Universidade Federal do ABC
Prova de seleção para pós-graduação em Matemática

24 de Novembro de 2014

Instruções

- Esta prova contem 10 questões.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Faça as questões na ordem de sua preferência.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão.
- Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. Em particular, calculadoras e celulares não são permitidos.
- A prova pode ser feita a lápis, mas as respostas finais/conclusões devem ser feitas a caneta.
- Para a correção, **serão consideradas apenas as resoluções nas folhas folhas de respostas**.
- Escreva seu nome em cada folha de respostas e enumere as páginas.
- O candidato só poderá deixar o local da prova depois de transcorrida uma hora do seu início, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.
- Tempo máximo da prova: 4 horas.

1 Parte 1: Álgebra Linear

1. Encontre uma base do núcleo e outra da imagem de $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(X) = AX + X$, onde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Seja A um operador linear sobre um espaço vetorial real V de dimensão 2. Defina a exponencial de A, e^A como o operador
$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$
   (a) Prove que a série de potências converge para qualquer A nas condições acima.
   (b) Prove que se A e B comutam então $e^{A+B} = e^A e^B$. Dê um contraexemplo que esse fato é falso se A e B não comutarem.

3. Dado um operador linear A definido em um espaço vetorial de dimensão finita V diz-se que A é nilpotente se $A^n = 0$ onde A^n denota a composta de A com ele mesmo n vezes. Mostre que A é nilpotente se, e somente se, todos os seus autovalores forem iguais a zero.

4. Prove que se $m, n \in \mathbb{N}$ são tais que $m < n$ e $f_1, f_2, ..., f_m$ são funcionais lineares em V com $dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ então existe um vetor não nulo $x \in V$ tal que $f_i(x) = 0,\ i = 1, ..., m$.

5. Se U é um espaço euclidiano de dimensão finita então, um operador $T \in \mathcal{L}(U)$ é autoadjunto se e somente se a matriz de T com relação a uma base ortonormal de U for simétrica.

2 Parte 2: Análise Real

1. Responda:

   (a) Mostre que se $\sum |a_n| < \infty$, então $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em $[-1,1]$ para uma função contínua.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ representa uma função contínua em $[-1,1]$?

2. Seja Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em um intervalo I e tal que $f'(x) = 0$ para todo x no interior de I. Mostre que f é constante. Dê um contraexemplo que garanta que o resultado não é verdadeiro se f não for contínua em todo o intervalo I.

3. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função integrável tal que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x f(x)\, dx = 1\,.$$

   Mostre que $\int_0^1 f^2(x)\, dx \geq 3$.

4. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é *localmente limitada* em x se existe $\varepsilon > 0$ tal que f restrita a $B_\varepsilon(x) \cap A$ é limitada.

   (a) para $A = (0,1)$ dê exemplo de f localmente limitada que não seja limitada em A.

   (b) prove que se A é aberto, o conjunto dos pontos $x \in A$ tais que f é localmente limitada em x é aberto;

   (c) prove que se A é compacto e f localmente limitada para todo $x \in A$ então f é limitada em A.

5. Seja f uma função definida num intervalo I e n vezes derivável em $x_0 \in I$ com $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Mostre que:

   (a) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local de f;

   (b) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local de f;

   (c) Se n é ímpar, então x_0 não é extremo local de f.