

Prova de Seleção para o Mestrado Ingresso em 2023-3

1 de julho de 2023

Justifique todas as suas respostas.

Álgebra Linear

1. Determine se o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ ab & 2a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço do espaço das matrizes de tamanho 2×2 .
2. Considere a matriz $A := \begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ -a & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e seja W o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado pelas linhas de A .
 - a) Determine os valores de a para os quais W tem dimensão 1.
 - b) Determine os valores de a para os quais W tem dimensão 2.
3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $(1, 0)$ e $(-2, 1)$ são autovetores de T com autovalores 1 e -1 respectivamente.
 - a) Determine $T(-3, 2)$.
 - b) O operador T é diagonalizável?

Análise

4. Demonstre ou apresente um contraexemplo: o conjunto $\left\{ \frac{x^3 - x + 1}{2 + x} \mid x \in [-1, 1] \right\}$ é limitado superiormente por 2.
5. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que para cada b na imagem de f , existem exatamente 2 elementos em $[0, 1]$ com imagem b . Mostre que f não é contínua.

6. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que $f'(a) = 0$, e $f''(a) > 0$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $f(x) > f(a)$.