

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
PROVA DE SELEÇÃO PARA O MESTRADO EM MATEMÁTICA

Instruções:

- Esta prova contém 10 questões.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Faça as questões na ordem de sua preferência.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão.
- Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. Em particular, calculadoras e celulares não são permitidos.
- A prova pode ser feita a lápis, mas as respostas/conclusões devem ser feitas a caneta.
- Para a correção, **serão consideradas apenas as resoluções nas folhas de respostas.**
- Escreva seu nome em cada folha de resposta e enumere as páginas.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de transcorrida uma hora do seu início, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.
- Tempo máximo de prova: 4 horas.

Parte 1: Álgebra Linear

1. Seja $\mathbb{V}$ o espaço vetorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e considere os subconjuntos de $\mathbb{V}$ definidos por:
 $\mathbb{W}_1 = \{f \in \mathbb{V}; f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{W}_2 = \{f \in \mathbb{V}; f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.

(a) Prove que $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ são subespaços de $\mathbb{V}$;
(b) Prove que $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$.
2. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real de dimensão finita e $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ um subespaço. Defina $\mathbb{W}^0 = \{f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é linear e } f(w) = 0, \forall w \in \mathbb{W}\}$. O subconjunto $\mathbb{W}^0$ é um subespaço de $\mathbb{V}^*$ e é chamado de *anulador* de $\mathbb{W}$. Prove que $\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W} + \dim \mathbb{W}^0$.
3. Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ dois espaços vetoriais e seja T uma transformação linear de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{W}$. Mostre que se T é invertível então a função inversa T^{-1} é uma transformação linear de $\mathbb{W}$ em $\mathbb{V}$.
4. Seja $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real dos polinômios de grau menor ou igual a 3. Sejam $\mathbb{W}_1 = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) / p(1) = 0\}$ e $\mathbb{W}_2 = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) / p(-1) = 0\}$. Encontre uma base para $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ e $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$.

5. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (5x + 12y, -2x - 5y)$. Sejam $\mathbb{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $A = [T]_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}$ a matriz de T em relação a $\mathbb{B}$.

- (a) Encontre a expressão da matriz A ;
- (b) Calcule A^{2012} .

Parte 2: Análise na Reta

6. Sobre as afirmações abaixo decida se são verdadeiras ou falsas. No caso de verdadeiras prove e, se falsas, dê um contra-exemplo.

- (a) Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ são sequências reais com $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $|b_n| \leq M$ para algum número real positivo M e todo $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.
- (b) Se $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é convergente então $(a_n) \subset \mathbb{R}$ também é convergente. Onde $|a_n|$ denota o valor absoluto do número real a_n .
- (c) Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é convergente então $(|a_n|) \subset \mathbb{R}$ também é convergente. Onde $|a_n|$ denota o valor absoluto do número real a_n .

7. Encontrar funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ e $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$, mas $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) \neq B$.

8. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se periódica quando existe $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que toda função contínua periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo, isto é, existem $x_m, x_M \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Calcule

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$;
- (b) $\frac{d}{dx} \left(\arctan(\ln(x^2 + 1)) + e^{\sin(3x^2 + \pi)} \right)$

10. Defina $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ x, & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, 1] \end{cases}$, onde $\mathbb{Q}^c$ é o complementar em $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. Mostre que f não é Riemann integrável.