

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prova de Seleção para o Doutorado - Ingresso em 2025.1

18 de Outubro de 2024

Duração: 3 horas

Instruções aos candidatos

1. Justifique suas respostas.
2. Escreva as soluções de maneira legível.
3. No que segue, sempre teremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Álgebra Linear

Questão 1 : Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ tal que $\dim(V) = 17$. Mostre que não existe uma transformação linear $f : V \rightarrow V$ tal que $(f \circ f)(v) = -v$ para todo $v \in V$.

Questão 2 : Sejam V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita se denote por V^* seu espaço dual. Assuma que $B \subseteq V^*$ é tal que $f(v) = 0$ para todo $f \in B$ implica $v = 0$. Mostre que B gera V^* .

Questão 3 : Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensões finitas. Considere ainda U um subespaço próprio de V e uma transformação linear $S : U \rightarrow W$.

1. Mostre que existe uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ tal que $T|_U = S$, ou seja:
$$T(u) = S(u), \text{ para todo } u \in U.$$
2. A transformação T do item anterior é unicamente determinada? Justifique.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Análise Real

Questão 4 Encontre uma sequência $(a_n)_n$ de números reais estritamente positivos tais que $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Questão 5 Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$, com $a < b$, tais que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$. Mostre que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = g(x)$.

Questão 6 Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos $Z(f) := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$.

- (i) Mostre que se f é contínua, então $Z(f)$ é um conjunto fechado.
- (ii) Dado $X \subseteq \mathbb{R}$ fechado, mostre que existe $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $Z(f_X) = X$.