

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Mestrado em Matemática Aplicada



MICHELE CRISTINA VALENTINO

Controle Ótimo de Doenças Fúngicas no Feijoeiro

Santo André

18/12/2010

Michele Cristina Valentino

CONTROLE ÓTIMO DE DOENÇAS FÚNGICAS NO
FEIJOEIRO

Dissertação

Dissertação apresentada ao Centro de Matemática, Computação e
Cognição, UFABC, como requisito parcial para obtenção do título
de **Mestre em Matemática Aplicada**.

Orientador: Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão

Santo André

18/12/2009



Universidade Federal do ABC

Serviço Público Federal
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

*Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliaram e aprovaram a defesa de Dissertação de Mestrado da candidata **Michele Cristina Valentino**, realizada em 18 de dezembro de 2009:*

Dr. Adilson José Vieira Brandão (UFSCAR)

Dr. Marat Rafikov (UFABC)

Dr. Rodney Carlos Bassanezi (UFABC)

Ficha catalográfica produzida pela Biblioteca da Universidade Federal do ABC

VALENTINO, Michele Cristina Valentino

Controle Ótimo de doenças fúngicas no feijoeiro / Michele Cristina Valentino — Santo André : Universidade Federal do ABC, 2009.

II. 93 f. 29 cm

Orientador: Adilson José Vieira Brandão

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Centro de Matemática, Computação e Cognição, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, 2009.

Referencias Bibliográficas: f. 90 - 93

1. Controle ótimo 2. Controle ótimo não-linear 3. Feijoeiro 4. Doenças -Feijoeiro I. Brandão, Adilson José Vieira II. Universidade Federal do ABC, Centro de Matemática, Computação e Cognição, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, 2009. III. Título.

CDD 519.2

Aos meus pais pelo apoio constante.

À Deus acima de tudo.

Agradecimentos

Ao professor Adilson José Vieira Brandão, pela orientação e incentivo durante esses dois anos de convivência e pelo dom de incentivar-nos a conhecer sempre um pouco mais a Matemática.

À Universidade Federal do ABC e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo financiamento deste trabalho.

Aos professores do curso de pós-graduação.

Aos professores Moiseis Cecconello e Antonio Candido Faleiros, pela ajuda e sugestões na parte computacional.

Aos professores Edvaldo Pereira e Modesto Barreto pela ajuda na parte biológica.

Aos professores Rodney Carlos Bassanezi e Marat Rafikov, pelas valiosas sugestões apresentadas.

Aos meus pais, José Aparecido Valentino e Gilene Vaz Valentino, pelo apoio, incentivo e carinho.

Ao Douglas Sant'Anna, pelo carinho e apoio de sempre.

Aos funcionários do CMCC.

Aos amigos de Pós-Graduação, pela convivência e amizade.

E principalmente à Deus, por ter me possibilitado tudo isso.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um modelo matemático que descreve o crescimento da área foliar lesionada por fungos, posteriormente aos efeitos da aplicação do fungicida. Propomos o controle ótimo linear e o não linear, cujo interesse é maximizar a produção, minimizar o custo e também para o controle não linear, minimizar a quantidade de fungicida usado, pois o excesso deste produto pode causar impactos negativos no meio ambiente e na saúde humana. Realizamos experimentos numéricos usando alguns parâmetros vistos em [Bassanezi et al.1997] para o fungo *Phaeoisariopsis griseola* causador da mancha-angular, com a finalidade de comparar os resultados obtidos para as duas estratégias de otimalidade.

Palavras-chave: Controle ótimo, Controle ótimo não linear, feijoeiro.

Abstract

In this work, we present a mathematical model that describes the growth of the injured leaf area by fungi, after the application of fungicide. We propose a linear optimal control and a nonlinear optimal control, where the goals are: maximize the production, minimize the costs and also, for nonlinear optimal control, minimize the amount of fungicide used for controlling, due to the excess of fungicide may cause negative environmental and human health impacts. We introduce some numerical experiments, using some parameters found in [Bassanezi et al.1997] for the fungus *Phaeoisariopsis griseola* responsible for the angular leaf spot disease, in order to compare this result obtained for the two optimality strategies.

Keywords: optimal control, nonlinear optimal control, bean plantation.

Sumário

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução Geral	1
2 Controle Ótimo	5
2.1 Introdução	5
2.2 Princípio do Mínimo de Pontryagin no caso mais simples	18
2.3 Princípio do Máximo mais geral e alguns casos especiais	23
2.4 Um sistema de equações diferenciais como restrição	35
2.5 Condições Suficientes para o Problema de Controle Ótimo	36
3 Modelos que Descrevem Áreas Foliares Lesionadas	39
4 Controle Ótimo com o Funcional Linear	45
4.1 Aplicação para a Mancha-Angular que Ataca o Feijoeiro	53
4.2 Simulações numéricas	55
4.3 Verificação de $\bar{t}$ (ponto de switch)	55
4.4 Influência de β e c_1 na determinação de $\bar{t}$	61
5 Controle Ótimo com o Funcional Não-Linear	64
5.1 Introdução	64
5.2 Modelo para o funcional quadrático	65
5.3 Simulações Numéricas	67
6 Conclusão	72
A Programas Computacionais	74
A.1 Código-fonte do Controle linear Seção(4.2).	74
A.2 Código-fonte do controle Seção(4.2).	76

A.3 Código-fonte do Controle quadrático Seção(5.3).	78
Referências Bibliográficas	80

Lista de Figuras

1.1	Fase inicial da doença.	2
1.2	Manchas angulares.	2
1.3	Desfolhamento precoce.	2
2.1	Método de Fermat para encontrar a tangente de uma curva algébrica.	6
2.2	Inclinação nula da reta tangente em máximos e mínimos	8
2.3	Raio de luz ao atravessar meios com densidades diferentes.	9
2.4	Vetor velocidade da partícula tangente a braquistócrona.	9
2.5	Comprimento do raio de luz e suas projeções.	10
2.6	Variação na curva $x(t)$ de estado em torno de $\bar{x}(t)$	19
2.7	Variação de $u(t)$ em torno do controle ótimo $\bar{u}(t)$	25
2.8	Controle ótimo no interior de U	28
2.9	Controle ótimo na fronteira de U	28
2.10	H quando g é menor que zero	31
2.11	H quando o g é maior que zero	32
2.12	Gráfico da função adjunta	34
2.13	Gráfico da função Controle	34
2.14	Gráfico da equação de estado	34
4.1	H com g positivo	47
4.2	H com g negativo	47
4.3	Suposto controle para o problema (4.1).	48
4.4	Descontinuidade de g	51
4.5	Mancha-angular na fase inicial, causada por <i>Phaeoisariopsis griseola</i>	54
4.6	Manchas angulares amareladas causado pelo fungo <i>Phaeoisariopsis griseola</i>	54
4.7	Mancha-angular na fase mais avançada.	54
4.8	Desfolhamento precoce causado pela mancha-angular.	55
4.9	Valor de $\bar{t}$, $R(t_f)$ e $N(t_f)$ em função de r , considerando fixos $N(0) = 0.1$, $R(0) = 0.02$, $t_0 = 0$, $t_f = 80$, $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$	57

4.10	Valor de $\bar{t}$ em função de r , considerando fixos $N(0) = 0.1$, $R(0) = 0.02$, $t_0 = 0$, $t_f = 80$, $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$	57
4.11	Valor de $N(t_f)$, $R(t_f)$ quando $\bar{t} = 36.2179$ (gráfico pontilhado) e quando $\bar{t} = 80$ (gráfico contínuo).	57
4.12	$N(t_f)$ e $R(t_f)$ para $\alpha = 10^{-5}$ (gráfico pontilhado) e $\alpha = 0$ (gráfico contínuo).	59
4.13	$\bar{t}$ para cada valor de r com o fungicida menos concentrado($\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$) e com o fungicida mais concentrado($\beta = 0.8$, $c_1 = 0.004$).	59
4.14	Área total lesionada para o fungicida mais concentrado(gráfico pontilhado) e o menos concentrado (gráfico contínuo).	61
4.15	Área total lesionada para o fungicida mais concentrado(gráfico pontilhado) e o menos concentrado (gráfico contínuo).	61
4.16	Valores de $\bar{t}$ em função de β com c_1 fixo	62
4.17	Valores de $\bar{t}$ em função de c_1 com β fixo	62
4.18	$N(0) = 0.2$, $R(0) = 0.04$	63
4.19	$N(0) = 0.3$, $R(0) = 0.06$	63
4.20	$N(0) = 0.35$, $R(0) = 0.07$	63
5.1	$R(t_f)$, $N(t_f)$ para o funcional quadrático (linha pontilhada) e para o funcional linear (linha contínua).	67
5.2	Controle para o Funcional Linear e Não-Linear para $r=0.03$	69
5.3	Controle para o Funcional Linear e Não-Linear para $r=0.065$	69
5.4	Controle para o Funcional Linear e Não-Linear para $r=0.08$	69
5.5	$N(t_f)$ para fungicida mais concentrado (linha pontilhada) e para o menos concentrado (linha contínua).	70
5.6	Controle não-linear para o fungicida mais concentrado e para o menos concentrado.	71

Lista de Tabelas

4.1	Valor de $\bar{t}$, $R(t_f)$ e $N(t_f)$ para cada taxa de crescimento dada, considerando fixos $N(0) = 0.1$, $R(0) = 0.02$, $t_0 = 0$, $t_f = 80$, $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$.	56
4.2	Valor de $\bar{t}$, $R(t_f)$ e $N(t_f)$ para cada taxa de crescimento dada, considerando fixos $N(0) = 0.1$, $R(0) = 0.02$, $t_0 = 0$, $t_f = 80$, $\alpha = 0$, $\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$.	58
4.3	Valor de $\bar{t}$, $R(t_f)$ e $N(t_f)$ para cada taxa de crescimento dada, considerando fixos $N(0) = 0.1$, $R(0) = 0.02$, $t_0 = 0$, $t_f = 80$, $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$.	60
4.4	$\bar{t}$ para cada valor de β e c_1 com os seguintes parâmetros fixados, $\alpha = 10^{-5}$, $S(0) = 0.1$, $R(0) = 0.08$, $r = 0.026$, $t_f = 80$.	61
5.1	Valor de $R(t_f)$ e $N(t_f)$ para o funcional linear e para o funcional não-linear em função da taxa de infecção. Considerando fixos $N(0) = 0.1$, $R(0) = 0.02$, $t_0 = 0$, $t_f = 80$, $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$.	68

Capítulo 1

Introdução Geral

Atualmente o Brasil é o maior produtor de feijão do mundo. De acordo com [Wander2005], mesmo produzindo cerca de três milhões de toneladas de feijão anualmente, o Brasil ainda importa cem mil toneladas por ano, pois os grãos de feijão são um dos componentes básicos da dieta alimentar da população brasileira e importante fonte de proteínas para as classes economicamente menos favorecidas.

Antigamente, o feijão era cultivado no Brasil por pequenos produtores, voltados apenas para a subsistência das famílias. Nos últimos vinte anos cresceu o interesse de alguns produtores de outras classes econômicas, os quais adotaram tecnologias avançadas tais como, irrigação e colheita mecanizada, entre outras, em cultivos de feijão em grande escala. E é por isso, que a área de plantio de feijão no Brasil teve uma diminuição de cerca de 25%, contudo a produção aumentou em 16%.

A plantação de feijão pode ser atacada por mais de vinte doenças durante todo o seu ciclo, essas doenças são causadas por fungos, bactérias, vírus e nematóides. A distribuição dessas doenças no Brasil varia de acordo com as condições ambientais e as características do sistema de produção praticado por cada região. Dependendo da espécie da praga, da fase de desenvolvimento, da cultura, da cultivar plantada e da época de plantio, os danos causados por estas pragas podem ser de até 100%.

A mancha-angular, de acordo com [Sannazzaro et al.2003] é uma dessas doenças que ataca a plantação de feijão, é causada pelo fungo *Phaeoisariopsis Griseola*. Antes da década de 80, esta doença era considerada de pouca importância econômica, pois só ocorria nos finais do ciclo da plantação, porém nos últimos anos ela tem aparecido cada vez mais precocemente e consequentemente seus surtos são mais intensos.

Como todas as outras doenças que atacam a plantação de feijão, a mancha-angular também depende das condições ambientais para um melhor desenvolvimento, como pode ser visto em [Sannazzaro et al.2003], [Bassanezi et al.1997], [Pria et al.2003]. Seus sintomas aparecem principalmente nas folhas, podendo aparecer também nos caules, ramos e vagens.

As lesões nas folhas são inicialmente irregulares, cinzas ou marrons, depois elas assumem formato angular, causando o amarelecimento e desfolhamento prematuro da planta, figuras (1.1, 1.2, 1.3). O desfolhamento, prejudica o enchimento das vagens, reduzindo o tamanho dos grãos. Nas vagens, as lesões são superficiais, de coloração castanho-avermelhada, quase circulares com bordas escuras de tamanhos variados. As vagens infectadas podem produzir sementes mal desenvolvidas e/ou totalmente enrugadas. Nos caules e ramos as lesões são alongadas de coloração castanho-escuro.



Figura 1.1: Fase inicial da doença.



Figura 1.2: Manchas angulares.



Figura 1.3: Desfolhamento precoce.

Os controles usados por agricultores para a mancha angular são: desenvolvimento de novas cultivares com resistência, tratamento químico das sementes e da parte aérea das plantas, uso de sementes de boa qualidade, rotação de culturas, remoção de resíduos culturais, variação da época de plantio. Porém, o mais comum e o mais eficiente é a utilização do controle químico, sendo este um dos principais métodos devido à facilidade do uso e também pelos resultados imediatos.

O uso de fungicidas teve início no final do século *XIX* com a descoberta da calda bordalesa, que é uma mistura composta por sulfato de cobre e cal hidratada. Esta descoberta foi feita por um agricultor francês, quando ele aplicava água com cal para evitar que os cachos de uva de seu parreiral próximo de uma estrada fossem roubados. Com isso percebeu que as plantas tratadas estavam livres de algumas doenças. O pesquisador Millardet descobriu que o efeito estava associado ao fato do leite de cal ter sido preparado em tachos de cobre. Foi através disso que desenvolveu-se pesquisas para chegar a formulação mais adequada da proporção entre cal e o sulfato de cobre.

A calda bordalesa não penetra nos tecidos das plantas pois seria altamente tóxica a elas. Após a aplicação, formam uma finíssima camada que recobre os órgãos vegetais e é esta camada que dá proteção contra a instalação das doenças.

A partir da Segunda Guerra Mundial, descobriram substâncias químicas que atuam sobre os fungos sem serem tóxicas à cultura tratada. Ao contrário dos fungicidas anteriores, estes podem se mover ao longo do sistema das plantas, por isso são denominados sistêmicos, veja [Kuhn and Junior], [Azevedo2003].

O uso excessivo dos fungicidas sistêmicos causa consequências como: promove a seleção natural dos fungos resistentes, colocando em risco a eficiência do método, persistência de produtos no meio ambiente, resíduos acima dos limites de tolerância em alimentos, intoxicação dos agricultores e a eliminação dos microorganismos responsáveis pela degradação de matéria orgânica. Resumindo, no caso da doença mancha-angular a utilização de fungicidas sistêmicos é a medida mais eficiente e viável para controlá-la e garantir a sustentabilidade da atividade agrícola. Por outro lado, é também uma tecnologia que traz impactos negativos ao meio ambiente, à saúde pública e ainda promove a seleção de fungos resistentes. É esta seleção de fungos resistentes que tem estimulado inúmeras pesquisas sobre o estudo da dinâmica de fungos resistentes e também da determinação de estratégias para o controle da resistência, com o objetivo de minimizar perdas, tanto para o agricultor quanto para a indústria química em geral.

Pelos fatos que foram comentados acima, neste trabalho o objetivo é estudar uma dinâmica da área foliar total lesionada por fungos, como pode ser visto em [Zotin et al.2000], que é a área lesionada por fungos sensíveis (os que morrem com a aplicação do fungicida), mais a área lesionada por fungos resistentes. Neste nosso caso estamos falando do fungo *Phaeoisariopsis Griseola*, que é o causador da mancha-angular. A finalidade é de encontrar uma estratégia de aplicação ótima de fungicida sistêmico que, como vimos acima, é a medida mais eficiente, dentro de um período pré-fixado (momento em que a doença é detectada até o momento em que ocorre a colheita), de modo a minimizar a área foliar final lesionada pelos fungos e também o custo da aplicação, ou seja, obter uma maior produção com um menor custo. Num segundo instante tivemos a preocupação com a minimização da quantidade de fungicida utilizado para o controle da praga, pelo fato de que este causa alguns impactos negativos no meio ambiente e na vida humana.

No capítulo 2, fizemos uma revisão teórica de controle ótimo, veja [Kamien and Schwartz1991], [Baumeister and Leitão2008], [Faleiros and Yoneyama2002], [Golçalves and Silveira] e [Philippi1988], pois é esta ferramenta que usaremos para resolver o problema que será apresentado no capítulo 3. Começamos desde os primeiros problemas de máximos e mínimos de Fermat, depois comentamos sobre Newton e Leibniz, que, com as idéias de Fermat e com o advento do cálculo que inventaram independentemente, chegaram a uma equação que nos fornece máximos e mínimos de funções. Ainda comentamos sobre o início do cálculo das variações, que ocorreu com o problema da Braquistócrona, sugerido por Johann Bernoulli. Depois vieram os problemas de controle ótimo, que surgiram durante a corrida espacial entre os Estados Unidos e a antiga União Soviética. Estes problemas são mais gerais que os problemas de cálculo das variações. Demonstramos o princípio do mínimo (máximo) de Pontryagin no caso mais simples e no caso mais geral, que são condições necessárias para o problemas em

questão. Depois comentamos sobre outros casos especiais, sem demonstrá-los, e em seguida alguns exemplos para um melhor entendimento. Por final mostramos as condições suficientes para esses problemas de controle ótimo.

Nos capítulos 3 e 4, propomos um modelo não linear para o controle do crescimento da área foliar total lesionada pelos fungos. Com o objetivo de minimizar esta área final lesionada e o custo da aplicação do fungicida, ou seja, maximizar a produção com um menor custo. Consideramos todos os nossos parâmetros constantes e a ferramenta utilizada para este estudo foi a Teoria de Controle Ótimo, consequentemente o Princípio do Mínimo (Máximo) de Pontryagin e assim obtivemos uma estratégia ótima de controle para este problema.

O controle ótimo que encontramos, foi do tipo bang-bang

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \bar{t} \\ 1, & \bar{t} < t \leq t_f \end{cases}.$$

Porém não conseguimos uma forma explícita para nosso $\bar{t}$ que é conhecido como ponto de Switch, onde ocorre a troca de controle e também de outros parâmetros do modelo. Para suprir esta dificuldade, fizemos experimentos numéricos usando o Matlab, [Yang et al.2005], [Kiusalaas2005], cuja descrição do Código-fonte do script encontra-se no Apêndice A. Também usamos alguns parâmetros encontrados em [Bassanezi et al.1997] para taxa de infecção da mancha-angular.

No capítulo 5, usamos um funcional quadrático ao invés de um funcional linear para o mesmo modelo que descreve o crescimento da área foliar total lesionada por fungos. Isto porque estamos interessados em minimizar a quantidade de fungicida usado, pois seu uso indiscriminado causa impactos negativos no meio ambiente e no ser humano. Esta mesma estratégia de otimalidade pode ser vista em [Joshi2002].

Usamos a mesma ferramenta do capítulo anterior para o estudo do problema. Fizemos experimentos numéricos, também usando o Matlab, [Yang et al.2005], [Kiusalaas2005], para encontrar alguns parâmetros que não foram explicitados analiticamente. Durante o desenvolvimento deste capítulo, foi feita uma comparação entre os resultados obtidos para o funcional quadrático e o funcional linear.

Por final, no capítulo 7, fizemos uma conclusão dos resultados obtidos além de comentários sobre possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 2

Controle Ótimo

2.1 Introdução

Problemas de Controle ótimo ou otimização são de grande importância na física, matemática, biologia e economia, pois se estuda formas de se controlar as variáveis de um determinado problema com a intenção de achar a melhor solução, ou seja, a solução ótima.

A História da Ciência nos mostra que a procura de formas ótimas não é tão recente. Podemos encontrá-la por exemplo na lenda da Princesa Dido da Fenícia (século IX a.C.) como pode ser visto em [Vieira et al.2005], contada pelo poeta romano Virgílio (70 a.C. a 19 a.C.) em *Eneida*. Dido teve seu marido, o grande sacerdote Arquebas, assassinado pelo seu irmão Pigmalião, para subtrair-lhe seus tesouros. Temendo sua própria morte, Dido fugiu em um navio com um grande número de seguidores dispostos a fundar uma nova cidade chamada Cartago. Tentou comprar terras com o rei Jarbas da Numídia, para que pudessem se estabelecer. O que conseguiu foi que, só teria em terras o que pudesse abranger com a pele de um boi. Dido e seu povo então decidiram cortar a pele do boi em tiras bem finas, emendar todas e englobar num semicírculo um terreno às margens do Mediterrâneo. Foi provado matematicamente, veja [Vieira et al.2005], que sua decisão estava correta. Outro exemplo da busca pela otimalidade aparece no trabalho de um médico Português chamado Pedro Nunes, veja [Melo2000], que lecionou aulas de matemática na Universidade de Coimbra e em 1547 foi nomeado Cartógrafo-mor do rei D. João III. Ele foi o primeiro a perceber que se um navio se mantivesse em rota fixa não conseguiria navegar através de uma circunferência que é o caminho ótimo numa esfera, este devia seguir uma rota em espiral chamada loxodrómica *Tratado da esfera, 1537*. O trabalho de Pedro Nunes despertou curiosidades em outros matemáticos e seu tratamento pelo ótimo permitiu estabelecer a base da explosão de conhecimento durante a Revolução Científica do século XVII.

Fermat (1601-1665) era filho de um comerciante de couro. Se formou em Direito, e o exercício de sua profissão dava-lhe a oportunidade de estudar o que realmente gostava,

que era a Matemática. Por volta de 1629, Fermat fez uma grande descoberta que não foi publicada durante sua vida, que era sobre Método para achar Máximos e Mínimos de funções polinomiais. Ele descobriu uma forma para encontrar pontos de máximos e mínimos em curvas polinomiais $y = f(x)$ como pode ser notado em [Boyer1974]. Ele tomava x e um ponto vizinho $x + E$, e comparava as imagens $f(x)$ e $f(x + E)$. Em geral, dizia que esses pontos vão ser muito diferentes, porém em altos e em baixos de curvas lisas a variação é quase imperceptível. Logo para achar esses pontos de máximo e mínimo, igualava $f(x)$ e $f(x + E)$, dividia tudo por E e fazia $E = 0$. Os resultados lhe davam as abscissas dos pontos de máximo e mínimo do polinômio.

Na verdade seu método, equivale a achar nos dias de hoje

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x + E) - f(x)}{E} = 0.$$

Fermat também descobriu como aplicar seu processo de valores vizinhos para achar a tangente a uma curva algébrica da forma $y=f(x)$.

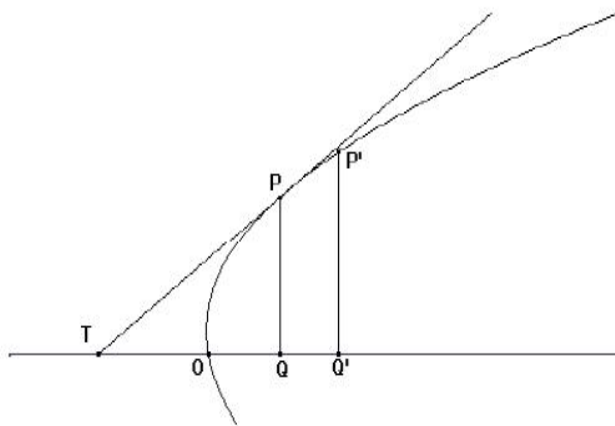


Figura 2.1: Método de Fermat para encontrar a tangente de uma curva algébrica.

Se P da figura (2.1) é o ponto da curva $y = f(x)$ em que se procura a tangente, e se as coordenadas de P são (a, b) , então o ponto vizinho da curva com coordenadas $x = a + E$, $y = f(a + E)$, estará tão perto da tangente que podemos considerar que estão sobre a tangente. Se temos $TQ = c$, os triângulos podem ser considerados praticamente semelhantes. Desta semelhança temos então,

$$\frac{b}{c} = \frac{f(a + E) - f(a)}{E}.$$

Multiplicando em cruz, cancelando os termos semelhantes, lembrando que $b=f(a)$, dividindo tudo por E e fazendo finalmente $E=0$, acha-se facilmente a subtangente c .

Nos dias de hoje, é equivalente a dizer que

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(a + E) - f(a)}{E},$$

o qual é a inclinação da reta tangente no ponto $x = a$.

Com base no seu trabalho anteriormente citado, pode-se concluir que, se temos um ponto de máximo ou mínimo, então, a inclinação da reta tangente nestes pontos tem que ser zero.

Ainda, em 1657 enunciou seu princípio, chamado Princípio de Fermat, o qual dizia que, a luz, ao propagar-se de um ponto para outro, escolhe o caminho para o qual o tempo de percurso é mínimo, mesmo que, para tal, se tenha que desviar relativamente do caminho mais curto.

Os problemas de máximos e mínimos de Fermat, acabaram por ser sistematizados com o advento do Cálculo pelas mãos de Newton e Leibniz. Isaac Newton, que nasceu em Londres em 1643 e viveu até 1727, era cientista, químico, físico, mecânico e matemático. Gottfried Wilhelm Leibniz que nasceu na Alemanha em 1646, e viveu até 1716, estudou Teologia, Direito, Filosofia e Matemática. Sabemos que, de forma independente, eles desenvolveram o que hoje é conhecido como Cálculo.

Em 1684, Leibniz publicou um novo método para encontrar máximos e mínimos e também tangentes de curvas algébricas. Neste, também deu as fórmulas para produtos, quocientes e potências(ou raízes) de derivadas, juntamente com suas aplicações geométricas. Dois anos mais tarde, publicou a explicação sobre a relação inversa entre diferenciação e integração.

Newton recorria a conceitos como infinitesimais que careciam de rigor, porém em 1687, ele publicou *Principia Mathematica*, onde foi o primeiro a reconhecer que o limite deveria ser o ponto de partida para problemas de tangência, quadratura (cálculo de áreas) e outros.

Como pode ser notado, Fermat quando descobriu o método para encontrar máximos, mínimos e tangentes em curvas algébricas ainda não tinha conhecimento sobre limite, mas com base em suas idéias junto as definições e notações de Newton e Leibniz, podemos enunciar que a Condição Necessária de Otimalidade, melhor dizendo, se x é um ponto de máximo ou mínimo local, então é necessário que

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x + E) - f(x)}{E} = f'(x) = 0,$$

ou seja, a inclinação da reta tangente em pontos de máximos ou mínimos é zero, como pode ser visto na figura(2.2).

Em 1696, Johann Bernoulli desafiou a comunidade matemática, mais precisamente Newton, pois era amigo de Leibniz, a resolver o Problema da Braquistócrona, que vem do grego, *bráquis* que significa menor e *cronos* que significa tempo.

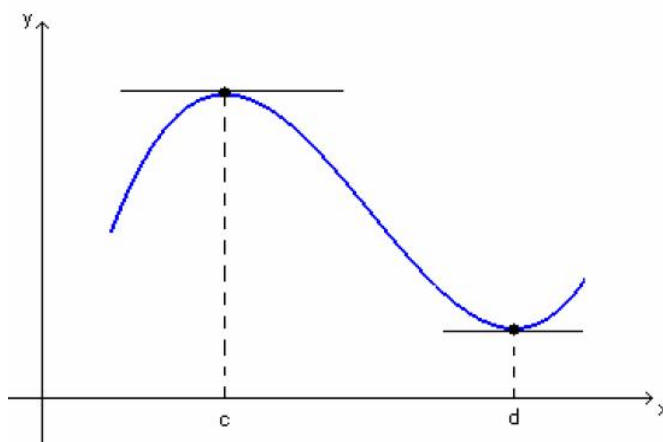


Figura 2.2: Inclinação nula da reta tangente em máximos e mínimos

O Problema era: dado dois pontos num plano vertical e em desnível A e B (isto é, a reta que os contém não está nem na horizontal e nem na vertical), qual é a curva que os liga de tal modo que uma partícula partindo do repouso do ponto mais alto A e deslizando sobre ela sem atrito, sob a ação da gravidade, gasta o menor tempo para atingir o ponto mais baixo B?

Bernoulli não foi o primeiro a propor este problema. Em 1638 Galileu estudou-o no seu famoso trabalho *Discourse on two new science*. Neste, Galileu propôs que um arco de circunferência seria a solução, no entanto, como veremos, a solução de Galileu estava errada pois, ao invés de um arco de circunferência, a solução correta seria um arco de cicloide.

Em maio de 1697 foram publicadas quatro soluções, cujos autores eram o próprio Bernoulli, seu irmão mais velho Jacob Bernoulli, Leibniz e Newton. Todos mostraram que a solução era um arco de cicloide. Johann Bernoulli é considerado o primeiro a resolver este problema, ele baseava-se no Princípio de Fermat .

Imaginava que a partícula era um raio de luz, e este sofria um pequeno desvio e mudava sua velocidade ao passar em cada camada (meio) com densidade diferente.

Assim, fazendo com que a espessura das camadas sejam cada vez menores, figura (2.3), então, o número de camadas aumentará infinitamente, e o trajeto feito pelo raio de luz será a curva Braquistócrona. O vetor velocidade $\vec{v}$ da partícula tangente à curva procurada está bem definido, figura (2.4).

Valerá então, a lei do físico Holandês Snell(1591-1626) [Vieira et al.2004], que em 1621 equacionou a relação entre os diferentes ângulos em que a luz passa de um meio transparente a outro:

$$\frac{v}{\sin \alpha} = K,$$

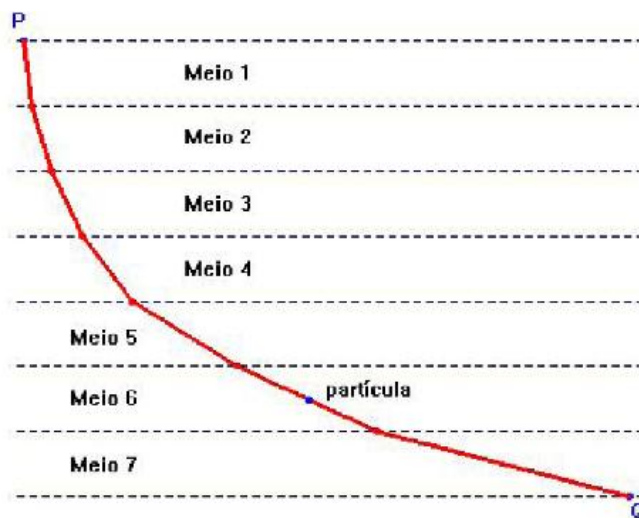


Figura 2.3: Raio de luz ao atravessar meios com densidades diferentes.

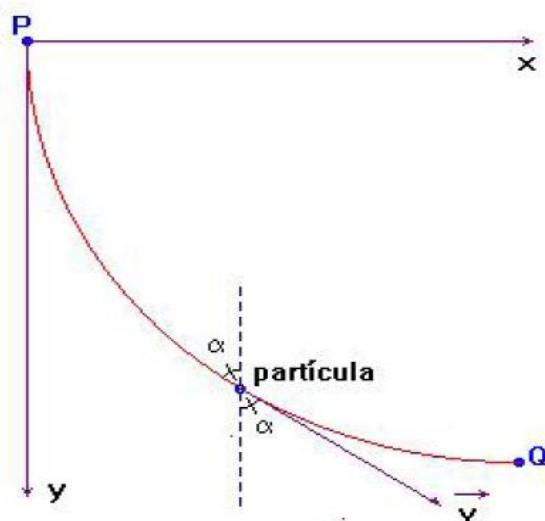


Figura 2.4: Vetor velocidade da partícula tangente a braquistócrona.

onde

K = constante,

v = vetor velocidade,

α = ângulo de incidência do raio de luz no meio.

Tomando o comprimento do raio de luz (Δs) e suas projeções (Δx) e (Δy) paralelos aos eixos coordenados, como na figura (2.5), teremos

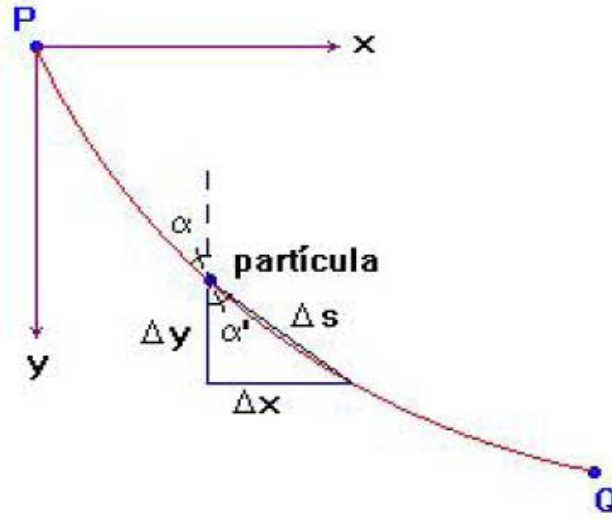


Figura 2.5: Comprimento do raio de luz e suas projeções.

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2,$$

$$\sin \alpha' = \frac{\Delta x}{\Delta s}.$$

Fazendo $\Delta s \rightarrow 0$ temos $\alpha' \rightarrow \alpha$

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,$$

e

$$\sin \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} = \frac{dx}{dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}. \quad (2.1)$$

Pela Lei de conservação de energia, temos

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2,$$

então

$$v = \sqrt{2gy}. \quad (2.2)$$

Substituindo (2.1) e (2.2) na equação de Snell, teremos

$$\frac{v}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2gy}}{\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}} = K,$$

logo

$$\begin{aligned} y(1 + (y')^2) &= c^2, \\ \Rightarrow y' &= \sqrt{\frac{c^2}{y} - 1}. \end{aligned}$$

Agora, basta resolver a equação diferencial não linear.

Fazendo a mudança de variável $y = c^2 \sin^2 \Theta$, teremos

$$y' = \sqrt{\frac{c^2}{c^2 \sin^2 \Theta} - 1} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \Theta}{\sin^2 \Theta}} = \cot \Theta,$$

isto é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta}.$$

Como

$$y = c^2 \sin^2 \Theta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2c^2 \sin \Theta(x) \cos \Theta(x) \frac{d\Theta}{dx},$$

assim

$$\frac{\cos \Theta(x)}{\sin \Theta(x)} = 2c^2 \sin \Theta(x) \cos \Theta(x) \frac{d\Theta}{dx}$$

então

$$2c^2 \sin^2 \Theta(x) d\Theta = dx.$$

Fazendo ainda a mudança de variável $2\Theta = w$

$$2\Theta(x) = w(x) \Rightarrow \Theta(x) = \frac{w(x)}{2}$$

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{dw}{2dx} \Rightarrow d\Theta = \frac{dw}{2},$$

assim

$$2c^2 \sin^2\left(\frac{w}{2}\right) \frac{dw}{2} = dx$$

$$\Rightarrow c^2 \sin^2\left(\frac{w}{2}\right)dw = dx$$

$$\Rightarrow \int c^2 \sin^2\left(\frac{w}{2}\right)dw = \int dx$$

$$\Rightarrow \int c^2 \frac{1 - \cos w}{2} dw = x + d$$

$$\Rightarrow \int \frac{c^2}{2} dw - \int \frac{c^2 \cos w}{2} dw = x + d$$

$$\Rightarrow (w - \sin w) \frac{c^2}{2} = x + d.$$

Quando $x = 0$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c^2 \sin^2 \Theta(0) = 0$$

assim

$$\Theta(0) = 0 \Rightarrow \frac{w(0)}{2} = 0$$

então

$$w(0) = 0.$$

Logo $d = 0$, e concluimos

$$x = \frac{c^2}{2}(w - \sin w).$$

Como $y = c^2 \sin^2 \Theta$

$$\begin{aligned} y &= c^2 \sin^2\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= c^2 \left(\frac{1 - \cos w}{2}\right) \\ &= \frac{c^2}{2}(1 - \cos w), \end{aligned}$$

assim a curva “ótima” será um arco de cicloide.

O Matemático francês Lagrange descartou os argumentos geométricos de Euler e dos irmãos Bernoulli para a resolução do problema da braquistócrona, por métodos mais analíticos.

Considerava o problema, dentre todas as curvas diferenciais $y : t \in [x_0, x_1] \mapsto y(t) \in \mathbb{R}^n$ com extremos pré-fixados $y(x_0) = y_i, y(x_1) = y_f$ qual era a que minimizava $L(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(t, y(t), y'(t)) dt$.

Considerou $\bar{y}(t)$ a curva ótima e tomou variações nela da forma $y(t) = \bar{y}(t) + \epsilon h(t)$ onde $h(t)$ tem sua primeira derivada contínua, ou seja, $h(t)$ de classe C^1 com $h(x_0) = h(x_1) = 0$.

Tomou $y(t)$ no funcional, tendo

$$\int_{x_0}^{x_1} L(t, y(t), y'(t)) dt = \int_{x_0}^{x_1} L(t, \bar{y}(t) + \epsilon h(t), \bar{y}'(t) + \epsilon h'(t)) dt = g(\epsilon).$$

Quando $\epsilon = 0$, então $y(t) = \bar{y}(t)$, assim $g(\epsilon)$ é uma função no qual $\epsilon = 0$ é um ponto de mínimo local. Portanto, pela condição de otimalidade $g'(0) = 0$. Assim

$$\begin{aligned} g'(\epsilon) &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\epsilon} L(t, \bar{y}(t) + \epsilon h(t), \bar{y}'(t) + \epsilon h'(t)) dt \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [L_y(t, \bar{y}(t) + \epsilon h(t), \bar{y}'(t) + \epsilon h'(t)) h(t) + L_{y'}(t, \bar{y}(t) + \epsilon h(t), \bar{y}'(t) + \epsilon h'(t)) h'(t)] dt, \end{aligned}$$

então

$$g'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [L_y(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) h(t) + L_{y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) h'(t)] dt = 0.$$

Integrando por partes o segundo termo da integral

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} L_{y'}(t, y(t), \bar{y}'(t)) h'(t) dt &= L_{y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) h(t) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dt} (L_{y'}(t, y(t), \bar{y}'(t)) h(t)) dt \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dt} (L_{y'}(t, y(t), \bar{y}'(t)) h(t)) dt, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} g'(0) &= \int_{x_0}^{x_1} [L_y(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) h(t) - \frac{d}{dt} (L_{y'}(t, y(t), \bar{y}'(t)) h(t))] dt \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [L_y(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) - \frac{d}{dt} (L_{y'}(t, y(t), \bar{y}'(t)))] h(t) dt = 0, \end{aligned}$$

usando o Lema (2.2) dado a seguir, teremos

$$L_y(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) - \frac{d}{dt} L_{y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) = 0, \quad \forall t \in [x_0, x_1]. \quad (2.3)$$

A equação 2.3 é conhecida como Equação de Euler- Lagrange, [Rafikov and de Araújo1995], [Kamien and Schwartz1991]), pois Euler encontrou o método geral de solução e Lagrange lhe deu a forma definitiva. Em uma carta escrita a Euler, Lagrange sugeriu o nome Cálculo das Variações, cuja teoria é mantida até os dias de hoje.

Devemos ressaltar que a equação de Euler- Lagrange é análoga à equação $f'(x) = 0$ do cálculo clássico, pois ambas determinam os candidatos de máximos ou mínimos dos seus respectivos problemas.

Para garantirmos que o extremo encontrado é um mínimo (máximo) do problema, usamos as condições de segunda ordem. No cálculo clássico por exemplo, se $f'(x) = 0$ e $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), então x é um ponto de mínimo (máximo) do problema. Em cálculo das variações teremos um resultado semelhante. Acima, afirmamos que para termos um candidato a mínimo então

$$g'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [L_y(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t))h(t) + L_{y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t))h'(t)]dt = 0. \quad (2.4)$$

Se $\bar{y}(t)$ realmente minimiza 2.4 então também é necessário que

$$g''(0) = \int_{x_0}^{x_1} [L_{yy}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t))h^2(t) + 2L_{yy'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t))h(t)h'(t) + L_{y'y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t))(h')^2(t)]dt > 0. \quad (2.5)$$

A equação 2.5 realmente será não negativa se L é convexa em $(y, \bar{y}(t))$, veja [Kamien and Schwartz1991]. Porém, para muitos problema de nosso interesse, L não será convexa em $(y, \bar{y}(t))$. Então a *Condição de Legendre* requer que o integrando seja localmente convexo em $\bar{y}(t)$ ao longo da curva ótima.

Se integrarmos o termo do meio da equação 2.5, ou seja, tomaremos $z = L_{yy'}$ e $dv = 2hh'$, então $dz = (\frac{d}{dt} L_{yy'})$ e $v = h^2$. Então

$$\int_{x_0}^{x_1} 2L_{yy'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t))h(t)h'(t)dt = - \int_{x_0}^{x_1} h^2(t) \left(\frac{d}{dt} L_{yy'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) \right) dt, \quad (2.6)$$

pois $h(x_0) = h(x_1) = 0$. Substituindo 2.6 em 2.5 teremos

$$g''(0) = \int_{x_0}^{x_1} [(L_{yy}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) - \frac{d}{dt} L_{yy'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)))h^2(t) + L_{y'y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t))(h')^2(t)]dt > 0. \quad (2.7)$$

Pelo lema(2.3) concluímos que

$$L_{y'y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) \geq 0, \quad (2.8)$$

caso estejamos interessados na não positividade de 2.7, então 2.8 deve ser menor ou igual a zero.

Logo se $\bar{y}(t)$ satisfaz a equação de Euler 2.3 e também a condição de Legendre 2.8, então $\bar{y}(t)$ é a curva mínima.

Lemas utilizados na dedução da equação de Euler-Lagrange e na dedução da Condição de Legendre, [Kamien and Schwartz1991], [Baumeister and Leitão2008]):

Lema 2.1 *Seja $f(t)$ pertencente a classe das funções contínuas em $[x_0, x_1]$ ($f(t) \in C[x_0, x_1]$) tal que*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t)h'(t)dt = 0,$$

para todo $h(t) \in C_0^1 := \{w \in C^1[x_0, x_1] / w(x_0) = w(x_1) = 0\}$. Então a função $f(t)$ é constante no intervalo $[x_0, x_1]$.

Demonstração: Definamos a função $h(t) := \int_{x_0}^t (f(s) - c)ds$ com $t \in [x_0, x_1]$ e $c \in R$. Por construção, temos que $h(t) \in C^1[x_0, x_1]$, pois $h'(t) = (f(s) - c)$ que é continua por hipótese, e ainda $h(x_0) = 0$ pois $h(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} (f(s) - c)ds = 0$. Tomemos a escolha particular $\bar{c} := 1/(x_1 - x_0) \int_{x_0}^{x_1} f(s)ds$ que nos gera uma função $\bar{h}(t)$ que como já vimos $\bar{h}(t) \in C^1[x_0, x_1]$, $\bar{h}(x_0) = 0$ e ainda $\bar{h}(x_1) = 0$, pois $\bar{h}(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} (f(s) - (1/(x_1 - x_0) \int_{x_0}^{x_1} f(s)ds))ds = \int_{x_0}^{x_1} f(s)ds - \int_{x_0}^{x_1} 1/(x_1 - x_0)ds \int_{x_0}^{x_1} f(s)ds = \int_{x_0}^{x_1} f(s)ds - \int_{x_0}^{x_1} f(s)ds = 0$. Assim $\bar{h}(t)$ assume todas as hipóteses do nosso lema, então

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{x_0}^{x_1} (f(t) - \bar{c})^2 dt = \int_{x_0}^{x_1} (f(t) - \bar{c})\bar{h}'(t)dt \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f(t)\bar{h}'(t)dt - [\bar{c}\bar{h}(t)]_{x_0}^{x_1} = 0, \end{aligned}$$

pois por hipótese temos que $\int_{x_0}^{x_1} f(t)\bar{h}'(t)dt = 0$ e ainda $\bar{h}(x_0) = \bar{h}(x_1) = 0$.

Chegamos então que $\int_{x_0}^{x_1} (f(t) - \bar{c})dt = 0$, assim provamos que $f(t) = \bar{c}$, para $t \in [x_0, x_1]$.

Lema 2.2 *Seja $f(t)$ pertencente a classe das funções contínuas em $[x_0, x_1]$ ($f(t) \in C[x_0, x_1]$); $\forall h(t) \in C^1[x_0, x_1]$, $h(x_0) = h(x_1) = 0$ tenhamos $\int_{x_0}^{x_1} f(t)h(t)dt = 0$, então $f(t) \equiv 0$ em $[x_0, x_1]$.*

Demonstração: Definimos primeiramente $g(t) := \int_{x_0}^t f(s)ds$. Integraremos por partes a nossa hipótese

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(t)h(t)dt &= [h(t)g(t)]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} g(t)h'(t)dt \\ &= - \int_{x_0}^{x_1} g(t)h'(t)dt, \quad \forall h(t) \in C_0^1[x_0, x_1]. \end{aligned}$$

O lema (2.1) implica que $g(t) = c$, $t \in [x_0, x_1]$. O lema (2.2) segue agora da identidade $g'(t) = f(t)$, assim $f(t) \equiv 0$.

Lema 2.3 *Seja $P(t)$ e $Q(t)$ funções contínuas em $[x_0, x_1]$ e tomemos o funcional quadrático*

$$\int_{x_0}^{x_1} [P(t)(h'(t))^2 + Q(t)(h(t))^2]dt \quad (2.9)$$

definido para toda função continuamente diferenciável $h(t)$ em $[x_0, x_1]$ desde que $h(x_0) = h(x_1) = 0$. A condição necessária para que a equação 2.9 seja não positiva (não negativa) para todo h é que $P(t) \leq 0$ ($P(t) \geq 0$), $x_0 \leq t \leq x_1$.

Demonstração: Suponhamos por contradição que para algum s pertencente ao intervalo $[x_0, x_1]$ vai existir algum $b > 0$ tal que $P(s) = 2b > 0$. Como P é contínuo, então existe uma vizinhança de s tal que P excede b . Assim, existe $c > 0$ tal que,

$$x_0 \leq s - c < s < s + c \leq x_1 \quad e \quad P(t) > b, \quad \text{para } s - c \leq t \leq s + c.$$

Correspondente a esta função P , contruímos uma função particular $h(t)$ continuamente diferenciável da forma

$$h(t) = \begin{cases} \sin^2 \pi(t - s)/c, & s - c \leq t \leq s + c \\ 0, & \text{em outros pontos.} \end{cases}$$

Então

$$h'(t) = (\pi/c)2\sin\theta\cos\theta = (\pi/c)\sin 2\theta, \quad \theta = \pi(t - s)/c.$$

Como $h(t)$ satisfaz todos os requerimentos, então

$$\int_{x_0}^{x_1} [P(h')^2 + Qh^2]dt = \int_{s-c}^{s+c} P(\pi/c)^2 \sin^2 2\theta dt + \int_{x_0}^{x_1} Q \sin^4 \theta dt. \quad (2.10)$$

Como $P(t) > b$ em $s - c \leq t \leq s + c$, temos que

$$\int_{s-c}^{s+c} P(\pi/c)^2 \sin^2 2\theta dt \geq \int_{s-c}^{s+c} b(\pi/c)^2 \sin^2 2\theta dt = \int_{-\pi}^{\pi} b(\pi/c) \sin^2(2\theta)(c/\pi) d\theta = b\pi^2/c. \quad (2.11)$$

Ainda temos que Q é contínua em um intervalo fechado $[s - c, s + c]$, então existe algum M tal que $-M \leq Q(t) \leq M$ para $s - c \leq t \leq s + c$. Logo

$$\int_{s-c}^{s+c} Q \sin^4 \theta dt \geq \int_{s-c}^{s+c} -M \sin^4 \theta dt = \int_{s-c}^{s+c} -M \sin^4(\pi(t-s)/c) dt = -\frac{3}{4}Mc. \quad (2.12)$$

Assim, substituindo 2.12 e 2.11 em 2.10 teremos

$$\int_{x_0}^{x_1} [P(h')^2 + Qh^2]dt \geq b\pi^2/c - \frac{3}{4}Mc, \quad (2.13)$$

como c pode ser tão pequeno quanto se queira, logo $b\pi^2/c - \frac{3}{4}\pi c > 0$.

Teremos de 2.13 que

$$\int_{x_0}^{x_1} [P(h')^2 + Qh^2]dt > 0, \quad (2.14)$$

o que contradiz a hipótese.

Portanto teremos que a equação 2.9 será não positiva para qualquer $h(t)$ admissível somente se $P(t) \leq 0$ em $x_0 \leq t \leq x_1$.

Os problemas de Controle foram apresentados aos matemáticos, devido ao avanço tecnológico, mais especificamente a corrida espacial entre os Estados Unidos da América e Ex-União Soviética. Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze e Mischenko estabeleceram condições necessárias para otimalidade, hoje denominado Princípio do Máximo de Pontryagin. A natureza dessas condições e a forma das soluções ótimas eram muito diferentes dos problemas clássicos do cálculo das variações, com isso, os cientistas da época passaram a dizer que um novo cálculo variacional tinha sido inventado. Mas em 1962 Dubovitskii e Milyutin encontraram uma teoria de condições necessárias para otimalidade em espaços abstratos, assim, podendo deduzir quase todos os resultados de condições de otimalidade, logo unificando novamente ao cálculo das variações. Estes resultados, mais precisamente o Teorema

de Duboviskii-Milyutin é usado na demonstração do Princípio do Mínimo (Máximo) de Pontryagin, veja por exemplo [Baumeister and Leitão2008], [Girsanov1972].

2.2 Princípio do Mínimo de Pontryagin no caso mais simples

O Princípio do mínimo ou máximo de Pontryagin é muito importante em controle ótimo, pois nos fornece condições necessárias de otimalidade nos moldes da equação $f'(x) = 0$ do cálculo clássico e da equação de Euler-Lagrange no cálculo das variações e através destas podemos resolver problemas em formas explícitas e em outros casos reduzir o nosso problema a problemas mais simples.

Sabemos que os problemas de Controle ótimo são mais gerais que os problemas de Cálculo das Variações. Assim, todo problema de cálculo variacional pode ser transformado em um de controle, porém, o inverso nem sempre é possível.

O caso que será apresentado abaixo, se encaixa na família do Cálculo das Variações, então, a maneira para encontrar condições necessárias para este problema será semelhante ao usado anteriormente para encontrar a equação de Euler-Lagrange, que é a condição necessária do problema do cálculo variacional.

Consideremos o problema (2.15), onde, devemos encontrar uma função controle $u(t)$, contínua por partes em $[t_0, t_1]$, que

$$\text{minimize } J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.15)$$

sujeito à

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad (2.16)$$

$$x(t_0) = x_0 \text{ e } x(t_1) \text{ livre} \quad (2.17)$$

$u(t)$ não restringido, t_0 e t_1 especificados.

Este é considerado um Problema de Controle Ótimo e a variável de estado $x(t)$ dependerá da variável de controle $u(t)$. As funções f, g são continuamente diferenciáveis em x, u para todo t . Este problema se encaixa nos problemas de cálculo das variações, porém, em controle existe a dificuldade de explicitar $x(t)$, pois $x(t)$ muda ao longo do tempo, de acordo com a equação diferencial (2.16).

Para encontrarmos as condições necessárias do problema (2.15) à (2.17), precisaremos de alguns conceitos.

Temos que o espaço vetorial das funções contínuas $C[t_0, t_1]$ é completo (espaço de Banach)

com a norma do supremo, definida por

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{t \in [t_0, t_1]} \{|f(t)|\}, f \in C[t_0, t_1].$$

Esta norma induz a métrica

$$\text{dist}(f, g) = \|f - g\|_{\infty}, \quad \forall f, g \in C[t_0, t_1].$$

Analogamente podemos construir uma métrica para o conjunto das funções continuamente diferenciáveis ($C^1[t_0, t_1]$)

$$\|f - g\|_{1, \infty} = \|f - g\|_{\infty} + \|f' - g'\|_{\infty}, \quad \forall f, g \in C^1[t_0, t_1].$$

Definição 2.1 : $\bar{x}(t)$ pertencente ao conjunto das funções admissíveis (X_{ad}), ou seja, satisfaz as condições 2.16-2.17, é denominado *mínimo local fraco* de J , quando

$$\exists \delta > 0; \quad \forall x(t) \in X_{ad}, \quad \|x(t) - \bar{x}(t)\|_{1, \infty} < \delta, \quad \text{temos} \quad J(x(t)) \geq J(\bar{x}(t)).$$

Então uma função $x(t)$ com gráfico dado na figura (2.6), não se encaixaria na definição (2.1).

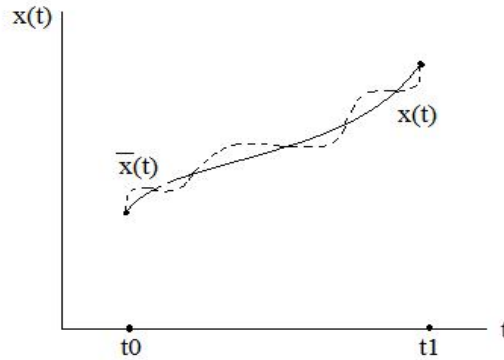


Figura 2.6: Variação na curva $x(t)$ de estado em torno de $\bar{x}(t)$

Definição 2.2 *Método dos multiplicadores de Lagrange:* Sendo f e suas m restrições g de classe C^1 tal que $\Delta g \neq 0$. Se f tiver um extremo relativo dentro de suas restrições, esse ponto ocorre em um ponto $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, tal que P pertença a uma superfície de restrição

de f na qual os gradientes $\nabla f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ e $\nabla g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ são paralelos, ou seja, existe um λ , tal que

$$\nabla f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \lambda \nabla g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

Aplicando o Método dos Multiplicadores de Lagrange no Problema (2.15–2.17), transformaremos (2.15–2.17) em um problema sem restrição, onde $\lambda(t)$ é uma função continuamente diferenciável em $[t_0, t_1]$ pois a restrição (2.16) tem que ser satisfeita para todo t no intervalo $[t_0, t_1]$.

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x(t), u(t)) - \lambda(t)x'(t) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))]dt. \quad (2.18)$$

Como a condição (2.16) é satisfeita para todo t , temos então que $J = \bar{J}$ independente de $\lambda(t)$. Logo podemos pensar no problema de maximizar $\bar{J}$ ao invés de J .

Por conveniência assumiremos

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t)),$$

chamada função Hamiltoniana. Integrando por partes seu último termo, temos:

$$z = \lambda(t) \quad dz = \lambda'(t)dt,$$

$$v = x(t) \quad dv = x'(t)dt,$$

então

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)g(t, x(t), u(t))dt &= \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)x'(t)dt \\ &= \lambda(t)x(t)|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} x(t)\lambda'(t)dt = \lambda(t)x(t)|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} x(t)\lambda'(t)dt, \end{aligned}$$

substituindo esta integração e a função Hamiltoniana na equação (2.18) teremos

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \int_{t_0}^{t_1} [(f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t)) - \lambda(t)x'(t))]dt \\ &= (\lambda(t_0)x(t_0) - \lambda(t_1)x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} [(H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) + x(t)\lambda'(t))]dt. \end{aligned}$$

Sendo $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ o mínimo local fraco de $\bar{J}$, onde $\bar{u}(t)$ é o controle ótimo e $\bar{x}(t)$ é estado correspondente, determinado pela restrição (2.16) e a condição inicial (2.17).

Dado $h(t) \in C^1[t_0, t_1]$ e $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, definimos a família de funções

$$u(t) = \bar{u}(t) + \epsilon h(t), \quad \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0).$$

Temos que para $u(t)$ dada acima, teremos a variável de estado correspondente, porém a variável de estado é dada implicitamente por (2.16), então a representaremos por $y(t, \epsilon)$.

Podemos notar, que quando $\epsilon = 0$ teremos $u(t) = \bar{u}(t)$, ou seja, o controle ótimo, cuja correspondente variável de estado é $\bar{x}(t)$, então

$$y(t, 0) = \bar{x}(t).$$

E ainda tem que satisfazer a condição (2.17), então

$$y(t_0, \epsilon) = x_0, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Substituindo $u(t)$ e sua correspondente $y(t, \epsilon)$ em $\bar{J}$ teremos

$$\bar{J}(\epsilon) = \lambda(t_0)y(t_0, \epsilon) - \lambda(t_1)y(t_1, \epsilon) + \int_{t_0}^{t_1} [(H(t, y(t, \epsilon), \bar{u}(t) + \epsilon h(t), \lambda(t)) + y(t, \epsilon)\lambda'(t))] dt \quad (2.19)$$

Como $\bar{u}(t)$ é o controle mínimo, ou seja, o ótimo, então a função $\bar{J}(\epsilon)$, assume seu mínimo em $\epsilon = 0$, assim pelo condição de otimalidade, teremos que $\bar{J}'(0) = 0$. Assim

$$\bar{J}'(\epsilon) = \lambda(t_0)y_\epsilon(t_0, \epsilon) - \lambda(t_1)y_\epsilon(t_1, \epsilon) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\epsilon} [(H(t, y(t, \epsilon), \bar{u}(t) + \epsilon h(t), \lambda(t)) + y(t, \epsilon)\lambda'(t))] dt, \quad (2.20)$$

como

$$\frac{d}{d\epsilon} [(H(t, y(t, \epsilon), \bar{u} + \epsilon h, \lambda))] = \frac{\partial H}{\partial t} \frac{dt}{d\epsilon} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{d\epsilon} + \frac{\partial H}{\partial u} \frac{du}{d\epsilon} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d\epsilon},$$

então

$$\bar{J}'(\epsilon) = \lambda(t_0)y_\epsilon(t_0, \epsilon) - \lambda(t_1)y_\epsilon(t_1, \epsilon) + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H}{\partial u} h(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \lambda'(t) \right) y_\epsilon \right].$$

Notamos que agora estamos omitindo as variáveis de H para uma simplificação da notação. Calculando para $\epsilon = 0$, temos

$$J'(0) = -\lambda(t_1)y_\epsilon(t_1, 0) + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H}{\partial u} h(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \lambda'(t) \right) y_\epsilon(t, \epsilon) \right] dt = 0. \quad (2.21)$$

Como fica difícil a determinação de y_ϵ , então escolheremos $\lambda(t)$ de forma que não precisemos explicitá-lo. Logo

$$\lambda(t_1) = 0, \quad \lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Sobrando então

$$J'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial H}{\partial u} h(t) \right) dt = 0, \quad \forall h(t).$$

Como $\bar{J}'(0) = 0 \quad \forall h(t)$, então escolheremos $h(t) = \frac{\partial H}{\partial u}$

então

$$J'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^2 dt = 0.$$

Assim podemos concluir que

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Resumindo, obtemos as seguintes condições necessárias para o problema 2.15-2.17,

1. $x'(t) = g(t, x(t), u(t))$, equação de estado;
2. $x(t_0) = x_0$, condição no tempo inicial;
3. $\lambda'(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial x}$, equação adjunta
4. $\lambda(t_1) = 0$, condição no tempo final;
5. $0 = \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial u}$, equação de otimalidade.

2.3 Princípio do Máximo mais geral e alguns casos especiais

Para encontrarmos as condições necessárias dos problemas de controle usados anteriormente, partimos do pressuposto de que as variações em torno da trajetória ótima eram pequenas no sentido de que $|\bar{u}(t) - u(t)| < \epsilon$ e ainda $|\bar{u}'(t) - u'(t)| < \epsilon$ para ϵ suficientemente pequeno. É claro, que estas suposições implicam que as soluções achadas pelas condições necessárias não admitem descontinuidade.

Achar condições necessárias com suposições menos restritas é uma tarefa muito difícil. Por exemplo, se só supormos que $|\bar{u}(t) - u(t)| < \epsilon$ é possível estabelecer uma condição que deve ser satisfeita nos pontos em que a derivada é descontínua. Mas não nos prenderemos neste caso, pois, consideraremos uma situação mais geral onde a variável $u(t)$ pode ser contínua por partes e ainda é restringida. Neste caso, as condições necessárias são conhecidas como Princípio do Máximo de Pontryagin.

Para encontrarmos estas condições, consideraremos o seguinte caso

$$\max J = F(x(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.22)$$

sujeito à

$$\begin{aligned} x'(t) &= g(t, x(t), u(t)), & x(t_0) &= x_0 \\ u(t) &\in U. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Podemos notar que, a diferença entre este modelo e os usados anteriormente (caso mais simples), é que neste temos que $u(t)$ é restringido, logo, as variações que consideraremos em torno de uma trajetória ótima $\bar{u}(t)$ não podem ser arbitrárias, já que devem pertencer a U . Este é o motivo pelo qual não podemos usar o mesmo modo para encontrar condições

necessárias dos problemas de controle anteriores, pois, era a arbitrariedade da variação $|\bar{u}(t) - u(t)| = \delta u = |\epsilon| \|h(t)\|$ que nos permitia concluir que o ótimo devia cumprir

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

A equação acima não será necessariamente válida se existir restrição sobre $u(t)$, porém o princípio do máximo nos oferece uma nova condição que deve ser satisfeito neste caso.

Uma outra diferença encontrada neste problema é que, além da variável $u(t)$, poder ser parcialmente contínua, temos ainda que o estado $x(t)$ é diferenciável por partes no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$. Enquanto as funções f e g devem ser contínuas com respeito a u , e de classe (C^1) com respeito a x . Como pode ser notado, estas suposições são menos restritivas que as requeridas anteriormente.

Novamente usaremos o Teorema de Lagrange no problema (2.22 – 2.23), assim

$$\bar{J} = F(x(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t)) - \lambda(t)x'(t)]dt, \quad (2.24)$$

notemos que, $\bar{J} = J$ pois (2.23) tem que ser satisfeito para todo t .

Integrando parcialmente o último termo de $\bar{J}$

$$z = \lambda(t) \quad dz = \lambda'(t)dt,$$

$$v = x(t) \quad dv = x'(t)dt,$$

então

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)x'(t)dt &= -\lambda(t)x(t)|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} x(t)\lambda'(t)dt \\ &= \lambda(t_0)x(t_0) - \lambda(t_1)x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} x(t)\lambda'(t)dt, \end{aligned} \quad (2.25)$$

assim, substituindo (2.25) em (2.24) teremos

$$\bar{J} = F(x(t_1), t_1) + \lambda(t_0)x(t_0) - \lambda(t_1)x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t)) + x(t)\lambda'(t)]dt.$$

Tomando por conveniência

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t)),$$

assim

$$\bar{J} = F(x(t_1), t_1) + \lambda(t_0)x(t_0) - \lambda(t_1)x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) + x(t)\lambda'(t)]dt. \quad (2.26)$$

Suporemos que $\bar{u}(t) \in U$ é o controle ótimo e que $\bar{x}(t)$ é o correspondente vetor estado determinado por (2.23). Consideremos agora, uma pequena variação em torno da trajetória ótima $\bar{u}(t)$. Neste caso, consideraremos a variação em $u(t)$ da forma

$$\int_{t_0}^{t_1} |\bar{u}(t) - u(t)|dt < \epsilon, \quad (2.27)$$

com ϵ pequeno. A equação (2.27) é muito diferente da variação que usamos nos problemas anteriores, pois neste caso $\bar{u}(t)$ pode se distanciar bastante de $u(t)$, desde que isso ocorra num intervalo pequeno de tempo da variação total, figura (2.7).

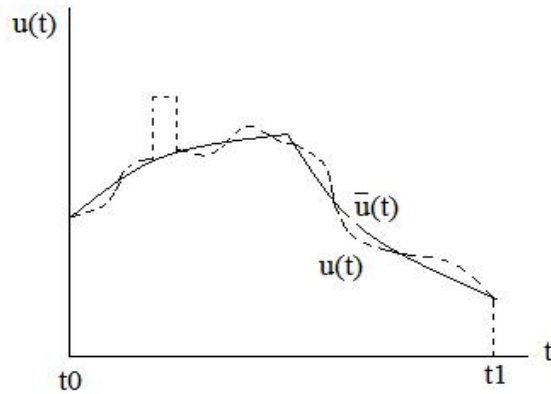


Figura 2.7: Variação de $u(t)$ em torno do controle ótimo $\bar{u}(t)$

Substituindo agora o novo vetor $u(t) = \bar{u}(t) + \delta u(t)$, próximo de $\bar{u}(t)$ no sentido de (2.27),

veremos qual mudança este causa em (2.26). É claro que também teremos uma modificação em $\bar{x}(t)$, que denotaremos por $\bar{x}(t) + \delta x(t)$, assim a variação $\delta \bar{J}$ será

$$\begin{aligned}
\delta \bar{J} &= \bar{J}(\bar{x}(t) + \delta x(t), u(t), t) - \bar{J}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) \\
&= F(\bar{x}(t_1) + \delta x(t_1), t_1) - F(\bar{x}(t_1), t_1) - \lambda(t) \bar{x}(t)|_{t_0}^{t_1} - \lambda(t) \delta x(t)|_{t_0}^{t_1} \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} [H(\bar{x} + \delta x, u, t, \lambda) + \lambda'(t) \bar{x} + \lambda'(t) \delta x] dt + \lambda(t) \bar{x}(t)|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} [H(\bar{x}, \bar{u}, t, \lambda) + \lambda'(t) \bar{x}(t)] dt \\
&= F(\bar{x}(t_1) + \delta x(t_1), t_1) - F(\bar{x}(t_1), t_1) + \lambda(t_0) \delta x(t_0) - \lambda(t_1) \delta x(t_1) \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} [H(\bar{x}(t) + \delta x(t), u(t), t, \lambda(t)) - H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \lambda(t)) + \lambda'(t) \delta x(t)] dt,
\end{aligned}$$

como $x(t_0) = x_0 \Rightarrow \delta x(t_0) = 0$, assim

$$\begin{aligned}
\delta \bar{J} &= F(\bar{x}(t_1) + \delta x(t_1), t_1) - F(\bar{x}(t_1), t_1) - \lambda(t_1) \delta x(t_1) \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} [H(\bar{x}(t) + \delta x(t), u(t), t, \lambda(t)) - H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \lambda(t)) + \lambda'(t) \delta x(t)] dt.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Sabemos que o Hamiltoniano H e F são diferenciáveis com respeito a x , podemos então aproximar a equação (2.28) em torno da solução ótima, mediante ao Teorema de Taylor.

$$H(\bar{x}(t) + \delta x(t), u(t), t, \lambda(t)) \simeq H(\bar{x}(t), u(t), t, \lambda(t)) + \frac{\partial H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \lambda(t))}{\partial x} \delta x(t),$$

e

$$F(\bar{x}(t_1) + \delta x(t_1), t_1) \simeq F(\bar{x}(t_1), t_1) + \frac{\partial F(\bar{x}(t_1), t_1)}{\partial x} \delta x(t_1)$$

logo

$$\delta \bar{J} \simeq \left(\frac{\partial F(\bar{x}(t_1), t_1)}{\partial x} - \lambda(t_1) \right) \delta x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial H(\bar{x}, \bar{u}, t, \lambda)}{\partial x} + \lambda'(t) \right) \delta x(t) + H(\bar{x}, u, t, \lambda) - H(\bar{x}, \bar{u}, t, \lambda) \right] dt. \quad (2.29)$$

Escolheremos $\lambda(t)$ de forma que não precisemos explicitar a variação no vetor estado

$$\begin{aligned} \lambda(t_1) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x(t_1), t_1) \\ \lambda'(t) &= - \frac{\partial H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \lambda(t))}{\partial x}, \end{aligned}$$

assim ficando

$$\delta \bar{J} \simeq \int_{t_0}^{t_1} [H(\bar{x}(t), u(t), t, \lambda(t)) - H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \lambda(t))] dt. \quad (2.30)$$

Como $\bar{u}(t)$ é o controle ótimo, então $\delta \bar{J} \leq 0$, caso contrário existiria um novo vetor $u(t)$ e um $\bar{x}(t) + \delta x(t)$ que quando aplicado em $\bar{J}$ nos daria um valor maior de que quando $\bar{J}$ aplicado em $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$. Assim, esta observação nos permite concluir que uma condição para $u(t)$ ótimo é que, para cada valor de $t \in [t_0, t_1]$ se cumpra

$$H(\bar{x}(t), u(t), t, \lambda(t)) \leq H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \lambda(t)), \quad \forall u \in U. \quad (2.31)$$

Se a desigualdade (2.31) não corresponder para algum $\bar{t}(t)$, haverá então um $\bar{u} \in U$ tal que

$$H(\bar{x}(t), u(t), t, \lambda(t)) > H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \lambda(t)),$$

e portanto, poderíamos modificar $\bar{u}(t)$ de modo que (2.30) tenha um valor positivo, contradizendo então a otimalidade de $\bar{u}(t)$.

A condição (2.31) estabelece que, para cada $t, u(t) \in U$ deve maximizar o valor de H para $x(t)$ e $\lambda(t)$ fixos. Logo se $\bar{u}(t)$ está no interior de U , figura 2.8, H é diferenciável com respeito a $u(t)$ e o problema não tem restrição em $u(t)$, a condição necessária de maximização seria

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

o que recupera o caso mais simples.

Mas se H não é diferenciável em $u(t)$ ou se $\bar{u}(t)$ se encontra na fronteira de U , figura 2.9 a caracterização acima do ótimo não é válido, logo a condição correta seria

$$\max_{u(t) \in U} H(\bar{x}(t), u(t), t, \lambda(t)),$$

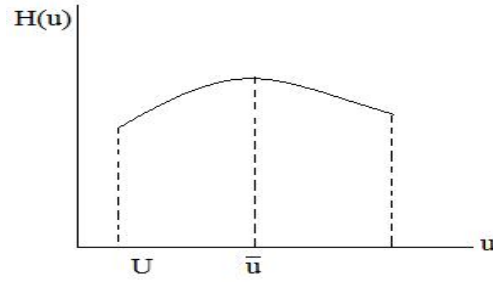


Figura 2.8: Controle ótimo no interior de U

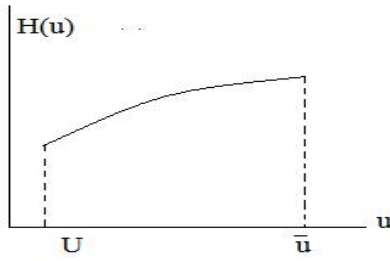


Figura 2.9: Controle ótimo na fronteira de U

que determina $\bar{u}(t)$ neste caso.

Resumindo, as condições necessárias para o problema (2.22) são

1. $x'(t) = g(t, x(t), u(t))$, equação de estado;
2. $x(t_0) = x_0$, condição no tempo inicial;
3. $\lambda(t_1) = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t_1), t_1)$, condição no tempo final;
4. $\lambda'(t) = -\frac{\partial H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \lambda(t))}{\partial x}$, equação adjunta;
5. $\max_{u \in U} H(\bar{x}(t), u(t), t, \lambda(t))$, equação de otimalidade.

Podemos ainda ter problemas com restrições do tipo abaixo ao invés das que usamos nos problemas anteriores

- Variável de estado restrita no tempo final que é especificado

$$\Psi_0(x(t_1)) = 0, \quad t_1 \text{ especificado}$$

- Variável de estado restringida no tempo final que não é especificado

$$\Psi_1(x(t_1)) = 0, \quad t_1 \text{ não especificado}$$

- Restrição do estado num ponto interior

$$\Psi_2(x(t_i)) = 0, \quad t_0 < t_i < t_1.$$

- Integrante restrito

$$\int_{t_0}^{t_1} \Psi_3(x(t), u(t), t) dt \geq 0.$$

- Restrição de igualdade nas funções estado e controle

$$\Psi_4(x(t), u(t), t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

- Restrições de desigualdade nas funções estado e controle

$$\Psi_5(x(t), u(t), t) \geq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

entre outras.

Problemas com condições do tipo citadas acima não serão de grande importância neste trabalho, por isso não entraremos em detalhes. Porém, nas literaturas convencionais, [Philippi1988] e [Kamien and Schwartz1991] pode-se encontrar as condições necessárias para estas.

Ainda temos como resultado as condições necessária de segunda ordem, veja [Kamien and Schwartz1991], no mesmo sentido que as condições de segunda ordem do cálculo clássico ($f''(x) \leq 0$ ou $f''(x) \geq 0$) e do cálculo das variações ($L_{y'y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) \leq 0$ ou $L_{y'y'}(t, \bar{y}(t), \bar{y}'(t)) \geq 0$ - condição de Legendre 2.8). Ou seja se $\bar{u}(t)$ maximiza $H(t, \bar{u}(t), u, \lambda(t))$ com respeito a u , então é necessário que

$$H_{uu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \lambda) \leq 0.$$

E se $\bar{u}(t)$ minimiza $H(t, \bar{u}(t), u, \lambda(t))$ com respeito a u , então é necessário que

$$H_{uu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \lambda) \geq 0.$$

Abaixo apresentaremos um exemplo retirado de [Philippi1988], para um melhor entendi-

mento do conteúdo que foi apresentado acima.

Exemplo 2.2.1 *Suponhamos que uma empresa fabrica um único produto. Os produtos produzidos podem ser vendidos ou estocados. O produto da venda é reinvestido para aumentar a produção futura. Especuladores estão convencidos de que dentro do próximo período $[0, T]$ o preço do produto aumentará e por isso, desejam estabelecer uma política de vendas que assegure poder armazenar a maior quantidade de produto neste período.*

Modelagem do Problema

Temos duas possibilidades

- Estocar o produto
- Vender e Reinvestir

$x(t)$ = taxa de produção,

$u(t)$ = fração de retirada dos produtos do estoque.

Para um intervalo de tempo Δt a quantidade produzida será aproximadamente $x(t)\Delta t$.

É assumido que se não houver reinvestimento a taxa de produção permanece constante e esta crescerá exponencialmente com uma taxa igual da fração $u(t)$ da produção que é vendida (portanto reinvestida). Assim

$$x'(t) = u(t)x(t), \quad x(0) > 0 \quad (\text{especificado})$$

com $0 \leq u(t) \leq 1$.

É óbvio que se $u(t) = 0$ se segue que $x(t) = x(0)$ e em geral $x(t) = x(0)e^{\int_0^t u(s)ds}$, com isto podemos assegurar que $x(t) > 0$.

Como a intenção da empresa é maximizar a produção acumulada no período estipulado, então o modelo do problema será

$$\max J = \int_0^T (1 - u(t))x(t)dt \quad (2.32)$$

sujeito a

$$x'(t) = u(t)x(t), \quad x(0) \text{ conhecido}, \quad (2.33)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1. \quad (2.34)$$

Solução: O Hamiltoniano deste problema é

$$\begin{aligned} H(x(t), u(t), t, \lambda(t)) &= (1 - u(t))x(t) + \lambda(t)(u(t)x(t)) \\ &= x(t) + u(t)x(t)(\lambda(t) - 1). \end{aligned}$$

As condições necessárias são

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1 + u(t)(1 - \lambda(t)), \quad (2.35)$$

$$\lambda(T) = 0, \quad (2.36)$$

e ainda $u(t)$ deve maximizar o Hamiltoniano, ou seja

$$\begin{cases} \max & H = x(t) + u(t)x(t)(\lambda(t) - 1), \\ \text{sujeito à} & u(t) \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.37)$$

De (2.37) temos que H é uma função linear de $u(t)$ e ainda $x(t) > 0, \forall t \in [0, T]$ e $u(t) \in [0, 1]$, assim o máximo de H sujeito a $u(t) \in [0, 1]$, dependerá de $\lambda(t)$.

Se tivermos $(\lambda(t) - 1) < 0$, então o máximo de H será obtido quando $u(t) = 0$, como pode ser notado na figura (2.10).

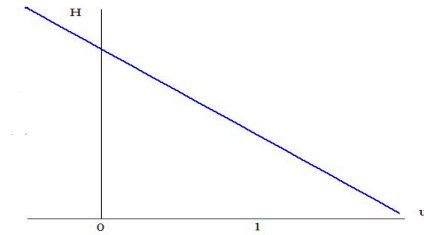
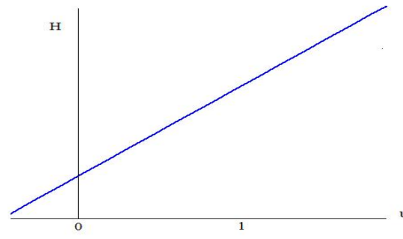


Figura 2.10: H quando g é menor que zero

Agora se $(\lambda(t) - 1) > 0$, então o máximo de H será obtido quando $u(t) = 1$, como pode ser notado na figura (2.11).

Figura 2.11: H quando o g é maior que zero

Assim temos o Controle do tipo Bang-Bang

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \lambda(t) - 1 < 0, \\ ? & \lambda(t) = 0, \\ 1 & \lambda(t) - 1 > 0. \end{cases}$$

De (2.36) temos

$$\lambda(T) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(T) - 1 = -1 < 0.$$

Seja $\bar{t}$ tal que para $t \in \bar{t} \leq t \leq T$, $\lambda(t) - 1 < 0$, assim $\forall t \in (\bar{t}, T)$

$$u(t) = 0, \quad e$$

$$\begin{cases} \lambda'(t) = -1 \\ \lambda(T) = 0. \end{cases} \quad (2.38)$$

Resolvendo (2.38), temos

$$\lambda'(t) = -1$$

integrando ambos os lados

$$\Rightarrow \lambda(t) = -t + K$$

$$\Rightarrow \lambda(T) = -T + K = 0$$

$$\Rightarrow K = T$$

portanto teremos

$$\lambda(t) = -t + T, \quad \bar{t} \leq t \leq T.$$

Devemos notar que para

$$\lambda(t) - 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda(t) < 1$$

$$\Rightarrow -t + T < 1$$

$$\Rightarrow T - 1 < t,$$

portanto $\bar{t} = T - 1$.

Para $0 \leq t \leq T - 1$ temos, $\lambda(t) - 1 > 0$, assim

$$u(t) = 1, \quad \text{e}$$

$$\begin{cases} \lambda'(t) = -\lambda(t) \\ \lambda(T - 1) = 1. \end{cases} \quad (2.39)$$

Resolvendo (2.39), temos

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\lambda(t) \quad \Rightarrow dt = \frac{-1}{\lambda(t)} d\lambda$$

integrando ambos os lados

$$-\ln|\lambda| = t + c \quad \Rightarrow \lambda^{-1} = e^{t+c} = ke^t,$$

como $\lambda(T - 1) = 1$ então

$$\lambda(T - 1) = Ke^{-(T-1)} = 1 \quad \Rightarrow K = \frac{1}{e^{(1-T)}},$$

portanto teremos

$$\lambda(t) = \frac{e^{-t}}{e^{(1-T)}}, \quad 0 \leq t \leq T - 1.$$

Podemos então resumir nossas soluções ótimas nas seguintes figuras (2.12, 2.13, 2.14), os quais nos dizem que até o tempo $T - 1$ deve-se vender tudo, ou seja, reinvestir tudo. Depois de $T - 1$ até T deve-se estocar todo o produto.

A quantidade armazenada é

$$\bar{J} = \int_{T-1}^T x(0)e^{T-1} dt = x(0)e^{T-1}.$$

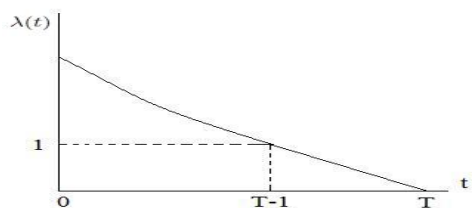


Figura 2.12: Gráfico da função adjunta



Figura 2.13: Gráfico da função Controle

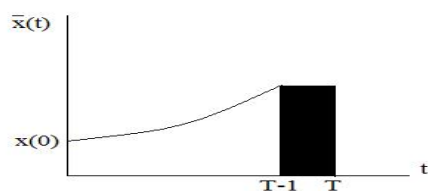


Figura 2.14: Gráfico da equação de estado

2.4 Um sistema de equações diferenciais como restrição

Queremos encontrar um controle $u(t)$ contínuo por partes e o vetor estado $x_i(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ correspondente continuamente diferenciável por partes, definida sobre um intervalo de tempo fixo $[t_0, t_1]$ que

$$\min J = F(x(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_i(t), u(t)) dt \quad (2.40)$$

sujeito à

$$x'_i(t) = g_i(t, x_i(t), u(t)), \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (2.41)$$

$$u \in U,$$

onde

$$x_i(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

$$g_i(t, x_i(t), u(t)) = (g_1(t, x_i(t), u(t)), \dots, g_n(t, x_i(t), u(t))).$$

Ou seja, ao invés de uma equação diferencial como restrição temos um sistema de equações diferenciais.

Agindo da mesma maneira que foi feito no problema (2.22–2.23), assumimos que f , g_i , $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial g_i}{\partial x_i}$ são funções contínuas em todos seus argumentos, $\forall i = 1, \dots, n$.

A fim de que $\bar{u}(t)$ e $\bar{x}_i(t)$ sejam o ótimo para o problema (2.40–2.41) é necessário que exista uma funções contínuas $\lambda_i(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$, tal que o hamiltoniano

$$H(t, x_i(t), u(t), \lambda_i(t)) = f(t, x_i(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) g_i(t, x_i(t), u(t)),$$

satisfaça

1. $x'_i(t) = g_i(t, x_i(t), u(t))$, equações de estado;
2. $x_i(t_0) = x_{i0}$, condições no tempo inicial;
3. $\lambda'_i(t) = -\frac{\partial H(t, \bar{x}_i(t), \bar{u}(t), \lambda_i(t))}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, equações adjuntas;
4. $\lambda_i(t_1) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_i(t_1), t_1)$, condições no tempo final;

5. $\max_{u \in U} H(t, \bar{x}_i(t), u(t), \lambda_i(t))$, equação de otimalidade.

As equações acima são conhecidas como condições necessárias do problemas (2.40 – 2.41).

2.5 Condições Suficientes para o Problema de Controle Ótimo

Estamos interessados em verificar quando nossas condições necessárias que foram mostradas nas seções anteriores são também suficientes. Para isso, vamos supor que $f(t, x(t), u(t))$ e $g(t, x(t), u(t))$ são funções diferenciáveis convexas de $x(t), u(t)$ no problema de

$$\min \int_{t_1}^{t_0} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.42)$$

sujeito à

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.43)$$

Tomaremos $\bar{x}(t), \bar{u}(t), \lambda(t)$ que satisfazem as condições necessárias

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial u} + \lambda(t) \frac{\partial g(t, x(t), u(t))}{\partial u} = 0, \quad (2.44)$$

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial x} - \lambda(t) \frac{\partial g(t, x(t), u(t))}{\partial x}, \quad (2.45)$$

$$\lambda(t_1) = 0, \quad (2.46)$$

e também a restrição (2.43) é satisfeita para todo $t_0 \leq t \leq t_1$. Ainda suporemos que $x(t)$ e $\lambda(t)$ são contínuas com

$$\lambda(t) \geq 0, \quad (2.47)$$

para todo t no caso em que $g(t, x(t), u(t))$ é não-linear em $x(t), u(t)$ ou em ambas. Com todas estas suposições as condições necessárias que satisfazem (2.43)-(2.46) são também suficientes para a otimalidade. Para verificarmos a afirmação feita acima para termos uma condição suficiente para otimalidade, suporemos que $\bar{x}(t), \bar{u}(t), \lambda(t)$, satisfazem (2.43)-(2.46). Tomemos $x(t), u(t)$ satisfazendo (2.43), f^*, g^* são funções avaliadas sobre $(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$ e f, g são as funções avaliadas sobre as possíveis curvas $(t, x(t), u(t))$. Então basta mostrar que

$$D \equiv \int_{t_0}^{t_1} (f^* - f) dt \leq 0. \quad (2.48)$$

Desde que f seja uma função convexa de $(x(t), u(t))$, teremos

$$f \geq f^* + \frac{\partial f^*}{\partial x}(x(t) - \bar{x}(t)) + \frac{\partial f^*}{\partial u}(u - \bar{u}(t)),$$

então

$$f - f^* \geq \frac{\partial f^*}{\partial x}(x(t) - \bar{x}(t)) + \frac{\partial f^*}{\partial u}(u(t) - \bar{u}(t)),$$

multiplicando a equação por (-1) teremos

$$f^* - f \leq \frac{\partial f^*}{\partial x}(\bar{x}(t) - x(t)) + \frac{\partial f^*}{\partial u}(\bar{u}(t) - u(t)). \quad (2.49)$$

De (2.48) e (2.49) temos

$$\begin{aligned} D &\leq \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial f^*}{\partial x}(\bar{x}(t) - x(t)) + \frac{\partial f^*}{\partial u}(\bar{u}(t) - u(t)) \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[(\bar{x}(t) - x(t)) \left(-\lambda \frac{\partial g^*}{\partial x} - \lambda'(t) \right) + (\bar{u}(t) - u(t)) \left(-\lambda(t) \frac{\partial g^*}{\partial u} \right) \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\lambda [g^* - g - (\bar{x}(t) - x(t)) \frac{\partial g^*}{\partial x} - (\bar{u}(t) - u(t)) \frac{\partial g^*}{\partial u}] dt \right. \\ &\leq 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

que era o que queríamos mostrar de acordo com (2.48). A segunda linha de (2.50) foi obtida substituindo (2.45) para $\frac{\partial f^*}{\partial x}$ e (2.44) para $\frac{\partial f^*}{\partial u}$. A terceira linha foi obtida fazendo uma integração por partes de $(\bar{x}(t) - x(t))\lambda'(t)$ e ainda usando (2.43) e (2.46). A última linha foi obtida levando em consideração (2.47) e também assumindo a convexidade de g em $x(t)$ e $u(t)$. Assim fica mostrado que se temos f, g convexas em $x(t)$ e $u(t)$, então as condições necessárias são também suficiente (levando também em consideração $\lambda(t) \geq 0$ se g é não-linear em $x(t)$ e $u(t)$).

Se a função g é linear em $x(t), u(t)$, então $\lambda(t)$ pode assumir qualquer valor. E se f é côncava enquanto g é convexa e $\lambda(t) \leq 0$, então as condições necessárias também serão suficiente para a otimalidade.

Os teoremas de suficiencia são facilmente aplicados. Contudo, alguns problemas interessantes não são convexas em $x(t)$ e $u(t)$. Uma versão generalizada para este teorema foi descoberta por Arrow, [Kamien and Schwartz1991], porém este pode ser mais difícil e checar se é aplicável.

Para se entender os resultados da suficiência descoberto por Arrow precisaremos de algumas definições.

Tomaremos $u = U(t, x(t), \lambda(t))$ denota o valor do controle que maximiza

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda g(t, x(t), u(t)), \quad (2.51)$$

para dados valores de $(t, x(t), \lambda(t))$. Tomemos

$$\begin{aligned} H^0(t, x(t), \lambda(t)) &= \max_{u(t)} H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) \\ &= f(t, x(t), U(t, x(t), \lambda(t))) + \lambda(t)g(t, x(t), U(t, x(t), \lambda(t))). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Teremos então o seguinte teorema de Arrow.

Teorema 2.4 *Se $H^0(t, x(t), \lambda(t))$ é uma função convexa de $x(t)$ para dado $\lambda(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, e se existir $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$, $\lambda(t)$ contínuas satisfazendo (2.43) e também*

$$u(t) = U(t, x(t), \lambda(t)), \quad (2.53)$$

$$\lambda'(t) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda(t)\frac{\partial g}{\partial x}\right), \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda(t)\frac{\partial g}{\partial u} = 0, \quad (2.55)$$

$$\lambda(t_1) = 0, \quad (2.56)$$

então $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ minimizará (2.42) sujeito à (2.43).

Capítulo 3

Modelos que Descrevem Áreas Foliares Lesionadas

Até 1969 os fungos eram considerados vegetais, só a partir daí foram classificados em um reino à parte, o reino *Fungi*. Este sistema foi proposto por Whittaker em 1969, [de Araújo and Bossolan2006]. Onde os seres vivos eram subdivididos em cinco reinos, *Protista*, *Monera*, *Plantae*, *Fungi* e *Animalia*. Posteriormente, em 1979, Whittaker apresentou alteração em seu sistema, o qual, passou a incluir as algas no reino Protista. Esta modificação, levou alguns autores a sugerir a alteração de reino *Protista* para *Protoctista*.

Propostas de outros sistemas de classificação, como por exemplo, a criação de grupos superiores ao reino, denominados por super- reinos ou domínios. Alguns propõe a criação de dois domínios: Procariontes e Eucariontes. Dentro do Domínio dos Procariontes, o Reino Monera com dois sub-reinos: Archeobactérias e Eubactérias, e no domínio dos Eucariontes os quatro reinos: Protoctista, Fungi, Plantae e Animalia.

Ainda houveram outras propostas de âmbito de aplicação mais restrito, porém o sistema de classificação com cinco reinos é o mais usado atualmente.

Os fungos constituem um grupo de organismos em que não ocorre clorofila(são heterótrofos), possuem características básicas que permitem separá-los de outros seres vivos, que são: talo eucariótico, absorção de nutrientes, formação de esporos. Alguns fungos podem ser microscópicos em tamanho, enquanto outros são muito maiores, como os cogumelos e fungos que crescem em madeira úmida ou solo. Ainda formam esporos, que são dispersos por correntes de ar. Encontram-se no solo, nos vegetais, no homem e em detritos em geral.

Eles ainda podem ser classificados como saprófitas e parasitas. Os saprófitas se alimentam de matéria orgânica animal ou vegetal morta e os parasitas vivem dentro ou sobre os organismos vivos (animais e vegetais) deles retirando seus alimentos, absorvem nutrientes ao invés de ingeri-los, secretando enzimas digestivas no substrato onde se desenvolvem. Essas enzimas catalisam a quebra de moléculas suficientemente menores para serem absorvidas pela

célula fúngica, por esta razão, os fungos crescem dentro ou sobre os alimentos.

O reino Fungi é dividido em cinco filós: *Oomycota* que são os fungos aquáticos; *Zygomycota* que são os fungos terrestres; *Ascomycota* que são as trufas, bolores verdes, amarelos e vermelhos; *Basidiomycota* que são os cogumelos, ferrugens e carvões; *Deuteromycota* que são fungos do tipo *Penicillium* (que cresce em matéria orgânica morta). Como pode ser notado, os fungos são divididos em diversas espécies, alguns são comestíveis (champignons), outros são usados na fabricação de bebidas (levedura da cerveja) e queijos, outros produzem antibióticos (penicilina) e outros causam doenças, como os fungos parasitas que podem causar doenças em plantas, animais e até em homens. A distribuição destes se dá em função de fatores como temperatura, umidade, tipo de solo e vegetação, presença de hospedeiros necessários à sobrevivência de cada espécie.

Na agricultura, o prejuízo causado pelos fungos pertencentes ao filo *Basidiomycota*, relativo às infestações de plantas, tem motivado os pesquisadores a combatê-los. Uma tentativa feita por eles foi a aplicação de fungicidas que pode ser notado que nem sempre é suficiente.

O uso indiscriminado de fungicidas pode promover a seleção de fungos resistentes colocando em risco a eficiência do método.

Com a resistência, vários prejuízos podem ocorrer, tanto para as empresas fabricantes de fungicidas, que tem que investir nas avaliações de risco de resistência realizadas durante o desenvolvimento a um novo produto, assim restringindo o lançamento de fungicidas no mercado, quanto para os agricultores, pois ao intensificar a aplicação poderá mascarar seu problema, sendo que boa parte do fungicida que está sendo aplicado pode não estar contribuindo para o controle, assim quando descobre a causa do problema, as perdas já ocorreram. Além disso, a resistência pode aumentar o consumo de fungicida que pode causar danos ao meio ambiente.

Foi por estes motivos que surgiu a necessidade de se entender e quantificar tais fenômenos.

Os primeiros modelos para descrever a dinâmica populacional de fungos foram feitos na ausência de fungicidas, assim, tinha-se um crescimento exponencial das populações consideradas.

Com a tentativa de adicionar nos primeiros modelos as competições interespecífica (que é a interação de indivíduos de espécies diferentes que disputam algo como alimento, luminosidade, território, emprego, fêmea, macho, etc.) e a intraespecífica (que é a disputa de todos os fatores citados acima, só que entre indivíduos da mesma espécie), [Barret1983] usou o modelo de Kolmogorov(1936) considerando a dinâmica de duas populações que se interagem. Este é

dado por

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 f_1(N_1, N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 f_2(N_1, N_2) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde

- N_1 e N_2 são as populações que interagem;
- r_1 e r_2 taxas de crescimento relacionadas a N_1 e N_2 respectivamente;
- f_1 e f_2 são as funções que descrevem os efeitos das competições inter e intra específicas entre as populações.

É dito ainda em [Barret1983], que se temos uma capacidade suporte para as populações, então podemos reescrever (3.1) usando o modelo de competição Lotka-Volterra como aproximação razoável de f_1 e f_2 .

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 [1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha \frac{N_2}{K_1}] \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 [1 - \frac{N_2}{K_2} - \beta \frac{N_1}{K_2}] \end{cases} \quad (3.2)$$

onde

- K_1 e K_2 são os números máximos que as espécies podem assumir;
- α e β descrevem a forma de interação entre as duas populações.

Por exemplo, se $\alpha < 0$ então, a taxa de crescimento de N_1 é favorecida pela população N_2 .

De acordo com [Ghini et al.1994], os estudos das dinâmicas de populações resistentes e sensíveis através de modelos matemáticos é fundamental para o desenvolvimento da estratégia de anti-resistência. E ainda diz que, para se tornar possível uma escolha correta do problema de controle, será necessário estudar o comportamento da resistência sem a presença de fungicida, ou seja, um modelo inicialmente sem o controle. Para isso deve-se considerar o seguinte sistema inicial de equações:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = r_S S - \alpha r_S S, \\ \frac{dR}{dt} = r_R R + \alpha r_S S, \end{cases} \quad (3.3)$$

no qual

- S é a quantidade de fungos sensíveis, R é a quantidade de fungos resistentes;
- r_S e r_R são as taxas de infecção de S e R respectivamente;
- α é a frequência constante do fluxo de indivíduos sensíveis para resistentes.

A equação (3.3) nos dá o número de indivíduos resistentes em uma dada população de fungos de tamanho inicial $\bar{N}$ antes da aplicação de fungicidas.

Os efeitos das competições inter e intra específicas com capacidades suporte das populações consideradas foram incorporados em (3.3) por [Varassin1996], para estudo de uma população subdividida em sensíveis (S) e resistentes (R).

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = r_S S \left[1 - \frac{S}{K} - c_{SR} \frac{R}{K}\right] - \alpha_{r_s} S \left[1 - \frac{S}{K} - c_{SR} \frac{R}{K}\right], \\ \frac{dR}{dt} = r_R R \left[1 - \frac{R}{K} - c_{RS} \frac{S}{K}\right] + \alpha_{r_s} S \left[1 - \frac{S}{K} - c_{SR} \frac{R}{K}\right], \end{cases} \quad (3.4)$$

no qual

- K é a capacidade suporte;
- r_s e r_R são as taxas de infecção;
- $\alpha_{r_s} S \left[1 - \frac{S}{K} - c_{SR} \frac{R}{K}\right]$ representa o fluxo de sensíveis para resistentes onde α é a frequência da mudança.

Em [Zotin et al.2000] foi proposto uma extensão do modelo (3.4), onde se adicionou os efeitos da aplicação do fungicida e mediu a população de fungos em termos de área lesionada, ou seja, será apresentado um modelo determinístico para o estudo de uma população de fungos quando submetida à aplicação de um controle químico, considerando também a mudança de sensibilidade ao fungicida quando este está presente a sua dinâmica. O controle considerado é na forma contínua num intervalo de tempo.

O modelo proposto tem as seguintes hipóteses:

- A "população" de fungos (representada pela área total ocupada N) analisada em uma certa cultura é subdividida em sensíveis e resistentes, sendo que $S(t)$ e $R(t)$ representam a fração de área foliar da cultura lesionada por sensíveis e resistentes, respectivamente, em cada instante de tempo;
- antes da aplicação de fungicida, temos que $S(0) = S_0 > 0$ e $R(0) = R_0 > 0$;
- as taxas de infecção provocadas por sensíveis e resistentes são r_S e r_R , respectivamente;

- a taxa de mudança de sensível para resistente é dada por α ;
- a eficácia do fungicida aplicado é dada por β e este incorpora o fato da mesma depender da concentração do fungicida utilizado;
- a taxa de aplicação de fungicida é dada por $u = u(t)$, função contínua por partes. Além disso, utilizamos uma limitação nessa aplicação da forma $0 \leq u(t) \leq 1$, ou seja, consideramos u sempre em relação a um valor u_{max} permitido;
- considera também que $dS/dt > 0$ e $dR/dt > 0$ no sentido de, uma vez que uma folha é atacada por fungos, a área lesionada não mais se regenera mesmo com a aplicação de fungicida.

Considerando os itens acima, pode ser formulado o seguinte modelo matemático

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = r_S S(1 - S - R) - \alpha r_S S(1 - S - R) - \beta u [r_S S(1 - S - R) - \alpha r_S S(1 - S - R)], \\ \frac{dR}{dt} = r_R R(1 - S - R) + \alpha r_S S(1 - S - R) - \beta u [\alpha r_S S(1 - S - R)], \\ S(0) = S_0, R(0) = R_0, 0 \leq u(t) \leq 1, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

o qual pode ser reescrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = (1 - \alpha) r_S S(1 - S - R)(1 - \beta u), \\ \frac{dR}{dt} = r_R R(1 - S - R) + \alpha r_S S(1 - S - R)(1 - \beta u), \\ S(0) = S_0, R(0) = R_0, 0 \leq u(t) \leq 1. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Para simplificar a notação omite-se a variável t das funções S, R, N e u .

Tomando (3.6) em termos da área total lesionada, ou seja, a área ocupada por fungos resistentes e os fungos sensíveis ($N(t) = R(t) + S(t)$) e considerando $r_R = r_S = r = constante$, o modelo fica:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN(1-N)(1-\beta u) + rR\beta u(1-N), \\ \frac{dR}{dt} = rR(1-N) + \alpha r(N-R)(1-N)(1-\beta u), \\ N(0) = N_0 = S_0 + R_0, 0 \leq u(t) \leq 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

O interessante deste modelo (3.7) é que ele não é só usado para descrever o crescimento de uma população de fungos que adquire resistência, ele também foi usado inicialmente com o objetivo de analisar o crescimento tumoral e interpretar o fenômeno da resistência celular aos farmacos anti-blásticos, veja [Leckar1996], [Vendite1988].

Devemos ressaltar que estamos interessados em determinar como o controle químico deve ser aplicado assim que detectada a doença. Para isso propomos um problema de Controle Ótimo Linear e um Não-Linear.

Usaremos o Princípio do Mínimo (Máximo) de Pontryagin, pois este nos fornece as condições necessárias de otimalidade para o problema, afim de se obter a estratégia da aplicação do fungicida de modo a minimizar a área total ocupada pela população de fungos, durante um intervalo de tempo fixo, o custo do controle aplicado e ainda para o controle não-linear, minimizar a quantidade de fungicida usado. Este intervalo de tempo citado acima corresponde ao instante em que a doença é detectada ($t = 0$) até o instante da colheita ($t = t_f$).

Capítulo 4

Controle Ótimo com o Funcional Linear

O problema de controle ótimo associado à dinâmica (3.7) do capítulo anterior, consiste em encontrar $0 \leq \bar{u}(t) \leq 1$ que minimize o funcional

$$J(u) = N(t_f) + c_1 \int_0^{t_f} u(t) dt, \quad (4.1)$$

sendo $N(t_f)$ a área final lesionada, $c_1 u(t)$ podemos dizer que representa o custo do controle e t_f o tempo final fixo, que corresponde ao dia da colheita ou ao tempo máximo em que é permitida a aplicação do fungicida, retirado de [Zotin1999].

Aplicando o Princípio do Mínimo(Máximo) de Pontryagin no modelo usado e omitindo a variável t de λ_1 e λ_2 , teremos que a função Hamiltoniana será

$$\begin{aligned} H(t, u, \lambda_1, \lambda_2, S, R) &= c_1 u + \lambda_1 [rN(1-N)(1-\beta u) + rR\beta u(1-N)] \\ &+ \lambda_2 [rR(1-N) + \alpha r(N-R)(1-N)(1-\beta u)] \\ &= c_1 u + \lambda_1 [rN(1-N) - \beta u r N(1-N) + rR\beta u(1-N)] \\ &+ \lambda_2 [rR(1-N) + \alpha r(N-R)(1-N) - \beta u \alpha r(N-R)(1-N)] \\ &= u [c_1 + r\beta(1-N)(-\lambda_1 N + \lambda_1 R - \lambda_2 \alpha(N-R))] \\ &+ r(1-N)(\lambda_1 N + \lambda_2 R + \lambda_2 \alpha(N-R)) \\ &= u [c_1 + r\beta(1-N)((\lambda_1 + \alpha \lambda_2)(N-R))] \\ &+ r(1-N)N\lambda_1 + \alpha \lambda_2 N r(1-N) + r(1-N)R\lambda_2 - \alpha \lambda_2 R r(1-N) \\ &= u [c_1 - r\beta(1-N)(\lambda_1 + \alpha \lambda_2)(N-R)] \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$+ r(1-N)N\lambda_1 + \alpha\lambda_2r(1-N)(N-R) + r(1-N)R\lambda_2.$$

As condições necessárias são

$$\begin{aligned}\lambda'_1 &= \frac{-\partial H}{\partial N} = -\lambda_1[r(1-N)(1-\beta u) + rN(-1(1-\beta u)) - rR\beta u] \\ &- \lambda_2[-rR + \alpha r(1-N)(1-\beta u) - \alpha r(N-R)(1-\beta u)] \\ &= -\lambda_1[r(1-\beta u)(1-2N) - rR\beta u] + \lambda_2rR - \lambda_2[\alpha r(1-\beta u)(1-2N+R)] \quad (4.3)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda'_2 &= \frac{-\partial H}{\partial R} = -\lambda_1(r\beta u(1-N)) - \lambda_2(r(1-N) - \alpha r(1-N)(1-\beta u)) \\ &= -\lambda_1(r\beta u(1-N)) - \lambda_2(r(1-N)[1 - \alpha(1-\beta u)]) \quad (4.4)\end{aligned}$$

com

$$\lambda_1(t_f) = \frac{\partial F(t_f)}{\partial N} = 1,$$

e

$$\lambda_2(t_f) = \frac{\partial F(t_f)}{\partial R} = 0.$$

A última condição necessária é

$$\begin{aligned}\min_{0 \leq u \leq 1} H &= \min_{0 \leq u \leq 1} [u(c_1 - r\beta(1-N)(\lambda_1 + \alpha\lambda_2)(N-R)) \\ &+ r(1-N)N\lambda_1 + \alpha\lambda_2r(1-N)(N-R) + r(1-N)R\lambda_2]. \quad (4.5)\end{aligned}$$

Temos que H é linear como função de u e $0 \leq u \leq 1$, então existe $\bar{u}$ que minimizará o problema.

Tomando

$$g = c_1 - r\beta(1-N)(\lambda_1 + \alpha\lambda_2)(N-R),$$

temos que g é quem define o controle, pois é a função que acompanha u em H .

Então se $g > 0$, para $0 \leq u \leq 1$, H terá seu mínimo em $\bar{u}(t) = 0$.

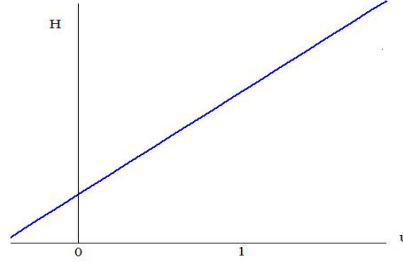


Figura 4.1: H com g positivo

Caso $g < 0$, para $0 \leq u \leq 1$, H terá seu mínimo em $\bar{u}(t) = 1$.

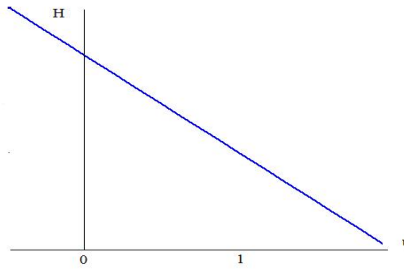


Figura 4.2: H com g negativo

Assim o controle ótimo é dado por

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } g > 0, \\ 1, & \text{se } g < 0, \\ ?, & \text{se } g = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Como o modelo (3.7), que descreve o crescimento da área total lesionada por fungos é não linear, fica difícil calcular analiticamente λ_1 e λ_2 , assim não é imediato a obtenção da lei de controle, pois a função g dependerá de λ_1 e λ_2 .

Contudo, serão apresentados dois lemas, [Zotin1999], os quais nos mostrarão os controles possíveis para o modelo que está sendo usado.

Lema 4.1 *Se o controle ótimo for zero ($\bar{u}(t) = 0$) durante algum intervalo de tempo $(\bar{t}, t_f]$, então $\bar{u}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_f]$, considerando $\alpha \approx 0$.*

Demonstração: Suponhamos que o controle seja da forma

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < \bar{t} \\ 0, & \text{se } \bar{t} < t \leq t_f, \end{cases} \quad (4.7)$$

ou seja,

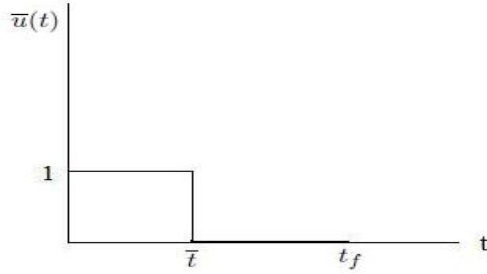


Figura 4.3: Suposto controle para o problema (4.1).

o controle acaba com zero e tem uma única troca em $\bar{t}$, onde $g(\bar{t}) = 0$.

Como $\bar{u}(t) = 0$ em $(\bar{t}, t_f]$, então $g > 0$ em $(\bar{t}, t_f]$. As equações diferenciais (4.3) e (4.4) neste intervalo são

$$\begin{cases} \lambda_1' = -\lambda_1(r(1-2N)) + \lambda_2 r R - \lambda_2(\alpha r(1-2N+R)) \\ \lambda_2' = -\lambda_2(r(1-N)(1-\alpha)) \\ \lambda_1(t_f) = 1, \quad \lambda_2(t_f) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Resolvendo (4.8) para λ_2

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_2}{ds} &= -\lambda_2 r(1-N)(1-\alpha) \\ \Rightarrow \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} &= r(1-N)(1-\alpha) ds \\ \Rightarrow \int_t^{t_f} \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} &= \int_t^{t_f} r(1-N)(1-\alpha) ds \\ \Rightarrow \ln \lambda_2 &= \int_t^{t_f} r(1-N)(1-\alpha) ds + c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^{\ln \lambda_2} = e^{\int_t^{t_f} r(1-N)(1-\alpha)ds+c}$$

$$\Rightarrow \lambda_2(t) = K e^{\int_t^{t_f} r(1-N)(1-\alpha)ds} ,$$

como sabemos que $\lambda_2(t_f) = 0$, então

$$\lambda_2(t_f) = K e^{\int_{t_f}^{t_f} r(1-N)(1-\alpha)ds} = e^0 K = K = 0 ,$$

assim

$$\lambda_2(t) = K e^{\int_t^{t_f} r(1-N)(1-\alpha)ds} = 0 \quad \forall t \in (\bar{t}, t_f] . \quad (4.9)$$

Agora resolveremos (4.8) para λ_1 , já usando que $\lambda_2(t) = 0, \forall t \in (\bar{t}, t_f]$, assim

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = -\lambda_1(r(1-2N))$$

$$\Rightarrow \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} = -r(1-2N)ds$$

$$\Rightarrow \int_t^{t_f} \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} = \int_t^{t_f} -r(1-2N)ds$$

$$\Rightarrow \ln \lambda_1 = \int_t^{t_f} -r(1-2N)ds + c$$

$$\Rightarrow e^{\ln \lambda_1} = e^{\int_t^{t_f} -r(1-2N)ds+c}$$

$$\Rightarrow \lambda_1(t) = K e^{\int_t^{t_f} -r(1-2N)ds} ,$$

como sabemos que $\lambda_1(t_f) = 1$, então

$$\lambda_1(t_f) = K e^{\int_{t_f}^{t_f} -r(1-2N)ds} = e^0 K = K = 1 ,$$

assim

$$\Rightarrow \lambda_1(t) = e^{\int_t^{t_f} -r(1-2N)ds} > 0. \quad (4.10)$$

Agora vamos analisar o comportamento de g ainda no intervalo $(\bar{t}, t_f]$, pois é ela quem

decide o controle.

No intervalo considerado sabemos que $\lambda_2(t) = 0$, então de (3.7) e (4.8) teremos

$$\begin{aligned}\lambda_1'(t) &= -r(1 - 2N)\lambda_1, \\ N'(t) &= rN(1 - N),\end{aligned}\tag{4.11}$$

$$R'(t) = rR(1 - N) + \alpha r(N - R)(1 - N),$$

e

$$g = c_1 - r\beta(1 - N)\lambda_1(N - R).\tag{4.12}$$

Derivando (4.12)

$$g'(t) = r\beta N' \lambda_1(N - R) - r\beta(1 - N)(\lambda_1'(N - R) + \lambda_1(N' - R')).\tag{4.13}$$

Substituindo (4.11) em (4.13), teremos

$$\begin{aligned}g'(t) &= r\beta rN(1 - N)\lambda_1(N - R) - r\beta(1 - N)[-r(1 - 2N)\lambda_1(N - R) \\ &\quad + \lambda_1(rN(1 - N) - rR(1 - N) + \alpha r(N - R)(1 - N))] \\ &= r^2\beta N(1 - N)\lambda_1(N - R) - r\beta(1 - N)[-r(1 - 2N)\lambda_1(N - R) \\ &\quad + \lambda_1(r(1 - N)(N - R) + \alpha r(N - R)(1 - N))] \\ &= r^2\beta N(1 - N)\lambda_1(N - R) + r^2\beta(1 - N)(1 - 2N)\lambda_1(N - R) \\ &\quad - r^2\beta(1 - N)^2\lambda_1(N - R) - r^2\beta(1 - N)^2\lambda_1\alpha(N - R) \\ &= r^2\beta(1 - N)\lambda_1(N - R)[N + (1 - 2N) - (1 - N) - \alpha(1 - N)] \\ &= r^2\beta(1 - N)\lambda_1(N - R)[- \alpha(1 - N)].\end{aligned}$$

Considerando agora $\alpha \approx 0$ teremos

$$g'(t) = 0, \forall t \in (\bar{t}, t_f].\tag{4.14}$$

De (4.14) teremos que $g = \text{constante} > 0$ (pois $\bar{u}(t) = 0 \Rightarrow g > 0 \forall t \in (\bar{t}, t_f]$). Então pela continuidade de g , não é possível $g(\bar{t}) = 0$. Pois se tivéssemos $g(\bar{t}) = 0$ sendo $g = \text{constante}(c) > 0$, então g teria uma descontinuidade por salto, figura 4.4.

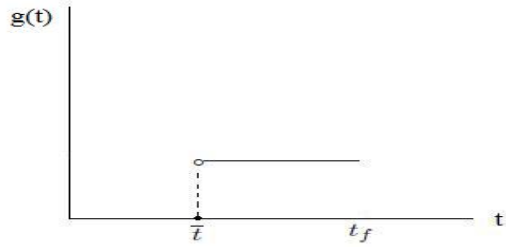


Figura 4.4: Descontinuidade de g .

Assim $\bar{t}$ suposto inicialmente não existe, então o controle ótimo se não for nulo ($\bar{u}(t) = 0, \forall t \in [0, t_f]$), deve ser tal que acabe com $\bar{u}(t) = 1$.

Analisemos uma outra situação.

Lema 4.2 *Se o controle ótimo terminar com $\bar{u}(t) = 1$ e $\alpha \approx 0$ então, ele terá no máximo uma troca de controle.*

Demonstração: Suponhamos que o controle seja da forma

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < \bar{t}_1 \\ 0, & \text{se } \bar{t}_1 < t < \bar{t}_2 \\ 1, & \text{se } \bar{t}_2 < t \leq t_f, \end{cases} \quad (4.15)$$

e com certeza teremos

$$g \begin{cases} < 0, & \text{se } 0 \leq t < \bar{t}_1 \\ > 0, & \text{se } \bar{t}_1 < t < \bar{t}_2 \\ < 0, & \text{se } \bar{t}_2 < t \leq t_f. \end{cases} \quad (4.16)$$

Consideremos $\alpha \approx 0$, teremos

$$g = c_1 - r\beta(1 - N)\lambda_1(N - R). \quad (4.17)$$

Analisemos o comportamento de g em cada subintervalo.

- Para $0 \leq t < \bar{t}_1$ como $\bar{u}(t) = 1$ então, $g < 0$ neste mesmo intervalo, assim deve existir $\delta > 0$ tal que g seja crescente em todo $t \in (\bar{t}_1 - \delta, \bar{t}_1 + \delta)$, isso deve ocorrer devido a troca de controle em $t = \bar{t}_1$. Assim $g'(t) > 0$ em $(\bar{t}_1 - \delta, \bar{t}_1 + \delta)$.

Derivando (4.17) e substituindo

$$g'(t) = -\lambda_2 R r^2 \beta (1 - N)(N - R),$$

então

$$\lambda_2(t) < 0 \quad \forall t \in (\bar{t}_1 - \delta, \bar{t}_1 + \delta). \quad (4.18)$$

- Para $\bar{t}_1 < t < \bar{t}_2$ temos que $\bar{u}(t) = 0$, assim as equações diferenciais para λ_1 e λ_2 já considerando $\alpha \approx 0$ são

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = -r(1 - 2N)\lambda_1 + rR\lambda_2, \\ \lambda_2(t) = -r(1 - N)\lambda_2, \end{cases}$$

cuja solução para $\lambda_2(t)$ é

$$\lambda_2(t) = \lambda_2(\bar{t}_1) e^{\int_{\bar{t}_1}^t -r(1-N)ds}, \quad \forall t \in (\bar{t}_1, \bar{t}_2). \quad (4.19)$$

Assim de (4.18) e (4.19) teremos que

$$\lambda_2(t) < 0, \quad \forall t \in (\bar{t}_1, \bar{t}_2). \quad (4.20)$$

Como $g > 0$ para $\bar{t}_1 < t < \bar{t}_2$ e $g < 0$ em $\bar{t}_2 < t \leq t_f$, então deve existir um δ_1 tal que g decresça $\forall t \in (\bar{t}_2 - \delta_1, \bar{t}_2 + \delta_1)$, assim $g'(t) < 0, \forall t \in (\bar{t}_2 - \delta_1, \bar{t}_2 + \delta_1)$, então de (4.18)

$$\lambda_2(t) > 0, \quad \forall t \in (\bar{t}_2 - \delta_1, \bar{t}_2 + \delta_1). \quad (4.21)$$

Logo de (4.20) e (4.21) temos um absurdo.

Os dois Lemas nos levam ao seguinte resultado

Teorema 4.3 Para o problema de controle (3.7)-(4.1), com $\alpha \approx 0$, o controle ótimo $\bar{u}(t)$ é do tipo

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \bar{t} \\ 1, & \bar{t} < t \leq t_f, \end{cases}$$

com $\bar{t} \in [0, t_f]$.

4.1 Aplicação para a Mancha-Angular que Ataca o Feijoeiro

Anualmente, é perdido em média 10% da produção mundial de feijão por causa de doenças, esta perda seria ainda maior na ausência de controle. Ainda, algumas destas doenças podem ser causadas por fungos, cujos sintomas característicos são manchas de coloração variadas (marrom, amarela, preta) em folhas, sementes, raízes ou vagens.

A Mancha Angular é uma destas doenças fúngicas causada pelo fungo *Phaeoisariopsis griseola*, que ataca o feijoeiro. Seu desenvolvimento depende das condições ambientais favoráveis. Esta pode sobreviver nas sementes e em restos das culturas.

Antes da década de 80, esta doença era considerada de pouca importância econômica, pois só ocorria nos finais dos ciclos, porém nos últimos anos têm ocorrido surtos cada vez mais precoces e intensos da doença.

Os principais sintomas da mancha-angular aparecem principalmente nas folhas, podendo também ocorrer nos caules, ramos e vagens. As lesões nas folhas são inicialmente irregulares, cinzas ou marrons, depois elas assumem formato angular, causando o amarelecimento e desfolhamento prematuro da planta, como pode ser visto nas figuras (4.5, 4.6, 4.7, 4.8). O desfolhamento, prejudica o enchimento das vagens, reduzindo o tamanho dos grãos. Nas vagens, as lesões são superficiais, de coloração castanho-avermelhada, quase circulares com bordas escuras de tamanhos variados. As vagens infectadas podem produzir sementes mal desenvolvidas e/ou totalmente enrugadas. Nos caules e ramos as lesões são alongadas de coloração castanho-escura.

Os controles usados por agricultores para a mancha angular são: desenvolvimento de novas cultivares com resistência, tratamento químico das sementes e da parte aérea das plantas, uso de sementes de boa qualidade, rotação de culturas, remoção de resíduos culturais, variação da época de plantio. Porém, o mais comum e o mais eficiente é a utilização do controle químico, sendo este um dos principais métodos devido a facilidade do uso e também pelos resultados imediatos e é por este fato que só consideraremos o controle com fungicidas.

Em [Bassanezi et al.1997], foram quantificados alguns parâmetros do fungo causador da mancha angular (*Phaeoisariopsis griseola*) a diferentes temperaturas.

O desenvolvimento do fungo foi analisado através da área lesionada e não com o número



Figura 4.5: Mancha-angular na fase inicial, causada por *Phaeoisariopsis griseola*.



Figura 4.6: Manchas angulares amareladas causado pelo fungo *Phaeoisariopsis griseola*.



Figura 4.7: Mancha-angular na fase mais avançada.



Figura 4.8: Desfolhamento precoce causado pela mancha-angular.

de fungos, ainda foram observados parâmetros como, a severidade da doença (% de área foliar com lesões) e a taxa de crescimento das lesões.

Como não foi obtido uma relação explícita de $\bar{t}$ e os outros parâmetros do modelo (3.7)-(4.1), então os dados de [Bassanezi et al.1997] serão utilizados para as simulações numéricas e ainda será analisado a variação do controle quando for alterado cada um destes parâmetros.

4.2 Simulações numéricas

Para estas simulações usaremos o MATLAB, [Kiusalaas2005], [Yang et al.2005], cujos códigos dos programas estão no Apêndice A.

É essencial o Teorema (4.3), pois deste sabemos que se existe troca de controle ela ocorre de $u = 0$ para $u = 1$, ou seja, se temos $\bar{t} = 80$ então $\bar{u}(t) = 0, \forall t \in [0, 80]$ e para $\bar{t} = 0$ então $\bar{u}(t) = 1, \forall t \in [0, 80]$.

As unidades de medida são: α (adimensional), t, t_f e $\bar{t}$ (dias), r e β (dias⁻¹), c_1 (área lesionada/dias).

Será considerado que, 10% é a área total infectada inicialmente, ou seja, $N(0) = 0.1$, onde $S(0) = 0.08$ e $R(0) = 0.02$, $t_0 = 0$, $t_f = 80$, $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$.

4.3 Verificação de $\bar{t}$ (ponto de switch)

Usaremos os parâmetros acima a princípio fixos e utilizaremos alguns valores de r obtidos em [Bassanezi et al.1997] para a mancha-angular na cultivar Rosinha G-2. Dentre estes valores de r foram escolhidos, $r_1 = 0.026 \text{ } 10\text{mm}^2/\text{dia}$ e $r_3 = 0.0336 \text{ } 10\text{mm}^2/\text{dia}$. Além disso consideraremos diversos valores de r maiores que r_3 e menores que r_1 para observarmos a variação de $\bar{t}$, $N(t_f)$ e $R(t_f)$ em função de r , tabela (4.1).

Através da análise dos gráficos (4.9), (4.10) que plota os respectivos valores da tabela

Tabela 4.1: Valor de $\bar{t}$, $R(t_f)$ e $N(t_f)$ para cada taxa de crescimento dada, considerando fixos $N(0) = 0.1$, $R(0) = 0.02$, $t_0 = 0$, $t_f = 80$, $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$.

r	$\bar{t}$	$N(t_f)$	$R(t_f)$
0.01	79.100	0.1977	0.0397
0.015	78.017	0.2643	0.0539
0.016	77.233	0.2798	0.0571
0.017	78.910	0.3004	0.0604
0.018	78.998	0.3174	0.0639
0.019	76.115	0.3294	0.0674
0.02	61.435	0.3137	0.0716
0.021	50.018	0.3054	0.0763
0.022	39.746	0.2990	0.0816
0.023	31.911	0.2955	0.0874
0.024	23.111	0.2944	0.0936
0.025	18.621	0.2984	0.1079
0.026	13.515	0.2940	0.1079
0.027	8.835	0.2982	0.1153
0.028	10.373	0.3096	0.1258
0.029	5.123	0.3117	0.1308
0.03	1.873	0.3165	0.1401
0.031	2.160	0.3281	0.1479
0.032	0.953	0.3400	0.1560
0.036	1.860	0.3908	0.1911
0.04	0.627	0.4453	0.2303
0.045	0.6217	0.5171	0.2835
0.05	3.705	0.5949	0.3285
0.055	10.459	0.6732	0.3522
0.056	10.387	0.6911	0.3465
0.057	10.512	0.7031	0.3545
0.058	12.064	0.7186	0.3513
0.059	13.384	0.7299	0.3583
0.06	14.032	0.7457	0.3495
0.065	18.546	0.8040	0.3418
0.07	59.189	0.9356	0.2005
0.075	46.785	0.9342	0.2158
0.077	30.167	0.9087	0.2757
0.08	36.217	0.9304	0.2498

(4.1), podemos notar que:

- A medida que r cresce a área total lesionada também cresce;
- A medida que r cresce o $\bar{t}$ vai diminuindo, ou seja, o intervalo de aplicação de fungicida vai aumentando até que para $r \in [0.03, 0.05]$ a aplicação de fungicida se torna necessário

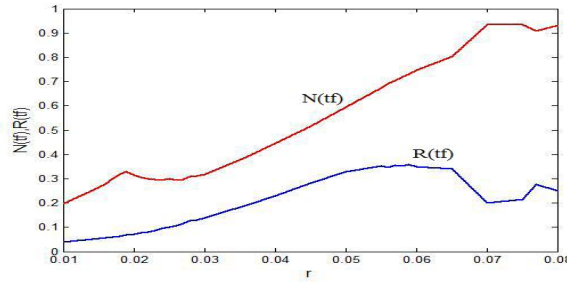


Figura 4.9: Valor de $\bar{t}$, $R(t_f)$ e $N(t_f)$ em função de r , considerando fixos $N(0) = 0.1$, $R(0) = 0.02$, $t_0 = 0$, $t_f = 80$, $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$.

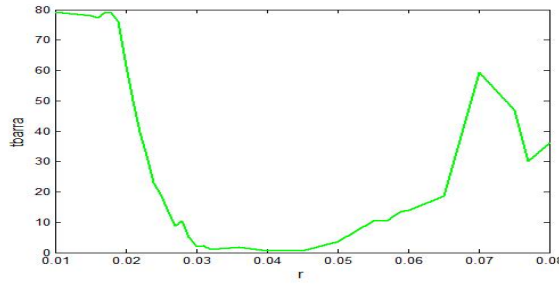


Figura 4.10: Valor de $\bar{t}$ em função de r , considerando fixos $N(0) = 0.1$, $R(0) = 0.02$, $t_0 = 0$, $t_f = 80$, $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$.

em quase todo intervalo de tempo considerado;

- Para r maiores que 0.05 o $\bar{t}$ volta a crescer, de modo que para r com valores muito grandes já não é mais viável a aplicação do controle químico.

Como por exemplo, para $r=0.08$,

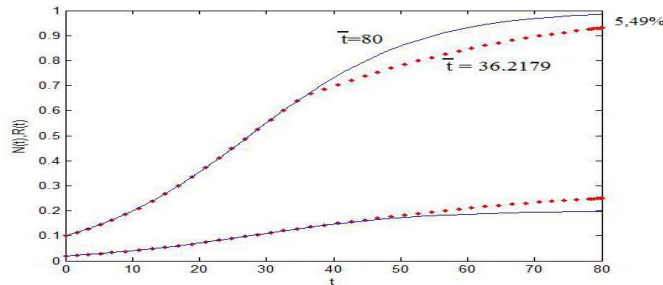


Figura 4.11: Valor de $N(t_f)$, $R(t_f)$ quando $\bar{t} = 36.2179$ (gráfico pontilhado) e quando $\bar{t} = 80$ (gráfico contínuo).

quando $\bar{t} = 36.2179$, então $N(t_f) = 0.9304$ e quando $\bar{t} = 80$, ou seja, não se aplica o fungicida, então $N(t_f) = 0.9853$, como pode ser visto no gráfico (4.11). Assim não é viável a

aplicação pois se gastaria o fungicida aplicando em todo o intervalo $[36.2179, 80]$, para garantir apenas 0.0549 de área total lesionada.

Se tomarmos $\alpha = 0$ nos experimentos numéricos podemos reconstruir a tabela (4.1).

Tabela 4.2: Valor de $\bar{t}$, $R(t_f)$ e $N(t_f)$ para cada taxa de crescimento dada, considerando fixos $N(0) = 0.1$, $R(0) = 0.02$, $t_0 = 0$, $t_f = 80$, $\alpha = 0$, $\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$.

r	$\bar{t}$	$N(t_f)$	$R(t_f)$
0.01	79.111	0.1977	0.0397
0.015	78.017	0.2643	0.0539
0.016	77.233	0.2798	0.0571
0.017	78.911	0.3004	0.0604
0.018	78.998	0.3174	0.0639
0.019	76.111	0.3294	0.0674
0.02	61.437	0.3137	0.0716
0.021	50.018	0.3054	0.0763
0.022	39.747	0.2990	0.0816
0.023	31.911	0.2955	0.0874
0.024	23.111	0.2944	0.0936
0.025	18.621	0.2984	0.1079
0.026	13.515	0.2940	0.1079
0.027	8.835	0.2982	0.1153
0.028	10.374	0.3096	0.1258
0.029	5.122	0.3117	0.1308
0.03	1.870	0.3165	0.1401
0.031	2.160	0.3281	0.1479
0.032	0.953	0.3400	0.1560
0.036	1.860	0.3908	0.1911
0.04	0.627	0.4453	0.2303
0.045	0.6217	0.5171	0.2835
0.05	3.756	0.5949	0.3285
0.055	10.459	0.6732	0.3522
0.056	10.387	0.6911	0.3465
0.057	10.512	0.7031	0.3545
0.058	12.066	0.7186	0.3513
0.059	13.384	0.7299	0.3583
0.06	14.033	0.7457	0.3495
0.065	18.546	0.8040	0.3418
0.07	59.189	0.9356	0.2005
0.075	46.785	0.9342	0.2158
0.077	30.167	0.9087	0.2757
0.08	36.218	0.9304	0.2498

Como pode-se notar, a tabela (4.2) possui valores de $R(t_f)$ e $N(t_f)$ exatamente iguais aos valores da tabela (4.1), o que comprova o que o parâmetro α que é a mutação de sensível para

resistente, exerce pouca influência para a determinação do controle. Isso pode ser melhor visto no gráfico (4.12).

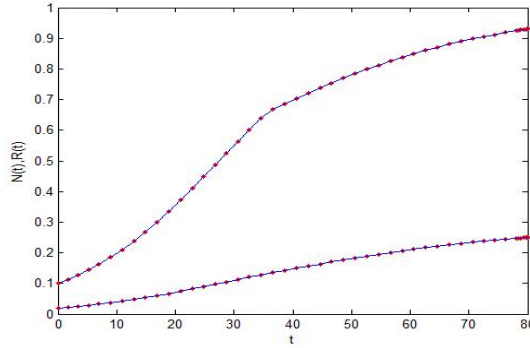


Figura 4.12: $N(t_f)$ e $R(t_f)$ para $\alpha = 10^{-5}$ (gráfico pontilhado) e $\alpha = 0$ (gráfico contínuo).

Mantendo os mesmos parâmetros da tabela (4.1), exceto os $c_1 = 0.004$ e $\beta = 0.8$, construímos a tabela (4.3).

Pode ser notado que, para valores de $c_1 = 0.004$ e $\beta = 0.8$, ou seja, fungicida mais concentrado, não vai existir nenhum intervalo de r onde será necessário a aplicação do fungicida durante quase todo intervalo de tempo considerado, que é o que acontece com o fungicida menos concentrado. Isto pode ser melhor visto no gráfico (4.13).

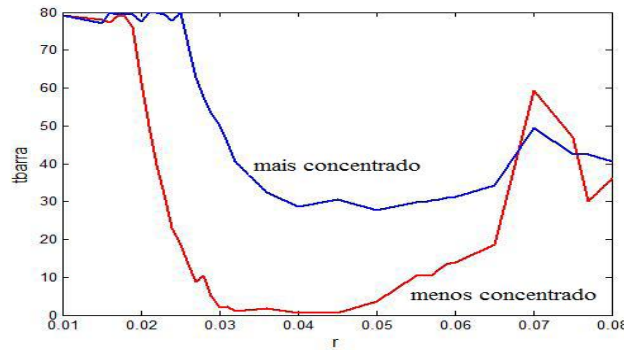


Figura 4.13: $\bar{t}$ para cada valor de r com o fungicida menos concentrado ($\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$) e com o fungicida mais concentrado ($\beta = 0.8$, $c_1 = 0.004$).

Quando analisamos o gráfico (4.14) da área final lesionada para o fungicida menos concentrado e mais concentrado, notamos que existe um intervalo de r no qual não compensa o uso do fungicida mais eficiente.

Este último fato analisado, decorre do fato de que a partir do momento que aumentamos a concentração do fungicida também é aumentado seu custo, se isto não ocorresse, ou seja, se a concentração de certo fungicida aumentasse sem variar seu custo, então não existiria um

Tabela 4.3: Valor de $\bar{t}$, $R(t_f)$ e $N(t_f)$ para cada taxa de crescimento dada, considerando fixos $N(0) = 0.1$, $R(0) = 0.02$, $t_0 = 0$, $t_f = 80$, $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$.

r	$\bar{t}$	$N(t_f)$	$R(t_f)$
0.01	79.095	0.1973	0.0397
0.015	77.043	0.2626	0.0539
0.016	79.887	0.2833	0.0571
0.017	79.454	0.3004	0.0604
0.018	79.472	0.3173	0.639
0.019	79.486	0.3347	0.0674
0.02	77.506	0.3443	0.0710
0.021	79.802	0.3746	0.0747
0.022	79.800	0.3936	0.0785
0.023	79.321	0.4087	0.0823
0.024	77.661	0.4174	0.0863
0.025	79.796	0.4522	0.0902
0.026	71.152	0.4325	0.0946
0.027	62.763	0.4237	0.0996
0.028	57.574	0.4115	0.1055
0.029	53.494	0.4078	0.1115
0.03	49.842	0.4079	0.1178
0.031	45.602	0.4032	0.1253
0.032	40.535	0.4022	0.1331
0.036	32.484	0.4226	0.1653
0.04	28.693	0.4672	0.1960
0.045	30.561	0.5403	0.2271
0.05	27.805	0.5494	0.2642
0.055	29.927	0.6737	0.2762
0.056	29.900	0.6849	0.2809
0.057	30.225	0.6958	0.2855
0.058	30.588	0.7107	0.2838
0.059	30.979	0.7212	0.2874
0.06	31.169	0.7313	0.2909
0.065	34.174	0.7889	0.2859
0.07	49.589	0.8812	0.2259
0.075	42.395	0.8869	0.2488
0.077	42.368	0.8973	0.2480
0.08	40.523	0.9053	0.2778

intervalo de r no qual não compensaria a aplicação do fungicida mais concentrado. Isso pode ser visto no gráfico(4.15).

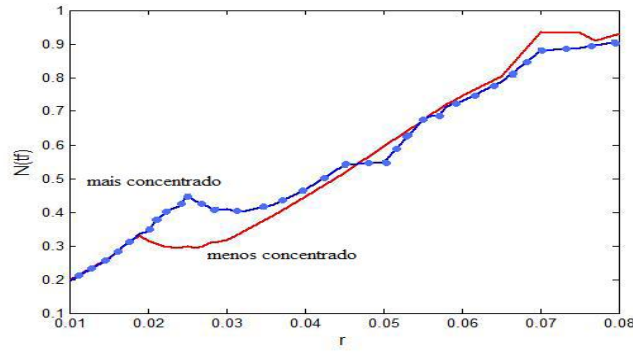


Figura 4.14: Área total lesionada para o fungicida mais concentrado(gráfico pontilhado) e o menos concentrado (gráfico contínuo).

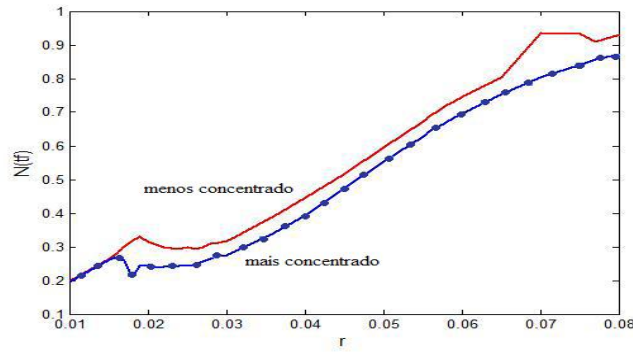


Figura 4.15: Área total lesionada para o fungicida mais concentrado(gráfico pontilhado) e o menos concentrado (gráfico contínuo).

4.4 Influência de β e c_1 na determinação de $\bar{t}$

Tomando os parâmetros fixados, $\alpha = 10^{-5}$, $S(0) = 0.1$, $R(0) = 0.08$, $r = 0.026$, $t_f = 80$ e variando β e c_1 , encontramos o $\bar{t}$, tabela (4.4). Por exemplo, para $\beta = 0.8$ e $c_1 = 0.0015$ teremos $\bar{t} = 0.6866$.

Tabela 4.4: $\bar{t}$ para cada valor de β e c_1 com os seguintes parâmetros fixados, $\alpha = 10^{-5}$, $S(0) = 0.1$, $R(0) = 0.08$, $r = 0.026$, $t_f = 80$.

	c_1	0.0015	0.00175	0.002	0.00225	0.0025	0.003	0.0035	0.004	0.0045
β	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0.8	.	0.6866	5.9	7.6	18.4	25.953	38.663	53.950	71.148	77.577
0.75	.	0.6155	6.4	10.887	18.902	26.619	42.400	58.932	79.288	77.532
0.7	.	6.026	1.786	11.232	21.109	29.509	50.400	69.671	79.177	77.351
0.65	.	0.8374	1.824	12.802	22.701	34.400	55.961	79.030	79.030	77.143
0.06	.	2.4	4.83	13.515	26.563	39.908	69.312	79.948	78.081	79.948

Podemos notar que para valores pequenos de c_1 , os quais representam os custos, vamos

ter $\bar{t}$ próximo de zero independente do β que representa a concentração do fungicida, ou seja, temos que aplicar o controle em quase todo intervalo de tempo considerado. Conforme c_1 vai aumentando, nosso intervalo de aplicação do controle vai diminuindo, até que para valores grandes de c_1 nosso $\bar{t}$ fica bem próximo de oitenta, ou seja, não é mais viável fazer o controle. Isso pode ser visto nas figuras (4.16), (4.17).

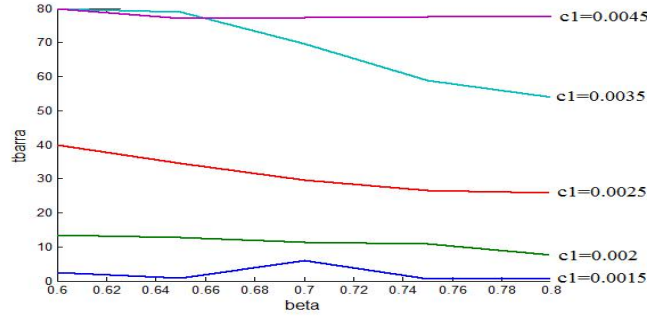


Figura 4.16: Valores de $\bar{t}$ em função de β com c_1 fixo

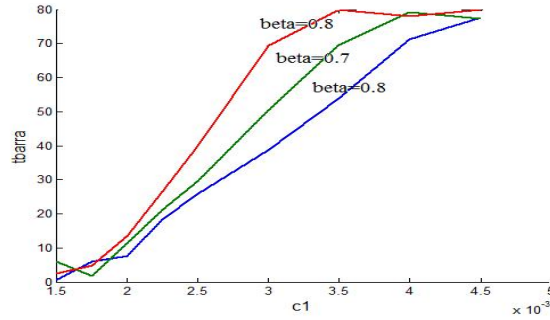
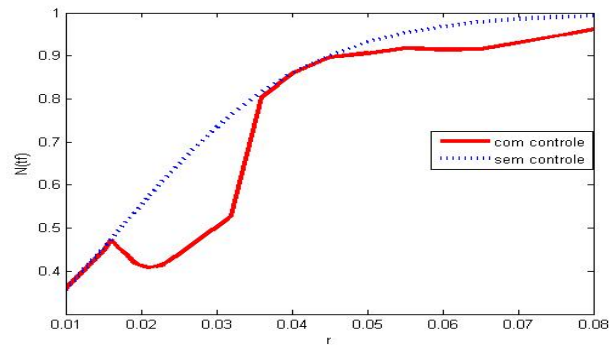
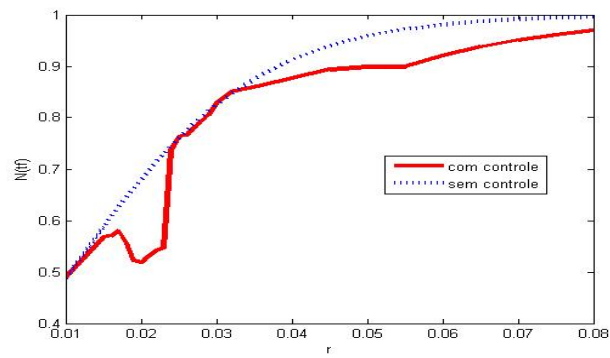
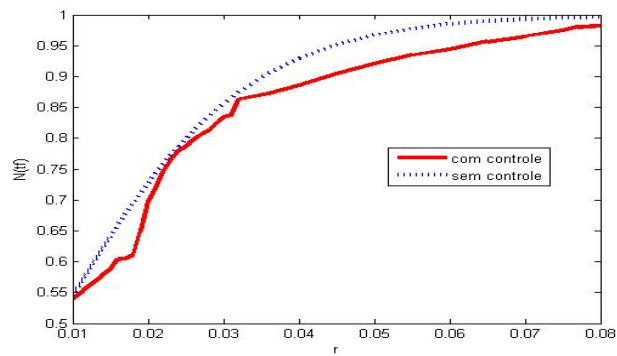


Figura 4.17: Valores de $\bar{t}$ em função de c_1 com β fixo

Um fato que também achamos interessante comentar é que, quando nossa área inicial lesionada está abaixo ou igual a 0.3 então compensa aplicar o controle para determinados valores da taxa de infecção como pode se verificar nas figuras (4.18), (4.19). Para valores acima a 0.3 este controle não é mais viável independente do valor da taxa de infecção, como pode ser visto na figura (4.20).

Figura 4.18: $N(0) = 0.2$, $R(0) = 0.04$ Figura 4.19: $N(0) = 0.3$, $R(0) = 0.06$ Figura 4.20: $N(0) = 0.35$, $R(0) = 0.07$

Capítulo 5

Controle Ótimo com o Funcional Não-Linear

5.1 Introdução

De acordo com [Kimati et al.1995], a utilização de fungicidas é a medida mais eficiente e econômica de se garantir alta produtividade e boa qualidade dos produtos. Também é considerada uma tecnologia que traz impactos negativos ao meio ambiente e à saúde humana.

Empresas têm investido em pesquisas para a obtenção de produtos menos tóxicos, porém em [Azevedo2003] é visto que 32% desses produtos são extremamente tóxicos ou altamente tóxicos, enquanto 27% são pouco tóxicos. E o uso em larga escala desses produtos pode causar: a geração de produtos de degradação ou metabólitos, a persistência de produtos no meio ambiente, os resíduos acima dos limites de tolerância em alimentos, além da intoxicação dos agricultores, a eliminação dos microorganismos responsáveis pela degradação de matéria orgânica e por controle biológico. Ainda esses fungicidas podem causar a seleção de fungos resistentes colocando em risco a eficiência do método.

Preocupados com os fatos citados acima, neste capítulo vamos tomar o mesmo modelo do capítulo anterior que descreve o crescimento da área foliar total lesionada pelos fungos, tentaremos minimizar um funcional quadrático, cuja preocupação adicional agora é o meio ambiente e a saúde humana, ou seja, estamos interessados também em minimizar a quantidade de fungicida que é usada para o controle dessa praga. O termo quadrático u^2 irá representar a severidade dos efeitos do fungicida no meio ambiente e no homem. No sentido de que com pouco fungicida a penalização é pequena (menor que a linear), mas com grandes quantidades a penalização é grande (maior que o linear).

5.2 Modelo para o funcional quadrático

O modelo será

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN(1-N)(1-\beta u) + rR\beta u(1-N), \\ \frac{dR}{dt} = rR(1-N) + \alpha r(N-R)(1-N)(1-\beta u), \\ N(0) = N_0 = S_0 + R_0, 0 \leq u(t) \leq 1, \end{cases} \quad (5.1)$$

que descreve a área foliar total lesionada em cada instante.

O problema de controle ótimo, associado à dinâmica (5.1) consiste em encontrar $0 \leq \bar{u}(t) \leq 1$ que minimize o funcional

$$J(u) = N(t_f) + c_1 \int_0^{t_f} u^2(t) dt, \quad (5.2)$$

sendo

- $N(t_f)$ é a área foliar final lesionada;
- (t_f) o tempo final fixo, que corresponde ao tempo máximo em que é permitida a aplicação do fungicida;
- c_1 é uma constante que serve como uma espécie de peso e como ajuste de unidades;
- u^2 reflete a severidade dos efeitos do fungicida no meio ambiente. Notemos que uma estratégia de otimalidade análoga a esta aparece por exemplo em [Joshi2002], no qual o autor propõe um modelo para o controle dos efeitos do vírus HIV em humanos através da aplicação de drogas e penaliza os efeitos destas drogas no organismo, através de um funcional quadrático.

Nossa finalidade, então, é encontrar uma estratégia para controlar a mancha-angular no feijoeiro através da aplicação de fungicidas, visando a minimização do custo envolvido e a maior produtividade. Além disso, teremos ainda a preocupação em penalizar os possíveis efeitos deste tratamento no meio ambiente e na saúde humana.

Aplicando o Princípio do Mínimo (Máximo) de Pontryagin no problema (5.1) - (5.2) usado e omitindo a variável t de $\lambda_1(t)$ e $\lambda_2(t)$, $N(t)$, $R(t)$, teremos que a função Hamiltoniana será

$$\begin{aligned} H(t, u, \lambda_1, \lambda_2, N, R) &= c_1 u^2 + [-r\beta(1-N)(\lambda_1 + \alpha\lambda_2)(N-R)]u \\ &+ r(1-N)N\lambda_1 + \alpha\lambda_2 r(1-N)(N-R) + r(1-N)R\lambda_2 \end{aligned}$$

As condições necessárias de (5.1)-(5.2) são

$$\lambda'_1(t) = -\lambda_1[r(1 - \beta u)(1 - 2N) - rR\beta u] + \lambda_2 rR - \lambda_2[\alpha r(1 - \beta u)(1 - 2N + R)]$$

$$\lambda'_2(t) = -\lambda_1(r\beta u(1 - N)) - \lambda_2(r(1 - N)[1 - \alpha(1 - \beta u)])$$

com

$$\lambda_1(t_f) = \frac{\partial F(t_f)}{\partial N} = 1,$$

$$\lambda_2(t_f) = \frac{\partial F(t_f)}{\partial R} = 0.$$

A última condição necessária é

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq u \leq 1} H &= \min_{0 \leq u \leq 1} [u^2 c_1 + u[-r\beta(1 - N)(\lambda_1 + \alpha\lambda_2)(N - R)] \\ &+ r(1 - N)N\lambda_1 + \alpha\lambda_2 r(1 - N)(N - R) + r(1 - N)R\lambda_2]. \end{aligned}$$

Da última condição necessária, tomamos a função lagrangeana

$$\begin{aligned} L(t, u, w_1, w_2, N, R) &= -2c_1 u^2 + [r\beta(1 - N)(\lambda_1 + \alpha\lambda_2)(N - R)]u \\ &- r(1 - N)N\lambda_1 - \alpha\lambda_2 r(1 - N)(N - R) - r(1 - N)R\lambda_2 \\ &+ w_1(t)(1 - u) + w_2(t)u \end{aligned}$$

onde as condições necessárias para a função lagrangeana são

- $\frac{\partial L}{\partial w_1} = 1 - u \geq 0, \quad w_1 \geq 0, \quad w_1(t)(1 - u) = 0;$
- $\frac{\partial L}{\partial w_2} = u \geq 0, \quad w_2 \geq 0, \quad w_2(t)u = 0;$
- $\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \frac{1}{c_1}(-\beta\lambda_1 r(1 - N)(N - R) - \beta\lambda_2 \alpha r(N - R)(1 - N) - w_1 + w_2) = 0.$

Então

$$u(t) = \frac{1}{2c_1}(\beta\lambda_1 r(1 - N)(N - R) + \beta\lambda_2 \alpha r(N - R)(1 - N) + w_1 - w_2).$$

Tomando

$$z = \frac{1}{2c_1}(\beta\lambda_1 r(1-N)(N-R) + \beta\lambda_2 \alpha r(N-R)(1-N)),$$

logo

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ z, & 0 < z < 1 \\ 1, & z \geq 1. \end{cases}$$

Como o modelo (5.1) é não linear, fica difícil encontrar $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $N(t)$ e $R(t)$ analiticamente, então faremos simulações numéricas usando o Matlab, [Yang et al.2005], [Kiusalaas2005], cujos programas estarão descritos no apêndice A. Os parâmetros e as unidades de medidas usados serão os mesmos do capítulo anterior.

5.3 Simulações Numéricas

Para as simulações foram considerados inicialmente $N(0) = 0.1$ que é a área total lesionada antes da aplicação do controle, sendo que $R(0) = 0.02$ e $S(0) = 0.08$, $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$ e $t_f = 80$.

Para o primeiro experimento feito, tomamos alguns valores de r (taxa de infecção) obtidos em [Bassanezi et al.1997] para a mancha-angular no cultivar Rosinha G-2. Dentre estes valores de r , escolhemos $r = 0.026 \text{ } 10\text{mm}^2/\text{dia}$ e $r = 0.0336 \text{ } 10\text{mm}^2/\text{dia}$. Foram considerados valores maiores que r_3 e menores que r_1 com o propósito de comparar a variação de $N(t_f)$ e $R(t_f)$ para o funcional linear e para o funcional não-linear em função de r .

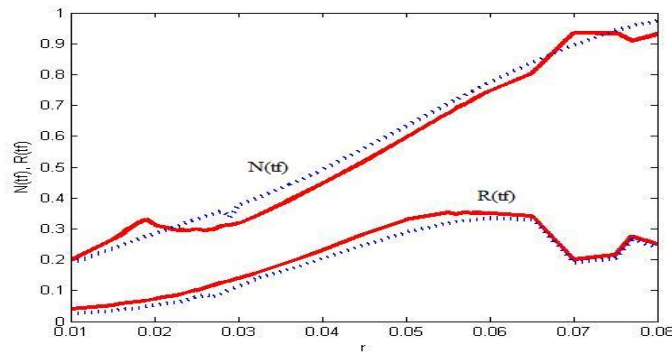


Figura 5.1: $R(t_f)$, $N(t_f)$ para o funcional quadrático (linha pontilhada) e para o funcional linear (linha contínua).

Na figura (5.1) que plota os valores encontrados na tabela (5.1), podemos notar que para a maioria dos valores de r , a área total final lesionada é maior para o funcional quadrático,

Tabela 5.1: Valor de $R(t_f)$ e $N(t_f)$ para o funcional linear e para o funcional não-linear em função da taxa de infecção. Considerando fixos $N(0) = 0.1$, $R(0) = 0.02$, $t_0 = 0$, $t_f = 80$, $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 0.6$, $c_1 = 0.002$.

r	$N(t_f)$ (não-linear)	$N(t_f)$ (linear)	$R(t_f)$ (linear)	$R(t_f)$ (não-linear)	$N(t_f)$ (não-linear)- $N(t_f)$ (linear) (%)
0.01	0.1876	0.1977	0.0397	0.0254	-1.01
0.015	0.2363	0.2643	0.0539	0.0341	-2.8
0.016	0.2459	0.2798	0.0571	0.0380	-3.31
0.017	0.2554	0.3004	0.0604	0.0415	-4.5
0.018	0.2648	0.3174	0.0639	0.0449	-5.26
0.019	0.2742	0.3294	0.0674	0.0485	-5.52
0.02	0.2834	0.3137	0.0716	0.0524	-3.03
0.021	0.2926	0.3054	0.0763	0.0569	-1.28
0.022	0.3018	0.2990	0.0816	0.0600	-0.28
0.023	0.3110	0.2955	0.0874	0.0614	1.55
0.024	0.3202	0.2944	0.0936	0.0706	2.58
0.025	0.3294	0.2984	0.0998	0.786	3.1
0.026	0.3387	0.2940	0.1079	0.0854	4.47
0.027	0.3480	0.2982	0.1153	0.0815	4.98
0.028	0.3576	0.3096	0.1258	0.0879	4.8
0.029	0.3673	0.3117	0.1308	0.1045	5.56
0.03	0.3771	0.3165	0.1401	0.1114	6.06
0.032	0.3976	0.3400	0.1560	0.1360	5.76
0.036	0.4418	0.3908	0.1911	0.1680	5.18
0.04	0.4909	0.4453	0.2303	0.2029	4.56
0.045	0.5588	0.5171	0.2835	0.2472	4.17
0.05	0.6312	0.5949	0.3285	0.2872	3.63
0.055	0.7039	0.6732	0.3522	0.3175	3.07
0.056	0.7181	0.6911	0.3465	0.3220	1.99
0.057	0.7322	0.7031	0.3545	0.3259	2.91
0.058	0.7461	0.7186	0.3513	0.3293	2.75
0.06	0.7734	0.7457	0.3495	0.3343	2.77
0.065	0.8377	0.8040	0.3418	0.3303	3.37
0.07	0.8954	0.9356	0.2005	0.1903	-4.02
0.075	0.9425	0.9342	0.2158	0.2053	0.83
0.077	0.9564	0.9087	0.2757	0.2654	4.77
0.08	0.9710	0.9304	0.2498	0.2390	4.06

porém para todos valores de r a área lesionada por fungos resistentes é menor neste caso. Isso ocorre porque está sendo aplicado menos fungicida na plantação e então a área final lesionada aumenta, mais este aumento não passa de 6.06%, como pode ser notado na tabela (5.1). Além disso, o meio ambiente e a saúde humana serão menos afetados e a seleção natural de fungos resistentes diminui, característica esta que não coloca em risco a eficiência

do método.

Abaixo tomaremos alguns valores de r e mostraremos a quantidade de fungicida usado para o controle com o funcional linear e para o controle com o funcional não-linear.

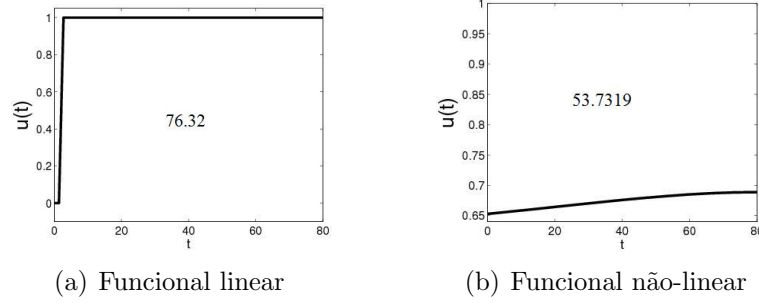


Figura 5.2: Controle para o Funcional Linear e Não-Linear para $r=0.03$.

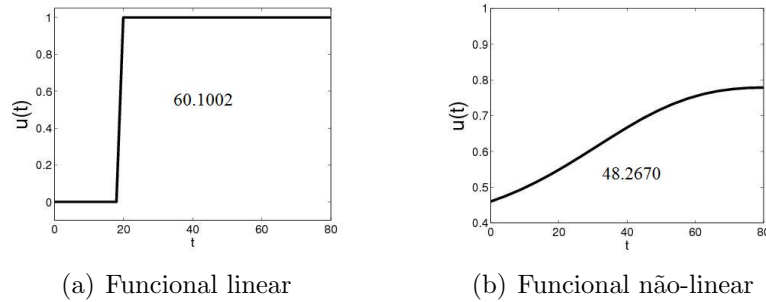


Figura 5.3: Controle para o Funcional Linear e Não-Linear para $r=0.065$.

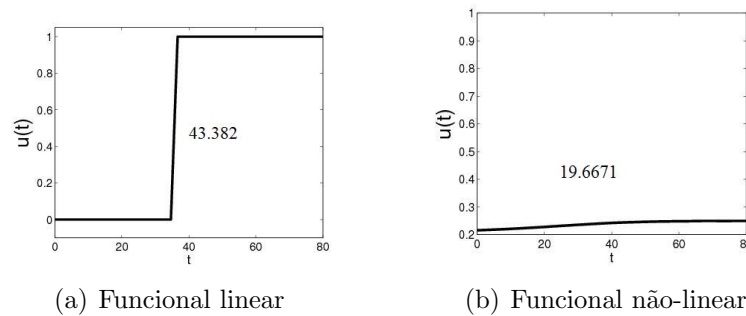


Figura 5.4: Controle para o Funcional Linear e Não-Linear para $r=0.08$.

Através das figuras (5.2, 5.3, 5.4), confirmamos que a quantidade de fungicida usado para o controle com o funcional não-linear é menor do que para o controle com funcional linear. Isso pode ser melhor verificado quando analisamos a área compreendida abaixo desses gráficos, que pode ser obtida usando a função definida (*quad*) do Matlab, que realiza a integração

numérica, veja [Yang et al.2005], [Kiusalaas2005]. Como por exemplo, na figura (5.2), a área compreendida abaixo do gráfico quando tomamos o funcional linear é de 96.32 e quando tomamos o funcional não-linear é de 53.7319, o que significa que em média está sendo usado uma taxa de 0.954 (95.4%) por dia de fungicida para o controle da doença para o funcional linear e uma taxa de 0.671 (67.1%) por dia de fungicida quando tomamos o funcional não-linear, ou seja, estamos usando 28,3% de fungicida a mais por dia quando tomamos o funcional linear ao invés do não-linear. Este fato mostra que nossa principal hipótese para o uso do funcional não-linear, que era a minimização do produto químico usado, está sendo cumprida.

No próximo experimento aumentaremos a concentração do fungicida de $\beta = 0.6, c_1 = 0.002$ para $\beta = 0.8, c_1 = 0.004$ e fixaremos $r = 0.04$.

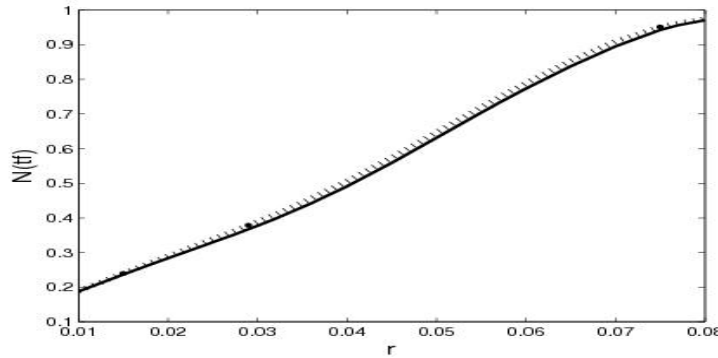
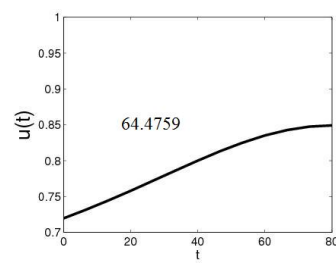


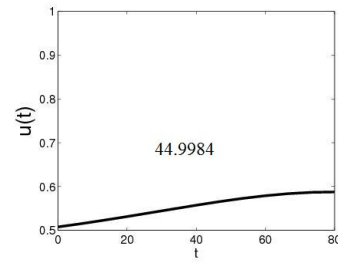
Figura 5.5: $N(t_f)$ para fungicida mais concentrado (linha pontilhada) e para o menos concentrado (linha contínua).

Analisando a figura (5.5), podemos notar que a área final lesionada é maior para o fungicida mais concentrado do que para o menos concentrado. Se não estivéssemos preocupados com os danos que este causa no meio ambiente, então diríamos que este aumento da concentração não compensa pois a área final lesionada fica maior quando há esta mudança. Porém, a quantidade de fungicida usado é bem menor, como podemos notar na figura 5.6.

Analisando a área compreendida abaixo dos gráficos encontrados na figura 5.6, podemos notar que está sendo usado em média 80.59% de produto químico por dia para o controle da doença quando tomamos o fungicida menos concentrado e 56.248% por dia quando tomamos o fungicida mais concentrado. Assim, estamos economizando 24.342% de produto químico por dia quando usamos o fungicida mais concentrado ao invés do menos concentrado. Então para nosso interesse compensa o uso do fungicida mais concentrado.



(a) Fungicida menos concentrado



(b) Fungicida mais concentrado

Figura 5.6: Controle não-linear para o fungicida mais concentrado e para o menos concentrado.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho encontramos estratégias ótimas para a aplicação de fungicida na lavoura, mais especificamente na plantação de feijão.

Inicialmente tínhamos a intenção de maximizar a produção com um menor custo. Visto que, a preocupação com o meio ambiente tem sido um assunto muito discutido nesses últimos tempos, baseamo-nos em um problema, que não só tem por objetivo a minimização do custo do controle e da maximização da produção, mas também, a diminuição da quantidade de produto químico usado para o controle, pois assim as agressões ao meio ambiente e à saúde humana serão menores. Para modelar tal situação, utilizamos um funcional quadrático, pois esta estratégia de otimalidade penaliza os efeitos do fungicida no meio ambiente.

Os resultados obtidos com o funcional quadrático foram promissores e apresentaram resultados interessantes quando comparados com os resultados do funcional linear. De fato, a quantidade de fungicida usado para o controle quadrático foi menor, e assim teremos potencialmente menos agressões para o meio ambiente e a saúde do homem. Aliado a isso, garantimos a eficiência do método, pois há menos seleção natural dos fungos resistentes.

A área final lesionada para o funcional quadrático foi maior comparada com o funcional linear, mas este aumento não ultrapassou 6.06%. Porém, a quantidade de fungicida diminuiu e conseqüentemente o custo do controle também caiu.

De acordo com o Professor Doutor Modesto Barreto da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias de Jaboticabal, Departamento de Fitossanidade, essas estratégias da aplicação de fungicidas na lavoura que encontramos, ainda não foram testadas pelos agrônomos.

Os agrônomos não fazem a aplicação do fungicida como prevenção, diz que o ideal seria fazer a aplicação do fungicida assim que aparecer os primeiros sintomas, como funciona nosso controle, porém, na maioria das vezes os agricultores não ficam verificando sua plantação para detectarem esses primeiros sintomas, por isso, usam a época de florescimento, que é a fase mais crítica da plantação, pois se algo acontecer neste período a produção pode ser muito

danificada, para a aplicação do fungicida.

São feitas no máximo duas ou três aplicações do fungicida no cultivar, pois mais que isso é inviável financeiramente e essas aplicações têm intervalo mínimo de quinze dias.

Quanto à agressão ao meio ambiente, os próprios fabricantes de fungicidas já têm esta preocupação, por isso estão tentando fabricar produtos químicos menos tóxicos à plantação e que agredem menos o meio ambiente.

E com relação a seleção natural dos fungos, é aconselhável a variação do produto químico usado para o controle.

Pensamos como trabalhos futuros, substituir o controle normal por um controle impulsivo, pois esta estratégia de otimalidade é mais parecido com que os agrônomos praticam. Também fazer o controle fuzzy da aplicação de fungicidas na lavoura.

Apêndice A

Programas Computacionais

A.1 Código-fonte do Controle linear Seção(4.2).

%%% Equações Adjuntas

```
function dlamdt = adjunta (t,lam,te,tf,r,b,alf,sol)
```

```
ut = ucontrol (t,te,tf);
```

```
xt = deval (sol,t);
```

```
dlamdt (1) = -lam(1)*(r*(1-b*ut)*(1-2*xt (1))...
```

```
-r*b*ut*xt (2))+lam (2)*r*xt (2)...
```

```
-lam (2)*alf*r*(1-b*ut)*(1-2*xt (1)+xt (2));
```

```
dlamdt (2) = -lam(1)*r*b*ut*(1-xt (1))...
```

```
-r*(1-xt (1))*(1-alf*(1-b*ut))*lam (2);
```

```
dlamdt = dlamdt';
```

%%%

%%%Equações de Estado

```
function dxdt = derivada (t,x,te,tf,r,b,alf)
```

```
ut = ucontrol (t,te,tf);
```

```
dxdt (1) = r*x (1)*(1-x (1))*(1-b*ut)+r*x (2)*b*ut*(1-x (1));
```

```
dxdt (2) = r*x (2)*(1-x (1))+alf*r*(x (1)-x (2))*(1-x (1))*(1-b*ut);
```

```
dxdt = dxdt';
```

%%%

```
%%% Função Controle
```

```
function u =ucontrol (t,te,tf)
```

```
if t<te
```

```
    u = 0;
```

```
else
```

```
    u = 1;
```

```
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Resolve as equações usando o ode45
```

```
% Constroi a res que é o coeficiente de u em H(ultima condição necessária
```

```
% res está ao quadrado pois queremos encontrar o tempo onde g zera
```

```
%(ponto de switch)
```

```
function res = funobj (te,tf,r,b,alf,c,No,Ro)
```

```
sol = ode45 (@(t,x)derivada (t,x,te,tf,r,b,alf),[0 tf],[No Ro]);
```

```
NR = deval (sol,te);
```

```
[t h] = ode45 (@(t,x)adjunta (t,x,te,tf,r,b,alf,sol),[tf te 0],[1 0]);
```

```
lam1 = h (2,1);
```

```
lam2 = h (2,2);
```

```
N = NR (1);
```

```
R = NR (2);
```

```
res = [c-r*b*(1-N)*(lam1+alf*lam2)*(N-R))*...
```

```
*(c-r*b*(1-N)*(lam1+alf*lam2)*(N-R)];
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function bangbangmi (tf,te)
```

```
%%% Parâmetros do Problema
```

```
r = 0.01;
```

```
b = 0.6;
```

```
alf = 10^-5;
```

```
c = 0.002;
```

```
%%% Condição inicial
```



```
No = 0.1;
Ro = 0.02;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Encontrando o tempo de Switch ou onde o controle passa a ser um.
% 'fminbnd' esta nos da a abcissa do ponto minimo de res (g)
opt = optimset ('MaxFunEvals',10000);
[te fval] = fminbnd (@(t)funobj (t,tf,r,b,alf,c,No,Ro),0,tf,opt)
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%% Gráficos
```

```
sol = ode45 (@(t,x)derivada (t,x,te,tf,r,b,alf),[0 tf],[No Ro]);
[t h] = ode45 (@(t,x)adjunta (t,x,te,tf,r,b,alf,sol),[tf 0],[1 0]);
```

```
for i = 1:length (t);
    u (i) = ucontrol (t (i),te,tf);
end
figure (1)
plot (t,deval (sol(1),t));
xlabel('t'); ylabel('N(t),R(t)');
deval(sol,t)
figure (2)
plot (t,h);
figure (3)
plot (t,u);
```

A.2 Código-fonte do controle Seção(4.2).

```
% Aqui colocamos as condições de contorno, sendo ya(1)=N(t_0), ya(2)=R(t_0),
%yb(3)= lambda_1(t_f), yb(4)=lambda_2(t_f)
function res = ccontorno(ya, yb)

res = [ya(1)-0.1; ya(2)-0.02; yb(3)-1; yb(4) ];
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function dydt = funccountorno(t, y)
% parâmetros do problema
r = 0.03;
b = 0.6;
alf = 10^(-5);
c = 0.002;
tbarra=80;

if t<tbarra
    u = 0;
else
    u = 1;
end

% Aqui são colocadas as equações de estado e as equações adjuntas, sendo
% y(1)=N(t), y(2)=R(t), y(3)=lambda_1(t), y(4)=lambda_2(t)

dydt = [r*y(1)*(1-y(1))*(1-b*u)+r*y(2)*b*u*(1-y(1))
        r*y(2)*(1-y(1))+alf*r*(y(1)-y(2))*(1-y(1))*(1-b*u)
        -y(3)*(r*(1-b*u)*(1-2*y(1))-r*b*u*y(2))+y(4)*r*y(2)-...
        -y(4)*(alf*r*(1-b*u)*(1-2*y(1)+y(2)))
        -y(3)*r*b*u*(1-y(1))-r*(1-y(1))*(1-alf*(1-b*u))*y(4)];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Este programa resolve o problema de contorno sem controle
solinit = bvpinit(linspace(0,80,100), [0.1, 0.02, 1, 2]);
sol= bvp4c('funccountorno', 'cccontorno', solinit);

% Graficos
figure, plot(sol.x, sol.y(1,:), 'r', sol.x, sol.y(2,:), 'b')
xlabel('t'); ylabel('N(t), R(t)');
figure, plot(sol.x, sol.y(3,:), 'r', sol.x, sol.y(4,:), 'b')

```

A.3 Código-fonte do Controle quadrático Seção(5.3).

```

%aqui colocamos as condições de contorno
%ya(1)=N(0), ya(2)=R(0), yb(3)= lambda1(tf), yb(4)=lambda2(tf)
function res = cccontorno(ya, yb)

res = [ya(1)-0.1; ya(2)-0.02; yb(3)-1; yb(4) ];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Função Controle
function u = ucontrol (z)

if (z <= 0)
    u = 0;
elseif (z<1)
    u=z;
else
    u = 1;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function dydt = funccontorno(t, y)

%Parâmetros do modelo
r = 0.08;
b = 0.6;
alf = 0.00001;
c = 0.002;

z = (1/(2*c))*[b*y(3)*r*(1-y(1))*(y(1)-y(2))+y(4)*...
*b*alf*r*(y(1)-y(2))*(1-y(1))];
ut = ucontrol (z);

%Equações de estado e equações adjuntas
dydt = [r*y(1)*(1-y(1))*(1-b*ut)+r*y(2)*b*ut*(1-y(1))

```

```

r*y(2)*(1-y(1))+alf*r*(y(1)-y(2))*(1-y(1))*(1-b*ut)
-y(3)*(r*(1-b*ut)*(1-2*y(1))-r*b*ut*y(2))+y(4)*r*y(2)-...
-y(4)*(alf*r*(1-b*ut)*(1-2*y(1)+y(2)))
-y(3)*r*b*ut*(1-y(1))-r*(1-y(1))*(1-alf*(1-b*ut))*y(4)];

```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Este programa resolve o problema de contorno com o controle quadrático
```

```

solinit = bvpinit (linspace(0,80,2), [0.1, 0.02, 1, 0]);
sol= bvp4c('funccontorno', 'cccontorno', solinit);

```

```

r = 0.08;
b = 0.6;
alf = 0.00001;
c = 0.002;

```

```

za = (1/(2*c))*(b*r*sol.y(3,:).*(1-sol.y(1,:)).*(sol.y(1,:)-sol.y(2,:))...
+b*alf*r*sol.y(4,:).*(sol.y(1,:)-sol.y(2,:)).*(1-sol.y(1,:)))

```

```
u = zeros(1,p);
```

```

for i=1:p, u(i) = ucontrol(za(i)); end;
u;

```

```
% Graficos
```

```

figure, plot(sol.x, sol.y(1,:), 'r', sol.x, sol.y(2,:), 'b')
xlabel('t'); ylabel('N(t), R(t)');
figure, plot(sol.x, sol.y(3,:), 'r', sol.x, sol.y(4,:), 'b')
figure, plot(sol.x, u, 'r')

```

Referências Bibliográficas

- [Azevedo2003] Azevedo, L. A. S. 2003. *Fungicidas Protetores: fundamentos para o uso racional*. EMOPI, Campinas.
- [Barret1983] Barret, J. A. 1983. Estimating relative fitness in plant parasites: Some general problems. *Phytopathology*, 4:510–512.
- [Bassanezi et al.1997] Bassanezi, R. B., Amorin, L., Filho, A. B., and Godoy, C. V. 1997. Análise comparativa entre a ferrugem e a mancha angular do feijoeiro: efeito da temperatura nos parâmetros monocíclicos. *Fitopatologia brasileira*, 22:432–436.
- [Baumeister and Leitão2008] Baumeister, J. and Leitão, A. 2008. *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro.
- [Boyer1974] Boyer, C. B. 1974. *História da Matemática*. Editora Edgard Blücher, São Paulo.
- [de Araújo and Bossolan2006] de Araújo, A. P. U. and Bossolan, N. R. S. 2006. Noções de taxonomia e classificação: Introdução à zoologia.
- [Faleiros and Yoneyama2002] Faleiros, A. C. and Yoneyama, T. 2002. *Teoria Matemática de Sistemas*. ITA, Arte & Ciência, São José dos Campos.
- [Ghini et al.1994] Ghini, R., Vendite, L. L., and Petrucci, A. A. 1994. Dosagens de fungicidas: avaliação de seus efeitos na resistência de fungos, através de um modelo matemático. *Fitopatologia brasileira*, 19:514–519.
- [Girsanov1972] Girsanov, I. V. 1972. *Lectures on mathematical theory of extremum problems. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin-New York.
- [Golçalves and Silveira] Golçalves, P. B. and Silveira, R. A. M. Introdução ao cálculo variacional.
- [Joshi2002] Joshi, H. R. 2002. Optimal control of an hiv immunology model. *Optimal Control Applications and Methods*, 4:199–213.

- [Kamien and Schwartz1991] Kamien, M. I. and Schwartz, N. L. 1991. *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. ELSEVIER SCIENCE, North-Holland, Amsterdam.
- [Kimati et al.1995] Kimati, H., Filho, A. B., and Amorin, L. 1995. *Manual de Fitopatologia, 1: Princípios e Conceitos*. Editora Agronômica Ceres, São Paulo.
- [Kiusalaas2005] Kiusalaas, J. 2005. *Numerical Methods in Engineering with Matlab*. Cambridge University Press, New York.
- [Kuhn and Junior] Kuhn, G. B. and Junior, A. G. Considerações sobre alguns fungicidas sistêmicos e recomendações sobre seu uso no controle do míldio da videira.
- [Leckar1996] Leckar, H. F. 1996. *Modelos matemáticos para populações de células tumorais com estrutura de tamanho e o problema da resistência celular à utilização de fármacos de ação instantânea*. PhD thesis, IMECC-Unicamp.
- [Melo2000] Melo, C. 2000. A ciência dos descobrimentos. *Ciência hoje*, 27:16–23.
- [Philippi1988] Philippi, B. 1988. *Introducción a la Optimización de Sistemas*. Ediciones Universidad Católica de Chile, Santiago-Chile.
- [Pria et al.2003] Pria, M. D., Amorin, L., and Filho, A. B. 2003. Quantificação de componentes monocíclicos da mancha angular do feijoeiro. *Fitopatologia brasileira*, 28:394–400.
- [Rafikov and de Araújo1995] Rafikov, M. and de Araújo, O. C. B. 1995. *Cálculo Variacional*. Unijuí, Ijuí-RS.
- [Sannazzaro et al.2003] Sannazzaro, A. M., Wutke, E. B., Oliveira, S. H. F., Castro, J. L., Gallo, P. B., Martins, A. L. M., Bortoleto, N., Sabino, J. C., Kanthack, R. A. D., Ishimura, I., Silveira, L. C. P., Dornelles, C. R. F., Pereira, J. C. V. N. A., Sakai, M., Saes, L. A., and Bacchi, G. S. 2003. Severidade da mancha angular (phaeiosariopsis griseola) em cultivares de feijoeiro no estado de são paulo. *Unidade de Pesquisa e Desenvolvimento de Sorocaba*, 70:315–321.
- [Varassin1996] Varassin, C. 1996. *Modelagem Matemática para o crescimento de populações de fungos e o desenvolvimento da resistência a fungicidas*. PhD thesis, IMECC-unicamp.
- [Vendite1988] Vendite, L. 1988. *Modelagem Matemática para o crescimento tumoral e o problema da resistência celular aos farmacos anti-blásticos*. PhD thesis, IMECC-Unicamp.

- [Vieira et al.2004] Vieira, F., Rodrigues, L. B., and Agustini, E. 2004. O problema da braquistócrona. *FAMAT em revista*, 3:137–148.
- [Vieira et al.2005] Vieira, F. B. P., Rodrigues, L. B., and Agustini, E. 2005. O teorema isoperimétrico e o problema da cerca. *Faculdade de Matemática(Famat), Universidade Federal de Uberlândia(Ufu-MG)*, 4:141–152.
- [Wander2005] Wander, A. E. 2005. Cultivo do feijão irrigado na região noroeste de minas gerais.
- [Yang et al.2005] Yang, W., Cao, W., Shung, T. S., and Morris, J. 2005. *Applied Numerical Methods Using Matlab*. Wiley-Interscience, New Jersey.
- [Zotin1999] Zotin, R. 1999. *Controle Ótimo da Aplicação de Fungicidas na Lavoura*. PhD thesis, IMECC-Unicamp.
- [Zotin et al.2000] Zotin, R., Bassanezi, R. C., and Yang, H. M. 2000. Modelos interespecíficos para controle químico de Áreas foliares lesionadas por fungos. *TEMA- Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 1:253–266.

Súmula Curricular

Dados Pessoais

Nome: Michele Cristina Valentino

Naturalidade: São Paulo Data de Nascimento: 19\04\1985

Educação

Ensino Médio: Escola Estadual Castello Branco

Cidade: Limeira

Término: 2002

Graduação: Licenciatura Plena em Matemática

Universidade: Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP

Campus: FCT – Presidente Prudente

Início: 03\2004 - Término: 12\2007

Formação Complementar

2009	Teoria de controle ótimo. (Carga horária: 36h). Universidade Federal do ABC, UFABC, Brasil.
2009 - 2009	Modelagem de dados com sistemas Neuro-Fuzzy. (Carga horária: 6h). Universidade Federal de Mato Grosso.
2008 - 2008	Curso de Verão (Análise na Reta). (Carga horária: 48h). Universidade Federal do ABC, UFABC, Brasil.
2007 - 2007	Curso de verão(Cálculo Avançado). (Carga horária: 20h). Unesp campos de Rio Preto.
2006 - 2006	Extensão universitária em Resolução de exercícios com criatividade. (Carga horária: 20h). Universidade de São Paulo.
2006 - 2006	Construção de material para o ensino da Trigonometria. Unesp presidente prudente.
2005 - 2005	Introdução ao Matlab. (Carga horária: 6h). Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente.
2005 - 2005	Análise de Softwares Computacionais para o Ensino da Matemática. Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente.
2005 - 2005	Introdução ao latex. (Carga horária: 6h). Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente.
2005 - 2005	Introdução ao Tratamento das Informações nos EM e EF. Serviço Social de Aprendizagem Comercial.

Atividades Acadêmicas

Bolsa Mestrado: UFABC Período:01\2008 – 12\2008

Bolsa Mestrado: CAPES Período:01\2008 – 12\2009

Publicações Artigos

Resumo Publicado em Anais de Congresso:

1. VALENTINO, M. C. ; Brandão A.J.V. . Controle ótimo não linear da aplicação de fungicidas na lavoura. In: XXXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2009, Cuiabá. Anais do XXXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2009. v. 2. p. 137-138.
- 2 VALENTINO, M. C. ; FERNANDES, K. P. ; FURKOTTER, M. . As Bandeiras Nacionais: Um Recurso para Desenvolver Conteúdos Matemáticos Utilizando a Linguagem de Programação Logo. In: XXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2006, Campinas. Anais do XXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2006. v. 1. p. 1-1.
3. FERNANDES, K. P. ; VALENTINO, M. C. ; FURKOTTER, M. . A copa do mundo 2006: tema utilizado para desenvolver conteúdos matemáticos com alunos do ensino fundamental. In: I Simpósio de Matemática da FCT, 2006, Presidente Prudente. Anais do I Simpósio de Matemática da FCT, 2006. v. 1. p. 1-1.
4. FERNANDES, K. P. ; VALENTINO, M. C. ; FURKOTTER, M. . O uso de projetos interdisciplinares no desenvolvimento de conteúdos matemáticos do ensino fundamental. In: XVIII Congresso de Iniciação Científica da Unesp, 2006, Bauru. Anais do XVIII Congresso de Iniciação Científica da Unesp. São Paulo : Unesp, 2006. v. 1. p. 1-1.

Prêmios

2009	Quarta colocação na Semana do Centro de Matemática, Computação e Cognição apresentado o trabalho intitulado 'Controle ótimo não linear da mancha-angular no feijoeiro, com condição ambiental ', UFABC.
------	---