Universidade Federal do ABC

Prova de Seleção para o Mestrado em Matemática

6 de Maio de 2014

Instruções

- Esta prova contem 10 questões.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Faça as questões na ordem de sua preferência.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão.
- Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. Em particular, calculadoras e celulares não são permitidos.
- A prova pode ser feita a lápis, mas as respostas finais/conclusões devem ser feitas a caneta.
- Para a correção, **serão consideradas apenas as resoluções nas folhas folhas de respostas**.
- Escreve seu nome em cada folha de respostas e enumere as páginas.
- O candidato só poderá deixar o local da prova depois de transcorrida uma hora do seu início, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.
- Tempo máximo da prova: 4 horas.

Parte 1: Álgebra Linear

1. Seja V um espaço vetorial com base $\{v_i\}_{i\in I}$. Para cada $i \in I$, considere $f_i \in V^*$ definido por $f_i(v_i) = 1$ e $f_i(v_j) = 0$ se $j \neq i$

a) Mostre que $\{f_i\}_{i\in I}$ é linearmente independente.

b) Mostre que $\{f_i\}_{i\in I}$ gera V^* se, e somente se, I é finito.

2. Sejam V um espaço vetorial real, com produto interno $\langle .,. \rangle$ e de dimensão finita e $W \subset V$ um subespaço vetorial de V. Defina $W^\perp = \{v \in V; \langle v, w\rangle = 0,\ \forall w \in W\}$ chamado ortogonal de W relativo ao produto interno $\langle .,. \rangle$.

a) Mostre que $W^{\perp}$ é um subespaço vetorial de V.

b) Mostre que $V = W \bigoplus W^{\perp}$.

3. Seja A uma matriz real ortogonal tal que $\det(A) = -1$. Mostre que -1 é um autovalor de A.

4. Seja $A = B + C$ a decomposição do operador A como soma do operador auto-adjunto B com o operador anti-simétrico C. Prove que A é normal se, e somente se, $BC = CB$.

5. Seja $T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ o operador linear dado por $T(at^2 + bt + c) = (2a + 5c)t^2 - bt + (a + b - 2c)$.

a) Determine $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ a matriz de T em relação à base canônica $\mathcal{B} = \{1,\, t,\, t^2\}$.

b) Determine todos os autovalores e autoespaços associados de T.

c) Verifique se T é injetor e/ou sobrejetor. Justifique suas respostas.

Parte 2: Análise Real

1. Responda se verdadeiro ou falso para cada uma das afirmações abaixo. Se verdadeiro, demonstre a afirmação. Se falso, apresente um contra-exemplo:

a)Toda sequência convergente de números reais é de Cauchy.

b)Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e tal que $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f tem, no máximo um ponto fixo em $c \in \mathbb{R}$. Isto é, existe no máximo, um ponto $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = c$.

3. Calcule:

$$\frac{d}{dx} \int_{-\arctan x}^{\arctan x} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda$$

4. Mostre que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ então a função $\mid f \mid$ também é contínua em $[a, b]$. Onde $\mid f \mid (x) =\mid f(x) \mid$ para todo $x \in\ [a, b]$.

5. Prove que a sequência gerada recursivamente $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, com $a_0 = 0$, é convergente, e então calcule

$$\lim_{n \to \infty} a_n$$