

Prova de Seleção Mestrado Edital 55 2-2021

March 2021

1 Análise

1. Prove que toda função real monótona definida em um intervalo compacto é limitada.
2. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no intervalo I . Considere a função

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{se } x \neq a \\ L & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Prove que γ é contínua em a se, e somente se, f é diferenciável em a e $f'(a) = L$.

3. Sejam $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $c \in (a, b)$. Mostre que, se f é diferenciável em c , então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h} = f'(c).$$

A recíproca é verdadeira?

4. Considere a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Obtenha um $\varepsilon \in (0, 1)$ e uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $(0, \infty)$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $|f(x_n)| > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2 Álgebra Linear

1. Dados os vetores $u = (4, 4, -2)$, $v = (4, -2, 4)$, $w = (1, -2, -2)$ considere a transformação linear $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $Au = (10, -2, -2)$, $Av = (-2, 10, -2)$, $Aw = (1, 1, -5)$. Mostre que A é autoadjunta.
2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz na base canônica é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Encontre bases para o núcleo e para a imagem de T .

3. Seja $V = \{p(x) = ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ o espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo 2. Mostre que o conjunto formado pelos funcionais lineares definidos em V , $f_1(p) = \int_0^1 p(x)dx$, $f_2(p) = \int_0^2 p(x)dx$, $f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)dx$ é linearmente independente.
4. Considere as transformações lineares $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfazem $P^2 = P$.
 - i) Mostre que toda transformação P que satisfaz a igualdade acima é diagonalizável.
 - ii) Descreva todas as transformações lineares P que satisfazem a igualdade do enunciado de acordo com suas matrizes na forma diagonal.