

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
PROVA DE SELEÇÃO PARA O MESTRADO EM MATEMÁTICA

Instruções:

- Esta prova contém 10 questões.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Faça as questões na ordem de sua preferência.
- Identifique com clareza o espaço onde fizer cada questão.
- Justifique seus passos.
- Nenhuma consulta é permitida. Em particular, calculadoras e celulares não são permitidos.
- A prova pode ser feita a lápis, mas as respostas/conclusões devem ser feitas a caneta.
- Para a correção, **serão consideradas apenas as resoluções nas folhas de respostas.**
- Escreva seu nome em cada folha de resposta e enumere as páginas.
- O candidato só poderá deixar o local de prova depois de transcorrida uma hora do seu início, e não poderá levar a folha de questões e nem a folha de respostas.
- Tempo máximo de prova: 4 horas.

Parte 1: Análise na Reta

1. Mostre que toda sequência convergente em $\mathbb{R}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$.
2. Use a definição formal de limite de função real para mostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.
3. Determine se a função real $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad \text{se } x \neq 0, \\ 0 & , \quad \text{se } x = 0. \end{cases}$ é diferenciável em $x_0 = 0$.
4. (a) Derive a função $f(x) = \sqrt[3]{(e^{x^2} \cdot x^3 + 1)^2}$.
(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}$.
5. Considere o conjunto $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, isto é, o conjunto-diferença entre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Mostre que X é um conjunto aberto de $\mathbb{R}$. O conjunto X é um compacto de $\mathbb{R}$?

Parte 2: Álgebra Linear

6. Mostre que dois espaços vetoriais com dimensões (finitas) diferentes não podem ser isomorfos.

7. Sejam V e W espaços vetoriais, $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear e $\text{Ker } T$ o seu núcleo. Mostre que:

T é injetora $\iff \text{Ker } T = \{0\}$, onde 0 é o vetor nulo de V .

8. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que:

$$\text{Ker } T = [(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)]$$

e

$$\text{Im } T = [(1, -1, 0, 2), (0, 1, -1, 0)],$$

onde $\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$ são o núcleo e a imagem de T , respectivamente.

9. Seja T a transformação linear com domínio P_2 (conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2) e contra-domínio $\mathbb{R}$ definida por $T(p) = \int_0^1 p(x)dx$. Encontre a matriz de T com respeito às bases $\{x^2, x, 1\}$ de P_2 e $\{1\}$ de $\mathbb{R}$.
10. Seja R a rotação em $\mathbb{R}^3$ ao redor do eixo z , no sentido anti-horário, com centro na origem e ângulo $\pi/2$. Ou seja, R associa a um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ um ponto $Q = (-y, x, z)$. Encontre o polinômio característico de R em relação a uma base de $\mathbb{R}^3$ e, a partir dele, determine os autovalores e autovetores de R (caso eles não existam, justifique sua conclusão com base nos cálculos feitos). Interprete geometricamente o resultado que você obteve.