Prova de Seleção para o Doutorado Ingresso em 2023-1

22 de outubro de 2022

Análise

1. Diz-se que uma sequência de números reais (x_n) é uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$. Prove que uma sequência (x_n) é convergente se, e somente se, é de Cauchy.
2. Sejam $a < b < c$ números reais, $A = (a, b) \cup (b, c)$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua.
 - a) Mostre que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x)$ existem.
 - b) Mostre que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x)$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de A satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, tem-se que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente.
3. Prove ou dê um contraexemplo: se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que f' é uma função limitada, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que a função

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + cx$$

é injetora.

4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}| \leq 2$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Prove que existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y_0\}| = 1$.

Álgebra linear

5. Dizemos que uma matriz quadrada A é diagonalizável se existe uma matriz inversível P de mesma ordem tal que $PAP^{-1} = D$, onde D é uma matriz

diagonal. Mostre que uma matriz $A_{n \times n}$ dada em bloco,

$$\begin{bmatrix} B_{k \times k} & 0_{k \times (n-k)} \\ 0_{(n-k) \times k} & C_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix},$$

é diagonalizável se, e somente se, as matrizes $B_{k \times k}$ e $C_{(n-k) \times (n-k)}$ são diagonalizáveis.

6. Considere o $\mathbb{R}$ -espaço vetorial $\mathbb{R}_3[x]$ dos polinômios de grau menor ou igual a 3 com coeficientes em $\mathbb{R}$, e $B = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)\}$, onde

$$f_1(x) = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x(x-2)(x-3)$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)$$

$$f_4(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

- a) Mostre que B é uma base de $\mathbb{R}_3[x]$.
- b) Se $g(x) \in \mathbb{R}_3[x]$, encontre o vetor de coordenadas de $g(x)$ com respeito à base B .
7. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas transformações lineares. Mostre que $S \circ T$ não pode ser um isomorfismo.
8. Sejam V um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Se todo vetor não-nulo de V for um autovetor de T , mostre que $T = \lambda I$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e I é a identidade.