Nome: **RG/RNE:**

Prova de Ingresso 2016 PPG-MAT

Instruções

- Esta prova contém 10 questões.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão.
- Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. Em particular, calculadoras e celulares não são permitidos.
- A prova deve ser feita a caneta.
- Escreve seu nome em cada folha de respostas e enumere as páginas.
- O candidato só poderá deixar o local da prova depois de transcorrida uma hora do seu início.
- Tempo máximo da prova: 4 horas.

Análise Real

Ex. 1 — Calcule a seguinte primitiva:

$$\int e^x \cos x dx$$

Ex. 2 — Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que f é constante.

Ex. 3 — Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e que satisfaz:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que existe α tal que $f(x) = \alpha x$

Ex. 4 — Seja $x_n \neq 0$. Se existirem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$0 < \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq c < 1$$

para todo $n > n_0$. Então mostre que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

.

Ex. 5 — Mostre que uma sequência monótona decrescente e limitada inferiormente converge nos reais.

Álgebra Linear

Ex. 6 — Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear dada por $F(x, y, z) = (2x - 2z, 3y, 3z)$.

1. Encontre os autovalores de F e seus respectivos auto-espaços.
2. F é diagonalizável? Justifique sua resposta.
3. Se F for diagonalizável, determine uma base B de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz da transformação F nessa base, $[F]_{B,B}$, é diagonal e exiba $[F]_{B,B}$.

Ex. 7 — Defina uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$ e cuja imagem seja a reta $y = 2x$.

Ex. 8 — Dados W_1 e W_2 dois sub-espaços de um espaço vetorial V tal que a união deles seja subespaço. Prove que $W_1 \subset W_2$ ou que $W_2 \subset W_1$.

Ex. 9 — Dado $W_1 \subset V$ e seja $\mathfrak{B}_1$ uma base para W_1 prove que existe uma base $\mathfrak{B}$ para V tal que $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$.

Ex. 10 —

1. Prove que dado $v \in V$, então existe um funcional linear $f \in V^*$ tal que $f(v) \neq 0$.
2. Seja $T \in \mathfrak{L}(V)$, e seja $L \subset V$ o subespaço de V tal que $L = \{v : f(T(v)) = 0, \forall f \in V^*\}$. Prove que $L = \ker(T)$.