
 \end{aligned}$$

Como a multiplicação q_{n_*} é aditiva e pelo Lema 4.3 e Condição (4.2) do Teorema 4.2, temos

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \tilde{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_1 - e_2, a_{12} + b_{21}) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(e_1 - e_2), a_{12} + b_{21}) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(a_{12} + b_{21})) \\
 &= \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, a_{12} + b_{21})\right) = \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, a_{12}) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, b_{21})\right) \\
 &= \mathfrak{D}(0) = 0 = \mathfrak{D}(0) + \mathfrak{D}(0) = \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, a_{12})\right) + \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, b_{21})\right).
 \end{aligned}$$

Desenvolvendo $\mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, a_{12})\right)$ e $\mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, b_{21})\right)$, segue que

$$\begin{aligned}
 &\mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, a_{12})\right) + \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, b_{21})\right) \\
 &= q_{n_*}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), 1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, a_{12}) + \dots + q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, \mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), e_1 - e_2, a_{12}) \\
 &\quad + q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{D}(e_1 - e_2), a_{12}) + q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, \mathfrak{D}(a_{12})) \\
 &\quad + q_{n_*}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), 1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, b_{21}) + \dots + q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, \mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), e_1 - e_2, b_{21}) \\
 &\quad + q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{D}(e_1 - e_2), b_{21}) + q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, \mathfrak{D}(b_{21})) \\
 &= q_{n_*}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), 1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, a_{12} + b_{21}) + \dots + q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, \mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), e_1 - e_2, a_{12} + b_{21}) \\
 &\quad + q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{D}(e_1 - e_2), a_{12} + b_{21}) + q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, e_1 - e_2, \mathfrak{D}(a_{12}) + \mathfrak{D}(b_{21})) \\
 &= \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \tilde{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_1 - e_2, a_{12} + b_{21}) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(e_1 - e_2), a_{12} + b_{21}) \\
 &\quad + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(a_{12}) + \mathfrak{D}(b_{21})),
 \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \check{\zeta}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_1 - e_2, a_{12} + b_{21}) + \check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(e_1 - e_2), a_{12} + b_{21}) + \check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(a_{12} + b_{21})) \\ &= \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \check{\zeta}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_1 - e_2, a_{12} + b_{21}) + \check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(e_1 - e_2), a_{12} + b_{21}) \\ & \quad + \check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(a_{12}) + \mathfrak{D}(b_{21})). \end{aligned}$$

Logo, $\check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(a_{12} + b_{21})) = \check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(a_{12}) + \mathfrak{D}(b_{21}))$. Pela aditividade de q_{n_*} , obtemos $\check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(a_{12} + b_{21}) - \mathfrak{D}(a_{12}) - \mathfrak{D}(b_{21})) = 0$, ou seja, $\check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, h) = 0$.

Nosso objetivo é mostrar que $h = 0$. Inicialmente, vamos provar que $h_{11} = 0$ e $h_{22} = 0$. Como $\check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, h) = 0$, concluímos que $\check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}) = 0$. Pela aditividade de q_{n_*} , decorre que

$$\begin{aligned} 0 &= q_{2_*}(2^{n-2}e_1, h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}) - q_{2_*}(2^{n-2}e_2, h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}) \\ &= 2^{n-2} \left((e_1h_{11} + e_1h_{12} + e_1h_{21} + e_1h_{22} + h_{11}e_1 + h_{12}e_1 + h_{21}e_1 + h_{22}e_1) \right. \\ & \quad \left. - (e_2h_{11} + e_2h_{12} + e_2h_{21} + e_2h_{22} + h_{11}e_2 + h_{12}e_2 + h_{21}e_2 + h_{22}e_2) \right) \\ &= 2^{n-2}(h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{11} - h_{21} - h_{22} - h_{12} - h_{22}) \\ &= 2^{n-1}(h_{11} - h_{22}). \end{aligned}$$

Assim $h_{11} - h_{22} = 0$. Pela decomposição de Peirce, obtemos que $h_{11} = 0$ e $h_{22} = 0$.

Agora, vamos mostrar que $h_{21} = 0$. Pela Equação (3.27), deduzimos que

$$\check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(a_{12}, e_1) = q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, a_{12}, e_1) = q_{2_*}(2^{n-2}a_{12}, e_1) = 2^{n-2}(a_{12}e_1 + e_1a_{12}^*) = 0.$$

Como a multiplicação q_{n_*} é aditiva, resulta que

$$\check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(a_{12} + b_{21}, e_1) = \check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(a_{12}, e_1) + \check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(b_{21}, e_1) = \check{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(b_{21}, e_1).$$

Dessa forma, pelo Lema 4.3, constatamos que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mathfrak{D}(1_{2\mathfrak{A}})} \check{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{2\mathfrak{A}})}(a_{12} + b_{21}, e_1) + \check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(a_{12} + b_{21}), e_1) + \check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(a_{12} + b_{21}, \mathfrak{D}(e_1)) \\
 &= \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(a_{12} + b_{21}, e_1)\right) \\
 &= \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(b_{21}, e_1)\right) = 0 + \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(b_{21}, e_1)\right) \\
 &= \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(a_{12}, e_1)\right) + \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(b_{21}, e_1)\right) \\
 &= \sum_{\mathfrak{D}(1_{2\mathfrak{A}})} \check{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{2\mathfrak{A}})}(a_{12} + b_{21}, e_1) + \check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(a_{12}) + \mathfrak{D}(b_{21}), e_1) + \check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(a_{12} + b_{21}, \mathfrak{D}(e_1)).
 \end{aligned}$$

Logo, $\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(a_{12} + b_{21}), e_1) = \check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(a_{12}) + \mathfrak{D}(b_{21}), e_1)$. Pela aditividade da multiplicação q_{n_*} , temos $\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(a_{12} + b_{21}) - \mathfrak{D}(a_{12}) - \mathfrak{D}(b_{21}), e_1) = 0$, ou seja, $\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(h, e_1) = 0$. Observamos, pela Equação (3.27), que

$$\begin{aligned}
 0 &= \check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(h, e_1) = q_{n_*}(1_{2\mathfrak{A}}, \dots, 1_{2\mathfrak{A}}, h, e_1) = q_{2_*}(2^{n-2}h, e_1) = 2^{n-2}(he_1 + e_1h^*) \\
 &= 2^{n-2}(h_{12}e_1 + h_{21}e_1 + e_1h_{12}^* + e_1h_{21}^*) = 2^{n-2}(h_{21} + h_{21}^*).
 \end{aligned}$$

Pela decomposição de Peirce, concluímos que $h_{21} = 0$.

Agora, nos resta mostrar que $h_{12} = 0$. Pela Equação (3.27), chegamos a

$$\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(b_{21}, e_2) = q_{n_*}(1_{2\mathfrak{A}}, \dots, 1_{2\mathfrak{A}}, b_{21}, e_2) = q_{2_*}(2^{n-2}b_{21}, e_2) = 2^{n-2}b_{21}e_2 + 2^{n-2}e_2b_{21}^* = 0.$$

Como a multiplicação q_{n_*} é aditiva, deduzimos

$$\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(a_{12} + b_{21}, e_2) = \check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(a_{12}, e_2) + \check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(b_{21}, e_2) = \check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(a_{12}, e_2).$$

Pelo Lema 4.3, resulta que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mathfrak{D}(1_{2\mathfrak{A}})} \check{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{2\mathfrak{A}})}(a_{12} + b_{21}, e_2) + \check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(a_{12} + b_{21}), e_2) + \check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(a_{12} + b_{21}, \mathfrak{D}(e_2)) \\
 &= \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(a_{12} + b_{21}, e_2)\right) \\
 &= \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(a_{12}, e_2)\right) = \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(a_{12}, e_2)\right) + 0 \\
 &= \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(a_{12}, e_2)\right) + \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{2\mathfrak{A}}}(b_{21}, e_2)\right)
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \xi_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(a_{12} + b_{21}, e_2) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(a_{12}) + \mathfrak{D}(b_{21}), e_2) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(a_{12} + b_{21}, \mathfrak{D}(e_2)).$$

Logo, $\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(a_{12} + b_{21}), e_2) = \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(a_{12}) + \mathfrak{D}(b_{21}), e_2)$. Novamente pela aditividade da multiplicação q_{n_*} , constatamos $\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(a_{12} + b_{21}) - \mathfrak{D}(a_{12}) - \mathfrak{D}(b_{21}), e_2) = 0$, ou seja, $\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(h, e_2) = 0$. Pela Equação (3.27), decorre que

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(h, e_2) = q_{n_*}(1_{\mathfrak{A}}, \dots, 1_{\mathfrak{A}}, h, e_2) = q_{2_*}(2^{n-2}h, e_2) = 2^{n-2}he_2 + 2^{n-2}e_2h^* \\ &= 2^{n-2}(h_{12}e_2 + e_2h_{12}^*) = 2^{n-2}(h_{12} + h_{12}^*). \end{aligned}$$

Pela decomposição de Peirce, segue que $h_{12} = 0$. Portanto, $h = 0$, ou seja,

$$\mathfrak{D}(a_{12} + b_{21}) = \mathfrak{D}(a_{12}) + \mathfrak{D}(b_{21}).$$

□

Lema 4.5. Se $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, $b_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$, $c_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ e $d_{22} \in \mathfrak{A}_{22}$, então

$$\mathfrak{D}(b_{12} + c_{21} + d_{22}) = \mathfrak{D}(b_{12}) + \mathfrak{D}(c_{21}) + \mathfrak{D}(d_{22})$$

e

$$\mathfrak{D}(a_{11} + b_{12} + c_{21}) = \mathfrak{D}(a_{11}) + \mathfrak{D}(b_{12}) + \mathfrak{D}(c_{21}).$$

Demonstração. Vamos demonstrar a primeira equação; a segunda é demonstrada de forma similar. Consideremos $h = \mathfrak{D}(b_{12} + c_{21} + d_{22}) - \mathfrak{D}(b_{12}) - \mathfrak{D}(c_{21}) - \mathfrak{D}(d_{22})$, com $h = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}$. Note que

$$\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, d_{22}) = q_{2_*}(2^{n-2}e_1, d_{22}) = 2^{n-2}(e_1d_{22} + d_{22}e_1) = 0.$$

Pela aditividade da multiplicação q_{n_*} e pelos Lemas 4.3 e 4.4, segue que

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \xi_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_1, b_{12} + c_{21} + d_{22}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(e_1), b_{12} + c_{21} + d_{22}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, \mathfrak{D}(b_{12} + c_{21} + d_{22})) \\ &= \mathfrak{D}\left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, b_{12} + c_{21} + d_{22})\right) = \mathfrak{D}\left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, b_{12} + c_{21}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, d_{22})\right) \\ &= \mathfrak{D}\left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, b_{12} + c_{21})\right) = \mathfrak{D}\left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, b_{12} + c_{21})\right) + \mathfrak{D}\left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, d_{22})\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathfrak{D}\left(\tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, b_{12})\right) + \mathfrak{D}\left(\tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, c_{21})\right) + \mathfrak{D}\left(\tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, d_{22})\right) \\
 &= \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \tilde{\zeta}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_1, b_{12}) + \tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(e_1), b_{12}\right) + \tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1, \mathfrak{D}(b_{12})\right) \\
 &\quad + \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \tilde{\zeta}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_1, c_{21}) + \tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(e_1), c_{21}\right) + \tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1, \mathfrak{D}(c_{21})\right) \\
 &\quad + \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \tilde{\zeta}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_1, d_{22}) + \tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(e_1), d_{22}\right) + \tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1, \mathfrak{D}(d_{22})\right) \\
 &= \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \tilde{\zeta}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_1, b_{12} + c_{21} + d_{22}) + \tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(e_1), b_{12} + c_{21} + d_{22}\right) \\
 &\quad + \tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1, \mathfrak{D}(b_{12}) + \mathfrak{D}(c_{21}) + \mathfrak{D}(d_{22})\right).
 \end{aligned}$$

Assim, $\tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1, \mathfrak{D}(b_{12} + c_{21} + d_{22})\right) = \tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1, \mathfrak{D}(b_{12}) + \mathfrak{D}(c_{21}) + \mathfrak{D}(d_{22})\right)$. Novamente pela aditividade da multiplicação $q_{n,*}$, obtemos

$$\tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1, \mathfrak{D}(b_{12} + c_{21} + d_{22}) - \mathfrak{D}(b_{12}) - \mathfrak{D}(c_{21}) - \mathfrak{D}(d_{22})\right) = 0,$$

ou seja, $\tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, h) = 0$. Pela Equação (3.27), concluímos que

$$0 = \tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, h) = q_{2,*}(2^{n-2}e_1, h) = 2^{n-2}(2h_{11} + h_{12} + h_{21}).$$

Da decomposição de Peirce, chegamos a $h_{11} = h_{12} = h_{21} = 0$.

Agora, para quaisquer $t_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ e $t_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, deduzimos

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, t_{12}) &= q_{2,*}(2^{n-2}(e_1 - e_2), t_{12}) = 2^{n-2}\left((e_1 - e_2)t_{12} + t_{12}(e_1 - e_2)\right) \\
 &= 2^{n-2}(t_{12} - t_{12}) = 0
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, t_{21}) &= q_{2,*}(2^{n-2}(e_1 - e_2), t_{21}) = 2^{n-2}\left((e_1 - e_2)t_{21} + t_{21}(e_1 - e_2)\right) \\
 &= 2^{n-2}(-t_{21} + t_{21}) = 0.
 \end{aligned}$$

Da aditividade da multiplicação $q_{n,*}$ e pelo Lema 4.3, resulta que

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \check{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_1 - e_2, b_{12} + c_{21} + d_{22}) + \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(e_1 - e_2), b_{12} + c_{21} + d_{22}\right) \\
& \quad + \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(b_{12} + c_{21} + d_{22})\right) \\
& = \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, b_{12} + c_{21} + d_{22})\right) \\
& = \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, b_{12}) + \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, c_{21}) + \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, d_{22})\right) \\
& = \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, d_{22})\right) = \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, b_{12})\right) + \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, c_{21})\right) \\
& \quad + \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, d_{22})\right) \\
& = \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \check{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_1 - e_2, b_{12}) + \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(e_1 - e_2), b_{12}\right) + \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(b_{12})\right) \\
& \quad + \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \check{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_1 - e_2, c_{21}) + \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(e_1 - e_2), c_{21}\right) + \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(c_{21})\right) \\
& \quad + \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \check{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_1 - e_2, d_{22}) + \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(e_1 - e_2), d_{22}\right) + \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(d_{22})\right) \\
& = \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \check{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_1 - e_2, b_{12} + c_{21} + d_{22}) + \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(e_1 - e_2), b_{12} + c_{21} + d_{22}\right) \\
& \quad + \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(b_{12}) + \mathfrak{D}(c_{21}) + \mathfrak{D}(d_{22})\right).
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(b_{12} + c_{21} + d_{22})\right) = \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(b_{12}) + \mathfrak{D}(c_{21}) + \mathfrak{D}(d_{22})\right)$ e, portanto,

$$\check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1 - e_2, \mathfrak{D}(b_{12} + c_{21} + d_{22}) - \mathfrak{D}(b_{12}) - \mathfrak{D}(c_{21}) - \mathfrak{D}(d_{22})\right) = 0,$$

ou seja, $\check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, h) = 0$. Assim, $0 = \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, h) = \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1 - e_2, h_{22}) = -2^{n-1}h_{22}$, ou ainda, $h_{22} = 0$. Finalmente, $h = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22} = 0$, de onde,

$$h = \mathfrak{D}(b_{12} + c_{21} + d_{22}) - \mathfrak{D}(b_{12}) - \mathfrak{D}(c_{21}) - \mathfrak{D}(d_{22}),$$

concluimos que $\mathfrak{D}(b_{12} + c_{21} + d_{22}) = \mathfrak{D}(b_{12}) + \mathfrak{D}(c_{21}) + \mathfrak{D}(d_{22})$. □

Lema 4.6. Se $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, $b_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$, $c_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$ e $d_{22} \in \mathfrak{A}_{22}$, então

$$\mathfrak{D}(a_{11} + b_{12} + c_{21} + d_{22}) = \mathfrak{D}(a_{11}) + \mathfrak{D}(b_{12}) + \mathfrak{D}(c_{21}) + \mathfrak{D}(d_{22}).$$

Demonstração. Consideremos $h = \mathfrak{D}(a_{11} + b_{12} + c_{21} + d_{22}) - \mathfrak{D}(a_{11}) - \mathfrak{D}(b_{12}) - \mathfrak{D}(c_{21}) - \mathfrak{D}(d_{22})$, com $h = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}$. Notamos que

$$\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, a_{11}) = q_{2_*}(2^{n-2}e_2, a_{11}) = 2^{n-2}(e_2a_{11} + a_{11}e_2) = 0.$$

Pela aditividade da multiplicação q_{n_*} e pelos Lemas 4.3 e 4.5, temos

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \tilde{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_2, a_{11} + b_{12} + c_{21} + d_{22}) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(e_2), a_{11} + b_{12} + c_{21} + d_{22}\right) \\ & \quad + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_2, \mathfrak{D}(a_{11} + b_{12} + c_{21} + d_{22})\right) \\ & = \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, a_{11} + b_{12} + c_{21} + d_{22})\right) = \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, a_{11}) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, b_{12} + c_{21} + d_{22})\right) \\ & = \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, b_{12} + c_{21} + d_{22})\right) = \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, b_{12}) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, c_{21}) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, d_{22})\right) \\ & = \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, b_{12})\right) + \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, c_{21})\right) + \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, d_{22})\right) \\ & = \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, a_{11})\right) + \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, b_{12})\right) + \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, c_{21})\right) + \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, d_{22})\right) \\ & = \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \tilde{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_2, a_{11} + b_{12} + c_{21} + d_{22}) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(e_2), a_{11} + b_{12} + c_{21} + d_{22}\right) \\ & \quad + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_2, \mathfrak{D}(a_{11}) + \mathfrak{D}(b_{12}) + \mathfrak{D}(c_{21}) + \mathfrak{D}(d_{22})\right), \end{aligned}$$

de onde, $\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_2, \mathfrak{D}(a_{11} + b_{12} + c_{21} + d_{22})\right) = \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_2, \mathfrak{D}(a_{11}) + \mathfrak{D}(b_{12}) + \mathfrak{D}(c_{21}) + \mathfrak{D}(d_{22})\right)$. Pela aditividade da multiplicação q_{n_*} , segue que

$$\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_2, \mathfrak{D}(a_{11} + b_{12} + c_{21} + d_{22}) - \mathfrak{D}(a_{11}) - \mathfrak{D}(b_{12}) - \mathfrak{D}(c_{21}) - \mathfrak{D}(d_{22})\right) = 0,$$

ou seja, $\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, h) = 0$. Assim, pela Equação (3.27), decorre que

$$0 = \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_2, h) = q_{2_*}(2^{n-2}e_2, h) = 2^{n-2}(h_{12} + h_{21} + 2h_{22}).$$

Pela decomposição de Peirce, obtemos $h_{12} = h_{21} = h_{22} = 0$.

Nos resta mostrar que $h_{11} = 0$. Refazendo os mesmos cálculos trocando e_2 por e_1 , concluímos que $\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, h) = 0$, de onde $0 = \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, h) = \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, h_{11}) = q_{2_*}(2^{n-2}e_1, h_{11}) = 2^{n-1}h_{11}$. Assim, $h_{11} = 0$. Logo, $h = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22} = 0$, isto é,

$$\mathfrak{D}(a_{11} + b_{12} + c_{21} + d_{22}) = \mathfrak{D}(a_{11}) + \mathfrak{D}(b_{12}) + \mathfrak{D}(c_{21}) + \mathfrak{D}(d_{22}).$$

□

Nosso próximo lema evidencia uma sútíl diferença para o caso de álgebras associativas. Como é bem conhecido, para as álgebras associativas, temos $a_{jk}b_{jk} = 0$, $j \neq k$, mas este fato, em geral, não é válido para álgebras alternativas.

Lema 4.7. *Se $a_{12}, b_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ e $c_{21}, d_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, então*

$$\mathfrak{D}(c_{21}d_{21} + c_{21}^*) = \mathfrak{D}(c_{21}d_{21}) + \mathfrak{D}(c_{21}^*)$$

e

$$\mathfrak{D}(a_{12}b_{12} + a_{12}^*) = \mathfrak{D}(a_{12}b_{12}) + \mathfrak{D}(a_{12}^*).$$

Demonstração. Vamos mostrar apenas a primeira equação; a segunda pode ser provada de forma análoga. Observamos, pela Equação (3.27), que

$$\begin{aligned} \xi_{1\mathfrak{A}} \left(c_{21}, \frac{e_1 + d_{21}}{2^{n-2}} \right) &= q_{2*} \left(2^{n-2}c_{21}, \frac{e_1}{2^{n-2}} \right) + q_{2*} \left(2^{n-2}c_{21}, \frac{d_{21}}{2^{n-2}} \right) \\ &= c_{21} + c_{21}^* + c_{21}d_{21} + d_{21}c_{21}^*. \end{aligned}$$

Como $c_{21} \in \mathfrak{A}_{21}$, $c_{21}^*, c_{21}d_{21} \in \mathfrak{A}_{12}$ e $d_{21}c_{21}^* \in \mathfrak{A}_{22}$, pelo Lema 4.5, temos

$$\begin{aligned} &\mathfrak{D}(c_{21}) + \mathfrak{D}(c_{21}^* + c_{21}d_{21}) + \mathfrak{D}(d_{21}c_{21}^*) \\ &= \mathfrak{D}(c_{21} + c_{21}^* + c_{21}d_{21} + d_{21}c_{21}^*) \\ &= \mathfrak{D} \left(\xi_{1\mathfrak{A}} \left(c_{21}, \frac{e_1 + d_{21}}{2^{n-2}} \right) \right) \\ &= \sum_{\mathfrak{D}(1\mathfrak{A})} \xi_{\mathfrak{D}(1\mathfrak{A})} \left(c_{21}, \frac{e_1 + d_{21}}{2^{n-2}} \right) + \xi_{1\mathfrak{A}} \left(\mathfrak{D}(c_{21}), \frac{e_1 + d_{21}}{2^{n-2}} \right) + \xi_{1\mathfrak{A}} \left(c_{21}, \mathfrak{D} \left(\frac{e_1 + d_{21}}{2^{n-2}} \right) \right) \\ &= \sum_{\mathfrak{D}(1\mathfrak{A})} \xi_{\mathfrak{D}(1\mathfrak{A})} \left(c_{21}, \frac{e_1 + d_{21}}{2^{n-2}} \right) + \xi_{1\mathfrak{A}} \left(\mathfrak{D}(c_{21}), \frac{e_1 + d_{21}}{2^{n-2}} \right) \\ &\quad + \xi_{1\mathfrak{A}} \left(c_{21}, \mathfrak{D} \left(\frac{e_1}{2^{n-2}} \right) + \mathfrak{D} \left(\frac{d_{21}}{2^{n-2}} \right) \right) \\ &= \mathfrak{D} \left(\xi_{1\mathfrak{A}} \left(c_{21}, \frac{e_1}{2^{n-2}} \right) \right) + \mathfrak{D} \left(\xi_{1\mathfrak{A}} \left(c_{21}, \frac{d_{21}}{2^{n-2}} \right) \right) \\ &= \mathfrak{D} \left(q_{2*} \left(2^{n-2}c_{21}, \frac{e_1}{2^{n-2}} \right) \right) + \mathfrak{D} \left(q_{2*} \left(2^{n-2}c_{21}, \frac{d_{21}}{2^{n-2}} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathfrak{D}(c_{21} + c_{21}^*) + \mathfrak{D}(c_{21}d_{21} + d_{21}c_{21}^*) \\
 &= \mathfrak{D}(c_{21}) + \mathfrak{D}(c_{21}^*) + \mathfrak{D}(c_{21}d_{21}) + \mathfrak{D}(d_{21}c_{21}^*).
 \end{aligned}$$

Logo, $\mathfrak{D}(c_{21}d_{21} + c_{21}^*) = \mathfrak{D}(c_{21}d_{21}) + \mathfrak{D}(c_{21}^*)$.

□

Lema 4.8. Se $a_{jk}, b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, $j \neq k$, então $\mathfrak{D}(a_{jk} + b_{jk}) = \mathfrak{D}(a_{jk}) + \mathfrak{D}(b_{jk})$.

Demonstração. Pela aditividade da multiplicação q_{n^*} e Equação (3.27), temos

$$\begin{aligned}
 &\xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\frac{e_j + a_{jk}}{2^{n-2}}, e_k + b_{jk} \right) \\
 &= \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\frac{e_j}{2^{n-2}}, e_k \right) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\frac{e_j}{2^{n-2}}, b_{jk} \right) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\frac{a_{jk}}{2^{n-2}}, e_k \right) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\frac{a_{jk}}{2^{n-2}}, b_{jk} \right) \\
 &= 0 + q_{2^*} \left(2^{n-2} \frac{e_j}{2^{n-2}}, b_{jk} \right) + q_{2^*} \left(2^{n-2} \frac{a_{jk}}{2^{n-2}}, e_k \right) + q_{2^*} \left(2^{n-2} \frac{a_{jk}}{2^{n-2}}, b_{jk} \right) \\
 &= b_{jk} + a_{jk} + a_{jk}^* + a_{jk}b_{jk} + b_{jk}a_{jk}^*.
 \end{aligned}$$

Pelos Lemas 4.7 e 4.6, como $a_{jk}, b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, $a_{jk}b_{jk} \in \mathfrak{A}_{kj}$ e $b_{jk}a_{jk}^* \in \mathfrak{A}_{jj}$, segue que

$$\begin{aligned}
 &\mathfrak{D}(a_{jk} + b_{jk}) + \mathfrak{D}(a_{jk}^* + a_{jk}b_{jk}) + \mathfrak{D}(b_{jk}a_{jk}^*) = \mathfrak{D} \left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\frac{e_j + a_{jk}}{2^{n-2}}, e_k + b_{jk} \right) \right) \\
 &= \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \xi_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \left(\frac{e_j + a_{jk}}{2^{n-2}}, e_k + b_{jk} \right) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\mathfrak{D} \left(\frac{e_j + a_{jk}}{2^{n-2}} \right), e_k + b_{jk} \right) \\
 &\quad + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\frac{e_j + a_{jk}}{2^{n-2}}, \mathfrak{D}(e_k + b_{jk}) \right) \\
 &= \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \xi_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \left(\frac{e_j + a_{jk}}{2^{n-2}}, e_k + b_{jk} \right) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\mathfrak{D} \left(\frac{e_j}{2^{n-2}} \right) + \mathfrak{D} \left(\frac{a_{jk}}{2^{n-2}} \right), e_k + b_{jk} \right) \\
 &\quad + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\frac{e_j + a_{jk}}{2^{n-2}}, \mathfrak{D}(e_k) + \mathfrak{D}(b_{jk}) \right) \\
 &= \mathfrak{D} \left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\frac{e_j}{2^{n-2}}, e_k \right) \right) + \mathfrak{D} \left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\frac{a_{jk}}{2^{n-2}}, b_{jk} \right) \right) + \mathfrak{D} \left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\frac{a_{jk}}{2^{n-2}}, e_k \right) \right) \\
 &\quad + \mathfrak{D} \left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\frac{e_j}{2^{n-2}}, b_{jk} \right) \right) \\
 &= \mathfrak{D}(a_{jk}b_{jk} + b_{jk}a_{jk}^*) + \mathfrak{D}(a_{jk} + a_{jk}^*) + \mathfrak{D}(b_{jk})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathfrak{D}(a_{jk}b_{jk}) + \mathfrak{D}(b_{jk}a_{jk}^*) + \mathfrak{D}(a_{jk}) + \mathfrak{D}(a_{jk}^*) + \mathfrak{D}(b_{jk}) \\
&= \mathfrak{D}(a_{jk}) + \mathfrak{D}(b_{jk}) + \mathfrak{D}(a_{jk}^* + a_{jk}b_{jk}) + \mathfrak{D}(b_{jk}a_{jk}^*).
\end{aligned}$$

Logo, $\mathfrak{D}(a_{jk} + b_{jk}) = \mathfrak{D}(a_{jk}) + \mathfrak{D}(b_{jk})$. □

Lema 4.9. *Se $a_{jj}, b_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$, $j \in \{1, 2\}$, então $\mathfrak{D}(a_{jj} + b_{jj}) = \mathfrak{D}(a_{jj}) + \mathfrak{D}(b_{jj})$.*

Demonstração. Consideremos $h = \mathfrak{D}(a_{jj} + b_{jj}) - \mathfrak{D}(a_{jj}) - \mathfrak{D}(b_{jj})$, com $h = h_{11} + h_{12} + h_{21} + h_{22}$. Para qualquer $c_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$, da Equação (3.27), temos $\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, c_{jj}) = 2^{n-2}(e_k c_{jj} + c_{jj} e_k) = 0$, com $k \neq j$. Pela aditividade da multiplicação $q_{n,*}$, segue que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \tilde{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_k, a_{jj} + b_{jj}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(e_k), a_{jj} + b_{jj}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, \mathfrak{D}(a_{jj} + b_{jj})) \\
&= \mathfrak{D}\left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, a_{jj} + b_{jj})\right) \\
&= \mathfrak{D}\left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, a_{jj}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, b_{jj})\right) \\
&= \mathfrak{D}\left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, a_{jj})\right) + \mathfrak{D}\left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, b_{jj})\right) \\
&= \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \tilde{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_k, a_{jj}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(e_k), a_{jj}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, \mathfrak{D}(a_{jj})) \\
&\quad + \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \tilde{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_k, b_{jj}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(e_k), b_{jj}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, \mathfrak{D}(b_{jj})) \\
&= \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \tilde{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_k, a_{jj} + b_{jj}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(e_k), a_{jj} + b_{jj}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, \mathfrak{D}(a_{jj}) + \mathfrak{D}(b_{jj})),
\end{aligned}$$

de onde, $\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, \mathfrak{D}(a_{jj} + b_{jj})) = \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, \mathfrak{D}(a_{jj}) + \mathfrak{D}(b_{jj}))$. Como a multiplicação $q_{n,*}$ é aditiva, obtemos $\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, \mathfrak{D}(a_{jj} + b_{jj}) - \mathfrak{D}(a_{jj}) - \mathfrak{D}(b_{jj})) = 0$, ou seja, $\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, h) = 0$, e também concluímos que

$$0 = \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, h) = \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, h_{jk}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, h_{kj}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_k, h_{kk}) = 2^{n-2}(h_{jk} + h_{kj} + 2h_{kk}).$$

Pela decomposição de Peirce, obtemos que $h_{jk} = h_{kj} = h_{kk} = 0$.

Resta mostrar que $h_{jj} = 0$. Para qualquer $c_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, $j \neq k$, pelo Lema 4.6, deduzimos que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \xi_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(a_{jj} + b_{jj}, c_{jk}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\mathfrak{D}(a_{jj} + b_{jj}), c_{jk} \right) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(a_{jj} + b_{jj}, \mathfrak{D}(c_{jk}) \right) \\
 &= \mathfrak{D} \left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(a_{jj} + b_{jj}, c_{jk}) \right) \\
 &= \mathfrak{D} \left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(a_{jj}, c_{jk}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(b_{jj}, c_{jk}) \right) = \mathfrak{D} \left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(a_{jj}, c_{jk}) \right) + \mathfrak{D} \left(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(b_{jj}, c_{jk}) \right) \\
 &= \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \xi_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(a_{jj}, c_{jk}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\mathfrak{D}(a_{jj}), c_{jk} \right) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(a_{jj}, \mathfrak{D}(c_{jk}) \right) \\
 &\quad + \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \xi_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(b_{jj}, c_{jk}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\mathfrak{D}(b_{jj}), c_{jk} \right) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(b_{jj}, \mathfrak{D}(c_{jk}) \right) \\
 &= \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \xi_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(a_{jj} + b_{jj}, c_{jk}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\mathfrak{D}(a_{jj}) + \mathfrak{D}(b_{jj}), c_{jk} \right) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(a_{jj} + b_{jj}, \mathfrak{D}(c_{jk}) \right),
 \end{aligned}$$

de onde, $\xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\mathfrak{D}(a_{jj} + b_{jj}), c_{jk} \right) = \xi_{1_{\mathfrak{A}}} \left(\mathfrak{D}(a_{jj}) + \mathfrak{D}(b_{jj}), c_{jk} \right)$, ou seja, $\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(h, c_{jk}) = 0$. Logo,

$$0 = \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(h, c_{jk}) = \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(h_{jj}, c_{jk}) = 2^{n-2}(h_{jj}c_{jk} + c_{jk}h_{jj}^*) = 2^{n-2}h_{jj}c_{jk}.$$

e, portanto, $h_{jj}c_{jk} = 0$, para qualquer $c_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$. Assim, $(h_{jj}t)e_k = 0$, para todo $t \in \mathfrak{A}$. Pela Condição (4.1) do Teorema 4.2, constatamos que $h_{jj} = 0$. Consequentemente, $h = h_{jj} + h_{jk} + h_{kj} + h_{kk} = 0$, ou seja, $\mathfrak{D}(a_{jj} + b_{jj}) = \mathfrak{D}(a_{jj}) + \mathfrak{D}(b_{jj})$. □

Nosso próximo lema mostra a aditividade de \mathfrak{D} , e com isso teremos mostrado parte do Teorema 4.2.

Lema 4.10. \mathfrak{D} é aditiva.

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathfrak{A}$, com $a = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$ e $b = b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$. Pelos Lemas 4.6, 4.8 e 4.9, temos

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{D}(a + b) &= \mathfrak{D}(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} + b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}) \\
 &= \mathfrak{D} \left((a_{11} + b_{11}) + (a_{12} + b_{12}) + (a_{21} + b_{21}) + (a_{22} + b_{22}) \right) \\
 &= \mathfrak{D}(a_{11} + b_{11}) + \mathfrak{D}(a_{12} + b_{12}) + \mathfrak{D}(a_{21} + b_{21}) + \mathfrak{D}(a_{22} + b_{22})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathfrak{D}(a_{11}) + \mathfrak{D}(b_{11}) + \mathfrak{D}(a_{12}) + \mathfrak{D}(b_{12}) + \mathfrak{D}(a_{21}) + \mathfrak{D}(b_{21}) + \mathfrak{D}(a_{22}) + \mathfrak{D}(b_{22}) \\
&= \mathfrak{D}(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}) + \mathfrak{D}(b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}) = \mathfrak{D}(a) + \mathfrak{D}(b).
\end{aligned}$$

□

O lema a seguir mostra que $\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})$ anula o produto q_{2*} para todo $a \in \mathfrak{A}$.

Lema 4.11. $q_{2*}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), a) = 0$.

Demonstração. Notamos que $q_{2*}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), 1_{\mathfrak{A}}) = \mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})1_{\mathfrak{A}} + 1_{\mathfrak{A}}\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})^* = \mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}) + \mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})^*$. Pela aditividade de \mathfrak{D} , segue que

$$\begin{aligned}
2^{n-1}\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}) &= \mathfrak{D}(2^{n-1}1_{\mathfrak{A}}) = \mathfrak{D}(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(1_{\mathfrak{A}}, 1_{\mathfrak{A}})) \\
&= \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \xi_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(1_{\mathfrak{A}}, 1_{\mathfrak{A}}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), 1_{\mathfrak{A}}) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(1_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})) \\
&= (n-2)2^{n-2}q_{2*}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), 1_{\mathfrak{A}}) + 2^{n-2}q_{2*}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), 1_{\mathfrak{A}}) + 2^{n-1}\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}) \\
&= (n-1)2^{n-2}q_{2*}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), 1_{\mathfrak{A}}) + 2^{n-1}\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}),
\end{aligned}$$

de onde, $q_{2*}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), 1_{\mathfrak{A}}) = 0$. Assim, para $a \in \mathfrak{A}$ qualquer e pela aditividade de \mathfrak{D} , concluímos que

$$\begin{aligned}
2^{n-1}\mathfrak{D}(a) &= \mathfrak{D}(2^{n-1}a) = \mathfrak{D}(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(1_{\mathfrak{A}}, a)) \\
&= \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \xi_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(1_{\mathfrak{A}}, a) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), a) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(1_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{D}(a)) \\
&= \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), a) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(1_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{D}(a)) \\
&= 2^{n-2}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})a + a\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})^*) + 2^{n-2}(1_{\mathfrak{A}}\mathfrak{D}(a) + \mathfrak{D}(a)1_{\mathfrak{A}}) \\
&= 2^{n-2}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})a + a\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})^*) + 2^{n-1}\mathfrak{D}(a).
\end{aligned}$$

Logo, $\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})a + a\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})^* = 0$, ou seja, $q_{2*}(\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}), a) = 0$.

□

A seguir vamos provar que a imagem de e_j por \mathfrak{D} é um elemento simétrico, para todo $j \in \{1, 2\}$.

Lema 4.12. $\mathfrak{D}(e_j) = \mathfrak{D}(e_j)^*$, $j \in \{1, 2\}$.

Demonstração. Para todo $a \in \mathfrak{A}$ simétrico, ou seja, $a = a^*$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(a, e_j) &= q_{2_*}(2^{n-2}a, e_j) = 2^{n-2}(ae_j + e_ja^*) = 2^{n-2}(ae_j + e_ja) = 2^{n-2}(e_ja + ae_j) \\ &= q_{2_*}(2^{n-2}e_j, a) = \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_j, a).\end{aligned}$$

Assim, $\mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(a, e_j)\right) = \mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_j, a)\right)$. Como

$$\mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(a, e_j)\right) = \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \tilde{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(a, e_j) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(a), e_j\right) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(a, \mathfrak{D}(e_j)\right)$$

e

$$\mathfrak{D}\left(\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_j, a)\right) = \sum_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})} \tilde{\xi}_{\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})}(e_j, a) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(e_j), a\right) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_j, \mathfrak{D}(a)\right)$$

pelo Lema 4.11, segue que $\tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(a), e_j\right) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(a, \mathfrak{D}(e_j)\right) = \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(e_j), a\right) + \tilde{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_j, \mathfrak{D}(a)\right)$.

Logo,

$$q_{2_*}\left(2^{n-2}\mathfrak{D}(a), e_j\right) + q_{2_*}\left(2^{n-2}a, \mathfrak{D}(e_j)\right) = q_{2_*}\left(2^{n-2}\mathfrak{D}(e_j), a\right) + q_{2_*}\left(2^{n-2}e_j, \mathfrak{D}(a)\right).$$

Desenvolvendo o cálculo acima, obtemos

$$\begin{aligned}2^{n-2}\left(\mathfrak{D}(a)e_j + e_j\mathfrak{D}(a)^*\right) + 2^{n-2}\left(a\mathfrak{D}(e_j) + \mathfrak{D}(e_j)a^*\right) \\ = 2^{n-2}\left(\mathfrak{D}(e_j)a + a\mathfrak{D}(e_j)^*\right) + 2^{n-2}\left(e_j\mathfrak{D}(a) + \mathfrak{D}(a)e_j^*\right).\end{aligned}$$

Como a e e_k são simétricos, decorre que $2^{n-2}\left(e_j\mathfrak{D}(a)^* + a\mathfrak{D}(e_j)\right) = 2^{n-2}\left(a\mathfrak{D}(e_j)^* + e_j\mathfrak{D}(a)\right)$.

Assim,

$$e_j\left(\mathfrak{D}(a)^* - \mathfrak{D}(a)\right) = a\left(\mathfrak{D}(e_j) - \mathfrak{D}(e_j)^*\right).$$

Multiplicando a equação acima por e_k à esquerda, concluímos que $e_k a\left(\mathfrak{D}(e_j) - \mathfrak{D}(e_j)^*\right) = 0$, para todo $a \in \mathfrak{A}$ simétrico. Para cada $b \in \mathfrak{A}$, escrevemos $b = b_1 + ib_2$, em que $b_1 = \frac{b+b^*}{2}$ e $b_2 = \frac{b-b^*}{2i}$ são simétricos. Neste caso, $e_k b\left(\mathfrak{D}(e_j) - \mathfrak{D}(e_j)^*\right) = 0$, para todo $b \in \mathfrak{A}$. Aplicando a involução, deduzimos que $\left(\mathfrak{D}(e_j)^* - \mathfrak{D}(e_j)\right)b^*e_k^* = 0$, de onde,

$$\left(\mathfrak{D}(e_j)^* - \mathfrak{D}(e_j)\right)b_1^*e_k^* + \left(\mathfrak{D}(e_j)^* - \mathfrak{D}(e_j)\right)b_2^*e_k^* = 0.$$

Da forma como b_1 e b_2 foram escritos e por serem simétricos, temos $(\mathfrak{D}(e_j)^* - \mathfrak{D}(e_j))b_1e_k = 0$ e $(\mathfrak{D}(e_j)^* - \mathfrak{D}(e_j))b_2e_k = 0$. Logo,

$$(\mathfrak{D}(e_j)^* - \mathfrak{D}(e_j))be_k = 0.$$

Pela arbitrariedade de $b \in \mathfrak{A}$, $(\mathfrak{D}(e_j)^* - \mathfrak{D}(e_j))\mathfrak{A}e_k = \{0\}$ e pela Condição (4.1) do Teorema 4.2, constatamos que $\mathfrak{D}(e_j) = \mathfrak{D}(e_j)^*$. □

Lema 4.13. $\mathfrak{D}(e_j) = e_1\mathfrak{D}(e_j)e_2 + e_2\mathfrak{D}(e_j)e_1$, $j \in \{1, 2\}$ e $\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}) = 0$.

Demonstração. Inicialmente vamos provar que

$$e_1\mathfrak{D}(e_1)e_2 + e_2\mathfrak{D}(e_1)e_1 + e_1\mathfrak{D}(e_2)e_2 + e_2\mathfrak{D}(e_2)e_1 = 0.$$

Pelos Lemas 4.11 e 4.12, temos

$$\begin{aligned} 2^{n-1}\mathfrak{D}(e_j) &= \mathfrak{D}(\xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_j, e_j)) = \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{D}(e_j), e_j) + \xi_{1_{\mathfrak{A}}}(e_j, \mathfrak{D}(e_j)) \\ &= 2^{n-2}(\mathfrak{D}(e_j)e_j + e_j\mathfrak{D}(e_j)^*) + 2^{n-2}(e_j\mathfrak{D}(e_j) + \mathfrak{D}(e_j)e_j^*) \\ &= 2^{n-2}(2\mathfrak{D}(e_j)e_j + 2e_j\mathfrak{D}(e_j)) = 2^{n-1}(\mathfrak{D}(e_j)e_j + e_j\mathfrak{D}(e_j)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Multiplicando ambos os lados da Equação (4.3) por e_k , com $k \neq j$, segue que

$$e_k\mathfrak{D}(e_j)e_k = e_k\mathfrak{D}(e_j)e_je_k + e_ke_j\mathfrak{D}(e_j)e_k = 0.$$

Agora multiplicando a Equação (4.3) por e_j , obtemos

$$e_j\mathfrak{D}(e_j)e_j = e_j\mathfrak{D}(e_j)e_je_j + e_je_j\mathfrak{D}(e_j)e_j = 2e_j\mathfrak{D}(e_j)e_j,$$

de onde $e_j\mathfrak{D}(e_j)e_j = 0$. Logo, obtemos a primeira parte do resultado,

$$\mathfrak{D}(e_j) = e_1\mathfrak{D}(e_j)e_2 + e_2\mathfrak{D}(e_j)e_1, \quad \text{com } j \in \{1, 2\}. \quad (4.4)$$

Nossos cálculos agora serão no sentido de provar que $\mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}) = 0$. Pelo Lema 4.12 e pela Equação (4.4), concluímos que

$$\begin{aligned}
 0 &= \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(e_1, e_2)\right) = \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(e_1), e_2\right) + \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(e_1, \mathfrak{D}(e_2)\right) \\
 &= 2^{n-2}\left(\mathfrak{D}(e_1)e_2 + e_2\mathfrak{D}(e_1)^*\right) + 2^{n-2}\left(e_1\mathfrak{D}(e_2) + \mathfrak{D}(e_2)e_1^*\right) \\
 &= 2^{n-2}\left(e_1\mathfrak{D}(e_1)e_2e_2 + e_2e_2\mathfrak{D}(e_1)e_1 + e_1e_1\mathfrak{D}(e_2)e_2 + e_2\mathfrak{D}(e_2)e_1e_1\right) \\
 &= 2^{n-2}\left(e_1\mathfrak{D}(e_1)e_2 + e_2\mathfrak{D}(e_1)e_1 + e_1\mathfrak{D}(e_2)e_2 + e_2\mathfrak{D}(e_2)e_1\right),
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$e_1\mathfrak{D}(e_1)e_2 + e_2\mathfrak{D}(e_1)e_1 + e_1\mathfrak{D}(e_2)e_2 + e_2\mathfrak{D}(e_2)e_1 = 0.$$

Agora, pelo Lema 4.10, como $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ e pela aditividade de \mathfrak{D} e Equação (4.4), obtemos que

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}}) &= \mathfrak{D}(e_1 + 1_{\mathfrak{A}} - e_1) = \mathfrak{D}(e_1 + e_2) = \mathfrak{D}(e_1) + \mathfrak{D}(e_2) \\
 &= e_1\mathfrak{D}(e_1)e_2 + e_2\mathfrak{D}(e_1)e_1 + e_1\mathfrak{D}(e_2)e_2 + e_2\mathfrak{D}(e_2)e_1 = 0.
 \end{aligned}$$

□

Lema 4.14. *Se $a, b \in \mathfrak{A}$, então $\mathfrak{D}\left(q_{2_*}(a, b)\right) = q_{2_*}\left(\mathfrak{D}(a), b\right) + q_{2_*}\left(a, \mathfrak{D}(b)\right)$.*

Demonstração. Para todos $a, b \in \mathfrak{A}$, pela aditividade da multiplicação q_{n_*} e pelos Lemas 4.10 e 4.13, deduzimos que

$$\begin{aligned}
 2^{n-2}\mathfrak{D}\left(q_{2_*}(a, b)\right) &= \mathfrak{D}\left(\check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}(a, b)\right) = \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(\mathfrak{D}(a), b\right) + \check{\xi}_{1_{\mathfrak{A}}}\left(a, \mathfrak{D}(b)\right) \\
 &= 2^{n-2}\left(q_{2_*}\left(\mathfrak{D}(a), b\right) + q_{2_*}\left(a, \mathfrak{D}(b)\right)\right).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathfrak{D}\left(q_{2_*}(a, b)\right) = q_{2_*}\left(\mathfrak{D}(a), b\right) + q_{2_*}\left(a, \mathfrak{D}(b)\right).$$

□

A seguir mostraremos que \mathfrak{D} preserva a involução.

Lema 4.15. *Se $a \in \mathfrak{A}$, então $\mathfrak{D}(a^*) = \mathfrak{D}(a)^*$.*

Demonstração. Para todo $a \in \mathfrak{A}$, pelos Lemas 4.10, 4.13 e 4.14, resulta que

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(a) + \mathfrak{D}(a^*) &= \mathfrak{D}(a + a^*) = \mathfrak{D}\left(q_{2_*}(a, 1_{\mathfrak{A}})\right) = q_{2_*}\left(\mathfrak{D}(a), 1_{\mathfrak{A}}\right) + q_{2_*}\left(a, \mathfrak{D}(1_{\mathfrak{A}})\right) \\ &= q_{2_*}\left(\mathfrak{D}(a), 1_{\mathfrak{A}}\right) = \mathfrak{D}(a)1_{\mathfrak{A}} + 1_{\mathfrak{A}}\mathfrak{D}(a)^* \\ &= \mathfrak{D}(a) + \mathfrak{D}(a)^*. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathfrak{D}(a^*) = \mathfrak{D}(a)^*$, para todo $a \in \mathfrak{A}$. □

A seguir vamos definir uma função que será utilizada nos próximos lemas que são resultados técnicos necessários para mostrar que \mathfrak{D} é uma derivação. Definimos $\Delta: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ dada por $\Delta(a) = \mathfrak{D}(a) - \Sigma_{y,z}(a)$, para todo $a \in \mathfrak{A}$, em que $\Sigma_{y,z}$ é uma *-derivação interna em \mathfrak{A} , com $y = e_1\mathfrak{D}(e_1)e_2 + e_2\mathfrak{D}(e_1)e_1$ e $z = e_1$.

Lema 4.16. *As seguintes propriedades são válidas.*

(i) Para todos $a, b \in \mathfrak{A}$, $\Delta\left(q_{2_*}(a, b)\right) = q_{2_*}\left(\Delta(a), b\right) + q_{2_*}\left(a, \Delta(b)\right)$.

(ii) $\Delta(e_j) = 0$, para todo $j \in \{1, 2\}$.

(iii) Δ é aditiva.

(iv) Para todo $a \in \mathfrak{A}$, $\Delta(a^*) = \Delta(a)^*$.

(v) Δ é uma derivação aditiva se, e só se, \mathfrak{D} é uma derivação aditiva.

Demonstração. Inicialmente, mostraremos o item (i). Para todos $a, b \in \mathfrak{A}$, temos

$$\begin{aligned} \Delta\left(q_{2_*}(a, b)\right) &= \mathfrak{D}\left(q_{2_*}(a, b)\right) - \Sigma_{y,z}\left(q_{2_*}(a, b)\right) \\ &= q_{2_*}\left(\mathfrak{D}(a), b\right) + q_{2_*}\left(a, \mathfrak{D}(b)\right) - q_{2_*}\left(\Sigma_{y,z}(a), b\right) - q_{2_*}\left(a, \Sigma_{y,z}(b)\right) \\ &= \mathfrak{D}(a)b + b\mathfrak{D}(a)^* + a\mathfrak{D}(b) + \mathfrak{D}(b)a^* - \Sigma_{y,z}(a)b - b\Sigma_{y,z}(a)^* - a\Sigma_{y,z}(b) - \Sigma_{y,z}(b)a^* \\ &= \left(\mathfrak{D}(a) - \Sigma_{y,z}(a)\right)b + b\left(\mathfrak{D}(a) - \Sigma_{y,z}(a)\right)^* \\ &\quad + a\left(\mathfrak{D}(b) - \Sigma_{y,z}(b)\right) + \left(\mathfrak{D}(b) - \Sigma_{y,z}(b)\right)a^* \\ &= \Delta(a)b + b\Delta(a)^* + a\Delta(b) + \Delta(b)a^* = q_{2_*}\left(\Delta(a), b\right) + q_{2_*}\left(a, \Delta(b)\right). \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar o item (ii). Relembramos da Proposição 2.11, na qual

$$\Sigma_{y,z}(a) = \left([L_y, L_z] + [L_y, R_z] + [R_y, R_z] \right)(a),$$

para todo $a \in \mathfrak{A}$, com L_x e R_x as multiplicações à esquerda e à direita por x , respectivamente, para todo $x \in \mathfrak{A}$. Pela definição de Δ e pelo Lema 4.13, para $j \in \{1, 2\}$, segue que

$$\begin{aligned} \Delta(e_j) &= \mathfrak{D}(e_j) - \Sigma_{yz}(e_j) = e_1 \mathfrak{D}(e_j) e_2 + e_2 \mathfrak{D}(e_j) e_1 - \Sigma_{yz}(e_j) \\ &= e_1 \mathfrak{D}(e_j) e_2 + e_2 \mathfrak{D}(e_j) e_1 - \left([L_y, L_z](e_j) + [L_y, R_z](e_j) + [R_y, R_z](e_j) \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Deveríamos analisar dois casos: $j = 1$ e $j = 2$, porém vamos demonstrar apenas o caso $j = 1$, já que o caso $j = 2$ pode ser demonstrado de forma similar. Para $j = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} [L_y, L_z](e_1) &= y(ze_1) - z(ye_1) = \left(e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2 + e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1 \right) (e_1 e_1) - e_1 \left((e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2 + e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1) e_1 \right) \\ &= e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2 e_1 + e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1 e_1 - e_1 e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2 e_1 - e_1 e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1 e_1 = e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [L_y, R_z](e_1) &= y(e_1 z) - (y e_1) z = \left(e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2 + e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1 \right) (e_1 e_1) - \left((e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2 + e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1) e_1 \right) e_1 \\ &= e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2 e_1 + e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1 e_1 - e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2 e_1 - e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1 e_1 \\ &= e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1 - e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1 = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [R_y, R_z](e_1) &= (e_1 z) y - (e_1 y) z = (e_1 e_1) \left(e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2 + e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1 \right) - \left(e_1 (e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2 + e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1) \right) e_1 \\ &= e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2 + e_1 e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1 - e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2 e_1 - e_1 e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1 e_1 = e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2. \end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados acima na Equação (4.5) com $j = 1$, concluímos que

$$\Delta(e_1) = e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2 + e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1 - e_2 \mathfrak{D}(e_1) e_1 - e_1 \mathfrak{D}(e_1) e_2 = 0.$$

Portanto, $\Delta(e_j) = 0$, para todo $j \in \{1, 2\}$.

Provaremos agora o item (iii). Pela aditividade de \mathfrak{D} , Proposição 2.11 e definição de Δ , chegamos a

$$\Delta(a + b) = \mathfrak{D}(a + b) - \Sigma_{y,z}(a + b) = \mathfrak{D}(a) + \mathfrak{D}(b) - \Sigma_{y,z}(a) - \Sigma_{y,z}(b) = \Delta(a) + \Delta(b).$$

Agora mostraremos o item (iv). Para todo $a \in \mathfrak{A}$, pela definição de Δ , pelo Lema 4.15 e como $\Sigma_{y,z}$ preserva a involução, deduzimos que

$$\Delta(a^*) = \mathfrak{D}(a^*) - \Sigma_{y,z}(a^*) = \mathfrak{D}(a)^* - \Sigma_{y,z}(a)^* = \Delta(a)^*.$$

Finalmente, mostraremos o item (v). Suponhamos que Δ é uma derivação aditiva. Como $\Sigma_{y,z}$ é uma derivação aditiva, para todos $a, b \in \mathfrak{A}$, resulta que

$$\Delta(a + b) = \mathfrak{D}(a + b) - \Sigma_{y,z}(a + b) \implies \mathfrak{D}(a + b) = \Delta(a + b) + \Sigma_{y,z}(a + b).$$

Assim,

$$\mathfrak{D}(a + b) = \Delta(a + b) + \Sigma_{y,z}(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b) + \Sigma_{y,z}(a) + \Sigma_{y,z}(b) = \mathfrak{D}(a) + \mathfrak{D}(b).$$

Logo, \mathfrak{D} é aditiva. Além disso, como Δ e $\Sigma_{y,z}$ são derivações, constatamos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(ab) &= \Delta(ab) + \Sigma_{y,z}(ab) = \Delta(a)b + a\Delta(b) + \Sigma_{y,z}(a)b + a\Sigma_{y,z}(b) \\ &= \left(\Delta(a) + \Sigma_{y,z}(a) \right) b + a \left(\Delta(b) + \Sigma_{y,z}(b) \right) = \mathfrak{D}(a)b + a\mathfrak{D}(b). \end{aligned}$$

Logo, \mathfrak{D} é uma derivação. Portanto, \mathfrak{D} é uma derivação aditiva.

Reciprocamente, vamos supor que \mathfrak{D} é uma derivação aditiva. Pelo item (iii), decorre que Δ é aditiva. Assim, resta mostrar que Δ é uma derivação. Para todos $a, b \in \mathfrak{A}$, como \mathfrak{D} e $\Sigma_{y,z}$ são derivações, segue que

$$\Delta(ab) = \mathfrak{D}(ab) - \Sigma_{y,z}(ab) = \mathfrak{D}(a)b + a\mathfrak{D}(b) - \Sigma_{y,z}(a)b - a\Sigma_{y,z}(b) = \Delta(a)b + a\Delta(b).$$

Logo, \mathfrak{D} é uma derivação. Portanto, \mathfrak{D} é uma derivação aditiva. □

Agora iremos localizar $\Delta(a_{jk})$, para todo $a_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$.

Lema 4.17. *Se $a_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, $j, k \in \{1, 2\}$, então $\Delta(a_{jk}) \in \mathfrak{A}_{jk}$.*

Demonstração. Seja $a_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, $j, k \in \{1, 2\}$. Primeiro vamos analisar o caso $j \neq k$. Pelo Lema 4.16, obtemos

$$\Delta(a_{jk}) = \Delta\left(q_{2*}(e_j, a_{jk})\right) = q_{2*}\left(\Delta(e_j), a_{jk}\right) + q_{2*}\left(e_j, \Delta(a_{jk})\right) = q_{2*}\left(e_j, \Delta(a_{jk})\right)$$

$$= e_j \Delta(a_{jk}) + \Delta(a_{jk}) e_j. \quad (4.6)$$

Multiplicando ambos os lados da Equação (4.6) por e_k , concluímos que

$$e_k \Delta(a_{jk}) e_k = e_k e_j \Delta(a_{jk}) e_k + e_k \Delta(a_{jk}) e_j e_k = 0.$$

Agora, multiplicando a Equação (4.6) por e_j , decorre

$$e_j \Delta(a_{jk}) e_j = e_j e_j \Delta(a_{jk}) e_j + e_j \Delta(a_{jk}) e_j e_j = 2e_j \Delta(a_{jk}) e_j,$$

de onde $e_j \Delta(a_{jk}) e_j = 0$. Por sua vez, pelo Lema 4.16 item (i), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(q_{2_*}(a_{jk}, e_j)) = q_{2_*}(\Delta(a_{jk}), e_j) + q_{2_*}(a_{jk}, \Delta(e_j)) = q_{2_*}(\Delta(a_{jk}), e_j) \\ &= \Delta(a_{jk}) e_j + e_j \Delta(a_{jk})^*. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Multiplicando a Equação (4.7) à esquerda por e_k , obtemos que

$$0 = e_k \Delta(a_{jk}) e_j + e_k e_j \Delta(a_{jk}) = e_k \Delta(a_{jk}) e_j.$$

Portanto, $\Delta(a_{jk}) \in \mathfrak{A}_{jk}$, $j, k \in \{1, 2\}$, com $j \neq k$.

Analisamos agora o outro caso. Seja $a_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$. Assim, para $k \neq j$, e pelo Lema 4.16, deduzimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(q_{2_*}(e_k, a_{jj})) = q_{2_*}(\Delta(e_k), a_{jj}) + q_{2_*}(e_k, \Delta(a_{jj})) = q_{2_*}(e_k, \Delta(a_{jj})) \\ &= e_k \Delta(a_{jj}) + \Delta(a_{jj}) e_k. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Multiplicando a Equação (4.8) por e_j à esquerda, chegamos a

$$0 = e_j e_k \Delta(a_{jj}) + e_j \Delta(a_{jj}) e_k = e_j \Delta(a_{jj}) e_k.$$

Agora, multiplicando a Equação (4.8) por e_j à direita, deduzimos

$$0 = e_k \Delta(a_{jj}) e_j + \Delta(a_{jj}) e_k e_j = e_k \Delta(a_{jj}) e_j.$$

Finalmente, multiplicando a Equação (4.8) por e_k em ambos os lados, resulta que

$$0 = e_k e_k \Delta(a_{jj}) e_k + e_k \Delta(a_{jj}) e_k e_k = 2e_k \Delta(a_{jj}) e_k.$$

Logo, $e_k \Delta(a_{jj}) e_k = 0$. Portanto, $\Delta(a_{jj}) \in \mathfrak{A}_{jj}$.

□

Agora iremos mostrar como Δ age nos espaços de Peirce, com respeito à multiplicação entre seus elementos.

Lema 4.18. *Sejam $a_{jj}, b_{jj} \in \mathfrak{A}_{jj}$, $a_{jk}, b_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, $b_{kj} \in \mathfrak{A}_{kj}$, $b_{kk} \in \mathfrak{A}_{kk}$, com $j, k \in \{1, 2\}$ e $j \neq k$. São válidas*

$$(i) \quad \Delta(a_{jj}b_{jj}) = \Delta(a_{jj})b_{jj} + a_{jj}\Delta(b_{jj}).$$

$$(ii) \quad \Delta(a_{jj}b_{jk}) = \Delta(a_{jj})b_{jk} + a_{jj}\Delta(b_{jk}).$$

$$(iii) \quad \Delta(a_{jk}b_{kj}) = \Delta(a_{jk})b_{kj} + a_{jk}\Delta(b_{kj}).$$

$$(iv) \quad \Delta(a_{jk}b_{kk}) = \Delta(a_{jk})b_{kk} + a_{jk}\Delta(b_{kk}).$$

$$(v) \quad \Delta(a_{jk}b_{jk}) = \Delta(a_{jk})b_{jk} + a_{jk}\Delta(b_{jk}).$$

Demonstração. Mostraremos inicialmente a identidade (ii). Observamos que, pela regra de multiplicação das álgebras alternativas, temos

$$\begin{aligned} \Delta(a_{jj}b_{jk}) &= \Delta(a_{jj}b_{jk} + b_{jk}a_{jj}^*) = \Delta(q_{2*}(a_{jj}, b_{jk})) = q_{2*}(\Delta(a_{jj}), b_{jk}) + q_{2*}(a_{jj}, \Delta(b_{jk})) \\ &= \Delta(a_{jj})b_{jk} + b_{jk}\Delta(a_{jj})^* + a_{jj}\Delta(b_{jk}) + \Delta(b_{jk})a_{jj}^* = \Delta(a_{jj})b_{jk} + a_{jj}\Delta(b_{jk}). \end{aligned}$$

Neste passo vamos provar o item (i). Seja $c_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$ qualquer, com $j \neq k$. Pela flexibilidade da álgebra alternativa e pelo item (ii), temos

$$\begin{aligned} \Delta(a_{jj}b_{jj})c_{jk} + (a_{jj}b_{jj})\Delta(c_{jk}) &= \Delta((a_{jj}b_{jj})c_{jk}) = \Delta(a_{jj}(b_{jj}c_{jk})) \\ &= \Delta(a_{jj})(b_{jj}c_{jk}) + a_{jj}(\Delta(b_{jj})c_{jk}) + a_{jj}(b_{jj}\Delta(c_{jk})) \\ &= (\Delta(a_{jj})b_{jj})c_{jk} + (a_{jj}\Delta(b_{jj}))c_{jk} + (a_{jj}b_{jj})\Delta(c_{jk}). \end{aligned}$$

Logo, $(\Delta(a_{jj}b_{jj}) - \Delta(a_{jj})b_{jj} - a_{jj}\Delta(b_{jj}))c_{jk} = 0$, para qualquer $c_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$. Assim, pela arbitrariedade de $c_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, segue que

$$(\Delta(a_{jj}b_{jj}) - \Delta(a_{jj})b_{jj} - a_{jj}\Delta(b_{jj}))(\mathfrak{A}e_k) = \{0\}. \quad (4.9)$$

Observamos que ainda não é possível aplicar a Condição (4.1) do Teorema 4.2. No entanto, mostraremos que, ao utilizarmos uma propriedade das álgebras alternativas, essa condição poderá ser aplicada. Seja $y \in \mathfrak{A}$ um elemento qualquer. Como em uma álgebra alternativa o associador é alternante, obtemos

$$\begin{aligned}
 \left(\Delta(a_{jj}b_{jj}) - \Delta(a_{jj})b_{jj} - a_{jj}\Delta(b_{jj}), y, e_k \right) &= - \left(y, \Delta(a_{jj}b_{jj}) - \Delta(a_{jj})b_{jj} - a_{jj}\Delta(b_{jj}), e_k \right) \\
 &= - \left(y(\Delta(a_{jj}b_{jj}) - \Delta(a_{jj})b_{jj} - a_{jj}\Delta(b_{jj})) \right) e_k \\
 &\quad + y \left((\Delta(a_{jj}b_{jj}) - \Delta(a_{jj})b_{jj} - a_{jj}\Delta(b_{jj}))e_k \right) \\
 &= - \left(y(\Delta(a_{jj}b_{jj}) - \Delta(a_{jj})b_{jj} - a_{jj}\Delta(b_{jj})) \right) e_k. \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Como

$$y \left(\Delta(a_{jj}b_{jj}) - \Delta(a_{jj})b_{jj} - a_{jj}\Delta(b_{jj}) \right) \in \begin{cases} \mathfrak{A}_{jj}, & \text{se } y \in \mathfrak{A}_{jj}, \\ \{0\}, & \text{se } y \in \mathfrak{A}_{jk}, \\ \mathfrak{A}_{kj}, & \text{se } y \in \mathfrak{A}_{kj}, \\ \{0\}, & \text{se } y \in \mathfrak{A}_{kk}, \end{cases}$$

concluimos que $\left(y \left(\Delta(a_{jj}b_{jj}) - \Delta(a_{jj})b_{jj} - a_{jj}\Delta(b_{jj}) \right) \right) e_k = 0$. Pela Equação (4.10), chegamos a $\left(\Delta(a_{jj}b_{jj}) - \Delta(a_{jj})b_{jj} - a_{jj}\Delta(b_{jj}), y, e_k \right) = 0$, ou seja,

$$\left((\Delta(a_{jj}b_{jj}) - \Delta(a_{jj})b_{jj} - a_{jj}\Delta(b_{jj}))y \right) e_k = \left(\Delta(a_{jj}b_{jj}) - \Delta(a_{jj})b_{jj} - a_{jj}\Delta(b_{jj}) \right) (ye_k),$$

para todo $y \in \mathfrak{A}$. Pela Equação (4.9), deduzimos que $\left((\Delta(a_{jj}b_{jj}) - \Delta(a_{jj})b_{jj} - a_{jj}\Delta(b_{jj}))y \right) e_k = 0$, para todo $y \in \mathfrak{A}$, isto é,

$$\left((\Delta(a_{jj}b_{jj}) - \Delta(a_{jj})b_{jj} - a_{jj}\Delta(b_{jj}))\mathfrak{A} \right) e_k = \{0\}.$$

Neste ponto, podemos utilizar a Condição (4.1) do Teorema 4.2 e constatar que,

$$\Delta(a_{jj}b_{jj}) = \Delta(a_{jj})b_{jj} + a_{jj}\Delta(b_{jj}).$$

Agora, mostraremos o item (iii). Da aditividade de Δ decorre que

$$\begin{aligned}
\Delta(a_{jk}b_{kj}) + \Delta(b_{kj}a_{jk}^*) &= \Delta(a_{jk}b_{kj} + b_{kj}a_{jk}^*) = \Delta(q_{2*}(a_{jk}, b_{kj})) \\
&= q_{2*}(\Delta(a_{jk}), b_{kj}) + q_{2*}(a_{jk}, \Delta(b_{kj})) \\
&= \Delta(a_{jk})b_{kj} + b_{kj}\Delta(a_{jk})^* + a_{jk}\Delta(b_{kj}) + \Delta(b_{kj})a_{jk}^*.
\end{aligned}$$

Como $\Delta(a_{jk}b_{kj}) \in \mathfrak{A}_{jj}$, $\Delta(b_{kj}a_{jk}^*) \in \mathfrak{A}_{jk}$, $\Delta(a_{jk})b_{kj} \in \mathfrak{A}_{jj}$, $b_{kj}\Delta(a_{jk})^* \in \mathfrak{A}_{jk}$, $a_{jk}\Delta(b_{kj}) \in \mathfrak{A}_{jj}$ e $\Delta(b_{kj})a_{jk}^* \in \mathfrak{A}_{jk}$, pela decomposição de Peirce, temos $\Delta(a_{jk}b_{kj}) = \Delta(a_{jk})b_{kj} + a_{jk}\Delta(b_{kj})$.

Nesta etapa vamos mostrar o item (iv). Seja $c_{kj} \in \mathfrak{A}_{kj}$ qualquer, com $j \neq k$. Pela flexibilidade das álgebras alternativas e pelo itens(ii) e (iii), segue que

$$\begin{aligned}
c_{kj}\Delta(a_{jk}b_{kk}) + \Delta(c_{kj})(a_{jk}b_{kk}) &= \Delta(c_{kj}(a_{jk}b_{kk})) = \Delta((c_{kj}a_{jk})b_{kk}) \\
&= \Delta(c_{kj}a_{jk})b_{kk} + (c_{kj}a_{jk})\Delta(b_{kk}) \\
&= (\Delta(c_{kj})a_{jk})b_{kk} + (c_{kj}\Delta(a_{jk}))b_{kk} + (c_{kj}a_{jk})\Delta(b_{kk}) \\
&= \Delta(c_{kj})(a_{jk}b_{kk}) + c_{kj}(\Delta(a_{jk})b_{kk}) + c_{kj}(a_{jk}\Delta(b_{kk})).
\end{aligned}$$

Logo, $c_{kj}\Delta(a_{jk}b_{kk}) = c_{kj}(\Delta(a_{jk})b_{kk}) + c_{kj}(a_{jk}\Delta(b_{kk}))$, ou seja,

$$c_{kj}(\Delta(a_{jk}b_{kk}) - \Delta(a_{jk})b_{kk} - a_{jk}\Delta(b_{kk})) = 0,$$

de onde $(\Delta(a_{jk}b_{kk}) - \Delta(a_{jk})b_{kk} - a_{jk}\Delta(b_{kk}))^* c_{kj}^* = 0$. Pela arbitrariedade de c_{kj} , obtemos $(\Delta(a_{jk}b_{kk}) - \Delta(a_{jk})b_{kk} - a_{jk}\Delta(b_{kk}))^* (\mathfrak{A}e_k) = \{0\}$, ou seja,

$$(\Delta(a_{jk}b_{kk}) - \Delta(a_{jk})b_{kk} - a_{jk}\Delta(b_{kk}))^* (ae_k) = 0, \quad (4.11)$$

para todo $a \in \mathfrak{A}$. Precisamos mostrar que

$$\left((\Delta(a_{jk}b_{kk}) - \Delta(a_{jk})b_{kk} - a_{jk}\Delta(b_{kk}))^* \mathfrak{A} \right) e_k = 0.$$

Para facilitar nossos cálculos vamos definir $t_{jk}^* = (\Delta(a_{jk}b_{kk}) - \Delta(a_{jk})b_{kk} - a_{jk}\Delta(b_{kk}))^*$. Mostraremos que $(t_{jk}^* \mathfrak{A})e_k = 0$. Seja $y \in \mathfrak{A}$ qualquer. Como $t_{jk}^* \in \mathfrak{A}_{kj}$, concluímos que $t_{jk}^* = e_k t e_j$, para algum $t \in \mathfrak{A}$. Assim,

$$(t_{jk}^* y) e_k = (e_k t e_j y) e_k = e_k t (e_j y e_k) = e_k t e_j (y e_k) = t_{jk}^* (y e_k).$$

Pela Equação (4.11), obtemos que $(t_{jk}^*y)e_k = 0$. Como $y \in \mathfrak{A}$ é arbitrário, resulta que $(t_{jk}^*\mathfrak{A})e_k = 0$. Agora, pela Condição (4.1) do Teorema 4.2, constatamos que $t_{jk}^* = 0$, isto é,

$$\left(\Delta(a_{jk}b_{kk}) - \Delta(a_{jk})b_{kk} - a_{jk}\Delta(b_{kk}) \right)^* = 0,$$

de onde, $\Delta(a_{jk}b_{kk}) - \Delta(a_{jk})b_{kk} - a_{jk}\Delta(b_{kk}) = 0$, ou seja, $\Delta(a_{jk}b_{kk}) = \Delta(a_{jk})b_{kk} + a_{jk}\Delta(b_{kk})$.

Para finalizar a prova deste lema, nos resta mostrar o item (v). Para quaisquer $a, b, c \in \mathfrak{A}$, fazendo $n = 2$ na Definição 4.1 e pelo item (i) do Lema 4.16, ou seja, considerando Δ uma derivação *-Jordan, segue que

$$\begin{aligned} \Delta\left(q_{2*}(a, bc + cb^*)\right) &= q_{2*}\left(\Delta(a), bc + cb^*\right) + q_{2*}\left(a, \Delta(bc + cb^*)\right) \\ &= \Delta(a)(bc + cb^*) + (bc + cb^*)\Delta(a)^* + a\Delta(bc + cb^*) + \Delta(bc + cb^*)a^*. \end{aligned}$$

Considerando $a = e_k$, $b = a_{jk}$ e $c = b_{jk}$, pelo Lema 4.16, item (iii) e pela decomposição de Peirce, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta(a_{jk}b_{jk}) &= \Delta\left(q_{2*}(e_k, a_{jk}b_{jk} + b_{jk}a_{jk}^*)\right) \\ &= e_k\Delta(a_{jk}b_{jk} + b_{jk}a_{jk}^*) + \Delta(a_{jk}b_{jk} + b_{jk}a_{jk}^*)e_k \\ &= e_k\Delta\left(q_{2*}(a_{jk}, b_{jk})\right) + \Delta\left(q_{2*}(a_{jk}, b_{jk})\right)e_k \\ &= e_k\left(q_{2*}\left(\Delta(a_{jk}), b_{jk}\right) + q_{2*}\left(a_{jk}, \Delta(b_{jk})\right)\right) + \left(q_{2*}\left(\Delta(a_{jk}), b_{jk}\right) + q_{2*}\left(a_{jk}, \Delta(b_{jk})\right)\right)e_k \\ &= e_k\left(\Delta(a_{jk})b_{jk}\right) + e_k\left(b_{jk}\Delta(a_{jk}^*)\right) + e_k\left(a_{jk}\Delta(b_{jk})\right) + e_k\left(\Delta(b_{jk})a_{jk}^*\right) \\ &\quad + \left(\Delta(a_{jk})b_{jk}\right)e_k + \left(b_{jk}\Delta(a_{jk}^*)\right)e_k + \left(a_{jk}\Delta(b_{jk})\right)e_k + \left(\Delta(b_{jk})a_{jk}^*\right)e_k \\ &= \Delta(a_{jk})b_{jk} + a_{jk}\Delta(b_{jk}). \end{aligned}$$

□

Nosso próximo resultado mostra que \mathfrak{D} é uma derivação e para prová-lo vamos utilizar fortemente o fato de que Δ é aditiva.

Lema 4.19. *Se $a, b \in \mathfrak{A}$, então $\mathfrak{D}(ab) = \mathfrak{D}(a)b + a\mathfrak{D}(b)$.*

Demonstração. Dados $a, b \in \mathfrak{A}$, podemos escrever $a = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$ e $b = b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$. Assim,

$$ab = a_{11}b_{11} + a_{11}b_{12} + a_{12}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

Vamos inicialmente mostrar que Δ é uma derivação. Pelo Lema 4.18 e pela aditividade de Δ , concluímos que

$$\begin{aligned}
\Delta(ab) &= \Delta(a_{11}b_{11} + a_{11}b_{12} + a_{12}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{21}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{21} + a_{22}b_{22}) \\
&= \Delta(a_{11}b_{11}) + \Delta(a_{11}b_{12}) + \Delta(a_{12}b_{12}) + \Delta(a_{12}b_{21}) + \Delta(a_{12}b_{22}) + \Delta(a_{21}b_{11}) + \Delta(a_{21}b_{12}) \\
&\quad + \Delta(a_{21}b_{21}) + \Delta(a_{22}b_{21}) + \Delta(a_{22}b_{22}) \\
&= \Delta(a_{11})b_{11} + a_{11}\Delta(b_{11}) + \Delta(a_{11})b_{12} + a_{11}\Delta(b_{12}) + \Delta(a_{12})b_{12} + a_{12}\Delta(b_{12}) \\
&\quad + \Delta(a_{12})b_{21} + a_{12}\Delta(b_{21}) + \Delta(a_{12})b_{22} + a_{12}\Delta(b_{22}) + \Delta(a_{21})b_{11} + a_{21}\Delta(b_{11}) \\
&\quad + \Delta(a_{21})b_{12} + a_{21}\Delta(b_{12}) + \Delta(a_{21})b_{21} + a_{21}\Delta(b_{21}) + \Delta(a_{22})b_{21} + a_{22}\Delta(b_{21}) \\
&\quad + \Delta(a_{22})b_{22} + a_{22}\Delta(b_{22}).
\end{aligned}$$

Agora, considerando todas as multiplicações entre os espaços de Peirce e pela aditividade de Δ , chegamos a

$$\begin{aligned}
\Delta(ab) &= \Delta(a_{11})(b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}) + \Delta(a_{12})(b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}) + \Delta(a_{21})(b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}) \\
&\quad + \Delta(a_{22})(b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}) + a_{11}\left(\Delta(b_{11}) + \Delta(b_{12}) + \Delta(b_{21}) + \Delta(b_{22})\right) \\
&\quad + a_{12}\left(\Delta(b_{11}) + \Delta(b_{12}) + \Delta(b_{21}) + \Delta(b_{22})\right) + a_{21}\left(\Delta(b_{11}) + \Delta(b_{12}) + \Delta(b_{21}) + \Delta(b_{22})\right) \\
&\quad + a_{22}\left(\Delta(b_{11}) + \Delta(b_{12}) + \Delta(b_{21}) + \Delta(b_{22})\right) \\
&= \left(\Delta(a_{11}) + \Delta(a_{12}) + \Delta(a_{21}) + \Delta(a_{22})\right)(b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}) \\
&\quad + (a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22})\left(\Delta(b_{11}) + \Delta(b_{12}) + \Delta(b_{21}) + \Delta(b_{22})\right) \\
&= \Delta(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22})b + a\Delta(b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}) \\
&= \Delta(a)b + a\Delta(b). \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Pela definição de Δ , para todos $a, b \in \mathfrak{A}$, deduzimos que $\mathfrak{D}(ab) = \Delta(ab) + \Sigma_{y,z}(ab)$. Pela Equação (4.12) e como $\Sigma_{y,z}$ é uma *-derivação, resulta que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}(ab) &= \Delta(a)b + a\Delta(b) + \Sigma_{y,z}(a)b + a\Sigma_{y,z}(b) = \left(\Delta(a) + \Sigma_{y,z}(a)\right)b + a\left(\Delta(b) + \Sigma_{y,z}(b)\right) \\
&= \mathfrak{D}(a)b + a\mathfrak{D}(b).
\end{aligned}$$

□

Relembraremos o enunciado do Teorema 4.2: sejam \mathfrak{A} uma *-álgebra alternativa com identidade $1_{\mathfrak{A}}$, e e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} . Suponhamos que \mathfrak{A} satisfaça

$$(x\mathfrak{A})e_j = \{0\}, j \in \{1, 2\} \quad \text{implica em} \quad x = 0.$$

Se $\mathfrak{D}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ satisfaz

$$\mathfrak{D}\left(q_{n_*}(a_1, \dots, a_n)\right) = \sum_{k=1}^n q_{n_*}\left(a_1, \dots, a_{k-1}, \mathfrak{D}(a_k), a_{k+1}, \dots, a_n\right),$$

para todos $a_{n-1}, a_n \in \mathfrak{A}$ e $a_j = 1_{\mathfrak{A}}$, para todo $j \in \{1, \dots, n-2\}$, então \mathfrak{D} é uma derivação *-aditiva.

Notamos que a demonstração do Teorema 4.2 segue diretamente dos Lemas 4.10, 4.15 e 4.19. De fato, pelo Lema 4.10, temos que \mathfrak{D} é aditiva, do Lema 4.15 segue que \mathfrak{D} preserva a involução e, pelo Lema 4.19, deduzimos que \mathfrak{D} é uma derivação. Portanto, \mathfrak{D} é uma derivação *-aditiva.

Assumamos que \mathfrak{A} satisfaz a Condição (4.1) do Teorema 4.2. Supondo que \mathfrak{D} seja uma n -derivação *-Jordan não linear, segue imediatamente do Teorema 4.2 que \mathfrak{D} é uma derivação *-aditiva. Reciprocamente, supondo que \mathfrak{D} seja uma derivação *-aditiva, por definição, temos que \mathfrak{D} satisfaz a seguinte condição: para todos $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$, obtemos

$$\mathfrak{D}\left(q_{n_*}(a_1, \dots, a_n)\right) = \sum_{k=1}^n q_{n_*}\left(a_1, \dots, a_{k-1}, \mathfrak{D}(a_k), a_{k+1}, \dots, a_n\right),$$

ou seja, \mathfrak{D} é uma n -derivação *-Jordan não linear. E assim concluímos o resultado abaixo.

Corolário 4.20. *Sejam \mathfrak{A} uma *-álgebra alternativa com identidade $1_{\mathfrak{A}}$, e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais. Assuma que é válida a Condição (4.1). Então \mathfrak{D} é uma n -derivação *-Jordan não linear em \mathfrak{A} se, e só se, \mathfrak{D} é uma derivação *-aditiva.*

Uma consequência do Teorema 4.2 é o seguinte resultado sobre álgebra alternativa prima.

Corolário 4.21. *Seja \mathfrak{A} uma *-álgebra alternativa prima com identidade $1_{\mathfrak{A}}$ e $e_1, e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais. Se $\mathfrak{D}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ satisfaz*

$$\mathfrak{D}\left(q_{n_*}(a_1, \dots, a_n)\right) = \sum_{k=1}^n q_{n_*}\left(a_1, \dots, a_{k-1}, \mathfrak{D}(a_k), a_{k+1}, \dots, a_n\right),$$

para todos $a_{n-1}, a_n \in \mathfrak{A}$ e $a_j = 1_{\mathfrak{A}}$ para todo $j \in \{1, \dots, n-2\}$, então \mathfrak{D} é uma derivação *-aditiva.

Neste ponto o leitor já deve ter se perguntado por qual motivo neste capítulo estudamos apenas derivações *-Jordan. A resposta para este questionamento é que Lin [34], em 2018, apresentou um resultado semelhante ao nosso, porém no caso associativo, mais especificamente para as álgebras de von Neumann. Verificamos que tal resultado também é válido para as derivações *-Lie em *-álgebras alternativas. Enunciaremos o resultado para *-álgebras alternativas, mas nos preservamos no direito de não demonstrá-lo, pois sua prova segue de forma análoga à do artigo [34].

Convém observar que, embora a demonstração de Lin utilize o Lema 2.2(1), cuja prova foi estabelecida por Changjing Li et al. [33], o argumento empregado não depende da primalidade da álgebra, mas sim de propriedades analíticas específicas das álgebras de von Neumann, como a densidade do subespaço gerado pelos vetores da forma $BP(x)$, com $B \in \mathfrak{A}$ e $x \in H$. No entanto, a hipótese assumida em nosso contexto alternativo, a saber,

$$(x\mathfrak{A})e_j = \{0\} \implies x = 0,$$

para $j \in \{1, 2\}$, desempenha papel análogo e garante que o mesmo raciocínio continue válido. Em particular, se a álgebra for prima, a condição acima também assegura o resultado, embora a demonstração de Lin não dependa dessa propriedade.

Esclarecemos ainda que, na expressão anterior, a notação $(x\mathfrak{A})e_j$ deve ser entendida como

$$\{(xa)e_j : a \in \mathfrak{A}\},$$

isto é, o conjunto obtido multiplicando x à esquerda por todos os elementos de \mathfrak{A} e, em seguida, pelo idempotente simétrico e_j . Esta observação evita possíveis ambiguidades de leitura, já que não se trata de $x(\mathfrak{A}e_j)$. Observamos ainda que, na demonstração de Lin [34], a condição essencial utilizada corresponde exatamente à

$$x\mathfrak{A}e_j = \{0\} \implies x = 0,$$

como formulada no Teorema 4.2 com ordem específica de parênteses. Embora, em geral, não possamos trocar livremente a ordem dos parênteses em uma álgebra não associativa, o

cálculo feito por Lin permanece válido com esta leitura, de modo que sua demonstração se estende naturalmente ao caso alternativo sob a hipótese assumida neste trabalho.

Conforme mencionado anteriormente, optamos por não reproduzir integralmente a demonstração do Teorema 4.22, uma vez que esta se desenvolve de forma análoga à apresentada por Lin em [34]. No entanto, julgamos necessário elucidar uma etapa específica dos cálculos realizados pelo autor, com o objetivo de preservar a completude lógica da exposição e proporcionar maior clareza ao leitor, sobretudo no que se refere à aplicação de certas condições técnicas e resultados auxiliares.

Na demonstração original, Lin utiliza a decomposição de Peirce como ferramenta fundamental para decompor a derivação em componentes que pertencem aos respectivos subespaços da álgebra associados aos projetores da decomposição. Essa abordagem permite analisar separadamente o comportamento da derivação em cada componente, o que facilita a identificação de propriedades específicas. Em particular, na Claim 8 do artigo [34], o autor faz uso de certos resultados intermediários que, em essência, são equivalentes à Condição (4.13) enunciada em nosso Teorema 4.22.

A seguir, apresentaremos uma justificativa para a validade de uma das afirmações finais daquela demonstração, na qual o autor recorre ao Lema 2.2(1) do artigo [33]. Tal esclarecimento se faz oportuno, visto que a aplicação deste lema depende diretamente de uma condição estrutural da álgebra, que como dito anteriormente é equivalente a Condição (4.13), e cuja verificação exige atenção cuidadosa.

Consideremos $M = \mathfrak{D}(a_{ij} + b_{ij}) - \mathfrak{D}(a_{ij}) - \mathfrak{D}(b_{ij})$, e, com base na decomposição de Peirce, escrevamos M como

$$M = M_{jj} + M_{jk} + M_{kj} + M_{kk}.$$

Para concluir que $M = 0$, é suficiente demonstrar que cada um dos componentes da decomposição é nulo, ou seja,

$$M_{jj} = M_{jk} = M_{kj} = M_{kk} = 0.$$

Até este ponto, todos os cálculos são análogos aos realizados por Lin em sua demonstração. Já foi verificado que $M_{jk} = M_{kj} = M_{kk} = 0$, restando, portanto, apenas mostrar que $M_{jj} = 0$.

Seja $c_{kj} \in \mathfrak{A}_{kj}$ qualquer. Como mostrado por Lin, obtemos que $M_{jj}c_{kj}^* = 0$ para todo $c_{kj} \in \mathfrak{A}_{kj}$, o que, à luz da decomposição de Peirce, é equivalente à condição $(M_{jj}\mathfrak{A})e_k = \{0\}$. Aplicando, então, a Condição (4.13) do Teorema 4.22, concluímos que $M_{jj} = 0$.

Dessa forma, obtemos $M = 0$, o que implica diretamente que

$$\mathfrak{D}(a_{ij} + b_{ij}) = \mathfrak{D}(a_{ij}) + \mathfrak{D}(b_{ij}).$$

Com isso temos a demonstração do resultado a seguir.

Teorema 4.22. *Sejam \mathfrak{A} uma *-álgebra alternativa, com identidade $1_{\mathfrak{A}}$, e_1 e $e_2 = 1_{\mathfrak{A}} - e_1$ idempotentes simétricos não triviais em \mathfrak{A} . Suponhamos que \mathfrak{A} satisfaça*

$$(x\mathfrak{A})e_j = \{0\}, j \in \{1, 2\}, \quad \text{implica em} \quad x = 0. \quad (4.13)$$

Então $\mathfrak{D}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ satisfaz

$$\mathfrak{D}\left(p_{n_*}(a_1, \dots, a_n)\right) = \sum_{k=1}^n p_{n_*}\left(a_1, \dots, a_{k-1}, \mathfrak{D}(a_k), a_{k+1}, \dots, a_n\right),$$

para todos $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$ se, e só se, \mathfrak{D} é uma derivação *-aditiva.

Neste capítulo provamos que \mathfrak{D} é uma derivação *-Jordan não linear em \mathfrak{A} se, e só se, \mathfrak{D} é uma derivação *-aditiva. No Capítulo 5 vamos demonstrar que, sob algumas condições, todo isomorfismo entre álgebras alternativas generalizadas é aditivo.

5

ISOMORFISMOS EM ÁLGEBRAS ALTERNATIVAS GENERALIZADAS

Neste capítulo, apresentamos o estudo desenvolvido em colaboração com os pesquisadores Elisabete Barreiro e Bruno Ferreira, realizado durante o período em que realizei o meu doutorado sanduíche na Universidade de Coimbra. Apresentaremos, também, os resultados de um artigo ainda em preparação, no qual demonstraremos que, ao se impor determinadas condições a uma álgebra alternativa generalizada, todo isomorfismo é necessariamente aditivo. Além disso, exibiremos um exemplo inédito, que representa uma contribuição original e significativa para a área.

5.1 ÁLGEBRA ALTERNATIVAS GENERALIZADAS

É importante salientar que todos os resultados que apresentaremos neste capítulo serão considerados sobre um corpo \mathbb{K} de característica diferente de 2 e 3, enquanto nos Capítulos 3 e 4 nossos resultados foram obtidos considerando o corpo dos números complexos, como o leitor pode verificar, nos capítulos anteriores utilizamos explicitamente a identidade imaginária para cálculos.

Sabemos que toda álgebra alternativa é uma álgebra alternativa generalizada. Com isso em mente, é importante explicitar que neste capítulo estamos considerando álgebras alternativas generalizadas que não são álgebras alternativas, pois no caso alternativo, um resultado equivalente ao que desejamos provar já foi apresentado em [6].

As álgebras alternativas generalizadas foram introduzidas por Kleinfeld [30] em 1971. E neste estudo foi explorada a generalização de anéis alternativos.

Definição 5.1. Uma álgebra \mathfrak{A} sobre um corpo \mathbb{K} de característica diferente de 2 e 3 é chamada **álgebra alternativa generalizada** se as seguintes três identidades são satisfeitas

$$(wx, y, z) + (w, x, [y, z]) = w(x, y, z) + (w, y, z)x, \quad (5.1)$$

$$([w, x], y, z) + (w, x, yz) = y(w, x, z) + (w, x, y)z, \quad (5.2)$$

$$(x, x, x) = 0, \quad (5.3)$$

para todos $x, y, z, w \in \mathfrak{A}$.

Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' duas álgebras alternativas generalizadas. Uma função $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ é chamada **multiplicativa** se

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),$$

para todos $x, y \in \mathfrak{A}$. Além disso, se φ é bijetivo diremos que φ é um **isomorfismo multiplicativo**.

Salientamos que nos Lemas 5.2, 5.3, 5.5 e na Observação 5.4 a única condição que deve ser satisfeita é que φ seja um isomorfismo multiplicativo de álgebras.

Lema 5.2. $\varphi(0) = 0$.

Demonstração. Como φ é sobrejetivo, existe $x \in \mathfrak{A}$, tal que $\varphi(x) = 0$. Assim,

$$\varphi(0) = \varphi(0x) = \varphi(0)\varphi(x) = \varphi(0)0 = 0.$$

□

Lema 5.3. φ^{-1} é um isomorfismo multiplicativo.

Demonstração. Sejam $x', y' \in \mathfrak{A}'$. Como φ é sobrejetivo, existem $x, y \in \mathfrak{A}$ tais que $x' = \varphi(x)$ e $y' = \varphi(y)$. Neste caso, $x = \varphi^{-1}(x')$ e $y = \varphi^{-1}(y')$. Assim, $x'y' = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$, e também

$$\varphi^{-1}(x'y') = xy = \varphi^{-1}(x')\varphi^{-1}(y'), \quad (5.4)$$

ou seja, φ^{-1} é multiplicativo.

□

Observação 5.4. Se φ é um isomorfismo multiplicativo, como $\varphi(0) = 0$, segue que $\varphi^{-1}(0) = 0$.

Seja \mathfrak{A} uma álgebra alternativa generalizada e φ um isomorfismo multiplicativo. Definimos $g: \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ por

$$g(x, y) = \varphi^{-1}(\varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y)), \quad (5.5)$$

para todos $x, y \in \mathfrak{A}$. A função g desempenhará um papel fundamental nas demonstrações de nossos resultados, e por esta razão estudaremos algumas de suas propriedades.

Lema 5.5. A função g definida na Equação (5.5) é simétrica e satisfaz as seguintes propriedades

$$g(x, 0) = g(0, y) = 0, \quad (5.6)$$

$$ug(x, y) = g(ux, uy) \quad \text{e} \quad g(x, y)u = g(xu, yu), \quad (5.7)$$

para todos $x, y, u \in \mathfrak{A}$.

Demonstração. Inicialmente mostraremos a simetria da função g . Sejam $x, y \in \mathfrak{A}$. Assim,

$$g(x, y) = \varphi^{-1}(\varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y)) = \varphi^{-1}(\varphi(y + x) - \varphi(y) - \varphi(x)) = g(y, x).$$

Logo, g é simétrica.

Agora mostraremos a Condição (5.6). Suponhamos, sem perda de generalidade, que $y = 0$. Pelo Lema 5.2, temos

$$g(x, 0) = \varphi^{-1}(\varphi(x) - \varphi(x)) = \varphi^{-1}(0) = 0.$$

Para finalizar, provaremos a primeira identidade da Equação (5.7). A segunda é provada de forma similar. Como φ é um isomorfismo multiplicativo e pela Equação (5.4), segue que

$$\begin{aligned} ug(x, y) &= u\varphi^{-1}(\varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y)) = \varphi^{-1}(\varphi(u))\varphi^{-1}(\varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(u)(\varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y))) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(ux + uy) - \varphi(ux) - \varphi(uy)) \\ &= g(ux, uy), \end{aligned}$$

para todos $u, x, y \in \mathfrak{A}$. □

Assim como nos capítulos anteriores, uma ferramenta fundamental para o estudo das álgebras alternativas generalizadas é a decomposição de Peirce, que foi apresentada a primeira vez por Ferreira, Guzzo Jr e Da Motta Ferreira [18].

Teorema 5.6. [18, Theorem 1.1] *Seja \mathfrak{A} uma álgebra alternativa generalizada sobre um corpo \mathbb{K} de característica diferente de 2 e 3, com um idempotente e . Então \mathfrak{A} admite uma decomposição de Peirce em soma direta de subespaços*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{10} \oplus \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{A}_{01} \oplus \mathfrak{A}_{00},$$

com

$$\mathfrak{A}_{ij} := \{x_{ij} \in \mathfrak{A} \mid ex_{ij} = ix_{ij} \text{ e } x_{ij}e = jx_{ij}\},$$

para $i, j \in \{0, 1\}$ ou $(i, j) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. A regra de multiplicação entre os espaços da decomposição de Peirce é

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{jl} &\subseteq \mathfrak{A}_{il}, \quad (i, j, l \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ij} &\subseteq \mathfrak{A}_{ji}, \quad i \neq j \quad (i, j \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{kl} &= \{0\}, \text{ if } j \neq k \text{ e } (i, j) \neq (k, l) \quad (i, j, k, l \in \{0, 1\}), \\ x_{ij}^2 &= 0, \quad i \neq j \quad (i, j \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{ii}\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} &\subseteq \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, \quad \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\mathfrak{A}_{ii} \subseteq \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, \quad (i \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} &= \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\mathfrak{A}_{ij} = \{0\}, \quad i \neq j \quad (i, j \in \{0, 1\}), \\ \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} &= \{0\}. \end{aligned}$$

Nosso próximo lema é importante, pois localiza as imagens dos elementos de \mathfrak{A} pela função g e utilizaremos essa localização várias vezes ao longo deste capítulo.

Lema 5.7. *Sejam \mathfrak{A} uma álgebra alternativa generalizada e a função g definida por (5.5). Então $g(\mathfrak{A}_{ij}, \mathfrak{A}_{00}) \subseteq \mathfrak{A}_{00}$, $g(\mathfrak{A}_{ij}, \mathfrak{A}_{ij}) \subseteq \mathfrak{A}_{ij}$, para todos $i, j \in \{0, 1\}$ ou $(i, j) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $g(\mathfrak{A}_{11}, \mathfrak{A}_{kl}) \subseteq \mathfrak{A}_{kl}$, para todos $k, l \in \{0, 1\}$, e $g(\mathfrak{A}_{10}, \mathfrak{A}_{01}) \subseteq \mathfrak{A}_{00}$.*

Demonstração. Sejam $x_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$ e $x_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$. Pela Equação 5.4 e como φ é um isomorfismo multiplicativo, temos

$$\begin{aligned} eg(x_{11}, x_{01}) &= e\varphi^{-1}\left(\varphi(x_{11} + x_{01}) - \varphi(x_{11}) - \varphi(x_{01})\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\varphi(e)\right)\varphi^{-1}\left(\varphi(x_{11} + x_{01}) - \varphi(x_{11}) - \varphi(x_{01})\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\varphi(e)\varphi(x_{11} + x_{01}) - \varphi(e)\varphi(x_{11}) - \varphi(e)\varphi(x_{01})\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\varphi(ex_{11} + ex_{01}) - \varphi(ex_{11}) - \varphi(ex_{01})\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\varphi(x_{11}) - \varphi(x_{11})\right) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(x_{11}, x_{01})e &= \varphi^{-1}\left(\varphi(x_{11} + x_{01}) - \varphi(x_{11}) - \varphi(x_{01})\right)\varphi^{-1}\left(\varphi(e)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\varphi(x_{11} + x_{01})\varphi(e) - \varphi(x_{11})\varphi(e) - \varphi(x_{01})\varphi(e)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\varphi(x_{11}e + x_{01}e) - \varphi(x_{11}e) - \varphi(x_{01}e)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\varphi(x_{11} + x_{01}) - \varphi(x_{11}) - \varphi(x_{01})\right) = g(x_{11}, x_{01}), \end{aligned}$$

o que implica que $g(x_{11}, x_{01}) \in \mathfrak{A}_{01}$. Analogamente demonstramos os outros casos. \square

Lema 5.8. Se $x_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$ e $x_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$, então

$$g(x_{11}, x_{10})\mathfrak{A} = \{0\}.$$

Demonstração. Seja $a_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}$ qualquer, com $i, j \in \{0, 1\}$ ou $(i, j) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Inicialmente, consideremos $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$. Pela decomposição de Peirce para álgebras alternativas generalizadas, segue que

$$g(x_{11}, x_{10})a_{11} = g(x_{11}a_{11}, x_{10}a_{11}) = g(x_{11}a_{11}, 0) = 0,$$

ou seja,

$$g(x_{11}, x_{10})a_{11} = 0. \quad (5.8)$$

Analogamente concluímos que

$$g(x_{11}, x_{10})a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0, \quad (5.9)$$

$$g(x_{11}, x_{10})a_{01} = 0, \quad (5.10)$$

$$g(x_{11}, x_{10})a_{00} = 0. \quad (5.11)$$

Finalmente, para $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$, observamos que pelo Lema 5.7, $g(x_{11}, x_{10}) \in \mathfrak{A}_{10}$ e $g(x_{11}, x_{10}) + a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$. Pela decomposição de Peirce, deduzimos $(g(x_{11}, x_{10}) + a_{10})^2 = 0$ e $g(x_{11}, x_{10})a_{10} = -a_{10}g(x_{11}, x_{10})$. Assim,

$$g(x_{11}, x_{10})a_{10} = -a_{10}g(x_{11}, x_{10}) = -g(a_{10}x_{11}, a_{10}x_{10}) = 0. \quad (5.12)$$

Pelas Equações (5.8)–(5.12), obtemos que $g(x_{11}, x_{10})\mathfrak{A} = 0$.

□

Agora enunciaremos o teorema principal deste capítulo.

Teorema 5.9. *Seja \mathfrak{A} uma álgebra alternativa generalizada sobre \mathbb{K} um corpo de característica diferente de 2 e 3, contendo e um idempotente não trivial e $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{10} \oplus \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{A}_{01} \oplus \mathfrak{A}_{00}$ a decomposição de Peirce de \mathfrak{A} relativa a e , satisfazendo as condições:*

- (i) $x\mathfrak{A} = \{0\}$ implica em $x = 0$;
- (ii) Se $(e\mathfrak{A})x = \{0\}$ ou $e(\mathfrak{A}x) = 0$, então $x = 0$ (e portanto $\mathfrak{A}x = \{0\}$ implica em $x = 0$);
- (iii) Para cada $t_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, se $t_{11} \left(\left(\bigoplus_{i,j \in \{0,1\}} \mathfrak{A}_{ij} \right) (1 - e) \right) = \{0\}$, então $t_{11} = 0$;
- (iv) Para cada $t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, se $t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}A_{00} = \{0\}$ ou $A_{00}t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \{0\}$, então $t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0$.

Então todo isomorfismo multiplicativo entre álgebras alternativas generalizadas é aditivo.

Observação 5.10. *Observamos que $e\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{10} \oplus \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. A soma direta do item (iii) do Teorema 5.9 está escrita em uma forma apropriada para ser aplicada aos nossos cálculos, mas podemos reescrevê-la como $\left(\bigoplus_{i,j \in \{0,1\}} \mathfrak{A}_{ij} \right) (1 - e) = \mathfrak{A}_{10} \oplus \mathfrak{A}_{00}$.*

Assumiremos que o conjunto de condições (i)–(iv) do Teorema 5.9 seja válido. Sejam \mathfrak{A} e \mathfrak{A}' álgebras alternativas generalizadas e $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ um isomorfismo multiplicativo. Organizaremos a prova do teorema em uma sequência de lemas. Ressaltamos que o teorema

principal é consequência direta do Lema 5.24, e os demais resultados visam fundamentar esse lema.

Lema 5.11. *Se $x_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$ e $x_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, com $j \neq k$, $j, k \in \{0, 1\}$, então*

$$\varphi(x_{11} + x_{jk}) = \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{jk}).$$

Demonstração. Inicialmente, consideraremos o caso $k = 1$ e $j = 0$. Como φ é sobrejetiva, existe $z \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(z) = \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{01})$. Para qualquer $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, como φ é multiplicativo, segue que

$$\begin{aligned} \varphi(a_{11}z) &= \varphi(a_{11})\varphi(z) = \varphi(a_{11})\left(\varphi(x_{11}) + \varphi(x_{01})\right) \\ &= \varphi(a_{11})\varphi(x_{11}) + \varphi(a_{11})\varphi(x_{01}) = \varphi(a_{11}x_{11}) + \varphi(a_{11}x_{01}) \\ &= \varphi(a_{11}x_{11}) + \varphi(0) = \varphi(a_{11}x_{11}) = \varphi(a_{11}x_{11} + 0) \\ &= \varphi(a_{11}x_{11} + a_{11}x_{01}) = \varphi(a_{11}(x_{11} + x_{01})). \end{aligned}$$

Pela injetividade de φ , obtemos $a_{11}z = a_{11}(x_{11} + x_{01})$, ou seja,

$$a_{11}\left(z - (x_{11} + x_{01})\right) = 0. \quad (5.13)$$

Analogamente, para quaisquer $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ e $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, concluímos que

$$a_{10}\left(z - (x_{11} + x_{01})\right) = 0, \quad (5.14)$$

$$a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\left(z - (x_{11} + x_{01})\right) = 0. \quad (5.15)$$

Pelas Equações (5.13)–(5.15), chegamos a $(e\mathfrak{A})(z - (x_{11} + x_{01})) = \{0\}$ e pelo item (ii) do Teorema 5.9, deduzimos que $z = x_{11} + x_{01}$, isto é, $\varphi(x_{11} + x_{01}) = \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{01})$.

Agora, consideraremos $j = 1$ e $k = 0$. Pela sobrejetividade de φ , existe $z \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(z) = \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{10})$. Para qualquer $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, pelo Lema 5.8, resulta que $g(x_{11}, x_{10})a_{11} = 0$. Pela Equação (5.5), constatamos que

$$\begin{aligned}
g(x_{11}, x_{10})a_{11} &= \varphi^{-1}\left(\varphi(x_{11} + x_{10}) - \varphi(x_{11}) - \varphi(x_{10})\right)\varphi^{-1}(\varphi(a_{11})) \\
&= \varphi^{-1}\left(\left(\varphi(x_{11} + x_{10}) - \varphi(x_{11}) - \varphi(x_{10})\right)\varphi(a_{11})\right) \\
&= \varphi^{-1}\left(\varphi(x_{11} + x_{10})\varphi(a_{11}) - \left(\varphi(x_{11}) + \varphi(x_{10})\right)\varphi(a_{11})\right) \\
&= \varphi^{-1}\left(\varphi(x_{11} + x_{10})\varphi(a_{11}) - \varphi(z)\varphi(a_{11})\right) \\
&= \varphi^{-1}\left(\varphi((x_{11} + x_{10})a_{11}) - \varphi(za_{11})\right).
\end{aligned}$$

Assim, $\varphi((x_{11} + x_{10})a_{11}) = \varphi(za_{11})$. Pela injetividade de φ , temos

$$(z - (x_{11} + x_{10}))a_{11} = 0. \quad (5.16)$$

De maneira similar podemos mostrar que, para quaisquer $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$, $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $a_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$, $a_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$, segue que

$$(z - (x_{11} + x_{01}))a_{10} = 0, \quad (5.17)$$

$$(z - (x_{11} + x_{01}))a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0, \quad (5.18)$$

$$(z - (x_{11} + x_{01}))a_{01} = 0, \quad (5.19)$$

$$(z - (x_{11} + x_{01}))a_{00} = 0. \quad (5.20)$$

Pelas Equações (5.16)–(5.20), obtemos $(z - (x_{11} + x_{10}))\mathfrak{A} = \{0\}$ e, pelo item (i) do Teorema 5.9, concluímos que $z = x_{11} + x_{10}$, ou seja, $\varphi(x_{11} + x_{10}) = \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{10})$. □

Mostraremos nos próximos resultados, que o isomorfismo é aditivo quando os elementos pertencem a subespaços de Peirce distintos, tais como \mathfrak{A}_{10} e \mathfrak{A}_{01} , ou \mathfrak{A}_{00} e \mathfrak{A}_{jk} , $j \neq k$, $j, k \in \{0, 1\}$.

Lema 5.12. *Para quaisquer $x_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ e $x_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$, temos $\varphi(x_{10} + x_{01}) = \varphi(x_{10}) + \varphi(x_{01})$.*

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que $g(x_{10}, x_{01}) = 0$. Pelo Lema 5.7, $g(x_{10}, x_{01}) \in \mathfrak{A}_{00}$. Neste caso, para qualquer $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$ e $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$, segue que $g(x_{10}, x_{01})a_{11} = 0$

e $g(x_{10}, x_{01})a_{10} = 0$. Também para qualquer $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, pelo Lema 5.5, obtemos que $g(x_{10}, x_{01})a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = g(x_{10}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, x_{01}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = g(0, 0) = 0$, analogamente $g(x_{10}, x_{01})a_{00} = 0$.

Por fim, consideremos $a_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$. Como $x_{10}a_{01} \in \mathfrak{A}_{11}$ e $x_{01}a_{01} \in \mathfrak{A}_{10}$, pelo Lema 5.11, concluímos que $g(x_{10}a_{01}, x_{01}a_{01}) = 0$. Além disso, pela Equação (5.7), obtemos que $g(x_{10}, x_{01})a_{01} = g(x_{10}a_{01}, x_{01}a_{01}) = 0$, de onde $g(x_{10}, x_{01})\mathfrak{A} = \{0\}$. Portanto, pelo item (i) do Teorema 5.9, $g(x_{10}, x_{01}) = 0$. Logo, $\varphi^{-1}(\varphi(x_{10} + x_{01}) - \varphi(x_{10}) - \varphi(x_{01})) = 0$, o que implica em $\varphi(x_{10} + x_{01}) = \varphi(x_{10}) + \varphi(x_{01})$.

□

Lema 5.13. Se $x_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$ e $x_{jk} \in \mathfrak{A}_{jk}$, com $j \neq k$, $j, k \in \{0, 1\}$, então

$$\varphi(x_{00} + x_{jk}) = \varphi(x_{00}) + \varphi(x_{jk}).$$

Demonstração. Consideraremos $j = 1$ e $k = 0$. Pela sobrejetividade de φ , existe $z \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(z) = \varphi(x_{00}) + \varphi(x_{10})$. Para qualquer $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, segue que

$$\begin{aligned} \varphi(a_{11}z) &= \varphi(a_{11})\varphi(z) = \varphi(a_{11})(\varphi(x_{00}) + \varphi(x_{10})) \\ &= \varphi(a_{11})\varphi(x_{00}) + \varphi(a_{11})\varphi(x_{10}) = \varphi(a_{11}x_{00}) + \varphi(a_{11}x_{10}) \\ &= \varphi(0) + \varphi(a_{11}x_{10}) = \varphi(a_{11}x_{10}) = \varphi(0 + a_{11}x_{10}) \\ &= \varphi(a_{11}x_{00} + a_{11}x_{10}) = \varphi(a_{11}(x_{00} + x_{10})). \end{aligned}$$

Pela injetividade de φ , obtemos que $a_{11}z = a_{11}(x_{00} + x_{10})$, ou seja,

$$a_{11}(z - (x_{00} + x_{10})) = 0. \quad (5.21)$$

Analogamente, para qualquer $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, concluímos que

$$a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(z - (x_{00} + x_{10})) = 0, \quad (5.22)$$

já que $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}x_{10} = 0$. Dado $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$, como $a_{10}x_{00} \in \mathfrak{A}_{10}$ e $a_{10}x_{10} \in \mathfrak{A}_{01}$, pelo Lema 5.12, chegamos a

$$\begin{aligned} \varphi(a_{10}z) &= \varphi(a_{10})\varphi(z) = \varphi(a_{10})(\varphi(x_{00}) + \varphi(x_{10})) \\ &= \varphi(a_{10})\varphi(x_{00}) + \varphi(a_{10})\varphi(x_{10}) = \varphi(a_{10}x_{00}) + \varphi(a_{10}x_{10}) \end{aligned}$$

$$= \varphi(a_{10}x_{00} + a_{10}x_{10}) = \varphi\left(a_{10}(x_{00} + x_{10})\right).$$

Como φ é injetiva, deduzimos $a_{10}z = a_{10}(x_{00} + x_{10})$, ou seja,

$$a_{10}\left(z - (x_{00} + x_{10})\right) = 0. \quad (5.23)$$

Pelas Equações (5.21)–(5.23), da Observação 5.10 resulta que $(e\mathfrak{A})\left(z - (x_{00} + x_{10})\right) = \{0\}$ e pelo item (ii) do Teorema 5.9, constatamos que $z = x_{00} + x_{10}$, o que implica em $\varphi(x_{00} + x_{10}) = \varphi(x_{00}) + \varphi(x_{10})$.

Agora, vamos considerar o caso $j = 0$ e $k = 1$. Como φ é sobrejetora, existe $z \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(z) = \varphi(x_{00}) + \varphi(x_{01})$. Para qualquer $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(za_{11}) &= \varphi(z)\varphi(a_{11}) = \left(\varphi(x_{00}) + \varphi(x_{01})\right)\varphi(a_{11}) \\ &= \varphi(x_{00})\varphi(a_{11}) + \varphi(x_{01})\varphi(a_{11}) = \varphi(x_{00}a_{11}) + \varphi(x_{01}a_{11}) \\ &= \varphi(0) + \varphi(x_{01}a_{11}) = \varphi(x_{01}a_{11}) = \varphi(x_{00}a_{11} + x_{01}a_{11}) = \varphi((x_{00} + x_{01})a_{11}). \end{aligned}$$

Pela injetividade de φ , segue que $za_{11} = (x_{00} + x_{01})a_{11}$, isto é,

$$\left(z - (x_{00} + x_{01})\right)a_{11} = 0. \quad (5.24)$$

Analogamente, para quaisquer $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$, $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $a_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$, obtemos

$$\left(z - (x_{00} + x_{01})\right)a_{10} = 0, \quad (5.25)$$

$$\left(z - (x_{00} + x_{01})\right)a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0, \quad (5.26)$$

$$\left(z - (x_{00} + x_{01})\right)a_{00} = 0. \quad (5.27)$$

Dado $a_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$, como $x_{00}a_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$ e $x_{01}a_{01} \in \mathfrak{A}_{10}$, pelo Lema 5.12, concluímos que

$$\begin{aligned} \varphi(za_{01}) &= \varphi(z)\varphi(a_{01}) = \left(\varphi(x_{00}) + \varphi(x_{01})\right)\varphi(a_{01}) \\ &= \varphi(x_{00})\varphi(a_{01}) + \varphi(x_{01})\varphi(a_{01}) = \varphi(x_{00}a_{01}) + \varphi(x_{01}a_{01}) \\ &= \varphi(x_{00}a_{01} + x_{01}a_{01}) = \varphi((x_{00} + x_{01})a_{01}) \end{aligned}$$

e novamente pela injetividade de φ , chegamos a

$$(z - (x_{00} + x_{01}))a_{01} = 0. \quad (5.28)$$

Pelas Equações (5.24)–(5.28), deduzimos que $(z - (x_{00} + x_{01}))\mathfrak{A} = \{0\}$ e pelo item (i) do Teorema 5.9, resulta que $z = x_{00} + x_{01}$. Portanto $\varphi(x_{00} + x_{01}) = \varphi(x_{00}) + \varphi(x_{01})$. \square

Os dois enunciados a seguir são lemas técnicos que serão utilizados na demonstração do Lema 5.16.

Lema 5.14. *Se $x_{10}, y_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ e $t_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$, então $\varphi(x_{10} + y_{10}t_{00}) = \varphi(x_{10}) + \varphi(y_{10}t_{00})$.*

Demonstração. Observamos que

$$\begin{cases} x_{10} + y_{10}x_{10} = (e + y_{10})x_{10}, \\ (e + y_{10})t_{00} = y_{10}t_{00}, \\ x_{10} = e(x_{10} + y_{10}x_{10}), \\ y_{10}t_{00} = ey_{10}t_{00}. \end{cases} \quad (5.29)$$

Pelo Lema 5.13, temos $g(x_{10}, t_{00}) = 0$. Pelas Equações (5.29) e (5.7), segue que

$$g(x_{10} + y_{10}x_{10}, y_{10}t_{00}) = g((e + y_{10})x_{10}, (e + y_{10})t_{00}) = (e + y_{10})g(x_{10}, t_{00}) = 0.$$

Novamente pelas Equações (5.29) e (5.7), obtemos

$$g(x_{10}, y_{10}t_{00}) = g(e(x_{10} + y_{10}x_{10}), ey_{10}t_{00}) = eg(x_{10} + y_{10}x_{10}, y_{10}t_{00}) = 0,$$

de onde,

$$0 = g(x_{10}, y_{10}t_{00}) = \varphi^{-1}(\varphi(x_{10} + y_{10}t_{00}) - \varphi(x_{10}) - \varphi(y_{10}t_{00})),$$

Portanto, $\varphi(x_{10} + y_{10}t_{00}) = \varphi(x_{10}) + \varphi(y_{10}t_{00})$. \square

Lema 5.15. *Se $x_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, $x_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ e $t_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$, então $\varphi(x_{11} + x_{10}t_{01}) = \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{10}t_{01})$.*

Demonstração. Observamos que

$$(x_{11} + x_{10})(e + t_{01}) = x_{11}e + x_{11}t_{01} + x_{10}e + x_{10}t_{01} = x_{11} + x_{10}t_{01}.$$

Pelo Lema 5.11, concluímos que

$$\begin{aligned} \varphi(x_{11} + x_{10}t_{01}) &= \varphi\left((x_{11} + x_{10})(e + t_{01})\right) = \varphi(x_{11} + x_{10})\varphi(e + t_{01}) \\ &= \left(\varphi(x_{11}) + \varphi(x_{10})\right)\left(\varphi(e) + \varphi(t_{01})\right) \\ &= \varphi(x_{11})\varphi(e) + \varphi(x_{10})\varphi(e) + \varphi(x_{11})\varphi(t_{01}) + \varphi(x_{10})\varphi(t_{01}) \\ &= \varphi(x_{11}e) + \varphi(x_{10}e) + \varphi(x_{11}t_{01}) + \varphi(x_{10}t_{01}) \\ &= \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{10}t_{01}). \end{aligned}$$

□

Agora, demonstraremos que o isomorfismo é aditivo no subespaço de Peirce \mathfrak{A}_{10} . Esta é a primeira ocasião em que consideramos a aditividade em apenas um subespaço de Peirce.

Lema 5.16. φ é aditiva em \mathfrak{A}_{10} .

Demonstração. Sejam $x_{10}, y_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$. Como φ é sobrejetora, existe $z \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(z) = \varphi(x_{10}) + \varphi(y_{10})$. Seja $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$ qualquer. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(za_{11}) &= \varphi(z)\varphi(a_{11}) = \left(\varphi(x_{10}) + \varphi(y_{10})\right)\varphi(a_{11}) \\ &= \varphi(x_{10})\varphi(a_{11}) + \varphi(y_{10})\varphi(a_{11}) = \varphi(x_{10}a_{11}) + \varphi(y_{10}a_{11}) \\ &= \varphi(0) + \varphi(0) = 0 = \varphi(0) = \varphi\left(x_{10}a_{11} + y_{10}a_{11}\right) \\ &= \varphi\left((x_{10} + y_{10})a_{11}\right). \end{aligned}$$

Pela injetividade de φ , obtemos que $za_{11} = (x_{10} + y_{10})a_{11}$. Logo,

$$\left(z - (x_{10} + y_{10})\right)a_{11} = 0. \quad (5.30)$$

Analogamente, para $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ qualquer, deduzimos que

$$\left(z - (x_{10} + y_{10})\right)a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0. \quad (5.31)$$

Para $a_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$ qualquer, consideremos $t_{10} = x_{10}a_{00} \in \mathfrak{A}_{10}$. Do Lema 5.14 resulta que

$$\begin{aligned}\varphi(za_{00}) &= \varphi(z)\varphi(a_{00}) = \left(\varphi(x_{10}) + \varphi(y_{10})\right)\varphi(a_{00}) = \varphi(x_{10})\varphi(a_{00}) + \varphi(y_{10})\varphi(a_{00}) \\ &= \varphi(x_{10}a_{00}) + \varphi(y_{10}a_{00}) = \varphi(t_{10}) + \varphi(y_{10}a_{00}) = \varphi(t_{10} + y_{10}a_{00}) \\ &= \varphi(x_{10}a_{00} + y_{10}a_{00}) = \varphi\left((x_{10} + y_{10})a_{00}\right).\end{aligned}$$

Agora, como φ é injetiva, constatamos que $za_{00} = (x_{10} + y_{10})a_{00}$, ou seja,

$$\left(z - (x_{10} + y_{10})\right)a_{00} = 0. \quad (5.32)$$

Para $a_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$ qualquer, consideremos $t_{11} = x_{10}a_{01} \in \mathfrak{A}_{11}$. Pelo Lema 5.15, temos

$$\begin{aligned}\varphi(za_{01}) &= \varphi(z)\varphi(a_{01}) = \left(\varphi(x_{10}) + \varphi(y_{10})\right)\varphi(a_{01}) = \varphi(x_{10})\varphi(a_{01}) + \varphi(y_{10})\varphi(a_{01}) \\ &= \varphi(x_{10}a_{01}) + \varphi(y_{10}a_{01}) = \varphi(t_{11}) + \varphi(y_{10}a_{01}) = \varphi(t_{11} + y_{10}a_{01}) \\ &= \varphi(x_{10}a_{01} + y_{10}a_{01}) = \varphi\left((x_{10} + y_{10})a_{01}\right).\end{aligned}$$

Mais uma vez pela injetividade de φ , segue que $za_{01} = (x_{10} + y_{10})a_{01}$, ou seja,

$$\left(z - (x_{10} + y_{10})\right)a_{01} = 0. \quad (5.33)$$

Por fim, seja $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ qualquer. Dado $x_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$, observamos que

$$\begin{cases} x_{01} = (x_{01} + y_{10})e, \\ y_{10}a_{10} = (x_{01}a_{10} + y_{10}a_{10})e, \\ x_{01} = x_{01}e. \end{cases} \quad (5.34)$$

Pelo Lema 5.11 e pelas Equações (5.34) e (5.7), obtemos

$$g(x_{01}, x_{01}a_{10} + y_{10}a_{10}) = g\left((x_{01} + y_{10})e, (x_{01} + y_{10})a_{10}\right) = (x_{01} + y_{10})g(e, a_{10}) = 0.$$

Novamente pelas Equações (5.34) e (5.7), concluímos que

$$g(x_{01}, y_{10}a_{10}) = g\left(x_{01}e, (x_{01}a_{10} + y_{10}a_{10})e\right) = g(x_{01}, x_{01}a_{10} + y_{10}a_{10})e = 0.$$

Consideremos $t_{01} = x_{10}a_{10} \in \mathfrak{A}_{01}$. Neste caso,

$$g(x_{10}, y_{10})a_{10} = g(x_{10}a_{10}, y_{10}a_{10}) = g(t_{01}, y_{10}a_{10}) = 0,$$

de onde $\varphi^{-1}\left(\varphi(x_{10} + y_{10}) - \varphi(x_{10}) - \varphi(y_{10})\right)a_{10} = 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\varphi(x_{10} + y_{10}) - \varphi(x_{10}) - \varphi(y_{10})\right)\varphi(a_{10}) \\ \Leftrightarrow 0 &= \varphi(x_{10} + y_{10})\varphi(a_{10}) - \left(\varphi(x_{10}) + \varphi(y_{10})\right)\varphi(a_{10}) \\ \Leftrightarrow 0 &= \varphi(x_{10} + y_{10})\varphi(a_{10}) - \varphi(z)\varphi(a_{10}) \\ \Leftrightarrow 0 &= \varphi\left((x_{10} + y_{10})a_{10}\right) - \varphi(za_{10}), \end{aligned}$$

isto é, $\varphi(za_{10}) = \varphi\left((x_{10} + y_{10})a_{10}\right)$. Novamente pela injetividade de φ , deduzimos que $za_{10} = (x_{10} + y_{10})a_{10}$. Assim,

$$\left(z - (x_{10} + y_{10})\right)a_{10} = 0. \quad (5.35)$$

Pelas Equações (5.30)–(5.33) e (5.35), resulta que $\left(z - (x_{10} + y_{10})\right)\mathfrak{A} = \{0\}$. Agora, pelo item (i) do Teorema 5.9, constatamos que $z = x_{10} + y_{10}$. Portanto $\varphi(x_{10} + y_{10}) = \varphi(x_{10}) + \varphi(y_{10})$. \square

Lema 5.17. Se $x_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$ e $x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, então $\varphi(x_{11} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$.

Demonstração. Pela sobrejetividade de φ , existe $z \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(z) = \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$, com $z = z_{11} + z_{10} + z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + z_{01} + z_{00}$ e $z_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}$, para $i, j \in \{0, 1\}$ ou $(i, j) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Nosso objetivo é provar que $z_{11} = x_{11}$, $z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $z_{10} = 0$, $z_{01} = 0$ e $z_{00} = 0$.

Inicialmente, vamos mostrar que $z_{11} = x_{11}$. Seja $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ qualquer. Assim, $\varphi(za_{10}) = \varphi(x_{11}a_{10})$ e por outro lado, obtemos

$$\varphi(za_{10}) = \varphi\left((z_{11} + z_{10} + z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + z_{01} + z_{00})a_{10}\right) = \varphi(z_{11}a_{10} + z_{10}a_{10} + z_{01}a_{10}).$$

Pela injetividade de φ e decomposição de Peirce, segue que

$$(z_{11} - x_{11})a_{10} = 0 \quad \text{e} \quad z_{10}a_{10} = z_{01}a_{10} = 0. \quad (5.36)$$

Como $(z_{11} - x_{11})a_{00} = 0$ e pela Equação (5.36), obtemos

$$(z_{11} - x_{11})\left(\left(\bigoplus_{i,j \in \{0,1\}} \mathfrak{A}_{ij}\right)(1 - e)\right) = \{0\}$$

e, pelo Condição (iii) do Teorema 5.9, concluímos que $z_{11} - x_{11} = 0$, ou seja, $z_{11} = x_{11}$.

Agora, demonstraremos que $z_{10} = 0$ e $z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. Dado $a_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$, temos $\varphi(za_{01}) = \varphi(x_{11}a_{01}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{01}) = 0$. Já por outro lado,

$$\varphi(za_{01}) = \varphi\left((z_{11} + z_{10} + z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + z_{01} + z_{00})a_{01}\right) = \varphi(z_{10}a_{01} + z_{01}a_{01} + z_{00}a_{01}).$$

Novamente pela injetividade de φ e decomposição de Peirce, deduzimos que

$$z_{01}a_{01} = z_{10}a_{01} = z_{00}a_{01} = 0. \quad (5.37)$$

Dado $a_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$ qualquer, resulta que $\varphi(za_{00}) = \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00})$. Por outro lado,

$$\varphi(za_{00}) = \varphi(z_{10}a_{00} + z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00} + z_{00}a_{00}).$$

Mais uma vez pela injetividade de φ e decomposição de Peirce, constatamos que

$$(z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})a_{00} = 0 \quad \text{e} \quad z_{10}a_{00} = z_{00}a_{00} = 0. \quad (5.38)$$

Como $z_{10}a_{11} = z_{10}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0$ e das Equações (5.36)–(5.38), temos $z_{10}\mathfrak{A} = \{0\}$. Pela Condição (i) do Teorema 5.9, temos $z_{10} = 0$. Agora, pela Equação (5.38) e Condição (iv) do Teorema 5.9, segue que $z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0$. Logo, $z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Neste passo vamos provar que $z_{01} = 0$. Dado $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ qualquer, obtemos $\varphi(a_{10}z) = 0$. Por sua vez, $\varphi(a_{10}z) = \varphi(a_{10}z_{01} + a_{10}z_{00})$. Pela decomposição de Peirce, concluímos que

$$a_{10}z_{01} = 0 \quad \text{e} \quad a_{10}z_{00} = 0. \quad (5.39)$$

Para $a_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ quaisquer, como $a_{11}z_{01} = a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}z_{01} = 0$ e pela Equação (5.39), chegamos a $(e\mathfrak{A})z_{01} = \{0\}$ e, pela Condição (ii) do Teorema 5.9, deduzimos que $z_{01} = 0$.

Por fim, vamos mostrar que $z_{00} = 0$. Seja $h_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$ qualquer. Como $\varphi(za_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(x_{11}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$, resulta que $(\varphi(za_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\varphi(e))\varphi(h_{00}) = \varphi(((x_{11}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})e)h_{00})$ e, por outro lado, usando que $z_{11} = x_{11}$, constatamos que

$$\begin{aligned} (\varphi(za_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\varphi(e))\varphi(h_{00}) &= \varphi(((za_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})e))\varphi(h_{00}) = \varphi(((za_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})e)h_{00}) \\ &= \varphi(((z_{11}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})e)h_{00}) + \varphi(((z_{00}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})e)h_{00}) \\ &= \varphi(((x_{11}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})e)h_{00}) + \varphi(((z_{00}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})e)h_{00}). \end{aligned}$$

Agora, como φ é injetora, temos $0 = \varphi\left(\left((z_{00}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})e\right)h_{00}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}(z_{00}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})h_{00}\right)$. Observamos que $z_{00}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ e, pela Condição (iv) do Teorema 5.9, segue que $z_{00}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0$. Além disso, como $z_{00}a_{11} = z_{00}a_{10} = 0$ e pelas Equações (5.37) e (5.38), obtemos $z_{00}\mathfrak{A} = 0$. Logo, pela Condição (i) do Teorema 5.9, concluímos que $z_{00} = 0$. Portanto, $\varphi(x_{11} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$. \square

Lema 5.18. Se $x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ e $t_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$, então

$$\varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00}) = \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) + \varphi(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00}).$$

Demonstração. Observemos que

$$\begin{aligned} 2e\left((2e + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + t_{00})\right) &= 2e(2ex_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + 2et_{00} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00}) \\ &= 2e(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00}) = 2ex_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + 2ey_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00} \\ &= x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\varphi\left(2e\left((2e + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + t_{00})\right)\right) = \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00}). \quad (5.40)$$

Em contrapartida, pelo Lema 5.17, segue que

$$\begin{aligned} \varphi\left(2e\left((2e + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + t_{00})\right)\right) &= \varphi(2e)\varphi\left(2e + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\right)\varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + t_{00}) \\ &= \varphi(2e)(\varphi(2e) + \varphi(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}))\varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + t_{00}) \\ &= \varphi(2e)\left(\varphi(2e)\varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + t_{00}) + \varphi(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + t_{00})\right) \\ &= \varphi(2e)\left(\varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) + \varphi(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00})\right) \\ &= \varphi\left(2ex_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\right) + \varphi\left(2e(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00})\right) \\ &= \varphi\left(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\right) + \varphi\left(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00}\right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Pelas Equações (5.40) e (5.41), obtemos

$$\varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00}) = \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) + \varphi(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00}).$$

\square

Agora nossos esforços serão no sentido de mostrarmos os resultados nos quais exibimos que φ satisfaz a equação Cauchy aditiva quando os elementos nos quais avaliamos φ pertencem ao espaço $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ e ao espaço \mathfrak{A}_{11} , respectivamente.

Lema 5.19. φ é aditiva em $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Sejam $x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ quaisquer. Como φ é sobrejetiva, existe $z \in \mathfrak{A}$, tal que $\varphi(z) = \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) + \varphi(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$, com $z = z_{11} + z_{10} + z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + z_{01} + z_{00}$. Para $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ qualquer, concluímos que $\varphi(za_{10}) = 0$. De maneira similar, para quaisquer $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ e $a_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$, obtemos que $\varphi(za_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(za_{01}) = 0$. Pela injetividade de φ , deduzimos que

$$za_{10} = za_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = za_{01} = 0. \quad (5.42)$$

Por outro lado,

$$za_{10} = z_{11}a_{10} + z_{10}a_{10} + z_{01}a_{10}, \quad (5.43)$$

$$za_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = z_{11}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + z_{00}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, \quad (5.44)$$

$$za_{01} = z_{10}a_{01} + z_{01}a_{01} + z_{00}a_{01}. \quad (5.45)$$

Pelas Equações (5.42), (5.43), (5.45) e pela decomposição de Peirce, resulta que

$$z_{10}a_{10} = z_{10}a_{01} = 0, \quad z_{01}a_{10} = z_{01}a_{01} = 0 \quad \text{e} \quad z_{11}a_{10} = z_{00}a_{01} = 0. \quad (5.46)$$

Inicialmente, mostraremos que $z_{11} = 0$. Como $z_{11}a_{00} = 0$ e pela Equação (5.46), constatamos

$$z_{11} \left(\bigoplus_{i,j \in \{0,1\}} \mathfrak{A}_{ij}(1-e) \right) = \{0\}.$$

Da Condição (iii) do Teorema 5.9, temos $z_{11} = 0$.

Agora, provaremos que $z_{10} = 0$ e $z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. Seja $a_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$ qualquer, considerando $t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. Pelo Lema 5.18, segue que

$$\begin{aligned} \varphi(za_{00}) &= \varphi(z)\varphi(a_{00}) = \left(\varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) + \varphi(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) \right) \varphi(a_{00}) = \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\varphi(a_{00}) + \varphi(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\varphi(a_{00}) \\ &= \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00}) + \varphi(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00}) = \varphi(t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) + \varphi(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00}) = \varphi(t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00}) \\ &= \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00}) = \varphi\left((x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})a_{00} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, $\varphi(za_{00}) = \varphi(z_{10}a_{00} + z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00} + z_{00}a_{00})$. Como φ é injetiva e pela decomposição de Peirce, obtemos

$$z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00} = \left(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\right)a_{00} \quad \text{e} \quad z_{10}a_{00} = z_{00}a_{00} = 0. \quad (5.47)$$

Pelas Equações (5.46), (5.47) e usando o fato de que $z_{10}a_{11} = z_{10}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0$, concluímos que $z_{10}\mathfrak{A} = 0$. Pela Condição (i) do Teorema 5.9, chegamos a $z_{10} = 0$. Pela Equação (5.47), deduzimos que

$$\left(z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - (x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\right)a_{00} = 0,$$

de onde, $\left(z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - (x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\right)\mathfrak{A}_{00} = \{0\}$ e, pela Condição (iv) Teorema 5.9, resulta que $z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

Vamos mostrar agora que $z_{00} = 0$. Seja $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ qualquer. Usando o fato de que $z_{11} = 0$, constatamos $\varphi(z_{11}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + z_{00}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(za_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = 0$. Pela injetividade de φ , temos $z_{00}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0$. Como $z_{00}a_{11} = z_{00}a_{10} = 0$, pelas Equações (5.46) e (5.47), segue que $z_{00}\mathfrak{A} = \{0\}$ e, pela Condição (i) do Teorema 5.9, obtemos $z_{00} = 0$.

Por fim, demonstraremos que $z_{01} = 0$. Para $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ qualquer, usando o fato de que $z_{10} = z_{00} = 0$, temos $\varphi(a_{10}z_{01}) = \varphi(a_{10}z) = 0$. Como φ é injetiva, concluímos que $a_{10}z_{01} = 0$. Agora, usando o fato de que $a_{11}z_{01} = a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}z_{01} = 0$, chegamos a $(e\mathfrak{A})z_{01} = \{0\}$ e, pela Condição (ii) do Teorema 5.9, deduzimos que $z_{01} = 0$. Portanto, $\varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) + \varphi(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$. \square

Lema 5.20. φ é aditiva em \mathfrak{A}_{11} .

Demonstração. Sejam $x_{11}, y_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$. Como φ é sobrejetora, existe $z \in \mathfrak{A}$, tal que $\varphi(z) = \varphi(x_{11}) + \varphi(y_{11})$, com $z = z_{11} + z_{10} + z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + z_{01} + z_{00}$.

Inicialmente vamos mostrar que $z_{11} = x_{11} + y_{11}$. Seja $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ qualquer, $\varphi(za_{10}) = \varphi(z_{11}a_{10} + z_{10}a_{10} + z_{01}a_{10})$ e em contrapartida, como $x_{11}a_{10}, y_{11}a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$, pelo Lema 5.16, resulta que $\varphi(za_{10}) = \varphi(x_{11}a_{10}) + \varphi(y_{11}a_{10}) = \varphi(x_{11}a_{10} + y_{11}a_{10}) = \varphi((x_{11} + y_{11})a_{10})$. Assim $\varphi(z_{11}a_{10} + z_{10}a_{10} + z_{01}a_{10}) = \varphi((x_{11} + y_{11})a_{10})$. Pela injetividade de φ e decomposição de Peirce, constatamos que

$$(z_{11} - (x_{11} + y_{11}))a_{10} = 0 \quad \text{e} \quad z_{10}a_{10} = z_{01}a_{10} = 0. \quad (5.48)$$

Como $(z_{11} - (x_{11} + y_{11}))a_{00} = 0$ para todo $a_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$ e pela Equação (5.48), temos

$$(z_{11} - (x_{11} + y_{11})) \left(\bigoplus_{i,j \in \{0,1\}} \mathfrak{A}_{ij}(1 - e) \right) = \{0\},$$

segue da Condição (iii) do Teorema 5.9 que $z_{11} = x_{11} + y_{11}$.

Agora, provaremos que $z_{01} = 0$. Como $\varphi(a_{10}z) = 0$ e $\varphi(a_{10}z) = \varphi(a_{10}z_{10} + a_{10}z_{01} + a_{10}z_{00})$, concluímos que $0 = \varphi(a_{10}z_{10} + a_{10}z_{01} + a_{10}z_{00})$. Pela injetividade de φ e decomposição de Peirce, chegamos a

$$a_{10}z_{10} = a_{10}z_{01} = a_{10}z_{00} = 0. \quad (5.49)$$

Como $a_{11}z_{01} = a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}z_{01} = 0$, pela Equação (5.49) e Condição (ii) do Teorema 5.9, deduzimos que $z_{01} = 0$.

Neste passo vamos mostrar que $z_{10} = 0$, $z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0$ e $z_{00} = 0$. Seja $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ qualquer. Assim, $\varphi(za_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(z_{11}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + z_{00}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$ e como $x_{11}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, x_{11}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ do Lema 5.19 resulta que

$$\varphi(za_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(x_{11}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) + \varphi(y_{11}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(x_{11}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{11}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi((x_{11} + y_{11})a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}).$$

Pela injetividade de φ e usando o fato de que $z_{11} = x_{11} + y_{11}$, constatamos

$$z_{00}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0. \quad (5.50)$$

Para $a_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$ qualquer, temos $\varphi(za_{01}) = 0$ e $\varphi(za_{01}) = \varphi(z_{10}a_{01} + z_{00}a_{01})$. Como φ é injetiva e pela decomposição de Peirce, segue que

$$z_{10}a_{01} = z_{00}a_{01} = 0. \quad (5.51)$$

Dado $a_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$ qualquer, $\varphi(za_{00}) = 0$ e $\varphi(za_{00}) = \varphi(z_{10}a_{00} + z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00} + z_{00}a_{00})$. Logo, pela injetividade de φ e decomposição de Peirce, obtemos

$$z_{10}a_{00} = z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00} = z_{00}a_{00} = 0. \quad (5.52)$$

Agora, usando o fato de que $z_{10}a_{11} = z_{10}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0$ e pelas Equações (5.48), (5.51) e (5.52), concluímos que $z_{10}\mathfrak{A} = \{0\}$. Pela Condição (i) do Teorema 5.9, chegamos a $z_{10} = 0$. Pela Equação (5.52), deduzimos que $z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\mathfrak{A}_{00} = \{0\}$ e pela Condição (iv) do Teorema 5.9, resulta que $z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0$. Por fim, usando o fato de que $z_{00}a_{11} = z_{00}a_{10} = 0$ e pelas Equações (5.50)–(5.52),

constatamos que $z_{00}\mathfrak{A} = \{0\}$ e mais uma vez, pela Condição (i) do Teorema 5.9, temos $z_{00} = 0$. Portanto, $\varphi(x_{11} + y_{11}) = \varphi(x_{11}) + \varphi(y_{11})$. □

O lema a seguir é auxiliar e será utilizado para demonstrar o Lema 5.22.

Lema 5.21. *Sejam $x_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$, $x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ e $t_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$, temos*

$$\varphi(x_{10} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00}) = \varphi(x_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00}).$$

Demonstração. Observamos que

$$x_{10} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00} = (e + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})(x_{10} + t_{00}).$$

Assim,

$$\varphi(x_{10} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00}) = \varphi\left((e + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})(x_{10} + t_{00})\right) = \varphi(e + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\varphi(x_{10} + t_{00}).$$

Como $e \in \mathfrak{A}_{11}$, $x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $x_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ e $t_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$, pelos Lemas 5.13 e 5.17, segue que

$$\begin{aligned} \varphi(x_{10} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00}) &= \left(\varphi(e) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\right)\left(\varphi(x_{10}) + \varphi(t_{00})\right) \\ &= \varphi(e)\varphi(x_{10}) + \varphi(e)\varphi(t_{00}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\varphi(x_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\varphi(t_{00}) \\ &= \varphi(x_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\varphi(t_{00}) = \varphi(x_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}t_{00}). \end{aligned}$$

□

Lema 5.22. *Se $x_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ e $x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, então $\varphi(x_{10} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(x_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$.*

Demonstração. Pela sobrejetividade de φ , existe $z \in \mathfrak{A}$, tal que $\varphi(z) = \varphi(x_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$, com $z = z_{11} + z_{10} + z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + z_{01} + z_{00}$.

Como e é um idempotente, concluímos que $\varphi(2ze) = \left(\varphi(x_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})\right)\varphi(2e) = \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$ e por outro lado, $\varphi(2ze) = \varphi(2z_{11} + z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + 2z_{01})$. Assim, pela injetividade de φ e pela decomposição de Peirce, obtemos que $z_{11} = 0$, $z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ e $z_{01} = 0$.

Finalmente mostraremos que $z_{10} = x_{10}$ e $z_{00} = 0$. Seja $a_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$ qualquer. De onde, $\varphi(za_{01}) = \varphi(x_{10}a_{01})$. Por outro lado, $\varphi(za_{01}) = \varphi(z_{10}a_{01} + z_{00}a_{01})$. A injetividade de φ e a decomposição de Peirce, nos garantem que

$$(z_{10} - x_{10})a_{01} = 0 \quad \text{e} \quad z_{00}a_{01} = 0. \tag{5.53}$$

Seja $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ qualquer. Assim, $\varphi(za_{10}) = \varphi(x_{10}a_{10})$ e de outro modo, resulta que $\varphi(za_{10}) = \varphi(z_{10}a_{10})$. Agora, como φ é injetiva e pela decomposição de Peirce, constatamos que

$$(z_{10} - x_{10})a_{10} = 0. \quad (5.54)$$

Seja $a_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$ qualquer. Consideremos $t_{10} = x_{10}a_{00} \in \mathfrak{A}_{10}$. Segundo o Lema 5.21, temos

$$\varphi(za_{00}) = \varphi(x_{10}a_{00}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00}) = \varphi(t_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00}) = \varphi(t_{10} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00}) = \varphi(x_{10}a_{00} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00}).$$

Por outro lado, $\varphi(za_{00}) = \varphi(z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00} + z_{10}a_{00} + z_{00}a_{00})$. Pela injetividade de φ e pela decomposição de Peirce, segue que

$$(z_{10} - x_{10})a_{00} = 0 \quad \text{e} \quad z_{00}a_{00} = 0. \quad (5.55)$$

Como $(z_{10} - x_{10})a_{11} = 0$, $(z_{10} - x_{10})a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0$ e pelas Equações (5.53)–(5.55), obtemos $(z_{10} - x_{10})\mathfrak{A} = \{0\}$. Pela Condição (i) do Teorema 5.9, concluímos que $z_{10} = x_{10}$. Seja $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ qualquer. Assim, $\varphi(za_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = 0$ e de outra forma, $\varphi(za_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(z_{00}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$. A injetividade de φ , nos dá

$$z_{00}a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0. \quad (5.56)$$

Como $z_{00}a_{11} = 0$, $z_{00}a_{10} = 0$ e pelas Equações (5.53), (5.55) e (5.56), deduzimos que $z_{00}\mathfrak{A} = \{0\}$. Novamente pela Condição (i) do Teorema 5.9, resulta que $z_{00} = 0$. Portanto,

$$\varphi(x_{10} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(x_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}).$$

□

Com base nas propriedades previamente estabelecidas, podemos afirmar o seguinte resultado.

Lema 5.23. *Se $x_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, $x_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ e $x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, então*

$$\varphi(x_{11} + x_{10} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}).$$

Demonstração. Pela sobrejetividade de φ , existe $z \in \mathfrak{A}$, tal que $\varphi(z) = \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$, com $z = z_{11} + z_{10} + z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + z_{01} + z_{00}$.

Inicialmente vamos mostrar que $z_{11} = x_{11}$, $z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ e $z_{01} = 0$. Observamos que, $\varphi(2ze) = \varphi\left(2z_{11} + z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + 2z_{01}\right)$, e por outro lado, $\varphi(2ze) = \varphi(z)\varphi(2e) = \varphi(2x_{11}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$. Do Lema 5.17, segue que

$$\varphi\left(2z_{11} + z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + 2z_{01}\right) = \varphi(2x_{11}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(2x_{11} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$$

e, pela injetividade de φ e pela decomposição de Peirce, obtemos

$$z_{11} = x_{11}, \quad z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad z_{01} = 0. \quad (5.57)$$

Neste passo provaremos que $z_{00} = 0$. Dado $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$, $\varphi(a_{10}z) = \varphi(a_{10}z_{10} + a_{10}z_{00})$ e, de outra maneira, $\varphi(a_{10}z) = \varphi(a_{10}x_{10})$. Pela injetividade de φ e pela decomposição de Peirce, concluímos que

$$a_{10}(z_{10} - x_{10}) = 0 \quad \text{e} \quad a_{10}z_{00} = 0. \quad (5.58)$$

Se $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. Assim, $\varphi(a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}z) = \varphi(a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}z_{11} + a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}z_{00})$ e, por outro lado, $\varphi(a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}z) = \varphi(a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}x_{11})$. Novamente pela injetividade de φ , chegamos a

$$a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}z_{00} = 0. \quad (5.59)$$

Como $a_{11}z_{00} = 0$, pelas Equações (5.58) e (5.59), deduzimos que $(e\mathfrak{A})z_{00} = \{0\}$. Logo, da Condição (ii), resulta que $z_{00} = 0$.

Para finalizar resta-nos mostrar que $z_{10} = x_{10}$. Seja $a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ qualquer. Observamos que, $\varphi(za_{10}) = \varphi(z_{11}a_{10} + z_{10}a_{10})$. Consideremos $t_{10} = x_{11}a_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ e $t_{01} = x_{10}a_{10} \in \mathfrak{A}_{01}$. Pelo Lema 5.12, constatamos que

$$\varphi(za_{10}) = \varphi(x_{11}a_{10}) + \varphi(x_{10}a_{10}) = \varphi(t_{10}) + \varphi(t_{01}) = \varphi(t_{10} + t_{01}) = \varphi(x_{11}a_{10} + x_{10}a_{10}).$$

Mais uma vez, pela injetividade de φ e pela decomposição de Peirce, temos

$$(z_{10} - x_{10})a_{10} = 0. \quad (5.60)$$

Seja $a_{01} \in \mathfrak{A}_{01}$ arbitrário. Assim, $\varphi(za_{01}) = \varphi(z_{10}a_{01})$ e por outro lado $\varphi(za_{01}) = \varphi(x_{10}a_{01})$. Segue da injetividade de φ que

$$(z_{10} - x_{10})a_{01} = 0. \quad (5.61)$$

Agora, seja $a_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$ qualquer. Assim, $\varphi(za_{00}) = \varphi(z_{10}a_{00} + z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00})$. Consideramos $t_{10} = x_{10}a_{00} \in \mathfrak{A}_{10}$ e $t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. Pelo Lema 5.22, obtemos que

$$\varphi(za_{00}) = \varphi(x_{10}a_{00}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00}) = \varphi(t_{10}) + \varphi(t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(t_{10} + t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(x_{10}a_{00} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00}).$$

Novamente pela injetividade de φ , concluímos que

$$(z_{10} - x_{10})a_{00} = 0. \quad (5.62)$$

Como $(z_{10} - x_{10})a_{11} = (z_{10} - x_{10})a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0$ e pelas Equações (5.60)–(5.62), obtemos que $(z_{10} - x_{10})\mathfrak{A} = \{0\}$. De acordo com a Condição (i) do Teorema 5.9, deduzimos $z_{10} = x_{10}$. Portanto,

$$\varphi(x_{11} + x_{10} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) = \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}).$$

□

A demonstração do resultado a seguir fundamenta-se diretamente na Observação 5.10, a qual será utilizada para mostrar que φ satisfaz a equação aditiva de Cauchy em $e\mathfrak{A}$.

Lema 5.24. *φ é aditiva em $e\mathfrak{A}$.*

Demonstração. Pela Observação 5.10, $e\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{10} \oplus \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. Sejam $x, y \in \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{10} \oplus \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, com $x = x_{11} + x_{10} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $y = y_{11} + y_{10} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $x_{11}, y_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, $x_{10}, y_{10} \in \mathfrak{A}_{10}$ e $x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$. Assim, $\varphi(x + y) = \varphi((x_{11} + y_{11}) + (x_{10} + y_{10}) + (x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}))$. Agora, pelos Lemas 5.16, 5.19, 5.20 e 5.23, resulta que

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= \varphi(x_{11} + y_{11}) + \varphi(x_{10} + y_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) \\ &= \varphi(x_{11}) + \varphi(y_{11}) + \varphi(x_{10}) + \varphi(y_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) + \varphi(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) \\ &= (\varphi(x_{11}) + \varphi(x_{10}) + \varphi(x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})) + (\varphi(y_{11}) + \varphi(y_{10}) + \varphi(y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}})) \\ &= \varphi(x_{11} + x_{10} + x_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) + \varphi(y_{11} + y_{10} + y_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}) \\ &= \varphi(x) + \varphi(y). \end{aligned}$$

□

Neste ponto estamos em condições de demonstrar nosso resultado principal deste capítulo. Observamos que, para a demonstração do Teorema 5.9, utilizamos explicitamente apenas o

Lema 5.24, os demais são utilizados de forma implícita e por isso os chamamos de lemas auxiliares.

Lembremos o enunciado do Teorema 5.9: seja \mathfrak{A} uma álgebra alternativa generalizada sobre um corpo de característica diferente de 2 e 3, contendo um idempotente não trivial e e $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{10} \oplus \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{A}_{01} \oplus \mathfrak{A}_{00}$ a decomposição de Peirce de \mathfrak{A} relativa a e , satisfazendo as condições

- (i) $x\mathfrak{A} = \{0\}$ implica em $x = 0$;
- (ii) Se $(e\mathfrak{A})x = \{0\}$ ou $e(\mathfrak{A}x) = 0$ então $x = 0$ (e portanto $\mathfrak{A}x = \{0\}$ implica em $x = 0$);
- (iii) Para cada $t_{11} \in \mathfrak{A}_{11}$, se $t_{11} \left(\left(\bigoplus_{i,j \in \{0,1\}} \mathfrak{A}_{ij} \right) (1 - e) \right) = \{0\}$, então $t_{11} = 0$;
- (iv) Para cada $t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, se $t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \mathfrak{A}_{00} = \{0\}$ ou $\mathfrak{A}_{00} t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \{0\}$, então $t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0$.

Então todo isomorfismo multiplicativo entre álgebras alternativas generalizadas é aditivo.

Demonstração do Teorema 5.2. Sejam $x, y \in \mathfrak{A}$. Como φ é sobrejetora, existe $z \in \mathfrak{A}$ tal que $\varphi(z) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Para $r \in \mathfrak{A}$ arbitrário e seja e um idempotente, temos

$$\begin{aligned} \varphi(e(rz)) &= \varphi(e)\varphi(rz) = \varphi(e)(\varphi(r)\varphi(z)) = \varphi(e)\left(\varphi(r)(\varphi(x) + \varphi(y))\right) \\ &= \varphi(e)(\varphi(r)\varphi(x) + \varphi(r)\varphi(y)) = \varphi(e)(\varphi(rx) + \varphi(ry)) \\ &= \varphi(e)\varphi(rx) + \varphi(e)\varphi(ry) = \varphi(e(rx)) + \varphi(e(ry)). \end{aligned}$$

Consideremos $t = rx$ e $w = ry$. Como $et, ew \in e\mathfrak{A}$, pelo Lema 5.24, segue que

$$\begin{aligned} \varphi(e(rz)) &= \varphi(e(rx)) + \varphi(e(ry)) = \varphi(et) + \varphi(ew) \\ &= \varphi(et + ew) = \varphi(e(t + w)) = \varphi\left(e(r(x + y))\right). \end{aligned}$$

Agora, pela injetividade de φ , obtemos $e(rz) = e(r(x + y))$, ou seja, $e\left(r(z - (x + y))\right) = 0$. Da arbitrariedade de $r \in \mathfrak{A}$, concluímos que $e\left(\mathfrak{A}(z - (x + y))\right) = 0$. Pela Condição (ii) do Teorema 5.9, obtemos que $z = x + y$. Portanto, $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

□

5.2 CONSTRUÇÃO DE UM EXEMPLO DE ÁLGEBRA ALTERNATIVA GENERALIZADA

Apresentaremos a seguir um exemplo de álgebra alternativa generalizada que, até onde alcança nosso conhecimento, não foi registrado anteriormente na literatura. A construção ilustra de forma concreta as identidades definidas nesta seção e evidencia que a classe das álgebras alternativas generalizadas admite modelos distintos daqueles já conhecidos. Esse exemplo desempenha, portanto, um papel relevante para compreensão estrutural dessa família de álgebras.

Consideremos $V = \mathbb{C} \times M \times N \times \mathbb{C}$, com \mathbb{C} o corpo dos números complexos, M e N (\mathbb{C}, \mathbb{C}) -bimódulos. Dados $x_j = (a_j, m_j, n_j, b_j)$, $x_k = (a_k, m_k, n_k, b_k) \in V$, definimos a multiplicação em V por

$$x_j x_k = \left(a_j a_k, \frac{1}{2}(a_k m_j + a_j m_k), n_j a_k + b_j n_k, b_j b_k \right). \quad (5.63)$$

Observamos que este exemplo continua válido se $M = N = \mathbb{C}$.

Nosso objetivo é mostrar que V munido da multiplicação definida acima é uma álgebra alternativa generalizada, isto é, que V satisfaz as Equações (5.1)–(5.3) da Definição 5.1. Sejam $x_1 = (a_1, m_1, n_1, b_1)$, $x_2 = (a_2, m_2, n_2, b_2)$, $x_3 = (a_3, m_3, n_3, b_3)$, $x_4 = (a_4, m_4, n_4, b_4) \in V$, com $a_j \in \mathbb{C}$, $m_j \in M$, $n_j \in N$, $b_j \in \mathbb{C}$, para todo $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Inicialmente, vamos calcular $[x_3, x_4]$. Assim,

$$\begin{aligned} [x_3, x_4] &= x_3 x_4 - x_4 x_3 \\ &= \left(a_3 a_4, \frac{1}{2}(a_4 m_3 + a_3 m_4), n_3 a_4 + b_3 n_4, b_3 b_4 \right) - \left(a_4 a_3, \frac{1}{2}(a_3 m_4 + a_4 m_3), n_4 a_3 + b_4 n_3, b_4 b_3 \right) \\ &= \left(a_3 a_4 - a_4 a_3, \frac{1}{2}(a_4 m_3 + a_3 m_4 - a_3 m_4 - a_4 m_3), n_3 a_4 + b_3 n_4 - n_4 a_3 - b_4 n_3, b_3 b_4 - b_4 b_3 \right) \\ &= (0, 0, n_3 a_4 + b_3 n_4 - n_4 a_3 - b_4 n_3, 0). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Além disso,

$$x_1 x_2 = (a_1, m_1, n_1, b_1)(a_2, m_2, n_2, b_2) = \left(a_1 a_2, \frac{1}{2}(a_2 m_1 + a_1 m_2), n_1 a_2 + b_1 n_2, b_1 b_2 \right),$$

de onde,

$$\begin{aligned}
(x_1x_2)x_3 &= \left(a_1a_2, \frac{1}{2}(a_2m_1 + a_1m_2), n_1a_2 + b_1n_2, b_1b_2 \right) (a_3, m_3, n_3, b_3) \\
&= \left(a_1a_2a_3, \frac{1}{2} \left(a_3 \frac{1}{2}(a_2m_1 + a_1m_2) + a_1a_2m_3 \right), (n_1a_2 + b_1n_2)a_3 + b_1b_2n_3, b_1b_2b_3 \right) \\
&= \left(a_1a_2a_3, \frac{1}{4}(a_3a_2m_1 + a_3a_1m_2) + \frac{1}{2}a_1a_2m_3, n_1a_2a_3 + b_1n_2a_3 + b_1b_2n_3, b_1b_2b_3 \right). \quad (5.65)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$x_2x_3 = (a_2, m_2, n_2, b_2)(a_3, m_3, n_3, b_3) = \left(a_2a_3, \frac{1}{2}(a_3m_2 + a_2m_3), n_2a_3 + b_2n_3, b_2b_3 \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
x_1(x_2x_3) &= (a_1, m_1, n_1, b_1) \left(a_2a_3, \frac{1}{2}(a_3m_2 + a_2m_3), n_2a_3 + b_2n_3, b_2b_3 \right) \\
&= \left(a_1a_2a_3, \frac{1}{2} \left(a_2a_3m_1 + a_1 \frac{1}{2}(a_3m_2 + a_2m_3) \right), n_1a_2a_3 + b_1(n_2a_3 + b_2n_3), b_1b_2b_3 \right) \\
&= \left(a_1a_2a_3, \frac{1}{2}a_2a_3m_1 + \frac{1}{4}(a_1a_3m_2 + a_1a_2m_3), n_1a_2a_3 + b_1n_2a_3 + b_1b_2n_3, b_1b_2b_3 \right). \quad (5.66)
\end{aligned}$$

Subtraindo as Equações (5.65) e (5.66), segue que

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3) = \left(0, -\frac{1}{4}a_3a_2m_1 + \frac{1}{4}a_1a_2m_3, 0, 0 \right). \quad (5.67)$$

Vamos provar que V satisfaz a Equação (5.1) da Definição 5.1, ou seja,

$$(x_1x_2, x_3, x_4) + (x_1, x_2, [x_3, x_4]) = x_1(x_2, x_3, x_4) + (x_1, x_3, x_4)x_2,$$

para todos $x_j = (a_j, m_j, n_j, b_j) \in V$, com $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Utilizando a Equação (5.67), obtemos

$$(x_2, x_3, x_4) = \left(0, \frac{1}{4}(a_2a_3m_4 - a_4a_3m_2), 0, 0 \right) \quad (5.68)$$

e

$$(x_1, x_3, x_4) = \left(0, \frac{1}{4}(a_1a_3m_4 - a_4a_3m_1), 0, 0 \right). \quad (5.69)$$

Agora, da Equação (5.63) decorre que

$$\begin{aligned}
x_1x_2 &= (a_1, m_1, n_1, b_1)(a_2, m_2, n_2, b_2) = \left(a_1a_2, \frac{1}{2}(a_2m_1 + a_1m_2), n_1a_2 + b_1n_2, b_1b_2 \right), \\
(x_1x_2)x_3 &= \left(a_1a_2, \frac{1}{2}(a_2m_1 + a_1m_2), n_1a_2 + b_1n_2, b_1b_2 \right) (a_3, m_3, n_3, b_3) \\
&= \left(a_1a_2a_3, \frac{1}{2} \left(a_3 \frac{1}{2}(a_2m_1 + a_1m_2) + a_1a_2m_3 \right), (n_1a_2 + b_1n_2)a_3 + b_1b_2n_3, b_1b_2b_3 \right) \\
&= \left(a_1a_2a_3, \frac{1}{4}a_3a_2m_1 + \frac{1}{4}a_3a_1m_2 + \frac{1}{2}a_1a_2m_3, n_1a_2a_3 + b_1n_2a_3 + b_1b_2n_3, b_1b_2b_3 \right), \\
((x_1x_2)x_3)x_4 &= \left(a_1a_2a_3, \frac{1}{4}a_3a_2m_1 + \frac{1}{4}a_3a_1m_2 + \frac{1}{2}a_1a_2m_3, n_1a_2a_3 + b_1n_2a_3 + b_1b_2n_3, b_1b_2b_3 \right) (a_4, m_4, n_4, b_4) \\
&= \left(a_1a_2a_3a_4, \frac{1}{2} \left(a_4 \left(\frac{1}{4}a_3a_2m_1 + \frac{1}{4}a_3a_1m_2 \right) + a_1a_2a_3m_4 \right), \right. \\
&\quad \left. n_1a_2a_3a_4 + b_1n_2a_3a_4 + b_1b_2b_3n_4, b_1b_2b_3b_4 \right) \\
&= \left(a_1a_2a_3a_4, \frac{1}{8}a_4a_3a_2m_1 + \frac{1}{8}a_4a_3a_1m_2 + \frac{1}{4}a_4a_1a_2m_3 + \frac{1}{2}a_1a_2a_3m_4, \right. \\
&\quad \left. n_1a_2a_3a_4 + b_1n_2a_3a_4 + b_1b_2n_3a_4, b_1b_2b_3b_4 \right) \tag{5.70}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(x_1x_2)(x_3x_4) &= \left(a_1a_2, \frac{1}{2}(a_2m_1 + a_1m_2), n_1a_2 + b_1n_2, b_1b_2 \right) \left(a_3a_4, \frac{1}{2}(a_4m_3 + a_3m_4), n_3a_4 + b_3n_4, b_3b_4 \right) \\
&= \left(a_1a_2a_3a_4, \frac{1}{2} \left(a_3a_4 \frac{1}{2}(a_2m_1 + a_1m_2) + a_1a_2 \frac{1}{2}(a_4m_3 + a_3m_4) \right), \right. \\
&\quad \left. (n_1a_2 + b_1n_2)a_3a_4 + b_1b_2(n_3a_4 + b_3n_4), b_1b_2b_3b_4 \right) \\
&= \left(a_1a_2a_3a_4, \frac{1}{4}a_3a_4a_2m_1 + \frac{1}{4}a_3a_4a_1m_2 + \frac{1}{4}a_1a_2a_4m_3 + \frac{1}{4}a_1a_2a_3m_4, \right. \\
&\quad \left. n_1a_2a_3a_4 + b_1n_2a_3a_4 + b_1b_2n_3a_4 + b_1b_2b_3n_4, b_1b_2b_3b_4 \right). \tag{5.71}
\end{aligned}$$

Subtraindo as Equações (5.70) e (5.71), constatamos que

$$(x_1x_2, x_3, x_4) = \left(0, -\frac{1}{8}a_4a_3a_2m_1, -\frac{1}{8}a_4a_3a_1m_2 + \frac{1}{4}a_1a_2a_3m_4, 0, 0\right). \quad (5.72)$$

Como na Equação (5.64) as primeira e a quarta coordenadas são nulas e, pela Equação (5.67), temos

$$(x_1, x_2, [x_3, x_4]) = (0, 0, 0, 0). \quad (5.73)$$

Assim,

$$\begin{aligned} (x_1x_2, x_3, x_4) + (x_1, x_2, [x_3, x_4]) &= (x_1x_2, x_3, x_4) \\ &= \left(0, -\frac{1}{8}a_4a_3a_2m_1, -\frac{1}{8}a_4a_3a_1m_2 + \frac{1}{4}a_1a_2a_3m_4, 0, 0\right). \end{aligned} \quad (5.74)$$

Neste passo vamos calcular $x_1(x_2, x_3, x_4) + (x_1, x_3, x_4)x_2$. Da Equação (5.68) segue que

$$\begin{aligned} x_1(x_2, x_3, x_4) &= (a_1, m_1, n_1, b_1) \left(0, \frac{1}{4}(a_2a_3m_4 - a_4a_3m_2), 0, 0\right) \\ &= \left(a_1 \cdot 0, \frac{1}{2}a_1 \frac{1}{4}(a_2a_3m_4 - a_4a_3m_2), n_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0, b_1 \cdot 0\right) \\ &= \left(0, \frac{1}{8}a_1a_2a_3m_4 - \frac{1}{8}a_1a_4a_3m_2, 0, 0\right). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Pela Equação (5.69), obtemos

$$\begin{aligned} (x_1, x_3, x_4)x_2 &= \left(0, \frac{1}{4}(a_1a_3m_4 - a_4a_3m_1), 0, 0\right) (a_2, m_2, n_2, b_2) \\ &= \left(0 \cdot a_2, \frac{1}{2}a_2 \frac{1}{4}(a_1a_3m_4 - a_2a_3m_1) + \frac{1}{2}0 \cdot m_2, 0 \cdot b_2 + 0 \cdot n_2, 0 \cdot b_2\right) \\ &= \left(0, \frac{1}{8}(a_2a_1a_3m_4 - a_2a_4a_3m_1), 0, 0\right). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Das Equações (5.75) e (5.76), concluímos que

$$\begin{aligned} x_1(x_2, x_3, x_4) + (x_1, x_3, x_4)x_2 &= \left(0, \frac{1}{8}a_1a_2a_3m_4 - \frac{1}{8}a_1a_4a_3m_2, 0, 0\right) \\ &\quad + \left(0, \frac{1}{8}(a_2a_1a_3m_4 - a_2a_4a_3m_1), 0, 0\right) \end{aligned}$$

$$= \left(0, \frac{1}{4}a_1a_2a_3m_4 - \frac{1}{8}a_4a_3(a_1m_2 + a_2m_1), 0, 0 \right). \quad (5.77)$$

Portanto, das Equações (5.74) e (5.77), chegamos a

$$(x_1x_2, x_3, x_4) + (x_1, x_2, [x_3, x_4]) = x_1(x_2, x_3, x_4) + (x_1, x_3, x_4)x_2.$$

Neste ponto demonstraremos que V satisfaz a Equação (5.2) da Definição 5.1, isto é,

$$([x_4, x_1], x_2, x_3) + (x_4, x_1, x_2x_3) = x_2(x_4, x_1, x_3) + (x_4, x_1, x_2)x_3.$$

Utilizando a Equação (5.64) trocando x_3 por x_1 , deduzimos que

$$[x_4, x_1] = (0, 0, n_4a_1 + b_4n_1 - n_1a_4 - b_1n_4, 0).$$

Da Equação (5.67) resulta que o associador depende apenas da primeira e segunda componentes. Logo,

$$([x_4, x_1], x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0). \quad (5.78)$$

Neste passo iremos calcular (x_4x_1, x_2x_3) . Assim,

$$x_2x_3 = (a_2, m_2, n_2, b_2)(a_3, m_3, n_3, b_3) = \left(a_2a_3, \frac{1}{2}(a_3m_2 + a_2m_3), n_2a_3 + b_2n_3, b_2b_3 \right)$$

e

$$x_4x_1 = (a_4, m_4, n_4, b_4)(a_1, m_1, n_1, b_1) = \left(a_4a_1, \frac{1}{2}(a_1m_4 + a_4m_1), n_4a_1 + b_4n_1, b_4b_1 \right),$$

de onde

$$\begin{aligned} x_1(x_2x_3) &= (a_1, m_1, n_1, b_1) \left(a_2a_3, \frac{1}{2}(a_3m_2 + a_2m_3), n_2a_3 + b_2n_3, b_2b_3 \right) \\ &= \left(a_1a_2a_3, \frac{1}{2} \left(a_2a_3m_1 + a_1 \frac{1}{2}(a_4m_3 + a_3m_4) \right), n_1a_2a_3 + b_1(n_2a_3 + b_2n_3), b_1b_2b_3 \right) \\ &= \left(a_1a_2a_3, \frac{1}{2}a_2a_3m_1 + \frac{1}{4}a_1a_4m_3 + \frac{1}{4}a_1a_3m_4, n_1a_2a_3 + b_1n_2a_3 + b_1b_2n_3, b_1b_2b_3 \right), \end{aligned}$$

$$x_4 \left(x_1(x_2x_3) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (a_4, m_4, n_4, b_4) \left(a_1 a_2 a_3, \frac{1}{2} a_2 a_3 m_1 + \frac{1}{4} a_1 a_4 m_3 + \frac{1}{4} a_1 a_3 m_4, n_1 a_2 a_3 + b_1 n_2 a_3 + b_1 b_2 n_3, b_1 b_2 b_3 \right) \\
&= \left(a_4 a_1 a_2 a_3, \frac{1}{2} a_1 a_2 a_3 m_4 + \frac{1}{2} a_4 \left(\frac{1}{2} a_2 a_3 m_1 + \frac{1}{4} a_1 a_4 m_3 + \frac{1}{4} a_1 a_3 m_4 \right), \right. \\
&\quad \left. n_4 a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3 (n_1 a_2 a_3 + b_1 n_2 a_3 + b_1 b_2 n_3), b_1 b_2 b_3 b_4 \right) \\
&= \left(a_4 a_1 a_2 a_3, \frac{1}{2} a_1 a_2 a_3 m_4 + \frac{1}{4} a_4 a_2 a_3 m_4 + \frac{1}{4} a_4 a_2 a_3 m_1 + \frac{1}{8} a_4 a_1 a_3 m_4, \right. \\
&\quad \left. n_4 a_1 a_2 a_3 + b_4 n_1 a_2 a_3 + b_4 b_1 n_2 a_3 + b_4 b_1 b_2 n_3, b_1 b_2 b_3 b_4 \right) \tag{5.79}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&(x_4 x_1)(x_2 x_3) \\
&= \left(a_2 a_3, \frac{1}{2} (a_3 m_2 + a_2 m_3), n_2 a_3 + b_2 n_3, b_2 b_3 \right) \left(a_4 a_3, \frac{1}{2} (a_1 m_4 + a_4 m_1), n_4 a_1 + b_4 n_1, b_4 b_1 \right) \\
&= \left(a_4 a_1 a_2 a_3, \frac{1}{2} \left(a_2 a_3 \frac{1}{2} (a_1 m_4 + a_4 m_1) + a_4 a_1 \frac{1}{2} (a_3 m_2 + a_2 m_3) \right), \right. \\
&\quad \left. (n_4 a_1 + b_4 n_1) a_2 a_3 + b_4 b_1 (n_2 a_3 + b_2 n_3), b_4 b_1 b_2 b_3 \right) \\
&= \left(a_4 a_1 a_2 a_3, \frac{1}{4} a_2 a_3 a_1 m_4 + \frac{1}{4} a_2 a_3 a_4 m_1 + \frac{1}{4} a_4 a_1 a_3 m_2 + \frac{1}{4} a_4 a_1 a_2 m_3, \right. \\
&\quad \left. n_4 a_1 a_1 a_2 a_3 + b_4 n_1 a_2 a_3 + b_1 b_4 n_2 a_3 + b_4 b_1 b_2 n_3, b_4 b_1 b_2 b_3 \right). \tag{5.80}
\end{aligned}$$

Subtraindo as Equações (5.79) e (5.80), concluímos que

$$\begin{aligned}
(x_4, x_1, x_2 x_3) &= (x_4 x_1)(x_2 x_3) - x_4 (x_1(x_2 x_3)) \\
&= \left(0, \frac{1}{8} (a_4 a_1 a_3 + a_4 a_1 a_2 m_3 - 2a_2 a_3 a_1 m_4), 0, 0 \right), \tag{5.81}
\end{aligned}$$

somando as Equações (5.78) e (5.81), decorre que

$$\begin{aligned}
([x_4, x_1], x_2, x_3) + (x_4, x_1, x_2 x_3) &= (x_4, x_1, x_2 x_3) \\
&= \left(0, \frac{1}{8} (a_4 a_1 a_3 m_2 + a_4 a_1 a_2 m_3 - 2a_2 a_3 a_1 m_4), 0, 0 \right). \tag{5.82}
\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular que $x_2(x_4, x_1, x_3) + (x_4, x_1, x_2)x_3$. Primeiro calcularemos $x_2(x_4, x_1, x_3)$.

Pela Equação (5.67), temos

$$(x_4, x_1, x_3) = \left(0, \frac{1}{4} (a_4 a_1 m_3 - a_3 a_1 m_4), 0, 0 \right),$$

de onde,

$$\begin{aligned}
 x_2(x_4, x_1, x_3) &= (a_2, m_2, n_2, b_2) \left(0, \frac{1}{4}(a_4a_1m_3 - a_3a_1m_4), 0, 0 \right) \\
 &= \left(0, \frac{1}{2}0.m_2 + \frac{1}{2}a_2\frac{1}{4}(a_4a_1m_3 - a_3a_1m_4), n_2.0 + b_2.0, b_2.0 \right) \\
 &= \left(0, \frac{1}{8}(a_2a_4a_1m_3 - a_2a_3a_1m_4), 0, 0 \right). \tag{5.83}
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, pela Equação (5.67), segue que

$$(x_4, x_1, x_2) = \left(0, \frac{1}{4}(a_4a_1m_2 - a_2a_1m_4), 0, 0 \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 (x_4, x_1, x_2)x_3 &= \left(0, \frac{1}{4}(a_4a_1m_2 - a_2a_1m_4), 0, 0 \right) (a_3, m_3, n_3, b_3) \\
 &= \left(0, \frac{1}{2}a_3\frac{1}{4}(a_4a_1m_2 - a_2a_1m_4) + \frac{1}{2}0.m_3, 0.a_3 + 0.n_3, 0.b_3 \right) \\
 &= \left(0, \frac{1}{8}(a_3a_4a_1m_2 - a_3a_2a_1m_4), 0, 0 \right). \tag{5.84}
 \end{aligned}$$

Somando as Equações (5.83) e (5.84), obtemos

$$\begin{aligned}
 &x_2(x_4, x_1, x_3) + (x_4, x_1, x_2)x_3 \\
 &= \left(0, \frac{1}{8}(a_2a_4a_1m_3 - a_2a_3a_1m_4), 0, 0 \right) + \left(0, \frac{1}{8}(a_3a_4a_1m_2 - a_3a_2a_1m_4), 0, 0 \right) \\
 &= \left(0, \frac{1}{8}(a_2a_4a_1m_3 + a_3a_4a_1m_2 - 2a_2a_3a_1m_4), 0, 0 \right). \tag{5.85}
 \end{aligned}$$

Portanto, comparando as Equações (5.82) e (5.85), concluímos que

$$([x_4, x_1], x_2, x_3) + (x_4, x_1, x_2x_3) = x_2(x_4, x_1, x_3) + (x_4, x_1, x_2)x_3.$$

Finalmente vamos demonstrar que V satisfaz a Equação (5.3) da Definição 5.1, ou seja,

$$(x_1, x_1, x_1) = 0,$$

para todo $x_1 \in V$. Assim,

$$\begin{aligned} x_1 x_1 &= (a_1, m_1, n_1, b_1)(a_1, m_1, n_1, b_1) = \left(a_1^2, \frac{1}{2}(a_1 m_1 + a_1 m_1), n_1 a_1 + n_1 b_1, b_1^2 \right) \\ &= (a_1^2, a_1 m_1, n_1 a_1 + n_1 b_1, b_1^2), \end{aligned}$$

de onde,

$$\begin{aligned} (x_1 x_1) x_1 &= (a_1^2, a_1 m_1, n_1 a_1 + n_1 b_1, b_1^2)(a_1, m_1, n_1, b_1) \\ &= \left(a_1^3 a_1, \frac{1}{2} a_1 a_1 m_1 + \frac{1}{2} a_1 a_1 m_1, (n_1 a_1 + b_1 n_1) a_1 + b_1 b_1 n_1, b_1^2 b_1 \right) \\ &= (a_1^3, a_1^2 m_1, n_1 a_1^2 + b_1 n_1 a_1 + b_1^2 n_1, b_1^3) \end{aligned} \quad (5.86)$$

e

$$\begin{aligned} x_1(x_1 x_1) &= (a_1, m_1, n_1, b_1)(a_1^2, a_1 m_1, n_1 a_1 + n_1 b_1, b_1^2) \\ &= \left(a_1 a_1^2, \frac{1}{2} a_1^2 m_1 + \frac{1}{2} a_1 a_1 m_1, n_1 a_1^2 + b_1(n_1 a_1 + n_1 b_1), b_1 b_1^2 \right) \\ &= (a_1^3, a_1^2 m_1, n_1 a_1^2 + b_1 n_1 a_1 + b_1 n_1 b_1, b_1^3). \end{aligned} \quad (5.87)$$

Logo, das Equações (5.86) e (5.87) decorre que

$$\begin{aligned} (x_1, x_1, x_1) &= (x_1 x_1) x_1 - x_1(x_1 x_1) \\ &= (a_1^3, a_1^2 m_1, n_1 a_1^2 + b_1 n_1 a_1 + b_1^2 n_1, b_1^3) - (a_1^3, a_1^2 m_1, n_1 a_1^2 + b_1 n_1 a_1 + b_1 n_1 b_1, b_1^3) \\ &= (0, 0, b_1^2 n_1 - b_1 n_1 b_1, 0) = (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Portanto, $V = \mathbb{C} \times M \times N \times \mathbb{C}$ é uma álgebra alternativa generalizada.

Agora vamos explicitar ainda mais o exemplo acima. Consideremos o espaço

$$V = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

em que \mathbb{C} denota o corpo dos números complexos. Para elementos

$$x_j = (a_j, m_j, n_j, b_j) \quad \text{e} \quad x_k = (a_k, m_k, n_k, b_k) \in V,$$

definimos a multiplicação em V por

$$x_j x_k = \left(a_j a_k, \frac{1}{2}(a_k m_j + a_j m_k), n_j a_k + b_j n_k, b_j b_k \right).$$

Mostrou-se na tese que V é uma álgebra alternativa generalizada. Observemos, entretanto, que V não é alternativa. De fato, sejam

$$x_1 = (1 + i, 2, 3, 1 - i), \quad x_2 = \left(\frac{1}{2}, 1, -1, 2 \right).$$

A multiplicação em V é dada por

$$x_1 x_2 = \left(a_1 a_2, \frac{1}{2}(a_2 m_1 + a_1 m_2), n_1 a_2 + b_1 n_2, b_1 b_2 \right).$$

Inicialmente, calculamos $x_1 x_1$:

$$\begin{aligned} x_1 x_1 &= (a_1^2, a_1 m_1, n_1 a_1 + b_1 n_1, b_1^2), \\ a_1^2 &= (1 + i)^2 = 2i, \\ a_1 m_1 &= (1 + i) \cdot 2 = 2 + 2i, \\ n_1 a_1 + b_1 n_1 &= 3(1 + i) + (1 - i)3 = 6, \\ b_1^2 &= (1 - i)^2 = -2i. \end{aligned}$$

Assim,

$$x_1 x_1 = (2i, 2 + 2i, 6, -2i).$$

Em seguida, calculamos $(x_1 x_1)x_2$:

$$\begin{aligned} a &= 2i \cdot \frac{1}{2} = i, \\ m &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(2 + 2i) + 2i \cdot 1 \right) = \frac{1}{2}(1 + 3i) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, \\ n &= 6 \cdot \frac{1}{2} + (-2i)(-1) = 3 + 2i, \\ b &= (-2i) \cdot 2 = -4i. \end{aligned}$$

Logo,

$$(x_1 x_1)x_2 = \left(i, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, 3 + 2i, -4i \right).$$

Analogamente, obtém-se

$$x_1x_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 1 + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} + i, 2 - 2i \right),$$

e, conseqüentemente,

$$x_1(x_1x_2) = \left(i, \frac{3}{4} + \frac{5}{4}i, 3 + 2i, -4i \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} (x_1, x_1, x_2) &= (x_1x_1)x_2 - x_1(x_1x_2) \\ &= \left(0, -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i, 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Como $(x_1, x_1, x_2) \neq 0$, concluímos que a álgebra V não é alternativa.

COMENTÁRIO FINAL

Para complementar a análise do exemplo apresentado é importante esclarecer a situação atual da investigação. A construção descrita fornece, de fato, uma álgebra alternativa generalizada (no sentido de que não é alternativa), no entanto ela não satisfaz integralmente as condições do Teorema 5.9. Isso levanta um questionamento natural: "Será que toda álgebra alternativa generalizada satisfazendo as condições do Teorema 5.9 é necessariamente alternativa?" A resposta para esta pergunta ainda não está completamente estabelecida. Caso a resposta seja afirmativa, nosso resultado se aplica também às álgebras alternativas, mostrando que o teorema abrange esse caso clássico. Por outro lado, se a resposta for afirmativa, então o resultado possui ainda mais alcance, pois descreve uma classe mais ampla de estruturas do que as das álgebras alternativas.

Até o presente momento, não encontramos um exemplo conclusivo que resolva definitivamente essa questão. Assim, deixamos esse problema em aberto, como direção interessante para futuras pesquisas.

Apresentamos, a seguir, algumas observações acerca das álgebras alternativas generalizadas que satisfazem as condições do Teorema 5.9. Caso a álgebra fosse alternativa, teríamos necessariamente $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \{0\}$. Nesse cenário, as condições do Teorema 5.9 anulariam esse subespaço, e é precisamente esse fenômeno que buscamos compreender.

Outra observação relevante é a seguinte: se a álgebra alternativa generalizada em questão possui elemento identidade, então o subespaço $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ também é trivial, ou seja, $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \{0\}$. Esse fato decorre diretamente da Condição (iv) do Teorema 5.9.

Por outro lado, se a álgebra não possui identidade e existirem $t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ com $t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \neq 0$ e $a_{00} \in \mathfrak{A}_{00}$ tais que

$$a_{00}t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \neq 0 \quad \text{e} \quad t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}a_{00} \neq 0,$$

então essa situação satisfaz a Condição (iv) do Teorema 5.9. A partir dessas observações, obtemos uma indicação sobre a estrutura do exemplo que satisfaz as condições do nosso resultado principal: trata-se de uma álgebra para a qual o subespaço $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ é não trivial, isto é, $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \neq \{0\}$, já que buscamos uma álgebra alternativa generalizada que não seja alternativa.

Destacamos ainda um fato interessante: nem toda álgebra alternativa generalizada que satisfaz $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \{0\}$ é necessariamente uma álgebra alternativa. De fato, no exemplo apresentado na Seção 5.2, se tomamos $M = 0$, de modo que

$$V = \mathbb{C} \times 0 \times N \times \mathbb{C},$$

então V não é alternativa, como demonstrado anteriormente. Assim, obtemos o seguinte panorama: se \mathfrak{A} é uma álgebra alternativa generalizada tal que $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \neq \{0\}$, então \mathfrak{A} não é alternativa; por outro lado, o fato de $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \{0\}$ não implica que \mathfrak{A} seja alternativa.

6 | CONCLUSÃO

6.1 DESDOBRAMENTOS

Ao longo desta tese, evidenciou-se que a investigação de funções que preservam determinadas estruturas algébricas constitui uma área de estudo ampla e em constante desenvolvimento. Pesquisadores de diferentes países têm se dedicado a analisar essas funções e suas propriedades, o que confirma o interesse e a relevância do tema dentro do contexto matemático atual.

A inserção de nossos trabalhos nessa linha de pesquisa pode ser observada, por exemplo, no artigo de Ali, Tasleema e Khan [1], que menciona duas de nossas publicações: "**-Lie-type maps on alternative *-algebras*" e "**-Jordan-type maps on alternative *-algebras*". Nessa mesma direção, o trabalho de Ferreira, Barreiro e Smigly [15] cita o artigo "**-Jordan-type maps on alternative *-algebras*", enquanto Ferreira, Ferreira, Costa e Silva [23] fazem referência a ambos os artigos citados anteriormente.

Além disso, o livro *Differential Identities in Rings and Algebras and their Applications* [2] inclui menção ao artigo "**-Lie-type maps on alternative *-algebras*". Essa referência em uma obra de caráter abrangente e didático evidencia que os resultados obtidos têm alcançado não apenas publicações especializadas, mas também materiais de consulta mais gerais.

Essas referências, em conjunto, indicam que nossas contribuições estão sendo incorporadas e discutidas no cenário acadêmico internacional, o que reforça a pertinência do tema e abre perspectivas para a continuidade das investigações nesta linha de pesquisa.

6.2 ESTUDOS FUTUROS

Dando continuidade à linha de pesquisa que envolve a aditividade de funções, a autora tem como objetivo aprofundar sua investigação sobre o comportamento de certas funções específicas, como as derivações, as funções \ast -Lie e \ast -Jordan, dentro do contexto das álgebras alternativas generalizadas. A intenção é compreender melhor como essas funções se relacionam nesse tipo mais amplo de estrutura algébrica, buscando identificar padrões, propriedades e possíveis generalizações teóricas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Ali, M. Tasleem, and A. N. Khan. Characterization of non-linear mixed bi-skew Jordan triple higher derivations on prime $*$ -algebras. *Filomat*, 39(12):4013–4032, 2025.
- [2] S. Ali, M. Ashraf, V. De Filippis, L. Oukhtite, and N. Ur Rehman. *Differential Identities in Rings and Algebras and their Applications*. CRC Press, 1st edition, 2025.
- [3] K. I. Beidar, A. V. Mikhalev, and A. M. Slin'ko. A primality criterion for nondegenerate alternative and Jordan algebras. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 50:130–137, 1987.
- [4] M. Brešar and M. Fošner. On rings with involution equipped with some new product. *Publ. Math. Debrecen*, 57(1-2):121–134, 2000.
- [5] A. L. Cauchy. *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Première partie: Analyse algébrique*. Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, Paris, 1821.
- [6] J. C. Da Motta Ferreira and B. L. M. Ferreira. Additivity of n -multiplicative maps on alternative rings. *Communications in Algebra*, 44(4):1557–1568, 2016.
- [7] J. C. Da Motta Ferreira and H. Guzzo Jr. Multiplicative mappings of alternative rings. *Algebras Groups and Geometries*, 31(3):239–250, 2014.
- [8] M. N. Daif et al. When in a multiplicative derivation additive. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 14(3):615–618, 1991.
- [9] A. J. De Oliveira Andrade, E. Barreiro, and B. L. M. Ferreira. $*$ -Lie-type maps on alternative $*$ -algebras. *Journal of Algebra and Its Applications*, 22(06):2350130, 2023.
- [10] A. J. De Oliveira Andrade, B. L. Ferreira, and L. Sabinina. $*$ -Jordan-type maps on alternative $*$ -algebras. *Journal of Mathematical Sciences*, 280(3):278–287, 2024.

- [11] A. J. De Oliveira Andrade, G. C. Moraes, R. N. Ferreira, and B. L. Ferreira. Nonlinear $*$ -Jordan-type derivations on alternative $*$ -algebras. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 19(1):125–137, 2022.
- [12] L. E. Dickson. On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem. *Annals of Mathematics*, 20(3):155–171, 1919.
- [13] B. Ferreira, H. Guzzo, and J. Ferreira. Multiplicative mappings of standard rings. *International Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra*, 22:1328, 2013.
- [14] B. L. M. Ferreira. Derivable maps on alternative rings. *RECEN-Revista Ciências Exatas e Naturais*, 16(1):9–15, 2014.
- [15] B. L. M. Ferreira, E. Barreiro, and D. A. Smigly. A Hua-type theorem for Cayley algebras. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 73(5):2017–2036, 2024.
- [16] B. L. M. Ferreira and B. T. Costa. $*$ -Jordan-type maps on C^* -algebras. *Communications in Algebra*, 49(12):5073–5082, 2021.
- [17] B. L. M. Ferreira and B. T. Costa. $*$ -Lie-Jordan-type maps on C^* -algebras. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 48(4):1679–1690, 2022.
- [18] B. L. M. Ferreira, H. Guzzo Jr, and J. C. Da Motta Ferreira. The b-radical of generalised alternative b-algebras i. *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*, 120A(1):25–36, 2020.
- [19] B. L. M. Ferreira, H. Guzzo Jr, and R. N. Ferreira. An approach between the multiplicative and additive structure of a Jordan ring. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 47(4):961–975, 2021.
- [20] B. L. M. Ferreira, H. Guzzo Jr, R. N. Ferreira, and F. Wei. Jordan derivations of alternative rings. *Communications in Algebra*, 48(2):717–723, 2020.
- [21] R. N. Ferreira and B. L. Ferreira. Jordan triple derivation on alternative rings. *Proyecciones (Antofagasta)*, 37(1):171–180, 2018.

- [22] R. N. Ferreira and B. L. Ferreira. Jordan triple derivation on alternative rings. *Proyecciones (Antofagasta)*, 37(1):171–180, 2018.
- [23] R. N. Ferreira, B. L. Ferreira, B. T. Costa, and A. V. da Silva. Reverse $*$ -Jordan type maps on Jordan $*$ -algebras. *Journal of Algebra and Its Applications*, 23(01):2450015, 2024.
- [24] R. N. Ferreira and B. L. M. Ferreira. Jordan derivation on alternative rings. *International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra*, 25(4):435–444, 2016.
- [25] M. Fošner. Prime rings with involution equipped with some new product. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 26:27–31, 2003.
- [26] I. R. Hentzel. Generalized right alternative rings. *Pacific Journal of Mathematics*, 60(2):95–104, 1975.
- [27] I. R. Hentzel and G. M. Piacentini Cattaneo. Generalization of right alternative rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 207:143–161, 1975.
- [28] N. Jarboui and B. Al Subaiei. When are \vee -additive mappings multiplicative? *Journal of Algebra and Its Applications*, 24(07):2550176, 2025.
- [29] K. Jayalakshmi and S. M. Latha. Right nucleus in generalized right alternative rings. *International Journal of Research – Granthaalayah*, 3(1):1–12, 2015.
- [30] E. Kleinfeld. Generalization of alternative rings, i. *Journal of Algebra*, 18(2):304–325, 1971.
- [31] F. Kosier. A generalization of alternative rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 112(1):32–42, 1964.
- [32] C. Li, F. Lu, and X. Fang. Nonlinear mappings preserving product $xy + yx^*$ on factor von neumann algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 438(5):2339–2345, 2013.
- [33] C. Li, F. Lu, and X. Fang. Non-linear ξ -jordan $*$ -derivations on von neumann algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, 62(4):466–473, 2014.

- [34] W. H. Lin. Nonlinear $*$ -Lie-type derivations on von neumann algebras. *Acta Mathematica Hungarica*, 156:112–131, 2018.
- [35] W. S. Martindale III. When are multiplicative mappings additive? *Proceedings of the American Mathematical Society*, 21(3):695–698, 1969.
- [36] L. Molnár. A condition for a subspace of $\mathcal{B}(h)$ to be an ideal. *Linear Algebra and its Applications*, 235:229–234, 1996.
- [37] R. D. Schafer. *An introduction to nonassociative algebras*, volume 22. Courier Corporation, 2017.
- [38] P. Šemrl. Quadratic functionals and Jordan $*$ -derivations. *Studia Mathematica*, 97(3):157–165, 1990.
- [39] H. F. Smith. Prime generalized alternative rings with nontrivial idempotent. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 39(2):242–246, 1973.
- [40] A. Taghavi, M. Nouri, M. Razeghi, and V. Darvish. Maps preserving Jordan triple product $a * b + ba*$ on $*$ -algebras. *Korean Journal of Mathematics*, 26(1):61–74, 2018.
- [41] K. A. Zhevlakov. *Rings that are nearly associative*, volume 104. Academic press, 1982.

ÍNDICE REMISSIVO

- *-álgebra, 18
- associador, 17
- bimódulo, 17
- comutador, 17
- elemento simétrico, 18
- flexibilidade, 19
- função
 - aditiva, 17, 20
 - multiplicativa, 18
 - preserva o produto, 19
 - preserva produto de Lie, 19
- idempotente, 22
 - não trivial, 22
- idempotentes
 - ortogonais, 22
- involução, 18
- isomorfismo, 20
- módulo
 - fiel, 17
 - módulo à direita, 16
 - módulo à esquerda, 16
- nilpotente, 23
- preserva produto
 - de Jordan, 19
- álgebra, 17
 - alternativa, 18
 - alternativa generalizada, 21, 120
 - associativa, 17
 - associativa nas potências, 22
 - finitamente gerada, 22
 - prima, 19