Nome:

RG/RNE:

Prova de Ingresso 2022 PPG-MAT Doutorado

Instruções

- Justifique seus passos.
- Tempo máximo da prova: 4 horas.

Análise Real

Ex. 1 — Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo aberto I . Suponha que f seja derivável e tenha um conjunto de raízes com um ponto de acumulação $c \in I$. Mostre que c é uma raiz e também que c é um ponto crítico, i.e. $f'(c) = 0$.

Ex. 2 — Assuma que f é diferenciável em um intervalo aberto I e que $[a, b] \subset I$. Dizemos que f é *uniformemente diferenciável* em $[a, b]$, se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \epsilon,$$

para todo $x \in [a, b]$, $|h| < \delta$ e $x+h \in I$. Mostre que f é uniformemente diferenciável se, e somente se, f' é contínua em $[a, b]$.

Ex. 3 — Prove ou exiba um contraexemplo: se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável (no sentido de Riemann), então a função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = (f(x))^2$ também é.

Ex. 4 — Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e um $d \in f^{-1}(a, b)$ fixo, existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. Suponha que o conjunto $f^{-1}(\{q\})$ é um conjunto fechado para todo número racional q . Prove que f é uma função contínua.

Álgebra Linear

Ex. 5 — Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear sobrejetiva. Prove que existe uma transformação linear $S : W \rightarrow V$ tal que $T \circ S = I_W$.

Ex. 6 — Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita.

1. Prove que dado $v \in V$, então existe um funcional $f \in V^*$ tal que $f(v) \neq 0$.
2. Seja $T \in \mathcal{L}(V)$, e seja $L \subset V$ o subespaço de V tal que $L = \{v : f(T(v)) = 0, \forall f \in V^*\}$. Prove que $L = \ker(T)$.

Ex. 7 — Mostre que o operador linear $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$T(\mathbf{u})(x) = \int_0^x \mathbf{u}(s) ds, \quad x \in \mathbb{R},$$

não tem autovalores.

Ex. 8 — Ache todas as formas de Jordan possíveis para uma transformação linear com polinômio característico $(x + 2)^3(x - 2)^2(x - 5)$. Ache o polinômio mínimo correspondente a cada uma dessas formas de Jordan.

Nome:

RG/RNE:

Resolução da Questão 1 -

Resolução da Questão 2 -

Nome:

RG/RNE:

Resolução da Questão 3 -

Resolução da Questão 4 -

Nome:

RG/RNE:

Resolução da Questão 5 -

Resolução da Questão 6 -

Nome:

RG/RNE:

Resolução da Questão 7 -

Resolução da Questão 8 -

Nome:

RG/RNE:

Resolução da Questão 9 -

Resolução da Questão 10 -

Nome:

RG/RNE:

Resolução da Questão (Indique a Questão)

Resolução da Questão (Indique a Questão)