

Prova de Seleção para o Doutorado

Ingresso em 2023-3

1 de julho de 2023

Justifique todas as suas respostas.

Álgebra Linear

1. Determine se o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ ab & 2a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço do espaço das matrizes de tamanho 2×2 .
2. Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y, z) = (4x + z, 2x + 3y + 2z, x + 4z)$, relativa a essa base, seja diagonal.
3. Considere o $\mathbb{R}$ -espaço vetorial $V := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, e a transformação linear $T \left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ a+b & 2c \end{bmatrix}$
 - a) Determine os autovalores de T .
 - b) Determine os autovetores de T associados com os autovalores encontrados no item anterior.
 - c) Encontre uma base de V na qual a matriz de T é diagonal.

Análise

4. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que para cada b na imagem de f , existem exatamente 2 elementos em $[0, 1]$ com imagem b . Mostre que f não é contínua.

5. Mostre que se uma sequência $(f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ de funções contínuas converge uniformemente a uma função f em $A \subseteq \mathbb{R}$, então f é contínua em A .
6. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que $f'(a) = 0$, e $f''(a) > 0$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $f(x) > f(a)$.