

Nome:

RG/RNE:

Prova de Ingresso 2022 PPG-MAT Mestrado

Instruções

- Justifique seus passos.
- Tempo máximo da prova: 4 horas.

Análise Real

Ex. 1 — Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável.

1. Prove que f é não decrescente se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. A afirmação no enunciado do item anterior seria verdadeira se “não decrescente” e “ $\geq$ ” fossem substituídos, respectivamente, por “estritamente crescente” e “ $>$ ”? Justifique.

Ex. 2 — Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -f(x), & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prove que, dado $a \in \mathbb{R}$ qualquer, tem-se que g é contínua em a se, e somente se, $f(a) = 0$.

Ex. 3 — Se $F(x) = \int_1^x f(t)dt$, onde $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u} du$, determine $F''(2)$.

Ex. 4 — Suponha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e que satisfaz:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

prove que existe α tal que $f(x) = e^{\alpha x}$

Álgebra Linear

Ex. 5 — Considere as bases $\mathbb{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e $\mathbb{C} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ de $\mathbb{R}^3$ diferentes tais que:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (0, 0, \alpha)_{\mathbb{B}} \\ \mathbf{b} &= (0, \alpha, \alpha)_{\mathbb{B}}, \\ \mathbf{c} &= (\alpha, \alpha, \alpha)_{\mathbb{B}},\end{aligned}$$

em que α é um número real não nulo. Se $\mathbf{v} = (2, 1, -1)_{\mathbb{C}}$, encontre a soma das coordenadas de $\mathbf{v}$ com respeito à base $\mathbb{B}$.

Ex. 6 — Verdadeiro ou falso. Justifique todos os passos das suas respostas.

- (a) Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se T é um isomorfismo então 0 não é um autovalor de T .
- (b) Matrizes semelhantes tem os mesmo autovalores.
- (c) Sejam V espaço vetorial, T um operador linear em V e $p_T(\lambda)$ o polinômio característico de T . Se $p_T(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 1)$ e $\dim N(T) = 2$, então T é diagonalizável.
- (d) Um subespaço W_1 de dimensão 4 e um subespaço W_2 de dimensão 3 são sempre suplementares em um espaço vetorial V de dimensão 7.

Ex. 7 — Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a aplicação linear dada por $T(p) = xp'$ e $B = \{1, x - 1, x^2 - x\}$ uma base para $P_2(\mathbb{R})$.

- (a) Encontre uma base e a dimensão de $N(T)$.
- (b) Determine $[T]_{B,B}$
- (c) Determine a matriz mudança da base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ para a base B .
- (d) Encontre as coordenadas de $\mathbf{q} \in P_2(\mathbb{R})$ com relação a base B sabendo que a matriz das coordenadas de $\mathbf{q}$ com relação à base canônica é $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Encontre $[T(\mathbf{q})]_B$.

Nome:

RG/RNE:

Resolução da Questão 1 -

Resolução da Questão 2 -

Nome:

RG/RNE:

Resolução da Questão 3 -

Resolução da Questão 4 -

Nome:

RG/RNE:

Resolução da Questão 5 -

Resolução da Questão 6 -

Nome:

RG/RNE:

Resolução da Questão 7 -