Prova de Seleção para o Mestrado
Ingresso em 2024-1

27 de outubro de 2023

Justifique todas as suas respostas.

Álgebra Linear

1. Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

Determine todos os valores de k para os quais o sistema:

(a) Não tenha solução.

(b) Tenha solução única.

(c) Tenha infinitas soluções.

2. Suponha que o determinante da matriz $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ seja igual a 8.

Encontre o determinante das seguintes matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} -3a_1 & -3a_2 & -3a_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ 5b_1 & 5b_2 & 5b_3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2a_1 - 3b_1 & 2a_2 - 3b_2 & 2a_3 - 3b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \end{pmatrix}$

3. Encontre o polinômio característico e, se existirem, os autovalores e autovetores da matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Análise

4. Mostre que existem infinitos números reais $x \in \mathbb{R}$ tais que $e^x \cos(x) = x$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(0) = 0$. Mostre que dado $t \in \mathbb{R}$ fixo, existe $c \in [0, 1]$ tal tal que $f(t) = tf'(tc)$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e T-periódica para algum $T > 0$, ou seja, $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Moste que f admite uma primitiva T-periódica se, e somente se, $\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$.