Prova de seleção Doutorado

November 2020

1) Considere os funcionais lineares definidos em $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f_1(v) &= x_1 + 2x_2 - x_3 \\ f_2(v) &= 2x_2 - 3x_3 \\ f_3(v) &= -x_1 + x_2 + 4x_3. \end{aligned}$$

i) O conjunto $\{f_1, f_2, f_3\}$ é linearmente independente no espaço dos funcionais lineares de $\mathbb{R}^3$?

ii) Encontre uma base para o espaço $\cap_{i=1}^{3} ker f_i$, onde $ker f_i$ é o núcleo do funcional f_i.

2) Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que T é ortogonal com um único autovalor real e $T(1/3, 2/3, 2/3) = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 0)$. Escreva a matriz de T na base canônica.

3) Mostre que todo ponto do intervalo $[-1, 1]$ é ponto de acumulação da função $f(x) = sen(1/x)$.

4) Dado um $m \in \mathbb{N}$ qualquer, sempre existe uma função derivável $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ com exatamente m pontos críticos em $[0, 1]$.

5) Duas funções $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ possuem ponto de tangência de ordem 2 em um ponto $x_0 \in (a, b)$ quando $f(x_0) = g(x_0), f'(x_0) = g'(x_0), f''(x_0) = g''(x_0)$. Mostre que se f é três vezes derivável em todo ponto de (a, b) então, para cada $x_0 \in (a, b)$, existe um polinômio p de grau 2 tal que f e p possuem ponto de tangência de ordem 2.

6) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em I tal que f' é limitada em I. Mostre que o quociente $|f(y) - f(x)|/|y - x|$ também é limitado. O que podemos dizer da reciproca desta afirmação.

7) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável tal que $\int_a^b |f(x)|dx = 0$. Supondo f contínua em $c \in [a, b]$ calcule $f(c)$.

8) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e não negativa. Se $\int_a^b f(x) = 0$ então f é identicamente nula.