

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA



Bruno Henrique Torres

TORRES DE SELAS TIPO SCHERK DE GÊNERO
DOIS EM \mathbb{R}^3

Dissertação de Mestrado

Santo André - SP
2011

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Dissertação de Mestrado

Bruno Henrique Torres

TORRES DE SELAS TIPO SCHERK DE GÊNERO DOIS EM \mathbb{R}^3

Trabalho apresentado à Pró-Reitoria de Pós-graduação da Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Valério Ramos Batista
Co-orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Santo André - SP
2011

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Biblioteca da Universidade Federal do ABC

TORRES, Bruno Henrique.

Torres de selas tipo Scherk de gênero dois em R^3 / Bruno Henrique Torres — Santo André : Universidade Federal do ABC, 2011.

71 fls. il. 29 cm

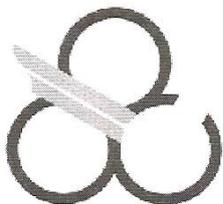
Orientador: Valério Ramos Batista

Co-orientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, 2011.

1. Superfícies mínimas - Matemática 2. Torres de Selas – Geometria - Topologia . I. BATISTA, Valério Ramos. II. SILVA, Márcio Fabiano da. III. Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, 2011, III. Título.

CDD 516



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a defesa da Dissertação de Mestrado do candidato **Bruno Henrique Torres**, realizada em 09 de dezembro de 2011:

Valério Ramos Batista

Prof. Dr. Valério Ramos Batista (UFABC) – Presidente

Irene Ignazia Onnis

Profa. Dra. Irene Ignazia Onnis (USP/São Carlos) – Membro Titular

Igor Leite Freire

Prof. Dr. Igor Leite Freire (UFABC) – Membro Titular

Prof. Dr. Marcelo Zanchetta do Nascimento (UFABC) – Suplente

Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra (UFSCAR) – Suplente

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 19 de Dezembro de 2011.

Assinatura do autor: Bruno Henrique Torres

Assinatura do orientador: Márcio Fabiano da Silva

Este trabalho é dedicado principalmente à meus pais, *Walter Corrêa Nu-ud* e
Vania Maria Torres e, à minha avó, *Ana Garcia Torres*.
E, especialmente, *Laura de Almeida Mariano*.
Não esquecendo de todos aqueles que acreditaram e confiaram em mim.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, *Walter* e *Vania*, e a minha avó *Ana*, por acreditarem em mim e em meus sonhos, principalmente, minha mãe *Vania* e minha avó *Ana*, por me apoiarem em todas as minhas decisões, incentivando-me, sempre, a seguir adiante em busca de meus objetivos. E ainda, todo o suporte despendido a mim durante minha vida acadêmica, suas orações em prol de meu sucesso, e especialmente a presença, imprescindível, em minha vida de suas figuras acolhedoras e cheias de ternura e força, mesmo sendo muitas vezes por telefone devido a distância que muitas vezes nos separavam. Em especial, agradeço a *Laura*, por ter um papel fundamental, sempre me dando força para ir até o fim.

Aos meus orientadores e amigos, Prof. Valério Ramos Batista e Prof. Márcio Fabiano da Silva, que tiveram paciência, dedicação, empenho e em nenhum momento deixaram de transmitir o conhecimento necessário para a conclusão deste trabalho. Em particular, agradeço a oportunidade que tive de ter cursado e concluído várias disciplinas ministradas pelo Prof. Márcio no decorrer do mestrado, as quais contribuíram de forma significativa em minha formação matemática, proporcionando-me uma visão inovada da mesma. Além de agradecer sua enorme compreensão e discernimento em alguns momentos difíceis. Agradeço ao Prof. Valério todos os conhecimentos específicos sobre a área de pesquisa de nosso trabalho que foram repassados a mim, inclusive o curso de Superfícies Mínimas. Não esquecendo do grande incentivo e otimismo, além do apoio em algumas decisões, mesmo estas não muito corretas.

Aos meus colegas de turma do mestrado, Amanda, Benedito, Carolina, Elaine, Júlio, Luiz Felipe e Miriam que foram companheiros de conversas, e principalmente, de árduas horas de estudo, não esquecendo dos alunos do ano seguinte, Alejandra, Chryslaine, Elisiane, Ícaro, José, Lillian, Moisés, Rafael Budaibes, Renato, Rodrigo, Rogério e Sue Ellen. Em particular, agradeço a Alejandra e Bruno Locatelli pelo companheirismo e ajuda no estudo de muitos conteúdos de algumas disciplinas. Aos colegas de Três Lagoas do curso de Licenciatura em Matemática (UFMS), aos professores, Antonio C. Tamarozzi, Antonio L. Venezuela, Eliedete Pinheiro, Eugênia B. Opazo Uribe, José A. Menoni, Renato C. da Silva, Rosana S. Takehara e Osmar J. de Macedo pela força e confiança no momento da decisão de ingressar num curso de mestrado. Aos professores Antonio C. Campos Corrêa e Fabrício Hernandes pela oportunidade de ampliar meus conhecimentos no ensino médio. E a todos que moraram comigo, Wendhel Raffa, Márcio Traesel, Henrique, Denis, Glauber e Mário pelos momentos de descontração e por suas amizades.

À UFABC e às Bolsas CAPES e FAPESP, que nos períodos de 01/03/2010 a 28/02/2011, e de 01/03/2011 a 31/12/2011, respectivamente, financiaram este trabalho.

E por último, mas não menos importante, agradeço à Deus, por sempre estar presente em minha vida através da fé e esperança.

Cada um de vocês teve um papel importante nesta etapa da minha vida.

A todos, meu muito obrigado!

“Não temos de nos tornar heróis do dia para a noite.
Só um passo de cada vez, tratando cada coisa à medida que surge,
vendo que ela não é tão assustadora como parecia e
descobrimo que temos a força para superá-la.”

Eleanor Roosevelt, esposa de Franklin Roosevelt

Resumo

Esta dissertação fundamenta-se no artigo: DA SILVA, M.F.; RAMOS BATISTA, V. Scherk Saddle Towers of Genus Two in \mathbb{R}^3 . **Geom. Dedicata**, Utrecht, v. 149, n. 1, p. 59–71, 2010, que constrói uma família de torres de selas tipo Scherk contínua a dois parâmetros. Seu quociente pelo grupo de translações tem gênero dois e oito fins Scherk. Para a obtenção das torres, aplicaremos o método da construção reversa de Karcher. O método utiliza a recíproca do Teorema da Representação de Enneper-Weierstraß, que equaciona as superfícies S . Além disso, seleciona condições necessárias para a existência de S , e depois mostra que elas são também suficientes. Para fins didáticos, incluímos uma aplicação do método às torres de selas tipo Scherk de gênero zero. Isto facilitará a compreensão das *torres de selas tipo Scherk de gênero dois em \mathbb{R}^3* , principal objetivo deste trabalho.

Palavras-Chave

Superfícies mínimas, torres de selas.

Abstract

This work is based on the article: DA SILVA, M.F.; RAMOS BATISTA, V. Scherk Saddle Towers of Genus Two in \mathbb{R}^3 . **Geom. Dedicata**, Utrecht, v. 149, n. 1, p. 59–71, 2010, which presents the construction of a continuous two-parameter family of saddle towers of Scherk-type. Their quotient by the translation group has genus two and eight Scherk ends. In order to obtain these towers, we shall apply Karcher's reverse construction method. This method makes use of the converse of the Enneper-Weierstraß Representation Theorem, which gives the equation of the surfaces S . Moreover, it selects necessary conditions for the existence of S , and then shows that they are also sufficient. For didactic purposes, we include an application of this method to the Scherk saddle towers of genus zero. This will help understand the *Scherk saddle towers of genus two in \mathbb{R}^3* , which are the main purpose of this work.

Keywords

Minimal surfaces, saddle towers.

Sumário

1	Introdução	1
2	Resultados Preliminares	7
2.1	Geometria Diferencial	7
2.2	Superfícies de Riemann	9
2.3	Teoria de Superfícies Mínimas	12
3	Torres de Selas Tipo Scherk de Gênero Zero em \mathbb{R}^3	17
3.1	Contexto histórico das superfícies mínimas	17
3.2	Exemplos de superfícies mínimas	18
3.3	Compactificação de P	21
3.4	Obtenção da função g	23
3.5	Obtenção da diferencial dh	24
3.6	Curvas sobre a superfície	26
3.7	Verificação dos períodos	32
3.8	Verificação do mergulho	32
4	Torres de Selas Tipo Scherk de Gênero Dois em \mathbb{R}^3	33
4.1	As superfícies de Riemann compactas \bar{R}	33
4.2	Os dados de Weierstraß	37
4.2.1	Obtenção da função meromorfa g	37
4.2.2	Obtenção da 1-forma meromorfa dh	42
4.3	Os problemas de resíduo e período	45
4.3.1	Solução do problema de resíduo	47
4.3.2	Solução dos problemas de período	48
4.4	Mergulho de S	53
	Bibliografia	57

Lista de Figuras

1.1	Corte e deformações adequadas da superfície de Costa.	2
1.2	Uma torre de selas tipo Scherk de gênero dois em \mathbb{R}^3	3
1.3	Curvas de simetria reflexional em superfícies mínimas mergulhadas.	4
2.1	Projeção estereográfica da esfera $S^2(r) \setminus \{PN\}$	7
3.1	Metade da peça fundamental P^* da primeira <i>superfície de Scherk</i>	19
3.2	A <i>superfície de Scherk</i> duplamente periódica.	20
3.3	Superfície numérica pelo Matlab.	21
3.4	Metade da peça fundamental P de uma torre de selas Scherk de gênero zero.	22
3.5	Uma das etapas de compactificação de P	22
3.6	Peça fundamental P compactificada menos quatro pontos.	23
3.7	Aplicação normal de Gauß sobre P	24
3.8	Sentido percorrido pelo vetor normal à P	25
3.9	Representação simplificada das curvas sobre $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$	28
3.10	Representação das curvas sobre $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$	31
4.1	Torre de selas tipo Scherk de gênero dois em \mathbb{R}^3	34
4.2	Rascunho de metade da peça fundamental P de S	35
4.3	Sequência de compactificação de P . (1º desenho somente a metade superior).	35
4.4	Superfície de Riemann \overline{R} menos oito pontos.	36
4.5	Aplicação z sobre $1/8$ da peça fundamental P de S	36
4.6	A aplicação $z : \overline{R} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ (induzida por ρ).	38
4.7	Pontos onde g assume os valores $\pm i$	39
4.8	Pontos onde $(g + i)/(g - i)$ assume os valores 0 ou ∞	39
4.9	Zeros e pólos de dz	42
4.10	Zeros e pólos de g vistos na peça fundamental P	43
4.11	Zeros e pólos de g vistos em \overline{R}	43
4.12	Curvas I, J e K que caracterizam os problemas de período de S	45
4.13	Transformação de Möbius adequada à solução dos problemas de período.	49
4.14	Um quarto da superfície CSSCFF com $x'_2 = -x_3$ e $x'_3 = x_2$	50
4.15	Curvas que caracterizam os problemas de período das superfícies CSSCFF.	51
4.16	Duas vistas dos gráficos $\pi_1(a, b)$ e $\pi_2(a, b)$	52

4.17	Imagem de z por g no 1º quadrante e a correspondente projeção em $x_3 = 0$.	53
4.18	Variações da Figura 7(b).	54

Lista de Tabelas

4.1	Comportamento de g e dh ao longo de trechos em \overline{R}	45
4.2	Funções $\pi_1(a, b)$ e $\pi_2(a, b)$ de [43], p. 17.	52

Capítulo 1

Introdução

Para uma superfície mínima S completa, mergulhada em \mathbb{R}^3 , com curvatura total finita, depois dos trabalhos de Rick Schoen [36] e López-Ros [21], ficou mostrado que exemplos com número de fins $n \leq 2$ ou gênero zero são possíveis somente para o plano e o catenóide.

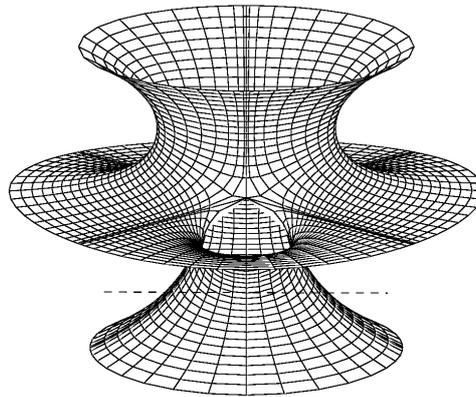
Portanto, novas superfícies desse tipo devem ter pelo menos gênero um e três fins. Um tal primeiro exemplo foi encontrado por Costa [6], seguido por Hoffman-Meeks [14], ainda com três fins, mas com gênero arbitrário. Além disto, em [14] os autores lançaram a conjectura que, para qualquer S vale $n \leq 2 + \text{gênero}(S)$, a qual permanece aberta até hoje.

Em 1989, Karcher apresentou vários exemplos em [18] e [19] que responderam muitas questões na Teoria de Superfícies Mínimas. Por exemplo, ele apresentou as primeiras tais superfícies com gênero positivo e fins helicoidais, provou a existência das superfícies triplamente periódicas de Alan Schoen e deu exemplos duplamente, bem como, simplesmente periódicos não pertencentes às famílias de Scherk. A propósito, após tomar o quociente pelo grupo de translações, ele obteve exemplos de torres de selas com $n = 2k$ fins, para gênero zero e um, onde $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq \text{gênero}(S) + 2$. Curiosamente, nenhuma outra torre de selas foi *explicitamente* obtida depois dos resultados de Karcher, exceto por [24]. Isso pode ser devido ao fato de que tais superfícies são muito restritivas. Meeks e Wolf recentemente provaram em [26] que uma torre de selas propriamente mergulhada com 4 fins pertence necessariamente à família de Scherk.

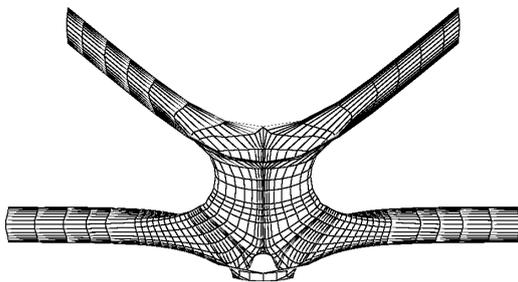
Neste trabalho, *quase explícito* significa que temos os dados de Weierstraß. Além disto, se os parâmetros do domínio podem ser refinados e então obtidos com qualquer precisão desejada, dizemos que o exemplo é *explícito*. Neste sentido, todas as construções de Karcher são explícitas. Ele as padronizou por um *método de construção reversa*, que possui uma ampla literatura de sua aplicação: [3, 18, 19, 22, 23, 24, 29, 30, 31, 32, 33] e [34]. Algumas construções não-implícitas são [12, 17, 38, 39, 40, 41].

Apresentamos aqui as primeiras torres de selas de gênero dois e $8 = 2 \cdot 2 + 4$ fins. Isso poderia nos levar a pensar sobre uma conjectura tipo Hoffman-Meeks para o *slab* \mathbb{R}^3/T , onde T é um grupo cíclico de translações, ou seja $n \geq 2(\text{gênero}+2)$. Entretanto, [12] talvez possa dar indícios de que a conjectura de Hoffman-Meeks é falsa, pois lá os autores apresentam torres de selas com gênero arbitrário e três fins.

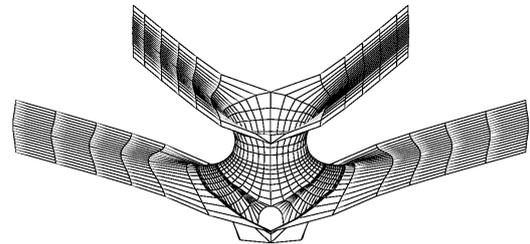
As superfícies que estudamos neste trabalho são fáceis de entender através das Figuras 1.1 e 1.2. Tome a superfície de Costa e corte a sua extremidade catenoidal inferior, substituindo esta por uma curva fechada de simetria reflexional. Depois, substitua os fins restantes por fins Scherk, como mostrado na Figura 1.1b.



(a) A superfície de Costa.



(b) Uma peça de S em especial.



(c) Uma peça de S em geral.

Figura 1.1: Corte e deformações adequadas da superfície de Costa.

A Figura 1.2 representa a torre de selas que vamos construir. Depois de obtermos os dados de Weierstraß pelo método de Karcher, haverá três problemas de período para resolvermos, e estes seguem praticamente *sem cálculos*, pois analisando as torres de selas, o método mais fácil para a solução desses problemas de período foi o *método limite* descrito tanto em [22] como em [23], que é muito prático e não necessita de muitos cálculos. Ele é melhor detalhado no Capítulo 4 deste trabalho. Outros métodos que facilitam a resolução de problemas de período, não para nosso caso, são encontrados em [3, 24, 42].

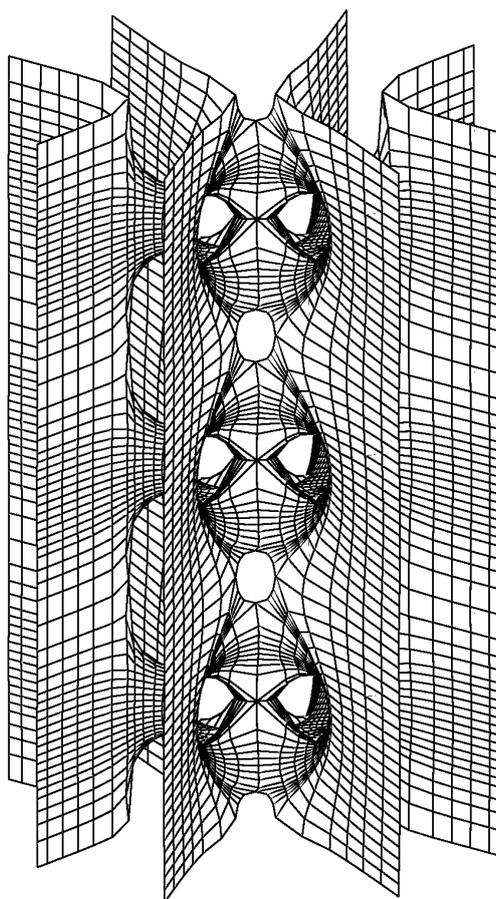


Figura 1.2: Uma torre de selas tipo Scherk de gênero dois em \mathbb{R}^3 .

Em [34], os autores lançaram uma questão aberta, qual seja, se existem superfícies mínimas completas e mergulhadas em \mathbb{R}^3 contendo *geodésica Gaussiana*. Por este conceito entende-se uma curva plana de simetria reflexional, a qual é o gráfico de uma função real analítica par, $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 0)$, onde $f(0) = -1$, $f' \neq 0$ em \mathbb{R}^* e $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$. As torres de selas tipo Scherk de gênero dois em \mathbb{R}^3 , que estudaremos ao longo deste trabalho, respondem afirmativamente à esta questão ora aberta. Nas Figuras 1.1b ou 1.2, percebe-se a presença de *geodésicas Gaussianas*.

Este fato é importante porque, antes dos exemplos aqui estudados, para superfícies mínimas completas e mergulhadas, observava-se que a forma de uma geodésica plana *não-limitada sempre* correspondia a um dos nove primeiros padrões da Figura 1.3, e apenas aqueles. Para cada padrão citamos um exemplo nesta figura, mas o último era faltante. Na realidade, tais geodésicas parecem ter uma geometria muito restritiva, e seu estudo pode revelar muito sobre o comportamento geral das superfícies mínimas.

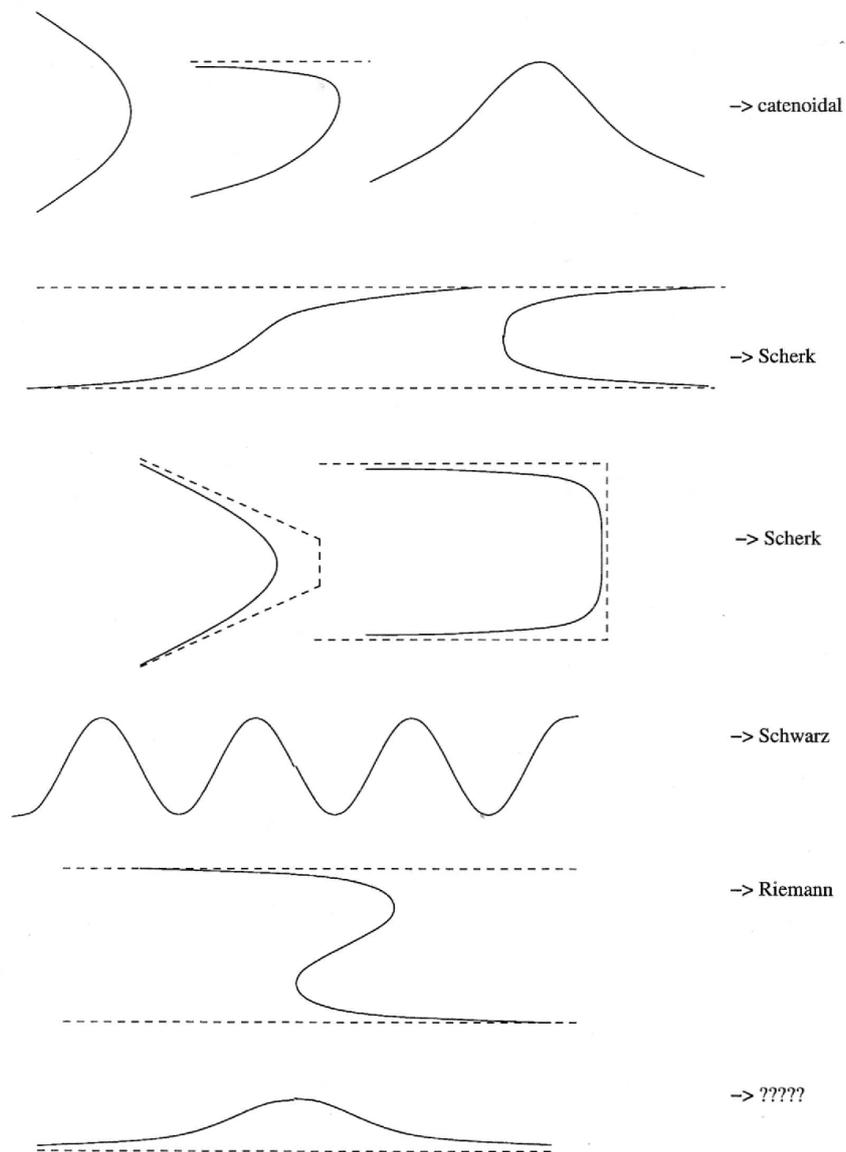


Figura 1.3: Curvas de simetria reflexional em superfícies mínimas mergulhadas.

Além de responder à questão das geodésicas Gaussianas, as torres de selas tipo Scherk, permitiram provar em [7], que as superfícies CSSCFF e CSSCCC descritas em [43] são *mergulhadas* em \mathbb{R}^3 . As abreviações dos nomes destas duas famílias de superfícies mínimas significam: catenoidal, saddle, saddle, catenoidal, flat, flat e catenoidal, saddle, saddle, catenoidal, catenoidal, catenoidal, e expressam as características das partes que compõem as superfícies, tais como, fins planares, fins catenoidais, e regiões de sela. Elas serão usadas aqui como *superfícies-limite* para o método explicado tanto em [22] como em [23].

Agora apresentamos o principal teorema deste trabalho:

Teorema 1.1 Existe uma família de torres de selas contínua a dois parâmetros em \mathbb{R}^3 , da qual qualquer membro possui as seguintes propriedades:

- i)* O quociente pelo grupo de translações tem gênero dois e oito fins Scherk.
- ii)* É invariante sob reflexões em Ox_2x_3 , Ox_3x_1 e $mT/2 + Ox_1x_2$, onde $m \in \mathbb{Z}$, e T é o período simples da superfície.
- iii)* É mergulhada em \mathbb{R}^3 .

Além disso, a família contém uma sub-família contínua a um parâmetro, da qual qualquer membro possui geodésicas Gaussianas. Isso ocorre quando fixamos um dos parâmetros, a saber: $X = a$.

No Capítulo 2, estabelecemos algumas definições e resultados básicos de Geometria Diferencial, com uma seção especialmente dedicada à Teoria de Superfícies Mínimas. O Capítulo 3 é didático, e mostra a aplicação do método de construção reversa de Karcher para as torres de selas tipo Scherk de gênero zero, com o intuito de facilitar a compreensão do Capítulo 4. Nele, finalmente abordaremos as *torres de selas tipo Scherk de gênero dois*, principal objetivo deste trabalho.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Neste capítulo estabelecemos algumas definições e resultados básicos de Geometria Diferencial, com a Seção 2.3 especialmente dedicada à Teoria de Superfícies Mínimas.

2.1 Geometria Diferencial

Definição 2.1 Uma curva *parametrizada* é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, que para cada $t \in I$ associa $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. As funções $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, são as *componentes* da curva, que exigimos serem deriváveis. Se $\alpha'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$, dizemos que α é uma curva *regular*. O conjunto $\{\alpha\} = \alpha(I)$ é denominado o *traço* de α . Além disso, no caso em que suas extremidades coincidem, dizemos que α é *fechada*.

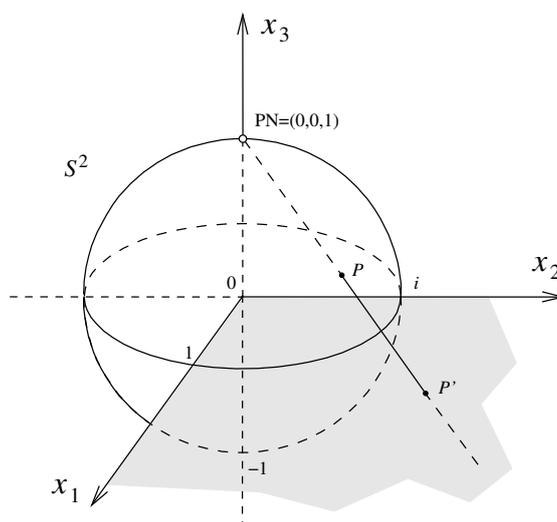


Figura 2.1: Projeção estereográfica da esfera $S^2(r) \setminus \{PN\}$.

Definição 2.2 Sejam $S^2(r) = \{x \in \mathbb{R}^3; |x|^2 = r^2\}$ a esfera de centro na origem e raio $r > 0$ e $PN = re_3 = (0, 0, r)$ o pólo norte de $S^2(r)$. Será denotada simplesmente S^2 quando $r = 1$. A aplicação

$$\begin{aligned} \Gamma : S^2(r) \setminus \{PN\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \Gamma(x_1, x_2, x_3) = \frac{r}{r - x_3}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

é denominada *projeção estereográfica* da esfera $S^2(r) \setminus \{PN\}$. Pode-se mostrar que Γ é um difeomorfismo conforme com inversa

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2(r) \setminus \{PN\} \\ (y_1, y_2) &\mapsto \Gamma^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{2r^2 y_1}{y_1^2 + y_2^2 + r^2}, \frac{2r^2 y_2}{y_1^2 + y_2^2 + r^2}, \frac{r(y_1^2 + y_2^2 - r^2)}{y_1^2 + y_2^2 + r^2} \right). \end{aligned}$$

Definição 2.3 Uma *variedade* \mathcal{C}^r de dimensão 2, ou uma 2-variedade \mathcal{C}^r , é um espaço topológico M conexo, de Hausdorff e com base enumerável, munido de uma família \sum_M de homeomorfismos $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, com U_i aberto de M e V_i aberto de \mathbb{R}^2 , tal que:

1. $\bigcup_i U_i = M$;
2. $\forall i, j$ com $U_i \cap U_j = W \neq \emptyset$, $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ é de classe \mathcal{C}^r em W ;
3. Dado um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$, onde U é subconjunto aberto de M , V é aberto em \mathbb{R}^2 , e $\{(\varphi, U)\} \cup \sum_M$ satisfazendo (2), tem-se $(\varphi, U) \in \sum_M$. Ou seja, \sum_M é maximal.

Observação 2.1 Os elementos de \sum_M são chamados *cartas* da variedade, assim como suas aplicações inversas $\varphi_i^{-1} : V_i \rightarrow U_i$. Se $r = 0$, dizemos que M é *topológica*. Se $r = \infty$, dizemos que M é *diferenciável*.

Definição 2.4 Sejam M e N 2-variedades \mathcal{C}^∞ . Uma função $f : M \rightarrow N$ é dita diferenciável em M se $\phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é de classe \mathcal{C}^∞ , para toda carta (ϕ, U) de M e toda carta (φ, V) de N , tais que $f(U) \subset V$. Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$, para toda carta (φ, U) de M é também dita diferenciável, e o conjunto de todas as funções diferenciáveis neste sentido é representado por $\mathcal{F}(M)$. Mais adiante introduziremos o conceito de superfície de Riemann, e o termo *função diferenciável*, será usado, neste caso, em um sentido mais particular.

Definição 2.5 Um *caminho* em M é uma curva \mathcal{C}^1 por partes $\gamma : I \rightarrow M$. Ele é dito *divergente* se $I = [0, b[$, $0 < b \leq \infty$, e para cada compacto $Q \subset M$ existe $t_0 \in I$ tal que $\gamma(t) \notin Q$, para todo $t \in]t_0, b[$.

Definição 2.6 Uma *métrica Riemanniana* em M é uma lei que faz corresponder a cada $p \in M$ uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (ou g_p) tal que $\forall u, v \in T_p M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valem

$$i) \langle u, v \rangle_p = \langle v, u \rangle_p,$$

$$ii) \langle u + \lambda v, w \rangle_p = \langle u, w \rangle_p + \lambda \langle v, w \rangle_p,$$

$$iii) \langle u, u \rangle_p \geq 0 \text{ e } \langle u, u \rangle_p = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

iv) Se $X, Y : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ são diferenciáveis e tangentes em todo $p \in M$, a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \langle X(p), Y(p) \rangle_p$ é diferenciável.

Definição 2.7 Uma 2-variedade diferenciável M é *completa* com respeito a uma métrica Riemanniana ds^2 se $\int_0^b \|\gamma'(t)\| dt = \infty$ para todo caminho divergente $\gamma : [0, b[\rightarrow M$, onde $\|\gamma'(t)\|^2 = ds^2(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$.

2.2 Superfícies de Riemann

Definição 2.8 Uma *superfície de Riemann* M é uma 2-variedade de classe \mathcal{C}^∞ onde as composições como em (2) na Definição 2.3 são todas holomorfas, com a identificação $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

É possível demonstrar que toda 2-variedade de classe \mathcal{C}^0 possui um atlas conforme. Esta demonstração depende de quatro resultados. O primeiro e o segundo são os Teoremas da Curva de Jordan e de Schönflies (vide [37], por exemplo). O terceiro passo é o Teorema da Triangulação das Superfícies (vide [2]). O quarto passo utiliza a triangulação para obtermos um atlas conforme. Também, demonstra-se que M é orientável se, e somente se, tal atlas pode ser obtido como *estritamente conforme*.

Definição 2.9 Para M compacta, sua triangulação é finita. Sendo V, A, F o número de vértices, arestas e faces desta triangulação, definimos $\chi(M) := V - A + F$ como a *característica de Euler* de M .

Teorema 2.1 Considere M_1 e M_2 superfícies compactas. Então, M_1 e M_2 são homeomorfas se, e somente se, $\chi(M_1) = \chi(M_2)$. Em particular, χ independe de triangulação.

Demonstração: Vide [25] - p. 30.

Definição 2.10 Para uma superfície compacta M , definimos seu *gênero*, o qual denotamos por k , como sendo $2 - \chi(M))/2$.

Observação 2.2 Intuitivamente este conceito é equivalente a M ser deformada continuamente à uma esfera com k alças.

Teorema 2.2 (Comportamento Local das Aplicações Holomorfas). Sejam R_1 e R_2 superfícies de Riemann e $f : R_1 \rightarrow R_2$ uma aplicação holomorfa não-constante. Tome $a \in R_1$ e $b := f(a)$. Então, existem um inteiro $k \geq 1$ e cartas $\varphi : U \rightarrow V$ sobre R_1 e $\psi : U' \rightarrow V'$ sobre R_2 com as seguintes propriedades:

1. $a \in U, \varphi(a) = 0; \quad b \in U', \psi(b) = 0.$
2. $f(U) \subset U'.$
3. A aplicação $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V'$ é dada por $F(z) = z^k, \forall z \in V.$

Demonstração: Vide [9] - p. 10.

Definição 2.11 De acordo com o Teorema 2.2, dizemos que k é a *multiplicidade* de f em a , e sua *ordem de ramificação* é $k - 1$. Quando $\mathbb{R}_2 = \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dizemos que a *ordem* de f em a é k (se $b = 0$), zero (se $b \in \mathbb{C}^*$) ou $-k$ se $b = \infty$. Quando R_1 é compacta, prova-se que $\#f^{-1}(b)$ é constante (contando com a multiplicidade de cada elemento em $f^{-1}(b)$). Assim, dizemos que $\#f^{-1}(b)$ é o *grau* de f .

Corolário 2.1 (Princípio do Máximo). Sejam R uma superfície de Riemann e $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa não-constante. Então $|f|$ não atinge seu máximo.

Teorema 2.3 (de Koebe) Seja R uma superfície de Riemann compacta, simplesmente conexa e de gênero zero. Então existe um biholomorfismo $b : R \rightarrow \tilde{R}$, onde a superfície \tilde{R} é uma, e somente uma das três a seguir: *i*) esfera de Riemann ($\widehat{\mathbb{C}}$), *ii*) o plano complexo, *iii*) o disco unitário $D := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Demonstração: Vide [1].

Teorema 2.4 Sejam R uma superfície de Riemann compacta, simplesmente conexa e $f, g : R \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ duas funções meromorfas com exatamente os mesmos pólos e zeros, incluindo as multiplicidades. Então $g/f = c \in \mathbb{C}^*$.

Demonstração: Tome uma coordenada local $z : B_1(0) \rightarrow R$ em um ponto qualquer $p \in R$, com $z(0) = p$. Considerando os desenvolvimentos de Laurent para $f \circ z$ e $g \circ z$ em 0, vemos que g/f é *holomorfa* em R , ou seja, não assume pólos. De fato, se por exemplo p é pólo de ordem k , em $B_1(0)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{g \circ z}{f \circ z} &= \frac{a_{-k}z^{-k} + \dots + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots}{b_{-k}z^{-k} + \dots + b_{-1}z^{-1} + b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_nz^n + \dots} \\ &= \frac{a_{-k} + \dots + a_{-1}z^{k-1} + a_0z^k + a_1z^{k+1} + a_2z^{k+2} + \dots + a_nz^{k+n} + \dots}{b_{-k} + \dots + b_{-1}z^{k-1} + b_0z^k + b_1z^{k+1} + b_2z^{k+2} + \dots + b_nz^{k+n} + \dots}. \end{aligned}$$

Ou seja, $(g \circ z / f \circ z)|_{z=0} = a_{-k}/b_{-k} \in \mathbb{C}^*$. Particularmente, g/f também não assume zeros. Se esta função não for constante, a Análise Complexa garante que é aberta, mas como R é compacto, então temos sobrejetividade no contra-domínio $\widehat{\mathbb{C}}$. Isso seria absurdo, pois acabamos de ver que sua imagem é subconjunto de \mathbb{C}^* . Assim, existe uma constante complexa não-nula c tal que $g = cf$.

c.q.d.

Teorema 2.5 Sejam R_1 e R_2 superfícies de Riemann, onde R_1 é compacta e $f : R_1 \rightarrow R_2$ é uma aplicação holomorfa não-constante. Então R_2 é compacta e f é sobrejetora.

Demonstração: Segue-se direto do Teorema 2.2, vide [9] - p. 11.

Definição 2.12 Uma *involução* numa superfície de Riemann S é uma aplicação contínua $I : S \rightarrow S$ que satisfaz $I \circ I = id_S$. Quando S é uma superfície compacta, a involução é chamada *hiperelítica* se S/I é homeomorfa a S^2 .

Da definição acima, é imediato ver que toda involução é uma bijeção. No próximo teorema, mencionamos as *transformações de Möbius*, que são aplicações $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ dadas por $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ com a, b, c, d constantes em \mathbb{C} e $ad \neq bc$.

Um resultado conhecido da análise complexa é que *todo* biholomorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$ em $\widehat{\mathbb{C}}$ é uma transformação de Möbius. Além disso, uma tal transformação sempre leva circunferências em circunferências de $\widehat{\mathbb{C}}$. Vejamos agora o que ocorre com as involuções:

Teorema 2.6 Toda involução holomorfa ou anti-holomorfa em $\widehat{\mathbb{C}}$ é dada por uma transformação de Möbius M ou sua conjugada \overline{M} .

Demonstração: Tome uma involução $I : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Se é holomorfa, então é biholomorfa e assim uma transformação de Möbius. Se é anti-holomorfa, então \overline{I} é biholomorfa, logo I é a conjugada de uma transformação de Möbius.

c.q.d.

Note que a recíproca do teorema acima *não* é válida, pois $z \rightarrow 2z$ não é uma involução.

Teorema 2.7 Sejam S e R superfícies de Riemann, $I : S \rightarrow S$ uma involução e $f : S \rightarrow R$ uma função contínua, aberta e sobrejetora. Então, existe uma única involução $J : R \rightarrow R$ tal que $J \circ f = f \circ I$ se, e somente se, sempre que $f(x) = f(y)$ temos $f \circ I(x) = f \circ I(y)$.

Demonstração: As hipóteses do teorema foram formuladas para garantir a comutatividade do diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{I} & S \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ R & \xrightarrow{J} & R \end{array}$$

Admitimos que $J \circ f = f \circ I$. Se $f(x) = f(y)$ então

$$f \circ I(x) = J \circ f(x) = J \circ f(y) = f \circ I(y).$$

Suponhamos agora que $f \circ I(x) = f \circ I(y)$ quando $f(x) = f(y)$. Para cada $z \in R$ definimos $J(z) := f \circ I(x)$, para algum $x \in S$ tal que $f(x) = z$ (este elemento existe pois f é sobrejetora). Por hipótese $J : S \rightarrow S$ está bem definida. Além disso, $J \circ f = f \circ I$. A função J é contínua por causa do seguinte argumento: para qualquer subconjunto aberto $U \subset R$ temos que $I^{-1}(f^{-1}(U))$ é aberto em S . Mas $I^{-1}(f^{-1}(U)) = f^{-1}(J^{-1}(U))$, e consequentemente $J^{-1}(U)$ é aberto em R . Temos ainda

$$J \circ J \circ f = J \circ f \circ I = f \circ I \circ I = f.$$

Assim, J é uma involução.

c.q.d.

É imediato concluir que dado $F \subset R$ temos $J(F) = F$ se, e somente se, $I(f^{-1}(F)) = f^{-1}(F)$.

2.3 Teoria de Superfícies Mínimas

Definição 2.13 Uma *superfície* em \mathbb{R}^3 é um par (M, X) onde M é uma 2-variedade diferenciável e $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão \mathcal{C}^∞ , isto é, $X \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$ e $d(X \circ \varphi^{-1})$ é injetora para toda $(\varphi, U) \in \sum_M$. Como é mostrado abaixo, X induz uma métrica Riemanniana em M . Dizemos que uma superfície $S = (M, X)$ é *completa* se M for completa, relativamente à métrica Riemanniana induzida por X sobre M .

Observação 2.3 Se $p \in U$ e $d(X \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ é injetora para alguma carta (φ, U) de M , então $d(X \circ \psi^{-1})(\psi(p))$ é também injetora, onde $(\psi, V) \in \sum_M$ e $p \in V$.

Considere u, v os parâmetros em $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^2$. De modo abreviado temos $d(X \circ \varphi^{-1}) = [X_u \ X_v]$. Portanto, $G = [X_u \ X_v]^t \cdot [X_u \ X_v]$ é uma matriz 2×2 simétrica, e $\det G \neq 0$. Neste caso, se $G = (g_{ij})$, defina $H = (g_{22}X_{uu} - 2g_{12}X_{uv} + g_{11}X_{vv}) / (2 \cdot \det G)$. Vemos por [28] - p. 11-13, que H não depende de $(\varphi, U) \in \sum_M$.

Definição 2.14 (Curvas sobre superfícies). Sejam $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ uma curva regular onde $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular tal que $S = X(U)$. Assim $X \circ \alpha(t) = \gamma(t)$ é uma curva cuja imagem está em $S = X(U)$ e $\gamma(t) = X(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$.

Definição 2.15 O vetor $H = H(p)$ acima descrito é o *vetor curvatura média* de S em p . A superfície S é *mínima* se $H = 0$ para todo ponto de S . Também, dizemos que $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma *imersão mínima*.

Definição 2.16 Os parâmetros u, v são *isotérmicos* se $g_{11} \equiv g_{22}$ e $g_{12} \equiv 0$ em $\varphi(U)$.

Lema 2.1 Seja $S = (M, X)$ uma superfície mínima. Então, para todo $p \in S$, existe uma carta (φ, U) de M com $p \in \varphi(U)$ tal que os parâmetros em U são isotérmicos.

Demonstração: Vide [28] - p. 31.

Observação 2.4 Agora daremos um resultado mais forte, cuja prova não é tão elementar quanto a deste último. No entanto, ele nos permite concluir que toda 2-variedade \mathcal{C}^∞ conexa M possui uma coleção de cartas $\sum' \subset \sum_M$ tal que os parâmetros em $\varphi(U)$ são isotérmicos, para toda $(\varphi, U) \in \sum'$, e a família \sum' verifica os itens (1) e (2) da Definição 2.3.

Teorema 2.8 Dada uma 2-variedade M de classe \mathcal{C}^∞ , para todo $p \in M$ existe uma carta (φ, U) de M , com $p \in U$, tal que os parâmetros em $\varphi(U)$ são isotérmicos.

Demonstração: Vide [13] - p. 139.

Considere uma superfície $S = ((M, \sum_M), X)$. Se excluirmos todas as cartas de \sum_M nas quais os parâmetros não são isotérmicos, obteremos uma nova superfície $S' = ((M, \sum'), X)$, onde as composições como em (2) na Definição 2.3 são aplicações conformes ou anti-conformes (veja [28] - p 33). Nesta nova superfície, se existir um subconjunto \sum'' de \sum' tal que (1) se verifica para \sum'' , e em (2) as composições são todas conformes, dizemos que S é *orientável*, e \sum'' é uma *estrutura conforme* de M . Caso contrário, S é dita *não-orientável*.

Definição 2.17 Sejam u e v os parâmetros em \mathbb{R}^2 , e U um subconjunto aberto do \mathbb{R}^2 . O *operador de Laplace* é a aplicação $\Delta : \mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\Delta = \partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2$.

Definição 2.18 Seja M uma 2-variedade \mathcal{C}^∞ com estrutura conforme \sum . Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *harmônica* se $\Delta(f \circ \varphi^{-1}) \equiv 0$ em $\varphi(U)$, para toda carta $(\varphi, U) \in \sum$.

Lema 2.2 Considere uma superfície $S = (M, X)$ em \mathbb{R}^3 , $X = (x_1, x_2, x_3)$ e M com uma estrutura conforme \sum . Então S é mínima se, e somente se, x_k é harmônica para todo $k = 1, 2, 3$.

Demonstração: Seja $(\varphi, U) \in \sum$, e como X é imersão \mathcal{C}^∞ , $x_k \circ \varphi^{-1}$ é \mathcal{C}^∞ para todo k . Se u e v são parâmetros de \mathbb{R}^2 , estes são isotérmicos pois \sum é conforme. Considere $\Delta = \partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2$ o operador de Laplace, e denote

$$\Delta(X \circ \varphi^{-1}) = (\Delta(x_1 \circ \varphi^{-1}), \Delta(x_2 \circ \varphi^{-1}), \Delta(x_3 \circ \varphi^{-1})).$$

Usando as mesmas notações da Definição 2.16, seja $\lambda^2 = g_{11} = g_{22}$. Por [28] - p. 27-28, temos $\Delta(X \circ \varphi^{-1}) = 2\lambda^2 H$.

c.q.d.

Teorema 2.9 (Huber-Osserman) Seja $\mathcal{X} : R \rightarrow \mathbb{E}$ uma imersão isométrica completa de uma superfície de Riemann R em um espaço “flat” completo tridimensional \mathbb{E} . Se \mathcal{X} é mínima e a curvatura de Gauß total $\int_R K dA$ é finita, então existe um biholomorfismo $\beta : R \rightarrow \overline{R} \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$, onde \overline{R} é uma superfície de Riemann compacta e p_1, \dots, p_r são pontos de \overline{R} .

Demonstração: Vide [28] - p. 81.

Teorema 2.10 (Representação de Weierstraß). Sejam R uma superfície de Riemann, g e dh função meromorfa e 1-forma diferencial sobre R , respectivamente, tal que os zeros de dh coincidam com os pólos e zeros de g . Suponha que $\mathcal{X} : R \rightarrow \mathbb{E}$ dada por

$$\mathcal{X}(p) := Re \int^p (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad \text{onde } (\phi_1, \phi_2, \phi_3) := \frac{1}{2}(1/g - g, i/g + ig, 2)dh \quad (2.1)$$

esteja bem definida. Então \mathcal{X} é uma imersão mínima conforme. Reciprocamente, toda imersão mínima conforme $\mathcal{X} : R \rightarrow \mathbb{E}$ pode ser expressa como (2.1) para alguma função meromorfa g e alguma 1-forma diferencial dh .

Demonstração: Vide [28] - p. 64.

Definição 2.19 O par (g, dh) são os dados de Weierstraß e ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 são as formas de Weierstraß sobre R da imersão mínima $\mathcal{X} : R \rightarrow \mathcal{X}(R) \subset \mathbb{E}$.

Definição 2.20 Um *fim* de R é a imagem de uma vizinhança perfurada V_p de um ponto $p \in \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ tal que $(\{p_1, p_2, \dots, p_r\} \setminus \{p\}) \cap \overline{V_p} = \emptyset$. O fim é mergulhado se sua imagem é mergulhada para uma vizinhança suficientemente pequena de p .

Teorema 2.11 (Fórmula de Jorge-Meeks). Nas hipóteses do Teorema 2.9, se os fins de $\mathcal{X}(R) = S$ são mergulhados, então o grau de g , de acordo com a Definição 2.11, é dado por:

$$deg(g) = k + r - 1,$$

onde k é o gênero de \overline{R} e r é o número de fins da superfície S .

Demonstração: Vide [16].

Observação 2.5 Na demonstração do Teorema 2.11 para o caso de fins Scherk, a variável r é contada aos pares. A função g é a projeção estereográfica da Aplicação Normal de Gauß $N : R \rightarrow S^2$ da imersão mínima \mathcal{X} . Além disso, $\int_R K dA = -4\pi deg(g)$. Estes fatos serão amplamente utilizados no decorrer desta dissertação. Temos

$$N = \frac{1}{|g|^2 + 1} (2\Re\{g\}, 2\Im\{g\}, |g|^2 - 1).$$

Teorema 2.12 Sejam $\alpha : I \rightarrow \Omega$ uma curva e $F : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima parametrizada como em (2.1). Então

$$1. \alpha \text{ é linha de curvatura principal} \Leftrightarrow \frac{dg(\dot{\alpha})}{g(\alpha)} \cdot dh(\dot{\alpha}) \in \mathbb{R}.$$

$$2. \alpha \text{ é linha assintótica} \Leftrightarrow \frac{dg(\dot{\alpha})}{g(\alpha)} \cdot dh(\dot{\alpha}) \in i\mathbb{R}.$$

Demonstração: Vide [15] - p. 14.

Observação 2.6 Se ocorre (1), α é geodésica se, e somente se, α é plana (não reta). Se ocorre (2), α é geodésica se, e somente se, α é linha reta.

Teorema 2.13 (Princípio da Reflexão de Schwarz). Seja $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima. Se $F(\Omega) = S$ tem um segmento de reta L , então S é invariante por rotação de 180° em torno de L . Se α é uma geodésica plana de S , então S é invariante por reflexão com respeito ao plano que contém α .

Demonstração: Vide [15] - p. 15.

Teorema 2.14 Se em algum sistema de coordenadas holomorfo de uma imersão mínima $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ existir uma curva α tal que a imagem de Gauß $g \circ \alpha$ está contida ou num meridiano ou no equador de S^2 , e se também $dh(\dot{\alpha})$ está contido num meridiano de S^2 , então $F \circ \alpha = \gamma$ é ou uma curva plana ou uma linha reta (e portanto uma geodésica em qualquer caso). O primeiro caso ocorre exatamente quando $dh(\dot{\alpha}) \cdot dg(\dot{\alpha})/g(\alpha) \in \mathbb{R}$ e o segundo quando $dh(\dot{\alpha}) \cdot dg(\dot{\alpha})/g(\alpha) \in i\mathbb{R}$.

Demonstração: Vide [19] - p. 15.

Teorema 2.15 (Krust) Se um pedaço P de uma superfície mínima é gráfico sobre um domínio convexo, então o pedaço conjugado P^* é também gráfico.

Demonstração: Vide [19] - p. 33.

Capítulo 3

Torres de Selas Tipo Scherk de Gênero Zero em \mathbb{R}^3

Neste capítulo faremos uma breve descrição do contexto histórico das Superfícies Mínimas, em particular, da primeira superfície mínima de Scherk, a saber: a duplamente periódica. Aplicaremos o método da construção reversa de Karcher (vide, por exemplo, [19]) para estudar as torres de selas tipo Scherk de gênero zero, as quais, sem perda de generalidade, denominamos S . Supondo que a superfície $\mathcal{X}(R) = S$ seja mínima, procuramos determinar condições necessárias sobre \bar{R} , $\{p_1, \dots, p_r\}$, g e dh , como nos Teoremas 2.9 e 2.10, para que ela exista. Em seguida, mostramos que as condições selecionadas são também suficientes, tendo assim obtido a Representação de Weierstraß explicitamente, permitindo-nos, inclusive, estudá-la numericamente com recursos computacionais.

3.1 Contexto histórico das superfícies mínimas

Lembramos que uma superfície que tem curvatura média nula em todos os seus pontos é chamada *superfície mínima*. A palavra mínima, neste contexto, está relacionada com o seguinte problema proposto por Lagrange em 1760: dada uma *curva fechada* α sem auto-intersecções, achar a superfície de área mínima que tem esta curva como bordo. Lagrange apresentou este problema sumariamente, como um mero exemplo de um método, por ele desenvolvido, para achar curvas ou superfícies que minimizassem certas quantidades, tais como área, comprimento, energia, etc. Estes métodos constituem hoje o chamado *Cálculo das Variações*. Na linguagem de que já dispomos, o método de Lagrange pode ser descrito, para o caso das superfícies mínimas, do modo explicado a seguir.

Suponha que exista uma solução S para o problema, e considere uma variação normal S^t de S , $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, dada por uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ que se anula no ∂S , isto é, a variação deixa o ∂S fixo. Como a área de S é mínima, temos em particular que $\mathcal{A}(t) :=$

$\text{área}(S^t) \geq \text{área}(S)$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e toda tal variação. Portanto $\mathcal{A}'(0) = 0$, para qualquer função diferenciável $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ com restrição $f|_{\partial S} = 0$. Por outro lado, como $\mathcal{A}'(0) = -\int_S fHdA$ (vide [8] - p. 23), a condição $\mathcal{A}'(0) = 0$, para qualquer f , é equivalente a $H \equiv 0$ em S . Com efeito, se $H \equiv 0$, então $\mathcal{A}'(0) = 0$ para toda f . Reciprocamente, suponha que $\mathcal{A}'(0) = 0$ para toda f , e que existe um ponto $p \in S$ com $H(p) > 0$. Podemos escolher f tal que $f(p) = H(p)$, $f \geq 0$, e $f = 0$ fora de um pequeno domínio de S em torno de p no qual H é positivo. Para uma tal f , temos $\mathcal{A}'(0) = -\int_S HfdA < 0$, o que contradiz a hipótese, e mostra que $H(p) = 0$ para todo $p \in S$. Disto conclui-se que se existe uma superfície S de área mínima com bordo ∂S , então $H \equiv 0$ em S . Portanto as superfícies de área mínima são superfícies mínimas no sentido da definição dada.

3.2 Exemplos de superfícies mínimas

Na época de Lagrange, os conceitos sobre superfícies mínimas não estavam esclarecidos, e ele próprio não deu exemplos, exceto o trivial, que é o plano. No caso de gráficos $z = f(x, y)$ de funções diferenciáveis, que foi tratado por Lagrange, a condição $H \equiv 0$ equivale à Equação Diferencial Parcial (EDP)

$$(1 + f_y^2)f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0. \quad (3.1)$$

Em outras palavras, encontrar uma superfície mínima na forma acima é encontrar uma função $f(x, y)$ que satisfaz (3.1). É claro que as funções lineares

$$f(x, y) = ax + by + c, \quad a, b, c \text{ constantes,}$$

são soluções triviais desta equação, mas isto é quase tudo que se pode dizer à primeira vista.

A definição de curvatura média não era conhecida na época de Lagrange, e nem mesmo a de curvaturas principais k_1 e k_2 . Estas foram introduzidas por Euler contemporaneamente a Lagrange. O que este fez foi utilizar o método das variações para superfícies na forma $z = f(x, y)$ e obter que (3.1) era uma condição necessária para uma superfície ter área mínima. Dezesesseis anos depois, Meusnier mostrou que (3.1) equivalia a $k_1 + k_2 \equiv 0$, e obteve duas soluções não triviais desta equação, que comentamos a seguir.

A ideia de Meusnier era verificar se existem soluções de (3.1) com propriedades adicionais que simplificassem o problema. Supondo que a superfície é de rotação, Euler já havia encontrado o catenóide, mas não por (3.1). Tomando-se o eixo dele como Ox_3 , podemos considerá-lo como a união de gráficos $z = f(x, y) = \pm \text{Arccosh} \sqrt{x^2 + y^2}$, e verificar que f satisfaz à EDP (3.1).

Porém, Meusnier obteve uma solução original, introduzindo a condição de que as *curvas de nível* $f(x, y) = \text{const.}$ fossem retas. A solução, neste caso, é um helicóide. Além do plano, esta possui a propriedade provada por Catalan, em 1842, de ser a única *regrada*, isto é, para cada ponto p pertencente ao helicóide S , existe uma reta $r \subset S$ tal que $p \in r$.

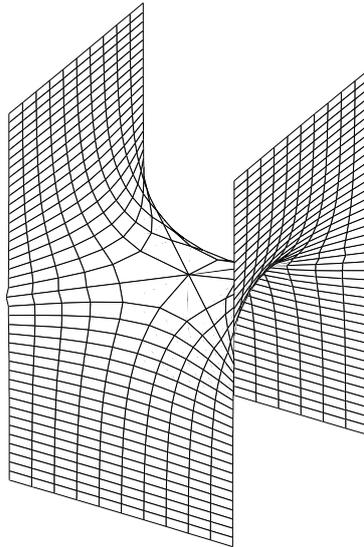


Figura 3.1: Metade da peça fundamental P^* da primeira *superfície de Scherk*.

Durante muito tempo, o plano, o catenóide e o helicóide foram os únicos exemplos conhecidos de superfícies mínimas. Em 1835, Scherk obteve um novo exemplo introduzindo em (3.1) a condição adicional de que as variáveis podiam ser *separadas*. Mais precisamente, supôs que $f(x, y) = g(x) + h(y)$. Com isto, as derivadas parciais são novamente substituídas por derivadas ordinárias, e chega-se a

$$(1 + h'^2(y))g''(x) + (1 + g'^2(x))h''(y) = 0. \quad (3.2)$$

Ou seja,

$$\frac{g''(x)}{1 + g'^2(x)} = -\frac{h''(y)}{1 + h'^2(y)} = \text{constante},$$

cuja integração fornece, a menos de constantes,

$$g(x) = \log(\cos(x)) \quad \text{e} \quad h(y) = \log(\cos(y)),$$

o que pode ser verificado por derivação. Logo, a menos de translações e dilatações, uma parte da superfície pode ser representada como o gráfico da função

$$f(x, y) = \log\left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)}\right), \quad -\pi/2 < x, y < \pi/2.$$

Tal superfície é conhecida como a *superfície de Scherk* ou superfície de Scherk duplamente periódica (vide Figura 3.1). Observe que apenas a parte dela sobre um quadrado aberto de lado π pode ser representada pela função tipo gráfico acima, num domínio conexo. As retas verticais sobre os vértices deste quadrado pertencem à superfície, e pelo Teorema 2.13 ela se estende por simetria de modo a cobrir uma parte do plano constituída por quadrados não consecutivos de lados π como na Figura 3.2.

Posteriormente, com a primeira versão do Teorema 2.10, obtida em 1866, foi possível definir *família associada* a uma superfície mínima S . Scherk utilizou esta definição para provar que o helicóide e o catenóide são apenas dois elementos de uma mesma família de superfícies mínimas, através da qual podemos deformar continuamente o catenóide menos um meridiano em uma volta completa do helicóide. Mostra-se que esta deformação é isométrica, isto é, os comprimentos e os ângulos são preservados.

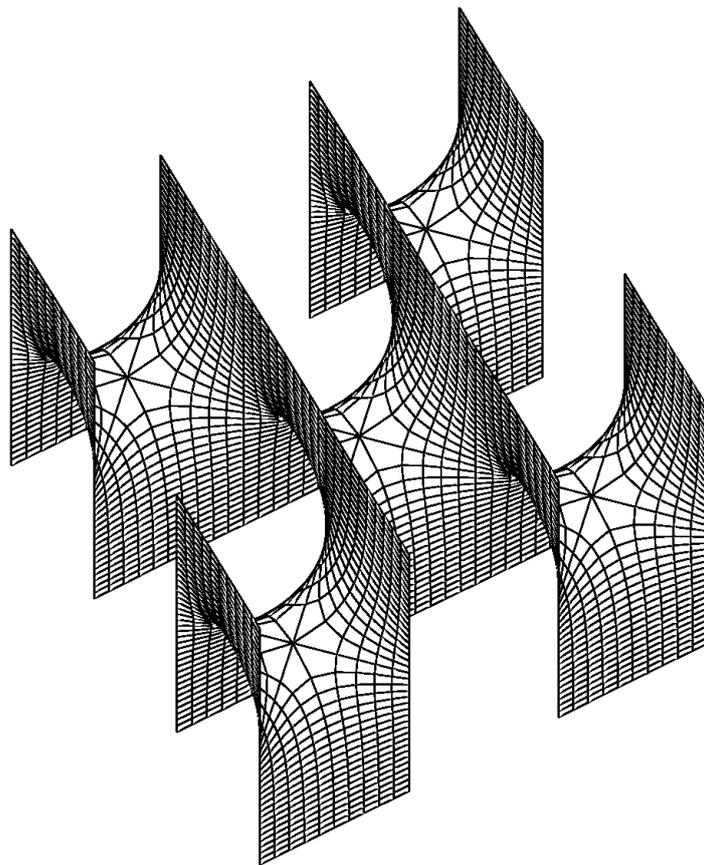


Figura 3.2: A *superfície de Scherk* duplamente periódica.

3.3 Compactificação de P

A Figura 3.3 é computacionalmente obtida pelo software Matlab. Em verdade, não é a partir dela que começamos nosso estudo. Somente após obtermos todas as fórmulas é que podemos implementá-las no Matlab e finalmente obter a figura computacional. Mas, para fins didáticos, ela é a primeira que apresentamos nesta seção.

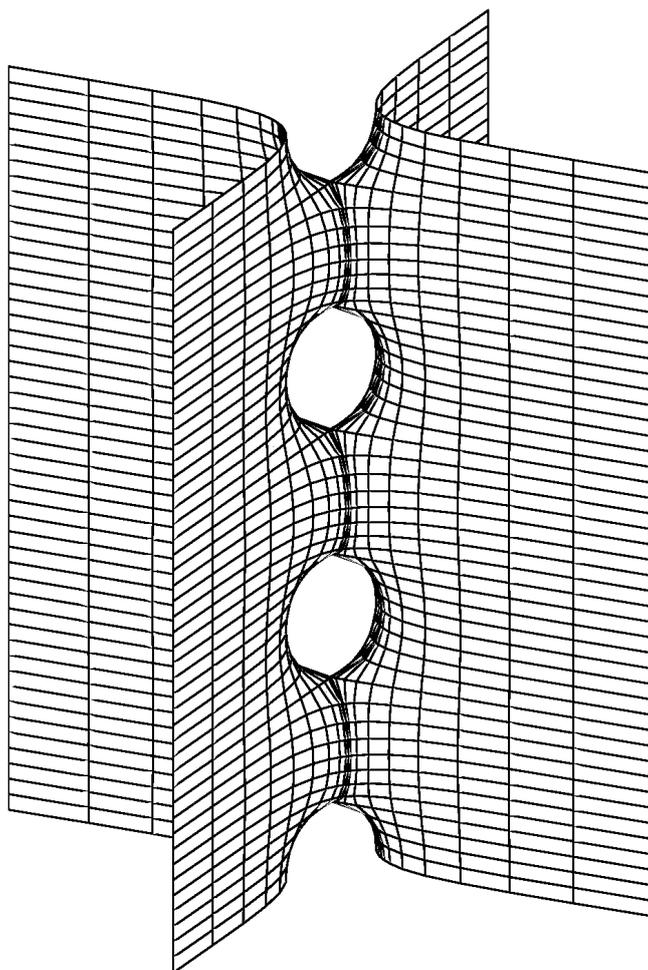


Figura 3.3: Superfície numérica pelo Matlab.

Para o início de nosso estudo procuramos determinar a superfície de Riemann R para a qual a peça fundamental P será a imagem por uma imersão mínima \mathcal{X} . De modo heurístico, vamos observar as características da torre de selas tipo Scherk de gênero zero, que denominamos S , através do esboço de metade de sua peça fundamental P (vide Figura 3.4). A metade inferior é obtida pela reflexão em relação ao plano Ox_1x_2 .

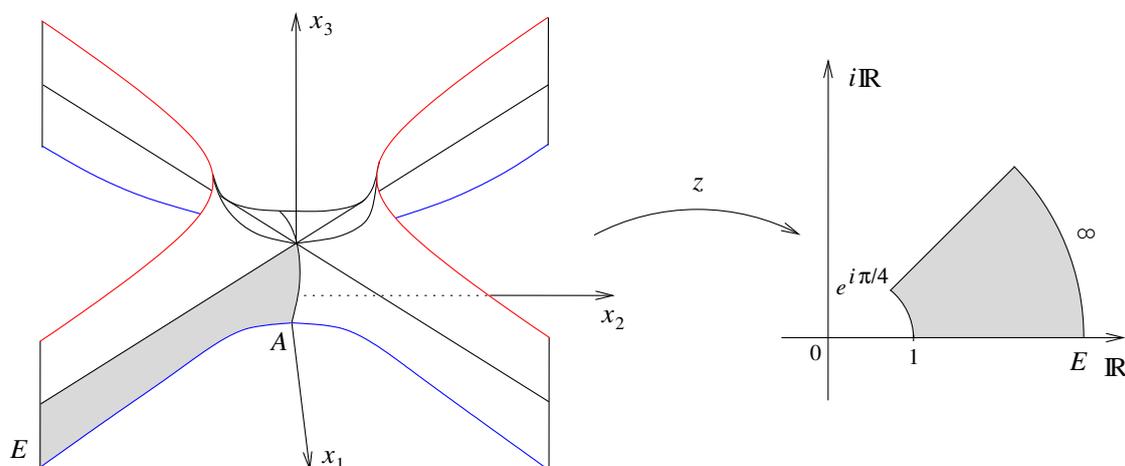


Figura 3.4: Metade da peça fundamental P de uma torre de selas Scherk de gênero zero.

Com isso podemos realizar a compactificação de P , donde o resultado é uma 2-variedade \bar{R}_2 simplesmente conexa de classe \mathcal{C}^0 (vide Figura 3.6, na qual os fins estão representados com “o”). Para uma melhor visualização, exibimos uma passagem intermediária \bar{R}_1 do processo de compactificação na Figura 3.5.

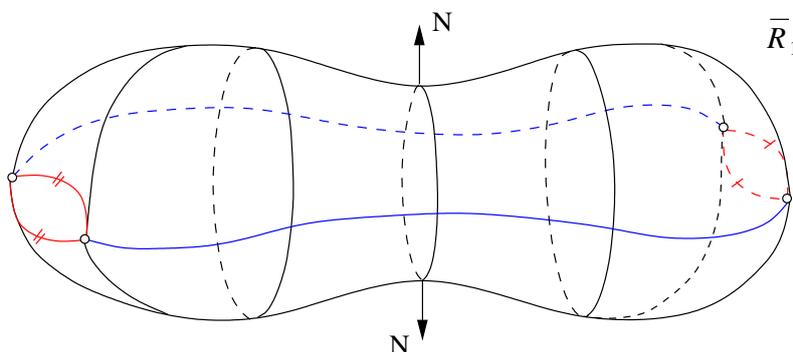


Figura 3.5: Uma das etapas de compactificação de P .

Como observado logo após a Definição 2.8, toda 2-variedade $\bar{R}_2 \in \mathcal{C}^0$ compacta e simplesmente conexa possui estrutura conforme. Então, ainda pela Definição 2.8, temos que \bar{R}_2 é uma superfície de Riemann. Esses resultados são necessários, pois o domínio da imersão \mathcal{X} que devemos explicitar para a caracterização das torres de selas, deve ser uma superfície de Riemann. Ainda pela heurística da construção reversa de Karcher, temos que o gênero de \bar{R}_2 é zero. Portanto, pelo Teorema 2.3 (de Koebe), podemos concluir que \bar{R}_2 é biholomorfa a $\hat{\mathbb{C}} = \bar{\mathbb{R}}$ e, de acordo com o Teorema 2.9, finalmente obtemos $R = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Mais adiante explicitaremos os pontos p_1, p_2, p_3 e p_4 .

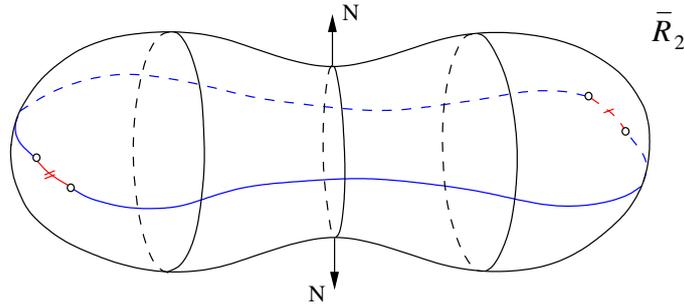


Figura 3.6: Peça fundamental P compactificada menos quatro pontos.

Observação 3.1 O Teorema da Aplicação de Riemann, isto é, se $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ é uma região qualquer simplesmente conexa, então existe um biholomorfismo $\beta : \Omega \rightarrow D$, onde $D := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, é generalizado pelo Teorema 2.3.

3.4 Obtenção da função g

Para obtermos a expressão da função meromorfa g devemos lembrar que ela é a projeção estereográfica da aplicação normal de Gauß sobre S , (vide Observação 2.5). Logo, basta estudarmos seu comportamento sobre a peça fundamental P de S , onde P é obtida através do quociente pelo grupo cíclico de translações verticais da superfície S . Como P possui 2 pares de fins Scherk e sua compactificação resulta numa superfície simplesmente conexa de gênero zero, podemos aplicar o Teorema 2.14 (fórmula de Jorge-Meeks). Assim,

$$\deg(g) = k + r - 1 = 0 + 2 - 1 = 1.$$

Este resultado sobre o grau da função meromorfa g , a determinar, garante que ela deve assumir uma única vez cada valor de sua imagem. Esta informação é muito útil para nosso estudo, pois sabendo que o grau da função meromorfa g é um, podemos observar se não esquecemos nenhum pólo ou zero na análise da mesma, já que na prática, determinar uma expressão algébrica, tanto para g quanto para dh , é estudar seus pólos e zeros sobre a superfície domínio \bar{R} .

Observando o comportamento dos vetores normais sobre a peça fundamental P vemos que g deverá possuir somente um pólo e um zero em $\hat{\mathbb{C}}$, isso vem do fato de que g é a projeção estereográfica da aplicação normal de Gauss sobre S da imersão \mathcal{X} . Em particular, $f(z) = z$ tem a mesma propriedade, isto é, possui somente um pólo e um zero. Logo, pelo Teorema 2.2, existe uma constante $c \in \mathbb{C}^*$ tal que $g = cz$.

O Teorema 2.2 se mostrou uma ferramenta poderosa quando o objetivo é deduzir expressões tanto para g quanto para dh . Porém existe a necessidade de um passo adicional

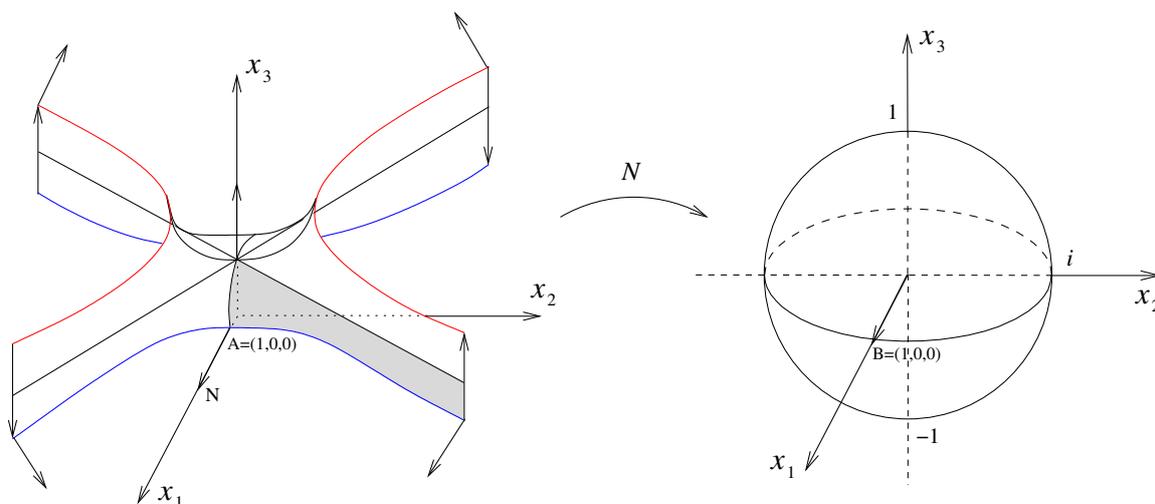


Figura 3.7: Aplicação normal de Gauß sobre P .

que é determinar a constante de proporcionalidade c entre g e f , o que nem sempre é um trabalho simples. Mas neste caso, para as torres de selas tipo Scherk de gênero zero é relativamente simples. Sendo assim, observemos a Figura 3.7, onde no ponto $A = (1, 0, 0)$ o vetor normal unitário é $B = (1, 0, 0)$, e por uma transformação de Möbius adequada, que permitiu a escolha de três pontos do domínio com três pontos da imagem unicamente caracterizados, temos que $g(1) = \Gamma(B) = 1 \in \mathbb{C}$, logo $c = 1$, assim $g = z$. Portanto, $g = z$ é, ao mesmo tempo, equação algébrica de $\widehat{\mathbb{C}}$ e fórmula de g .

3.5 Obtenção da diferencial dh

Observe que a diferencial da função altura dh , está presente em todas as coordenadas de (2.1) no Teorema 2.10 e, em particular, na terceira coordenada ela aparece isolada, isto é, a terceira coordenada não depende da função g . Devemos obter uma expressão global para dh definida sobre R . Mas para isso, partiremos da análise *local* do comportamento de dh , ou seja, arbitrariamente próximo ao fim $p_1 = e^{-i\pi/4}$, no qual o período deve ser positivo, somente para mantermos coerência com a Figura 3.7. Tomando a curva fechada centrada em p_1 e de raio ε dada por: $\alpha(t) = e^{-i\pi/4} + \varepsilon e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, com $\varepsilon > 0$ arbitrariamente próximo de zero, e lembrando que os zeros de dh devem coincidir com os zeros e pólos de g de acordo com o teorema acima citado, uma expressão satisfatória para dh será

$$\frac{idz}{z - e^{-i\pi/4}}. \quad (3.3)$$

Note que o fim p_1 é um pólo da 1-forma meromorfa dh , mesmo nesta expressão local, e esse fato deve ser levado em consideração na dedução da expressão *global* de dh , pois p_1 deve continuar sendo um pólo.

Além disto, calculando a integral de linha sobre a curva α no sentido horário, temos que:

$$\int_{\alpha} dh(z)dz = \oint_0^{2\pi} dh(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)dt = \oint_0^{2\pi} \frac{i(-i\varepsilon e^{-it})dt}{e^{-i\pi/4} + \varepsilon e^{-it} - e^{-i\pi/4}} = \oint_0^{2\pi} dt = 2\pi. \quad (3.4)$$

Como tomamos a parte real da integral na fórmula de Weierstraß em (3.4), temos $Re\{2\pi\} = 2\pi$ que é o período na direção vertical e, por ser positivo, nos mostra que o comportamento do vetor normal em relação ao fim p_1 é ascendente. Agora, para a obtenção da expressão global de dh devemos considerar a análise de forma simultânea para os fins $p_1 = e^{-i\pi/4}$, $p_2 = -e^{i\pi/4}$, $p_3 = -e^{-i\pi/4}$ e $p_4 = e^{i\pi/4}$. Desta forma, para passarmos de um fim para outro adjacente devemos considerar uma inversão de sinal (vide Figura 3.8), pois P é orientável.

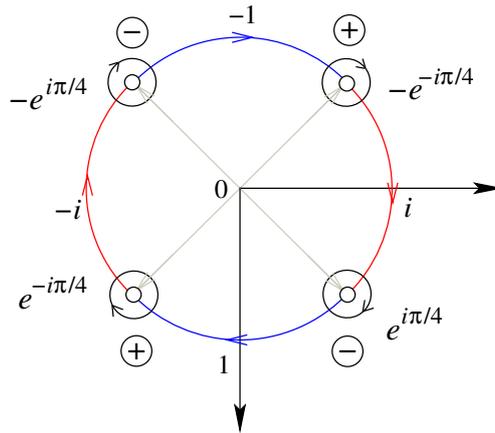


Figura 3.8: Sentido percorrido pelo vetor normal à P .

Diante destas observações, temos que

$$dh(z) = i \left(-\frac{1}{z - e^{i\pi/4}} + \frac{1}{z + e^{-i\pi/4}} - \frac{1}{z + e^{i\pi/4}} + \frac{1}{z - e^{-i\pi/4}} \right) dz = \frac{4}{z^2 + z^{-2}} \frac{dz}{z}, \quad (3.5)$$

é a representação global de dh sobre a peça fundamental P , que a menos de homotetia, pode finalmente ser expressa por:

$$dh(z) = \frac{1}{z^2 + z^{-2}} \frac{dz}{z}. \quad (3.6)$$

Observação 3.2 Se a expressão (3.3) não tivesse sido multiplicada por i , o resultado no cálculo da integral (3.4) seria $-2\pi i$, o que não seria satisfatório, pois a $Re\{-2\pi i\} = 0$, ou seja, não haveria período na direção vertical para tal expressão de dh . E ainda, para efeito de terceira coordenada na representação de Weierstraß, a expressão (3.3) poderia ter sido multiplicada, por exemplo, por $1 + i$. Ocorre que as primeira e segunda coordenadas de (2.1) precisam se anular quando $\varepsilon \rightarrow 0$, pois o período deve existir *somente* na direção vertical. Então temos, por exemplo, na primeira coordenada da parametrização, que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi (1/g - g)dh = i\pi\sqrt{2}.$$

Ou seja, se (3.3) tivesse sido multiplicada por $1 + i$, teríamos $Re\{(1 + i)i\pi\sqrt{2}\} \neq 0$, o que causaria período na direção x_1 . Desta forma, (3.6) é definitivamente a equação procurada para dh .

3.6 Curvas sobre a superfície

Nesta seção estudamos as curvas sobre as torres de selas tipo Scherk de gênero zero em \mathbb{R}^3 utilizando os Teoremas 2.12, 2.13, 2.14. Para os casos que seguem tomamos $I \subseteq \mathbb{R} \subset \widehat{\mathbb{C}}$, donde para uma curva qualquer $\alpha(t)$ tem-se $z(\alpha(t)) = id(\alpha(t)) = \alpha(t)$ e $g(z) = z$.

Os dois primeiros casos que estudamos são as duas retas perpendiculares que a superfície possui.

- Caso 1:

Seja $\beta : I \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dada por $\beta(t) = e^{i\pi/4}t$, $t \in \mathbb{R}$.

Como

$$g(\beta(t)) = g(e^{i\pi/4}t) = e^{i\pi/4}t \quad \text{e} \quad dg_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t)) = e^{i\pi/4},$$

temos que:

$$\frac{dg(\dot{\beta}(t))}{g(\beta(t))} = \frac{e^{i\pi/4}}{te^{i\pi/4}} = \frac{1}{t}.$$

Ainda usamos a expressão de $dh(z)$, que é dada por

$$dh(z) = \frac{4}{z^2 + z^{-2}} \frac{dz}{z},$$

para calcular $dh(\dot{\beta}(t))$, logo

$$dh_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t)) = \frac{4e^{i\pi/4}}{(te^{i\pi/4})^2 + (te^{i\pi/4})^{-2}} \cdot \frac{1}{te^{i\pi/4}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{(t^2 e^{i\pi/2} + t^{-2} e^{-i\pi/2})t} \\
&= \frac{4}{t^3(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)) + t^{-1}(\cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2))} \\
&= \frac{4}{it^3 - it^{-1}} \\
&= \frac{4i}{t^{-1} - t^3}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{dg(\beta)}{g(\beta)} \cdot dh(\dot{\beta}) = \frac{1}{t} \cdot \frac{4i}{t^{-1} - t^3} = \frac{4i}{1 - t^4} \in i\mathbb{R}.$$

Portanto, pelo Teorema 2.12 conclui-se que $\beta(t) = e^{i\pi/4}t$, $t \in \mathbb{R}$, é uma linha assintótica. Da observação do Teorema 2.12, tem-se que $\mathcal{X}(\beta(t))$ é uma reta sobre a torre de selas tipo Scherk de gênero zero S . Finalmente pelo Teorema 2.13, S é invariante por rotação de 180° em torno desta reta.

• Caso 2:

Seja $\alpha : \mathbb{I} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dada por $\alpha(t) = e^{-i\pi/4}t$, $t \in \mathbb{R}$.

Como

$$g(\alpha(t)) = g(e^{-i\pi/4}t) = e^{-i\pi/4}t \quad \text{e} \quad dg_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t)) = e^{-i\pi/4},$$

temos que:

$$\frac{dg(\dot{\alpha}(t))}{g(\alpha(t))} = \frac{e^{-i\pi/4}}{te^{-i\pi/4}} = \frac{1}{t}.$$

Analogamente usando a expressão de $dh(z)$, temos que:

$$\begin{aligned}
dh_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t)) &= \frac{4e^{-i\pi/4}}{(te^{-i\pi/4})^2 + (te^{-i\pi/4})^{-2}} \cdot \frac{1}{te^{-i\pi/4}} \\
&= \frac{4}{(t^2 e^{-i\pi/2} + t^{-2} e^{i\pi/2})t} \\
&= \frac{4}{t^3(\cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2)) + t^{-1}(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))} \\
&= \frac{4}{-it^3 + it^{-1}} \\
&= \frac{4i}{t^3 - t^{-1}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{dg(\dot{\alpha})}{g(\alpha)} \cdot dh(\dot{\alpha}) = \frac{1}{t} \cdot \frac{4i}{t^3 - t^{-1}} = \frac{4i}{t^4 - 1} \in i\mathbb{R}.$$

Portanto, pelo Teorema 2.12 conclui-se que $\alpha(t) = e^{-i\pi/4}t$, $t \in \mathbb{R}$, é uma linha assintótica. Da observação do Teorema 2.12, tem-se que $\mathcal{X}(\alpha(t))$ é uma reta sobre a torre de selas tipo Scherk de gênero zero S e pode ser verificado que ela é perpendicular à primeira, pois a imersão é conforme. Finalmente pelo Teorema 2.13, S é invariante por rotação de 180° em torno da reta $\mathcal{X}(\alpha(t)) \subset S$.

A Figura 3.9 mostra as duas retas perpendiculares $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, em cinza, sobre o domínio $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ da imersão \mathcal{X} .

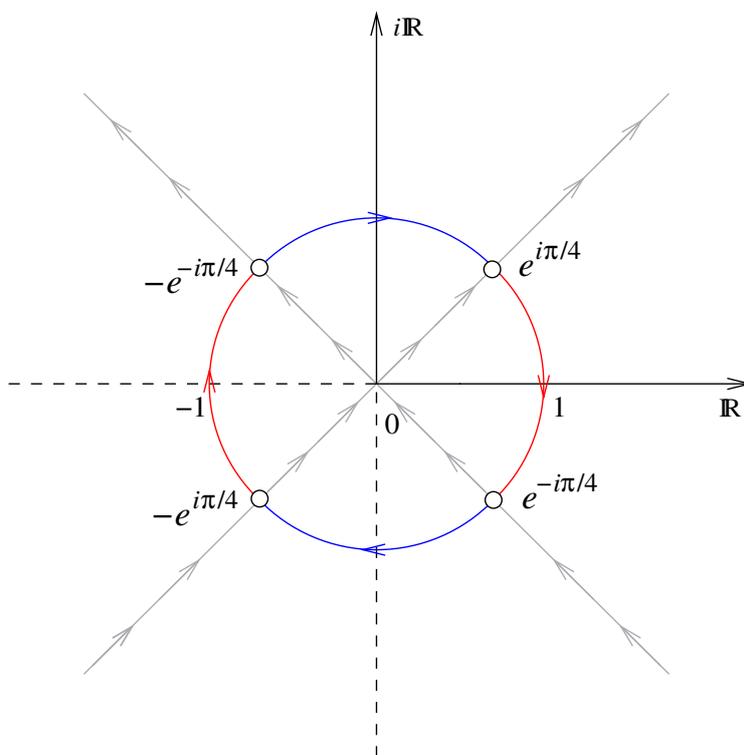


Figura 3.9: Representação simplificada das curvas sobre $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

- Caso 3:

Seja $\lambda : I \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dada por $\lambda(t) = it$, $t \in \mathbb{R}$.

Como

$$g(\lambda(t)) = g(it) = it \quad \text{e} \quad dg_{\lambda(t)}(\dot{\lambda}(t)) = i,$$

temos que:

$$\frac{dg(\dot{\lambda}(t))}{g(\lambda(t))} = \frac{i}{it} = \frac{1}{t}.$$

Pela expressão de $dh(z)$, temos que:

$$\begin{aligned} dh_{\lambda(t)}(\dot{\lambda}(t)) &= \frac{4i}{(it)^2 + (it)^{-2}} \cdot \frac{1}{it} \\ &= \frac{4}{(-t^2 - t^{-2})t} \\ &= \frac{4}{-t^3 - t^{-1}} \\ &= \frac{-4}{t^3 + t^{-1}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{dg(\dot{\lambda})}{g(\lambda)} \cdot dh(\dot{\lambda}) = \frac{1}{t} \cdot \frac{-4}{t^3 + t^{-1}} = \frac{-4}{t^4 + 1} \in \mathbb{R}.$$

Portanto, pelo Teorema 2.12 conclui-se que $\lambda(t) = it$, $t \in \mathbb{R}$, é uma linha de curvatura principal. Da observação do Teorema 2.12, tem-se que $\mathcal{X}(\lambda(t))$ é uma curva plana sobre a torre de selas tipo Scherk de gênero zero S . Finalmente pelo Teorema 2.13, S é invariante por reflexão em relação ao plano que contém esta curva.

- Caso 4:

Seja $\gamma : \mathbb{I} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dada por $\gamma(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Como

$$g(\gamma(t)) = g(t) = t \quad \text{e} \quad dg_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = 1,$$

temos que:

$$\frac{dg(\dot{\gamma}(t))}{g(\gamma(t))} = \frac{1}{t}.$$

Usando a expressão de $dh(z)$, temos que:

$$\begin{aligned} dh_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) &= \frac{4}{t^2 + t^{-2}} \cdot \frac{1}{t} \\ &= \frac{4}{t^3 + t^{-1}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{dg(\dot{\gamma})}{g(\gamma)} \cdot dh(\dot{\gamma}) = \frac{1}{t} \cdot \frac{4}{t^3 + t^{-1}} = \frac{4}{t^4 + 1} \in \mathbb{R}.$$

Portanto, pelo Teorema 2.12 conclui-se que $\gamma(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$, é uma linha de curvatura principal. Da observação do Teorema 2.12, tem-se que $\mathcal{X}(\gamma(t))$ é uma curva plana sobre a torre de selas tipo Scherk de gênero zero S . Finalmente pelo Teorema 2.13, S é invariante por reflexão em relação ao plano que contém esta curva. As curvas $\lambda(t) = it$ e $\gamma(t) = t$, com $t \in \mathbb{R}$, também podem ser visualizadas na Figura 3.10, que representa $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

- Caso 5:

Para a análise deste caso deve ser levado em consideração que $g(z)$ e $dh(z)$ possuem como domínio $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, logo devemos tomar $\sigma_j : I_j \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dada por $\sigma_j(t) = e^{it}$, com $t \in I_j$, onde os intervalos I_j , para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, são: $I_1 = (\pi/4, 3\pi/4)$, $I_2 = (3\pi/4, 5\pi/4)$, $I_3 = (5\pi/4, 7\pi/4)$ e $I_4 = (7\pi/4, 9\pi/4)$. O caso será estudado somente para a curva $\sigma_1(t)$ definida no intervalo I_1 , pois para os outros três intervalos restantes os comportamentos das respectivas curvas são análogos.

Como

$$g(\sigma_1(t)) = g(e^{it}) = e^{it} \quad \text{e} \quad dg_{\sigma_1(t)}(\dot{\sigma}_1(t)) = ie^{it},$$

temos que:

$$\frac{dg(\dot{\sigma}_1(t))}{g(\sigma_1(t))} = \frac{ie^{it}}{e^{it}} = i.$$

Usando a expressão de $dh(z)$, temos que:

$$\begin{aligned} dh_{\sigma_1(t)}(\dot{\sigma}_1(t)) &= \frac{4ie^{it}}{(e^{it})^2 + (e^{it})^{-2}} \cdot \frac{1}{e^{it}} \\ &= \frac{4i}{e^{2it} + e^{-2it}} \\ &= \frac{4i}{\cos(2t) + i \sin(2t) + \cos(-2t) + i \sin(-2t)} \\ &= \frac{2i}{\cos(2t)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{dg(\dot{\sigma}_1)}{g(\sigma_1)} \cdot dh(\dot{\sigma}_1) = i \cdot \frac{2i}{\cos(2t)} = \frac{-2}{\cos(2t)} \in \mathbb{R}.$$

Portanto, pelo Teorema 2.12 conclui-se que $\sigma_1(t) = e^{it}$, $t \in I_1$, é uma linha de curvatura principal. Da observação do Teorema 2.12, tem-se que $\mathcal{X}(\sigma_1(t))$ é uma curva plana sobre a torre de selas tipo Scherk de gênero zero S que está sobre o bordo do slab. Finalmente pelo Teorema 2.13, S é invariante por reflexão em relação ao plano que contém esta curva.

A Figura 3.10 ilustra as curvas $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, $\sigma_3(t)$ e $\sigma_4(t)$. As outras três curvas que não foram analisadas também são curvas planas sobre as torres de selas e estão contidas nos bordos do slab.

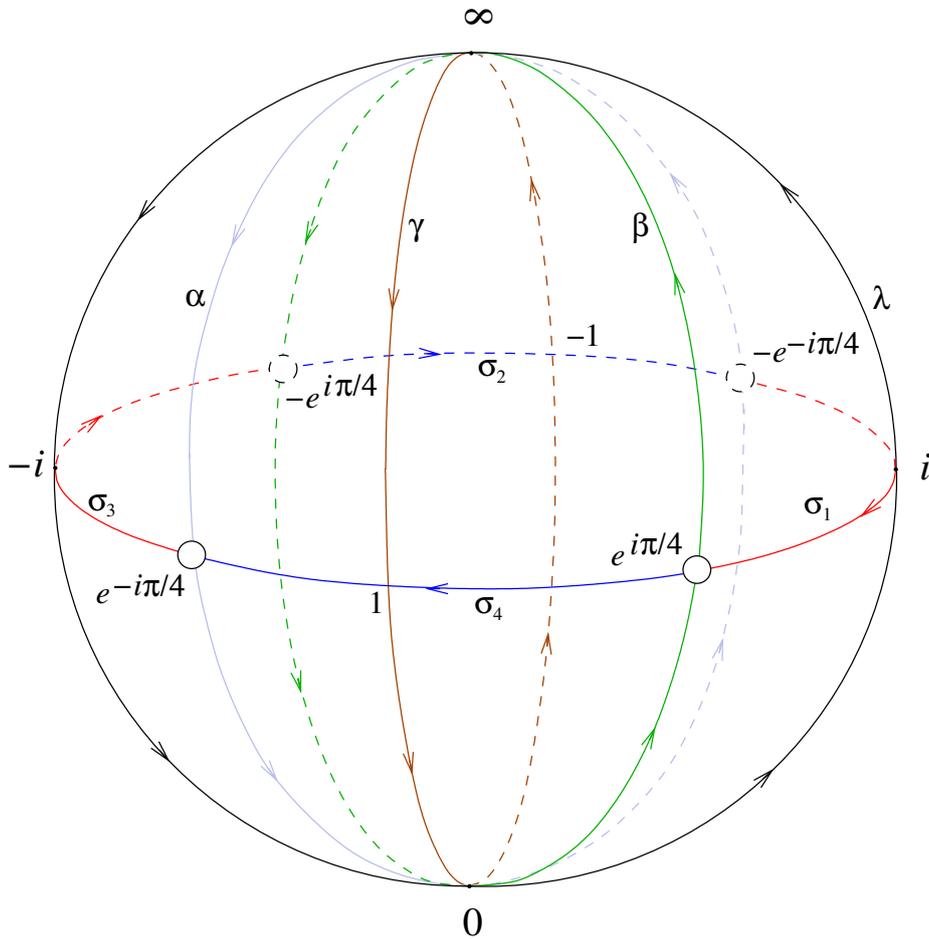


Figura 3.10: Representação das curvas sobre $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

3.7 Verificação dos períodos

Na dedução dos Dados de Weierstraß (g, dh) necessários para explicitar a parametrização das torres de selas tipo Scherk de gênero zero em \mathbb{R}^3 , a expressão de $dh(z)$ foi trabalhada de forma a possuir período *apenas* na direção vertical x_3 , como explicado na Observação 3.2.

3.8 Verificação do mergulho

Originalmente, a primeira superfície de Scherk ou superfície de Scherk duplamente periódica foi obtida resolvendo-se a EDP das superfícies mínimas (3.1), com a condição adicional $f(x, y) = g(x) + h(y)$. Esta condição facilitou o problema no sentido em que as derivadas parciais eram substituídas por derivadas ordinárias. A superfície solução da EDP (3.1), como explicado na Seção 3.2, pode ser representada como o gráfico da função

$$f(x, y) = \log \left(\frac{\cos x}{\cos y} \right)$$

sobre o domínio convexo $-\pi/2 < x, y < \pi/2$, (vide Figura 3.1, que representa metade da peça fundamental P^* desta superfície). Pela definição de família associada à uma superfície mínima, sabemos que a torre de selas tipo Scherk é conjugada da superfície de Scherk duplamente periódica.

Logo, pelo Teorema 2.15 (de Krust), a metade de $(P^*)^* = P$ é gráfico. Como toda superfície tipo gráfico é um mergulho, concluímos que a metade de P é mergulhada. Tomando a parte refletida em relação ao plano Ox_1x_2 , obtemos a outra metade de P , que também é um gráfico, conjugado da outra metade de P^* . Pelas análises feitas, P está contida num *slab* de \mathbb{R}^3 , e suas curvas de simetrias verticais estão nos bordos do slab. Assim, as sucessivas reflexões remetem P a slabs disjuntos, que geram a torre de selas mergulhada em \mathbb{R}^3 .

Capítulo 4

Torres de Selas Tipo Scherk de Gênero Dois em \mathbb{R}^3

Neste último capítulo finalmente estudamos o principal objetivo deste trabalho, que foi abordar, com uma riqueza maior de detalhes e ilustrações, todos os passos advindos do método da construção reversa de Karcher para superfícies mínimas. Este método foi comentado na Introdução desta dissertação e foi ele que utilizamos para a construção das torres de selas tipo Scherk de gênero dois em \mathbb{R}^3 , que são superfícies mínimas, conformes, completas, com curvatura total finita e que possuem uma subfamília contínua a um parâmetro, da qual qualquer membro possui geodésicas Gaussianas.

4.1 As superfícies de Riemann compactas \overline{R}

Seguindo o método reverso de Karcher, deduziremos quais são as condições necessárias para que as torres de selas tipo Scherk de gênero dois, que denominamos S , existam. Logo depois demonstraremos que as várias condições necessárias que foram reunidas são também suficientes. O método de Karcher consiste dos seguintes passos, onde os dois primeiros são heurísticos.

- 1) Esboço da superfície $\mathcal{X}(R) = S$.
- 2) Compactificação de P à \overline{R} .
- 3) Obtenção da equação algébrica de \overline{R} .
- 4) Obtenção dos dados de Weierstraß.
- 5) Verificação das involuções e simetrias.
- 6) Análise de períodos.
- 7) Verificação do mergulho da superfície.

A superfície S , que vamos construir, está ilustrada na Figura 4.1, que foi obtida computacionalmente através do programa Matlab *após* a aplicação do método descrito anteriormente. Esta figura é a primeira a ser mostrada para o leitor neste capítulo por motivos didáticos, ou seja, a intenção é que o leitor observe que a superfície é periódica com relação ao seu grupo cíclico de translações verticais, o que justifica estudarmos apenas uma parte significativa da mesma, que denominamos de peça fundamental P de S .

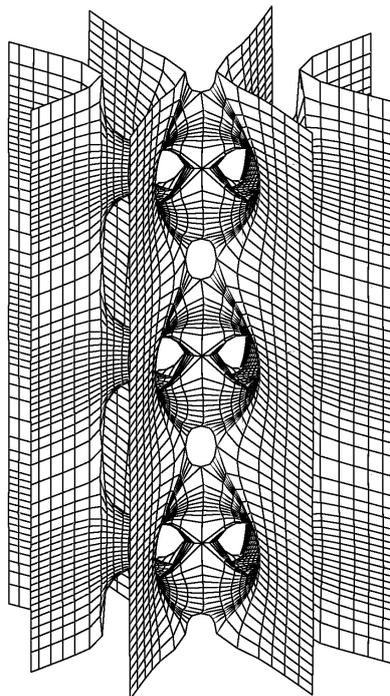


Figura 4.1: Torre de selas tipo Scherk de gênero dois em \mathbb{R}^3

Na prática, não dispomos da Figura 4.1 ao iniciarmos a aplicação do método, pelo contrário, esta figura é o resultado final do trabalho de construção e só foi possível sua implementação em Matlab *após* a obtenção da superfície de Riemann R e dos dados de Weierstraß (g, dh) , que permitem explicitar a parametrização da imersão $\mathcal{X}(R) = S$, como no Teorema 2.10.

Iniciamos agora o primeiro passo do método de Karcher, no qual começamos com um rascunho da peça fundamental P da superfície S (vide Figura 4.2). Este esboço deve conter todas as características desejadas para S ao final da construção, por exemplo, deve conter linhas de simetrias reflexionais contidas nos bordos dos slabs de \mathbb{R}^3 que geram as torres de selas via translações, deve possuir o fato de ser invariante sob reflexões com relação aos planos Ox_2x_3 , Ox_3x_1 e $mT/2 + Ox_1x_2$, onde $m \in \mathbb{Z}$, e T é o período simples da superfície, etc.

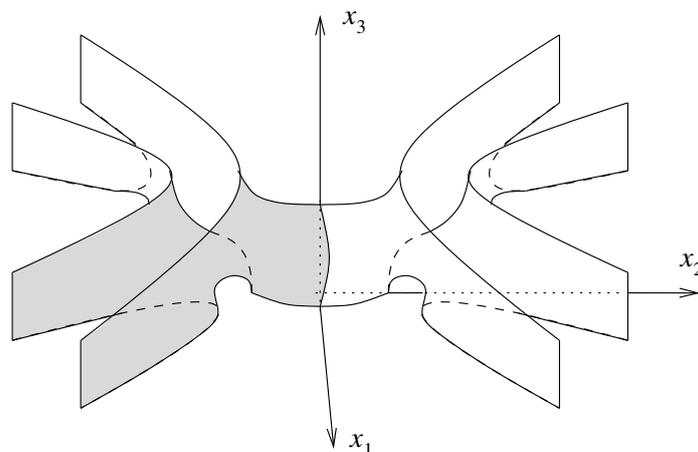


Figura 4.2: Rascunho de metade da peça fundamental P de S .

A Figura 4.2 representa a metade superior de P . Note que P gera a superfície S por aplicação de seu grupo de translações. Uma compactificação dos fins Scherk transforma P em uma 2-variedade \bar{R} de gênero dois conexa de classe \mathcal{C}^0 (vide Figura 4.4, onde os fins são indicados por “o”). Da observação seguinte à Definição 2.8, toda 2-variedade $\bar{R} \in \mathcal{C}^0$ compacta e conexa possui estrutura conforme. Da mesma definição temos que \bar{R} é uma superfície de Riemann, que heurísticamente possui gênero dois. A Figura 4.3 ilustra duas passagens da compactificação para a obtenção de \bar{R} .

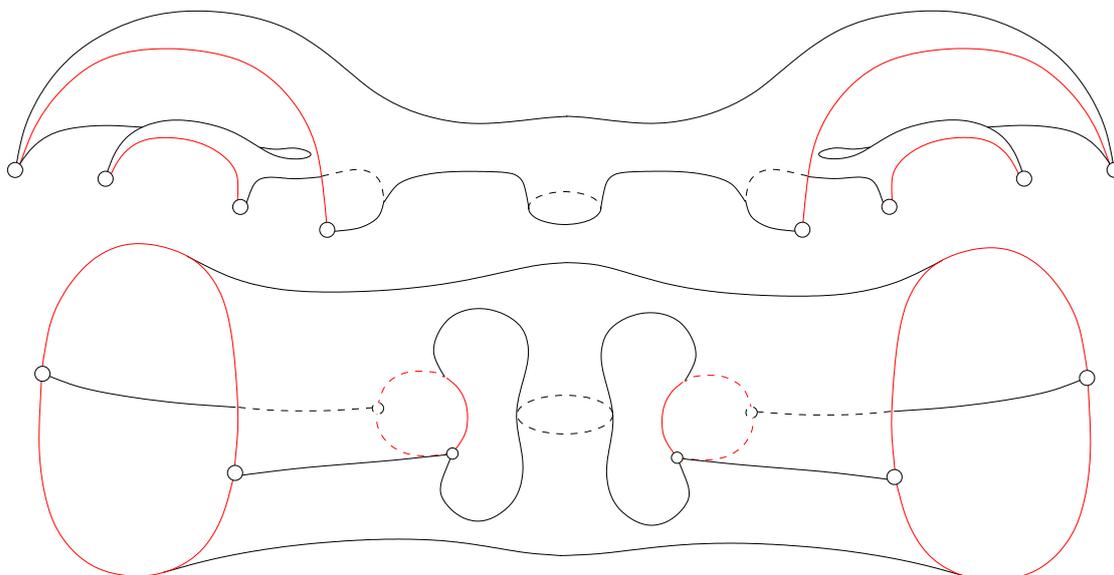


Figura 4.3: Sequência de compactificação de P . (1º desenho somente a metade superior).

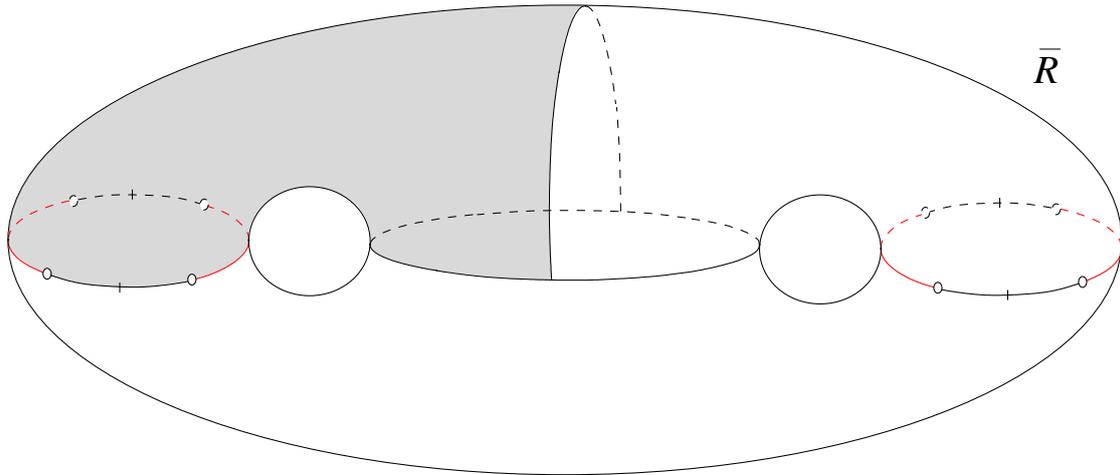


Figura 4.4: Superfície de Riemann \bar{R} menos oito pontos.

Observando que P é invariante por uma rotação ρ de 180° em torno de Ox_2 , é possível definir sobre \bar{R} uma aplicação quociente induzida por esta rotação, que resulta em \bar{R}/ρ , que é topologicamente S^2 . Esta aplicação é fundamental, pois queremos utilizar as ferramentas de *Funções de Uma Variável Complexa*. Agora isso é possível, porque a esfera S^2 é biholomorfa à $\hat{\mathbb{C}}$. Usando o Teorema 2.3 (de Koebe) junto com uma transformação de Möbius adequada conseguimos a função meromorfa $z : \bar{R} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que $z(A) = \infty$, $z(D) = 1$ e $z(L) = 0$. Pode-se verificar que os pontos de ramificação de $z(\zeta)$ são B, C, F e suas imagens por reflexão em Ox_1x_3 , (vide Figura 4.5).

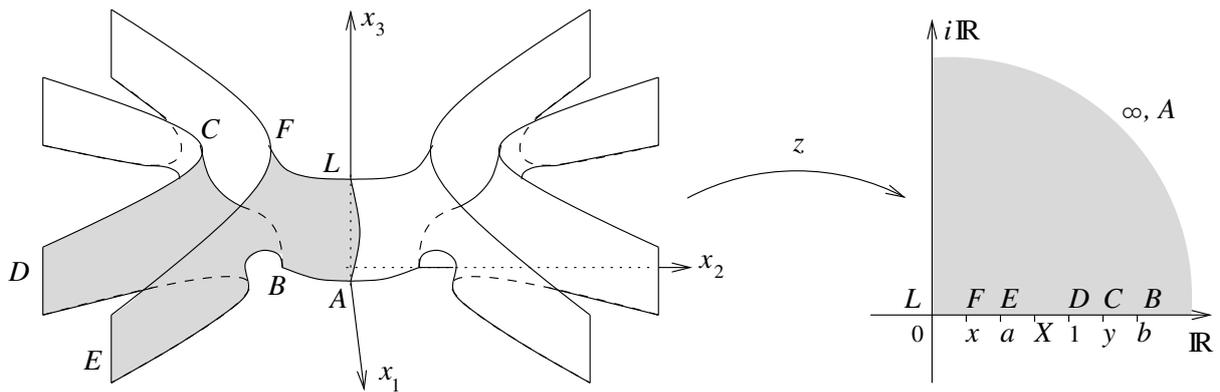


Figura 4.5: Aplicação z sobre $1/8$ da peça fundamental P de S .

De acordo com a Definição 2.12, ρ é uma involução hiperelítica, logo o Teorema 2.7 mostra que ρ induz as reflexões de S em Ox_1x_2 ou em Ox_2x_3 numa mesma involução anti-holomorfa de $\hat{\mathbb{C}}$. De acordo com o Teorema 2.6, esta deverá ser a conjugada de uma

transformação de Möbius que possui como conjunto de pontos fixos, a circunferência que passa por $0, 1, \infty$, a saber: $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Assim, com exceção do trecho AL , a aplicação z leva todos os trechos da Figura 4.5 em intervalos reais. Conseqüentemente $z(B) = b$, $z(C) = y$, $z(E) = a$ e $z(F) = x$, onde estes parâmetros reais livres devem satisfazer as desigualdades $0 < x < a < 1 < y < b$, para que nossas torres de selas fiquem bem caracterizadas. Como \overline{R} é topologicamente um bitoro, existem resultados em [10], os quais apenas aplicamos, que garantem descrever \overline{R} algebricamente pela equação:

$$w^2 = \frac{b+z}{b-z} \cdot \frac{x-z}{x+z} \cdot \frac{y+z}{y-z}. \quad (4.1)$$

Esta equação algébrica nos permite deduzir a expressão de g e também de dh , onde nesta última existe a necessidade de eliminarmos alguns pólos e zeros adicionais que surgem ao analisarmos a 1-forma meromorfa dz . A equação 4.1 também nos ajuda neste problema. Isto será tratado adiante com mais detalhes.

A reflexão de S em Ox_1x_3 é também induzida em $\widehat{\mathbb{C}}$ por ρ , e novamente resulta numa transformação de Möbius, que tem como conjunto de pontos fixos, a circunferência passando por 0 e ∞ , mas ortogonal ao eixo real. Logo, $z(AL) = i\mathbb{R}_+$, e não $i\mathbb{R}_-$, porque z preserva orientação. Além disso, existe $X \in [a, 1)$ tal que o normal unitário N é paralelo à Ox_2 em $z^{-1}(X)$. A escolha $X = a$ dará as geodésicas Gaussianas mencionadas na Introdução, ao passo que $X < a$ fornece superfícies não mergulhadas.

4.2 Os dados de Weierstraß

O processo de obtenção de g e dh , função e 1-forma meromorfas sobre R , respectivamente, baseia-se praticamente no estudo de pólos e zeros das mesmas, de tal forma que sejam satisfeitas as hipóteses do Teorema da representação de Weierstraß 2.10, a saber: os zeros de dh devem coincidir com os pólos e zeros g .

4.2.1 Obtenção da função meromorfa g

De posse da equação algébrica de \overline{R} dada por (4.1) e aplicando a *fórmula de Riemann-Hurwitz* (vide [9] - p. 140), podemos finalmente concluir que o gênero de \overline{R} é dois. Sabendo-se que S deverá possuir oito fins Scherk, podemos aplicar o Teorema 2.11 (*fórmula de Jorge-Meeks*), que para o caso particular de fins Scherk, os mesmos devem ser contados aos pares. Assim,

$$\deg(g) = k + r - 1 = 2 + 4 - 1 = 5.$$

Observação 4.1 O resultado do Teorema 2.11 nos garante que a função meromorfa g , a determinar, assume cinco vezes cada valor de sua imagem. É um resultado muito impor-

tante para que não fique nenhum pólo ou zero fora da análise na dedução da expressão de g .

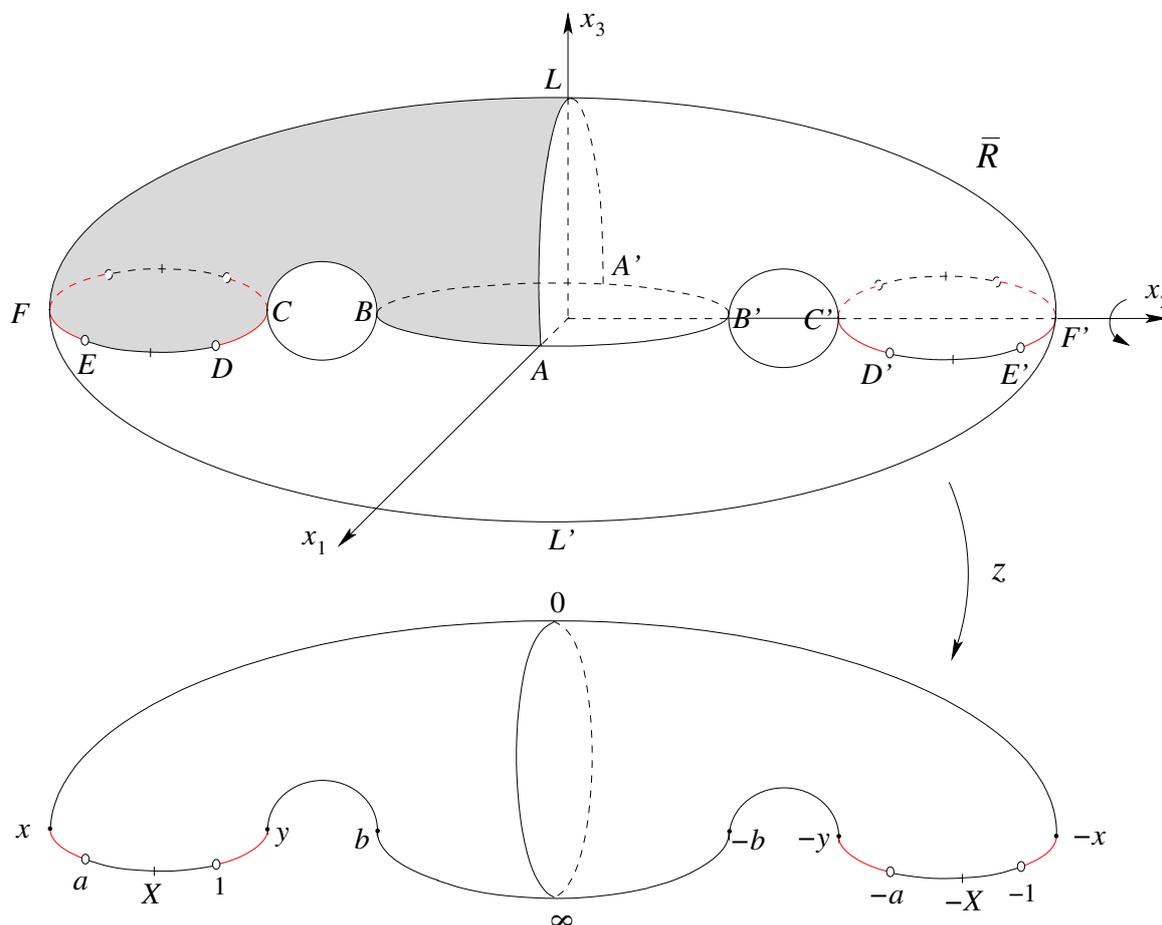


Figura 4.6: A aplicação $z : \bar{R} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ (induzida por ρ).

A Figura 4.6 ilustra a identificação, induzida pela rotação ρ , que obtemos após aplicarmos a função z sobre o domínio \bar{R} , além de seus pontos fixos, a saber: x, y, b e os opostos deles.

Lembrando que g é a projeção estereográfica da aplicação normal de Gauß e escolhendo a orientação de S de tal forma que $g(A) = 1$, como ilustra a Figura 4.5, podemos observar onde g assume $\pm i$, (vide Figura 4.7), pois queremos deduzir uma expressão de g através do quociente $\frac{g+i}{g-i}$. Com isso, quando $g = i$ este quociente terá um pólo simples e quando $g = -i$ ele terá um zero simples, (vide Figura 4.8). Portanto, realizando uma análise cuidadosa dos pólos e zeros de z e w , obtemos $w \cdot \frac{g+i}{g-i} = \frac{X+z}{X-z}$.

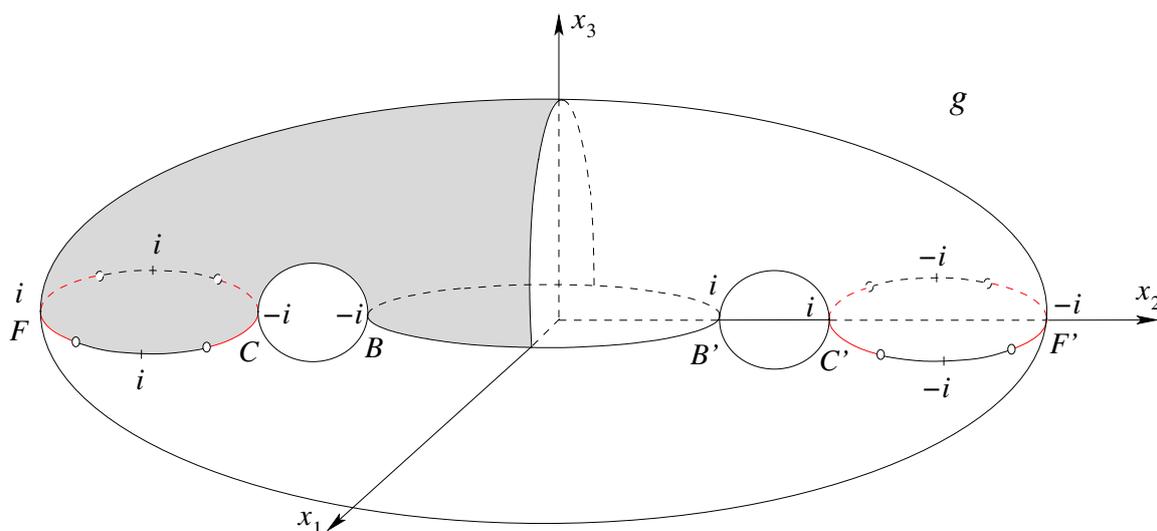


Figura 4.7: Pontos onde g assume os valores $\pm i$.

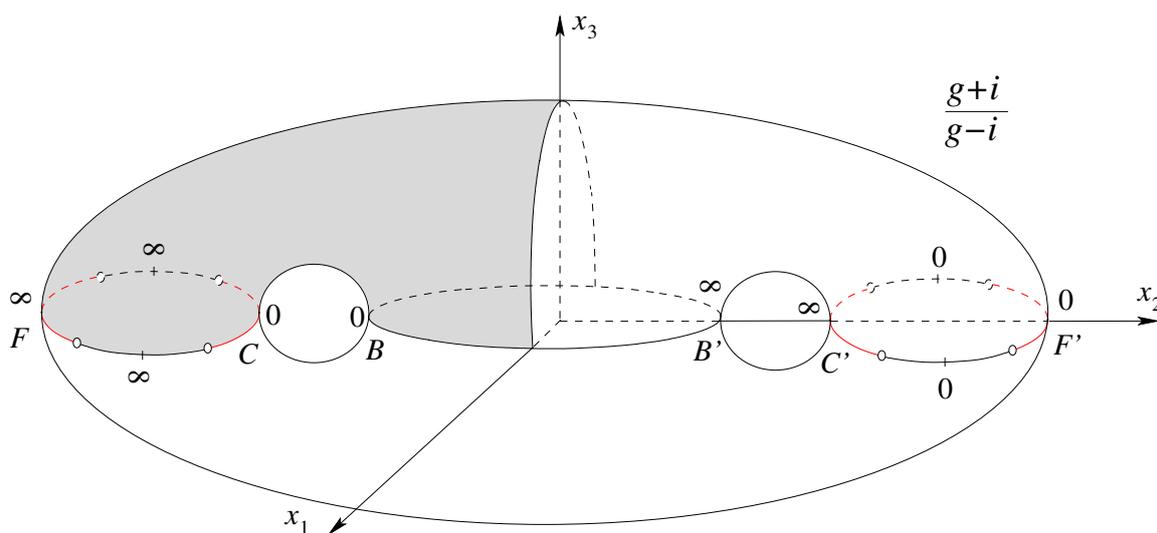


Figura 4.8: Pontos onde $(g+i)/(g-i)$ assume os valores 0 ou ∞ .

Da equação algébrica (4.1), temos que $w = \sqrt{\frac{(b+z)(x-z)(y+z)}{(b-z)(x+z)(y-z)}}$ está bem definida, assim

$$w \cdot \frac{g+i}{g-i} = \frac{X+z}{X-z} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(b+z)(x-z)(y+z)}{(b-z)(x+z)(y-z)}} \cdot \frac{g+i}{g-i} = \frac{X+z}{X-z},$$

elevando ao quadrado ambos os membros da última igualdade, teremos

$$\frac{(b+z)(x-z)(y+z)}{(b-z)(x+z)(y-z)} \cdot \left(\frac{g+i}{g-i}\right)^2 = \frac{(X+z)^2}{(X-z)^2},$$

portanto,

$$\left(\frac{g+i}{g-i}\right)^2 = \frac{(b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2}{(b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2}. \quad (4.2)$$

Finalmente obtivemos uma equação algébrica que relaciona g e z em (4.2), da qual podemos facilmente explicitar a expressão do primeiro *Dado de Weierstraß* g para que possamos implementar as informações da superfície S em Matlab. Além disso usamos a equação (4.2) para calcular $1/g - g$, que será útil na descrição dos problemas de período na Seção 4.3 a seguir.

Chamando a igualdade (4.2) de \mathcal{E} , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\Leftrightarrow \frac{g - \frac{1}{g} + 2i}{g - \frac{1}{g} - 2i} = \frac{(b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2}{(b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2} \\ &\Leftrightarrow \left(g - \frac{1}{g} + 2i\right) (b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 \\ &= \left(g - \frac{1}{g} - 2i\right) (b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2 \\ &\Leftrightarrow \left(g - \frac{1}{g}\right) (b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 + 2i(b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 \\ &= \left(g - \frac{1}{g}\right) (b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2 - 2i(b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2 \\ &\Leftrightarrow \left(g - \frac{1}{g}\right) (b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 - \left(g - \frac{1}{g}\right) (b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2 \\ &= -2i(b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2 - 2i(b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 \\ &\Leftrightarrow \left(g - \frac{1}{g}\right) [(b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 - (b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2] \\ &= -2i [(b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2 + (b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2] \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{g} - g\right) [(b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 - (b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2] \\ &= 2i [(b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 + (b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{1}{g} - g\right) = 2i \left(\frac{(b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 + (b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2}{(b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 - (b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2} \right). \quad (4.3)$$

Usando a equação (4.2), vemos que, quando $g = 0$ ou $g = \infty$,

$$\left(\frac{g+i}{g-i}\right)^2 = 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2}{(b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2} \\ &\Leftrightarrow (b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 = (b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2, \end{aligned}$$

que ainda pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} 0 &= (b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2 - (b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 \\ &= -(z-b)(z+x)(-1)(z-y)(z+X)^2 - [(z+b)(-1)(z-x)(z+y)(-z-X)^2] \\ &= (z-b)(z+x)(z-y)(z+X)^2 + (z+b)(z-x)(z+y)(z-X)^2 \\ &= 2z^5 + 2z^3X^2 - 4z^3yX + 4z^3xX - 2z^3xy - 4z^3bX \\ &\quad + 2z^3by - 2z^3bx + 2zbyX^2 - 2zxyX^2 - 2zxbX^2 + 4zbyX \\ &= 2z[z^4 + (by - bx - xy + 2(x - b - y)X + X^2)z^2 + 2bxyX + (by - bx - xy)X^2] \\ &= 2z(z^4 + S_2z^2 + S_4), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $S_2 = by - bx - xy + 2(x - b - y)X + X^2$ e $S_4 = 2bxyX + (by - bx - xy)X^2$.

Note que

$$(b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2 - (b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 = 2z(z^4 + S_2z^2 + S_4),$$

logo para os problemas de períodos, tratados na Seção 4.3, precisaremos da seguinte relação:

$$(b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 - (b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2 = -2z(z^4 + S_2z^2 + S_4). \quad (4.5)$$

Ainda usando a equação (4.2), vemos que, quando $g = \pm 1$,

$$\left(\frac{g+i}{g-i}\right)^2 = -1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{(b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2}{(b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2} \\ &\Leftrightarrow -(b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 = (b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2, \end{aligned}$$

calculando, teremos:

$$\begin{aligned}
 0 &= (b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2 + (b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2 \\
 &= 2Xz^4 - bz^4 + xz^4 - yz^4 + bxyz^2 + 2byXz^2 - 2bxXz^2 - 2xyXz^2 \\
 &\quad + xX^2z^2 - bX^2z^2 - yX^2z^2 + bxyX^2 \\
 &= (2X - b + x - y)z^4 + (bxy + 2(by - bx - xy)X + (x - b - y)X^2)z^2 + bxyX^2 \\
 &= S_1z^4 + S_3z^2 + S_5,
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde $S_1 = 2X - b + x - y$, $S_3 = bxy + 2(by - bx - xy)X + (x - b - y)X^2$ e $S_5 = bxyX^2$.

De (4.5) e (4.6) podemos escrever de forma simplificada a equação (4.3) da seguinte maneira:

$$\left(\frac{1}{g} - g \right) = -i \frac{S_1z^4 + S_3z^2 + S_5}{z(z^4 + S_2z^2 + S_4)}. \tag{4.7}$$

4.2.2 Obtenção da 1-forma meromorfa dh

Uma vez que foi obtida uma equação algébrica que guarda uma relação entre g e z , o caminho natural para a dedução de dh é que seja obtida uma equação algébrica que possua uma relação entre dh e dz . De fato, pois é preciso manter essa espécie de *dependência*, com relação à aplicação z , ao escrevermos a fórmula de dh . Logo, é preciso estudar a diferencial dz . Pela Figura 4.9, vemos que dz possui seis zeros simples e dois pólos de ordem dois.

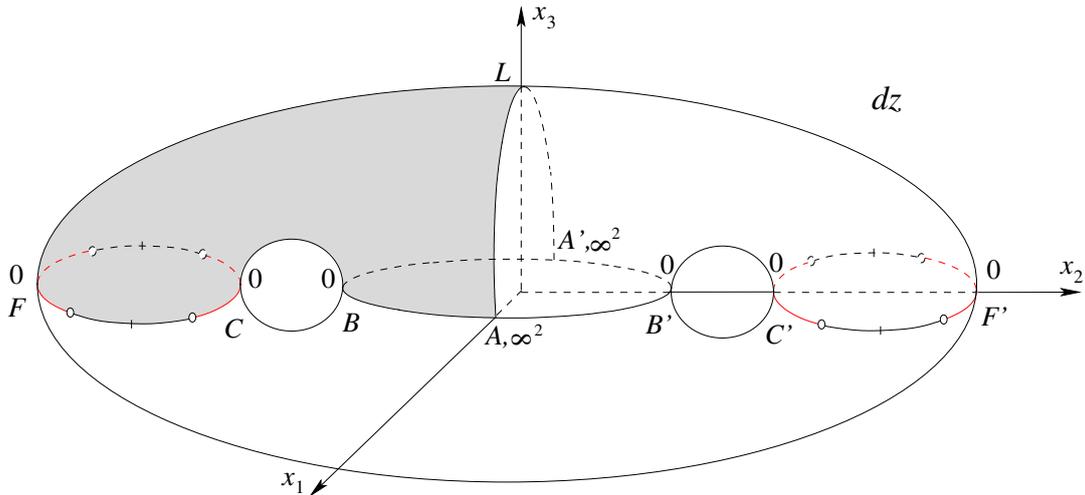


Figura 4.9: Zeros e pólos de dz .

Além disto, observando algumas particularidades da geometria dos exemplos em construção, vimos que existem três possibilidades que teoricamente podem ocorrer, são elas:

- (a) N é vertical em algum ponto de BC ;
- (b) N é vertical em algum ponto de $AL \setminus \{L\}$;
- (c) Sobre $z(t) = t$, $b < t < \infty$, temos $g = e^{i\theta(t)}$ com θ assumindo valores não negativos.

Usando evidências numéricas para nortear a construção, vimos que nenhum dos casos citados acima ocorrem. De qualquer maneira, a prova do Teorema 1.1 seguirá independentemente deles. Em vista de que (a) e (b) não ocorrem como particularidades para estas superfícies, podemos supor que, para um certo número complexo α no primeiro quadrante aberto de \mathbb{C} , teremos $g \in \{0, \infty\}$ somente se $z = 0$ ou $z \in \{\pm\alpha, \pm\bar{\alpha}\}$.

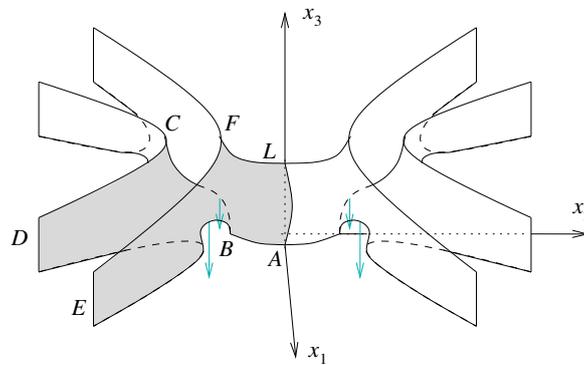


Figura 4.10: Zeros e pólos de g vistos na peça fundamental P .

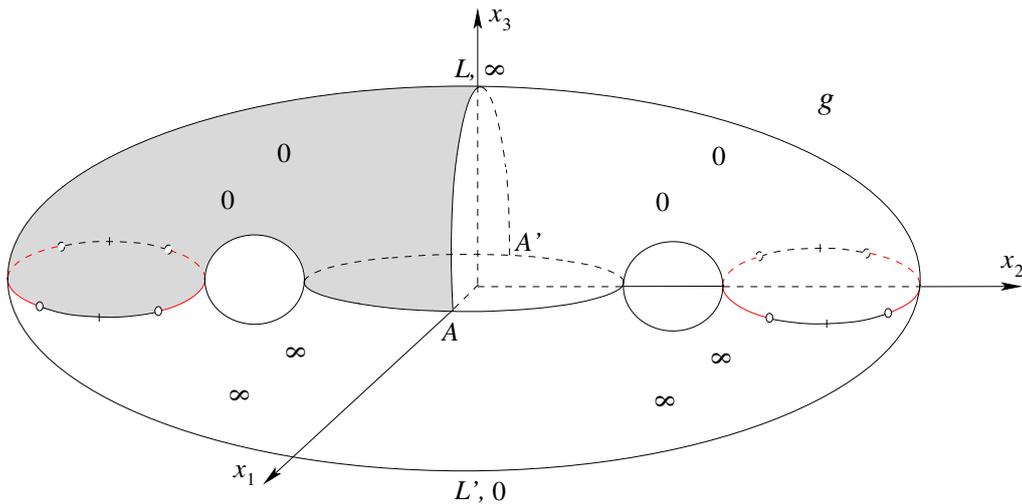


Figura 4.11: Zeros e pólos de g vistos em \bar{R} .

Em qualquer caso, $g = 0$ ou $g = \infty$, temos por (4.4), que

$$0 = (z - b)(z + x)(z - y)(z + X)^2 + (z + b)(z - x)(z + y)(z - X)^2 = 2z(z^4 + S_2z^2 + S_4),$$

onde $S_2 = by - bx - xy + 2(x - b - y)X + X^2$ e $S_4 = 2bxyX + (by - bx - xy)X^2$. Este resultado reúne todos os pólos e zeros de g sendo assim o candidato a numerador da expressão de dh , pois assim estaremos satisfazendo a hipótese, que os zeros de dh devem coincidir com os pólos e zeros de g , como diz o teorema da representação de Weierstraß. Agora para termos certeza da expressão de dh ainda podemos aplicar o seguinte resultado:

$$\deg(dh) = -\chi(\overline{R}) = 2k - 2 = 2 = n^\circ \text{zeros}(dh) - n^\circ \text{pólos}(dh) = 10 - 8.$$

Logo, a expressão de dh deve possuir oito pólos, e como estes ocorrem onde $\text{ord}(dh) < |\text{ord}(g)|$, isto é, para os fins que a superfície S deverá possuir, concluímos que estes pólos devem ser simples, isto é, de ordem um.

Portanto, podemos escrever a expressão de $dh(z)$ da seguinte forma:

$$dh(z) = \frac{z^4 + S_2z^2 + S_4}{(z - b)(z - y)(z + x)} \cdot \frac{2zdz/w}{(z^2 - 1)(z^2 - a^2)},$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} dh(z) &= \frac{2z(z^4 + S_2z^2 + S_4)}{(z^2 - 1)(z^2 - a^2)} \cdot \frac{dz}{(z - b)(z - y)(z + x)w} \\ &= \frac{2z(z^4 + S_2z^2 + S_4)}{(z^2 - 1)(z^2 - a^2)} \cdot \frac{dz}{(z - b)(z - y)(z + x) \sqrt{\frac{(b+z)(x-z)(y+z)}{(b-z)(x+z)(y-z)}}} \\ &= \frac{2z(z^4 + S_2z^2 + S_4)}{(z^2 - 1)(z^2 - a^2)} \cdot \frac{dz}{\left(\sqrt{(z-b)(z-y)(z+x)}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{(b+z)(x-z)(y+z)}}{\sqrt{(b-z)(x+z)(y-z)}}} \\ &= \frac{2z(z^4 + S_2z^2 + S_4)}{(z^2 - 1)(z^2 - a^2)} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(x-z)(b+z)(y+z)(x+z)(y-z)(b-z)}}. \end{aligned}$$

Finalmente escrevemos

$$dh(z) = \frac{2z(z^4 + S_2z^2 + S_4)}{(z^2 - 1)(z^2 - a^2)} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(x^2 - z^2)(b^2 - z^2)(y^2 - z^2)}}. \quad (4.8)$$

Assim o par (g, dh) são os Dados de Weierstraß para S , que estamos construindo. Com eles conseguimos mostrar, pelo Teorema 2.14, que todas as curvas de simetrias que

supomos existir na parte heurística da construção existem. Todas elas estão resumidas na Tabela 4.1 que mostra o comportamento de g e dh ao longo desses caminhos especiais em \bar{R} , que fornecem as curvas de simetrias. Portanto, sabemos que nossas superfícies realmente possuem as curvas de simetrias necessárias à prova do item (ii) do Teorema 1.1. Contudo, ainda precisamos resolver os problemas de período para provar os itens (i) e (ii). Isto está feito na próxima seção.

Simetria	Involução	$z(t) = t$	$g(z(t))$	$dh(z(t))$
AL	$(w, z) \rightarrow (1/\bar{w}, -\bar{z})$	$i\mathbb{R}_+$	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+
LF	$(w, z) \rightarrow (\bar{w}, \bar{z})$	$0 < t < x$	$i\mathbb{R}_+$	\mathbb{R}_+
FE	$(w, z) \rightarrow (-\bar{w}, \bar{z})$	$x < t < a$	S^1	$i\mathbb{R}$
ED	$(w, z) \rightarrow (-\bar{w}, \bar{z})$	$a < t < 1$	S^1	$i\mathbb{R}$
DC	$(w, z) \rightarrow (-\bar{w}, \bar{z})$	$1 < t < y$	S^1	$i\mathbb{R}$
CB	$(w, z) \rightarrow (\bar{w}, \bar{z})$	$y < t < b$	$i\mathbb{R}_-$	\mathbb{R}_-
BA	$(w, z) \rightarrow (-\bar{w}, \bar{z})$	$b < t$	S^1	$i\mathbb{R}$

Tabela 4.1: Comportamento de g e dh ao longo de trechos em \bar{R} .

4.3 Os problemas de resíduo e período

A Figura 4.12 destaca curvas da superfície que precisam satisfazer a condições chamadas *problemas de resíduo* e de *período*. Em particular, r e R caracterizam o problema de resíduo de S .

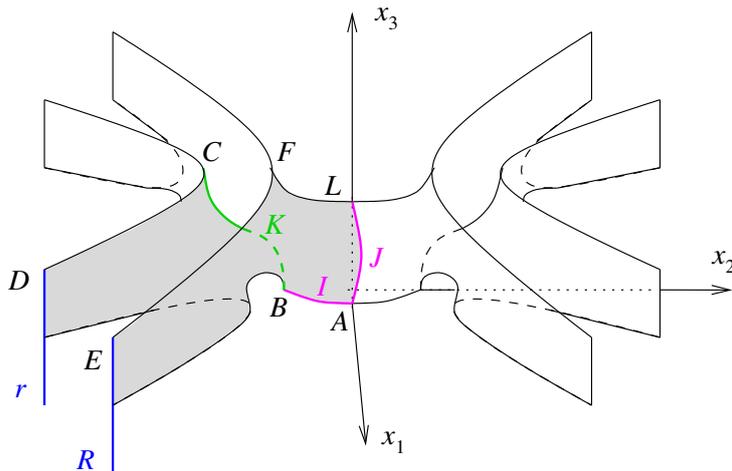


Figura 4.12: Curvas I, J e K que caracterizam os problemas de período de S .

Da Figura 4.5 e Seções 1-2, podemos escrever o resíduo e os problemas de período. Alguns cálculos usando o Teorema dos Resíduos resultam em:

$$r := 2\pi i \operatorname{Res}(dh, D) = \frac{\pi(1 + S_2 + S_4)}{(1 - a^2)\sqrt{(1 - b^2)(1 - x^2)(1 - y^2)}}, \quad (4.9)$$

$$R := 2\pi i \operatorname{Res}(dh, E) = \frac{\pi(a^4 + S_2a^2 + S_4)}{(1 - a^2)\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)}}. \quad (4.10)$$

O problema de resíduo será solucionado se ambos (4.9) e (4.10) coincidirem.

Pelo fato de que (c) não ocorre, isto é, quando $z(t) = t$, $b < t < \infty$, temos que $g = e^{i\theta(t)}$, onde $\theta(t)$ não assume valores não-negativos, pelo menos numericamente, para as superfícies-limite CSSCFF e CSSCCC. Então podemos supor que $-\pi/2 < \theta < 0$. Assim, usando os dados de Weierstraß, teremos:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{BA} (1/g - g) dh \\ &= \int_b^\infty \frac{(g(t))^{-1} - g(t)}{2} \cdot \frac{z(t)^4 + S_2z(t)^2 + S_4}{(z(t)^2 - 1)(z(t)^2 - a^2)} \cdot \frac{2z(t)dt}{\sqrt{(x^2 - z(t)^2)(b^2 - z(t)^2)(y^2 - z(t)^2)}} \\ &= \int_b^\infty -i \frac{S_1z(t)^4 + S_3z(t)^2 + S_5}{z(t)(z(t)^4 + S_2z(t)^2 + S_4)} \cdot \frac{t^4 + S_2t^2 + S_4}{(t^2 - 1)(t^2 - a^2)} \cdot \frac{tdt}{\sqrt{(x^2 - t^2)(b^2 - t^2)(y^2 - t^2)}} \\ &= \int_b^\infty -i \frac{S_1t^4 + S_3t^2 + S_5}{t(t^4 + S_2t^2 + S_4)} \cdot \frac{t(t^4 + S_2t^2 + S_4)}{(t^2 - 1)(t^2 - a^2)} \cdot \frac{dt}{\sqrt{(x^2 - t^2)(b^2 - t^2)(y^2 - t^2)}} \\ &= \int_b^\infty -i \frac{(S_1t^4 + S_3t^2 + S_5)dt}{(t^2 - 1)(t^2 - a^2)(-i)\sqrt{(t^2 - b^2)(t^2 - x^2)(t^2 - y^2)}}, \end{aligned}$$

finalmente, conseguimos definir a expressão de I que caracteriza uma parte do primeiro problema de período, da seguinte forma:

$$I := \frac{1}{2} \int_{BA} (1/g - g) dh = \int_b^\infty \frac{(S_1t^4 + S_3t^2 + S_5)dt}{(t^2 - 1)(t^2 - a^2)\sqrt{(t^2 - b^2)(t^2 - x^2)(t^2 - y^2)}}. \quad (4.11)$$

Analogamente, para definirmos a segunda parte deste primeiro problema de período, usamos a curva $z(t) = it$, $0 < t < \infty$, onde sempre temos $g > 0$, mas *não* sempre $g > 1$. Isto é o que ocorre nas superfícies-limite, pelo menos numericamente. Assim, com cálculos análogos aos anteriores podemos definir

$$J := \frac{1}{2} \int_{LA} (1/g - g) dh = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t(t^4 - S_2t^2 + S_4)(g - 1/g)dt}{(t^2 + 1)(t^2 + a^2)\sqrt{(t^2 + b^2)(t^2 + x^2)(t^2 + y^2)}}. \quad (4.12)$$

Logo, temos o primeiro problema de período que será resolvido com a condição $I = J$. Intuitivamente essa condição, bem como a condição $K = R/2$, nos dá a certeza de que a peça fundamental P de S possuirá um *encaixe* perfeito, e é quando dizemos que os problemas de períodos fecham.

Por último conseguimos definir o segundo problema de período da seguinte maneira:

$$K := \int_{BC} dh = \int_y^b \frac{t^4 + S_2 t^2 + S_4}{(1-t^2)(a^2-t^2)} \cdot \frac{tdt}{\sqrt{(b^2-t^2)(x^2-t^2)(y^2-t^2)}}. \quad (4.13)$$

É a integral sobre a terceira coordenada da parametrização de Weierstraß, visto que precisamos somente da contribuição da altura para que este problema de período feche. Ele terá solução se $K = R/2$ ou $K = r/2$. As definições dos problemas de períodos I , J e K a rigor deveriam conter a parte real de cada uma das integrais que aparecem nas coordenadas da representação de Weierstraß. Porém observamos que todos os integrandos desses problemas são reais, dispensando a necessidade de tal notação.

4.3.1 Solução do problema de resíduo

Vamos considerar uma condição necessária e verificar quando ela é suficiente. Qual seja, a igualdade entre (4.9) e (4.10) implica, necessariamente, que a função F em (4.14) a seguir é identicamente nula. Claro, em geral este não é o caso. Mas note que, independente das restrições anteriores, $0 < x < a < 1 < y < b$, podemos, por hora, tomar F definida em todo \mathbb{R}^5 e tomando valores reais, pois ela é polinomial. Ou seja, para $(a, b, x, X, y) \in \mathbb{R}^5$, consideremos

$$F := (1+S_2+S_4)^2(a^2-x^2)(a^2-b^2)(a^2-y^2) - (a^4+S_2a^2+S_4)^2(1-y^2)(1-b^2)(1-x^2). \quad (4.14)$$

Alguns cálculos fornecem

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(x,X,y)=(a,a,1)} = 2(a^4 + S_2a^2 + S_4)^2(1-b^2)(1-a^2). \quad (4.15)$$

Pode-ser verificado que $a^4 + S_2a^2 + S_4 = 4a^2(1-a)(b-a) \neq 0$. Portanto, pelo *teorema da função implícita*, existe uma única função $y = y(a, b, x, X)$ que torna $F \equiv 0$ para $(a, b) \in (0, 1) \times (1, +\infty)$ e $a - \varepsilon < x, X < a + \varepsilon$, para um certo $\varepsilon = \varepsilon(a, b) > 0$. Agora, considere (a, b) fixo em $(0, 1) \times (1, +\infty)$, e restrinja (x, X, y) ao conjunto $(0, a) \times (a, 1) \times (1, b)$.

De (4.9) e (4.10), teremos $r = R$ quando $F \equiv 0$. Isso ocorre para a escolha y como função implícita de (a, b, x, X) , que mostramos existir. Mas estamos interessados em saber se esta função implícita soluciona nosso problema de fato, ou seja, devemos agora impor as desigualdades que caracterizam nossa superfície, para isso basta observar o caso

$x < a \leq X$, assim, resta somente garantirmos que $y > 1$. Mas isso vem diretamente de (4.14), pois $1 + S_2 + S_4 = (b + 1)(1 - a)^3 > 0$. De fato,

$$F : = \underbrace{(1 + S_2 + S_4)^2}_{>0} \underbrace{(a^2 - x^2)}_{>0} \underbrace{(a^2 - b^2)}_{<0} \underbrace{(a^2 - y^2)}_{<0} + \\ - \underbrace{(a^4 + S_2 a^2 + S_4)^2}_{>0} \underbrace{(1 - y^2)}_{?} \underbrace{(1 - b^2)}_{<0} \underbrace{(1 - x^2)}_{>0}.$$

Logo, resta que $1 - y^2 < 0$ o que implica $y > 1$, como queríamos. Portanto a função $y(a, b, x, X)$ satisfáz as condições necessárias das torres de selas tipo Scherk de gênero dois em \mathbb{R}^3 que estamos construindo.

4.3.2 Solução dos problemas de período

Nesta seção resolveremos os dois problemas de período que nossas torres de selas tipo Scherk possuem. Para isso, a partir deste ponto, tomamos y como sendo a função implícita supracitada e utilizaremos o *método limite* que foi comentado na Introdução do trabalho.

O método limite para solução de problemas de período é um dos mais práticos, pois consiste em estudarmos casos limites das superfícies que estamos construindo, fazendo uma variação de parâmetros conveniente, e observar se as *superfícies-limite* existem ou não. Felizmente em nosso caso elas existem. As superfícies-limite para as torres de selas tipo Scherk de gênero dois em \mathbb{R}^3 são as duas famílias de superfícies mínimas estudadas por Wohlgemuth em [43], a saber: CSSCFF e CSSCCC.

Estas também possuem dois problemas de períodos já solucionados por Wohlgemuth. Usando o método-limite estenderemos os problemas de períodos das superfícies-limite através das funções $I - J$ e $K - R/2$ que caracterizam nossos problemas de período e mostraremos que essa generalização dos problemas de período de Wohlgemuth também possuem solução, estando assim, resolvido os problemas de período das torres de selas aqui estudadas.

Como a solução dos problemas já está feita nos trabalhos de Wohlgemuth, iremos nos adequar às condições em que ele os solucionou. Para isso devemos rotacionar nossas superfícies 90° no sentido horário, mantendo o eixo x_1 invariante. Isso é feito através da transformação de Möbius a seguir:

$$G := -i \cdot \frac{g + i}{g - i}, \quad (4.16)$$

pois desejamos que $i \rightarrow \infty$, $\infty \rightarrow -i$ e $-i \rightarrow 0$ como ilustra a Figura 4.13, onde é fácil

ver que $dH := \frac{i}{2}(1/g + g)dh$.

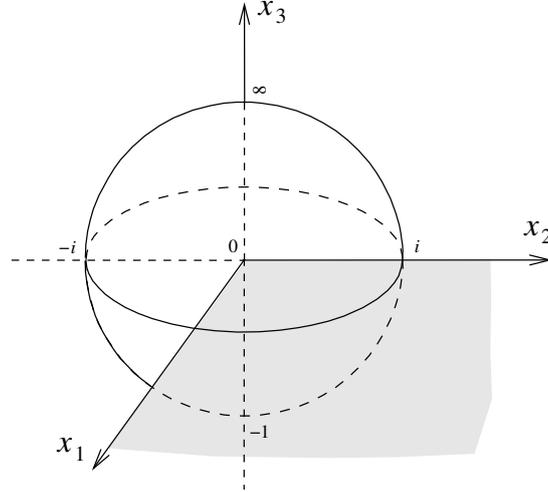


Figura 4.13: Transformação de Möbius adequada à solução dos problemas de período.

Em termos de um movimento rígido em \mathbb{R}^3 , os dados de Weierstraß (G, dH) fornecem as *mesmas* superfícies mínimas de (g, dh) , mas rotacionadas de 90° no sentido horário ao redor de Ox_1 . Equivalentemente, podemos rotacionar os eixos no sentido anti-horário ao redor de Ox_1 , de modo que teremos novos eixos $x'_3 = x_2$ e $x'_2 = -x_3$. De fato, podemos verificar que

$$(1/G - G)dH = (1/g - g)dh \quad \text{e} \quad i(1/G + G)dH = -2dh, \quad (4.17)$$

faremos a verificação somente para a primeira igualdade, pois a segunda é análoga.

$$\begin{aligned} (1/G - G)dH &= \left(i \frac{g-i}{g+i} + i \frac{g+i}{g-i} \right) \cdot \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g} + g \right) dh \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{(g-i)^2 + (g+i)^2}{g^2+1} \right) \cdot \left(\frac{g^2+1}{g} \right) dh \\ &= -\frac{1}{2g} \cdot (g^2 - 2ig - 1 + g^2 + 2ig - 1)dh \\ &= \left(-\frac{g^2-1}{g} \right) dh \\ &= \left(\frac{1}{g} - g \right) dh \end{aligned}$$

Além disto, verifica-se a seguinte igualdade:

$$dH = \frac{(X^2 - z^2)dz}{(a^2 - z^2)(1 - z^2)}. \quad (4.18)$$

A partir deste ponto, iremos usar frequentemente a referência [43]. Tome pequenas vizinhanças disjuntas $U \ni a$ e $V \ni b$. O conjunto $\mathcal{K} = \overline{\mathbb{R}} \setminus z^{-1}((\pm U) \cup (\pm V))$ é compacto. No caso $X = a$, de (4.2), (4.17) e (4.18) vê-se que (G, dH) converge uniformemente em \mathcal{K} para os dados de Weierstraß das superfícies CSSCFF, descritas em [43], p. 16. De fato, fazendo $x \rightarrow a$ e $y \rightarrow 1$, para $X = a$ fixo, em:

$$G := -i \cdot \frac{g+i}{g-i} \Leftrightarrow G^2 = -\frac{(b-z)(x+z)(y-z)(X+z)^2}{(b+z)(x-z)(y+z)(X-z)^2},$$

obtemos

$$G^2 = \left(\frac{1-z}{1+z}\right) \left(\frac{z+a}{z-a}\right)^3 \left(\frac{b-z}{b+z}\right) \quad (4.19)$$

e para $X = a$ fixo, em

$$dH = \frac{(X^2 - z^2)dz}{(a^2 - z^2)(1 - z^2)}$$

também obtemos

$$dH = \frac{dz}{1 - z^2}. \quad (4.20)$$

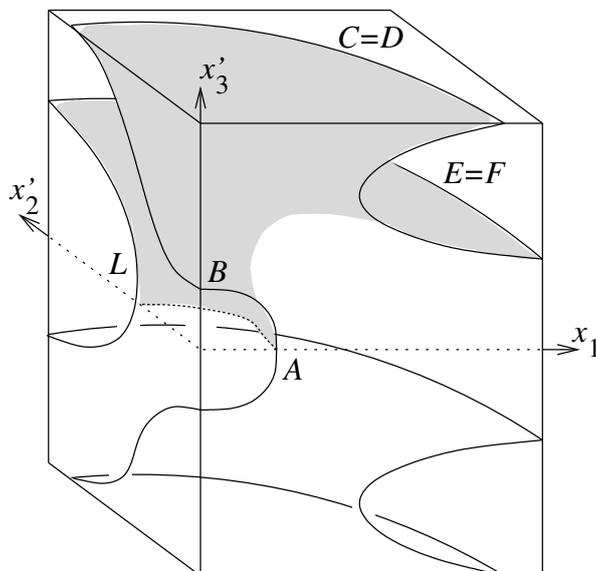


Figura 4.14: Um quarto da superfície CSSCFF com $x'_2 = -x_3$ e $x'_3 = x_2$.

Temos que, 4.19 e 4.20 coincidem exatamente com os dados de Weierstraß das superfícies CSSCFF, descritas por Wohlgemuth em [43]. A Figura 4.14 reproduz as curvas de simetria de uma superfície CSSCFF, que coincide com S no caso limite.

Em [43], p. 17, o autor define os períodos $\pi_1(a, b)$ e $\pi_2(a, b)$. O primeiro é a integral de ϕ_1 ao longo dum arco no semi-plano complexo superior, que conecta algum ponto do intervalo $(1, b)$ a algum ponto do intervalo $(0, a)$. Corresponde à curva magenta na Figura 4.15, livremente homotópica ao trecho IJ da Figura 4.12 (com a restrição de que seus extremos estão sobre BC e FL). O segundo é a integral de ϕ_2 ao longo dum arco no semi-plano complexo superior, que conecta algum ponto do intervalo (b, ∞) a algum ponto do intervalo $(a, 1)$. Corresponde à curva verde-azul na Figura 4.15, livremente homotópica aos trechos K e $\frac{1}{2}r$ da Figura 4.12 (com a restrição de que seus extremos estão sobre BA e DE). O primeiro arco é homotopicamente BAL , e o segundo é homotopicamente o segmento real de b a X . Ocorre que a integração de ϕ_2 no intervalo (b, X) fornece um valor principal de Cauchy.

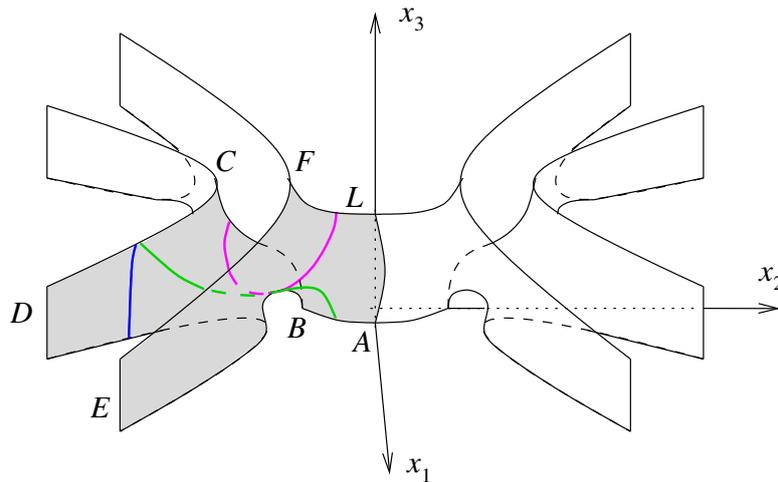


Figura 4.15: Curvas que caracterizam os problemas de período das superfícies CSSCFF.

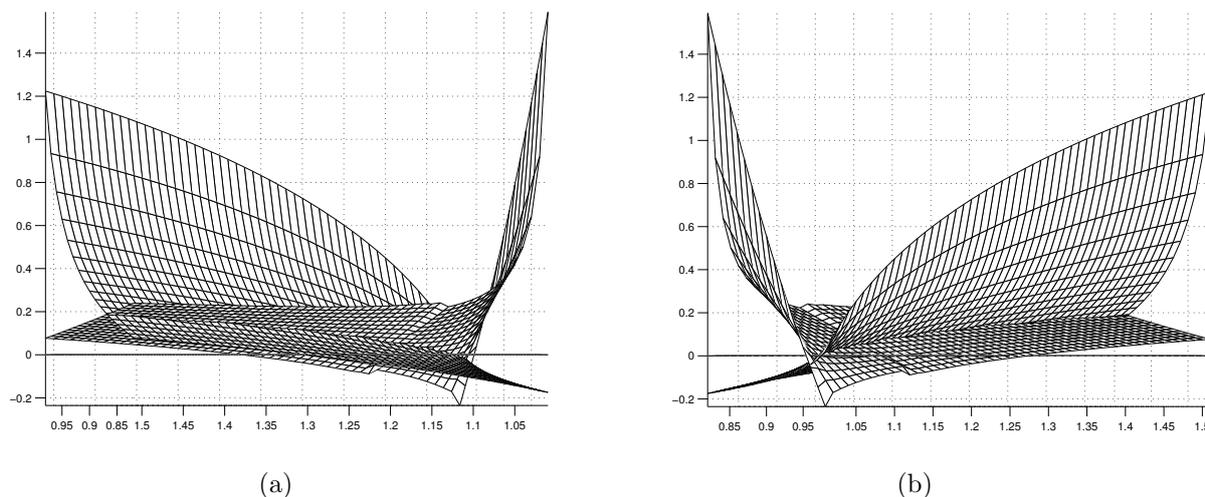
Em geral, é bem difícil trabalhar com valores principais de Cauchy. Mas as integrais são invariantes por homotopia livre. Ou seja, após tomarmos os valores extremos $x = X = a$ e $y = 1$, as integrais $I - J$ e $K - R/2$ de (4.11), (4.12) e (4.13) irão coincidir com $\pi_1(a, b)$ e $\pi_2(a, b)$, respectivamente.

Ocorre que *todo* o estudo de π_1 e π_2 já está feito em [43], p. 17-21. A seguinte tabela resume as conclusões de [43] sobre π_1 e π_2 para $(a, b) \in [0, 1] \times [1, \infty]$. Além disto, ele prova que os gráficos de π_1 e π_2 se intersectam ao longo de uma curva \mathcal{C}_0 no espaço, que por sua vez possui cruzamento com o plano horizontal $x_3 = 0$. Tal fato é ilustrado na Figura 4.16. Este cruzamento ocorre num ponto (a_0, b_0) e resolve os problemas de período

a	b	π_1	π_2
$0 < a < 1$	1	muda sinal	< 0
1	$1 < b$	< 0	muda sinal
$1 > a > 0$	∞	> 0	> 0
0	$b > 1$	> 0	> 0
0	1	$+\infty$	0
1	1	$-\infty$	< 0
1	∞	0	$+\infty$
0	∞	1	1

Tabela 4.2: Funções $\pi_1(a, b)$ e $\pi_2(a, b)$ de [43], p. 17.

para as superfícies CSSCFF. Na Figura 4.16, usamos $0,82 \leq a \leq 0,98$ e $1,01 \leq b \leq 1,51$. Note que a solução ocorre para (a, b) próximo a $(1, 1)$.

Figura 4.16: Duas vistas dos gráficos $\pi_1(a, b)$ e $\pi_2(a, b)$.

No início desta seção, para cada par $(a, b) \in (0, 1) \times (1, \infty)$ obtivemos uma função $y(a, b, x, X)$ que torna $F \equiv 0$ para $a - \varepsilon < x, X < a + \varepsilon$ e um certo $\varepsilon = \varepsilon(a, b) > 0$. Mas tomando uma pequena vizinhança com fecho compacto de (a_0, b_0) , podemos assumir que ε não depende de (a, b) nesta vizinhança. Agora fixamos $X = a$ e estendemos as definições de π_1 e π_2 em $a - \varepsilon < x < a$ através das funções $I - J$ e $K - R/2$, respectivamente. Uma vez que a extensão é suave, teremos uma família de curvas contínuas \mathcal{C}_t no espaço, cada uma delas cruzando o plano horizontal em um ponto (a_t, b_t) , onde $t \in [0, \varepsilon)$. Cada cruzamento acontece para x tomado como função $x(a) = a - t$, $a \in (0, 1)$.

De [43], p. 21, fixando $X = \tilde{a}$, o mesmo raciocínio se aplica agora para as superfícies CSSCCC. Para valores de ε suficientemente pequenos conseguimos uma família de torres de selas contínua a dois parâmetros em \mathbb{R}^3 , que é parametrizada por $(t, X) \in [0, \varepsilon) \times [a, a + \varepsilon)$, com as propriedades (i) e (ii) descritas no Teorema 1.1. As geodésicas Gaussianas ocorrem para $X = a$, tal fato pode ser verificado através da equação da função meromorfa g ao longo de $z \in [x, a)$ dada em (4.2), uma vez que a curva é plana e seu vetor tangente unitário é somente uma rotação de 90° no sentido horário da função g .

4.4 Mergulho de S

Na seção anterior, provamos que as torres de selas de gênero dois são livres de período no slab. Da Seção 4.2, temos que todas as curvas de simetrias reflexionais procuradas existem. Em particular, o comportamento da aplicação normal de Gauß é resumido na Figura 4.17(a). Nesta, sublinhamos os pontos *interiores* onde $|g| = 1$. Além disso, note as ramificações de g quando o vetor normal se desloca ao longo de $LABC$ e de $z = X$ para F , como subtrecho de DEF .

A região sombreada que limita $g(i\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_+)$, é determinada pelo fato de que $\deg(g) = 5$, de acordo com o Teorema 2.11. A Figura 4.17(a) retrata esta imagem de g . Além disso, com exatamente oito cópias da Figura 4.17(a) cobrimos $\hat{\mathbb{C}}$ cinco vezes, tomando conjugadas positivas, negativas, e inversões em relação à circunferência S^1 . Isso confirma a escolha correta da região sombreada. De fato, pois se fosse no complemento, teríamos uma contradição com $\deg(g) = 5$.

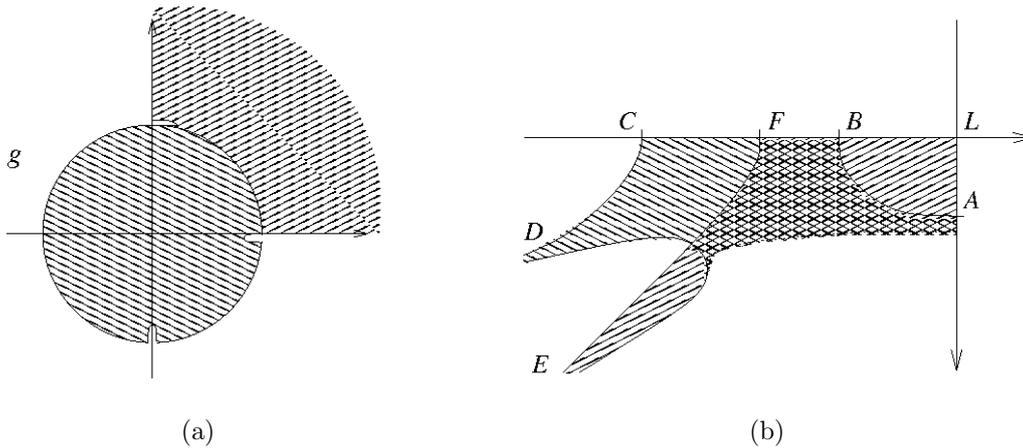


Figura 4.17: Imagem de z por g no 1° quadrante e a correspondente projeção em $x_3 = 0$.

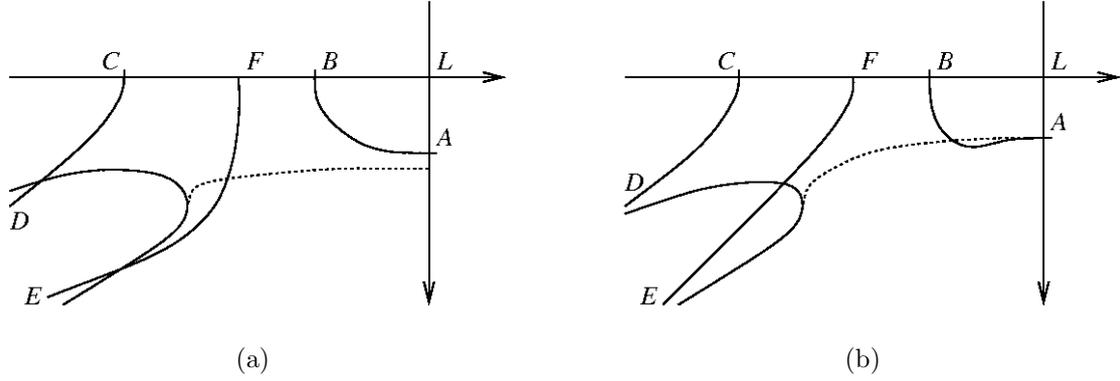


Figura 4.18: Variações da Figura 7(b).

Claro, o ramo sobre BC pode ser estendido até passar por $g = 0$, e o ramo de LA poderia ocorrer em AB (ao invés de LA). Neste caso, ele iria “grudar” em S^1 , e não em \mathbb{R} como mostra a Figura 4.17(a). Estas possibilidades correspondem aos itens (a) e (c), listados na Subseção 4.2.2. Quanto ao item (b), este significa estender o ramo em LA até passar por $g = 0$. Independente destas possibilidades particulares, teremos mergulho em qualquer caso.

Quanto à Figura 4.17(b), é a projeção *esperada* das regiões $|g| \geq 1$ e $|g| \leq 1$ em $x_3 = 0$, e elas se sobrepõem na sub-região sombreada mais escura. Algumas outras possibilidades são mostradas na Figura 4.18, e poderíamos até acrescentar casos em que, na projeção em $x_3 = 0$, B saíria entre C e F , ou ainda $B = F$. Contudo, sua posição não é crucial para a demonstração do Teorema principal, embora CFB seja numericamente correto. Exceto por este detalhe, provaremos que a Figura 4.17(b) é a única possível.

Entre as situações (a-c) listadas na Subseção 4.2.2, se alguma delas ocorrer, o fato é que g tem um ramo em algum lugar ao longo de LAB , outro em BC , e finalmente um terceiro em $(x, X) \ni z$. Em \bar{R} , isto dá um total de doze zeros para dg , pois $\deg(dg) = 2$, e $\deg(g) = 5$ implica dez pólos para dg . Quer dizer, g não é ramificada no interior da região sombreada na Figura 4.17(a), que não leva em consideração o contorno $g(i\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_+)$.

Recordamos que exatamente oito cópias da Figura 4.17(a) cobrem \hat{C} cinco vezes. Quer dizer, g é injetiva para z no primeiro quadrante *aberto* de \hat{C} . Portanto, existe uma curva simples γ no primeiro quadrante aberto cujos extremos são $z = X$ e um certo $Y \in (b, \infty] \cup i\mathbb{R}_+^*$, tal que $g(\gamma)$ é o arco unitário interior na Figura 4.17(a). A curva γ divide o quadrante em duas componentes disjuntas \mathcal{A} e \mathcal{B} , correspondendo para $|g| < 1$ e $|g| > 1$ na Figura 4.17(a), respectivamente. Uma vez que g é injetiva no primeiro quadrante aberto, da imersão mínima $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ no “slab”, pelo Teorema 2.10, temos que $(x_1, x_2) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $(x_1, x_2) : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ são *ambas imersões*. Além disso, suas ima-

gens são subconjuntos abertos *conexos* de \mathbb{R}^2 . Portanto, qualquer dois trechos de $\partial\mathcal{A}$ sob (x_1, x_2) são *disjuntos*, e o mesmo vale para $\partial\mathcal{B}$. Por causa disso, dentre as três intersecções retratadas na Figura 4.18(a), nenhuma ocorre, nem mesmo com pontos tangentes.

Pela mesma razão, a curva pontilhada na Figura 4.18(b), que representa a imagem de γ sob (x_1, x_2) , não poderia cruzar qualquer das curvas contínuas lá representadas. Em vez disso, seu lado direito extremo deverá ser tangente a AL no ponto de maior coordenada x_1 (note que Ox_1 é vertical para baixo na figura). Além disso, os fins Scherk são assintóticos para os semi-planos, que são verticais neste caso, de modo que as regiões preenchidas *devem* ser os interiores indicados pela Figura 4.17(b).

Agora analisaremos a convexidade e monotonicidade de alguns caminhos que constroem $g(i\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_+)$. De agora em diante, qualquer caminho será visto como uma *projeção* em $x_3 = 0$, e usaremos constantemente o fato de que g é a projeção estereográfica da aplicação de Gauß. Uma vez que as superfícies-limite são CSSCFF e CSSCCC, tome nossas superfícies de tal forma que os fins E e D não intersectam, e F está à direita de C . Além disso, *conhecemos* os ramos de g . Em particular, o trecho DE é uma curva monótona convexa. Não é sempre verdade que o trecho FE é convexo, mas certamente é monótono, porque nele temos $g = e^{i\theta(t)}$, $-\pi/2 < t \leq 0$. A propósito, obtemos *Geodésicas Gaussianas* exatamente quando $X = a$.

A curva $g(\gamma)$ é convexa e monótona, assim como CD e FL . Dos casos listados na Subseção 4.2.2, teríamos falha na monotonicidade de BC no caso (a), *a menos que* tenhamos uma Sela de Macaco, onde N é vertical, e falha na convexidade de AB no caso (c) se θ assumisse valores positivos. De qualquer maneira, eles são *sempre* convexos e monótonos, respectivamente, e podemos usar os Dados de Weierstraß, especialmente (4.18), para confirmar estes fatos. Se (c) não ocorre, então AL não é monótono, *a não ser que* tenhamos uma sela quatro vezes simétrica em A . De todo jeito, AL é sempre convexo.

Analisaremos agora $(x_1, x_2) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Considerando $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathbb{C}}$, esta pode ser estendida continuamente à $(x_1, x_2) : \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}^2$. A pré-imagem de qualquer ponto em $(x_1, x_2)(\mathcal{A})$ é um conjunto finito de pontos, caso contrário eles se acumulariam em algum ponto $p \in \partial\mathcal{A}$, uma contradição. Portanto, (x_1, x_2) é uma aplicação de recobrimento de \mathcal{A} em uma região simplesmente conexa $(x_1, x_2)(\mathcal{A})$. A saber: é injetiva. Pelos mesmos argumentos $(x_1, x_2) : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$, é também injetiva.

Daqui em diante, vamos novamente considerar os caminhos como curvas espaciais. Uma vez que $\deg(g) = 5$, então cada trecho LA , AB e BC é livre de auto-intersecções. Para os dois últimos, reconfirmamos isso com 4.18. Entretanto, poderia ocorrer que $BC \cap FL \neq \emptyset$. Recordemos que (x_1, x_2) é uma imersão seja para \mathcal{A} ou \mathcal{B} , e portanto nenhum destes conjuntos poderia ter um ponto-imagem em $g(\gamma)$. Consequentemente, exceto pelo trecho comum $\mathcal{X}(\gamma)$, $BC \cap FL$ é a única intersecção possível entre os bordos dos

gráficos $(\mathcal{X}|_{\mathcal{A}})$ e $(\mathcal{X}|_{\mathcal{B}})$.

Portanto, $\mathcal{X}(\overline{\mathcal{A}}) \cap \mathcal{X}(\overline{\mathcal{B}}) \setminus \mathcal{X}(\gamma) = (\mathcal{X}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{X}(\mathcal{B})) \cup (BC \cap FL)$. Agora vamos aplicar o *princípio do máximo* (veja [36], por exemplo). Se aquele conjunto não fosse vazio, então poderíamos levantar o gráfico de $(\mathcal{X}|_{\mathcal{B}})$ até obtermos um primeiro ponto de tangência. O princípio do máximo então implicaria que ambas as peças coincidem, o que é um absurdo. Portanto, a superfície tem um domínio fundamental mergulhado, e confinado no “slab”, no quarto octante de \mathbb{R}^3 . Por sucessivas reflexões em seu bordo, obtemos uma superfície mergulhada, simplesmente periódica em \mathbb{R}^3 . Este último argumento finalmente demonstra o Teorema 1.1.

Concluimos esta seção com o mergulho das superfícies CSSCFF e CSSCCC. Na Subseção 4.3.2, provamos que as superfícies são parametrizadas por $t \in [0, \varepsilon)$, onde $t = 0$ nos dá estes casos-limite. É fato que qualquer deles tem fins disjuntos e mergulhados. De fato, pois se houvesse uma auto-interseção, ela ocorreria no interior de um compacto como \mathcal{K} , descrito na Subseção 4.3.2. Novamente pelo *princípio do máximo* para superfícies mínimas, o mesmo ocorreria para nossas superfícies com t positivo e próximo de zero. Mas isto é impossível devido ao Teorema 1.1 que acabamos de demonstrar. Portanto, as superfícies CSSCFF e CSSCCC são também mergulhadas em \mathbb{R}^3 .

Referências Bibliográficas

- [1] AHLFORS, L.V. **Conformal Invariants: topics in geometric functions theory**. 1.ed. New York: McGraw-Hill, 1973. 168 p.
- [2] AHLFORS, L.V.; SARIO, L. **Riemann surfaces**. 1.ed. Princeton: Princeton University Press, 1960. 400 p. (Princeton Mathematical Series, n. 26).
- [3] BAGINSKI, F.; RAMOS BATISTA, V. Solving period problems for minimal surfaces with the support function. **Math.DG**, Ithaca, arXiv:0806.4179v1, 2008.
- [4] CONWAY, J.B. **Functions of One Complex Variable I**. 2.ed. New York: Springer-Verlag, 1978. 322 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 11).
- [5] CONWAY, J.B. **Functions of One Complex Variable II**. 1.ed. New York: Springer-Verlag, 1995. 416 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 159).
- [6] COSTA, C.J. Example of a complete minimal immersion in \mathbb{R}^3 of genus one and three embedded ends. **Bol. Soc. Brasileira de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 15, n. 1-2, p. 47–54, 1984.
- [7] DA SILVA, M.F.; RAMOS BATISTA, V. Scherk Saddle Towers of Genus Two in \mathbb{R}^3 . **Geom. Dedicata**, Utrecht, v. 149, n. 1, p. 59–71, 2010.
- [8] DO CARMO, M. **Superfícies Mínimas**. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. 129 p. (Publicações Matemáticas).
- [9] FORSTER, O. **Lectures on Riemann Surfaces**. 1.ed. New York: Springer-Verlag, 1981. 268 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 81).
- [10] SPRINGER, G. **Introduction to Riemann Surfaces**. 1.ed. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1957. 307 p.
- [11] GRAY, A. **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica**, 2.ed. Boca Raton: CRC Press LLC, 1997. 1052 p.
- [12] HAUSWIRTH, L.; Morabito, F.; Rodriguez, M. An end-to-end-construction for singly periodic minimal surfaces. **Pacific J. Math.** Berkeley, v. 241, n. 1, 1–61, 2009.
- [13] HICKS, J.N. **Notes on Differential Geometry**. 1.ed. New York: Van Nostrand Reinhold Co, 1965. 181 p.
- [14] HOFFMAN, D.; MEEKS, W.H. Embedded minimal surfaces of finite topology. **Annals of Mathematics**, v. 131, n. 1, p. 1–34, 1990.
- [15] HOFFMAN, D.; KARCHER, H. Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature. **Springer-Verlag**, p. 5–93, 1997. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, v. 90 - Geometry V).

- [16] JORGE, L.P.M.; MEEKS, W.H. The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature. **Topology**, Amsterdam, v. 22, n. 2, p. 203–221, 1983.
- [17] KAPOULEAS, K. Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature. **J. Differential Geom.** Bethlehem-PA, v. 47, n. 1, p. 95–169, 1997.
- [18] KARCHER, H. Embedded minimal surfaces derived from Scherk’s examples. **Manuscripta Math.** New York, v. 62, n. 1, p. 83–114, 1988.
- [19] KARCHER, H. **Construction of minimal surfaces. Surveys in geometry.** 1.ed. Tokyo: University of Tokyo, 1989. p. 1–96. (and Lecture Notes v. 12). SFB256, Bonn 1989.
- [20] LÓPEZ, F.J.; MARTÍN, F. Complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 . **Publ. Matemàtiques.** Barcelona, v. 43, n. 2, p. 341–449, 1999.
- [21] LÓPEZ, F.J.; ROS, A. On embedded complete minimal surfaces of genus zero. **J. Differential Geom.** Bethlehem-PA, v. 33, n. 1, p. 293–300, 1991.
- [22] LÜBECK, K. **Método-limite para solução de problemas de períodos em superfícies mínimas.** 2007. Tese (Doutorado em Matemática) - IMECC, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.
- [23] LÜBECK, K.; RAMOS BATISTA, V. A limit-method for solving period problems on minimal surfaces. **Math.DG**, Ithaca, arXiv:0806.3086v1, 2008.
- [24] MARTÍN, F., RAMOS BATISTA, V. The embedded singly periodic Scherk-Costa surfaces. **Mathematische Annalen**, New York, v. 336, n. 1, p. 155–189, 2006.
- [25] MASSEY, W.S. **A Basic Course in Algebraic Topology.** 1.ed. New York: Springer-Verlag, 1991. 443 p. (Graduate Texts in Mathematics v. 127).
- [26] MEEKS, W.H.; WOLF, M. Minimal surfaces with the area growth of two planes: the case of infinite symmetry. **J. American Mathematical Society**, Providence-RI, v. 20, n. 2, p. 441–465, 2007.
- [27] NITSCHÉ, J.C.C. **Lectures on minimal surfaces.** 1.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. v. 1, 555 p.
- [28] OSSERMAN, R. **A Survey of Minimal Surfaces.** New York: Dover Publications, INC., 1986. 207 p.
- [29] RAMOS BATISTA, V. **Construction of new complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 based on the Costa surface.** 2000. Tese (Doutorado em Matemática) - University of Bonn, Bonn.
- [30] RAMOS BATISTA, V. The doubly periodic Costa surfaces. **Math. Zeitschrift**, New York, v. 240, n. 3, p. 549–577, 2002.
- [31] RAMOS BATISTA, V. A family of triply periodic Costa surfaces. **Pacific J. Math.** Berkeley, v. 212, n. 2, p. 347–370, 2003.
- [32] RAMOS BATISTA, V. Noncongruent minimal surfaces with the same symmetries and conformal structure. **Tohoku Mathematical J.** Ithaca, v. 56, n. 2, p. 237–254, 2004.
- [33] RAMOS BATISTA, V. Singly Periodic Costa surfaces, **J. London Mathematical Society**, Oxford v. 72, n. 2, p. 478–496, 2005.
- [34] RAMOS BATISTA, V.; Simões, P. A characterisation of the Hoffman-Wohlgemuth

- surfaces in terms of their symmetries. **Geom. Dedicata**, Utrecht, v. 142, n. 1, p. 191–214, 2009.
- [35] SCHOEN, A.H. Infinite periodic minimal surfaces without selfintersections. **NASA Technical Note**, v. D-5541, 1970.
- [36] SCHOEN, R. Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces. **J. Differential Geom.** Bethlehem-PA, v. 18, n. 4, p. 791–809, 1983.
- [37] THOMASSEN, C. The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces. **American Mathematical Monthly**, Washington-DC, v. 99, n. 2, p. 116–131, 1992.
- [38] TRAISET, M. Construction de surfaces minimales en recollant des surfaces de Scherk. **Ann. Inst. Fourier**, Saint-Martin-d'Hères, v. 46, n. 5, p. 1385–1442, 1996.
- [39] TRAISET, M. Adding handles to Riemann's minimal surfaces. **J. Inst. Math. Jussieu**, Cambridge, v. 1, n. 1, p. 145–174, 2002.
- [40] TRAISET, M. An embedded minimal surface with no symmetries. **J. Differential Geom.** Bethlehem-PA, v. 60, n. 1, p. 103–153, 2002.
- [41] WEBER, M. A Teichmüller theoretical construction of high genus singly periodic minimal surfaces invariant under a translation. **Manuscripta Mathematica**, New York, v. 101, n. 2, p. 125–142, 2000.
- [42] WEBER, M. **The genus one helicoid is embedded.** 2000. Tese (Doutorado em Matemática) - University of Bonn, Bonn.
- [43] WOHLGEMUTH, M. Minimal surfaces of higher genus with finite total curvature. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, New York, v. 137, n. 1, p. 1–25, 1997.