Universidade Federal do ABC

Prova de seleção para o mestrado em matemática

Instruções:

- Esta prova contém 10 questões.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Faça as questões na ordem de sua preferência.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão.
- Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. Em particular, calculadoras e celulares não são permitidos.
- A prova pode ser feita a lápis, mas as respostas/conclusões devem ser feitas a caneta.
- Para a correção, **serão consideradas apenas as resoluções nas folhas de respostas**.
- Escreva seu nome em cada folha de resposta e enumere as páginas.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de transcorrida uma hora do seu início, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.
- Tempo máximo de prova: 4 horas.

Parte 1: Álgebra Linear

1. Encontre $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear tal que:

   $Im(T) = span\{(1, 0, -1),\ (1, 2, 2)\}$, onde $Im(T)$ denota a imagem do operador linear T.

2. Considere o operador linear $T:\ \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por

$$T(p(t)) = p''(t) + tp'(t) - p(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

onde $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{p(t) = a + bt + ct^2;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(a) Determine $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ a matriz de T em relação à base canônica $\mathcal{B} = \{1,\ t,\ t^2\}$.

(b) Verifique se T é injetor e/ou sobrejetor. Justifique suas respostas.

(c) Determine todos os autovalores e autoespaços associados de T.

(d) T é diagonalizável? Em caso positivo encontre uma base $\mathcal{D}$ que diagolizada T e a respectiva matriz diagonal $[T]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}$.

3. Suponha que U e W sejam subespaços distintos de dimensão 4 de um espaço vetorial de dimensão 6. Encontre as possíveis dimensões de $U \bigcap W$.

4. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita n. Defina $V^* = \{f\ : V \to \mathbb{R}; f$ é uma função linear$\} \subset \mathcal{F}(V;\mathbb{R})$ onde $\mathcal{F}(V;\mathbb{R}) = \{f\ : V \to \mathbb{R}; f$ é uma função$\}$.

(a) Mostre que V^* é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(V;\mathbb{R})$.

(b) Mostre que $dim\, V^* = dim\, V = n$ onde $dim\, V$ denota a dimensão do espaço vetorial V.

5. Prove que uma projeção $P : E \to E$, num espaço com produto interno, é ortogonal (isto é, $Nuc(P) = IM(P)^{\perp}$) se, e somente se, para todo $v \in E$ tem-se $\langle Pv, v - Pv\rangle = 0$.

Parte 2: Análise na Reta

6. Calcule

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - sen(3x)}{x + sen(2x)}$

(b) $\dfrac{dy}{dx}$, onde $y = sen(tg(\sqrt{1+x^3}))$

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é aditiva se satisfaz

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

   (a) Mostre que se f é aditiva então $f(0) = 0$ e $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

   (b) Mostre que se f é aditiva e contínua em $x = 0$ então f é contínua em $\mathbb{R}$.

   (c) Suponha que f seja aditiva e contínua e seja $c = f(1)$. Mostre que $f(x) = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Considere $g_c(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ c, & x = 0. \end{cases}$

   (a) Encontre os valores de c para os quais a função g_c seja contínua em $x = 0$.

   (b) Mostre que, para os valores encontrados em (a), a função g_c resulta ser diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}$ mas que g' não é contínua em $x = 0$.

9. Seja $f\ [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\forall x \in [0,1]$ tem-se $0 \leq f(x) \leq 1$. Prove que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$, isto é, f admite pelo menos um ponto fixo em $[0,1]$.

10. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência definida por

$$a_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = \left(\frac{a_n(4-a_n)}{2}\right), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

   (a) Mostre que $1 \leq a_n \leq 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Mostre que $a_{n+1} \geq a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

   (c) Justifique a existência do limite à partir de (a) e (b) e, a partir daí, encontre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.