

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO



Simetria por Reflexão Esférica e Spanning Drops em uma Cunha

Bruno Rogério Locatelli dos Santos

Santo André - SP
Fevereiro de 2011

Simetria por Reflexão Esférica e Spanning Drops em uma Cunha

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Bruno Rogério Locatelli dos Santos e aprovada pela comissão julgadora.

Santo André, 03 de março de 2011.

Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva
Orientador

Prof. Dr. Valério Ramos Batista
Co-orientador

Banca examinadora:

1. Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva (Orientador) - UFABC
2. Prof. Dra. Irene Ignazia Onnis - USP
3. Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Vilagra - UFSCAR
4. Prof. Dr. Valério Ramos Batista (Co-orientador) - UFABC
5. Prof. Dr. João Paulo Góis - UFABC

Dissertação apresentada junto ao Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.



Universidade Federal do ABC

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a defesa da Dissertação de Mestrado do candidato Bruno Rogério Locatelli dos Santos, realizada em 03 de março de 2011.

Márcio Fabiano da Silva

Dr. Márcio Fabiano da Silva (Orientador – UFABC) - Presidente

Irene Ignazia Onnis

Dr. Irene Ignazia Onnis (Avaliador – USP)

Guillermo Antonio Lobos Villagra

Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra (Avaliador – UFSCar)

Valério Ramos Batista

Dr. Valério Ramos Batista (Avaliador – UFABC)

João Paulo Góis

Dr. João Paulo Góis (Avaliador – UFABC)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal do ABC

SANTOS, Bruno Rogério Locatelli dos
Simetria por reflexão esférica e Spanning Drops em uma cunha / Bruno Rogério Locatelli dos Santos — Santo André : Universidade Federal do ABC, 2011.

58 fls, il. 29 cm

Orientador: Márcio Fabiano da Silva
Co-orientador: Valério Ramos Batista

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, 2011.

1. Superfície de curvatura média constante 2. Reflexão esférica 3. Princípio do máximo I. SILVA, Márcio Fabiano da . II. BATISTA, Valério Ramos. III. Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, 2011, IV. Título.

CDD 515.15

Dedico este trabalho aos meus pais, Francisco Ataíde dos Santos e Rosa Locatelli dos Santos, meus irmãos Carlos Henrique Locatelli dos Santos e Augusto César Locatelli dos Santos, minha namorada Natália Thaís Gonçalves Koiyama, minha avó, Anna Fagundes, minhas cunhadas, Josiane e Heloísa e meus sobrinhos, Thaís e Thiago. Sem deixar de esquecer a todos meus companheiros de república, em especial Bruno Henrique Torres, Henrique Joel Traesel e Wendhel Raffa Coimbra, estendendo-se também aos meus companheiros de turma, Rodrigo, Evandro, Nelson, Júlio e Thiago.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por minha vida e à oportunidade de conquista.

Aos meus pais, Francisco e Rosa, por acreditarem em meu potencial, financiarem minha carreira acadêmica, suas orações assim mantendo-se próximos, mesmo estando distantes, por todo tipo de incentivo à realização deste sonho. Aos meus amigos, orientador Márcio Fabiano da Silva e co-orientador Valério Ramos Batista, que tiveram paciência, dedicação e não hesitaram em transmitir o conhecimento necessário para a conquista deste título, durante todo o período de orientação. Aos meus irmãos Carlos e Augusto, a Natália pela força e entendimento por minhas ausências nas datas especiais e comemorações familiares. Aos meus grandes colegas José Mário Ledis, João Fernando Bombonati, Kleber Ledis, Éliton Simão, Paulo César, Lucila Rossatto, que foram companheiros de conversas virtuais, aos colegas de Três Lagoas do curso de licenciatura em matemática (UFMS), aos professores Renato César da Silva, Rosana Satie Takehara pelo apoio e confiança, na decisão de cursar o mestrado. Aos colegas da graduação e a turma de mestrado da UFABC, Bruno Torres, Evandro Marquesone, Wendhel Raffa, Nelson Resende, Thiago Grado, Jocylaine, Douglas, Michele, Jéssica, Danilo, Márcio Traesel, pelos momentos de descontração e por suas amizades.

A todos, sincera gratidão.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o problema de determinar as superfícies de tipo anel S mergulhadas e de curvatura média constante, com bordos β_1 e β_2 , cada um contido, respectivamente, em planos Π_1 e Π_2 de uma cunha com ângulo de abertura α . Exigimos que os contatos $\beta_k = S \cap \Pi_k$ ocorram em ângulos constantes γ_k , $k = 1, 2$, respectivamente. Usamos a técnica de Reflexão Esférica desenvolvida por John McCuan, que pode ser tomada como uma adaptação do Princípio de Reflexão de Alexandrov, introduzido em 1955. A existência (ou não-existência) de soluções mergulhadas depende da relação entre os ângulos α , γ_1 e γ_2 .

Palavras-Chave

Superfície de curvatura média constante, Reflexão Esférica, Princípio do Máximo.

Abstract

In this work we study the problem of determining the embedded ring-type surfaces S of constant mean curvature, with boundary β_1 and β_2 , each one contained in planes Π_1 and Π_2 of a wedge with opening angle α . We require that the contacts $\beta_k = S \cap \Pi_k$ occur at constant angles γ_k , $k = 1, 2$, respectively. We use the Spherical Reflection Technique developed by John McCuan, an adaption of the Alexandrov Reflection Principle introduced in 1955. Either existence or non-existence of embedded solutions depend on the relation among the angles α , γ_1 and γ_2 .

Keywords

Surfaces of Constant Mean Curvature, Spherical Reflection, Maximum Principle.

Sumário

1	Introdução	1
2	A Reflexão Esférica	5
3	Um Teorema Técnico com Implicações Geométricas	11
4	As Conseqüências Geométricas do Teorema 4.1	13
4.1	Introdução	13
4.2	Spanners e a Propriedade da Minoração	15
4.3	Conclusões	23
5	Prova do Teorema 1.2 e Conclusões	25
6	Resultados básicos de Geometria Diferencial	29
6.1	Curvas, Parametrizações e Convexidade	29
6.2	Superfícies, Vetores e Plano Tangente	30
6.3	Funções Sub-harmônicas	36
6.4	Alguns Teoremas de Geometria Diferencial	37
6.5	Curvas Convexas Fechadas	41
	Bibliografia	47

Lista de Figuras

1.1	Uma “spanning drop” em uma cunha.	1
1.2	Existência e Não-existência.	3
1.3	Cunha móvel forçando líquido para fora.	3
4.1	Representação conforme da superfície de tipo anel.	14
4.2	Esfera Osculatriz.	19
4.3	Interseção entre S e Π	19
4.4	O Plano Π (Primeira vista).	20
4.5	O Plano Π (Segunda vista).	20
4.6	Interseção entre C e C'	22
5.1	O Plano de simetria Σ	26
5.2	O Plano de simetria Σ'	26
5.3	Normal paralelo a Σ	27
5.4	Vista de \mathcal{C}_a e \mathcal{C}_b pelo plano Σ	27
6.1	Superfície parametrizada.	30
6.2	Curvas coordenadas.	31
6.3	Plano tangente.	32
6.4	Curva sobre superfície.	32
6.5	Vetor w no plano tangente.	33
6.6	Aplicação normal de Gauss.	34

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho, superfície *tipo anel* significa uma superfície compacta, conexa, orientável, com dois bordos e característica de Euler-Poincaré igual a zero, e estende-se suavemente no fecho de seu domínio. Procuramos identificar as superfícies tipo anel S mergulhadas e de curvatura média constante, com bordos β_1 e β_2 , cada um contido em planos Π_1 e Π_2 de uma cunha com ângulo de abertura α . Mais particularmente, exigimos que os contatos $\beta_k = S \cap \Pi_k$ ocorram a ângulos constantes γ_k , $k = 1, 2$, respectivamente (Figura 1.1).

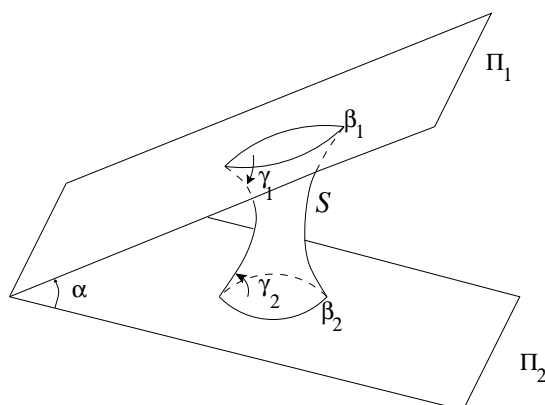


Figura 1.1: Uma “spanning drop” em uma cunha.

Definição 1.1 Nas condições explicadas no parágrafo anterior, diremos que a superfície tipo anel é um *spanner*. Caso adotemos a hipótese de “imersa”, ao invés de “mergulhada” (no parágrafo anterior), diremos que a superfície tipo anel é um *spanner imerso*.

Doravante usaremos o termo *spanner* em *todo* o texto. Resolvemos não traduzi-lo para o Português, pois é preciso manter a idéia da superfície tipo anel como uma “ponte” entre os planos $\Pi_{1,2}$.

Definição 1.2 Sejam $\Pi_{1,2}$ dois planos com $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \ell \neq \emptyset$. Em cada Π_k , $k = 1, 2$, ℓ determina dois semi-planos Π_k^\pm distintos. Chamamos de *cunha* qualquer dos conjuntos $\ell \cup \Pi_1^+ \cup \Pi_2^+$, $\ell \cup \Pi_1^+ \cup \Pi_2^-$, e ℓ é a *aresta* da cunha.

Note que preferimos usar o termo *cunha* a *diedro*, inspirados no artigo [10]. Este artigo representa o principal estudo da presente Dissertação de Mestrado. Acreditamos que o autor utiliza *cunha* por ser um termo mais moderno que o clássico *diedro* da Geometria Euclidiana Espacial.

Ainda segundo [10], em 1986 H.C. Wentz construiu spanners imersos para $\gamma_1 = \gamma_2 = \pi/2$ (vide [18]). Os exemplos de H.C. Wentz possuem auto-intersecções. Porém, uma leitura de [18] revela que suas construções não foram feitas para a “cunha”, e sim para dois planos paralelos.

Neste trabalho estabelecemos o seguinte resultado de não-existência:

Teorema 1.1 *Não existem spanners para $\gamma_1 + \gamma_2 \leq \pi + \alpha$.*

A condição da soma dos ângulos de contato no Teorema 1.1 não pode ser melhorada, pois no caso complementar temos os *anéis esféricos*, que são spanners subconjuntos de esfera. O Teorema 1.1 é corolário do seguinte resultado, que apresentamos aqui não exatamente como enunciado em [10], pelas razões explicadas a seguir na Observação 1.1.

Teorema 1.2 *Uma solução esférica existe somente se $\gamma_1 + \gamma_2 > \pi + \alpha$. Se $A > 0$ denota volume ou curvatura média, a família de todos os anéis esféricos pode ser indexada unicamente pelas quádruplas $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha, A)$ que satisfazem este critério de existência.*

Observação 1.1 A versão do Teorema 1.2 em [10] afirma que $\gamma_1 + \gamma_2 > \pi + \alpha$ é também condição suficiente para a existência do spanner. Mas o artigo não demonstra esse fato. Em [10], ainda era uma questão aberta a existência de outras soluções mergulhadas satisfazendo $\gamma_1 + \gamma_2 > \pi + \alpha$, além dos anéis esféricos. Porém, recentemente S. Park mostrou que os únicos spanners são os anéis esféricos (vide [12]). Ou seja, é preciso que $\gamma_1 \geq \pi/2$ e $\gamma_2 > \pi/2$ (ou vice-versa), e esta é finalmente a condição recíproca.

Observação 1.2 No Teorema 1.2, $A = H$ ou $A = Vol$, ambos dados por $Vol = -\frac{\pi}{3H^3} \cdot [\cos \gamma_1 \cdot (2 + \sin^2 \gamma_1) + \cos \gamma_2 \cdot (2 + \sin^2 \gamma_2)]$. Note que esta relação independe de α , mas o anel esférico necessita deste parâmetro para ser determinado.

Qualquer superfície mergulhada (esférica ou não) corresponde a um volume de líquido na ausência de gravidade. Há uma literatura considerável que trata da estabilidade de soluções de equilíbrio entre planos paralelos, as chamadas *liquid bridges* (vide [4, 6, 9, 15, 16]).

Como notável corolário do Teorema 1.1, temos que embora haja liquid bridges (mesmo estáveis) entre planos paralelos satisfazendo $\gamma_1 + \gamma_2 \leq \pi$, se os planos fizerem qualquer ângulo $\alpha \neq 0$ (donde passaríamos a ter um spanner ao invés da liquid bridge), então não apenas a estabilidade da superfície tipo anel cessa, mas também sua própria *existência*.

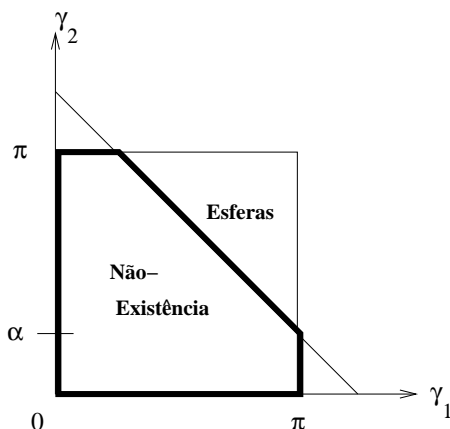


Figura 1.2: Existência e Não-existência.

Experimentalmente, pode-se observar que spanners com $\gamma < \pi/2$, sejam eles porção de fluido ou película de sabão, são instáveis e tendem para o vértice. Na verdade, estas observações foram motivadas pela prática comum (na engenharia de reservatórios de combustível líquido) de colocar uma cunha divisória com vértice sobre a saída do líquido para garantir seu fornecimento. A presença de líquido no vértice é devida à capacidade da cunha de “forçar o líquido para fora”. O Teorema 1.1 é um primeiro passo na verificação matemática deste fenômeno.

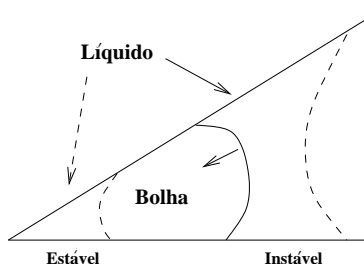


Figura 1.3: Cunha móvel forçando líquido para fora.

A prova do Teorema 1.1 depende de uma extensão do *método de reflexão de Alexandrov* para esferas, que será apresentada no Capítulo 2 da presente Dissertação. Porém, os principais resultados seguem-se nos Capítulos 3 a 6. Além disso, observa-se que o Princípio do Máximo por reflexão esférica essencialmente reduz o problema a uma análise

do comportamento do bordo da superfície. Esta observação é explicada em detalhes no Capítulo 4. Em seguida, métodos de H. Hopf e as hipóteses topológicas são finalmente empregados para completar a demonstração do Teorema 1.1.

Será observado que aplicações anteriores de princípios de reflexão, como em [3, 14, 17], [7, 13], não se baseiam em hipóteses topológicas como faz o Teorema 1.1. É razoável que esse teorema seja válido para superfícies de qualquer topologia. Em [9], utilizando métodos diferentes, obtém-se a seguinte extensão parcial para o caso de topologia arbitrária:

Observação 1.3 Denotaremos a *Característica de Euler* por χ .

Teorema 1.3 *Se permitirmos $\chi < 0$ na Definição 1.1, então não existem spanners para $\gamma_1, \gamma_2 \leq \pi/2$, qualquer que seja a cunha.*

Capítulo 2

A Reflexão Esférica

Para $n = 2, 3$ definimos em \mathbb{R}^n os seguintes conjuntos: $B_\rho(0) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| < \rho\}$ e $S_\rho = \partial B_\rho(0)$ a *bola* e a *esfera*, respectivamente, de centro 0 e raio $\rho \in \mathbb{R}_+^*$.

Definição 2.1 Para $n = 2, 3$, dizemos que $\Psi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é uma *inversão* com respeito a S_ρ se, $\forall P \in \mathbb{R}^n$, $\Psi(P) = P' \in \overrightarrow{OP}$ tal que $\|\overrightarrow{OP}\| \cdot \|\overrightarrow{OP'}\| = \rho^2$.

Note que a Definição 2.1 é geométrica. Um argumento simples mostra que, analiticamente, ela equivale a

$$\Psi(X) = \frac{\rho^2}{\|X\|^2} X, \quad (2.1)$$

que no caso $n = 3$ chamaremos de *reflexão esférica* de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Restrita a uma superfície S em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, dizemos que $\hat{S} = \Psi(S)$ é a *reflexão (esférica)* de S , e denotamos $\hat{H}(X, \rho)$ a curvatura média de \hat{S} no ponto $\hat{X} = \Psi(X)$, com $X \in S$.

Teorema 2.1 Para as curvaturas principais k_j , $j = 1, 2$, com direção principal v_j num ponto $X \in S$, a aplicação Ψ em (2.1) leva v_j a uma direção principal \hat{v}_j sobre \hat{S} com curvatura principal dada por

$$\hat{k}_j = -\frac{1}{\rho^2} (\|X\|^2 k_j + 2\langle X, N \rangle).$$

Demonstração: Para um ponto X em S associamos o ponto inverso

$$\hat{X} = \rho^2 X / r^2, \text{ onde } r^2 = \langle X, X \rangle. \quad (2.2)$$

Por abuso de linguagem, tratamos X como parametrização local de S . Ou seja, $X : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, onde U é região do \mathbb{R}^2 e $(u, v) \in U$. Então, podemos falar das diferenciais totais dX , $d\hat{X} = d(\Psi \circ X)$. Esta última pode ser calculada por

$$d\hat{X}_{2 \times 3} = \frac{\rho^2}{r^2} dX - \frac{\rho^2}{r^4} d(r^2)_{2 \times 1} X_{1 \times 3} \Rightarrow$$

$$d\hat{X} = \frac{\rho^2}{r^2}dX - 2\frac{\rho^2}{r^3}dr \cdot X. \quad (2.3)$$

Note que

$$r(dr)_{2 \times 1} = (dX)_{2 \times 3} \cdot (X^t)_{3 \times 1}. \quad (2.4)$$

Então, usando (2.3) e (2.4) temos

$$(d\hat{X})_{2 \times 3} \cdot (d\hat{X}^t)_{3 \times 2} = \frac{\rho^4}{r^4}(dX)(dX^t) - \frac{4\rho^4}{r^4}(dr)(dr^t) + \frac{4\rho^4}{r^6}(dr)X \cdot X^t(dr^t).$$

Como $X \cdot X^t = r^2$, segue-se que

$$d\hat{X} \cdot d\hat{X}^t = \frac{\rho^4}{r^4}dX \cdot dX^t = \frac{\rho^4}{r^4} \begin{pmatrix} \|X_u\|^2 & \langle X_u, X_v \rangle \\ \langle X_v, X_u \rangle & \|X_v\|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Sejam dA , $d\hat{A}$ os elementos de área de S e \hat{S} , respectivamente. Ocorre que

$$dA = \|X_u \times X_v\|dudv \text{ e } \|X_u \times X_v\|^2 = \|X_u\|^2\|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2.$$

Então (2.5) implica

$$d\hat{A} = \frac{\rho^4}{r^4}dA. \quad (2.6)$$

Seja N o vetor normal unitário de S . Afirmamos que

$$\hat{N} = \frac{2}{r^2}\langle X, N \rangle X - N, \quad (2.7)$$

é o vetor normal unitário de \hat{S} . Para provar isso, basta calcular $(d\hat{X}) \cdot (\hat{N}^t)$ usando (2.3) e (2.4), que teremos $0_{2 \times 1}$. Também, é imediato verificar que $\langle \hat{N}, \hat{N} \rangle \equiv 1$. Calculemos agora a segunda forma fundamental de \hat{S} . Temos

$$d\hat{N} = -\frac{4}{r^3}\langle X, N \rangle(dr) \cdot X + \frac{2}{r^2}\underbrace{\{(dX) \cdot N^t + (dN) \cdot X^t\}}_{=0} \cdot X + \frac{2}{r^2}\langle X, N \rangle dX - dN.$$

Usando (2.3) e (2.4), vemos que a expressão $d\hat{N} \cdot d\hat{X}^t$ consiste de oito termos. A menos do fator comum $(\rho/r)^2$, os quatro primeiros são:

$$-\frac{4}{r^2}\langle X, N \rangle(dr)(dr^t) + \frac{2}{r}(dN)X^t(dr^t) + \frac{2}{r^2}\langle X, N \rangle dX \cdot dX^t - dN \cdot dX^t.$$

A menos do fator $-2\rho^2/r^3$, os quatro últimos são:

$$-\frac{4}{r}\langle X, N \rangle(dr)(dr^t) + 2(dN)X^t(dr^t) + \frac{2}{r}\langle X, N \rangle(dr)(dr^t) - (dN)X^t(dr^t).$$

Os termos $(dr)(dr^t)$ se cancelam, bem como os termos $(dN)X^t(dr^t)$. Então,

$$d\hat{N} \cdot d\hat{X}^t = 2 \frac{\rho^2}{r^4} \langle X, N \rangle dX \cdot dX^t - \frac{\rho^2}{r^2} dN \cdot dX^t. \quad (2.8)$$

Note que, por (2.5), se X_u e X_v forem direções principais, então \hat{X}_u e \hat{X}_v também são. De (2.8) temos

$$- \begin{pmatrix} \hat{k}_1 & 0 \\ 0 & \hat{k}_2 \end{pmatrix} d\hat{X} \cdot d\hat{X}^t = \frac{\rho^2}{r^2} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} dX \cdot dX^t + 2 \frac{\rho^2}{r^4} \langle X, N \rangle dX \cdot dX^t.$$

Usando novamente (2.5), vemos que a expressão acima implica a tese.

c.q.d.

Observação 2.1 Quando podemos falar de N em S apontando “para dentro” ou “para fora”, como no caso dos spanners da Definição 1.1, é preciso notar o seguinte: Caso $(0, 0, 0)$ esteja “dentro” de S , o vetor normal \hat{N} de \hat{S} dado por (2.7) aponta da mesma forma que N em S . Para visualizar isso, o exemplo mais fácil é o de $S = S_\rho(0)$, que é fixa quando invertida por Ψ . Caso $(0, 0, 0)$ esteja “fora” de S , \hat{N} em \hat{S} aponta de forma oposta a N em S . Isso também ocorre caso $(0, 0, 0) \in S$ (considerando a inversão de $S \setminus \{(0, 0, 0)\}$).

Teorema 2.2 Se $H > 0$ e $\rho \in [\rho_1, \rho_0)$ está fixado, então $\Delta \hat{H}(X, \rho) > 0$, onde Δ é o Laplaciano intrínseco de $S^-(\rho) := (\mathbb{R}^3 \setminus B_\rho(0)) \cap S$.

Demonstração: Vide [11], páginas 550 e 552.

Antes de prosseguirmos, vamos estudar a reflexão de circunferências com respeito a uma circunferência fixa, todas num mesmo plano. Este tomaremos como \mathbb{C} , pois neste caso a ferramenta mais cômoda é a Análise Complexa. Assim, a transformação de Möbius conjugada $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, $T(z) = \rho^2/\bar{z}$, é a inversão com respeito à circunferência de centro na origem e raio ρ .

$$\begin{aligned} T(z) = T(x + iy) = \rho^2/(x - iy) &= \rho^2(x + iy)/(x^2 + y^2) \\ &= \rho^2(x/(x^2 + y^2) + iy/(x^2 + y^2)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Toda circunferência de $\hat{\mathbb{C}}$ se escreve como

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Temos $a = 0 \Leftrightarrow$ (2.10) é uma reta de \mathbb{C} ; $a \neq 0 \Leftrightarrow$ (2.10) é uma circunferência de \mathbb{C} ; $d = 0 \Leftrightarrow$ (2.10) passa pela origem (seja reta ou circunferência). Vejamos a imagem do conjunto (2.10) por T . Como $T \circ T = id_{\hat{\mathbb{C}}}$, então $u + iv = T(x + iy) \Leftrightarrow T(u + iv) = x + iy$, donde por (2.9) temos

$$x = \rho^2 u/(u^2 + v^2) \quad \text{e} \quad y = \rho^2 v/(u^2 + v^2). \quad (2.11)$$

Substituindo (2.11) em (2.10), segue-se que

$$\begin{aligned} a\rho^4/(u^2 + v^2) + bu\rho^2/(u^2 + v^2) + cv\rho^2/(u^2 + v^2) + d = 0 \Rightarrow \\ d(u^2 + v^2) + b\rho^2u + c\rho^2v + a\rho^4 = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Temos $d = 0 \Leftrightarrow$ (2.12) é uma reta de \mathbb{C} ; $d \neq 0 \Leftrightarrow$ (2.12) é uma circunferência de \mathbb{C} ; $a = 0 \Leftrightarrow$ (2.12) passa pela origem (seja reta ou circunferência). Concluimos o seguinte:

Para $a = d = 0$, retas pela origem são levadas a retas pela origem.

Para $a = 0$ e $d \neq 0$, retas disjuntas da origem são levadas a circunferências pela origem.

Para $a \neq 0$ e $d = 0$, circunferências pela origem são levadas a retas disjuntas da origem.

Para $a \neq 0$ e $d \neq 0$: circunferências disjuntas da origem são levadas a circunferências disjuntas da origem.

Agora, note que o centro $C = (\alpha, \beta)$ de uma circunferência é dado por sua equação reduzida $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$. Se for disjunta da origem, então $\alpha^2 + \beta^2 \neq r^2$, donde a reflexão nos dá outra circunferência. Vamos deduzir sua equação reduzida. Temos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0 \\ \Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)(u^2 + v^2) - 2\alpha\rho^2u - 2\beta\rho^2v + \rho^4 = 0 \\ \Rightarrow u^2 + v^2 - 2\alpha\rho^2u/(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) - 2\beta\rho^2v/(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) + \rho^4/(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0 \\ \Rightarrow \left(u - \alpha\rho^2/(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)\right)^2 + \left(v - \beta\rho^2/(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)\right)^2 = r^2\rho^4/(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\hat{C} = \left(\alpha\rho^2/(\alpha^2 + \beta^2 - r^2), \beta\rho^2/(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)\right)$$

é o centro da circunferência refletida, e seu raio é

$$\hat{r} = r\rho^2/|\alpha^2 + \beta^2 - r^2|.$$

Se a curvatura média da circunferência original é $H = 1/r$, então a curvatura média da circunferência refletida é $\hat{H} = \pm H(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)/\rho^2$, sendo + quando O é interno e - quando externo a elas.

Exemplo 2.1 (*Reflexão de esferas por esferas*). Seja $r > 0$ e seja $a = (a, 0, 0)$ com $a > r$. Considere a aplicação do procedimento acima à superfície $S = S_r(a)$. Neste caso, a curvatura média de S é $H = 1/r$. Para $\sqrt{a^2 - r^2} < \rho \leq a + r$, \hat{S} é uma calota com curvatura média

$$\hat{H} = \hat{H}(\rho) = \frac{a^2 - r^2}{\rho^2} H < H. \quad (2.13)$$

A desigualdade (2.13) será válida enquanto ρ decresce, mas somente até $\rho = \sqrt{a^2 - r^2}$. Neste ponto \hat{S} coincide exatamente com a parte não-refletida S^+ de S . Então $\rho_1 =$

$\sqrt{a^2 - r^2}$. Se tivéssemos $r = a$, sua imagem pela reflexão esférica seria um plano que não passa pela origem. Se $r > a$, a inversão $X \rightarrow \rho^2 X / \|X\|^2$ mostra que temos uma mudança de orientação, donde a curvatura média troca de sinal. Mesmo quando $a = 0$, temos que inversões trocam o sinal da curvatura média.

Definição 2.2 Uma superfície S tem *simetria esférica* (ao longo de uma reta ℓ) quando S é invariante por reflexão por alguma esfera centrada em x , para cada $x \in \ell$. Ou seja, para cada $x \in \ell$ existe $\rho = \rho(x)$ tal que

$$\frac{\rho^2}{\|X - x\|^2}(X - x) + x \in S \quad (2.14)$$

sempre que $X \in S$. Além disso, uma tal superfície simétrica é *reflexiva* se para cada $x \in \ell$ o conjunto $S^-(\rho) := \{X \in S : \|X - x\| \geq \rho\}$ é um gráfico de *inclinação limitada* sobre $S_\rho(x)$. Ou seja, para cada $y \in S_\rho(x)$ o raio de x a y intersecta $S^-(\rho)$ em no máximo um ponto, e se $\|X - x\| > \rho$, então $\langle X - x, N \rangle < 0$, onde N é a normal de S em X .

Teorema 2.3 Se $X \in S \cap \Pi_\theta$ e S é simétrica, então existe uma circunferência

$$S_{r_\theta}(y_\theta) = \{(x, y) \in \Pi_\theta : x^2 + (y - y_\theta)^2 = r_\theta^2\}$$

tal que

$$X \in S_{r_\theta}(y_\theta) \subset S \cap \Pi_\theta. \quad (2.15)$$

Em particular, para S reflexiva e $S \cap \Pi_\theta \neq \emptyset$, a inclusão em (2.15) é uma igualdade e S_{r_θ} está parametrizada localmente em $S \cap \Pi_\theta$ por

$$X(\theta, \phi) = \left(r(\theta) \sin \phi, [y(\theta) - r(\theta) \cos \phi] \cos \theta, [y(\theta) - r(\theta) \cos \phi] \sin \theta \right), \quad (2.16)$$

onde $0 \leq \phi < 2\pi$ e $X(\theta, \cdot) \in S_{r(\theta)}(y(\theta)) = S \cap \Pi_\theta$.

Demonstração: Vide [11], páginas 552 a 560.

Definição 2.3 Um compacto K no semi-plano superior de \mathbb{R}^2 é dito ter tangentes externas iguais se, para cada t no eixo Ox , existem pontos P_- e P_+ em K tais que todos os pontos de K estão em um setor fechado determinado por $\overrightarrow{tP_+}$ e $\overrightarrow{tP_-}$ e

$$|P_- - t| = |P_+ - t|.$$

Lema 2.1 Se um compacto K tem tangentes externas iguais então K contém uma curva simples fechada C , de curvatura positiva e K é um subconjunto do envelope convexo de C . Como C é evidentemente única, será referida como “crosta de K ”.

Demonstração: Vide [11], páginas 555 a 556.

Lema 2.2 *Se K é um conjunto simétrico então a crosta C de K é simétrica e coincide com sua própria crosta.*

Demonstração: Vide [11], página 559.

Lema 2.3 *Uma curva simétrica C é uma circunferência.*

Demonstração: Vide [11], páginas 559 a 560.

Teorema 2.4 *Se S tem simetria esférica e curvatura média constante então S é subconjunto de uma esfera.*

Demonstração: Usando os Lemas 2.1 a 2.3 de [11], é possível mostrar que, tomando $u(\theta) = \|X(\theta, 0)\|$ em (2.16), existe uma constante positiva ρ_0 tal que

$$y(\theta) = (\rho_0^2/u + u)/2;$$

$$r(\theta) = (\rho_0^2/u - u)/2.$$

Assim, se $'$ denota $\partial/\partial\theta$, calculando a curvatura média $H(\theta, \phi)$ da superfície dada por (2.16) ao longo das curvas $\phi = 0$ e $\phi = \pi$, obtemos

$$H(\theta, 0) = \frac{1}{r(u'^2 + u^2)^{3/2}} (ruu'' - 2ru'^2 + uu'^2 - ru^2 + u^3);$$

$$H(\theta, \pi) = \frac{1}{r(u'^2 + u^2)^{3/2}} (ru^3u''/\rho_0^2 + uu'^2 + u^3 + ru^4/\rho_0^2).$$

Igualando estas duas equações, vemos que u satisfaz

$$Lu := u(1 - u^2/\rho_0^2)u'' - 2u'^2 - u^2(1 + u^2/\rho_0^2) = 0.$$

Esta é uma equação de 2ª ordem, localmente não-singular enquanto $u(0) < \rho_0$. Tal condição pode ser assumida sem perda de generalidade. Por outro lado, se tomarmos especificamente a esfera $S_R(Y)$ centrada em

$$Y = \left(0, y(0), (u(0) - y(0))u'(0)/u(0)\right)$$

e de raio

$$R = \sqrt{Y_3^2 + r^2(0)},$$

a função correspondente \hat{u} desta parametrização satisfaz

$$\begin{aligned} L\hat{u} &= 0, \\ \hat{u}(0) &= u(0), \\ \hat{u}'(0) &= u'(0). \end{aligned}$$

Vemos que as esferas satisfazem esta equação. Assim, pela unicidade do teorema das EDOs, S é subconjunto de $S_R(Y)$.

c.q.d.

Capítulo 3

Um Teorema Técnico com Implicações Geométricas

Seja \mathcal{S} um spanner como na Definição 1.1, $B = \text{int}(\beta_1) \cup \text{int}(\beta_2)$ e o conjunto aberto \mathcal{D} tal que $\partial\mathcal{D} = \mathcal{S} \cup B$. Temos que \mathcal{D} representa uma porção de fluido que adere aos planos da cunha. De acordo com nossas hipóteses sobre \mathcal{S} , as regiões de aderência B são discos topológicos nos planos Π_1 e Π_2 da cunha (Figura 1).

Começamos a reflexão esférica fixando uma origem $0 \in \mathbb{R}^3$ em um ponto sobre ℓ , que é a aresta da cunha. Sejam $B_\rho(0)$ e \mathcal{S}_ρ definidas no Capítulo 2. Inicialmente, tomamos ρ de modo que $\bar{\mathcal{D}} \subset B_\rho(0)$. Ao diminuir o raio ρ , chegamos à primeira esfera S_{ρ_0} que intercepta \mathcal{S} . Continuando a diminuir ρ , aplicamos Ψ definida em (2.1) ao subconjunto $\mathcal{S}^- = \mathcal{S}_\rho^- := (\mathbb{R}^3 \setminus B_\rho(0)) \cap \mathcal{S}$. A reflexão de \mathcal{S}^- é $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}(\rho) := \Psi\mathcal{S}^-$. O teorema seguinte rastreia $\mathcal{S}^+(\rho) := \mathcal{S} \cap \bar{B}_\rho(0)$ e $\hat{\mathcal{S}}$ durante o processo de reflexão:

Teorema 3.1 *Existe um raio $\rho_1 \in (0, \rho_0)$ tal que, para cada $\rho \in (\rho_1, \rho_0)$, todo ponto $X \in \mathcal{S}^-$ satisfaz exatamente uma das quatro condições seguintes:*

Caso $\|X\| > \rho$,

NT1. *Se $X \in \text{int}\mathcal{S}$ então $(1 - \delta)X \in \mathcal{D}$, $\forall \delta \in (0, 1 - \frac{\rho^2}{\|X\|^2}]$.*

NT2. *Se $X \in \partial\mathcal{S}$ então $(1 - \delta)X \in B$, $\forall \delta \in (0, 1 - \frac{\rho^2}{\|X\|^2}]$.*

Caso $\|X\| = \rho$,

NT3. *Se $X \in \text{int}\mathcal{S}$ então $\langle X, N \rangle < 0$, onde N é o vetor normal apontando para \mathcal{D} .*

NT4. *Se $X \in \partial\mathcal{S}$ então $\langle X, n \rangle < 0$, onde n é o vetor normal apontando para B .*

No entanto, quando $\rho = \rho_1$, vale pelo menos uma das seguintes condições para algum $X \in \mathcal{S}^-$:

Caso $\|X\| > \rho$,

T1. *Se $X \in \text{int}\mathcal{S}$ então $\hat{\mathcal{S}}$ é tangente a \mathcal{S}^+ em $\hat{X} = \Psi X$.*

T2. *Se $X \in \partial\mathcal{S}$ então \mathcal{S} é tangente a \mathcal{S}^+ em \hat{X} .*

12CAPÍTULO 3. UM TEOREMA TÉCNICO COM IMPLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

Caso $\|X\| = \rho$,

T3. Se $X \in \text{int } \mathcal{S}$ então N é tangente a S_{ρ_1} em $\hat{X} = X$.

T4. Se $X \in \partial \mathcal{S}$ então n é tangente a S_{ρ_1} em $\hat{X} = X$.

Lema 3.1 Considere $X \in \mathcal{S}^-(\rho_1)$, isto é $X \in \mathcal{S}$ e $\|X\| \geq \rho_1$. Então temos:

(i) $\langle X, N \rangle \leq 0$.

(ii) Para $X \in \text{int } \mathcal{S}$, a desigualdade vale quando $\|X\| = \rho_1$.

(iii) Para $X \in \partial \mathcal{S}$ com $0 < \gamma_1, \gamma_2 < \pi$, a desigualdade vale quando $\|X\| = \rho_1$.

Não iremos apresentar a demonstração dos resultados deste capítulo, pois são de cunho demasiadamente técnico. Todavia podem ser encontradas no Apêndice de [10]. Reservamos as demonstrações para os outros capítulos, pois aqueles são bem mais ricos em argumentos geométricos, o que justifica a prioridade de nosso trabalho ser voltado à Geometria Diferencial.

Capítulo 4

As Conseqüências Geométricas do Teorema 4.1

4.1 Introdução

Este capítulo concentra-se no estudo de spanners \mathcal{S} que não satisfazem a “Propriedade da Minoração” (definida logo a seguir). Neste caso, $H > 0$ e $e > g$, onde H é a curvatura média e e, g são as entradas da diagonal principal da 2ª forma fundamental de \mathcal{S} numa parametrização isotérmica.

Tal resultado mostrará que a “Propriedade da Minoração” é intrínseca para \mathcal{S} , uma vez que H, e e g independem da origem particular de reflexão ao longo de ℓ , aresta da cunha.

Quando \mathcal{S} satisfizer a Propriedade da Minoração, com centro em cada $x \in \ell$ haverá $\mathcal{S}_\rho(x)$ tal que \mathcal{S} é simétrica por reflexão esférica respectivamente a $\mathcal{S}_\rho(x)$. Devido ao Teorema 2.4, disso temos que \mathcal{S} é um anel esférico. Portanto, resta considerarmos o caso em que \mathcal{S} não satisfaz a “Propriedade da Minoração”.

Usando teoria de Superfícies de Riemann, pode-se mostrar que qualquer superfície S tipo anel de CMC (curvatura média constante) pode ser parametrizada por uma única carta conforme $Y : A \rightarrow S$, onde A é o anel $(0, r, 1)$. Seja S a superfície em questão e N sua orientação.

Seja $\omega = \log z$ uma aplicação de A para o retângulo Ω no plano $\omega = u + iv$ e note que a inversa (exponencial) é periódica na faixa $\log r < u < 0$, a qual também denotamos por Ω . Iremos considerar Y suave em \bar{A} , donde X é suave em $\bar{\Omega}$. A aplicação $X = Y \circ \exp : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ é uma representação conforme de \mathcal{S} . Pelo Teorema 6.1, as curvas de $\partial\mathcal{S}$ são curvas principais de \mathcal{S} . Assim, o coeficiente $f = \langle X_u, N \rangle$ da Segunda Forma Fundamental

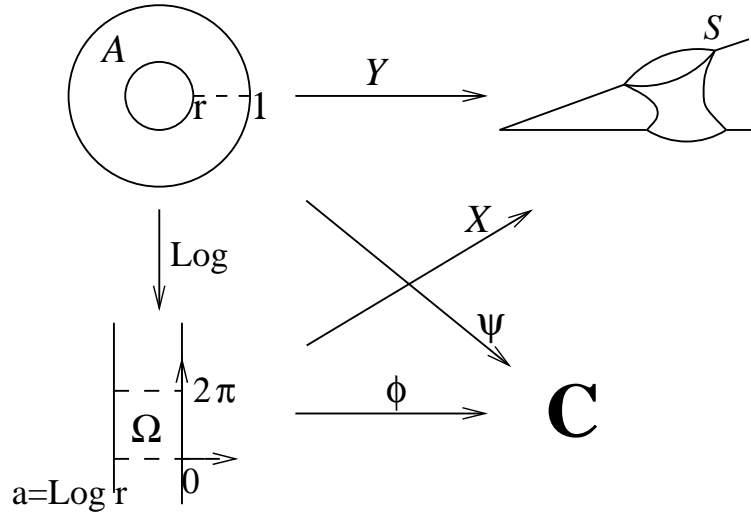


Figura 4.1: Representação conforme da superfície de tipo anel.

anula-se sobre $\partial\mathcal{S}$. Por outro lado, $\phi \circ \log$ define uma função analítica sobre A , onde $\phi \equiv (e - g) - 2if$, $e = \langle X_{uu}, N \rangle$ e $g = \langle X_{vv}, N \rangle$. Conseqüentemente, $Im(\phi \circ \log)$ é harmônica e se anula em ∂A . Assim, $Im(\phi \circ \log) \equiv 0$ e $Re(\phi \circ \log) \equiv c$ (constante), donde $f \equiv 0$. Deste modo, para cada u_0, v_0 fixos, $X(u_0, \cdot)$ e $X(\cdot, v_0)$ são curvas principais sobre Ω . Além disso, $e - g \equiv c$ (constante). Em resumo, os coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais satisfazem:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = G, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

e

$$e - g = \langle X_{uu}, N \rangle - \langle X_{vv}, N \rangle = c, \quad f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0.$$

Portanto $2H = (e + g)/E$ e vemos que

$$e = EH + c/2, \quad g = EH - c/2.$$

Além disso, $k_1 + k_2 = 2H$ e $k_1 k_2 = K = eg/E^2$, de modo que as curvaturas principais são dadas por $k_1 = e/E = H + 0,5c/E$ e $k_2 = g/E = H - 0,5c/E$.

Finalmente, se tomarmos a normal N apontando para dentro de \mathcal{S} ao longo das linhas coordenadas (que são curvas principais), então

$$N_u = -k_1 X_u, \quad N_v = -k_2 X_v. \quad (4.1)$$

Observação 4.1 de (4.1) temos $-k_1 E = \langle X_u, N_u \rangle = -\langle X_{uu}, N \rangle = -e$, donde $k_1 = e/E$, e similarmente $k_2 = g/E$. Ocorre que as curvas β de contato entre \mathcal{S} e a cunha são ambas na direção de v , como representado na Figura 4.1. De (6.1), um cálculo simples mostra que, nesta direção, $k_n = g/E = k_2$.

Definição 4.1 (*Propriedade da Minoração*). A superfície \mathcal{S} de CMC é dita ter a Propriedade da Minoração se para cada $\rho \geq \rho_1$ e cada $X \in \mathcal{S}$ com $\|X\| \geq \rho$ vale a desigualdade:

$$\hat{H}(X, \rho) \leq H,$$

onde $\hat{H}(X, \rho)$ é a curvatura média de $\hat{\mathcal{S}}$ na imagem de X pela aplicação Ψ .

4.2 Spanners e a Propriedade da Minoração

Nesta seção provaremos o seguinte resultado, lembrando que neste trabalho \mathcal{S} denota um spanner, como na Definição 1.1:

Lema 4.1 *Todo \mathcal{S} satisfaz à Propriedade da Minoração, a menos que $H > 0$ e $c > 0$, caso em que ela pode falhar.*

Observação 4.2 Note que o caso $c = 0$ implica \mathcal{S} umbílica, donde anel esférico pela Proposição 6.7. Ou seja, já estamos considerando $c \neq 0$. A demonstração do Lema 4.1 é consequência direta das quatro proposições seguintes:

Proposição 4.1 *Qualquer superfície de curvatura média não-positiva satisfaz a Propriedade da Minoração.*

Proposição 4.2 *Seja \bar{X} um ponto em que $\hat{H}(X, \rho)$ atinge seu máximo. Suponha que $\|\bar{X}\| = \rho$ e \mathcal{S} tem $H > 0$. Então vale a Propriedade da Minoração.*

Proposição 4.3 *Seja \mathcal{S} com $H > 0$ e $\gamma \in \{0, \pi\}$. Então $c > 0$.*

Proposição 4.4 *Se $H > 0$, $0 < \gamma < \pi$ e $c < 0$, então vale a Propriedade da Minoração para \mathcal{S} .*

Seguem-se as demonstrações.

Prova da Proposição 4.1: Do Teorema 2.1, temos que se k_j , $j = 1, 2$ denotam as curvaturas principais, com direção principal v_j num ponto $X \in \mathcal{S}$, então a aplicação Ψ em (2.1) leva v_j a uma direção principal \hat{v}_j sobre $\hat{\mathcal{S}}$ com curvatura principal

$$\hat{k}_j = -\frac{1}{\rho^2}(\|X\|^2 k_j + 2\langle X, N \rangle).$$

Agora, da Observação 2.1, como $(0, 0, 0)$ encontra-se “fora” de \mathcal{S} , e temos fixado sempre o normal que aponte “para dentro”, então

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}(\hat{k}_1 + \hat{k}_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2}(k_1\|X\|^2 + 2\langle X, N \rangle) + \frac{1}{\rho^2}(k_2\|X\|^2 + 2\langle X, N \rangle)\right),$$

que resulta na fórmula

$$\hat{H}(X, \rho) = \frac{1}{\rho^2}(\|X\|^2 \cdot H + 2\langle X, N \rangle). \quad (4.2)$$

De acordo com o item (i) do Lema 3.1, temos $\langle X, N \rangle \leq 0$ quando $\|X\| \geq \rho_1$.

c.q.d.

Prova da Proposição 4.2: Pelo Teorema 2.2, \hat{H} é sub-harmônica e portanto atinge seu máximo em um ponto $\bar{X} = \bar{X}(\rho) \in \partial\mathcal{S}^-$. Ou seja, para qualquer $X \in \mathcal{S}^-(\rho)$ vale

$$\hat{H}(X, \rho) \leq \hat{H}(\bar{X}, \rho). \quad (4.3)$$

Mas para $\|\bar{X}\| = \rho$, (4.2) implica $\hat{H}(\bar{X}, \rho) \leq H + \frac{2}{\rho^2}\langle \bar{X}, \bar{N} \rangle$. Pelo item (i) do Lema 3.1, temos $\langle \bar{X}, \bar{N} \rangle \leq 0$. Finalmente, segue-se a tese aplicando (4.3). c.q.d.

Observação 4.3 Devido às Proposições 4.1 e 4.2, o leitor irá notar que as próximas demonstrações consideram apenas $\|\bar{X}\| > \rho$ e $\bar{X} \in \partial\mathcal{S}$.

Na Introdução deste capítulo, estudamos \mathcal{S} parametrizado por uma única carta conforme $Y : A \rightarrow \mathcal{S}$, onde A é o anel $(0, r, 1)$. A Observação 4.3 é crucial para utilizarmos a hipótese topológica (a de que \mathcal{S} é um anel).

Prova da Proposição 4.3: Pelos Teorema 6.1 e Observação 4.1, a curva de bordo β é curva principal com curvatura normal $k_2 = H - 0,5c/E$. Para estes ângulos de contato com valores extremos, entretanto, a normal N é perpendicular a π , e como $\beta \subset \pi$, sua curvatura normal é zero.

c.q.d.

Dedicaremos o restante desta seção à prova da Proposição 4.4. Tal prova é obtida por contradição, supondo que $c < 0$ e não vale a Propriedade da Minoração. Usaremos esta suposição nos Lemas 4.2 e 4.3 adiante. Estes e o seguinte corolário são três resultados preliminares de que necessitamos para provar a Proposição 4.4.

Corolário 4.1 *Considere $\Omega_1 := \{(u, v) \in \Omega : \|X(u, v)\| > \rho_1\}$, e observe que \hat{H} atinge seu máximo em um ponto $(\bar{u}, \bar{v}) \in \partial\Omega_1$. Se $\bar{X} := X(\bar{u}, \bar{v})$, então, para qualquer $\rho \geq \rho_1$ e $\|X\| \geq \rho_1$ tem-se $\hat{H}(X, \rho) \leq \hat{H}(\bar{X}, \rho)$.*

Lema 4.2 *Suponha que não vale a Propriedade da Minoração. Então existem $\tilde{\rho}$ e $\tilde{X} \in \mathcal{S}^-(\tilde{\rho})$ com $\rho_1 < \tilde{\rho} < \|\tilde{X}\|$ tais que*

(i) $\hat{H}(\tilde{X}, \tilde{\rho}) = H$.

(ii) $\hat{H}(\tilde{X}, \rho) > H$ se $\rho_1 \leq \rho < \tilde{\rho}$.

(iii) $\hat{H}(X, \rho) \leq H$ se $\|X\| \geq \rho \geq \tilde{\rho}$.

Lema 4.3 $\bar{X} \in \partial\mathcal{S}$.

Seguem-se as demonstrações.

Corolário 4.1: De acordo com (4.2) e Teorema 2.2 temos

$$\frac{1}{\rho_1^2}(\|X\|^2 \cdot H + 2\langle X, N \rangle) \leq \frac{1}{\rho_1^2}(\|\bar{X}\|^2 \cdot H + 2\langle \bar{X}, \bar{N} \rangle).$$

Obtemos a tese multiplicando ambos os lados por ρ_1^2/ρ^2 .

c.q.d.

Observação 4.4 Note que, pelo Corolário 4.1, $\hat{H}(X, \rho)$ atinge seu máximo na fronteira, mesmo quando não temos garantia de que é sub-harmônica. Tal garantia é dada pelo Teorema 2.2 mas com a hipótese $X \in \mathcal{S}^-(\rho)$, o que restringiria $\|X\| \geq \rho$. O Corolário 4.1 suprime essa restrição.

Lema 4.2: O ponto \bar{X} está definido no Corolário 4.1. Para cada $\rho \geq \rho_1$, o conjunto $\mathcal{S} \cap (\mathbb{R}^3 \setminus B_\rho(0))$ pode ter pontos X com $\|X\| = \rho$ e $\|X\| > \rho \geq \rho_1$. No primeiro caso, usando (4.2) e o Lema 3.1, temos

$$\hat{H}(X, \rho) = H + \frac{2}{\rho^2} \langle X, N \rangle \leq H. \quad (4.4)$$

No segundo caso, tais pontos satisfazem $\hat{H}(X, \rho) \leq \hat{H}(\bar{X}, \rho)$ pelo Corolário 4.1. Por hipótese, a Propriedade da Minoração não é válida, e assim concluímos que existem $\rho^* \geq \rho_1$ e \tilde{X} com $\|\tilde{X}\| \geq \rho^*$ para os quais $\hat{H}(\tilde{X}, \rho^*) > H > 0$. Como $\hat{H}(\tilde{X}, \|\tilde{X}\|) \leq H$, o Teorema do Valor Intermediário garante que a equação $\hat{H}(\tilde{X}, \rho) = H$ tem solução $\rho = \tilde{\rho}$. Aliás, a solução é única, dada por

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\|\tilde{X}\|^2 + 2\langle \tilde{X}, \tilde{N} \rangle / H}. \quad (4.5)$$

Isto prova o item (i) do lema. Recorde que $\tilde{\rho} > \rho_1$ pois \hat{H} decresce com ρ . Então vale o item (ii) do lema.

Uma vez que $\rho^* \geq \rho_1$ e $\|\tilde{X}\| \geq \rho_1$, podemos então usar o Corolário 4.1 para concluir que $H < \hat{H}(\tilde{X}, \rho^*) \leq \hat{H}(\bar{X}, \rho^*)$. Para (\bar{X}, ρ^*) contradizer a Propriedade da Minoração, basta valer $\|\bar{X}\| \geq \rho^*$, o que iremos provar agora.

Suponha que $\|\bar{X}\| < \rho^*$. É claro que $\|\bar{X}\| \geq \rho_1$, pois $\bar{X} \in \partial\Omega_1$. Além disto, $\bar{X} \in \mathcal{S} \cap (\mathbb{R}^3 \setminus B_{\|\bar{X}\|}(0))$, donde por (4.4) temos $\hat{H}(\bar{X}, \|\bar{X}\|) \leq H$. Mas $\|\bar{X}\| < \rho^*$ e $\hat{H}(\bar{X}, \cdot)$ decrescente com ρ implicam $\hat{H}(\bar{X}, \|\bar{X}\|) > \hat{H}(\bar{X}, \rho^*) > H$. Agora, $\|\tilde{X}\| \geq \rho^* \geq \rho_1$, pois (\tilde{X}, ρ^*) contradiz a Propriedade de Minoração. Mais que isso, $\|\bar{X}\| < \rho^*$ implica

$\|\tilde{X}\| > \|\bar{X}\|$. Portanto, estamos nas hipóteses do Corolário 4.1, donde $\hat{H}(\tilde{X}, \|\bar{X}\|) \leq \hat{H}(\bar{X}, \|\bar{X}\|) \leq H$, o que é absurdo.

Ou seja, sem perda de generalidade podemos supor que $\tilde{X} = \bar{X}$, pois tal ponto apenas traduz a hipótese de que não vale a Propriedade da Minoração. Assim, para todo $\rho \geq \tilde{\rho}$ o Corolário 4.1 implica

$$\hat{H}(X, \rho) \leq \hat{H}(\tilde{X}, \rho) = \frac{1}{\rho^2}(\|\tilde{X}\|^2 \cdot H + 2\langle \tilde{X}, \tilde{N} \rangle) \leq \frac{1}{\tilde{\rho}^2}(\|\tilde{X}\|^2 \cdot H + 2\langle \tilde{X}, \tilde{N} \rangle) = \hat{H}(\tilde{X}, \tilde{\rho}) = H.$$

Isto prova o item (iii) do lema. Agora, $\|\tilde{X}\| \geq \tilde{\rho}$ pelo item (i). Então, $\|\tilde{X}\| > \rho_1$ e do Lema 3.1 temos $\langle \tilde{X}, \tilde{N} \rangle < 0$. Em particular, se tivéssemos $\|\tilde{X}\| = \tilde{\rho}$, valeria

$$\hat{H}(\tilde{X}, \tilde{\rho}) = H + \frac{2}{\tilde{\rho}^2}\langle \tilde{X}, \tilde{N} \rangle < H,$$

o que contradiz o item (i). Isso prova que $\|\tilde{X}\| > \tilde{\rho}$.

c.q.d.

Observação 4.5 O item (ii) do Lema 4.2 é, em certo sentido, a “primeira vez” em que falha a Propriedade da Minoração. Além disso, devido ao Corolário 4.1, na demonstração do Lema 4.2 tomamos \tilde{X} do tipo \bar{X} , donde chamaremos o correspondente $\tilde{\rho}$ de $\bar{\rho}$.

Lema 4.3: Sabemos que $(\bar{u}, \bar{v}) \in \partial\Omega_1$. A imagem de $\partial\Omega_1$ sob X consiste de pontos em $\partial\mathcal{S}$ e pontos em S_{ρ_1} . Mas $\|\bar{X}\| > \rho_1$ pelo Lema 4.2, donde segue-se a tese.

c.q.d.

Observação 4.6 a Proposição 4.4 é corolário do seguinte teorema, pois ele mostra que se a Propriedade da Minoração não é válida, então $c > 0$. Ou, se $c < 0$, ela é válida.

Teorema 4.1 Para \mathcal{S} com $H > 0$ e $0 < \gamma < \pi$, é impossível termos, simultaneamente, $c < 0$ e não valer a Propriedade da Minoração.

Demonstração: Vamos provar por absurdo, da seguinte maneira. Se não vale a Propriedade da Minoração e $c < 0$, iremos obter um ponto $\bar{\bar{X}} \in \partial\mathcal{S}$ com $\|\bar{\bar{X}}\| = \bar{\bar{\rho}} \geq \bar{\rho}$ tal que $\bar{\bar{X}}$ é do “tipo T4”. Isto é, $\bar{\bar{X}} \in \partial\mathcal{S}$ e n é tangente a $S_{\bar{\bar{\rho}}}$ em $\hat{X} = X$. Mas existindo $\bar{\bar{X}}$ como acabamos de explicar, este iria contradizer a propriedade NT4 do Teorema 2.2, donde o absurdo. Seguiremos o roteiro abaixo.

(i) De acordo com (4.2), a esfera oscultriz, (de raio $1/H$ com centro $\mathcal{C}(X) = X + (1/H)N$), (figura 4.2) é refletida para a esfera de raio $1/|\hat{H}|$. Pelo item (i) do Lema 4.2, neste ponto vale $\hat{H} = H$, e a esfera oscultriz em \bar{X} , portanto, é invariante por reflexão em $\mathcal{S}_{\bar{\rho}}$. Tal procedimento é explicado no Exemplo 2.1.

(ii) A esfera oscultriz intercepta Π (plano contendo \bar{X} e ℓ) em um círculo C , que é invariante por esta reflexão.

(iii) A componente de $\partial\mathcal{S}$ contendo \bar{X} é uma curva β que tem curvatura maior que a de C . Comparando β e C podemos obter um ponto do tipo T4.

Alguns detalhes:

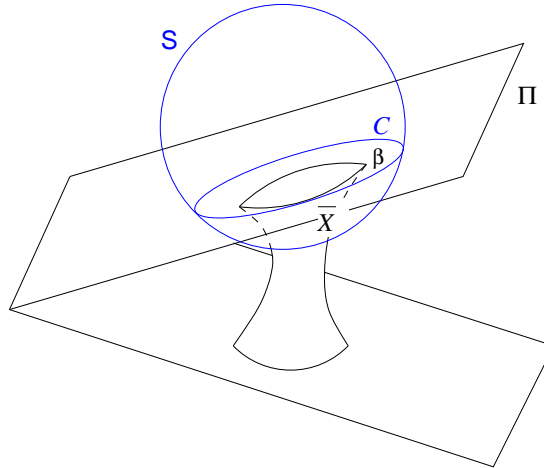


Figura 4.2: Esfera Oscultriz.

Na demonstração da Proposição 4.3, antes de aplicarmos suas hipóteses, havíamos visto que β tem curvatura *normal* k_2 . Portanto, a curvatura k de β é dada por $k = k_2 \csc \gamma$.

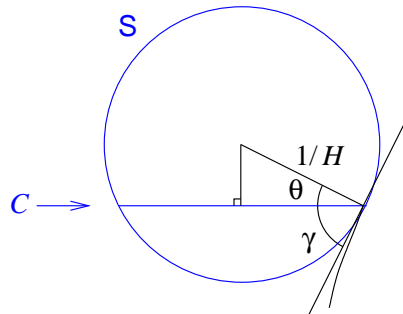


Figura 4.3: Interseção entre S e Π.

Também, a circunferência

$$C := \mathcal{S}_{\frac{1}{H}}(\mathcal{C}(\bar{X})) \cap \Pi$$

tem raio $\sin \gamma / H$ e curvatura $\tilde{k} = H \csc \gamma$. Agora, como $k_2 = H - \frac{c}{2E} > H$, vale

$$k > \tilde{k}.$$

Da Observação 4.5, temos $\hat{H}(\bar{X}, \bar{\rho}) = H$ e a reflexão sobre a esfera $\partial B_{\bar{\rho}}(0)$ no plano Π deixa C invariante. Para que isto seja verdadeiro, vimos no Exemplo 2.1 que 0 deve

estar no exterior de C e que os dois únicos segmentos de tangência de 0 a C tenham comprimento $\bar{\rho}$ (Figura 4.4).

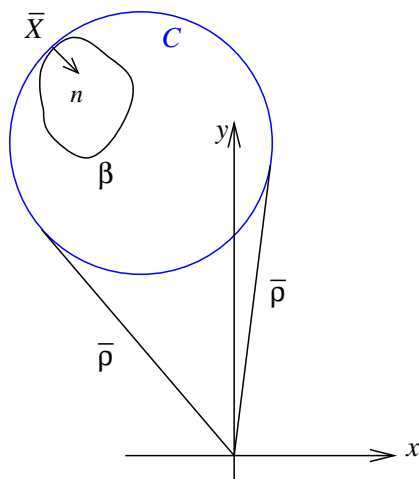


Figura 4.4: O Plano II (Primeira vista).

Os pontos de tangência desses dois segmentos tangentes divide C em dois arcos, e como $\|\bar{X}\| > \bar{\rho}$ pelo Lema 4.2, \bar{X} está no arco exterior. Sem perda de generalidade, podemos tomar o eixo y passando pelo centro de C e \bar{X} no primeiro quadrante. Além disso, assumimos que β está parametrizada pelo comprimento de arco e que $\dot{\beta}$ é uma parametrização de C pelo comprimento de arco tal que

$$\beta(0) = \tilde{\beta}(0) = \bar{X} \quad \text{e} \quad \langle \bar{X}, \dot{\beta} \rangle = \langle \bar{X}, \dot{\tilde{\beta}} \rangle \leq 0$$

(Figura abaixo 4.5).

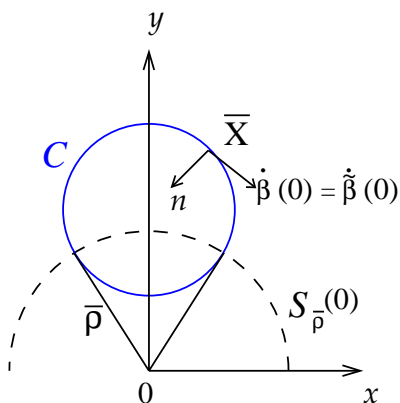


Figura 4.5: O Plano II (Segunda vista).

Estamos interessados nas quantidades $\phi = \|\beta\|^2$ e $\psi = \langle \beta, n \rangle$, onde $n = \ddot{\beta}/k$. O anulamento de ψ em algum ponto indica que este é do tipo T4. Temos $\psi(0) = \langle \bar{X}, n \rangle < 0$ pois $\|\bar{X}\| > \bar{\rho}$. Também, um cálculo simples implica $\dot{\psi}(s) = -k(s)\dot{\phi}(s)/2$. É claro, nem ϕ nem ψ podem ser globalmente monótonas.

Uma vez que $k > \tilde{k}$, temos que β é *convexa* devido ao Teorema 6.3. Em particular, existem somente duas direções em que $\beta \perp n$, pelo Teorema 6.4. Além disso, devido à convexidade, o mesmo Teorema nos dá exatamente dois pontos em que $\beta // n$. Isso implica que ψ tem um único mínimo e um único máximo, portanto globais.

Tomamos o sentido horário, para o qual existe $\varepsilon > 0$ tal que $\phi(s)$ sempre decresce e $\psi(s)$ sempre cresce em $s \in [0, \varepsilon)$.

Agora, no ponto onde ϕ atinge um mínimo temos $\langle \beta, \dot{\beta} \rangle = 0$, e nele ψ atinge um máximo, pois $\dot{\psi} = 0 + \langle \beta, \dot{n} \rangle = -k \langle \beta, \dot{\beta} \rangle$.

Ou seja, podemos tomar ε como o menor positivo para o qual $\langle \beta, \dot{\beta} \rangle = 0$. Uma vez que β é *convexa*, ε é o ponto em que ϕ tem seu único mínimo, portanto mínimo global, devido ao Teorema 6.4.

Usando novamente a convexidade de β , existe $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que $s = \delta$ implica β paralelo a $\dot{\beta}$, ou equivalentemente, $\psi = 0$. Isso é garantido pela demonstração do Teorema 6.4, pois $Arg(\beta)$ decresce a partir de $0 \in [0, \varepsilon)$ e cresce ao se aproximar de ε , donde atinge um mínimo, que não pode ser apenas local, e portanto único.

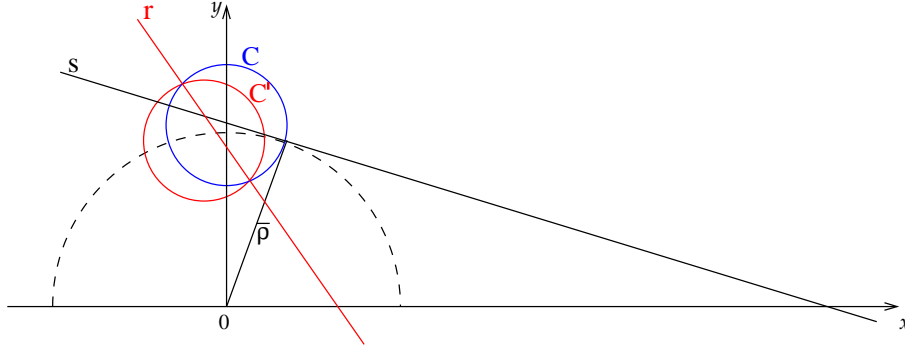
Como $k(\delta) > \tilde{k}(\delta)$, então $\{\beta\}$ está inteiramente contido no círculo de raio $1/\tilde{k}$ tangente à reta $\beta(\delta)\mathbb{R}$ pela esquerda, devido ao Teorema 6.7.

Se tivéssemos $\|\beta(\delta)\| < \bar{\rho}$, afirmamos que tal círculo não cruzaria com C em pontos do primeiro quadrante que tenham módulo maior que $\bar{\rho}$. Mas ele contém o ponto \bar{X} , o que é uma contradição. Assim, temos um ponto $\bar{X} = \beta(\delta) \in \partial\mathcal{S}$ com $\|\bar{X}\| = \|\bar{\rho}\| \geq \bar{\rho} > \rho_1$ e $\langle \bar{X}, n \rangle = 0$.

Para provar tal afirmação, tome as circunferências de raio $R > 0$ e centros $(0, h)$ e $(-a, b)$, respectivamente onde $a, b > 0$ e $h > b$, denotadas por C e C' , cujas equações são

$$C : x^2 + (y - h)^2 = R^2, \quad (4.6)$$

$$C' : (x + a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (4.7)$$

Figura 4.6: Interseção entre C e C' .

Basta mostrar que a reta r , passando pelos pontos de $C \cap C'$, intercepta o eixo Oy em um ponto abaixo de $(0, h)$, e seu coeficiente angular, m_r , é menor que o coeficiente angular de uma outra reta s , m_s , passando por $(0, h)$ e pelo ponto $X_{\bar{\rho}}$ (interseção entre C e a circunferência de raio $\bar{\rho}$) do primeiro quadrante.

Vamos provar que o ponto de interseção entre a reta r e o eixo Oy ocorre abaixo de $(0, h)$. Fazendo (4.7) – (4.6), obtemos a equação da reta r , dada por:

$$r : 2ax + a^2 - 2(b - h)y + b^2 - h^2 = 0. \quad (4.8)$$

Agora isolando y , temos

$$(2ax + a^2 + b^2 - h^2)/[2(b - h)] = y.$$

Como $a, b > 0$ e $h > b$ a interseção entre a reta r e o eixo Oy será

$$r \cap Oy : (a^2 + b^2 - h^2)/[2(b - h)] = y,$$

que por sua vez é positivo, pois $(a^2 + b^2 - h^2) < 0$ e $2(b - h) < 0$. Suponha, agora, que $|y| \geq h$, isto é, $(a^2 + b^2 - h^2)/[2(b - h)] \geq h$, então

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - h^2)/[2(b - h)] - h &\geq 0 \Rightarrow [(a^2 + b^2 - h^2) - 2h(b - h)]/[2(b - h)] \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a^2 + b^2 + h^2 - 2hb)/[2(b - h)] \geq 0 \Rightarrow (a^2 + (b - h)^2)/[2(b - h)] \geq 0. \end{aligned}$$

Absurdo, pois $(b - h) < 0$, portanto $|y| < h$.

Vamos agora provar que a inclinação da reta r é tão ou mais negativa que a da reta s , isto é,

$$-a/(h - b) \leq -r/\bar{\rho} \Leftrightarrow a/(h - b) \stackrel{(*)}{\geq} r/\bar{\rho}.$$

O maior valor que a pode ter é $\sqrt{h^2 - b^2}$, e neste caso $(*)$ equivale a

$$\sqrt{(h + b)/(h - b)} \geq r/\sqrt{h^2 - b^2},$$

onde $r/\sqrt{h^2 - r^2}$ é fixo e $\sqrt{(h+b)/(h-b)}$ varia com b , onde seu limite, para $b \rightarrow h$, é infinito positivo quando $b = h$, e a igualdade só se verifica se $b = 2r^2/h - h$. Porém, $b \geq r$, enquanto que

$$r < h \Rightarrow \begin{cases} r^2 < h^2 \\ r^2 < rh \end{cases} \Rightarrow 2r^2/h - h < r.$$

Então, a igualdade nunca se verifica, no caso $a = \sqrt{h^2 - b^2}$. Logo, obtemos $a^2 + b^2 < h^2$ com a crescente e b decrescente, donde $a/(h-b)$ é crescente. Assim, (*) continuará verdadeira. c.q.d.

4.3 Conclusões

Provamos assim o Lema 4.1 como consequência direta das Proposições 4.1 a 4.4. Ou seja, caso não valha a Propriedade da Minoração, podemos inferir que $H > 0$ e $c > 0$. No próximo capítulo mostraremos que $H, c > 0$ implica $\gamma_1 + \gamma_2 > \pi + \alpha$.

Capítulo 5

Prova do Teorema 1.2 e Conclusões

Teorema 1.2 Uma solução esférica existe somente se $\gamma_1 + \gamma_2 > \pi + \alpha$.

Pela Observação 4.2, \mathcal{S} é anel esférico quando $c = 0$, donde $\gamma_1 + \gamma_2 > \pi + \alpha$. Agora, na Introdução do Capítulo 4 vimos que \mathcal{S} também é anel esférico caso satisfaça à Propriedade da Minoração. O Lema 4.1 garante que \mathcal{S} tem a Propriedade da Minoração, exceto possivelmente para $H > 0$ e $c > 0$. Resta mostrarmos que, mesmo no caso $H > 0$ e $c > 0$, teremos $\gamma_1 + \gamma_2 > \pi + \alpha$. Isto ainda não garante que \mathcal{S} é anel esférico, uma questão deixada aberta em 1997 por J. McCuan [10], mas provada somente em 2005 por S. Park [12].

O lema a seguir finalmente implica o Teorema 1.2:

Lema 5.1 *Se $H, c > 0$, então $\gamma_1 + \gamma_2 > \pi + \alpha$.*

Demonstração: Todo spanner possui um plano de simetria Σ com normal paralelo ao vértice ℓ da cunha. Este plano é obtido pelo clássico Princípio de Reflexão de Alexandrov da seguinte maneira. Sejam $\ell = Ox$ e $X : U \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ como discutido na Introdução do Capítulo 4. A menos de translação, como \mathcal{S} é compacto e conexo, sua projeção ortogonal em Ox é um intervalo $[-r_0, r_0]$. De modo análogo ao explicado na Introdução do Capítulo 3, tomamos planos ortogonais a Ox por $r \in [-r_0, r_0]$, e consideramos r_1 o primeiro valor para o qual a parte refletida $\hat{\mathcal{S}}$ (da direita para a esquerda) toca a parte não-refletida \mathcal{S}^+ de \mathcal{S} .

Pelo Princípio do Máximo, Teorema 6.2, existe uma vizinhança do ponto de toque em que $\hat{\mathcal{S}}$ e \mathcal{S}^+ coincidem. Ou seja, os pontos de coincidência formam um subconjunto aberto não-vazio de ambas. Este subconjunto não possui fronteira, pois tais pontos também seriam de tangência, e novamente pelo Princípio do Máximo admitiriam uma vizinhança de tangência. Ou seja, $\hat{\mathcal{S}} \equiv \mathcal{S}^+$, donde \mathcal{S} é invariante por reflexão no plano Σ que corta Ox ortogonalmente em $r_1 = 0$ (Figura 5.1).

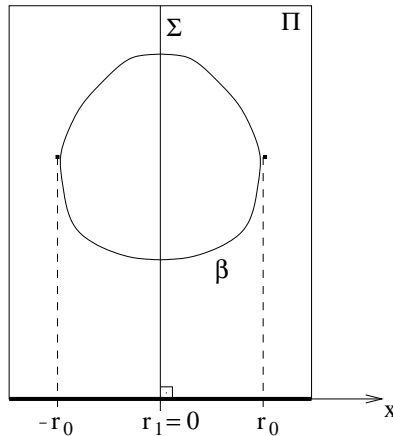


Figura 5.1: O Plano de simetria Σ .

Conseqüentemente, Σ divide \mathcal{S} em duas metades, \mathcal{S}^+ e \mathcal{S}^- , cada qual um gráfico. De fato, se houvesse dois pontos distintos em \mathcal{S}^+ com a mesma projeção ortogonal em Σ , eles teriam coordenadas $r \geq 0$ e $R > r$. Porém, o plano Σ' ortogonal a Ox em $(R - r)/2$ contradiria o fato de que $r_1 = 0$ representa o primeiro valor para o qual a parte refletida toca a não-refletida, como explicado anteriormente (Figura 5.2).

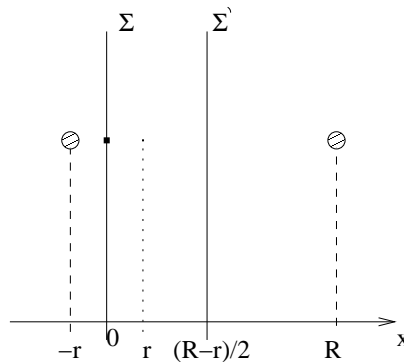


Figura 5.2: O Plano de simetria Σ' .

Note que a interseção entre a cunha e Σ são duas semi-retas, uma em Π_1 e outra em Π_2 , ambas ortogonais a $\ell = Ox$ em $r_1 = 0$, $r_1 = \ell \cap \Sigma$. Em Π_k , a semi-reta intercepta B num segmento $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2$. Os pontos a_k e b_k são as interseções de β_k com Σ (Figura 6.1). Sem perda de generalidade, $Oxy = \Pi_1$ e Π_2 está no semi-espaco superior. Em particular, $\Sigma = Oyz$. Visto que o normal N em \mathcal{S} ao longo de $\mathcal{S} \cap \Sigma$ é invariante por reflexão em Σ , então N é paralelo a Σ (Figura 5.3). Ou seja, o plano tangente a \mathcal{S} em cada $p \in \mathcal{S} \cap \Sigma$ é ortogonal a Σ .

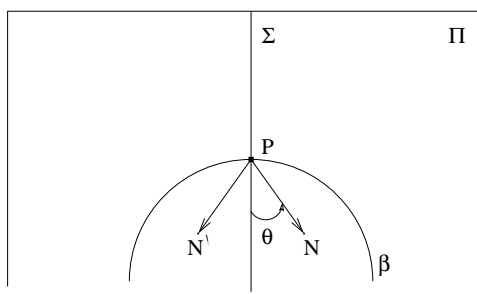


Figura 5.3: Normal paralelo a Σ .

O Teorema da Função Implícita garante que $\mathcal{S} \cap \Sigma$ é uma única curva suave \mathcal{C} , localmente em p . Além disso, pelo Teorema 6.1 a ortogonalidade implica que \mathcal{C} é curva principal, e portanto parametrizada por linha coordenada de $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ com v constante, como explicamos na Introdução do Capítulo 4. Também recordamos que X estende-se suavemente em \bar{U} . Deste modo, a única curva que parte de a_1 chega em algum ponto dentro de a_2 ou b_2 .

Analogamente, a única curva que parte de a_2 chega em algum ponto dentro de a_1 ou b_1 . Pela unicidade do Teorema da Função Implícita, mais o fato de \mathcal{S} ser mergulhado, então \mathcal{C} conecta a_1 com a_2 , ou \mathcal{C} conecta b_1 com b_2 . Na verdade, temos duas curvas que indicaremos por \mathcal{C}_a e \mathcal{C}_b (Figura 5.4).

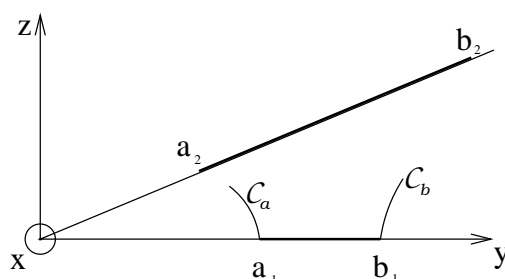


Figura 5.4: Vista de \mathcal{C}_a e \mathcal{C}_b pelo plano Σ .

A curvatura de \mathcal{C}_a ou \mathcal{C}_b é dada por

$$k_1 = H + \frac{c}{2E} > H.$$

Assim vemos que \mathcal{C}_a está, localmente, no interior da circunferência de raio $1/H$ que passa por a_1 , do mesmo lado e com a mesma tangente de \mathcal{C}_a em a_1 . Raciocínio análogo vale para \mathcal{C}_b . Para cada $\theta \in [0, \alpha]$, considere o conjunto

$$p^\theta = (0, \cos \theta, \sin \theta) \mathbb{R}_+^*.$$

Se $\theta \cong 0$, então $p^\theta \cap \mathcal{C}$ é unitário. Desta maneira, \mathcal{C}_a e \mathcal{C}_b podem ser parametrizadas localmente por θ . Também, para θ pequeno e positivo o segmento de reta entre $P = \mathcal{C}_a(\theta)$ e $Q = \mathcal{C}_b(\theta)$ recairá inteiramente em \mathcal{D} . De fato, se para cada θ tivéssemos $\tau(\theta) \in (0, 1)$ com $P + \tau(Q - P) \in \partial\mathcal{D}$, então conseguiríamos uma seqüência com $\theta \rightarrow 0$ e tais pontos estão em $\mathcal{C}_a \cup \mathcal{C}_b$. Então, uma das curvas tocaria (a_1, b_1) , o que é absurdo devido à convexidade.

Definimos θ_0 como o maior ângulo para o qual $\overline{PQ} \subset \mathcal{D}$ e ainda valha a parametrização. Na verdade, a parametrização vale para θ em *todo* $[0, \alpha]$ devido à convexidade. Também, se tivéssemos $\theta_0 < \alpha$, \overline{PQ} seria tangente a \mathcal{C} em algum ponto interno, contrariando a convexidade.

Ou seja, $\theta_0 = \alpha$. Agora, consideremos a circunferência determinada por 0 , a_1 e a_2 , e o triângulo $\Delta 0a_1a_2$. Como $k_1 > 0$, \mathcal{C} está do mesmo lado que 0 com respeito à reta por a_1, a_2 . Então, $\gamma_1 > \pi - \widehat{0a_1a_2} = \alpha + \widehat{0a_2a_1}$. Pelas mesmas razões, $\gamma_2 > \pi - \widehat{0a_2a_1}$. Portanto,

$$\gamma_1 > \alpha + \pi - \gamma_2.$$

c.q.d.

Isto conclui a prova do lema e, conseqüentemente, do Teorema 1.2.

Capítulo 6

Resultados básicos de Geometria Diferencial

6.1 Curvas, Parametrizações e Convexidade

Definição 6.1 Uma curva (parametrizada) diferenciável em \mathbb{R}^n é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo real. Em coordenadas, $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $t \in I$.

Definição 6.2 O *traço* de α é o conjunto $\{\alpha\} = \alpha(I)$.

Definição 6.3 Dizemos que uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *regular* se $\alpha'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$.

Definição 6.4 Dada uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dizemos que $\beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma reparametrização de α se $\beta = \alpha \circ h$, onde

$$h : J \xrightarrow{C^\infty} I, \quad h(J) = I, \quad h'(u) \neq 0, \forall u \in J.$$

Definição 6.5 Uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada diferenciável regular está parametrizada pelo comprimento de arco (*p.p.c.a*) se

$$L(\alpha([t_1, t_2])) = t_2 - t_1, \forall t_1, t_2 \in I, t_1 \leq t_2,$$

onde $L(\alpha([t_1, t_2]))$ denota o comprimento de arco de α entre t_1 e t_2 .

Definição 6.6 Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Dizemos que é *convexa* se, $\forall t \in [a, b]$, $\{\alpha\}$ está inteiramente contido no semiplano fechado determinado pela reta tangente ao traço de α em t .

Proposição 6.1 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva convexa, $c \in [a, b]$ e a reta tangente $\alpha'(c)\mathbb{R}$, orientada de acordo com $\alpha'(c)$, de modo que $\{\alpha\}$ está à esquerda de $\alpha'(c)\mathbb{R}$. Então, $\{\alpha\}$ está à esquerda de $\alpha'(s)\mathbb{R}$, $\forall s \in [a, b]$.*

Demonstração: Vejamos que o conjunto A dos pontos $s \in [a, b]$ para os quais $\{\alpha\}$ está à esquerda de $\alpha'(s)\mathbb{R}$ é aberto. O mesmo valerá para o conjunto B dos pontos $t \in [a, b]$ tais que $\{\alpha\}$ está à direita de $\alpha'(t)\mathbb{R}$. Como $\{\alpha\}$ é conexo e $c \in A$, teremos $B = \emptyset$.

Suponha, por absurdo, que existe $c_n \rightarrow c$ em $[a, b]$ com $\{\alpha\}$ à direita de $\alpha'(c_n)\mathbb{R}$. Então $\{\alpha\}$ está sobre e no interior dos ângulos agudos, opostos pelo vértice, dados por $\alpha'(c)\mathbb{R}$ e $\alpha'(c_n)\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mas a interseção de todas estas regiões angulares com $n \in \mathbb{N}$ é a própria reta $\alpha'(c)\mathbb{R}$, donde $\{\alpha\}$ é um segmento de reta J . Mas isso contradiz a regularidade de α em qualquer ponto de ∂J .

c.q.d.

6.2 Superfícies, Vetores e Plano Tangente

Definição 6.7 Uma *superfície* parametrizada regular S é uma aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto do \mathbb{R}^2 , tal que $X \in C^\infty(U)$ e dX_q é injetora, $\forall q \in U$.

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), X \in C^\infty(U) \Leftrightarrow x, y, z \in C^\infty(U).$$

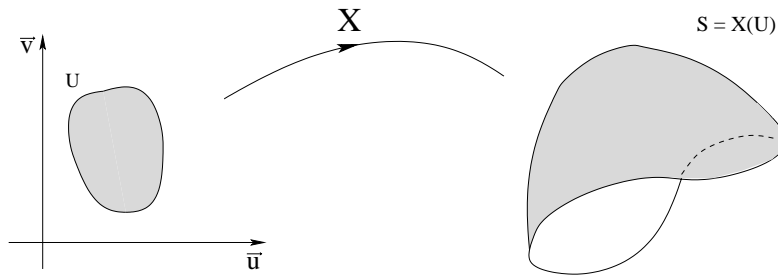


Figura 6.1: Superfície parametrizada.

Para cada $q \in U$, tal que $q = (u_0, v_0)$, temos

$$dX_q = \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix}.$$

Lema 6.1 Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e tome $q \in U$, $X(q) = p$. Então são equivalentes:

1. X_u, X_v são linearmente independentes em q ;
2. dX_q é injetora, isto é, possui posto 2;
3. Existe submatriz 2×2 de dX_q com $\det \neq 0$;
4. $X_u \times X_v \neq \vec{0}$;
5. $\det \mathcal{G} \neq 0$, $\mathcal{G} = dX_q^t \cdot dX_q$.

Demonstração: (2) \Leftrightarrow (3). Por definição.

(5) \Leftrightarrow (4). Sabemos que $\|X_u \times X_v\| = \|X_u\| \|X_v\| \sin \theta$ e $\langle X_u, X_v \rangle = \|X_u\| \|X_v\| \cdot \cos \theta$, então $\|X_u\|^2 \|X_v\|^2 = \|X_u \times X_v\|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2$ (*). Agora,

$$\det \mathcal{G} = \det \begin{bmatrix} \langle X_u, X_u \rangle & \langle X_u, X_v \rangle \\ \langle X_u, X_v \rangle & \langle X_v, X_v \rangle \end{bmatrix} = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 \stackrel{(*)}{=} \|X_u \times X_v\|^2.$$

(4), (5) \Rightarrow (1). Como $\|X_u \times X_v\| \neq 0$, temos que $\|X_u\| \|X_v\| \sin \theta \neq 0 \Rightarrow X_u \neq \vec{0}$, $X_v \neq \vec{0}$, $\theta \neq 0^\circ$ e $\theta \neq 180^\circ$. Assim, não podemos ter $\mu X_u = \lambda X_v$, com $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Portanto X_u e X_v são LI.

(2), (3) \Leftrightarrow (1). Temos $\det \mathcal{G} \neq 0$ para alguma submatriz $2 \times 2 \Leftrightarrow \nexists \mu, \lambda$ de modo que $\mu X_u = \lambda X_v \Leftrightarrow X_u$ e X_v são LI.

(1) \Rightarrow (4). X_u, X_v são LI $\Rightarrow X_u \neq \vec{0}, X_v \neq \vec{0}$ e $\theta \neq 0^\circ, 180^\circ \Rightarrow \|X_u \times X_v\| = \|X_u\| \|X_v\| \sin \theta \neq 0 \Rightarrow X_u \times X_v \neq \vec{0}$.

c.q.d.

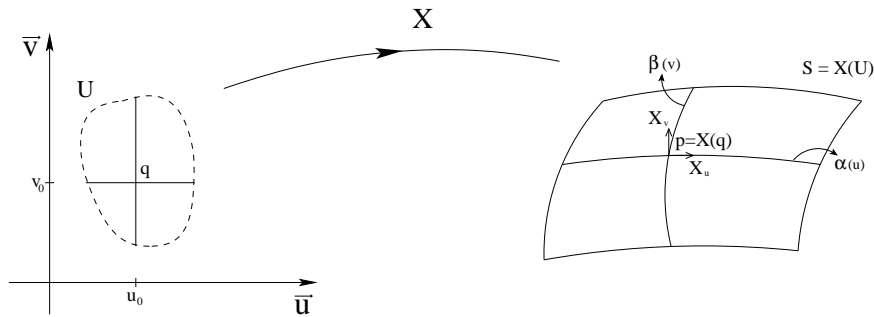


Figura 6.2: Curvas coordenadas.

Definição 6.8 Numa superfície $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, fixando $(u_0, v_0) \in U$, dizemos que

$$\alpha(u) = X(u, v_0), \quad \beta(v) = X(u_0, v)$$

são *curvas coordenadas*.

Na definição anterior, note que

$$\alpha'(u_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) = X_u(u_0, v_0);$$

$$\beta'(v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) = X_v(u_0, v_0).$$

Definição 6.9 Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. O *campo normal unitário* é dado por $N(u, v) = X_u \times X_v / \|X_u \times X_v\|$.

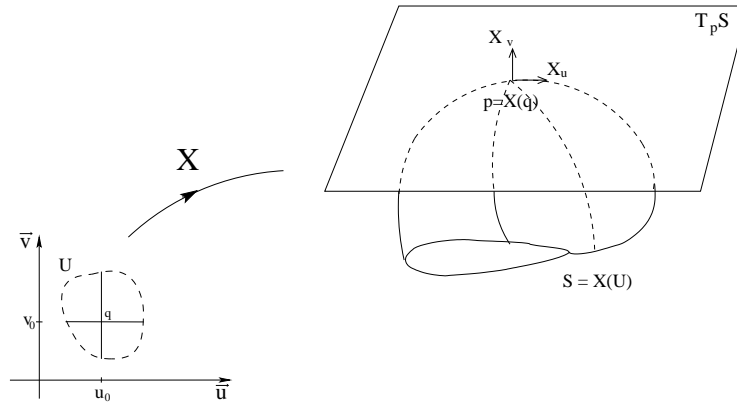


Figura 6.3: Plano tangente.

Definição 6.10 Seja $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular. Seja $p = X(q) \in S$ qualquer, com $q \in U$. O espaço $T_p S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z) - p, N(p) \rangle = 0\}$ é o *plano tangente* a S em p . Note que $X_u(q), X_v(q) \in T_p S$.

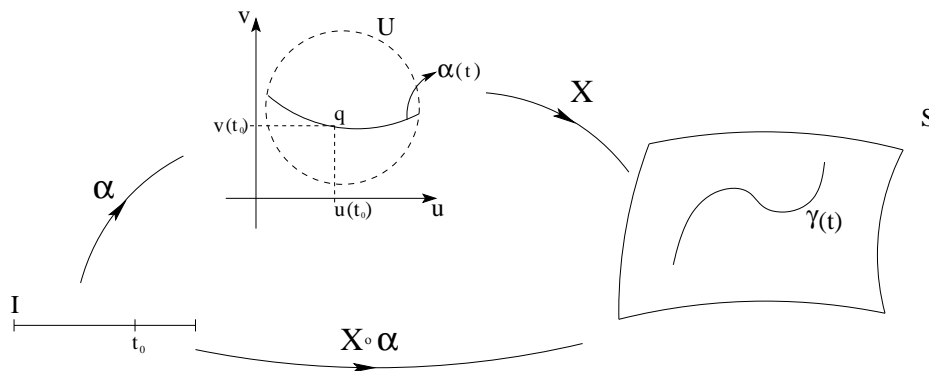


Figura 6.4: Curva sobre superfície.

Definição 6.11 (*Curvas sobre superfícies*). Sejam $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ uma curva regular onde $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular tal que

$S = X(U)$. Assim $X \circ \alpha(t) = \gamma(t)$ é uma curva cuja imagem está em $S = X(U)$ e $\gamma(t) = X(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$ onde

$$\gamma'(t) = u'(t) \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) + v'(t) \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Tomando $q = (u_0, v_0) = \alpha(t_0)$, $p = X(q)$, temos $\gamma'(t_0) = u'(t_0)X_u(q) + v'(t_0)X_v(q)$. Sejam $w = aX_u(q) + bX_v(q) \in T_pS$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produto interno. No ponto q , temos

$$I_{\mathbb{R}^3}(w) = \langle w, w \rangle_{\mathbb{R}^3} = a^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2ab \langle X_u, X_v \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle.$$

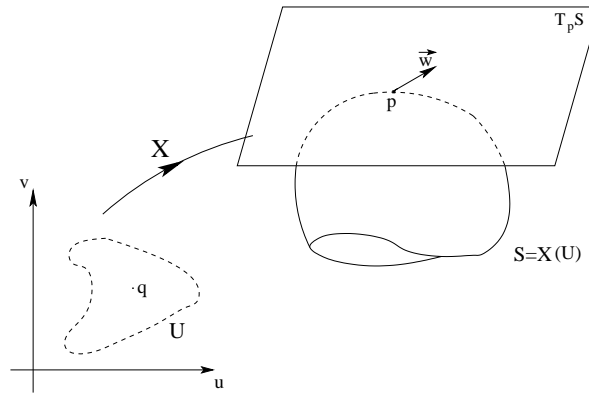


Figura 6.5: Vetor w no plano tangente.

Introduzimos as seguintes funções E, F, G de (u, v) :

$$E = \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle, \quad F = \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle, \quad G = \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle.$$

Definição 6.12 Seja $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular. A Primeira Forma Fundamental de S em $p = X(q)$ é a aplicação definida em T_pS dada por:

$$I_p(w) = \|w\|^2 = a^2E + 2abF + b^2G = (a \ b) \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Definição 6.13 Seja $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular. Dizemos que S tem *parâmetros isotérmicos* se $E = G = \lambda^2$ e $F = 0$ (isto é, os vetores X_u, X_v têm o mesmo comprimento como função de u, v e são ortogonais).

Definição 6.14 Sejam $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular e N o campo normal unitário a S . A forma quadrática $II_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$, que leva $w = aX_u + bX_v \in T_pS$ para $a^2 \langle X_{uu}(q), N \rangle + 2ab \langle X_{uv}(q), N \rangle + b^2 \langle X_{vv}(q), N \rangle \in \mathbb{R}$ é a Segunda Forma Fundamental de S em $p = X(q)$, cujos coeficientes são funções de U em \mathbb{R} dadas por:

$$e(u, v) = \langle X_{uu}(q), N \rangle, \quad f(u, v) = \langle X_{uv}(q), N \rangle, \quad g(u, v) = \langle X_{vv}(q), N \rangle.$$

Observação 6.1 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva p.p.c.a. Logo, $\langle \alpha''(s), N \rangle = \langle k(s)n(s), N \rangle = k \langle n(s), N(s) \rangle$, onde $n(s)$ é o vetor normal de $\alpha(s)$.

Definição 6.15 Seja $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular. A *curvatura normal* na direção $v \in T_p S$ é:

$$k_n(v) = \frac{II_p(v)}{I_p(v)}. \quad (6.1)$$

Definição 6.16 Uma *superfície orientada* é um par (S, N) em que S é uma superfície orientável e $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável de vetores normais unitários a S . Para efeito de cálculo, sempre identificaremos N com $N \circ X$, em que X é parametrização de S .

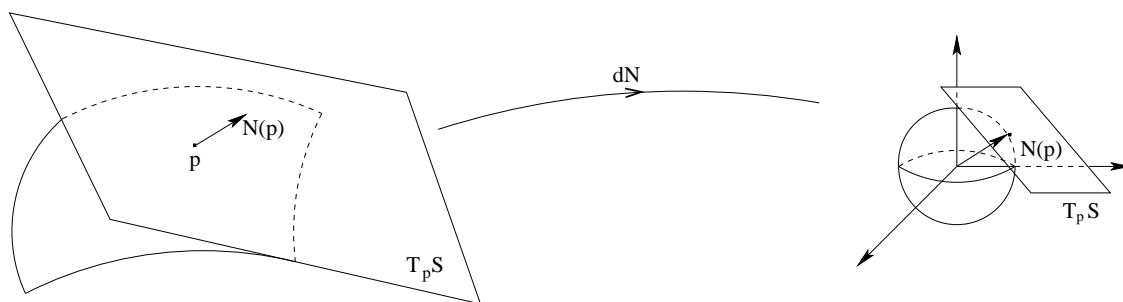


Figura 6.6: Aplicação normal de Gauss.

Observação 6.2 Para cada $p \in S$, $N(p)$ é vetor do espaço $T_p \mathbb{R}^3$, isomorfo a \mathbb{R}^3 pela aplicação $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z) - p$. Doravante, iremos supor que este isomorfismo é sempre aplicado em $N(p)$, $\forall p \in S$, de modo que o contra-domínio de N será S^2 . Tal isomorfismo é informalmente chamado de “translação”, termo que só deveria ser usado quando domínio e contra-domínio fossem o mesmo espaço vetorial.

Definição 6.17 Considere (S, N) uma superfície orientada. A *aplicação normal de Gauss* de S é a função $N : S \rightarrow S^2$ definida acima, onde S^2 é esfera unitária de centro $(0, 0, 0)$. Em coordenadas locais,

$$N(p) = N(u, v) = \pm \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}.$$

Observação 6.3 O plano tangente a um ponto p de uma superfície S é um espaço vetorial, mas geralmente não passa pela origem quando representado em \mathbb{R}^3 . Isso porque seu “vetor nulo” é p (em geral distinto de $(0, 0, 0)$). Não como espaços vetoriais, mas como planos de \mathbb{R}^3 , entre eles faz sentido falarmos de paralelismo, perpendicularismo, etc.

Da observação acima, note que $T_p S // T_{N(p)} S^2 \perp N(p)$. Agora, identificando $T_{N(p)} S^2$ com $T_p S$, temos

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2 \approx T_p S.$$

Tomemos uma curva $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ em $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(0) = (u(0), v(0)) = q$. Então $\alpha(t) = X(\gamma(t)) = X(u(t), v(t))$ em $S \subset \mathbb{R}^3$, $\alpha'(0) = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q)$ e

$$N_u = \frac{\partial(N \circ X)}{\partial u}, \quad N_v = \frac{\partial(N \circ X)}{\partial v}.$$

Como $\|N\|^2 = 1$, derivando em relação a u temos:

$$2\langle N_u, N \rangle = 0 \Rightarrow N_u \perp N \Rightarrow N_u \in T_p S \Rightarrow N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v.$$

Derivando em relação a v temos:

$$2\langle N_v, N \rangle = 0 \Rightarrow N_v \perp N \Rightarrow N_v \in T_p S \Rightarrow N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v.$$

Assim,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

é a matriz associada a $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ na base $\{X_u, X_v\}$.

Pergunta: Qual a relação entre A e $S = -dN$?

$$\det(-A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a_{11} + \lambda)(a_{22} + \lambda) - a_{12}a_{21} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Sejam k_1 e k_2 as raízes da equação anterior (k_1 e k_2 existem em \mathbb{R} , pois dN é auto-adjunta, conforme a Proposição 6.5). Assim,

$$k_1 + k_2 = -(a_{11} + a_{22}) \quad \text{e} \quad k_1 k_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Definição 6.18 Seja $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular. Definimos a *curvatura Gaussiana* e a *curvatura média* de $S = X(U)$ no ponto $p = X(q)$, $q \in U$, respectivamente como

$$K(p) = \det(-dN_p) = k_1(p)k_2(p), \quad H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-dN_p) = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Mas

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = -\langle X_u, N_u \rangle = -a_{11}E - a_{21}F, \quad f = \langle X_{uv}, N \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle = -a_{11}F - a_{21}G,$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle = -a_{12}E - a_{22}F, \quad g = \langle X_{vv}, N \rangle = -\langle N_v, X_v \rangle = -a_{12}F - a_{22}G.$$

Em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$a_{11} = \frac{1}{EG - F^2}(-eG + fF), \quad a_{12} = \frac{1}{EG - F^2}(-fG + gF),$$

$$a_{21} = \frac{1}{EG - F^2}(eF - fE), \quad a_{22} = \frac{1}{EG - F^2}(fF - gE).$$

Finalmente,

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right), \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

6.3 Funções Sub-harmônicas

Definição 6.19 Seja $v : U \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$, o Laplaciano de v denotado por Δv , é a expressão

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Definição 6.20 Dizemos que $v : U \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ é *sub-harmônica* quando seu Laplaciano $\Delta v \geq 0$.

Proposição 6.2 Uma função contínua $v(z)$ é sub-harmônica em U se, e somente se, $v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$ para todo disco $|z - z_0| \leq r$ contido em U .

Demonstração: Vide [1], páginas 237 a 239.

Proposição 6.3 Seja $v : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 uma função sub-harmônica, então v atinge máximo na fronteira de U .

Demonstração: Seja $z_0 \in U$ onde v assume um máximo local M . Se tivermos $v(z) < M$ para algum $z \in \partial B_r(z_0)$, onde $B_r(z_0) \subset U$, a menos de reparametrizar temos $v < M$ ao longo do arco de 0 a α em $\partial B_r(z_0)$. Assim, pela Proposição 6.2 temos

$$M \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha v d\theta + \frac{1}{2\pi} (2\pi - \alpha) M < \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha M d\theta + (1 - \frac{\alpha}{2\pi}) M = M \Rightarrow M < M,$$

o que é absurdo. Portanto v atinge máximo em ∂U .

c.q.d.

6.4 Alguns Teoremas de Geometria Diferencial

Proposição 6.4 *Sejam V um 2-espaço vetorial sobre \mathbb{R} e $T : V \rightarrow V$ um operador linear auto-adjunto. Então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V , com $T(e_1) = \lambda_1 e_1$ e $T(e_2) = \lambda_2 e_2$, em que λ_1 e λ_2 são, respectivamente, o máximo e o mínimo da forma quadrática dada por*

$$Q(v) = B(v, v) = \langle T(v), v \rangle, \quad v \in V,$$

na circunferência unitária de V .

Demonstração: Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de V tal que $Q(xe_1 + ye_2) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$, onde $\lambda_1 = \max Q$ e $\lambda_2 = \min Q$ na circunferência unitária de V .

$$T(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad \text{donde } \lambda_1 = Q(e_1) = \langle T(e_1), e_1 \rangle = \langle \alpha e_1 + \beta e_2, e_1 \rangle = \alpha.$$

Agora,

$$B(e_1, e_2) = \frac{1}{2} [\underbrace{Q(e_1 + e_2)}_{=\lambda_1 + \lambda_2} - \underbrace{Q(e_1)}_{=\lambda_1} - \underbrace{Q(e_2)}_{=\lambda_2}] = \langle T(e_1), e_2 \rangle = \langle \alpha e_1 + \beta e_2, e_2 \rangle = \beta,$$

e portanto

$$T(e_1) = \lambda_1 e_1.$$

Da mesma forma prova-se que $T(e_2) = \lambda_2 e_2$.

c.q.d.

Proposição 6.5 *O operador $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ é auto-adjunto, $\forall p \in S$. Em outras palavras, $\langle dN_p(v), w \rangle = \langle v, dN_p(w) \rangle$, $\forall v, w \in T_p S$.*

Demonstração: Sejam $v, w \in T_p S$. Escolha curvas $\alpha, \beta : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow S$ com $\alpha(0) = \beta(0) = p$, $\alpha'(0) = v$ e $\beta'(0) = w$. Seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização local em p ,

$$\alpha(t) = X(u_1(t), v_1(t)),$$

$$\beta(t) = X(u_2(t), v_2(t)), \quad t \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Assim,

$$\frac{dN_p}{dt}(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} N(X(u_1(t), v_1(t))) = u'_1(0) \cdot \frac{\partial(N \circ X)}{\partial u}(p) + v'_1(0) \cdot \frac{\partial(N \circ X)}{\partial v}(p).$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \langle dN_p(v), w \rangle &= \langle u'_1(0)N_u + v'_1(0)N_v, u'_2(0)X_u + v'_2(0)X_v \rangle \\ &= u'_1(0)u'_2(0)\langle N_u, X_u \rangle + v'_1(0)u'_2(0)\langle N_v, X_u \rangle \end{aligned}$$

$$+ u'_1(0)v'_2(0)\langle N_u, X_v \rangle + v'_1(0)v'_2(0)\langle N_v, X_v \rangle$$

e

$$\begin{aligned} \langle v, dN_p(w) \rangle &= \langle u'_1(0)X_u + v'_1(0)X_v, u'_2(0)N_u + v'_2(0)N_v \rangle \\ &= u'_1(0)u'_2(0)\langle N_u, X_u \rangle + v'_1(0)u'_2(0)\langle N_u, X_v \rangle \\ &\quad + u'_1(0)v'_2(0)\langle N_v, X_u \rangle + v'_1(0)v'_2(0)\langle N_v, X_v \rangle. \end{aligned}$$

Para terminar a prova, mostraremos que

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle. \quad (6.2)$$

De fato,

$$\langle N, X_v \rangle = 0 \xrightarrow{\partial_u} \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0. \quad (6.3)$$

e

$$\langle N, X_u \rangle = 0 \xrightarrow{\partial_v} \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0, \quad (6.4)$$

donde (6.3) e (6.4) implicam (6.2).

c.q.d.

Concluimos o seguinte. Para $-dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS tal que

$$-dN_p(e_1) = k_1e_1, \quad -dN_p(e_2) = k_2e_2,$$

onde k_1 e k_2 são, respectivamente, o mínimo e máximo de

$$Q(v) = -dN_p(v) \cdot v = II_p(v),$$

sobre a circunferência unitária de T_pS . Ou seja, mínimo e máximo de

$$\frac{II_p(v)}{I_p(v)} = (k_n)_p(v).$$

Assim, $k_{1,2}$ são as curvaturas principais e $e_{1,2}$ são as direções principais de S em p .

Definição 6.21 Com as observações anteriores, definimos o operador forma (ou operador de Weingarten) por

$$\mathbb{S} = -dN_p.$$

Temos que

$$[\mathbb{S}] = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix},$$

na base dada pela Proposição 6.4.

Definição 6.22 Uma curva α em uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é chamada *curva principal* se α' sempre aponta em uma direção principal. Isto é, $[\mathbb{S}](\alpha') = k_i \alpha'$, onde k_i é uma curvatura principal de S , e $[\mathbb{S}]$ denota o operador de Weingarten.

Definição 6.23 Uma superfície S é dita *umbílica* quando todos os seu pontos são *umbílicos*, isto é, $k_1(p) = k_2(p)$, $\forall p \in S$.

Proposição 6.6 *A esfera é uma superfície umbílica.*

Demonstração: Uma parametrização da esfera é dada por

$$X(\theta, \phi) = (r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, r \cos \phi),$$

com $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \phi < \pi$, donde

$$X_\theta = (-r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, 0), \quad X_\phi = (r \cos \phi \cos \theta, r \cos \phi \operatorname{sen} \theta, -r \operatorname{sen} \phi),$$

$$E = X_\theta \cdot X_\theta = r^2 \operatorname{sen}^2 \phi, \quad F = X_\theta \cdot X_\phi = 0, \quad G = X_\phi \cdot X_\phi = r^2,$$

$$X_{\theta\theta} = (-r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, -r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, 0),$$

$$X_{\theta\phi} = (-r \cos \phi \operatorname{sen} \theta, r \cos \phi \cos \theta, 0),$$

$$X_{\phi\phi} = (-r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, -r \cos \phi),$$

$$N = \frac{X_\theta \times X_\phi}{\|X_\theta \times X_\phi\|} = \frac{\operatorname{csc} \phi}{r^2} (-r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta, -r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta, -r^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi)$$

$$= -(\operatorname{sen} \phi \cos \theta, \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \cos \phi),$$

$$e = X_{\theta\theta} \cdot N = r \operatorname{sen}^2 \phi, \quad f = X_{\theta\phi} \cdot N = 0,$$

$$g = X_{\phi\phi} \cdot N = r \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + r \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta + r \cos^2 \phi = r.$$

$$w = aX_\theta + bX_\phi \Rightarrow I_p(w) = \|w\|^2 = a^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \phi + 2ab \cdot 0 + b^2 r = a^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \phi + b^2 r^2,$$

$$II_p(w) = a^2 \langle X_{\theta\theta}, N \rangle + 2ab \langle X_{\theta\phi}, N \rangle + b^2 \langle X_{\phi\phi}, N \rangle$$

$$= a^2 r \operatorname{sen}^2 \phi + 2ab \cdot 0 + b^2 r = a^2 r \operatorname{sen}^2 \phi + b^2 r.$$

Como $k_n(w) = II_p(w)/I_p(w) = 1/r$, $\forall p \in S^2(r)$ e $w = aX_\theta + bX_\phi$, então $k_1 = k_2 = 1/r$. Portanto $S^2(r)$ é uma superfície umbílica.

c.q.d.

Proposição 6.7 *Seja $S = X(U)$ uma superfície umbílica, U conexo do \mathbb{R}^2 . Então S está contida em uma esfera ou em um plano.*

Demonstração: Seja $p \in S$ um ponto (umbílico) qualquer, temos que existe $\lambda = \lambda(p) \in \mathbb{R}$ tal que $e = \lambda E$, $f = \lambda F$ e $g = \lambda G$. Fica assim definida uma função $\lambda : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$e(u, v) = \lambda(u, v)E(u, v) \Rightarrow -\langle X_u, N_u \rangle = \lambda(u, v)\langle X_u, X_u \rangle; \quad (6.5)$$

$$f(u, v) = \lambda(u, v)F(u, v) \Rightarrow -\langle X_u, N_v \rangle = \lambda(u, v)\langle X_u, X_v \rangle; \quad (6.6)$$

$$f(u, v) = \lambda(u, v)F(u, v) \Rightarrow -\langle X_v, N_u \rangle = \lambda(u, v)\langle X_v, X_u \rangle; \quad (6.7)$$

$$g(u, v) = \lambda(u, v)G(u, v) \Rightarrow -\langle X_v, N_v \rangle = \lambda(u, v)\langle X_v, X_v \rangle. \quad (6.8)$$

Por (6.5) e (6.7), temos $\langle X_u, \lambda(u, v)X_u + N_u \rangle = 0$ e $\langle X_v, \lambda(u, v)X_u + N_u \rangle = 0$, respectivamente, então $N_u + \lambda(u, v)X_u = \vec{0}$, e ainda por (6.6), temos $\langle X_u, \lambda(u, v)X_v + N_v \rangle = 0$ e por (6.8), temos $\langle X_v, \lambda(u, v)X_v + N_v \rangle = 0$, então $N_v + \lambda(u, v)X_v = \vec{0}$. Derivando $N_u + \lambda(u, v)X_u = \vec{0}$ em relação a v , obtemos:

$$N_{vu} + \lambda_v X_u + \lambda(u, v)X_{vu} = \vec{0}. \quad (6.9)$$

Derivando $N_v + \lambda(u, v)X_v = \vec{0}$ em relação a u , obtemos:

$$N_{uv} + \lambda_u X_v + \lambda(u, v)X_{uv} = \vec{0}. \quad (6.10)$$

Subtraindo (6.10) de (6.9) temos $\lambda_v X_u - \lambda_u X_v = \vec{0}$, donde segue-se que $\lambda_v = \lambda_u = 0$, pois X_u, X_v é base de $T_p S$. Como U é conexo, concluímos que λ é constante. Caso $\lambda = 0$, vale que $N_u = \vec{0} = N_v$, e como U é conexo, temos que N é constante. Assim, $\langle X(u, v) - p, N \rangle \equiv 0$, donde S está contida em um plano. Caso $\lambda \neq 0$, considere a função $Z(u, v) = X(u, v) + (1/\lambda)N(u, v)$. Assim,

$$Z_u = X_u + (1/\lambda)N_u = (\lambda X_u + N_u)/\lambda = \vec{0};$$

$$Z_v = X_v + (1/\lambda)N_v = (\lambda X_v + N_v)/\lambda = \vec{0}.$$

Como U é conexo, então $Z \equiv c$ constante. Portanto,

$$\|(-1/\lambda)N(u, v)\| = \|X(u, v) - c\|, \text{ donde } \|X(u, v) - c\| = 1/|\lambda|.$$

Isto é, S está contido em uma esfera.

c.q.d.

Lema 6.2 *Um vetor tangente v_p a uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é principal se, e somente se,*

$$[\mathbb{S}](v_p) \times v_p = \vec{0},$$

onde \mathbb{S} denota o Operador de Weingarten, como na Definição 6.21.

Demonstração: (\Rightarrow) $[\mathbb{S}](v_p) \times v_p = k_i v_p \times v_p = \vec{0}$.

(\Leftarrow) $[\mathbb{S}](v_p) \times v_p = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $[\mathbb{S}](v_p) = \lambda(p)v_p$. Mas os autovalores de $[\mathbb{S}]$ são as curvaturas principais. Logo, $\lambda(p) = k_i(p)$ e

$$[\mathbb{S}](v_p) = k_i v_p,$$

donde v_p é principal.

c.q.d.

Teorema 6.1 (Teorema de Joachimstahl). *Seja α uma curva que pertence à interseção de duas superfícies $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$. Denote por N_i os vetores normais unitários a S_i , $i = 1, 2$. Suponha que, ao longo de α , S_1, S_2 formam um ângulo constante. Isto é, $\langle N_1, N_2 \rangle$ é constante ao longo de α . Então, α é uma curva principal em S_1 se, e somente se, é uma curva principal de S_2 .*

Demonstração: Ao longo de $\alpha = \alpha(t)$, temos

$$0 = \frac{d}{dt} \langle N_1, N_2 \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} N_1, N_2 \right\rangle + \left\langle N_1, \frac{d}{dt} N_2 \right\rangle. \quad (6.11)$$

Suponha que α é uma curva principal em S_1 . Então,

$$\frac{d}{dt} N_1 = -k_1 \alpha', \quad (6.12)$$

onde k_1 é uma curva principal em S_1 . Mas α' é ortogonal a N_2 , e deste modo segue-se de (6.11) e (6.12) que

$$\left\langle N_1, \frac{d}{dt} N_2 \right\rangle = 0. \quad (6.13)$$

Como $\langle N_1, N_2 \rangle = 1$, então $\left\langle \frac{d}{dt} N_2, N_2 \right\rangle = 0$. Logo, $\left\langle N_1, \frac{d}{dt} N_2 \right\rangle = 0$ e $\left\langle \frac{d}{dt} N_2, N_2 \right\rangle = 0$ implicam $\frac{d}{dt} N_2 // N_1 \times N_2$. Podemos tomar $N_1 \times N_2 \neq \vec{0}$, pois a tese é trivial quando $N_1 // N_2$. Sabemos também que $\langle \alpha', N_1 \rangle = 0$ e $\langle \alpha', N_2 \rangle = 0$ implicam $\alpha' // N_1 \times N_2$. Portanto, $\frac{d}{dt} N_2 // \alpha'$. Pelo Lema 6.2, segue-se que α é uma curva principal em S_2 . Isto é, $\frac{d}{dt} N_2 = k_2 \alpha'$ para algum k_2 .

c.q.d.

Teorema 6.2 (Princípio do Máximo). *Seja H o operador curvatura média, isto é, para funções de valores reais $u = u(x, y)$ definidas sobre um conjunto aberto em \mathbb{R}^2 , $H_u = H_{u(x, y)}$ é a curvatura média do gráfico de u em $(x, y, u(x, y))$ com respectivo normal apontando para cima. Se u e \hat{u} estão definidos em uma vizinhança de (x_0, y_0) e*

$$\begin{aligned} u &\leq \hat{u}, \\ u(x_0, y_0) &= \hat{u}(x_0, y_0), \\ H_u &\geq H_{\hat{u}}, \end{aligned}$$

então $u \equiv \hat{u}$.

Demonstração: Vide [5], página 16.

6.5 Curvas Convexas Fechadas

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular p.p.c.a. diferenciável, onde I é um intervalo real. Seja $t(s) = \alpha'(s)$ e $n(s) = \text{Rot}_{\pi/2} t(s)$, onde $\text{Rot}_{\pi/2}(a, b) = (-b, a)$. A curvatura de α é definida por $k(s) = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle$. Quando $\alpha''(s) \neq \vec{0}$, temos $n(s) = \text{sgn}(k(s)) \alpha''(s) / \|\alpha''(s)\|$.

Como α está p.p.c.a., $\{t(s), n(s)\}$ forma uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 sobre $\alpha(s)$, $\forall s \in I$. Chamamos $t(s)$ o vetor tangente a α em s e $n(s)$ o vetor normal a α em $s \in I$. Derivando as funções $t(s)$ e $n(s)$ com respeito a s , obtemos $\frac{dt}{ds} // n(s)$.

Temos $\frac{dn}{ds}(s) = -k(s) \cdot t(s)$, o que define as *equações de Frenet*

$$\frac{dt}{ds}(s) = k(s) \cdot n(s);$$

$$\frac{dn}{ds}(s) = -k(s) \cdot t(s), \forall s \in I.$$

Para cada $s \in I$, podemos ter $k(s) = 0$, $k(s) > 0$ ou $k(s) < 0$. No 2º caso, dizemos que α está orientada positivamente. No 3º caso, que está orientada negativamente. Para curvas simples fechadas, se n aponta para o interior de α , dizemos que ela está no sentido anti-horário. Senão, dizemos que está no sentido horário.

Além disso, $k(s) \equiv 0$ se e só se $\alpha(I)$ estiver contido numa reta. Como $\|t(s)\| \equiv 1$, então $t(s)$ representa o vetor posição de um ponto em S^1 (circunferência unitária centrada na origem). Seja $\psi(s)$ o ângulo orientado que $t(s)$ faz com o eixo Ox positivo. Logo, $t(s) = (\cos \psi(s), \sin \psi(s))$ e $n(s) = (-\sin \psi(s), \cos \psi(s))$, $\forall s \in I$. Conseqüentemente,

$$\frac{dt}{ds}(s) = \psi'(s)(-\sin \psi(s), \cos \psi(s)), \text{ donde } k(s) = \left\langle \frac{dt}{ds}(s), n(s) \right\rangle = \psi'(s).$$

Teorema 6.3 *Uma curva diferenciável simples fechada é convexa se, e somente se, sua curvatura não mudar de sinal.*

Demonstração: Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma tal curva.

(\Rightarrow) Sem perda de generalidade, supomos que α está parametrizada no sentido anti-horário. Assim, a Proposição 6.1 implica $\{\alpha\}$ à esquerda de $\alpha'(s)\mathbb{R}$, $\forall s$. Tomemos agora um ponto arbitrário $s_0 \in (a, b)$. Como toda curva regular é localmente um gráfico, podemos considerar uma reparametrização local $s(u)$, $u \in (-\delta, \delta)$, $s(0) = s_0$, com Ou, Ov nas direções e sentidos de $t(s_0)$ e $n(s_0)$, respectivamente.

Então, para $u \in (-\delta, \delta)$, $\alpha(u) = (u, v(u))$. Usando a fórmula da curvatura para gráficos, temos $k = v''/(1+v'^2)^{3/2}$. Mas $\{\alpha\}$ está à esquerda de $\alpha'(s_0)\mathbb{R}$, ou seja, no semi-plano superior de Ouv . Assim, s_0 é um ponto de mínimo local. Isso implica $v''(0) \geq 0$.

(\Leftarrow) Neste caso, a função $\psi(s)$ é crescente e $\psi(b) = \psi(a) + 2\pi$. Dado $s_0 \in [a, b]$, queremos provar que a função $h(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), n(s_0) \rangle$ não muda de sinal. Suponha, por absurdo, que $h(s)$ assume um máximo positivo e um mínimo negativo em pontos $s_1, s_2 \in [a, b] \setminus \{s_0\}$.

Em cada um destes pontos, a tangente é paralela à tangente em $\alpha(s_0)$. Logo, existem $i \neq j \in \{0, 1, 2\}$ tais que $\psi(s_i) = \psi(s_j)$ e, sendo ψ crescente, isso implica que ψ é constante no intervalo entre s_i e s_j .

Isso significa que a curva contém o segmento de reta de $\alpha(s_i)$ a $\alpha(s_j)$, e portanto as tangentes nestes pontos coincidem, o que é absurdo pois o sinal de h deveria alternar entre $-$, 0 e $+$. Então h não muda de sinal, donde α é convexa.

c.q.d.

Teorema 6.4 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ simples fechada com $k > 0$. Então existem exatamente dois pontos para os quais $\alpha \perp n$, e exatamente dois pontos para os quais $\alpha // n$.*

Demonstração: Como $\{\alpha\}$ é compacto e Arg é contínua em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, então assume máximo M e mínimo m globais em $[a, b]$. Estes são únicos, senão vejamos. Suponha $s_{1,2} \in [a, b]$ com $s_1 < s_2$ e $Arg(\alpha(s_1)) = Arg(\alpha(s_2)) = m$ (por exemplo). A hipótese $k > 0$ implica α no sentido anti-horário, donde à esquerda de $\alpha(s_1)\mathbb{R} = \alpha(s_2)\mathbb{R}$. Podemos supor que $\|\alpha'\| \equiv 1$, donde $k(s) = \frac{d}{ds} arg(\alpha'(s))$. Logo, a hipótese $k > 0$ implica uma variação angular de $+2\pi$ entre $\alpha'(s_1)$ e $\alpha'(s_2)$, um absurdo pois α é simples.

É claro que $\alpha \perp n$ em $c, d \in [a, b]$, com $Arg(\alpha(c)) = m$ e $Arg(\alpha(d)) = M$. Suponhamos que haja $s \notin \{c, d\}$ com $\alpha(s) \perp n(s)$. Devido à unicidade, temos $m < Arg(\alpha(s)) < M$. Mas a Proposição 6.1 implica $\{\alpha\}$ à esquerda de $\alpha(s)\mathbb{R}$. Então, ou $\{\alpha\}$ está sobre e no interior do ângulo $\alpha(d)\widehat{O}\alpha(s)$, e portanto não intercepta $\alpha(c)\mathbb{R}$, ou $\{\alpha\}$ está sobre e no interior do ângulo $\alpha(s)\widehat{O}\alpha(c)$, e portanto não intercepta $\alpha(d)\mathbb{R}$. Em qualquer caso, temos um absurdo. Deste modo, $\alpha \perp n$ somente para c e d .

Como $\|\cdot\|$ é contínua e $\{\alpha\}$ é compacto, então assume máximo \mathcal{M} e mínimo μ globais em $[a, b]$. Estes são únicos, senão vejamos. Suponha $s_{1,2} \in [a, b]$ com $s_1 < s_2$ e $\|\alpha(s_1)\| = \|\alpha(s_2)\| = \mu$ (por exemplo). Tome as retas $\alpha'(s_1)\mathbb{R}$ e $\alpha'(s_2)\mathbb{R}$, cuja interseção é denotada por H , e os vértices $\alpha(s_1), \alpha(s_2), H$ e O formam dois triângulos retângulos congruentes, com $\|\overline{OH}\| = h$ hipotenusa e catetos μ e ν . Considerando eixos ortogonais $Ov = \overrightarrow{OH}$ e Ou , com orientação positiva, tais retas são $v = \pm \frac{\nu}{\mu}u + h$. Mas $\{\alpha\}$ está à esquerda de $\alpha'(s_1)\mathbb{R}$ e de $\alpha'(s_2)\mathbb{R}$. Assim, em Ouv temos $v \geq \max\{\pm \frac{\nu}{\mu}u\} + h \geq h > \mu$. Absurdo, pois $\alpha(s_1), \alpha(s_2)$ têm ordenada $\mu^2/h < \mu$ e são pontos de $\{\alpha\}$.

É claro que $\alpha // n$ em $c, d \in [a, b]$, com $\|\alpha(c)\| = \mu$ e $\|\alpha(d)\| = \mathcal{M}$. Suponhamos que haja $s \notin \{c, d\}$ com $\alpha(s) // n(s)$. Devido à unicidade, temos $\mu < \|\alpha(s)\| < \mathcal{M}$. Mas $\{\alpha\}$ está à esquerda de $\alpha'(s)\mathbb{R}$. Usando o sistema Ov (mesma direção e sentido de $\alpha(s)$) e Ou , com orientação positiva, ou $\{\alpha\}$ está abaixo, ou acima, de $\alpha'(s)\mathbb{R}$. Portanto não possui pontos, ou de norma menor, ou de norma maior que $\|\alpha(s)\|$, o que é absurdo. Deste modo, $\alpha // n$ somente para c e d .

c.q.d.

Teorema 6.5 (Teorema de Jordan) *Uma curva fechada $\alpha \subset \mathbb{R}^2$, sem auto-interseções, divide o plano em exatamente duas componentes conexas \mathcal{I} e \mathcal{E} e seu traço é a fronteira de \mathcal{I} e \mathcal{E} . A componente conexa limitada \mathcal{I} é chamada de interior de α e é denotada por $\text{int}(\alpha)$, enquanto que a componente conexa ilimitada \mathcal{E} é chamada de exterior de α e é denotada por $\text{ext}(\alpha)$.*

O Teorema de Jordan é um notável resultado em Geometria Diferencial, cuja prova pode ser encontrada na literatura básica (vide [2], por exemplo).

Teorema 6.6 *Seja $\alpha : [0, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva simples, fechada, convexa p.p.c.a., denota-se por $\dot{\alpha}(s)\mathbb{R}$ a reta tangente a α em $\dot{\alpha}(s)$. Se $k > 0$ então $\mathcal{I} = \text{int}(\alpha) = \bigcap_{\phi \in [0, 2\pi)} \mathcal{S}_\phi^-$, onde ϕ é uma reparametrização adequada de α e \mathcal{S}_ϕ^- indica um semi-plano, à esquerda de $\dot{\alpha}(\phi)\mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja α simples, fechada, convexa contida no plano π . Pelo teorema de Jordan (6.5), temos que $\pi \setminus \{\alpha\} = \mathcal{I} \overset{\circ}{\cup} \mathcal{E}$. Tome a parametrização $\phi \in [0, 2\pi)$ dada na prova do Teorema 6.7, tal que para todo $p \in \{\alpha\}$ existe um único ϕ correspondente a p (pela convexidade de α). Assim, $\pi \setminus \dot{\alpha}(\phi)\mathbb{R} = \mathcal{S}_\phi^+ \overset{\circ}{\cup} \mathcal{S}_\phi^-$ (o sinal + indica à direita). Provaremos que $\mathcal{I} = \bigcap_{\phi \in [0, 2\pi)} \mathcal{S}_\phi^-$.

Cada \mathcal{S}_ϕ^+ só tem pontos de \mathcal{E} , pois pela convexidade, $\{\alpha\}$ está totalmente em $\overline{\mathcal{S}_\phi^-}$, e se houvesse $p \in \mathcal{I} \cap \mathcal{S}_\phi^+$, como \mathcal{I} é limitada, qualquer $q \in \mathcal{E} \cap \mathcal{S}_\phi^+$ e a convexidade de \mathcal{S}_ϕ^+ implicariam que $\overline{pq} \subset \mathcal{S}_\phi^+$, com $\overline{pq} \cap \{\alpha\} \neq \emptyset$, o que é absurdo. Assim, $\mathcal{S}_\phi^+ \subset \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}^c = \mathcal{I} \cup \{\alpha\} \subset \overline{\mathcal{S}_\phi^-} = (\mathcal{S}_\phi^+)^c$. Então $\mathcal{I} \subset \mathcal{I} \cup \{\alpha\} \setminus \{p\} \subset \mathcal{S}_\phi^-$, para ϕ arbitrário. Portanto, $\mathcal{I} \subset \bigcap_{\phi \in [0, 2\pi)} \mathcal{S}_\phi^-$.

Reciprocamente, suponha $P \in \bigcap_{\phi \in [0, 2\pi)} \mathcal{S}_\phi^-$. Se $P \in \mathcal{E}$, tome $p \in \{\alpha\}$ que realiza a distância entre P e $\{\alpha\}$, $\text{dist}(P, \{\alpha\})$, donde \overrightarrow{pP} é normal a $\dot{\alpha}$ em p . Em particular, $P \in \mathcal{S}_\phi^-$, para algum ϕ correspondente a p . Mas ϕ é crescente, o que implica que α está no sentido anti-horário. Considere os eixos ortogonais Ou e Ov de origem p tais que Ou esteja na direção e sentido de $\dot{\alpha}(\phi)$ e $\{Ou, Ov\}$ tenha a mesma orientação (positiva) dos eixos cartesianos de \mathbb{R}^2 . Por construção, Ov coincide com a reta que passa por p e P .

Suponha, por absurdo, que P tenha coordenada positiva em Ov . Como α é gráfico de uma função localmente em p e α está orientada no sentido anti-horário, existem pontos de \mathcal{I} que pertencem à região que está acima deste gráfico. Como \mathcal{I} é limitado, ele não pode conter todo o eixo Ov , de modo que a partir de uma certa altura positiva, em relação a Ov , só haverá pontos de \mathcal{E} em Ov . Em particular, obtemos um ponto da curva α sobre

Ov , digamos Q . Neste caso, teríamos P acima de Q em relação a Ov , o que contraria o fato de p realizar a distância entre P e α .

Portanto, P tem coordenada negativa em Ov , ou seja, $P \in \mathcal{S}_\phi^+$. Absurdo, pois $\mathcal{S}_\phi^- \cap \mathcal{S}_\phi^+ = \emptyset$. Se $P \in \{\alpha\}$ então corresponde a algum $\phi \in [0, 2\pi)$ o que implica $P \in \dot{\alpha}(\phi)\mathbb{R}$, disjunta de $\mathcal{S}_\phi^- \cup \mathcal{S}_\phi^+$. Absurdo, pois $P \in \bigcap_{\phi \in [0, 2\pi)} \mathcal{S}_\phi^-$.

c.q.d

Lema 6.3 *Sejam $h, \tilde{h} : [-\pi, \pi] \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ com $\tilde{h}'' + \tilde{h} > h'' + h$, e $\tilde{h}(0) = h(0)$, $\tilde{h}'(0) = h'(0)$. Então vale $\tilde{h} > h$ em todo $(-\pi, \pi)^*$, e $\tilde{h} \geq h$ em $\{\pm\pi\}$.*

Demonstração: Seja $f(\phi) = \frac{(\tilde{h}-h)(\phi)}{\sin \phi}$ em $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$. Temos $\lim_{\phi \rightarrow 0} f(\phi) = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{(\tilde{h}'-h')(\phi)}{\cos \phi} = 0$, e $f'(\phi) = \frac{(\tilde{h}'-h')\sin \phi - (\tilde{h}-h)\cos \phi}{\sin^2 \phi} = \csc^2 \phi \cdot \int_0^\phi ((\tilde{h}-h)'' + (\tilde{h}-h))\sin \phi d\phi > 0$ em todo $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$. Como existe $\lim_{\phi \rightarrow 0} f'(\phi) = f'(0) > 0$ e f é crescente, então $f(\phi)\sin \phi > 0$ em $(-\pi, \pi)^*$, donde a tese.

c.q.d.

Observação 6.4 No Lema 6.3, considere as hipóteses adicionais (HA): $h(\pi) = h(-\pi)$, $h'(\pi) = h'(-\pi)$, $\tilde{h}(\pi) = \tilde{h}(-\pi)$ e $\tilde{h}'(\pi) = \tilde{h}'(-\pi)$. Neste caso, segue-se $\tilde{h} > h$ em $\{\pm\pi\}$. De fato, se por exemplo tivéssemos $\tilde{h}(\pi) = h(\pi)$, então $\tilde{h}(-\pi) = h(-\pi)$ pelas HA. Assim, por L'Hopital podemos definir $f(\pm\pi) = (h' - \tilde{h}')(\pm\pi)$ continuamente nestes pontos. Agora, da demonstração anterior temos $f(\phi)\sin \phi > 0$ em $(-\pi, \pi)^*$, donde $(h' - \tilde{h}')(\pm\pi) \geq 0$. Também, $f(\phi) = \frac{(\tilde{h}-h)(\phi)}{\sin \phi}$, e das hipóteses adicionais $(h' - \tilde{h}')(\pm\pi) = 0$. Mas f é estritamente crescente com $f(0) = 0$. Ou seja, deveríamos ter $f(\pi) > 0$, o que é uma contradição.

Teorema 6.7 *Sejam $\alpha, \tilde{\alpha}$ curvas simples, fechadas, convexas p.p.c.a. com $p = \alpha(0) = \tilde{\alpha}(0)$ e $\alpha'(0) = \tilde{\alpha}'(0)$. Se $k > \tilde{k} > 0$, então $\{\alpha\}$ está no interior de $\tilde{\alpha}$ (a menos de um ponto de tangência).*

Demonstração: Temos $\|(\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|})'\| = \|\frac{\alpha''}{\|\alpha'\|} - \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{\|\alpha'\|^3} \alpha'\| = k\|\alpha'\| > 0$. Defina $\phi(t) = \int_0^t k\|\alpha'\| d\tau = \int_0^t k d\tau$, donde $\alpha(t(\phi)) = \alpha(\phi)$ é tal que $\frac{\alpha'(\phi)}{\|\alpha'(\phi)\|} = (-\sin \phi, \cos \phi)$. Assim, $\alpha(\phi) = \underbrace{-\langle \alpha, -n(\phi) \rangle}_{=h(\phi)} + \underbrace{\langle \alpha(\phi), t(\phi) \rangle}_{=\lambda(\phi)} t(\phi)$, donde

$$\alpha(\phi) = h(\phi)(\cos \phi, \sin \phi) + \lambda(\phi)(-\sin \phi, \cos \phi). \quad (6.14)$$

Derivando (6.14) com respeito a ϕ , temos $\dot{\alpha} = (\dot{h}-\dot{\lambda})(\cos \phi, \sin \phi) + (h+\dot{\lambda})(-\sin \phi, \cos \phi)$. Logo, $\dot{h} = \dot{\lambda}$, pois $\dot{\alpha}/\|\dot{\alpha}\| = (-\sin \phi, \cos \phi)$. Então $\dot{\alpha} = (h + h'')(-\sin \phi, \cos \phi)$, donde $\ddot{\alpha} = (h + h'')(-\cos \phi, -\sin \phi) + (h + h'')(-\sin \phi, \cos \phi) \Rightarrow k(\phi) = \frac{\det(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})}{\|\dot{\alpha}\|^3}(\phi) = \frac{1}{h+\tilde{k}}(\phi) >$

$\tilde{k}(\phi) = \frac{1}{\tilde{h} + \tilde{h}''}(\phi)$. Como $\tilde{h} + \tilde{h}'' > h + h''$, $\tilde{h}(0) = h(0)$ e $\tilde{h}'(0) = \tilde{h}(0)$, do Lema 6.3 e Observação 6.4, temos $\tilde{h} > h, \forall \phi \in [-\pi, \pi]^*$. Então, a reta tangente a $\tilde{\alpha}$ em cada ϕ dista mais da origem 0 que a reta tangente a α no mesmo ϕ onde, sem perda de generalidade, tomamos $0 \in \text{int}(\alpha)$. Em vista do Teorema 6.6, concluímos que $\text{int}(\alpha) \subset \text{int}(\tilde{\alpha})$. Assim, a menos de $\phi = 0$, temos $\{\alpha\} \subset \text{int}(\tilde{\alpha})$.

c.q.d.

Referências Bibliográficas

- [1] L.V. Ahlfors, Complex Analysis, 2^a ed, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [2] H. Alencar, W. Santos, Geometria das curvas planas. Coleção: 24^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, 2003.
- [3] A.D. Alexandrov, Uniquess theorems for surfaces in the large, Vesrnik Leningrad University **19(13)** (1958), 5–8.
- [4] M. Athanassenas, A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary, J. für Math. **377** (1987), 97–107.
- [5] M. da Silva, *Um problema variacional para superfícies de curvatura média constante com bordo livre*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, São Paulo, 2002.
- [6] R. Finn and T.I. Vogel, On the volume infemum for liquid bridges, Zeit. Anal. Anw. **11(1)** (1992), 3–23.
- [7] B. Gidas, Wei-Ming Ni and L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, Commun. Math. Phys. **68(2)** (1979), 209–243.
- [8] H. Karcher, Differentialgeometrie I, Vorlesungsmanuskripte, Bonn, 1975.
- [9] J. McCuan, Constant mean curvature surfaces with boundary in a wedge, preprint, 1995.
- [10] J. McCuan, Symmetry via spherical reflection and spanning drops in a wedge, Pacific. J. Math. **180(2)** (1997), 291–323.
- [11] J. McCuan, Symmetry via spherical reflection, J. Geom. Anal. **10(3)** (2000), 545–564.
- [12] S. Park, Every ring type spanner in a wedge is spherical, Math. Ann. **332(3)** (2005) 475–482.
- [13] R.M. Schoen, Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces, J. Diff. Geom. **18** (1983), 791–809.
- [14] J. Serrin, A symmetry problem in potential theory and embeddedness of minimal surfaces, J. Diff. Geometry **18** (1983), 791–809.
- [15] D. Strube, Stability of a spherical and a catenoidal liquid bridge between two parallel plates in the absence of gravity, Microgravity Sci. Technol **1** (1992), 56–57.
- [16] T. I. Vogel, Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes, SIAM J. Appl. Math. **47** (1987), 516–525.
- [17] H.C. Wente, The symmetry of sessile and Pendat drops, Pacific J. Math. **88(2)** (1980), 387–397.
- [18] H.C. Wente, A counterexample to a conjecture of H. Hopf, Pacific J. Math. **121(1)** (1986), 193–243.