

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prova de Seleção para o Mestrado - Ingresso em 2025.1

18 de Outubro de 2024

Duração: 3 horas

---

Instruções aos candidatos

1. Justifique suas respostas.
2. Escreva as soluções de maneira legível.
3. No que segue, sempre teremos  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

*Álgebra Linear*

**Questão 1** : Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e  $S, T : V \rightarrow V$  transformações lineares tais que  $T \circ S = Id_V$ .

- (i) Mostre que se  $\dim(V) < \infty$ , então  $T$  é invertível e  $S = T^{-1}$ .
- (ii) Considerando  $\dim(V) = \infty$ , dê um exemplo de uma transformação linear satisfazendo as condições do enunciado mas que não seja inversível.

**Questão 2** : Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  tal que  $\dim(V) = 17$ . Mostre que não existe uma transformação linear  $f : V \rightarrow V$  tal que  $(f \circ f)(v) = -v$  para todo  $v \in V$ .

**Questão 3** : Considere a transformação linear  $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  dada por  $T(x, y) = (-y, x)$ .

1. Mostre que  $U = \{v \in \mathbb{C}^2 \mid T(v) = iv\}$  é um subespaço de  $\mathbb{C}^2$  e encontre uma base para  $U$ .

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC**

2. Seja  $V = \langle (i, -1) \rangle$  o subespaço gerado por  $(i, -1)$ . Mostre que  $\mathbb{C}^2 = U \oplus V$ .

*Análise Real*

**Questão 4** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ . Mostre que:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente.

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  é divergente.

**Questão 5** Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas em  $[a, b]$ , com  $a < b$ , tais que  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ . Mostre que existe  $x \in [a, b]$  tal que  $f(x) = g(x)$ .

**Questão 6** Mostre que não existe uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f'(0) = 0$  e  $f'(x) \geq 1$  para todo  $x \neq 0$ .