Prova de Seleção para o Mestrado Ingresso em 2023-1

22 de outubro de 2022

Análise

1. Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x-1} .$$

Justifique sua resposta.

2. Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e com derivada contínua. Suponha que $\{f'(x) : x \in (a, b)\} = (-3, 2]$. Mostre que o conjunto

$$Y = \left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| : x, y \in [a, b], x \neq y \right\}$$

é limitado e determine seu supremo.

3. Prove ou dê um contraexemplo: se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

4. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e defina:

$$F(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Mostre que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $F'(x)$.

Álgebra linear

5. Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y, z) = (4x + z, 2x + 3y + 2z, x + 4z)$, relativa a essa base, seja diagonal.

6. Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz fixa. Mostre que o espaço de soluções do sistema homogêneo $Ax = 0$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.
7. Suponha que no sistema de equações lineares com incógnitas x, y , dado abaixo, todos os coeficientes $(a, b, \bar{a}, \bar{b})$ sejam não nulos, e que esse sistema possua infinitas soluções.

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ \bar{a}x + \bar{b}y &= \bar{c} \end{cases}$$

Mostre que, para qualquer par ordenado (x_0, y_0) ,

$$\frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\bar{a}x_0 + \bar{b}y_0|}{\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}}.$$

8. Dados espaços vetoriais V e W , demonstre as afirmações abaixo:
- (a) Uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ é um isomorfismo se, e somente se, $Nuc(T) = \{\mathbf{0}\}$ e $Im(T) = W$.
- (b) Se $T : V \rightarrow W$ é um isomorfismo e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V , então $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ é base de W , e, consequentemente, $dim(V) = dim(W)$.