Universidade Federal do ABC
Prova de Seleção para o Doutorado em Matemática

5 de Setembro de 2014

Instruções

- Esta prova contem 10 questões.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Faça as questões na ordem de sua preferência.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão.
- Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. Em particular, calculadoras e celulares não são permitidos.
- A prova pode ser feita a lápis, mas as respostas finais/conclusões devem ser feitas a caneta.
- Para a correção, **serão consideradas apenas as resoluções nas folhas folhas de respostas**.
- Escreva seu nome em cada folha de respostas e enumere as páginas.
- O candidato só poderá deixar o local da prova depois de transcorrida uma hora do seu início, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.
- Tempo máximo da prova: 4 horas.

Parte I

Álgebra Linear

1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e sejam $T \in L(V)$ e $f : V \to \mathbb{R}$ tais que $T(v) = f(v)v$ para todo $v \in V$. Mostre que f é constante em $V \setminus \{0\}$. As condições acima implicam que f é constante em V?

2. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno sobre um corpo F. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V e $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ são elementos de F dados, mostre que existe um único $v \in V$ tal que $\langle v, v_i \rangle = \alpha_i$ para cada $i = 1 \ldots, n$.

3. Sejam V um espaço vetorial euclideano e $T \in \mathcal{L}(V, V)$ auto-adjunto. Mostre que para quaisquer $u, v \in V$

$$\langle T(u), v \rangle = \frac{1}{4}(\langle T(u+v), u+v \rangle - \langle T(u-v), u-v \rangle)$$

4. (a) Defina uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ cujo núcleo seja $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4,\ x - y - z = 0 \text{ e } z - w = 0\}$ e cuja imagem seja $[(1, -1, 2, 1), (1, 0, 0, 1)]$.
   (b) Encontre uma base ortonormal para W e calcule a projeção ortogonal de $(1, 1, 1, 1)$ sobre W.
   (c) Encontre $W^{\perp}$.

5. Seja V um espaço vetorial real de dimensão 2 e seja $T \in L(V)$ cuja matriz em relação a alguma base de V é $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   (a) Mostre que se $(a-d)^2 + 4bc < 0$ então T não tem autovalores reais.
   (b) Mostre que se $(a-d)^2 + 4bc > 0$ então T é diagonalizável.
   (c) Mostre que se $(a-d)^2 + 4bc = 0$ então T é diagonalizável se, e somente se, $T = \frac{a+d}{2} I$.

Parte II

Análise real

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, e assuma que não há $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f'(x) = 0$. Mostre que $S = \{x | x \in [0,1], f(x) = 0\}$ é finito.

2. Mostre que se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções contínuas em $E \subset \mathbb{R}$, e se $f_n \to f$ uniformemente em E, então f é contínua em E.

3. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e defina a sequência de funções da seguinte forma

$$f_0 = f, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

   Mostre que $\{f_n\}$ converge uniformemente para a função identicamente nula.

4. Dada f derivável no intervalo I, sejam $X = \{f'(x) : x \in I\}$ e

$$Y = \left\{ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} : x, y \in I \; e \; x \neq y \right\}.$$

   O Teorema do Valor Médio assegura que $Y \subseteq X$. Dê um exemplo em que $Y \neq X$. Prove que $\overline{Y} = \overline{X}$ e conclua que $\sup X = \sup Y$ e $\inf X = \inf Y$.

5. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ x, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

   Mostre que f não é integrável em $[0,1]$.