

Prova de Seleção para o Doutorado

Ingresso em 2024-1

27 de outubro de 2023

Justifique todas as suas respostas.

Álgebra Linear

1. Suponha que o determinante da matriz $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ seja igual a 8.

Encontre o determinante das seguintes matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} -3a_1 & -3a_2 & -3a_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \\ 5b_1 & 5b_2 & 5b_3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2a_1 - 3b_1 & 2a_2 - 3b_2 & 2a_3 - 3b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \end{pmatrix}$

2. Sejam V um espaço vetorial e U, W dois subespaços de V . Quais das afirmações abaixo são verdadeiras? Justifique sua resposta.

(a) $U \cap W$ é um subespaço de V .

(b) $U \cup W$ é um subespaço de V .

(c) $U \setminus W$ é um subespaço de V .

3. Decida se a aplicação $T : M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$ definida por $TX = X^t$ é diagonalizável, onde $M_{n \times n}$ denota o espaço de matrizes $n \times n$ de entradas reais, e X^t a transposta de X . Em caso positivo determine os autovalores e autovetores associados.

Análise

4. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que existe $0 < c < 1$ satisfazendo a seguinte propriedade: dado $x \in [0, 1]$, existe $y \in [0, 1]$ tal que $|f(y)| \leq c|f(x)|$. Mostre que f se anula em algum ponto de $[0, 1]$.
5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que não muda de sinal e tal que

$$\int_0^{x^3} f(t) \, dt = \int_{x^5}^1 f(t) \, dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Mostre que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \int_{-x^3}^{x^3} \frac{\cos^2(y)-1}{y^2} \, dy$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.