Nome: **RG/RNE:**

Prova de Ingresso 2018 PPG-MAT

Instruções

- Esta prova contém 10 questões. Todas as questões possuem o mesmo valor.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão.
- Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. Em particular, calculadoras e celulares não são permitidos.
- A prova deve ser feita a caneta.
- Escreva seu nome em cada folha de respostas e enumere as páginas.
- O candidato só poderá deixar o local da prova depois de transcorrida uma hora do seu início.
- Tempo máximo da prova: 4 horas.

Análise Real

Ex. 1 — Seja $I = [0, 1]$ e seja uma função contínua $f : I \to I$. Mostre que existe $c \in I$ tal que $f(c) = c$.

Ex. 2 — Considere

$$f_c(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

1. Encontre os valores de c para os quais a função $f_c(x)$ é contínua em $x = 0$.
2. Mostre que para os valores encontrados em (1) a função f_c resulta ser diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}$, mas que f_c' não é contínua em $x = 0$.

Ex. 3 — Prove que se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ e $a_n \leq c_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. então $\lim_{n\to\infty} c_n = L$. Ou seja, prove o Teorema do Confronto para Sequências.

Ex. 4 — Prove a fórmula de integração por partes

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

onde u e v são funções de classe C^1 no intervalo $[a, b]$ ou seja, são diferenciáveis e suas derivadas são contínuas em $[a, b]$

Ex. 5 — Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e que satisfaz:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

prove que existe α tal que $f(x) = \alpha^x$

Álgebra Linear

Ex. 6 — Construa uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que:

$$\text{Ker}(T) = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1) \rangle \quad \text{e} \quad \text{Im}(T) = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1) \rangle$$

Ex. 7 — Suponha que T seja uma transformação invertível com autovalor λ e autovetor correspondente ν.

1. É verdade que ν é autovetor de T^{-1}? Em caso afirmativo, qual é o autovalor correspondente? Se não, explique por que não.
2. É verdade que se λ^2 é autovalor de T^2 então λ ou $-\lambda$ é autovetor de T? Caso afirmativo, prove. Se não, dê um contra-exemplo.

Ex. 8 — Considere uma transformação linear $T : V \to W$.

1. Mostre que se os vetores $T(\nu_1), \ldots, T(\nu_n) \in W$ são L.I. então os vetores $\nu_1, \ldots, \nu_n \in V$ são L.I.
2. Mostre que se $V = W$ e os vetores $T(\nu_1), \ldots, T(\nu_n)$ geram V então os vetores $\nu_1, \ldots, \nu_n \in V$ geram V

Ex. 9 — Dado um espaço vetorial V munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. E seja W um sub-espaço próprio de V. Prove que existe $W^\perp \subset V$ tal que:
a) Se $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^\perp$ então $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$
b) O espaço vetorial V é soma direta de W e $W^\perp$, isto é:

$$V = W \oplus W^\perp$$

Ex. 10 — Dado V um espaço vetorial tal que $\dim V = n$. Considere m funcionais lineares em V:

$$f_1, \ldots, f_m$$

1. Prove que se $m < n$ então existe um vetor não nulo $x \in V$ tal que $f_i(x) = 0$ para $i = 1, \ldots, m$.
2. O que esse resultado implica para a solução de sistemas lineares?

Nome: **RG/RNE:**

Resolução da Questão 1 -

Resolução da Questão 2 -

Nome: **RG/RNE:**

Resolução da Questão 3 -

Resolução da Questão 4 -

Nome: **RG/RNE:**

Resolução da Questão 5 -

Resolução da Questão 6 -

Nome: **RG/RNE:**

Resolução da Questão 7 -

Resolução da Questão 8 -

Nome: **RG/RNE:**

Resolução da Questão 9 -

Nome: **RG/RNE:**

Resolução da Questão 10 -

Resolução da Questão (Indique a Questão)

Nome: **RG/RNE:**

Resolução da Questão (Indique a Questão)